I Décidabilité

Définition : Algorithme

Un algorithme est une suite d'instructions déterministes (sans aléatoire) avec une entrée finie.
On suppose que cet algorithme s'exécute sur un ordinateur avec une quantité illimitée de mémoire.
Sur une entrée, un algorithme peut :

- renvoyer un résultat en temps fini
- ne pas renvoyer de résultat, soit parce qu'il ne termine pas (boucle infinie...), soit parce qu'il plante (dépassement de tableau...).

Un algorithme peut être écrit en pseudo-code ou dans un langage de programmation (OCaml, C...).

Définition : Machine universelle

Une machine universelle est un programme U prenant en entrée le code source d'un programme f et un argument x, et simulant l'exécution de f sur x. Autrement dit :

- si $f(x)$ renvoie un résultat y en temps fini, alors $U(f,x)$ renvoie y en temps fini.
- si $f(x)$ déclenche une erreur, $U(f,x)$ déclenche une erreur.
- si $f(x)$ ne termine pas, $U(f,x)$ ne termine pas.

Exemple : l'interpréteur OCaml (utop) est une machine universelle pour les programmes OCaml.

Attention : `let universel f x = f x` n'est pas une machine universelle, car ce n'est pas le code source de `f` qui est donné en argument mais une fonction. Cependant, par simplicité de notation, on notera `f x` au lieu de `universel f x`.

Définition : Problème de décision ♡

Un problème de décision est un couple (I, I^+) tel que :

- I est l'ensemble des instances (entrées) du problème.
- $I^+ \subset I$ est l'ensemble des instances positives du problème (celles pour lesquelles la réponse est « oui »).

On peut aussi définir un problème sous forme d'une question binaire.

Exemples de problèmes de décision :

SAT

- Instance : une formule logique φ.
- Question : φ est-elle satisfiable ?

$I = \{\varphi \mid \varphi \text{ formule logique}\}$
$I^+ = \{\varphi \mid \varphi \text{ satisfiable}\}$

APPARTIENT

- Instance : un mot w et un automate A.
- Question : $w \in L(A)$?

$I = \{(w, A) \mid w \text{ mot et } A \text{ automate}\}$
$I^+ = \{(w, A) \mid w \in L(A)\}$

Définition : Décidabilité ♡

Un problème de décision (I, I^+) est dit décidable s'il existe un algorithme qui :

- prend une instance $i \in I$ du problème en entrée
- renvoie `true` en temps fini si i est une instance positive ($i \in I^+$)
- renvoie `false` en temps fini si i est une instance négative ($i \notin I^+$)

Sinon, le problème est dit indécidable.

Remarques :

- L'algorithme doit terminer en temps fini sur toutes les instances.
- Pour montrer qu'un problème est décidable, il suffit d'exhiber un algorithme qui le décide.
  Montrer qu'il est indécidable est a priori plus difficile : il faut montrer qu'aucun algorithme ne peut le résoudre.
- Seule l'existence d'un algorithme importe pour montrer la décidabilité : sa complexité n'a aucune importance. Il n'est donc pas non plus nécessaire de préciser les structures de données utilisées, tant que celles-ci sont calculables.
- Si I^+ est fini, le problème est trivialement décidable : il suffit d'énumérer les instances positives et tester si l'une d'entre elles est égale à l'entrée.

Exercice 1.
Montrer que le problème SAT est décidable.

Le problème de l'arrêt est célèbre en informatique :

ARRET

- Instance : une fonction f et un argument x.
- Question : f termine-t-elle sur l'entrée x ?

En OCaml, cela revient à écrire une fonction `arret : ('a -> 'b) -> 'a -> bool` qui termine sur toute entrée et telle que `arret f x` renvoie `true` si `f x` termine, `false` sinon.

Théorème : ♡

Le problème de l'arrêt est indécidable.

Preuve :

Définition : Fonction calculable

Une fonction $f : E \to F$ est calculable s'il existe un algorithme qui, pour tout élément $x \in E$, termine en temps fini et renvoie $f(x)$.

