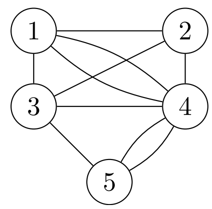
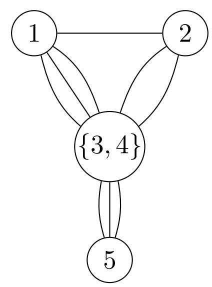
I Coupe minimum

Soit $G = (S, A)$ un multigraphe (G peut avoir plusieurs arêtes entre deux sommets), $n = |S|$ et $p = |A|$.
Une coupe de G est une partition $C = (S_1, S_2)$ de S. Sa taille $|C|$ est le nombre d'arêtes entre S_1 et S_2 : $|C| = \{\{u, v\} \in A \mid u \in S_1 \text{ et } v \in S_2\}$. C est une coupe minimum si elle minimise $|C|$.

Soient $u, v \in S$. La contraction $G/\{u, v\}$ de $\{u, v\}$ dans G est le multigraphe obtenu à partir de G en fusionnant u et v en un nouveau sommet uv, en supprimant les arêtes entre u et v, et en remplaçant chaque arête $\{u, x\}$ ou $\{v, x\}$ par une arête $\{uv, x\}$.

1. Dessiner $G/\{3, 4\}$ si G est le multigraphe suivant :



> Solution :
>
> 

1. On tire aléatoirement et uniformément une coupe C. Montrer que $\mathcal{P}(C \text{ est une coupe minimum}) \geq \dfrac{1}{2^n}$.

On propose l'algorithme suivant, où on note $S(G)$ l'ensemble des sommets et $A(G)$ l'ensemble des arêtes d'un graphe G :

> $H \leftarrow G$
> **Tant que** $|S(H)| \geq 2$ **:**
>   Choisir aléatoirement une arête $\{u, v\}$ de H
> $H \leftarrow H/\{u, v\}$
> **Renvoyer** $S(H)$

2. On note $\mathrm{c}(G)$ la taille minimum d'une coupe de G. Montrer l'invariant : « $\mathrm{c}(H) \geq \mathrm{c}(G)$ ».

> Solution : Soit C une coupe minimum de H, à une itération donnée. Alors C est aussi une coupe de G. Donc $\mathrm{c}(H) \geq \mathrm{c}(G)$.

3. Expliquer comment implémenter efficacement cet algorithme.

> Solution : On utilise une matrice d'adjacence M pour représenter H, où $m_{i,j}$ est le nombre d'arêtes entre i et j. À chaque itération, on modifie en $\mathrm{O}(n)$ les lignes et colonnes de u et v en les additionnant sans changer la structure de la matrice (on a donc plusieurs lignes correspondant au même sommet dans H). On met aussi 0 dans $m_{u,v}$ et $m_{v,u}$.
> On conserve aussi, pour chaque noeud de H, un de ses représentants dans G ainsi que son degré dans H. On peut aussi générer en $\mathrm{O}(n)$ une arête aléatoire de H en choisissant un sommet $u \in S(H)$ avec probabilité $\deg(u)/|A(H)|$ puis en choisissant un voisin v de u avec probabilité $m_{u,v}/\deg(u)$.
> L'algorithme a une complexité en $\mathrm{O}(n) + \mathrm{O}(n)$ par itération, soit une complexité en $\mathrm{O}(n^2)$.

4. Montrer que l'algorithme précédent renvoie bien une coupe.

Soit C une coupe minimum et $k = |C|$.

5. Montrer que $p \geq \dfrac{nk}{2}$.

> Solution : Si $v \in S$, $\deg(v) \geq k$ (sinon, $(\{v\}, S \setminus \{v\})$ serait une coupe de taille $< k$). Donc $2|A| = \sum_{v \in S} \deg(v) \geq nk$ d'où $p \geq \frac{nk}{2}$.

6. Montrer que la probabilité de ne pas choisir une arête de C lors de la première contraction est au moins $1 - \frac{2}{n}$.

> Solution : La probabilité de choisir une arête de C lors de la première contraction est $\frac{k}{p} \leq \frac{2}{n}$. La probabilité de ne pas choisir une arête de C est donc $\geq 1 - \frac{2}{n}$.

7. En déduire un algorithme probabiliste pour trouver une coupe minimum de G avec une probabilité au moins $1 - \frac{1}{n}$. On pourra utiliser l'inégalité : $(1 - \frac{1}{x})^x \leq \frac{1}{e}$.

> Solution : On peut répéter l'algorithme plusieurs fois et garder la coupe minimum parmi les résultats obtenus. La probabilité de ne jamais obtenir de coupe minimum est au plus :
>
> $$\left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right)^{\frac{n(n-1)}{2} \ln n} \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{\ln n} = \frac{1}{n}$$

8. Déterminer le nombre maximum de coupes minimums dans un multi-graphe d'ordre n.

> Solution : Comme l'algorithme de Karger a une probabilité au moins $\frac{2}{n(n-1)}$ de renvoyer une coupe minimum en particulier, il ne peut pas y avoir plus de $\frac{n(n-1)}{2}$ coupes minimums. De plus, cette borne est atteinte pour les cycles de taille n, donc la borne est optimale.

