



REPASO DE VECTORES

GRM Semestre 2013-1

Basado en material de

Serway-Jewett, Physics, Chapters 3, 6,10; Volume 1.

Bauer-Westfall, Física para ingeniería y ciencias, caps. 1, 5 y 10, Volumen 1

Tipler-Mosca, Física para la ciencia y la tecnología, Volumen 1

Ohanian-Markert, Física para Ingeniería y Ciencias, cap. 3 Volumen 1

Vectores y Escalares

- Una cantidad ***escalar*** se encuentra completamente especificada por un valor numérico con unidades apropiadas y no posee dirección.
- Una cantidad ***vectorial*** está descrita por completo por un valor numérico con unidades apropiadas y una dirección.

VECTOR

- Los vectores son descripciones matemáticas de cantidades que tienen tanto magnitud como dirección.
- Los vectores tienen un punto inicial (cola) y un punto final (punta o cabeza)



Notación Vectorial

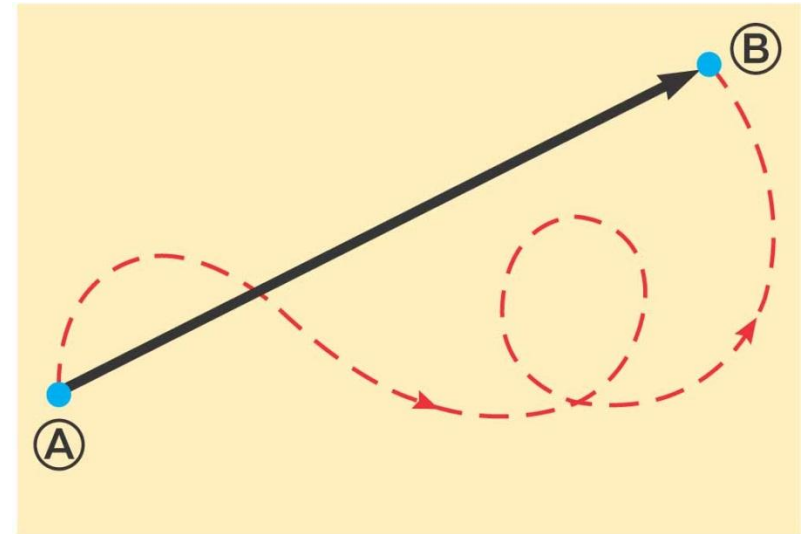
- Con una flecha encima o con **negritas**:

A \vec{A}

- Se emplean letras itálicas o entre un par de líneas paralelas cuando se refiere a la magnitud del vector: *A* o $|\mathbf{A}|$
- La magnitud de un vector, también conocida como tamaño o longitud, posee unidades físicas; y es siempre una cantidad positiva.

Ejemplo de un Vector

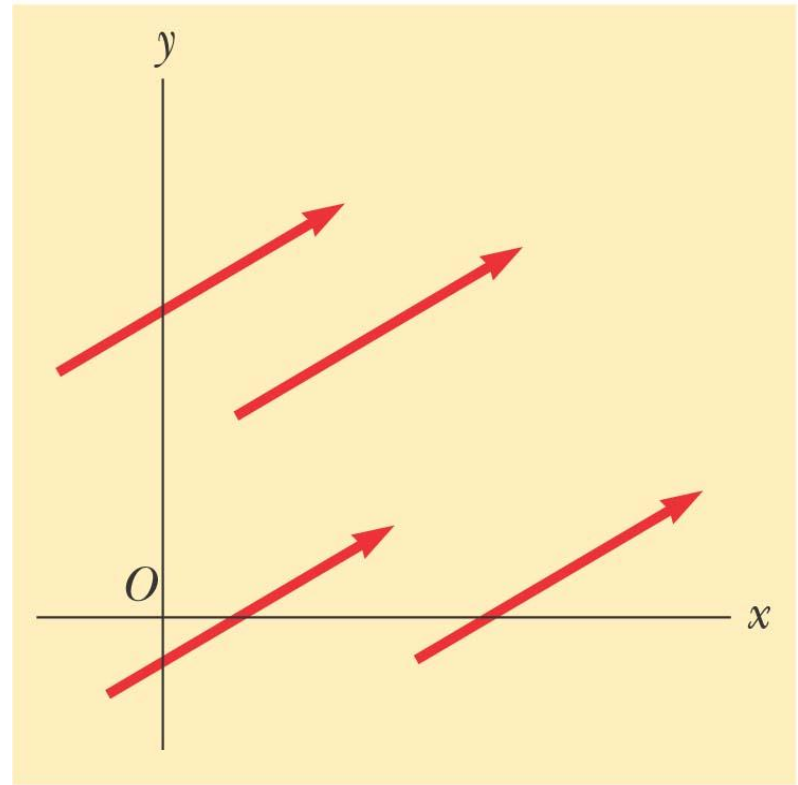
- Una partícula viaja de A a B a lo largo de una trayectoria mostrada por la línea punteada
 - La *distancia* que se viaja es un escalar
 - El **desplazamiento** es la línea sólida desde A a B
 - El desplazamiento es independiente de la trayectoria que se tome entre los dos puntos.
 - El **desplazamiento** es un **vector**.



© 2004 Thomson/Brooks Cole

Igualdad de dos vectores

- Dos vectores son **iguales** si poseen la misma magnitud y la misma dirección.
- $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ si $A = B$ y apuntan a lo largo de líneas paralelas
- Todos los vectores mostrados a continuación son iguales



© 2004 Thomson/Brooks Cole

[Suma de vectores]

- En la suma dos vectores debe tomarse en cuenta sus direcciones.
- Las unidades de los vectores deben ser las mismas.

