université de BORDEAUX	MASTER CSI, ANNÉE 2023/2024. UE 4TCY701U, THÉORIE DE LA COMPLEXITÉ. TEST 1 - 18 SEPTEMBRE 2023. DURÉE 50MN - AUCUN DOCUMENT AUTORISÉ.	Collège Sciences et Technologies

Exercice 1: Unions et intersections

Soit E un ensemble. On considère deux familles $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de E. On suppose que $A_i \cup B_i = E$ pour tout $i \in I$. Montrer que,

$$E = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right).$$

Exercice 2: Injectivité

On considère un ensemble X et une fonction $f : X \to X$. On note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles de X. Montrer que les assertions suivantes sont *équivalentes* :

1) f est injective.
2) Pour tout $Y \in \mathcal{P}(X)$, on a $f^{-1}(f(Y)) = Y$.
3) Pour tous $Y, Z \in \mathcal{P}(X)$, on a $f(Y \cap Z) = f(Y) \cap f(Z)$.
4) Pour tous $Y, Z \in \mathcal{P}(X)$ tels que $Y \cap Z = \emptyset$, on a $f(Y) \cap f(Z) = \emptyset$.
5) Pour tous $Y, Z \in \mathcal{P}(X)$ tels que $Y \subseteq Z$ on a $f(Z \setminus Y) = f(Z) \setminus f(Y)$.

Exercice 3: Nombres rationnels et irrationnels

On travaille dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. On rappelle qu'un nombre rationnel est un nombre $x \in \mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction $x = \frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ est un entier relatif et $b \in \mathbb{N}$ est un entier naturel. On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. Inversement, on dit qu'un nombre $x \in \mathbb{R}$ est irrationnel si et seulement si il n'est *pas* rationnel (c'est-à-dire si et seulement si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et tout $y \in \mathbb{Q}$, on a $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et tout $y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, on a $xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
3) Montrer que $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ est un nombre irrationnel.
4) Montrer qu'il existe deux nombres *irrationnels* $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x^y \in \mathbb{R}$ est un nombre *rationnel.*

Exercice 4: Sommes

Montrer les égalités suivantes :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$$

université de BORDEAUX	**Master CSI, Année 2023/2024.** UE 4TCY701U, Théorie de la complexité. Test 2 - 25 Septembre 2023. Durée 1h - Aucun document autorisé.	Collège Sciences et Technologies

Toute fonction considérée est supposée totale : son ensemble de définition est son ensemble de départ.

Exercice 1 : Injectivité et surjectivité

Dans cet exercice, X, Y et Z désignent des ensembles et f, g des fonctions. On rappelle que si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont des fonctions, on note $g \circ f : X \to Z$ la fonction obtenue en composant g avec f.

1) Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
2) L'affirmation suivante est-elle vraie : « Pour toutes fonctions $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$, si $g \circ f$ est surjective, alors f est surjective » ? Justifier la réponse.
3) Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
4) L'affirmation suivante est-elle vraie : « Pour toutes fonctions $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$, si $g \circ f$ est injective, alors g est injective » ? Justifier la réponse.

Exercice 2 : Surjectivité

On considère des ensembles X et Y et une fonction $f : X \to Y$. Montrer que les assertions suivantes sont *équivalentes* :

1) f est surjective.
2) Pour tout $B \subseteq Y$, on a $B = f(f^{-1}(B))$.
3) Pour tout $B \subseteq Y$, on a $B \subseteq f(f^{-1}(B))$.
4) On a $Y = f(f^{-1}(Y))$.

Exercice 3 : Ensemble des sous-ensembles

Pour un ensemble E fini ou non, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles de E.

1) Calculer $\mathcal{P}(\emptyset)$ et $\mathcal{P}(\{1, 2\})$.
2) Si E est fini et a n éléments, quel est le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(E)$? Justifier la réponse.
3) Montrer que si E est fini, il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$.
4) Montrer que si E est infini, il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$ en supposant par l'absurde qu'il existe une surjection $f : E \to \mathcal{P}(E)$ et en considérant le sous-ensemble $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.

Exercice 4 : Relations d'équivalence

On va considérer des relations sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des paires de nombres réels :

1) Soit « $\sim$ » la relation définie par $(u, v) \sim (x, y) \Leftrightarrow uv = xy$ pour tous $(u, v), (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Cette relation est-elle une relation d'équivalence ? Si oui, décrire les classes d'équivalence. Sinon, justifier.
2) Soit « $\equiv$ » la relation définie par $(u, v) \equiv (x, y) \Leftrightarrow uv = xy$ et $ux \geq 0$ pour tous $(u, v), (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Cette relation est-elle une relation d'équivalence ? Si oui, décrire les classes d'équivalence. Sinon, justifier.

Exercice 5 : Entier relatifs et fonctions

Prouver qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $f(f(n)) = n + 1$.