

# Algorithmes d'approximation et Branch and Bound

Quentin Fortier

December 15, 2025

Un problème NP-complet ne peut a priori pas être résolu en complexité polynomiale. On peut chercher des alternatives :

- Un algorithme d'approximation qui renvoie une solution approchée en complexité polynomiale.
- Un algorithme exact qui accélère une méthode de recherche exhaustive (tout en restant en complexité exponentielle), comme la méthode Branch and Bound.

# Problème d'optimisation

## Définition

Un problème d'optimisation est un triplet  $(I, I^+, f)$  avec  $I$  un ensemble d'instances,  $I^+ \subset I$  un ensemble de solutions et  $f$  une fonction objectif à optimiser (minimiser ou maximiser).

Un algorithme  $A$  résout ce problème d'optimisation si pour toute instance  $i \in I$ ,  $A(i)$  renvoie une solution  $s \in I^+$  telle que  $f(s)$  est optimum.

# Problème d'optimisation

Exemple :

STABLE (optimisation)

Instance : un graphe  $G$ .

Solution : un ensemble stable de  $G$  (ensemble de sommets sans arête entre eux).

Maximiser : la taille de l'ensemble stable.

Un problème d'optimisation peut être transformé en un problème de décision :

STABLE (décision)

Instance : un graphe  $G$  et un entier  $k$ .

Question :  $G$  contient-il un ensemble stable de taille  $\geq k$  ?

# Algorithme d'approximation

## Définition

Soit  $\Pi = (I, I^+, f)$  un problème d'optimisation et  $\alpha \in \mathbb{R}^+$ .

On dit qu'un algorithme  $A$  est une  $\alpha$ -approximation de  $\Pi$  si pour toute instance  $x$  de  $\Pi$  :

- $A(x)$  termine et renvoie une solution  $s \in I^+$ .
- si  $\Pi$  est un problème de maximisation :  $f(s) \geq \alpha f(s^*)$
- si  $\Pi$  est un problème de minimisation :  $f(s) \leq \alpha f(s^*)$

où  $s^*$  est une solution optimale de  $\Pi$ .

# Algorithme d'approximation

Remarques :

- $\alpha$  doit être une constante indépendante de l'instance.
- $\alpha \geq 1$  (resp.  $\leq 1$ ) si II est un problème de minimisation (resp. maximisation). Par exemple, une 2-approximation d'un problème de minimisation doit renvoyer une solution dont la valeur est au plus deux fois plus grande que la solution optimale.

# Algorithme d'approximation

## Exercice

Soit  $G = (S, A)$  un graphe non orienté. Une couverture par sommets de  $G$  est un ensemble  $S' \subset S$  tel que pour toute arête  $\{u, v\} \in A$ ,  $u \in S'$  ou  $v \in S'$ .

### COUVERTURE

Instance : un graphe  $G$  et un entier  $k$ .

Question :  $G$  contient-il une couverture par sommets de taille  $\leq k$  ?

- ➊ On admet que STABLE est NP-complet. Montrer que COUVERTURE est NP-complet.

# Algorithme d'approximation

On considère le problème d'optimisation associé à COUVERTURE :

## COUVERTURE-OPT

Instance :  $G = (S, A)$  graphe.

Solution : couverture par sommet  $S'$  de  $G$ .

Minimiser :  $|S'|$ .

## Exercice

- ② Quel est le cardinal minimum d'une couverture d'un chemin ayant  $p$  arêtes ?

# Algorithme d'approximation

## Exercice

- ③ Montrer que l'algorithme suivant renvoie bien une couverture par sommets mais n'est pas une  $\alpha$ -approximation de COUVERTURE-OPT, quel que soit  $\alpha$  :

$S' \leftarrow \emptyset$

**Tant que**  $A \neq \emptyset$  :

    Choisir  $\{u, v\} \in A$

$S' \leftarrow S' \cup \{u\}$

    Retirer de  $A$  toutes les arêtes incidentes à  $u$

**Renvoyer**  $S'$

# Algorithme d'approximation

## Exercice

- ④ Montrer que l'algorithme suivant est une 2-approximation de COUVERTURE-OPT :

$S' \leftarrow \emptyset$

**Tant que**  $A \neq \emptyset$  :

    Choisir  $\{u, v\} \in A$

$S' \leftarrow S' \cup \{u, v\}$

    Retirer de  $A$  toutes les arêtes incidentes à  $u$  ou  $v$

**Renvoyer**  $S'$

# Algorithme d'approximation

## Exercice

### COUPLAGE-POIDS-MAX

Instance : un graphe  $G = (S, A)$  pondéré par  $p : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

Solution : un couplage  $C$  de  $G$ .