Se emplean dos métodos de suma:

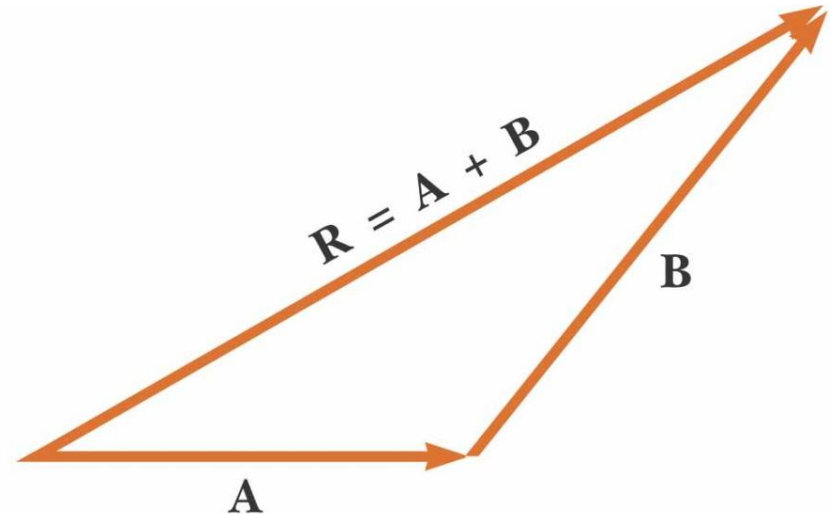
- Métodos gráficos
 - Se requieren dibujos a escala
- Métodos algebraicos o por componentes
 - Más convenientes cuando se manejan varios vectores y en 3-D

[Suma grafica de vectores]

- Seleccionar una escala.
- Dibujar el primer vector con la longitud adecuada, en la dirección especificada con respecto a sistema de coordenadas.
- Dibujar el siguiente vector, (también con la longitud apropiada, en la dirección especificada con respecto al sistema de coordenadas), cuyo origen sea la punta del primer vector.

Suma grafica de vectores, continuación

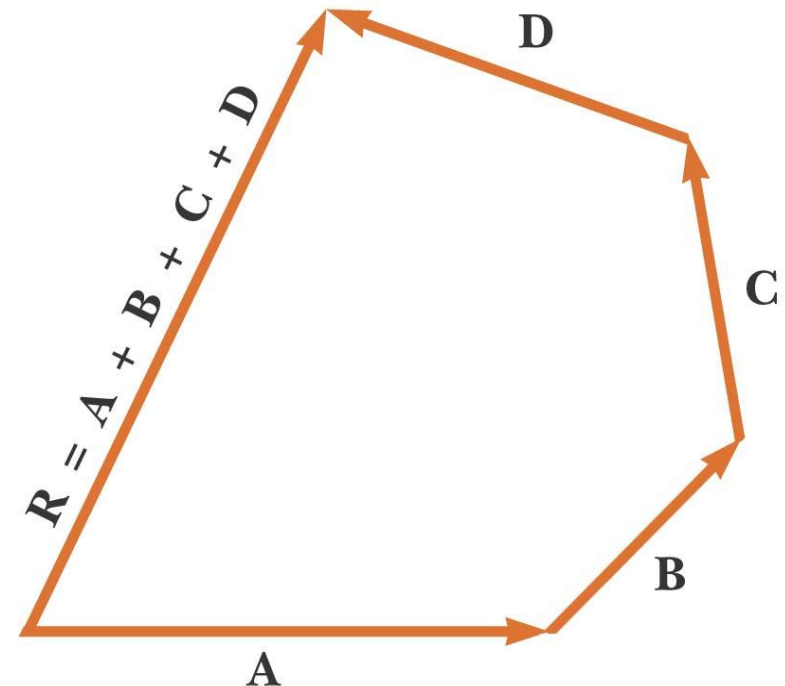
- Continúe dibujando los vectores a sumar del modo “punta (antecesor) –cola (sucesor)”
- El **vector resultante** se dibuja a partir del origen del primer vector (cola) a final del último vector (punta)
- Medir la longitud de **R** y su ángulo (regla y transportador)



© 2004 Thomson/Brooks Cole

Suma grafica de vectores, fin.

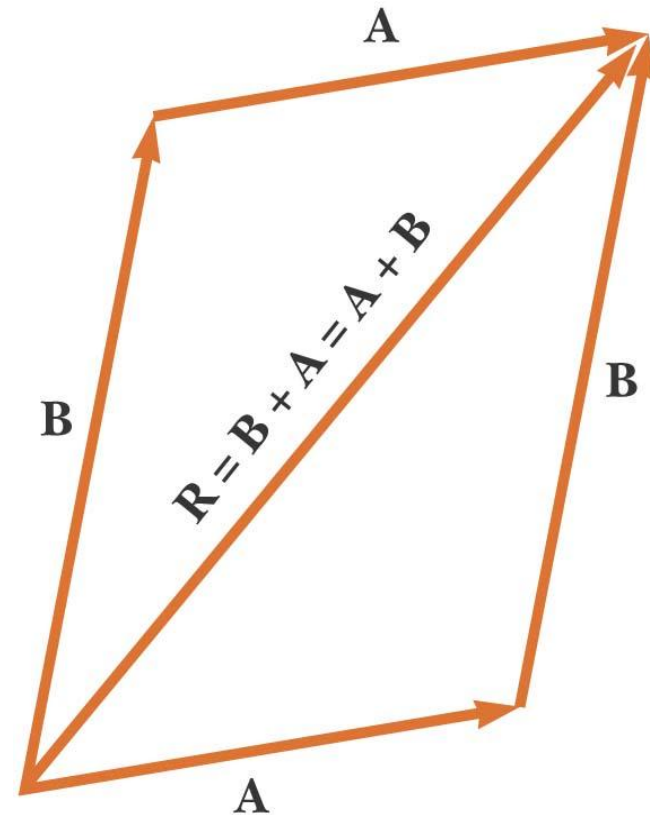
- Para varios vectores se repite el proceso hasta incluir todos los vectores.
- El vector resultante se dibuja desde el origen del primer vector al final del último vector.



© 2004 Thomson/Brooks Cole

[Reglas para Suma de vectores]

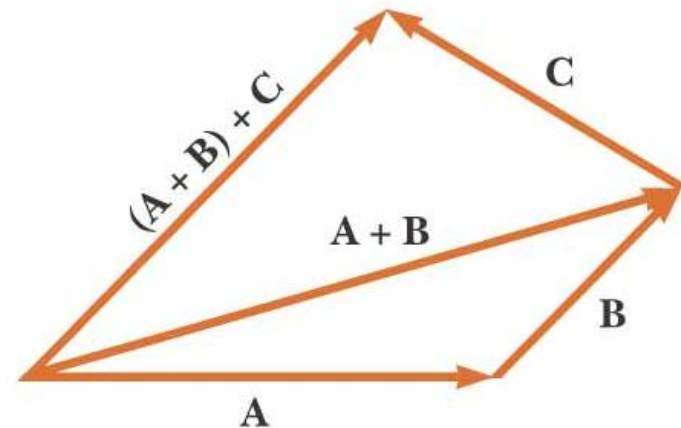
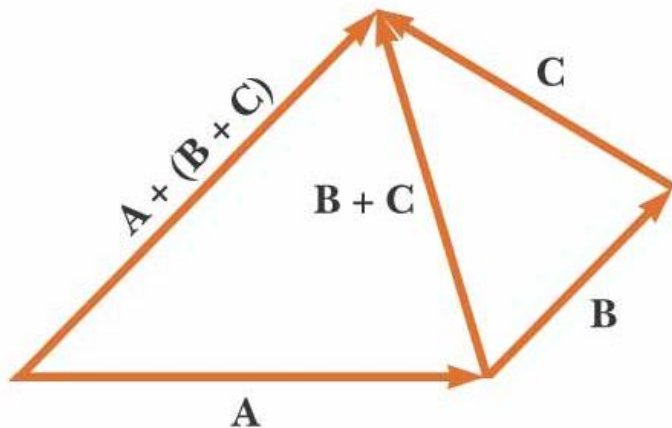
- La suma es independiente del orden de adición de vectores
 - Ley ***conmutativa de la adición***
 - **$A + B = B + A$**