Définition : Réduction ♡

On dit qu'un problème de décision $\Pi_1 = (I_1, I_1^+)$ se réduit à un problème de décision $\Pi_2 = (I_2, I_2^+)$, noté $\Pi_1 \leq \Pi_2$, s'il existe une fonction calculable $f : I_1 \longrightarrow I_2$ telle que :

$$\forall i \in I_1 : \quad i \in I_1^+ \iff f(i) \in I_2^+$$

Pour réduire Π_1 à Π_2, il faut donc pouvoir transformer une instance de Π_1 en une instance de Π_2, en préservant la réponse (oui/non).

Exercice 2.
Montrer que `ACCESSIBLE` $\leq$ `CHEMIN`.

`ACCESSIBLE`

- Instance : un graphe $G = (S, A)$ et deux sommets $s, t \in S$.
- Question : existe-t-il un chemin de s à t dans G ?

`CHEMIN`

- Instance : un graphe $G = (S, A)$, $s, t \in S$, $k \in \mathbb{N}$.
- Question : existe-t-il un chemin de s à t dans G de longueur au plus k ?

Théorème

Soient Π_1 et Π_2 deux problèmes de décision tels que $\Pi_1 \leq \Pi_2$. Alors :

- Si Π_1 est indécidable alors Π_2 est indécidable.
- Si Π_2 est décidable alors Π_1 est décidable.

Preuve :

Pour montrer qu'un problème est indécidable, on peut donc trouver une réduction depuis un autre problème connu comme indécidable (par exemple `ARRET`).
Intuitivement, $\Pi_1 \leq \Pi_2$ signifie que Π_2 est au moins aussi difficile à résoudre que Π_1 (un algorithme pour Π_2 permettrait de résoudre Π_1).

Exercice 3.
Montrer que le problème `ARRET-VIDE` est indécidable.

`ARRET-VIDE`

- Instance : une fonction f.
- Question : f termine-t-elle sur l'entrée vide ?

II Classes de complexité

Définition : Taille d'une instance ♡

La taille $|x|$ d'une instance x d'un problème est le nombre de bits nécessaires pour la coder.

Remarques :

- Un entier n est codé en base 2, donc sa taille est $\log_2(n)$. On pourrait aussi le coder en unaire ce qui donnerait une taille n, mais ce n'est pas « raisonnable ».

- On s'intéresse seulement à l'ordre de grandeur de la taille (O(...)).

Exemples :

- Un ensemble de p entiers dans $[\![1, n]\!]$ est de taille _____

Pour un graphe à n sommets et p arêtes :

- Sa représentation par liste d'adjacence est de taille _____
- Sa représentation par matrice d'adjacence est de taille _____

II.1 P

Définition : Classe P ♡

La classe P est l'ensemble des problèmes de décision qui admettent un algorithme de complexité polynomiale en la taille de l'entrée (c'est-à-dire $O(n^k)$ pour une constante k, où n est la taille de l'entrée).

Exemple :

`PGCD`

- Instance : entiers a, b, d.
- Question : d est-il le PGCD de a et b ?

On peut calculer le PGCD de a et b en utilisant l'algorithme d'Euclide en complexité $O(\log_2(a) + \log_2(b))$, polynomiale en la taille de l'entrée.

Définition : Classe EXP (HP)

La classe EXP est l'ensemble des problèmes de décision qui admettent un algorithme de complexité exponentielle en la taille de l'instance (c'est-à-dire $O(2^{n^k})$ pour une constante k, où n est la taille de l'entrée).

Remarque : P $\subset$ EXP $\subset$ Décidables.

Exemple :

`PREMIER`

- Instance : un entier n.
- Question : n est-il premier ?

On peut énumérer les entiers de 2 à $\sqrt{n}$ pour tester si n est divisible par l'un d'entre eux, en complexité $O(\sqrt{n})$. Ceci est polynomial en n mais exponentielle en la taille $\log_2(n)$ de n (car $\sqrt{n} = 2^{\frac{\log_2(n)}{2}}$), donc cela montre `PREMIER` $\in EXP$.
Remarque : L'algorithme AKS découvert en 2002 montre que `PREMIER` $\in$ P.

Exercice 4.