Optimisation : maximiser  $p(C) = \sum_{\{u,v\} \in C} p(\{u,v\})$ .

Montrer que l'algorithme suivant est une 2-approximation de COUPLAGE-POIDS-MAX :

$C \leftarrow \emptyset$

**Pour**  $a \in A$  par ordre décroissant de poids :

**Si**  $C \cup \{a\}$  est un couplage :  
         $C \leftarrow C \cup \{a\}$

**Renvoyer**  $C$

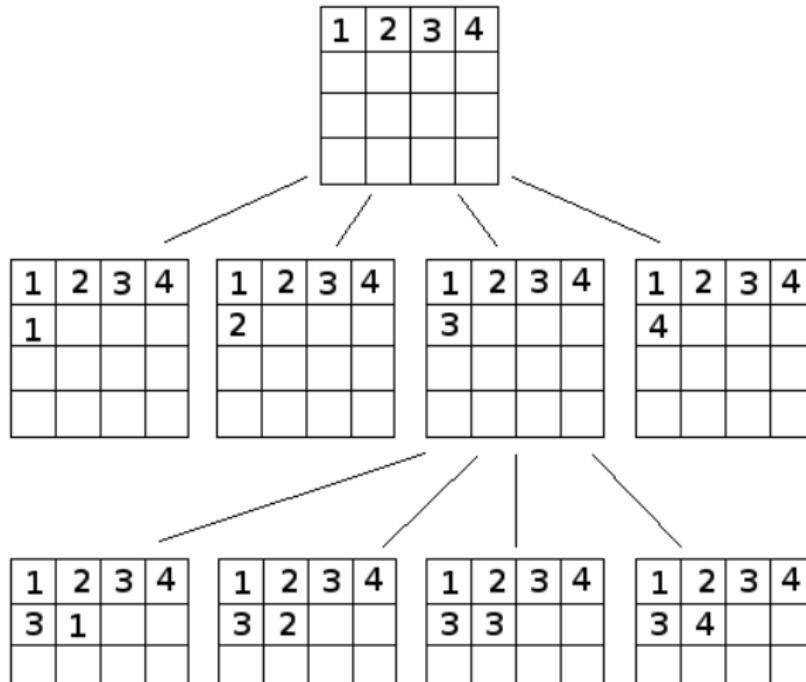
# Branch-and-Bound

## Définition

Un algorithme par backtracking (retour sur trace) construit une solution petit à petit, en revenant en arrière s'il n'est pas possible de l'étendre en une solution complète.

# Branch-and-Bound

Un backtracking revient à faire un parcours en profondeur sur l'arbre des solutions partielles, en passant à une branche suivante lorsqu'il n'est pas possible d'étendre une solution partielle :



## Branch-and-Bound

Exemple : L'algorithme de Quine trouve une valuation satisfaisant une formule logique  $\varphi$ , par backtracking :

1. Choisir une variable  $x$  restante dans  $\varphi$ .
2. Tester récursivement si  $\varphi[x \leftarrow 1]$  est satisfiable.
3. Si non, tester récursivement si  $\varphi[x \leftarrow 0]$  est satisfiable.

## Branch-and-Bound

Exemple : L'algorithme de Quine trouve une valuation satisfaisant une formule logique  $\varphi$ , par backtracking :

1. Choisir une variable  $x$  restante dans  $\varphi$ .
2. Tester récursivement si  $\varphi[x \leftarrow 1]$  est satisfiable.
3. Si non, tester récursivement si  $\varphi[x \leftarrow 0]$  est satisfiable.

L'algorithme simplifie la formule à chaque assignation de variable, ce qui peut permettre de couper des branches (si la formule est insatisfiable). Cet algorithme est donc souvent plus efficace que la recherche exhaustive, même s'il reste en complexité exponentielle dans le pire cas.

# Branch-and-Bound

## Définition

Un algorithme par Branch-and-Bound (séparation et évaluation) permet d'accélérer la résolution par backtracking d'un problème de maximisation  $\Pi = (I, I^+, f)$  en utilisant une heuristique  $h$  telle que si  $x$  est une solution partielle qui peut être étendue en une solution  $y \in I^+$  alors  $f(y) \leq h(x)$ .