© 2004 Thomson/Brooks Cole

Reglas para Suma de vectores

- Cuando se suman 3 o más vectores, la suma es independiente del modo en el cual se agrupan los vectores:
Propiedad Asociativa de la Suma $(A + B) + C = A + (B + C)$



© 2004 Thomson/Brooks Cole

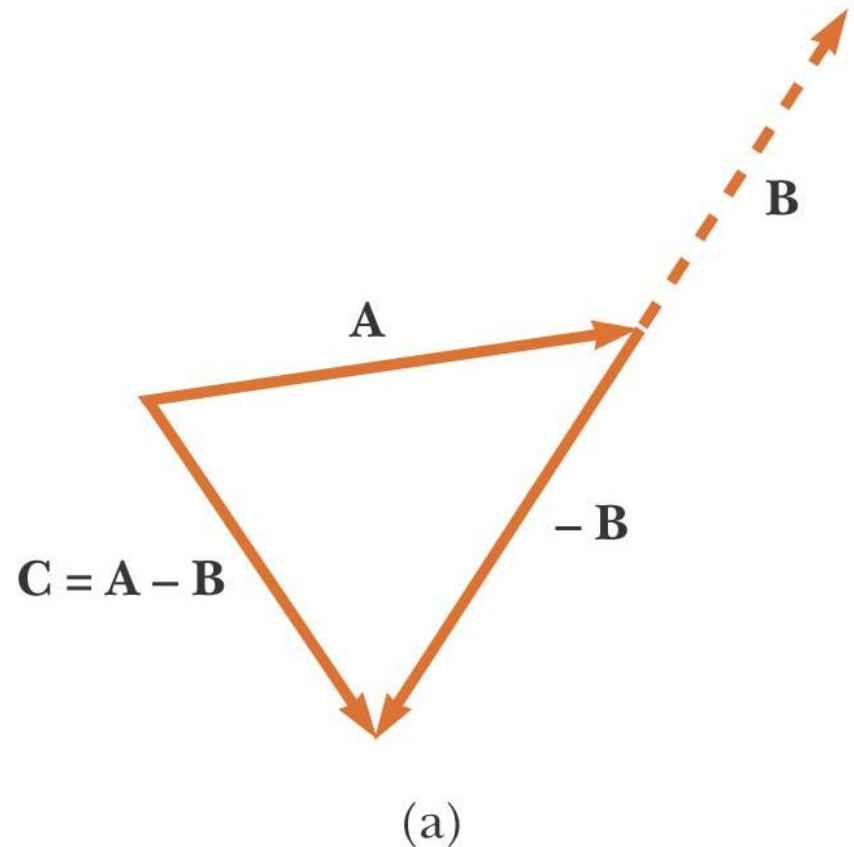
- Recuerde: en la suma de vectores, todos los vectores deben tener las mismas unidades y ser del mismo tipo:
 - No se pueden medir, por ej. desplazamientos con fuerzas.

Negativo de un Vector

- Se define el negativo de un vector como aquel que sumado con el vector original, da como resultante cero.
 - Se representa como $-\mathbf{A}$
 - $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = 0$
- El negativo de un vector posee la misma magnitud que el vector original, pero apunta en dirección opuesta.

Resta de Vectores

- Es un caso especial de la adición.
- Si se quiere restar $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, se puede emplear $\mathbf{A} + (-\mathbf{B})$
- Y continuar con el procedimiento usual de adición de vectores



© 2004 Thomson/Brooks Cole

OJO: Hay un ejercicio para practicar

Multiplicación y División de un Vector por un Escalar

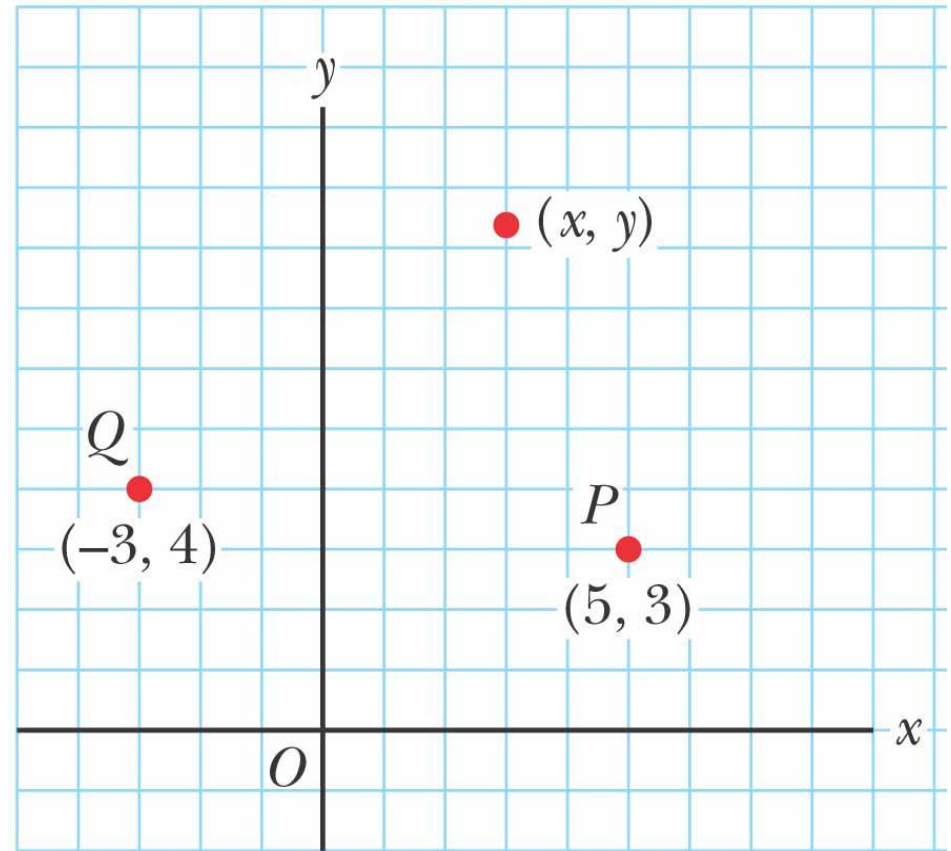
- La resultante es un vector. Su magnitud se multiplica o divide por un escalar.
- Si el escalar es positivo, la dirección del vector resultante es la misma que la del vector original: $(m) \times (\mathbf{A}) = m\mathbf{A}$;
 $(5) \times (\mathbf{A}) = 5\mathbf{A}$
- Si el escalar es negativo, la dirección del vector resultante es la opuesta que la del vector original: $-1/3 (\mathbf{A}) = -1/3\mathbf{A}$