II Ensemble indépendant

Soit $G = (S, A)$ un graphe non-orienté. Un *ensemble indépendant* de G est un sous-ensemble $I \subseteq S$ tel que $\forall u, v \in I, \{u, v\} \notin A$. On note $\alpha(G)$ la taille du plus grand ensemble indépendant de G.

On considère les problèmes de décision suivants :

Théorème : INDEPENDANT

Entrée : un graphe G et un entier k.
Sortie : est-ce que $\alpha(G) \geqslant k$?

Théorème : CLIQUE

Entrée : un graphe G et un entier k.
Sortie : est-ce que G possède une clique de taille k, c'est-à-dire un sous-ensemble $C \subseteq S$ tel que $\forall u, v \in C, \{u, v\} \in A$?

1. On admet que CLIQUE est NP-complet. Montrer que INDEPENDANT est NP-complet.

> Solution : INDEPENDANT $\in$ NP car on peut vérifier en temps polynomial qu'un ensemble de sommets est indépendant.
> Soit $G = (S, A)$ une instance de CLIQUE. On construit $\overline{G} = (S, \overline{A})$ où $\overline{A} = \{(u, v) \in S^2 \mid u \neq v \text{ et } (u, v) \notin A\}$. Alors G a une clique de taille k si et seulement si $\overline{G}$ a un ensemble indépendant de taille $|S| - k$. Comme CLIQUE est NP-complet et que CLIQUE se réduit en temps polynomial à INDEPENDANT, INDEPENDANT est NP-complet.

2. Décrire un algorithme efficace pour calculer $\alpha(G)$ si G est un arbre.

> Solution : On peut enraciner G en un arbre a et calculer récursivement la taille maximum $f(a)$ d'un ensemble indépendant contenant la racine de a et la taille maximum $g(a)$ d'un ensemble indépendant ne contenant pas la racine

de a :

$$f(a) = 1 + \sum_{c \text{ fils de } a} g(c)$$

$$g(a) = \sum_{c \text{ fils de } a} \max(f(c), g(c))$$

On peut aussi calculer taille maximum $h(a)$ d'un ensemble indépendant de a avec :

$$h(a) = \max(1 + \sum_{c \in \text{ petits fils de } a} h(c), \sum_{c \in \text{ fils de } a} h(c))$$

On considère l'algorithme suivant pour INDEPENDANT, où $p \in [0, 1]$:

Algorithme 1

$I \leftarrow$ ensemble obtenu en prenant chaque sommet de S avec probabilité p
Pour $\{u, v\} \in A$ **:**
  Si $u \in I$ et $v \in I$ **:**
    Supprimer aléatoirement u ou v de I
Renvoyer I

3. Quelle est l'espérance de $|I|$ juste avant de rentrer dans la boucle Pour ?

Solution : L'espérance de $|I|$ est $p|S|$.

4. Montrer que l'espérance de $|I|$ renvoyé par l'algorithme 1 est au moins $p|S| - p^2|A|$.

Solution : À chaque fois qu'une arête est considérée dans la boucle Pour, il y a une probabilité au plus p^2 que ses deux extrémités soient dans I (il est possible qu'une de ces deux extrémités ait déjà été supprimée). Donc l'espérance de $|I|$ est au moins $p|S| - p^2|A|$.

5. Montrer que $\alpha(G) \geqslant \dfrac{|S|^2}{4|A|}$.

Solution : Par étude de fonction, on trouve que $p|S| - p^2|A|$ est maximum lorsque $p = \dfrac{|S|}{2|A|}$ et vaut alors $\dfrac{|S|^2}{4|A|}$. Il existe donc au moins un ensemble indépendant de taille supérieure ou égale à l'espérance $\dfrac{|S|^2}{4|A|}$.

On considère un autre algorithme pour INDEPENDANT, pour un graphe $G = (S, A)$:

Algorithme 2

$S \leftarrow$ sommets de S ordonnés selon un ordre quelconque
$I \leftarrow \emptyset$
Pour $v \in S$ **:**
  $I \leftarrow I \cup \{v\}$
  Supprimer v et ses voisins de S
Renvoyer I

6. Montrer que l'algorithme 2 donne une $\dfrac{1}{\Delta + 1}$-approximation de $\alpha(G)$, où Δ est le degré maximum des sommets de G.

Solution : À chaque étape, on supprime au plus $\Delta + 1$ sommets de S donc il y a au moins $\left\lceil \dfrac{|S|}{\Delta + 1} \right\rceil$ étapes.

D'où $|I| \geqslant \dfrac{|S|}{\Delta + 1} \geqslant \dfrac{\alpha(G)}{\Delta + 1}$.

7. On ordonne les sommets de S suivant une permutation uniformément aléatoire.

   Calculer l'espérance de $|I|$ puis montrer que $\alpha(G) \geqslant \sum_{i=1}^{|S|} \frac{1}{d_i+1}$, où d_i est le degré du i-ème sommet.

   Solution : Soit X_v la variable aléatoire valant 1 si v est ajouté à I, 0 sinon.
   Un sommet v est ajouté à I si et seulement si tous ses voisins apparaissent après lui dans la permutation. Donc $\mathbb{E}[X_v] = \mathbb{P}(X_v = 1) = \frac{1}{d_v+1}$.
   Donc $\mathbb{E}[|I|] = \sum \mathbb{E}[X_v] = \sum \frac{1}{d_v+1}$.
   Il existe au moins un ensemble indépendant de taille supérieure à la moyenne.