L'algorithme conserve la meilleure solution trouvée  $s^*$  et explore un sous-arbre  $x$  que si  $h(x) \geq f(s^*)$ .

# Branch-and-Bound

## Définition

Un algorithme par Branch-and-Bound (séparation et évaluation) permet d'accélérer la résolution par backtracking d'un problème de maximisation  $\Pi = (I, I^+, f)$  en utilisant une heuristique  $h$  telle que si  $x$  est une solution partielle qui peut être étendue en une solution  $y \in I^+$  alors  $f(y) \leq h(x)$ .

L'algorithme conserve la meilleure solution trouvée  $s^*$  et explore un sous-arbre  $x$  que si  $h(x) \geq f(s^*)$ .

## Remarques :

- Autrement dit :  $h(x)$  majore la valeur d'une solution obtenue en étendant  $x$ . Si  $h(x) < f(s^*)$ , alors on ne peut pas obtenir une solution meilleure que  $s^*$  en explorant  $x$ .
- Le principe est le même pour un problème de minimisation en inversant les inégalités.
- On obtient une solution exacte (contrairement à un algorithme

## Branch-and-Bound : Exemple : Sac à dos

### SAC-A-DOS

Instance : un ensemble d'objets de poids  $p_1, \dots, p_n$  et de valeurs  $v_1, \dots, v_n$  et une capacité  $P$ .

Solution : un sous-ensemble d'objets de poids total inférieur à  $P$ .

Optimisation : maximiser la valeur totale des objets.

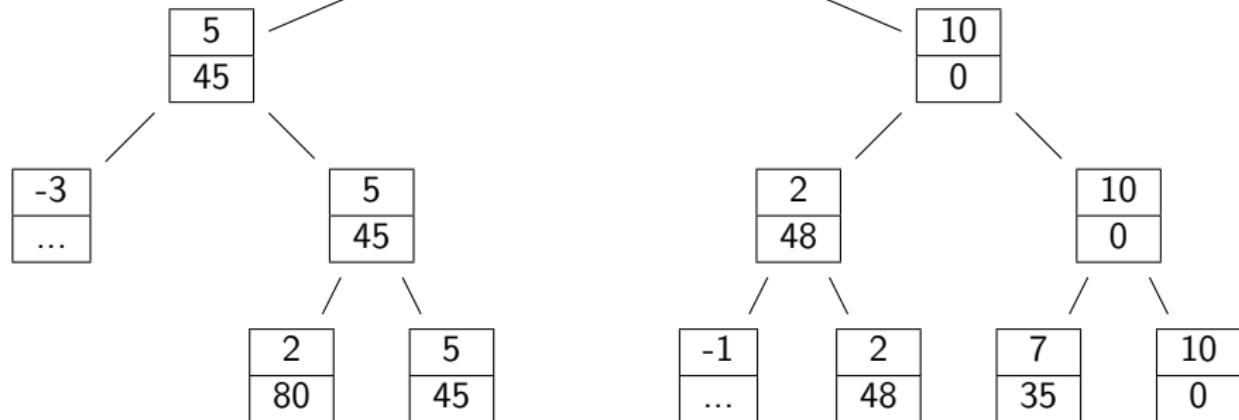
# Branch-and-Bound : Exemple : Sac à dos

Poids	5	8	3
Valeur	45	48	35

Capacité	10
Valeur	0

prendre 1er objet

ne pas prendre 1er objet



Arbre des solutions partielles

## Branch-and-Bound : Exemple : Sac à dos

Heuristique possible :

## Branch-and-Bound : Exemple : Sac à dos

Heuristique possible : Valeurs déjà prises + valeurs des objets restants.

## Branch-and-Bound : Exemple : Sac à dos

Poids	5	8	3
Valeur	45	48	35

10	128
0	

· Heuristique

Meilleure solution :  $-\infty$

# Branch-and-Bound : Exemple : Sac à dos

Poids	5	8	3
Valeur	45	48	35

10	128
0	

· Heuristique

5	128
45	

Meilleure solution :  $-\infty$

# Branch-and-Bound : Exemple : Sac à dos

Poids	5	8	3
Valeur	45	48	35

10	128
0	

· Heuristique

5	128
45	

-3	
...	...

Meilleure solution :  $-\infty$

# Branch-and-Bound : Exemple : Sac à dos

Poids	5	8	3
Valeur	45	48	35

10	128
0	

· Heuristique

5	128
45	

-3	
...	...