Sistemas de coordenadas

- Se emplean para describir la posición de un Punto en el espacio
- Un sistema de coordenadas consta de
 - Un punto fijo de referencia denominado origen
 - Ejes específicos con nombre y escala
 - Directrices sobre la forma de como ubicar un punto relativo al origen y los ejes.

Sistema de Coordenadas Cartesianas

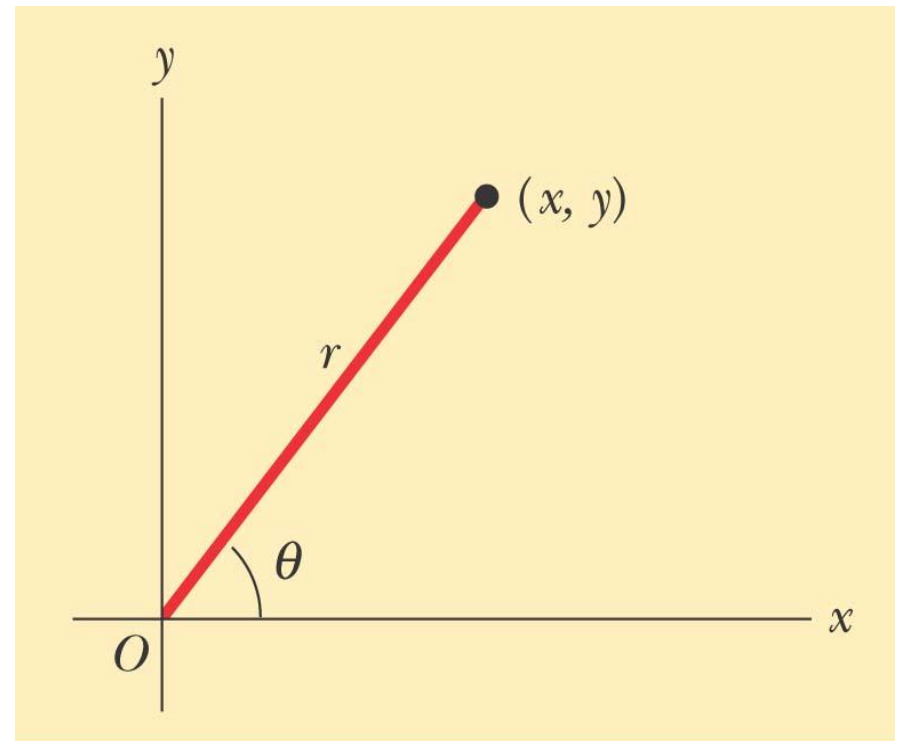
- Llamado también sistema de coordenadas rectangulares
- Los ejes x - and y - se intersectan en el origen
- Los puntos se etiquetan como (x, y)



© 2004 Thomson/Brooks Cole

Sistema de Coordenadas Polares

- Se muestra el origen y un eje de referencia
- Un punto a una distancia r desde el origen en la dirección del ángulo θ , medido desde la línea de referencia
- Los puntos son identificados como (r, θ)



Cambio de coordenadas Polares lineales a coordenadas Cartesianas

- En base a la formación de un triángulo rectángulo a partir de r y θ ,

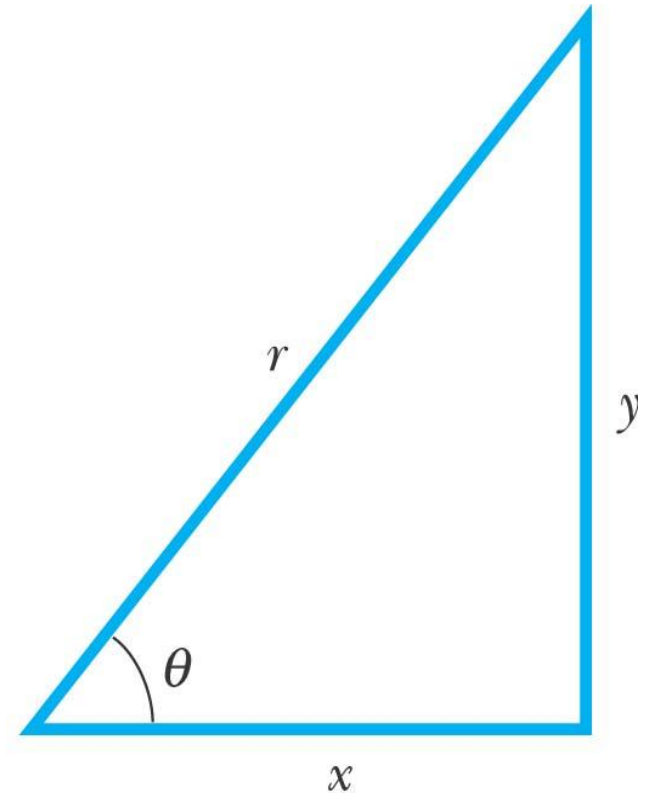
entonces:

- $x = r \cos \theta$
- $y = r \sin \theta$

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$



(b)

