Master Informatique

4TIN809U – Optimisation Combinatoire
Aucun document autorisé

Devoir Surveillé du 7 mars 2024, durée 1h30

Exercice 1

Soit G le graphe de la figure 1.

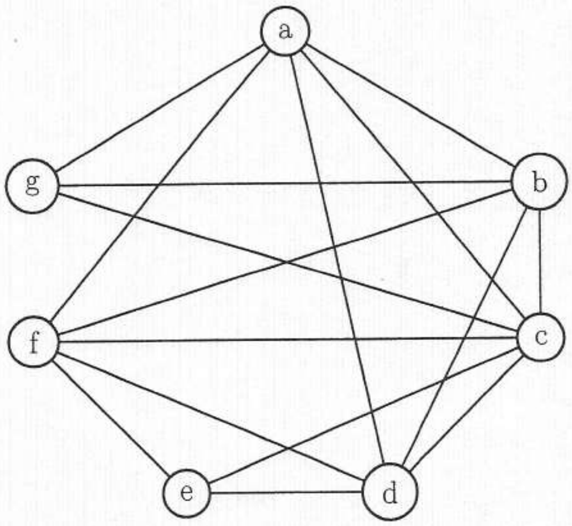

FIGURE 1 – Graphe G

1. Faire tourner l'algorithme LexBFS sur le graphe G à partir du sommet a. Si on a le choix dans la sélection des sommets, on choisira le premier dans l'ordre alphabétique.
2. Le graphe G est-il un graphe triangulé ?
3. Le graphe G est-il un graphe d'intervalles ? Si oui, représenter les intervalles.

Exercice 2

On considère dans cette exercice uniquement des graphes simples, c'est à dire non orientés, sans boucle, ni arête multiple. $V(G)$ désigne l'ensemble des sommets d'un graphe G, $E(G)$ l'ensemble de ses arêtes.

Une k-coloration d'un graphe G est une application de $V(G)$ dans $\{1, \ldots, k\}$.

Une coloration c est dite *propre* si et seulement si pour toute paire de sommets voisins de G $\{x, y\}$, on a $c(x) \neq c(y)$.

Un coloration d'un graphe G est dite *injective* si et seulement si pour tout sommet v du graphe, les voisins de v sont tous de couleurs différentes.

Attention !!! Une coloration injective n'est pas forcément une coloration propre, et inversement. Par exemple, dans la figure 2, la coloration de gauche est injective et non

FIGURE 2 – Colorations respectivement injective et propre de P_3

propre (il existe deux sommets voisins de couleur 1), alors que celle de droite est propre, mais pas injective (le sommet du milieu a ses deux voisins de la même couleur).

On note par $\chi(G)$ le nombre chromatique du graphe G, c'est à dire le plus petit entier k tel que G possède une k-coloration propre. De même, $\chi_i(G)$ désigne le nombre chromatique injectif de G, c'est à dire le plus petit entier k tel que G possède une k-coloration injective.

K_n désigne le graphe complet à n sommets, C_n le cycle à n sommets, et P_n la chaîne à n sommets.

1. Quel est le nombre chromatique injectif de K_2, K_3 et C_4 ? On dessinera chacun de ces graphes avec une coloration injective optimale.
2. Soit S_p, $p \geq 1$, le graphe composé d'un sommet x incident à p arêtes. Ce graphe est appelé une *étoile*. Quelles sont les valeurs de $\chi(S_p)$ et $\chi_i(S_p)$?
3. Soit G un graphe simple. Donner une borne inférieure de $\chi_i(G)$ en fonction du degré maximum $\Delta(G)$ du graphe. Justifier votre réponse.