5	80
45	

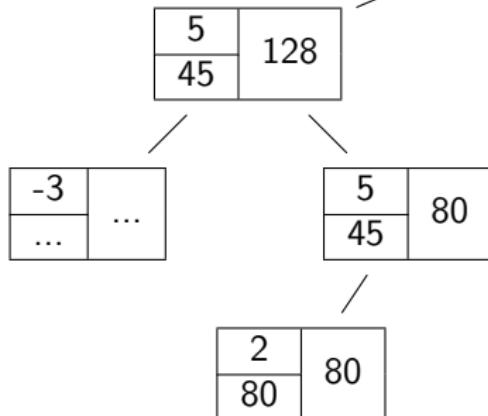
Meilleure solution :  $-\infty$

# Branch-and-Bound : Exemple : Sac à dos

Poids	5	8	3
Valeur	45	48	35

10	128
0	

Heuristique



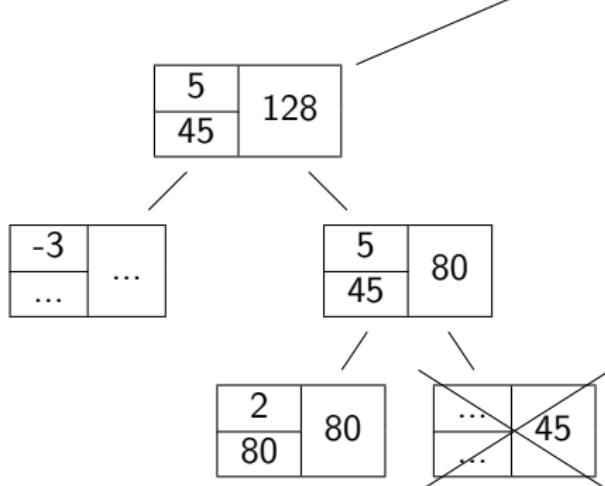
Meilleure solution : 80

# Branch-and-Bound : Exemple : Sac à dos

Poids	5	8	3
Valeur	45	48	35

10	128
0	

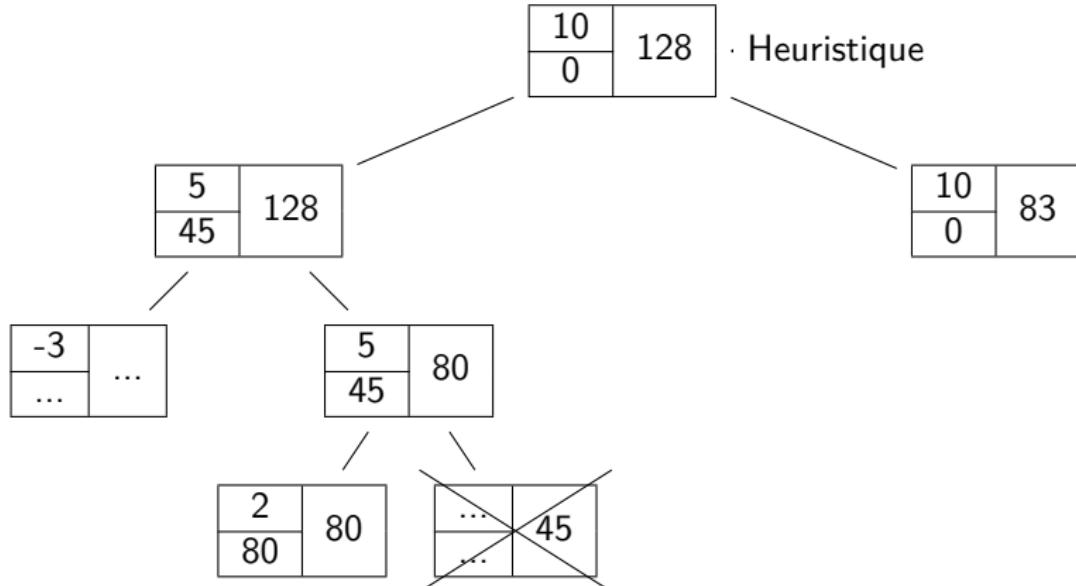