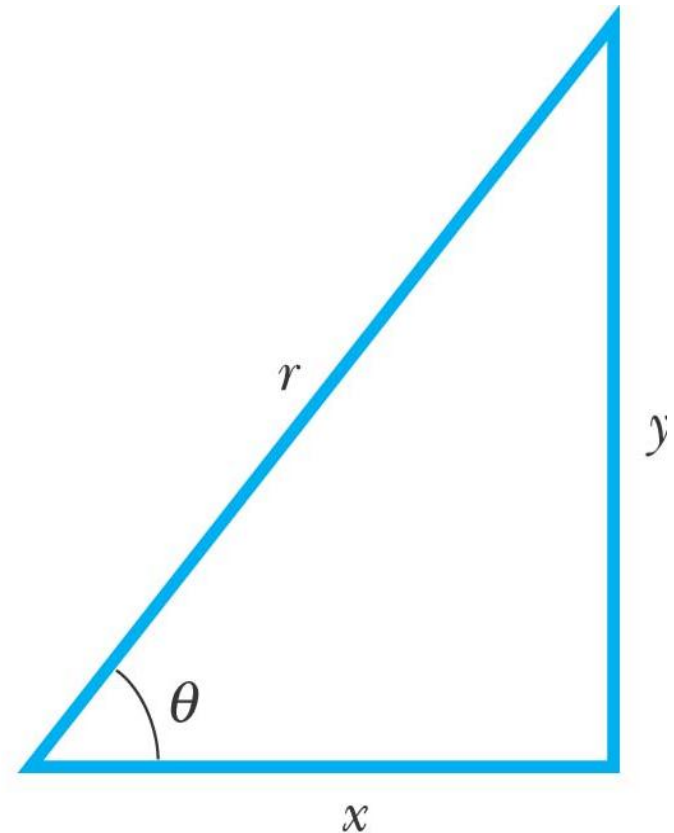
Cambio de coordenadas cartesianas a polares

- r es la hipotenusa y θ es el ángulo

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

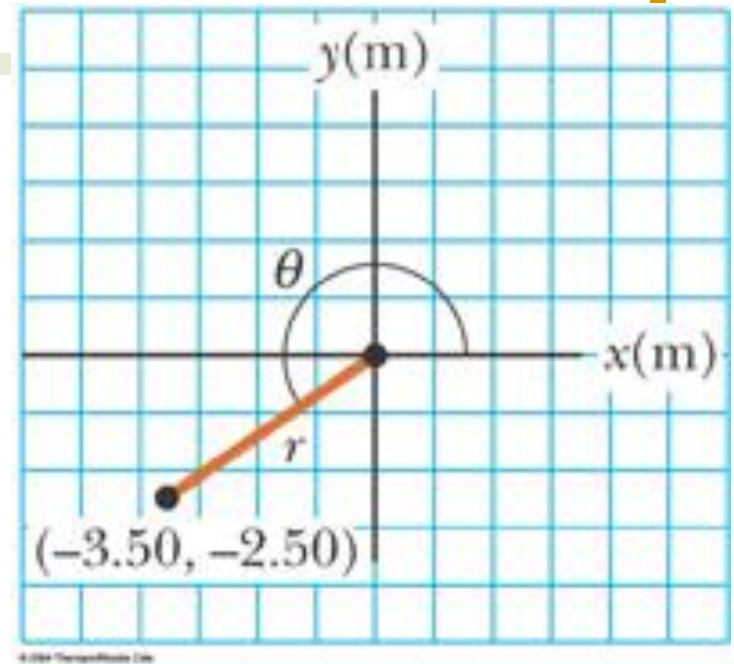
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- θ debe ser medido desde el eje positivo x para que las ecuaciones anteriores sean válidas.



[Ejemplo

- Las coordenadas cartesianas de un punto xy sobre el plano son $(x,y) = (-3.50, -2.50)$ m. Encuentre las coordenadas polares para este punto.
- **Solución:**



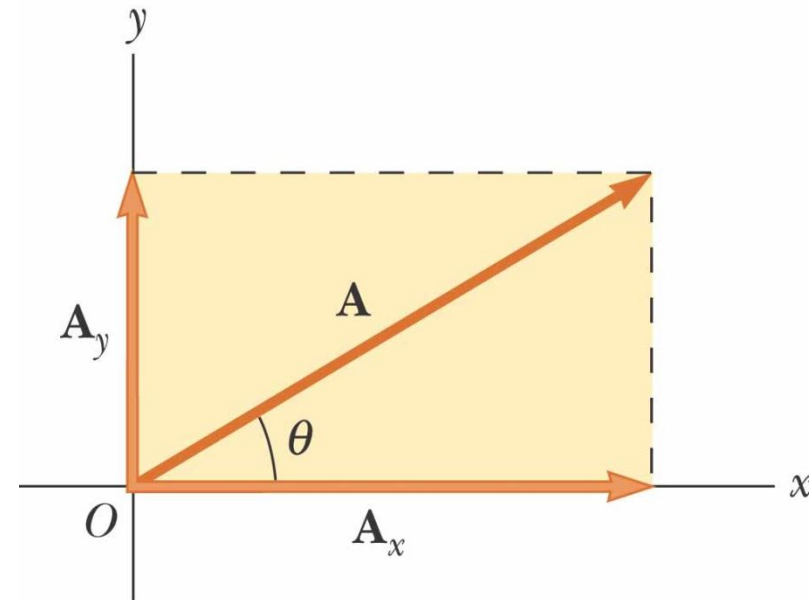
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3.50 \text{ m})^2 + (-2.50 \text{ m})^2} = 4.30 \text{ m}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-2.50 \text{ m}}{-3.50 \text{ m}} = 0.714$$

$$\theta = 216^\circ$$

Componentes de un Vector

- **Componente** significa “parte”.
- Las **componentes rectangulares** son proyecciones a lo largo de los ejes x , y .
- Los **vectores componentes** son los vectores que sumados (vectorialmente) dan la resultante.



(a)

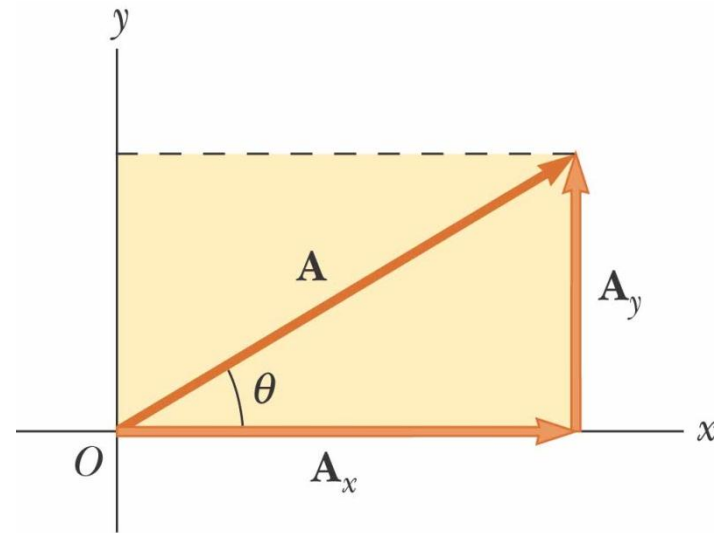
© 2004 Thomson/Brooks Cole

- A_x y A_y son los **vectores componentes** de A
- A_x y A_y son escalares, y se les conoce como **componentes rectangulares** de A

