Matrices

5. Relación con el problema de la semana

Relación con el problema: "Operaciones eficientes"

El problema de esta semana: "Operaciones eficientes", estaba estrechamente vinculado con las operaciones con matrices, aunque no lo supiéramos al inicio. Aquellos que hayan estudiado matrices en alguna etapa de su formación, quizás detectaron el vínculo, aunque no se esperaba que todos lo hicieran. Por ello, en lo que sigue, vamos a tratar de mostrar cómo podría resolverse optimizando el cómputo.

Recordemos los datos del problema.

La información nutricional de los frutos secos se muestra a continuación:

	Almendras	Castañas	Nueces
Proteínas (g/taza)	26.2	21	10.1
Carbohidratos (g/taza)	40.2	44.8	14.3
Grasas (g/taza	71.9	63.5	82.8

donde una taza contiene 250 gramos de producto. La composición de los mix de 2.5 kilogramos del productor se muestra a continuación:

	Mix 1 "Entrenamiento"	Mix 2 "Recreo"	Mix 3 "Energía"
Almendras (tazas)	6	3	3
Castañas (tazas)	3	6	1
Nueces (tazas)	1	1	6

En este problema, podemos pensar que hay dos matrices, por los menos, involucradas:

- una, contiene la información nutricial de cada fruto seco;
- otra, contiene la cantidad de fruto seco que lleva cada mix.

Llamemos N a la matriz que contiene la información nutricial de cada fruto seco y C a la que contiene la cantidad de fruto seco que lleva cada mix. Es muy importante que ambas matrices refieren a la información del problema en la misma unidad de referencia: gramos y tazas. Si este no fuera el caso, habría que hacer la conversión pertinente.

$$N = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Almendras} & \text{Castañas} & \text{Nueces} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 26.2 & 21 & 10.1 \\ 40.2 & 44.8 & 14.3 \\ 71.9 & 63.5 & 82.2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Proteínas} \\ \leftarrow \text{Carbohidratos} \\ \leftarrow \text{Grasas} \end{array} \end{array}$$

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Mix 1} & \text{Mix 2} & \text{Mix 3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Almendras} \\ \leftarrow \text{Castañas} \\ \leftarrow \text{Nueces} \end{array} \end{array}$$

Notemos lo que representan las filas y las filas y las columnas; la disposición no es aleatoria. Lo que queremos es, precisamente, usar la combinación de frutos secos dada por la matriz C con el valor nutricional de cada uno dado en la matriz N, para obtener el valor nutricional de cada mix.

Observemos que eso es posible con el producto de N y C, en ese orden, pues, por la definición del producto de matrices, estaríamos multiplicando y sumando los elementos de cada fila de N (las proteínas de cada fruto seco, para la fila 1, por ejemplo) con las respectivas tazas que se usan de cada fruto seco para armar cada mix (el mix 1, para la columna 1) y eso es precisamente lo que buscamos.

$$N \cdot C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Almendras} & \text{Castañas} & \text{Nueces} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 26.2 & 21 & 10.1 \\ 40.2 & 44.8 & 14.3 \\ 71.9 & 63.5 & 82.2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Proteínas} \\ \leftarrow \text{Carbohidratos} \\ \leftarrow \text{Grasas} \end{array} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Mix 1} & \text{Mix 2} & \text{Mix 3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Almendras} \\ \leftarrow \text{Castañas} \\ \leftarrow \text{Nueces} \end{array} \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Mix 1} & \text{Mix 2} & \text{Mix 3} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 230.3 & 214.7 & 160.2 \\ 389.9 & 403.7 & 251.2 \\ 704.7 & 679.5 & 776 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Proteínas} \\ \leftarrow \text{Carbohidratos} \\ \leftarrow \text{Grasas} \end{array} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 230.3 & 214.7 & 160.2 \\ 389.9 & 403.7 & 251.2 \\ 704.7 & 679.5 & 776 \end{pmatrix}.$$

La matriz obtenida contiene el valor nutricional de cada mix (columnas: mix 1, 2 y 3) por cada uno de las categorías de interés (filas: proteínas, carbohidratos y grasas). Esos valores, naturalmente, están dados en gramos, ya que la matriz N tenía información de dada en gramos por tazas, y la matriz C, tazas.