Heuristique



Meilleure solution : 80

# Branch-and-Bound : Exemple : Sac à dos

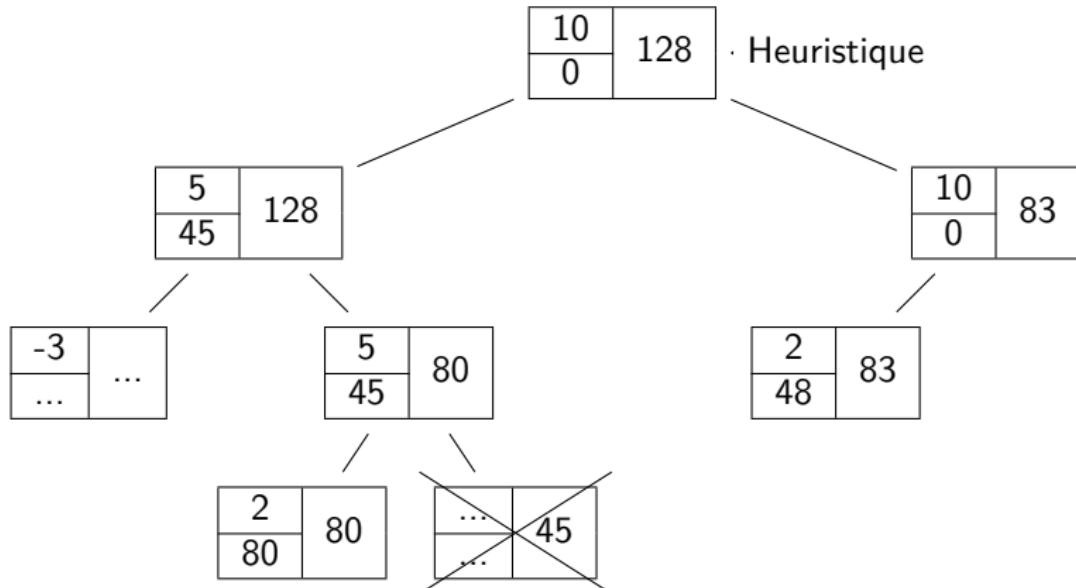
Poids	5	8	3
Valeur	45	48	35



Meilleure solution : 80

# Branch-and-Bound : Exemple : Sac à dos

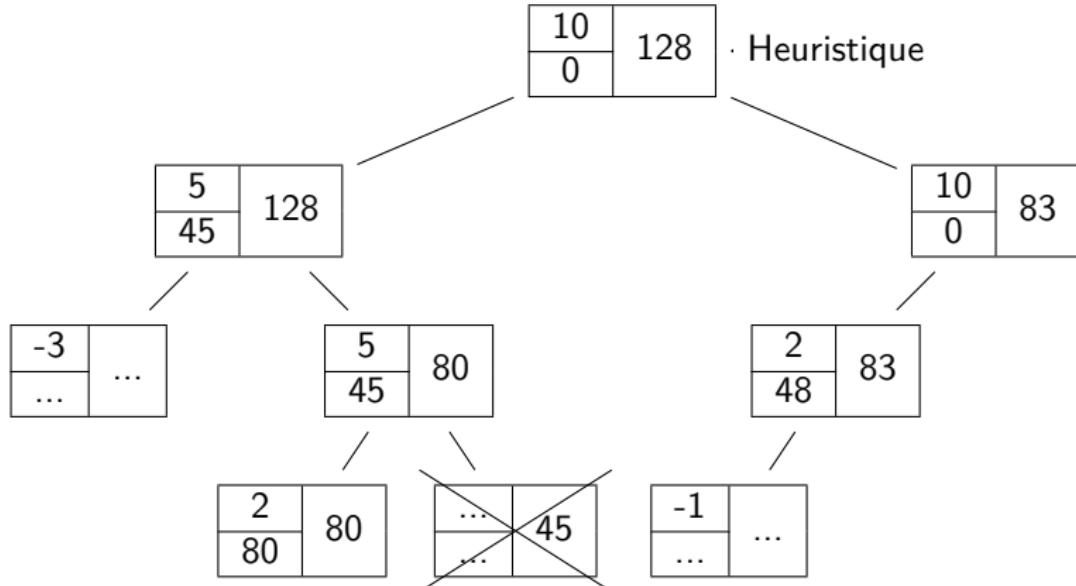
Poids	5	8	3
Valeur	45	48	35



Meilleure solution : 80