1. Soit k un entier fixé. Montrer que k-`CLIQUE` $\in$ P.
2. Montrer que `CLIQUE` $\in$ EXP.

k-`CLIQUE`

- Instance : un graphe G.
- Question : G contient-il une clique de taille k, c'est-à-dire un sous-graphe complet de G de taille k ?

`CLIQUE`

- Instance : un graphe G et un entier k.
- Question : G contient-il une clique de taille k ?

_____

_____

II.2 NP

Définition : Classe NP ♡

Un problème de décision (I, I^+) appartient à la classe NP s'il existe :

- un algorithme A prenant en entrée un couple (x, c) où $x \in I$ et $c \in \{0,1\}^*$
- un polynôme Q

tels que :

- A s'exécute en temps polynomial en $|x| + |c|$
- $\forall x \in I$:

$$x \in I^+ \iff \exists c \in \{0,1\}^*, |c| \leq Q(|x|), A(x,c) = \texttt{true}$$

Remarques :

- c est appelé certificat et peut représenter un entier, un ensemble de valeurs, un graphe... On peut le voir comme une preuve concise (de taille polynomiale) que x est une instance positive.
- A est appelé vérificateur et peut utiliser le certificat c pour vérifier que x est une instance positive : $x \in I^+$ si et seulement s'il existe un certificat c qui permet à A de renvoyer « Oui » en temps polynomial.
- A est censé décoder c (le convertir d'une suite binaire en une structure de données), mais on ne le précise pas en pratique.
- NP (*Nondeterministic Polynomial*) ne veut pas dire « non polynomial » mais reconnaissable en temps polynomial par une machine de Turing non déterministe (HP) : un automate non déterministe muni d'une mémoire qui, à chaque étape, peut faire plusieurs cho ix et explorer tous les chemins possibles en parallèle. Si au moins un chemin mène à une réponse « oui » en temps polynomial, la machine renvoie « oui ».
- P est l'ensemble des problèmes résolubles en temps polynomial alors que NP est l'ensemble des problèmes vérifiables en temps polynomial.

♡ En pratique : très souvent, si le problème est de la forme « Existe-t-il S tel que ... ? », S peut être choisi comme certificat. Il faut alors justifier que S est de taille polynomiale et qu'on peut vérifier que c'est une solution en complexité polynomiale.

Exercice 5.
Montrer que les problèmes suivants appartiennent à NP :

`SAT`

- Instance : une formule logique φ.
- Question : φ est-elle satisfiable ?

`VERTEX-COVER`

- Instance : un graphe G et un entier k.
- Question : G contient-il une couverture par sommets de taille k, c'est-à-dire un ensemble de k sommets tel que chaque arête de G est incidente à au moins un sommet de cet ensemble ?

`co-FACTORISATION`

- Instance : deux entiers n et p.
- Question : n ne possède t-il aucun diviseur d tel que $1 < d < p$?

Théorème

P $\subset$ NP.

Preuve :

Remarque : La question « P = NP ? » est un des problèmes ouverts les plus célèbres en informatique.

Exercice 6.
Montrer que NP $\subset$ EXP.

II.3 Réduction polynomiale

Définition : Réduction polynomiale ♡

On dit qu'un problème de décision $\Pi_1 = (I_1, I_1^+)$ se réduit polynomialement à un problème de décision $\Pi_2 = (I_2, I_2^+)$, noté $\Pi_1 \leq_p \Pi_2$, s'il existe une fonction calculable en complexité polynomiale $f : I_1 \longrightarrow I_2$ telle que :

$$\forall i \in I_1 : \quad i \in I_1^+ \iff f(i) \in I_2^+$$

Intuitivement : $\Pi_1 \leq_p \Pi_2$ signifie qu'on peut transformer une instance de Π_1 en une instance de Π_2 en complexité polynomiale, en préservant la réponse (oui/non).

Exercice 7.
Montrer que `STABLE` $\leq_p$ `CLIQUE`.

`STABLE`

- Instance : un graphe G et un entier k.
- Question : G contient-il un ensemble stable de taille k, c'est-à-dire un ensemble de k sommets deux à deux non adjacents ?

Exercice 8.
Montrer que $\leq_p$ est réflexive et transitive. Est-elle antisymétrique ?