   Soit un graphe simple G. On note $G^{(2)}$ le graphe défini par $V(G^{(2)}) = V(G)$ et si x et y sont deux sommets de $V(G^{(2)})$, xy est une arête de $G^{(2)}$ si et seulement si il existe une chaîne de longueur 2 entre x et y dans G.
4. Dessiner le graphe $S_5^{(2)}$.
5. Montrer que pour tout graphe G, $\chi_i(G) = \chi(G^{(2)})$.
6. Soit $n \geq 2$. Donner $\chi(P_n)$. Calculer $\chi_i(P_n)$. Justifier votre réponse.
7. Montrer que $\chi_i(C_{2n+1}) = \chi(C_{2n+1})$.
8. Soit G un graphe connexe ayant au moins 3 sommets. Montrer que $\chi(G) \leq \chi_i(G)$.
9. Soit G un graphe de degré maximum Δ. Montrer que $\chi_i(G) \leq \Delta(\Delta - 1) + 1$.
10. On considère la grille 5×5 (5 lignes et 5 colonnes) de la figure 3. Peut-on trouver une coloration injective qui atteigne la borne inférieure de la question 3 ? Si oui, dessiner cette coloration. Peut-on généraliser cette coloration à une grille $n \times n$ pour un n quelconque ?

Exercice 3

On rappelle que $\omega(G)$ désigne le cardinal maximum d'une clique d'un graphe G et $\chi(G)$ son nombre chromatique.

1. Montrer que dans un graphe G, si $\chi(G) = \omega(G)$ alors il existe un ensemble I de sommets indépendants (c'est à dire formant un stable) tel que $\omega(G \backslash I) < \omega(G)$.
2. Soit un graphe G tel que pour tout sous-graphe strict H (c'est à dire ayant au moins un sommet de moins que G), $\chi(H) = \omega(H)$. Montrer que si $\chi(G) > \omega(G)$, alors pour tout ensemble stable I, $\omega(G \backslash I) = \omega(G)$.
3. En déduire que G est un graphe parfait si et seulement si quelque soit H sous-graphe induit de G, il existe un ensemble stable I tel que $\omega(H \backslash I) < \omega(H)$.

Exercice 1

Modélisez le problème suivant par un programme linéaire :

Une entreprise à trois employés, Alice, Bob et Charli. L'entreprise a trois taches à assigner à ses employés pour la journée. Chaque tache peut être effectuée par n'importe quel employé, mais compte tenu de leurs compétences respectives, elles leur prennent plus ou moins de temps. On va également supposer que les employés peuvent faire la même tache à plusieurs, en même temps ou non, et se partager le travail arbitrairement. Par exemple, si la tache 1 prend 4 heures à Alice et 3 heures à Bob, Alice peut la faire en quatre heures, Bob peut la faire en trois, Alice peut y passer deux heures et Bob une heure et demi...

La tache 1 prend 8 heures à Alice, 9 heures à Bob, et 7 heures à Charli. La seconde prend 7 heures à Alice, 6 heures à Bob et 8 heures à Charli. La troisième prend 8 heures à Alice, 8 à Bob, et 7 à Charli.

Chaque employé doit travailler au moins 6 heures. Par contre, il faut les payer pour chaque heure au dela de 7, à hauteur de 20 euros par heure supplémentaire. Par ailleurs, la tache 2 fait partie du projet de Charli, et celui-ci doit y passer au moins la moitié de son temps de travail total.

L'entreprise veut bien sûr payer le moins d'heures supplémentaires possible.

Exercice 2

Les programmes suivants sont-ils des programmes linéaires ? Si non, justifiez pourquoi. Si oui, exprimez-les sous forme canonique de maximisation.

$$\begin{aligned}
\min 5x_1 - 3x_2 + x_3 \\
3x_1 = 6x_2 - 1 \\
x_1 \leq x_3 \\
x_1 + 2 \geq x_3 - 2x_2 - 1 \\
1 \leq x_2 \leq 5 \\
x_3 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\max 2x_1 + x_2 - x_3 \\
x_3 - x_1 + x_2 \geq -4 \\
2x_1 - x_2 \leq x_3 \\
x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Exercice 3

Résolvez le programme linéaire suivant par la méthode du simplexe (vous détaillerez chaque étape). Vous résoudrez le programme linéaire auxiliaire si le vecteur $\mathbf{0}$ n'est pas solution.

$$\begin{aligned}
\min x_1 + x_2 \\
x_1 - 2x_2 \geq 4 \\
x_1 - x_2 \leq 6 \\
x_1 + x_2 \geq 2 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Exercice 4

Ecrivez le dual du programme linéaire précédent, et donnez-en une solution optimale. La méthode pour trouver la solution n'est ici pas spécifiée, mais vous devez justifier.