Componentes de un Vector

- La componente rectangular x de un vector es su proyección a lo largo del eje x .

$$A_x = A \cos \theta$$



- La componente rectangular y de un vector: su proyección a lo largo del eje y .

$$A_y = A \sin \theta$$

Componentes de un Vector

- Las ecuaciones previas son válidas sólo si θ ***se mide con respecto al eje x positivo.***
- Las componentes son los catetos del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es **A**

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{A_y}{A_x}$$

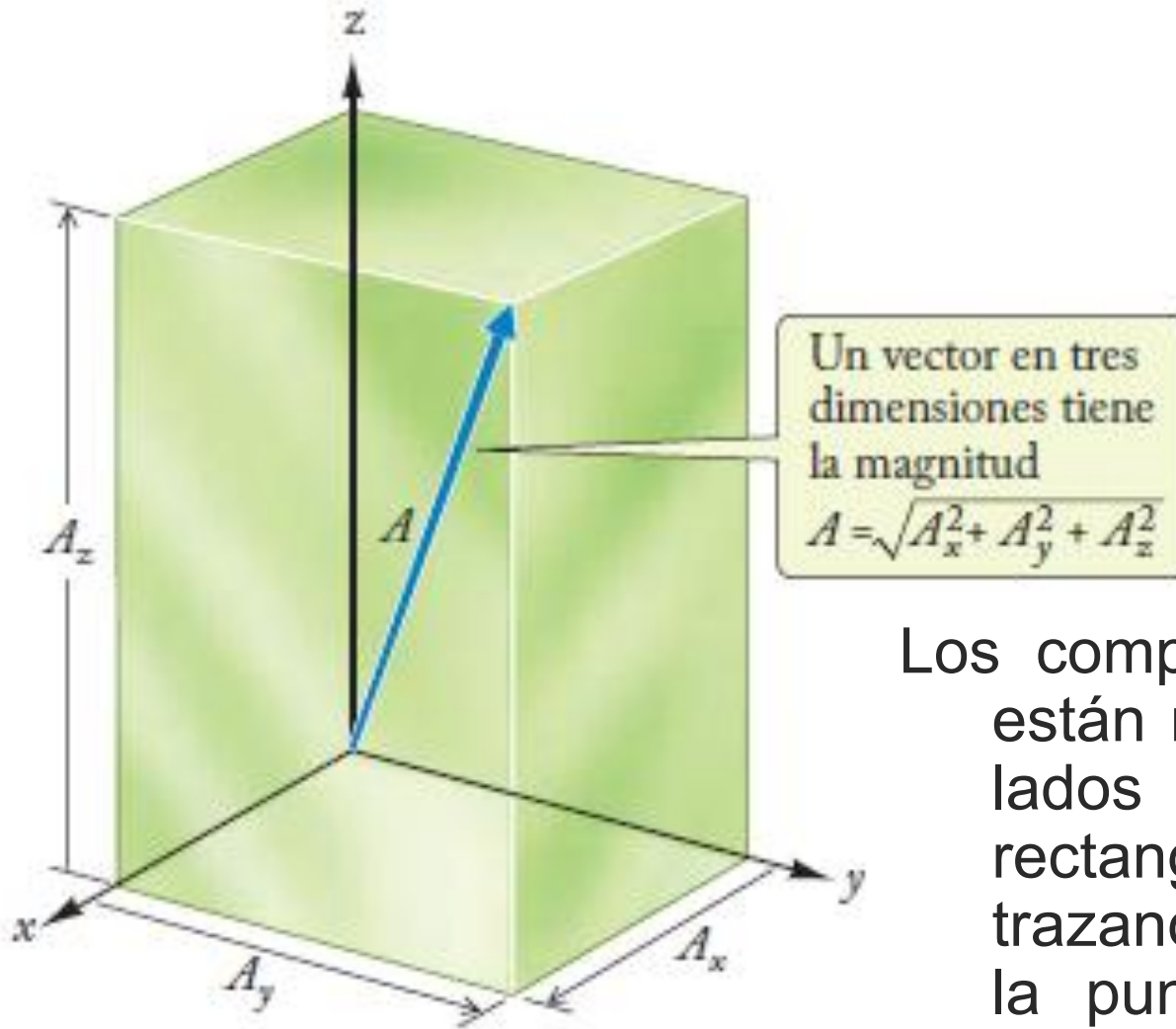
Componentes de un Vector

- Las componentes rectangulares pueden ser positivas o negativas y tendrán las mismas unidades que el vector original.
- Los signos de las componentes dependerán del ángulo θ

y		
A_x negative	A_x positive	x
A_y positive	A_y positive	
A_x negative	A_x positive	
A_y negative	A_y negative	

© 2004 Thomson/Brooks Cole

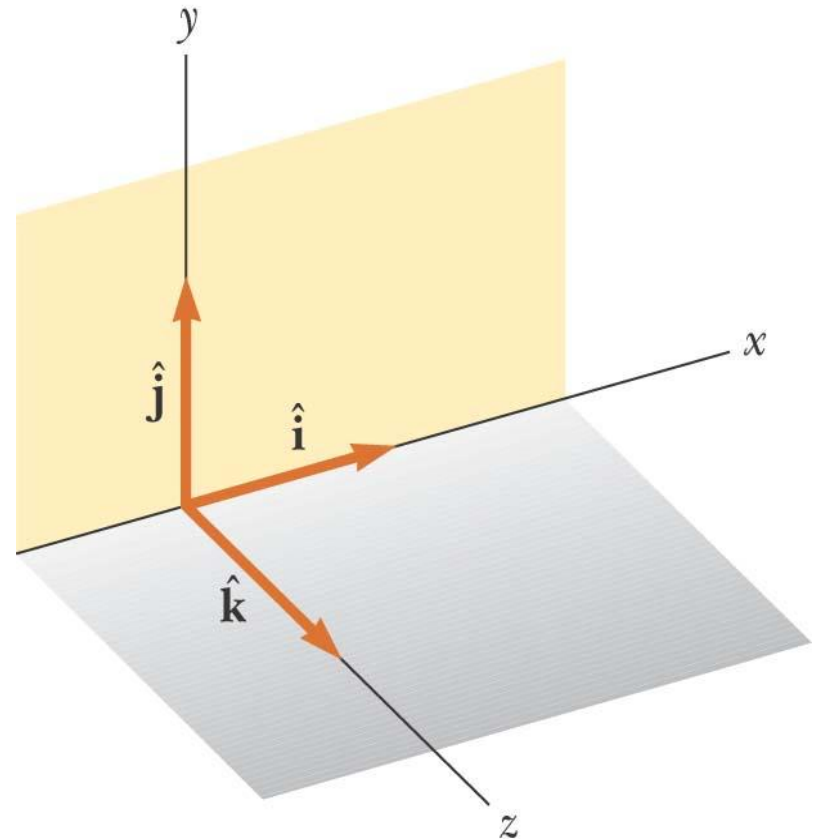
Representación de un vector en 3 dimensiones



