La logique propositionnelle (de MP2I) définit la notion de formule vraie (si elle est vraie pour toute valuation).
La déduction naturelle permet de formaliser la notion de preuve mathématique.

I Preuve en déduction naturelle

Définition : Séquent

Un séquent, noté $\Gamma \vdash A$, est constitué d'un ensemble Γ de formules logiques et une formule logique A.

Intuitivement : $\Gamma \vdash A$ signifie que sous les hypothèses Γ, on peut déduire A.

Définition : Règle d'inférence

Une règle d'inférence est constituée :
- d'un ensemble de séquents $\Gamma_1 \vdash A_1, ..., \Gamma_n \vdash A_n$ appelés prémisses
- d'un séquent $\Gamma \vdash A$ appelé conclusion.

On le représente :

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1 \quad \Gamma_2 \vdash A_2 \quad \cdots \quad \Gamma_n \vdash A_n}{\Gamma \vdash A}$$

Une règle sans prémisse est appelée axiome.

Définition : Preuve

On définit inductivement une preuve (ou arbre de preuve) d'un séquent $\Gamma \vdash A$ par :
- si $\Gamma \vdash A$ est un axiome, alors $\overline{\Gamma \vdash A}$ est une preuve de $\Gamma \vdash A$
- si la règle
$$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1 \quad \Gamma_2 \vdash A_2 \quad \quad \Gamma_k \vdash A_k}{\Gamma \vdash A}\ R$$
est une règle d'inférence et que $P_1, P_2, , P_k$ sont des preuves de $\Gamma \vdash A_1$, $\Gamma \vdash A_2$, ..., $\Gamma_k \vdash A_k$ respectivement, alors
$$\frac{P_1 \quad P_2 \quad \quad P_k}{\Gamma \vdash A}\ R$$
est une preuve de $\Gamma \vdash A$.

On dit que $\Gamma \vdash A$ est prouvable s'il existe une preuve de $\Gamma \vdash A$.

Exercice 1.
Prouver $\vdash A \to A$.

Exercice 2.
Prouver $A \to (B \to C) \vdash (B \to A) \to (B \to C)$.

Exercice 3.
Prouver $(A \wedge B) \to C \vdash A \to (B \to C)$.

Exercice 4.
Prouver $A \to (B \to C) \vdash (A \wedge B) \to C$.

Exercice 5.

1. Prouver $A \vee (B \wedge C) \vdash A \vee B$
2. En déduire $\vdash A \vee (B \wedge C) \longrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Exercice 6.
Prouver $A \vdash \neg\neg A$.

II Correction de la déduction naturelle

Théorème : Correction de la déduction naturelle

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

Preuve : Soit $P(h)$: « si T est un arbre de preuve de hauteur h pour $\Gamma \vdash A$ alors $\Gamma \models A$ ».
$P(0)$ est vraie : Si T est un arbre de hauteur 0 pour $\Gamma \models A$ alors il est constitué uniquement d'une application de ax, ce qui signifie que $A \in \Gamma$ et implique $\Gamma \models A$.
Soit T un arbre de preuve pour pour $\Gamma \vdash A$ de hauteur $h+1$. Considérons la règle appliquée à la racine de T.

- ($\wedge_i$) Supposons T de la forme : $\dfrac{\dfrac{T_1}{\Gamma \vdash A} \quad \dfrac{T_2}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i$
  Par hypothèse de récurrence sur T_1 et T_2, on obtient $\Gamma \models A$ et $\Gamma \models B$.
  Une valuation v satisfaisant toutes les formules de Γ satisfait donc à la fois A et B, et donc $A \wedge B$. On a bien $\Gamma \models A \wedge B$.
- ($\wedge_e$) Supposons T de la forme : $\dfrac{\dfrac{T_1}{\Gamma \vdash A \wedge B}}{\Gamma \vdash A} (\wedge_e^g)$ Par récurrence sur T_1, $\Gamma \models A \wedge B$ et donc $\Gamma \models A \wedge B$.
- Les autres cas sont similaires...

III Logique du premier ordre

La logique du premier ordre permet de faire des raisonnements dans un langage plus élaboré que celui qui se limite aux variables propositionnelles.