Théorème

Soient Π_1 et Π_2 deux problèmes de décision tels que $\Pi_1 \leq_p \Pi_2$.

- Si $\Pi_2 \in$ P alors $\Pi_1 \in$ P.
- Si $\Pi_1 \in$ NP alors $\Pi_2 \in$ NP.

Remarque : Attention au sens qui n'est pas le même dans les deux cas !

Preuve :

II.4 NP-complétude

Définition : NP-difficile, NP-complet ♡

Soit Π un problème de décision.

- Π est NP-difficile si : $\forall \Pi' \in$ NP, $\Pi' \leq_p \Pi$.
- Π est NP-complet si Π est NP-difficile et $\Pi \in$ NP.

Intuitivement : un problème est NP-difficile s'il est au moins aussi difficile à résoudre que tous les problèmes de NP. Les problèmes NP-complets sont les problèmes les plus difficiles de NP.

Théorème : ♡

Supposons $\Pi_1 \leq_p \Pi_2$. Si Π_1 est NP-difficile alors Π_2 est NP-difficile.

Preuve :

Exercice 9.
Montrer que le problème suivant est NP difficile :

`TAUTOLOGIE`

- Instance : une formule logique φ.
- Question : φ est-elle une tautologie ?

Remarque : Il est conjecturé que `TAUTOLOGIE` n'est pas dans NP.

Exercice 10.
Soit Π un problème NP-difficile. Montrer que si $\Pi \in$ P alors P = NP.

Remarque : Il est conjecturé que P $\neq$ NP, donc qu'il est impossible de résoudre un problème NP-difficile en temps polynomial.

Théorème : Cook-Levin (admis) ♡

SAT est NP-complet.

♡ Méthode pour montrer qu'un problème Π est NP-complet :

1. Montrer que $\Pi \in$ NP.
2. Montrer que $\Pi' \leq_p \Pi$, où Π' est un problème NP-complet connu (par exemple SAT).

Rappels :

- Un littéral est une variable propositionnelle ou sa négation.
- Une clause est une disjonction de littéraux. Par exemple, $x_1 \vee \neg x_2 \vee x_1$ est une clause contenant 3 littéraux.
- Une formule en forme normale conjonctive (FNC) est une conjonction de disjonctions de littéraux.
  Par exemple, $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_2 \vee x_3)$ est une formule en forme normale conjonctive.

On rappelle le problème k-SAT :

k-SAT

- Instance : une formule logique φ en forme normale conjonctive (FNC) avec au plus k littéraux par clause.
- Question : φ est-elle satisfiable ?

Théorème : 3-SAT est NP-complet (HP)

3-SAT est NP-complet.

Preuve :

Remarques :

- On en déduit que k-SAT est NP-complet pour $k \geq 3$, car 3-SAT $\leq_p$ k-SAT.
- Par contre 1-SAT et 2-SAT sont dans P (voir X-ENS 2016 MP).

Exercice 11.
Transformer $\varphi = (x_1 \wedge x_2) \vee \neg x_3$ en formule 3-SAT comme dans la preuve précédente (transformation de Tseytin).

Exercice 12.
On considère le problème suivant :