No debemos olvidar que las proporciones de cada mix estaban dados en términos de 10 tazas, pues el embolse inicial que hacía el productor era de 2.5 kilogramos (10 tazas de 250 gramos cada una).

Si quisiéramos información nutricional para empaques de menor peso, bastaría con multiplicar esa matriz por la constante adecuada. Por ejemplo, si empaca los mix en paquetes de 50 gramos, habrá que multiplicar la matriz anterior por el factor $1/50$, pues es posible armar 50 bolsas de 50 gramos cada una con el paquete de 2.5 kilogramos. Es decir:

$$N \cdot C \cdot \frac{1}{50} = \begin{pmatrix} 230.3 & 214.7 & 160.2 \\ 389.9 & 403.7 & 251.2 \\ 704.7 & 679.5 & 776 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{50}$$
$$= \begin{pmatrix} 4.606 & 4.294 & 3.204 \\ 7.798 & 8.074 & 5.024 \\ 14.094 & 13.59 & 15.52 \end{pmatrix}.$$

De esta forma, puede verse fácilmente que, para un empaque de 50 gramos:

- el mix 1 aporta 4.606 gramos de proteínas, 7.798 gramos de carbohidratos y 14.904 gramos de grasas;
- el mix 2 aporta 4.294 gramos de proteínas, 8.074 gramos de carbohidratos y 13.59 gramos de grasas;
- el mix 3 aporta 3.204 gramos de proteínas, 5.024 gramos de carbohidratos y 15.52 gramos de grasas.

¿Por qué llamamos de “operaciones eficientes” al problema de esta semana?

Porque ahora que planteamos la estructura de la solución en este ejemplo imaginario, ¡podemos tratar cualquier otro problema análogo a este, pero que involucre más (muchos más) elementos! Es decir, extender la solución a casos más generales es prácticamente algo sin costo adicional.

Por ejemplo,

- si N representa a una matriz que contiene la información nutricional (por filas) de una lista de ingredientes (por columnas),
- si C representa a una matriz que contiene la proporción de cada ingrediente (por filas) que llevan ciertas preparaciones (por columnas),
- entonces $N \cdot C$ es la matriz que contiene la información nutricional de cada ingrediente (por filas) de cada una de las preparaciones (por columnas).

Si C no tuviera la proporción (como ocurrió en nuestro ejemplo), habría que corregir esa última cuenta con una constante adecuada (como hicimos en nuestro ejemplo).

El punto más importante es, precisamente, ¡que nuestro problema puede tener la dimensión que quiera! Total, ya sabemos cuál es su solución. Y lo más tedioso, que será el cómputo, lo hará un dispositivo adecuado.
Esto aplica, de hecho, a problemas más generales que no traten únicamente contextos alimenticios como este. Por ejemplo, puede consultarse en la web de qué se trata la matriz insumo-producto de un país y completar su lectura una vez terminados los contenidos de esta semana (ecuaciones matriciales).

Por último, para responder la pregunta relacionada con el pan dulce, podemos usar lo que sabemos de vectores. Recordemos que la cantidad de cada mix que lleva una receta grande de pan dulce es 100 gramos del mix 1, 300 del mix 2 y 200 del mix 3. Llamemos g al vector dado por las grasas que aporta cada mix por cada 50 gramos

$$g = (14.094, 13.59, 15.52),$$

que no es otra cosa más que la tercera fila de la matriz que armamos para responder lo anterior.

Armemos un vector con las cantidades de esos paquetes de 50 gramos que deberíamos usar para el pan dulce.

Llamemos p al vector de estas cantidades:

$$p = (2, 6, 4),$$

y notemos que esas son sus componentes pues se necesitan 2 paquetes del mix 1, 6 del mix 3 y 4 del mix 2 para el pan dulce, pues cada uno de esos paquetes es de 50 gramos.

Entonces, la cantidad total de grasas que aportarán estos frutos secos al pan dulce estará dada por el producto escalar de esos vectores

$$p \cdot g = (2, 6, 4) \cdot (14.094, 13.59, 15.52) = 171.808.$$

Es decir, 171.808 gramos de grasas. Esto, de nuevo, puede ser generalizado para casos de dimensión mayor.