Définition : Langage du premier ordre

Un langage du premier ordre est la donnée de symboles de fonctions, ayant chacune une arité (nombre d'arguments), d'un nombre de symboles de relation, doté chacun d'une arité strictement positive.
Une fonction d'arité 0 est dite constante.

Exemples :

- La théorie des groupes avec la constante e, la fonction $^{-1}$ d'arité 1, la fonction $\star$ d'arité 2 et la relation $=$ d'arité 2.
- La théorie des ensembles avec la constante $\emptyset$, la fonction ^{c} d'arité 1, les fonctions $\cap$ et $\cup$ d'arité 2 et les relations $=$, $\in$, $\subset$ d'arité 2.

Définition : Terme

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble de variables. On définit par induction l'ensemble des termes sur $\mathcal{X}$:

- Une variable $x \in \mathcal{X}$ est un terme.
- Une constante est un terme.
- Si f est une fonction d'arité $n > 0$ et $t_1, ..., t_n$ des termes alors $f(t_1, ..., t_n)$ est un terme.

Définition : Formule de la logique du premier ordre

Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre. L'ensemble des formules de la logique du premier ordre est alors défini par induction par :

- si R est une relation d'arité n et $t_1, ..., t_n$ des termes alors $R(t_1, t_2, ..., t_n)$ est une formule de la logique du premier ordre.
- si A et B sont des formules de la logique du premier ordre et $x \in \mathcal{X}$, alors :
  - $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$ et $A \to B$ sont des formules de la logique du premier ordre.
  - $\exists x\, A$ et $\forall x\, A$ sont des formules de la logique du premier ordre.

Exemples :

- Dans le langage de la théorie des groupes, $\forall x \exists y (x \star y = e)$ est une formule.
- Dans le langage de la théorie des ensembles, $\forall x \forall y ((x \cup y)^c = x^c \cap y^c))$ est une formule.

Attention : il ne faut pas confondre variable (terme décrivant un objet du langage du premier ordre étudié), par exemple un nombre réel, et variable propositionnelle (objet qui possède une valeur de vérité).

Définition : Variable libre, variable liée

Si ϕ est une formule du premier ordre et x une variable, on dit que x est libre dans ϕ si elle n'est pas associée à un $\exists$ ou un $\forall$. Sinon, on dit que x est liée.

Définition : Substitution

Si ϕ est une formule du premier ordre, on note $\phi[x := t]$ la formule obtenue en remplaçant toutes les occurrences libres de x par t dans ϕ, après renommage des variables si nécessaire.

Exemple : Si $\varphi = (\forall x(x = x)) \wedge \exists y(x = y)$. Alors $\varphi[x := y \star y] = (\forall x(x = x)) \wedge \exists z(y \star y = z)$.

Exercice 7.

Montrer que le séquent suivant est prouvable :

$$\exists x\, (\varphi \vee \psi) \vdash \exists x\, \varphi \vee \exists x\, \psi$$

	Introduction	Élimination
Conjonction	$\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge_e^g \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \wedge_e^d$
Disjonction	$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^g \qquad \dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee_i^d$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C \quad \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C} \vee_e$
Implication	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \to_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \to B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \to_e$
Négation	$\dfrac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A} \neg_i$	$\dfrac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot} \neg_e$
Vrai $\top$	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \top} \top_i$	
Faux $\bot$		$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A} \bot_e$
Universel	Si x n'est pas une variable libre de Γ : $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x\, A} \forall_i$	Si A n'a pas de variable liée en commun avec t : $\dfrac{\Gamma \vdash \forall x\, A}{\Gamma \vdash A[x := t]} \forall_e$
Existentiel	$\dfrac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x\, A} \exists_i$	Si x n'est pas une variable libre de B ni de Γ : $\dfrac{\Gamma \vdash \exists x A \quad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B} \exists_e$

Règles de déduction naturelle classique, où A, B, C sont des formules quelconques

Axiome	Affaiblissement	(Réduction à l'absurde)
$\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}$ ax	$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}$ aff	$\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}$ raa

Règles supplémentaires