

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté, $n = |S|$ et $p = |A|$.

I Ordre de parcours

Définition : Parcours en profondeur préfixe, postfixe

On peut ordonner les sommets de G lors d'un parcours en profondeur (DFS) complet :

- Ordre préfixe : on ajoute un sommet au début de son appel récursif (avant ses voisins).
- Ordre postfixe : on ajoute un sommet à la fin de son appel récursif (après ses voisins).

Exercice 1.

Montrer que l'inverse d'une liste de parcours postfixe n'est pas forcément un parcours préfixe.

Définition : Ordre topologique (ou : tri topologique)

Un ordre topologique de G est une liste v_1, v_2, \dots, v_n des sommets de G telle que si $(v_i, v_j) \in A$, alors $i < j$.

Théorème

Si G est acyclique alors l'inverse d'une liste de parcours postfixe est un ordre topologique de G .

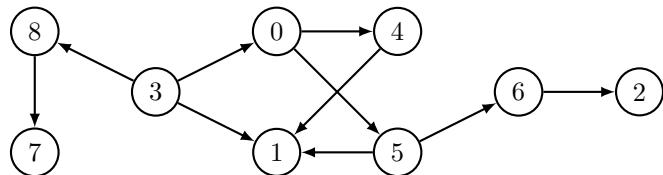
Preuve :

```
let postfixe_inverse (g : int list array) =
  let n = Array.length g in
  let vus = Array.make n false in
  let l = ref [] in
  let rec dfs u =
    if not vus.(u) then (
      vus.(u) <- true;
      List.iter (fun v -> dfs v) g.(u);
      l := u :: !l
    )
  in
  for u = 0 to n - 1 do
    dfs u
  done;
  !l
```

Complexité : $O(n + p)$ pour un graphe représenté par liste d'adjacence car chaque arête est parcourue au plus deux fois ($O(2p) = O(p)$) et chaque sommet est visité une fois ($O(n)$).

Exercice 2.

1. Donner le parcours postfixe du graphe ci-dessous, en choisissant le sommet de plus petit numéro s'il y a plusieurs choix possibles.
 2. En déduire un ordre topologique de ce graphe.
-
-
-

**Théorème**

G possède un ordre topologique si et seulement s'il est acyclique.

Preuve :

Remarque : Si G n'est pas acyclique, l'inverse d'un parcours postfixe donne un ordre topologique des composantes fortement connexes de G .

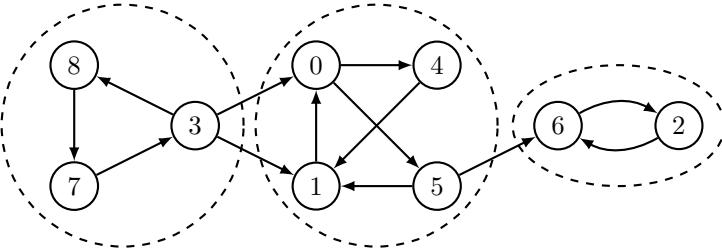
Exercice 3.

Soit G acyclique pondéré par $w : A \rightarrow \mathbb{R}$ et $u \in S$. On suppose G représenté par liste d'adjacence. Montrer que l'on peut calculer la distance $d(u, v)$ de u à tous les sommets $v \in S$ en $O(n + p)$.

Remarque : Résoudre un problème par programmation dynamique revient à résoudre des sous-problèmes dans un ordre topologique du graphe dont chaque sommet est un sous-problème et chaque arête (u, v) signifie que le problème u doit être résolu avant le problème v .

II Algorithme de Kosaraju

L'algorithme de Kosaraju permet de trouver les composantes fortement connexes d'un graphe orienté.



Idée : Si on fait un parcours de graphe depuis 6 ou 2, on obtient la composante fortement connexe $\{2, 6\}$. On lance un DFS depuis chaque sommet dans l'ordre inverse du parcours postfixe de G^T (graphe obtenu en inversant les arcs de G). L'ensemble des sommets visités à chaque DFS forme une composante fortement connexe.

Algorithme de Kosaraju

Entrée : Un graphe orienté $G = (S, A)$

Sortie : Tableau C tel que $C[i]$ est le numéro de la composante fortement connexe de i

$G^T \leftarrow$ graphe transposé de G
 $L \leftarrow$ liste inverse du parcours postfixe de G^T
 $C \leftarrow$ tableau de taille n initialisé à -1
 $k \leftarrow 0$

Pour $u \in L$:

Si $C[u] =$

$C[u] \leftarrow k$

```
DFS( $u$ ) /* Met  $C[v] \leftarrow k$  pour tout sommet  $v$  accessible depuis  $u$  */  

 $k \leftarrow k + 1$ 
```

Renvoyer C

Complexité de l'algorithme de Kosaraju :

- Calcul de G^T : _____
 - Liste inverse du parcours postfixe de G^T : _____
 - Initialisation de C : _____
 - DFS complet : _____

D'où une complexité totale en :

Exercice 4.

Appliquer l'algorithme de Kosaraju au graphe ci-dessus.

Exercice 5.

- Écrire une fonction `transpose` : `int list array` → `int list array` qui prend en argument un graphe G et renvoie son graphe transposé G^T .
 - Écrire une fonction `kosaraju` : `int list array` → `int array` qui prend en argument un graphe G et renvoie un tableau C tel que $C[i]$ est le numéro de la composante fortement connexe de i .