Los componentes A_x , A_y y A_z están representados por los lados de una caja rectangular, construida trazando perpendiculares de la punta del vector a los planos $x - y$, $x - z$ y $y - z$.

Vectores Unitarios

- Un ***vector unitario*** es un vector adimensional de magnitud exactamente igual a 1.
- Se utiliza para especificar una dirección y carece de significado físico.



Vectores Unitarios

- Para representar estos vectores se utiliza:

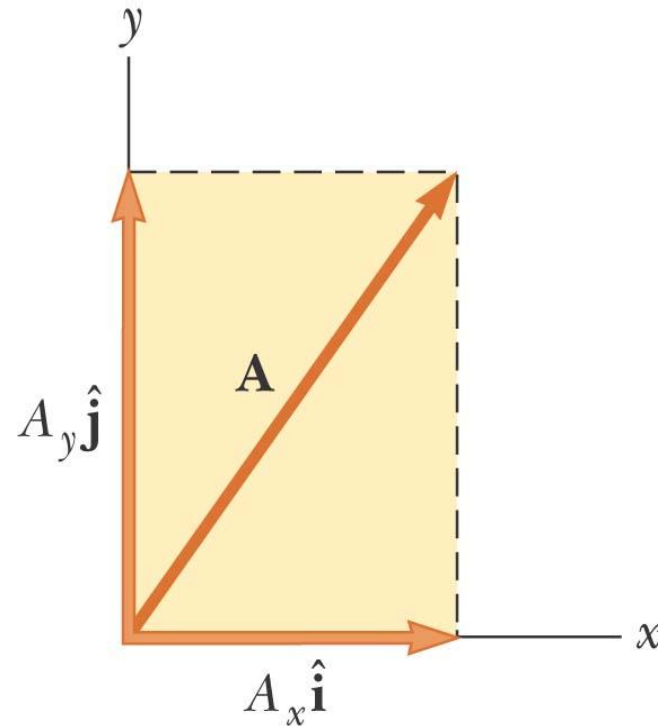
$$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$$

- Los cuales forman un conjunto de vectores mutuamente perpendiculares.

Notación vectores unitarios

- \mathbf{A}_x es lo mismo que $A_x \hat{\mathbf{i}}$ y \mathbf{A}_y es lo mismo que $A_y \hat{\mathbf{j}}$, etc.
- El vector completo puede expresarse entonces como

$$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}} + A_z \hat{\mathbf{k}}$$



(b)

© 2004 Thomson/Brooks Cole

Suma de vectores utilizando vectores unitarios

- Emplear $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$

- Donde
$$\mathbf{R} = (A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}}) + (B_x \hat{\mathbf{i}} + B_y \hat{\mathbf{j}})$$

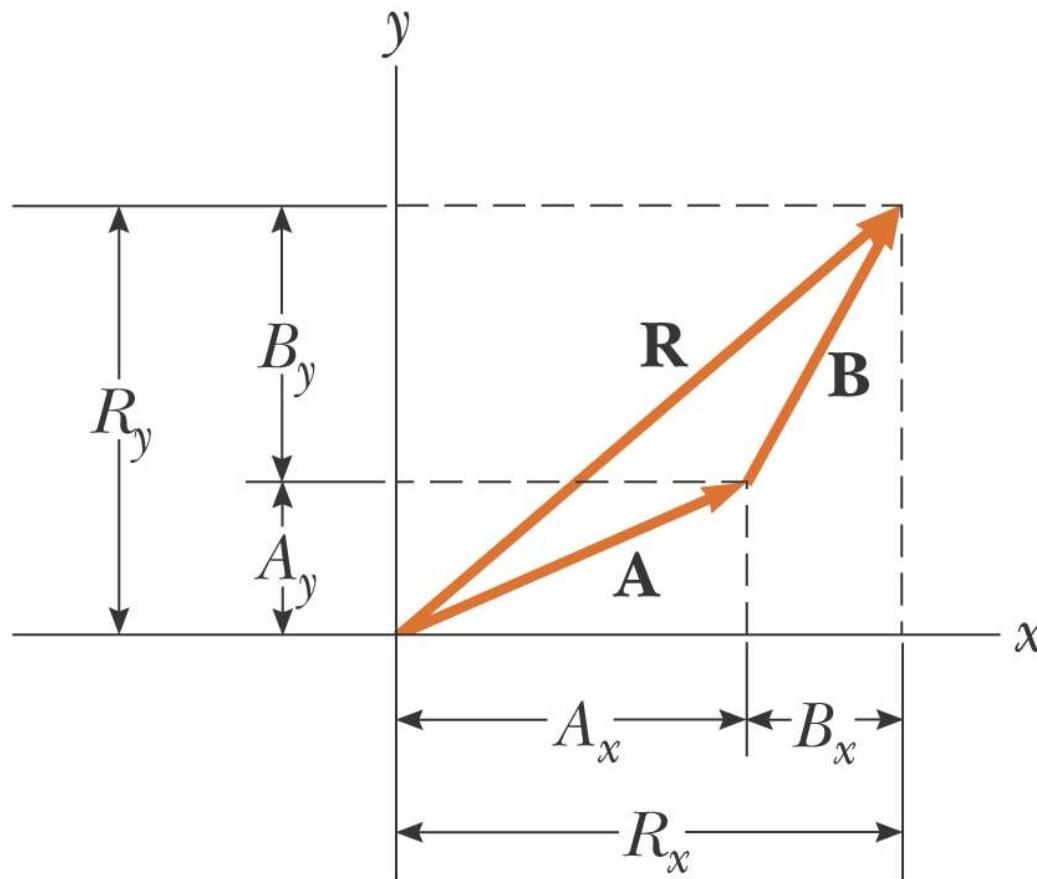
$$\mathbf{R} = (A_x + B_x) \hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y) \hat{\mathbf{j}}$$

$$\mathbf{R} = R_x \hat{\mathbf{i}} + R_y \hat{\mathbf{j}}$$

- Por lo que $R_x = A_x + B_x$ y $R_y = A_y + B_y$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x}$$

Representación gráfica de la suma de vectores por componentes rectangulares.



