université de BORDEAUX

4TIN809U – Optimisation Combinatoire
Masters Informatique et CSI

Examen du 6 mai 2024 - Partie Graphes et coloration

Exercice 1

1. Appliquer l'algorithme LexBFS au graphe G de la Figure 1 à partir du sommet a. En cas de choix dans la sélection d'un sommet, on choisira le premier dans l'ordre alphabétique. Pour chaque itération, donner le sommet sélectionné et les modifications apportées aux étiquettes des sommets.
2. Le graphe G est-il triangulé ? Justifier votre réponse.
3. G est-il un graphe d'intervalle ? Pourquoi ? Si oui, donner sa représentation sous forme d'intervalles.

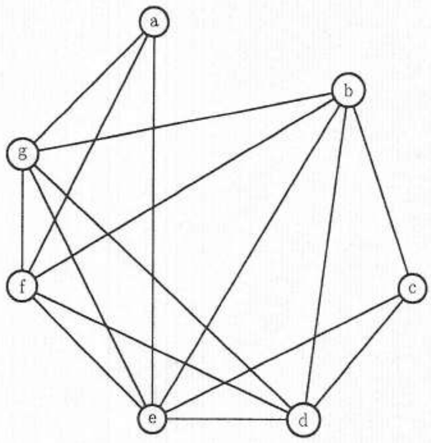

FIGURE 1 – Graphe G

Exercice 2

Le graphe K_n désigne le graphe complet à n sommets, S_n le stable (graphe sans arête) à n sommets, P_n la chaîne à n sommets.

Un *cographe* est un graphe simple (sans boucle, ni arête multiple) obtenu à l'aide du schéma inductif suivant :

- K_1 est un cographe ;
- si $G1 = (V1, E1)$ et $G2 = (V2, E2)$ sont des cographes avec $V1 \cap V2 = \emptyset$, alors le graphe $(V1 \cup V2, E1 \cup E2)$, noté $G1 + G2$ est un cographe ;
- si $G1 = (V1, E1)$ et $G2 = (V2, E2)$ sont des cographes avec $V1 \cap V2 = \emptyset$, alors le graphe $(V1 \cup V2, E1 \cup E2 \cup \{(v1, v2) | v1 \in V1, v2 \in V2\})$, noté $G1 \times G2$ est un cographe.

En d'autres termes, le graphe simple à un sommet est un cographe et on peut produire un nouveau cographe en faisant l'union de deux cographes existants et en rajoutant ou non toutes les arêtes entre les sommets du premier graphe et les sommets du second.

Par exemple, tous les graphes simples à 2 sommets sont des cographes. En effet, $S_2 = K_1 + K_1$ et $K_2 = K_1 \times K_1$.

1. Montrer que tous les graphes simples à 3 sommets sont des cographes.

   Indication : les questions suivantes utilisent principalement l'induction. Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction.

2. Rappeler la définition d'un graphe parfait. Montrer que tout cographe est parfait.
3. Montrer que si G est un cographe, alors tous ses sous-graphes induits sont également des cographes.
4. Montrer que G est un cographe si et seulement si son complémentaire $\overline{G}$ est un cographe.
   En déduire que l'on peut construire tous les cographes à partir de K_1 en utilisant les opérateurs $+$ et complément. En d'autres termes, que l'on peut utiliser comme schéma d'induction :
   - K_1 est un cographe ;
   - si $G1 = (V1, E1)$ et $G2 = (V2, E2)$ sont des cographes, alors le graphe $G1 + G2$ est un cographe ;
   - si G est un cographe, alors $\overline{G}$ est un cographe.
5. Montrer que tout cographe G ne possède pas P_4 comme sous-graphe induit, c'est à dire que si v_1, v_2, v_3, v_4 est une chaîne de G alors G contient au moins une arête parmi $(v_1, v_3), (v_1, v_4)$ ou (v_2, v_4). *Pour information, la réciproque est également vraie.*
6. Montrer que tout cographe est un graphe de comparabilité.

Master Informatique
Université de Bordeaux

Devoir sur table

Optimisaton Combinatoire
Programmation linéaire

Exercice 1

Pour un graphe $G = (V, E)$ et $S \subseteq V$ un ensemble de sommets de G, on définit $G \setminus S$ comme le graphe dont l'ensemble des sommets est $V \setminus S$ et tel que toute arête de G est une arête de $G \setminus S$ si et seulement si aucune de ses extrémités n'est dans S.

Dans un graphe G, on définit un *coupe cycle de sommets* (feedback vertex set en anglais) comme un ensemble S de sommets de G tels que $G \setminus S$ est une forêt (c'est à dire un graphe sans cycles). On note que l'ensemble des sommets d'un graphe est un coupe cycle de sommets, mais on peut généralement en trouver de bien plus petits. L'objectif est de trouver un coupe cycle de sommets ayant le moins de sommets possible.

1) Exprimez ce problème comme un programme linéaire en nombres entiers. On suppose l'ensemble des cycles du graphe connu.

2) Exprimez une relaxation fractionnaire de ce problème. Expliquez avec vos propres mots ce que modélise le programme linéaire correspondant.

3) Existe-t'il des graphes pour lesquels les deux problèmes précédents n'ont pas la même valeur objectif ? Justifiez votre réponse.

Qu'en est-il si on se restreint aux graphes dans lesquels chaque sommet est dans au plus deux cycles ? Qu'en est-il si on se restreint aux graphes dans lesquels l'ensemble des cycles peut être coloré de deux couleurs telles que chaque sommet est dans au plus un cycle de chaque couleur ?

Exercice 2

Dans un graphe G (non orienté), on cherche un ensemble $\mathcal{C}$ maximum de cycles sommet-disjoints dans G. Pour rappel, des cycles sont sommet disjoints s'ils n'ont pas de sommets en commun. On appelle ce problème "maximum cycle packing".

1) Exprimez le maximum cycle packing comme un programme linéaire en nombres entiers. On suppose l'ensemble des cycles du graphe connu.

2) Exprimez une relaxation fractionnaire de ce problème. Expliquez avec vos propres mots ce que modélise le programme linéaire correspondant.

3) Montrer que ce programme linéaire est le dual de celui de l'exercice précédent - vous pouvez passer par des programmes linéaires équivalents si nécessaire.

4) Que peut-on en déduire, pour un graphe G quelconque, sur le nombre maximum de cycles sommets-disjoints de G et la taille du coupe cycle de sommets minimum de G.

5) Proposez une preuve directe (sans passer par la programmation linéaire) du résultat précédent.

Exercice 3

On considère une coloration des arêtes d'un graphe. On veut que la coloration soit propre, c'est à dire que n'importe quelle paire d'arêtes partageant une extrémité soit de couleur différente. On veut bien sûr utiliser le moins de couleurs possibles.

1) Exprimez ce problème comme un problème linéaire en nombres entiers.

2) Proposez une relaxation fractionnaire de ce problème. Expliquez avec vos propres mots ce que modélise le programme linéaire correspondant.

3) Résolvez ce programme linéaire grâce à la méthode du simplexe sur le cycle à 5 sommets. Vous pouvez partir d'une solution de départ de votre choix, pas besoin de faire de programme linéaire auxiliaire.

Combien faut-il de couleurs pour une coloration propre (entière) des arêtes du cycle à 5 sommets ?