

## Álgebra de Boole

Postulados y teoremas

Dentro de las álgebras de Boole, es de utilidad definir la bivalente, es decir compuesta por sólo dos elementos. Así, el álgebra es un conjunto de elementos binarios relacionados entre sí mediante las operaciones lógicas producto  $[.]$  y suma  $[+]$ , que cumplen con los siguientes postulados (las letras  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , etc., indican variables binarias):

### 1) Existe el Elemento Identidad

$$a + 0 = a$$

$$a \cdot 1 = a$$

### 2) Las dos operaciones cumplen con la Propiedad Conmutativa

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

### 3) Propiedad distributiva

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

$$a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$$

### 4) Complementación o Inversión Lógica

$$a + a' = 1$$

$$a \cdot a' = 0$$

Algunos teoremas importantes son:

1) Dualidad: Toda igualdad lógica sigue siendo válida si se intercambian los operadores (+ y .) y los elementos de identidad (0 y 1). La simetría de los postulados demuestra este teorema.

2) El álgebra es un conjunto cerrado; es decir, los resultados de aplicar las operaciones lógicas a las variables, pertenecen al álgebra.

3) En el álgebra se cumple que

$$a + 1 = 1$$

$$a \cdot 0 = 0$$

4) Ley de Idempotencia

$$a + a = a$$

$$a \cdot a = a$$

5) Ley de involución

$$(a')' = a$$

6) Las operaciones lógicas son asociativas

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \cdot (b \cdot c) = a \cdot (b \cdot c)$$

7) Absorción:

$$a = a + (a \cdot b)$$

$$a = a \cdot (a + b)$$

8) Leyes de De Morgan

$$(a + b + c + d + \dots + n)' = a' \cdot b' \cdot c' \cdot d' \cdot \dots \cdot n'$$

$$(a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot \dots \cdot n)' = a' + b' + c' + d' + \dots + n'$$

Con excepción del teorema 1, siempre aparecen dos expresiones, obsérvese que la segunda es la dual de la primera. Se recomienda al alumno demostrar estos teoremas en forma algebraica basándose en los postulados.

Aún cuando las operaciones + y . son distributivas entre sí, de ahora en más prescindiremos de los paréntesis que encierran los productos lógicos. Además el símbolo del producto no se indicará en lo sucesivo. De esta forma, por ejemplo, la expresión

$$a + (b \cdot c) \cdot (d + e)$$

se escribirá

$$a + b c (d + e)$$

### Funciones lógicas

Una función lógica es una variable binaria que depende de otras variables binarias relacionadas entre sí por las operaciones lógicas. Una función lógica se nota de la siguiente manera:

$$f(a, b, c, \dots, n) = \{\text{expresión lógica que involucra a las variables } a, b, c, d, \dots, n\}$$

La función adoptará el valor 0 o 1 de acuerdo a la expresión y al valor determinado de las variables. Por ejemplo:

$$f(a, b, c) = a b' + a c$$

Se trata de una función de tres variables a la cual le corresponde la siguiente Tabla de Verdad, ver figura 1. Puede decirse que la tabla de verdad es otra forma de expresar una función lógica.

| C | B | A | F(a, b, c) |
|---|---|---|------------|
| 0 | 0 | 0 | 0          |
| 0 | 0 | 1 | 1          |
| 0 | 1 | 0 | 0          |
| 0 | 1 | 1 | 0          |
| 1 | 0 | 0 | 0          |
| 1 | 0 | 1 | 1          |
| 1 | 1 | 0 | 0          |
| 1 | 1 | 1 | 1          |

Figura 1