Adición de vectores empleando vectores unitarios - 3 dimensiones

- Emplear $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$

$$\mathbf{R} = (A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}} + A_z \hat{\mathbf{k}}) + (B_x \hat{\mathbf{i}} + B_y \hat{\mathbf{j}} + B_z \hat{\mathbf{k}})$$

$$\mathbf{R} = (A_x + B_x) \hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y) \hat{\mathbf{j}} + (A_z + B_z) \hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{R} = R_x \hat{\mathbf{i}} + R_y \hat{\mathbf{j}} + R_z \hat{\mathbf{k}}$$

- $R_x = A_x + B_x + C_x, \quad R_y = A_y + B_y + C_y \quad \text{y}$
 $R_z = A_z + B_z + C_z$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad \theta_x = \tan^{-1} \frac{R_x}{R} \quad \text{y así para cada eje.}_{32}$$

Ejemplo resuelto

- Una excursionista comienza un viaje al caminar primero 25.0 km hacia el sureste desde su vehículo. Se detiene y levanta su tienda para pasar la noche. En el segundo día, camina 40.0 km en una dirección 60.0° al noreste, punto en el cual descubre una torre de guardabosque.

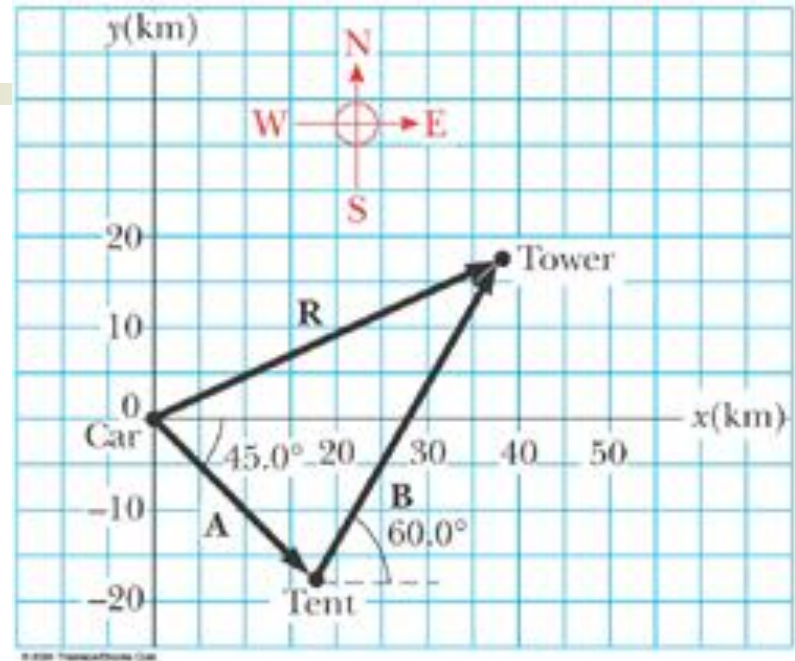
a) Determine las componentes del desplazamiento de la excursionista para cada día.

b) Determine las componentes del desplazamiento resultante de la excursionista \mathbf{R} para el viaje.

Encuentre una expresión para \mathbf{R} en términos de vectores unitarios.

[Continúa...

Las componentes rectangulares del primer desplazamiento **A** son:



$$A_x = A \cos(-45.0^\circ) = (25.0 \text{ km})(0.707) = 17.7 \text{ km}$$

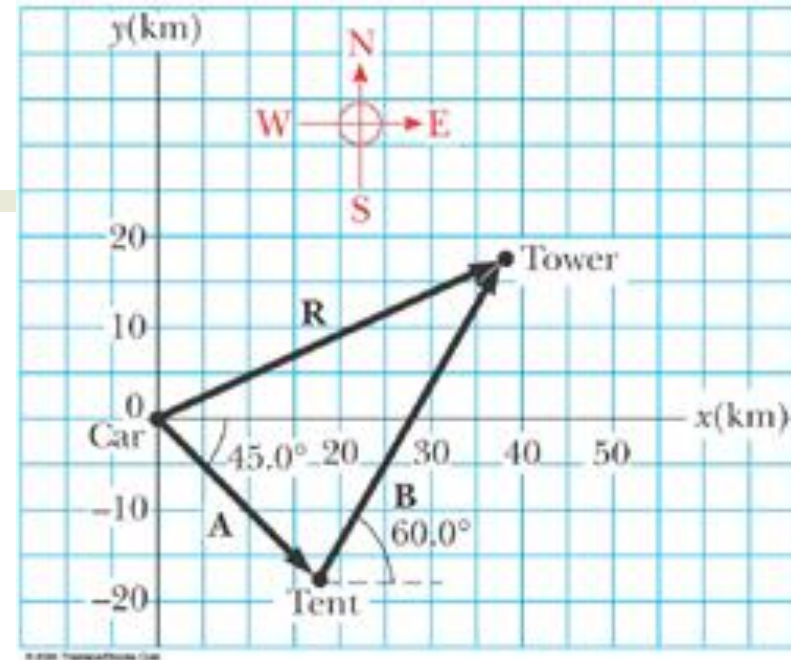
$$A_y = A \sin(-45.0^\circ) = (25.0 \text{ km})(-0.707) = -17.7 \text{ km}$$

Y para el segundo desplazamiento **B** son:

$$B_x = B \cos 60.0^\circ = (40.0 \text{ km})(0.500) = 20.0 \text{ km}$$

$$B_y = B \sin 60.0^\circ = (40.0 \text{ km})(0.866) = 34.6 \text{ km}$$

[Continúa...



Para el desplazamiento resultante

$R = A + B$ las componentes son:

$$R_x = A_x + B_x = 17.7 \text{ km} + 20.0 \text{ km} = 37.7 \text{ km}$$

$$R_y = A_y + B_y = -17.7 \text{ km} + 34.6 \text{ km} = 16.9 \text{ km}$$

Y en forma de vectores unitarios, el desplazamiento total queda:

$$\mathbf{R} = (37.7 \hat{\mathbf{i}} + 16.9 \hat{\mathbf{j}}) \text{ km}$$