# Branch-and-Bound : Exemple : Sac à dos

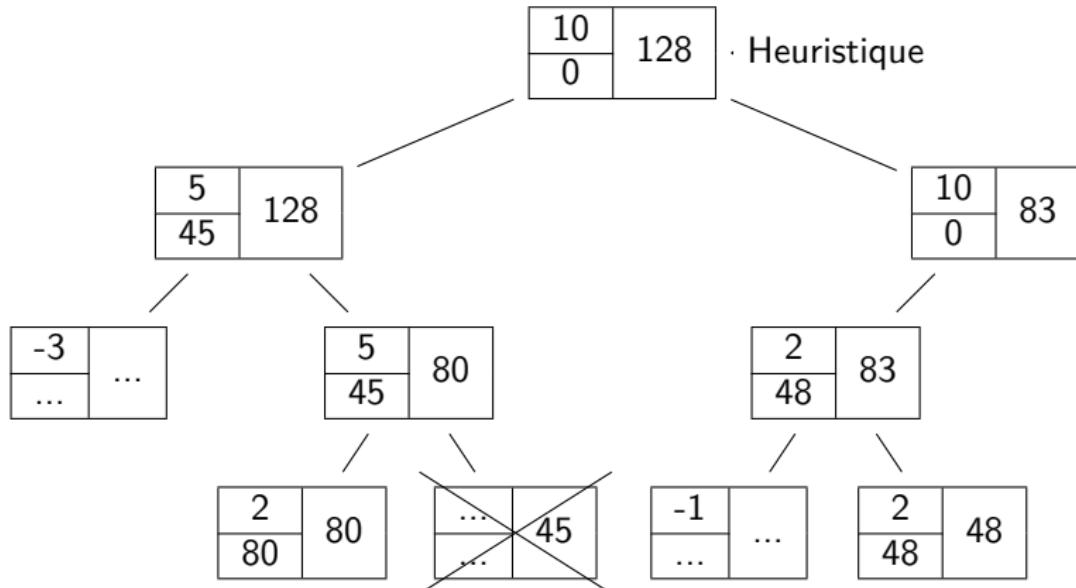
Poids	5	8	3
Valeur	45	48	35



Meilleure solution : 80

# Branch-and-Bound : Exemple : Sac à dos

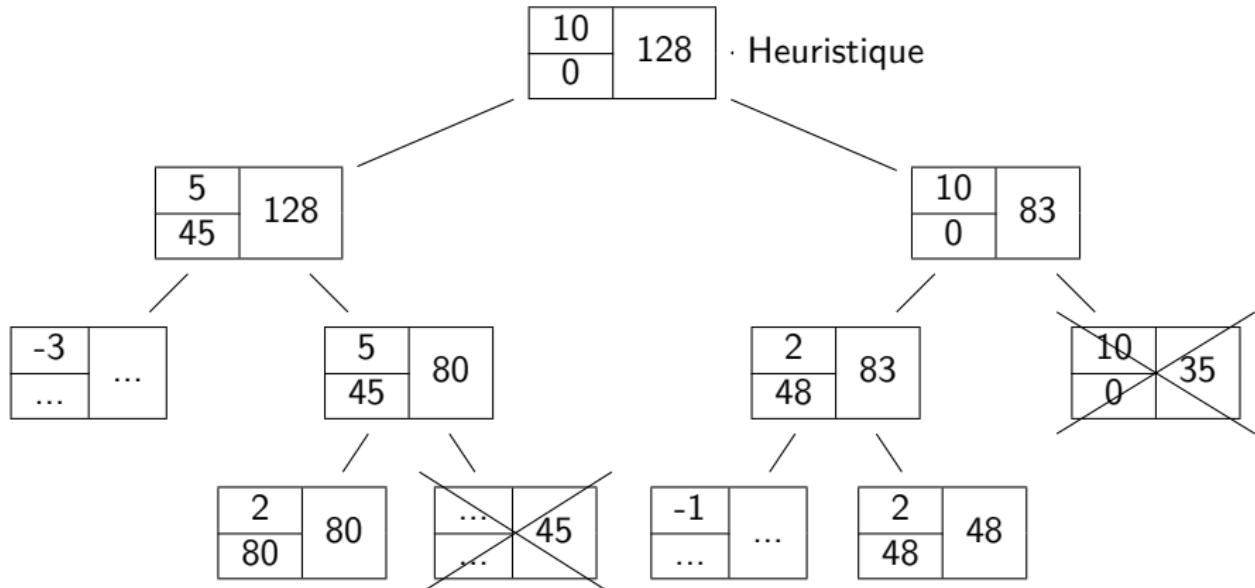
Poids	5	8	3
Valeur	45	48	35



Meilleure solution : 80

# Branch-and-Bound : Exemple : Sac à dos

Poids	5	8	3
Valeur	45	48	35



Meilleure solution : 80