

## Théorie de l'information : DS du 24 novembre 2020

*Master Sciences et Technologies, mention Mathématiques ou Informatique,  
parcours Cryptologie et Sécurité informatique*

Responsable : Gilles Zémor

Durée : 1h30. Sans document. Les exercices sont indépendants.

– EXERCICE 1. On considère le quintuplet aléatoire  $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$  obtenu en appliquant une transposition  $\tau = (i, j)$  de deux coordonnées  $i$  et  $j$  au quintuplet  $(1, 2, 3, 4, 5)$ . Par exemple, si la transposition  $\tau = (2, 4)$ , le quintuplet  $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$  vaut  $(1, 4, 3, 2, 5)$ . La transposition  $\tau$  est appliquée avec une loi uniforme.

Calculer  $H(X_i)$  et  $H(X_i|X_j)$  pour toutes les valeurs de  $i$  et  $j$ .

– EXERCICE 2. Soit  $X$  une variable aléatoire dans  $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ . Soit  $Y$  une variable indépendante de  $X$  de loi uniforme dans  $\{0, 1, 2\}$ . Soit  $Z$  la variable  $X + Y$ .

a) Calculer  $H(Z, Y)$  de deux manières pour en déduire  $H(X) \leq H(Z)$ .

b) Donner un exemple de loi pour  $X$  telle que  $H(Z) = H(X) + \log_2 3$ .

– EXERCICE 3. Donner un exemples de deux variables aléatoires  $X, Y$  de Bernoulli, telles que  $H(X|Y = 1) > H(X) > H(X|Y)$ .

– EXERCICE 4. On considère les trois codes suivants :

$C_1 = \{00, 10, 001, 101, 011, 111\}$ ,  $C_2 = \{00, 10, 01, 101, 110, 011\}$ ,  $C_3 = \{01, 10, 01110\}$ .

Lesquels sont uniquement déchiffrables ? Pourquoi ?

– EXERCICE 5.

a) Caractériser les lois  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$  d'une variable prenant ses valeurs dans un ensemble à 4 éléments, qui admettent deux arbres de Huffman distincts.

b) Donner un exemple de loi  $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$  d'une variable prenant ses valeurs dans un ensemble à 5 éléments, qui admet exactement deux arbres de Huffman distincts. Donner les arbres correspondants et la longueur moyenne d'un code de Huffman pour cette loi.



- c) Donner un exemple de loi  $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$  qui admet exactement 3 arbres de Huffman distincts.

– EXERCICE 6. Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme dans l'ensemble  $\{0, 1, 3\}$ . On considère la variable  $Z = X + Y$ .

- a) Que vaut  $H(Z)$  ?  
 b) On souhaite proposer une procédure pour déterminer la valeur de  $Z$  consistant à poser des questions dont la réponse est oui ou non, du type «est-ce que  $Z$  appartient à l'ensemble d'entiers  $A$  ? Proposer une telle procédure. On pourra s'aider d'un arbre de Huffman pour  $Z$ . Quel est le nombre moyen de questions qu'il faut poser pour déterminer  $Z$  ?