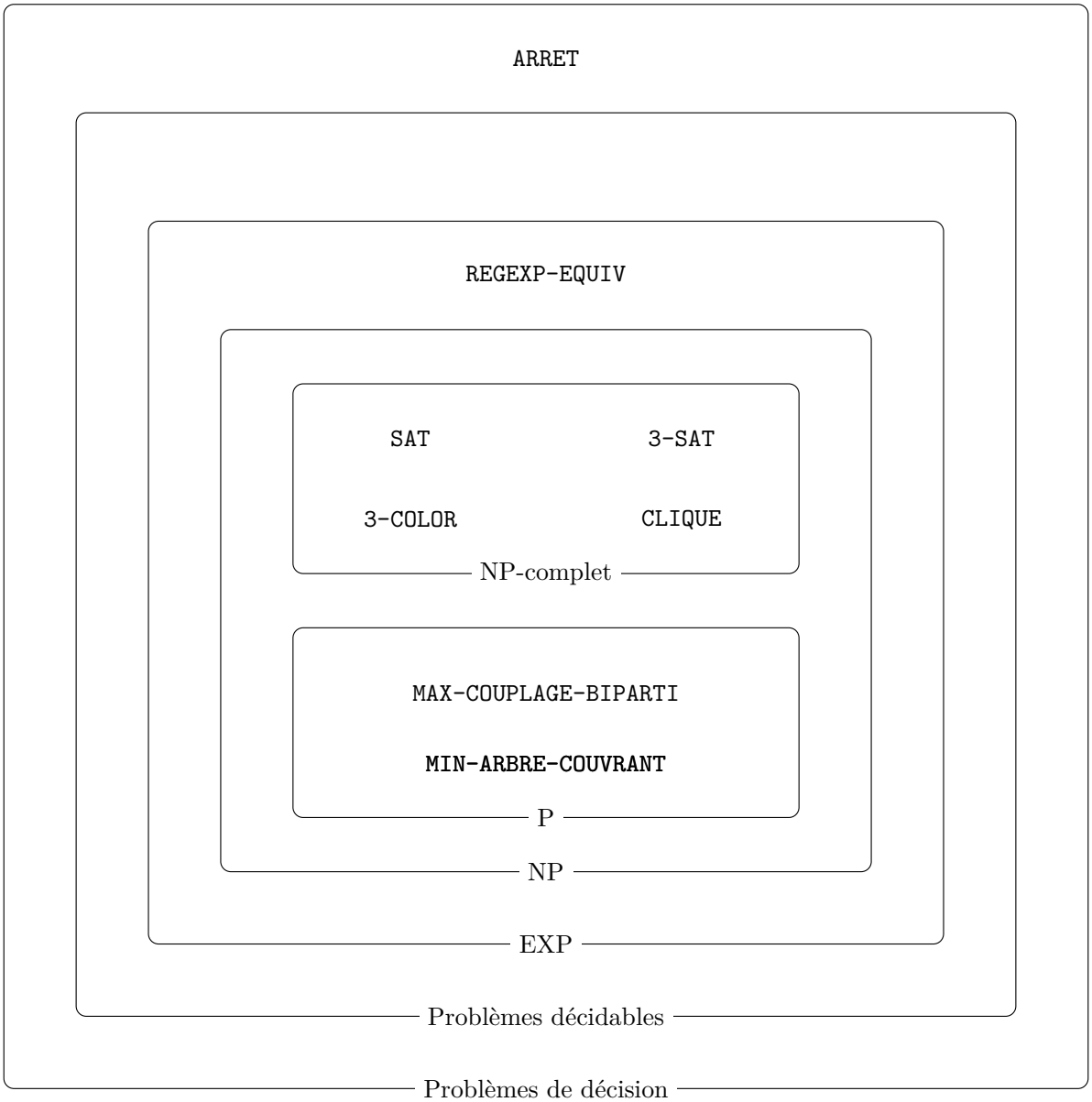
`STABLE`

- Instance : un graphe $G = (S, A)$ et un entier p.
- Question : G contient-il un ensemble stable de taille p, c'est-à-dire un ensemble de p sommets deux à deux non adjacents ?

Pour $\varphi = \bigwedge_{k=1}^{p} C_k$ une instance de 3-SAT, on définit $G_\varphi = (S, A)$ où :
- S contient un sommet par littéral, autant de fois qu'il apparaît dans φ.
- A contient une arête entre deux sommets s'ils sont dans la même clause ou s'ils sont la négation l'un de l'autre.

1. Dessiner G_φ si $\varphi = (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})$.
2. Montrer que si G_φ contient un stable de taille p alors φ est satisfiable.
3. Montrer que si φ est satisfiable alors G_φ contient un stable de taille p. Conclure.
4. Montrer que `STABLE` est NP-complet.

Exercice 13.
Donner un exemple de problème NP-difficile qui n'est pas dans NP, en le démontrant.


ARRET
REGEXP-EQUIV
SAT
3-SAT
3-COLOR
CLIQUE
NP-complet
MAX-COUPLAGE-BIPARTI
MIN-ARBRE-COUVRANT
P
NP
EXP
Problèmes décidables
Problèmes de décision