Grammaires non-contextuelles

Quentin Fortier

October 1, 2025

Définitions : Grammaire non-contextuelle

Définition : Grammaire non-contextuelle

Une grammaire non-contextuelle (ou : hors-contexte) est un quadruplet $G = (\Sigma, V, R, S)$ où :

- V est un ensemble fini de variables
- Σ est un alphabet fini de terminaux
- $R \subset V \times (V \cup \Sigma)^*$ est un ensemble fini de règles de production, chaque règle $(X, \alpha) \in R$ étant notée $X \to \alpha$
- $S \in V$ est le symbole initial

Remarques :

- Par convention, on note les variables en majuscules et les terminaux en minuscules.
- On peut noter $X \to \alpha \mid \beta$ au lieu de $X \to \alpha$, $X \to \beta$.

Définitions : Dérivation

Soit $G = (\Sigma, V, R, S)$ une grammaire non-contextuelle.

Définition : Dérivation

Soient $\alpha, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$.

- On note $\alpha \Rightarrow \beta$ s'il existe une règle $X \to \gamma$ telle que $\alpha = \alpha_1 X \alpha_2$ et $\beta = \alpha_1 \gamma \alpha_2$ avec $\alpha_1, \alpha_2 \in (V \cup \Sigma)^*$.
  On dit alors qu'on a une dérivation immédiate de α en β.
- On note $\alpha \Rightarrow^n \beta$ s'il existe des mots $\gamma_0 = \alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_n = \beta$ tels que $\gamma_0 \Rightarrow \gamma_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \gamma_n$.
  On dit alors qu'on a une dérivation de longueur n de α en β.
- On note $\alpha \Rightarrow^* \beta$ si $\alpha \Rightarrow^n \beta$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On parle alors de dérivation de α en β.

Définitions : Langage engendré

Soit $G = (\Sigma, V, R, S)$ une grammaire non-contextuelle.

Définition : Mot généré

On dit que G génère un mot $w \in \Sigma^*$ si $S \Rightarrow^* w$.

Attention : les mots générés sont des mots de Σ^*, qui ne doivent donc contenir que des symboles terminaux.

Définition : Langage engendré

L'ensemble $L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^* w\}$ est le langage engendré par G.

Définition : Langage non-contextuel

Un langage L est dit non-contextuel (ou : algébrique) s'il existe une grammaire non-contextuelle G telle que $L = L(G)$.

Remarque : deux grammaires différentes peuvent engendrer le même langage.

Définitions : Langage engendré

Exemples :

- Soit $G = (\Sigma = \{a, b\}, V = \{S\}, R = \{S \to aaS \mid b\}, S)$.
  G génère aab car $S \Rightarrow aaS \Rightarrow aab$.
  $L(G) =$

Définitions : Langage engendré

Exemples :

- Soit $G = (\Sigma = \{a, b\}, V = \{S\}, R = \{S \to aaS \mid b\}, S)$.
  G génère aab car $S \Rightarrow aaS \Rightarrow aab$.
  $L(G) = (aa)^* b$.
- Soit $G = (\{a, b\}, \{S\}, \{S \to aSb \mid \varepsilon\}, S)$.
  $L(G) =$

Définitions : Langage engendré

Exemples :

- Soit $G = (\Sigma = \{a, b\}, V = \{S\}, R = \{S \to aaS \mid b\}, S)$.
  G génère aab car $S \Rightarrow aaS \Rightarrow aab$.
  $L(G) = (aa)^* b$.
- Soit $G = (\{a, b\}, \{S\}, \{S \to aSb \mid \varepsilon\}, S)$.
  $L(G) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- Soit $G = (\{x, y, \top, \bot, \vee, \wedge, \neg\}, \{S\}, R, S)$ avec P contenant les règles suivantes : $S \to \top \mid \bot \mid x \mid y \mid \neg S \mid S \vee S \mid S \wedge S$.
  $L(G)$ est

Définitions : Langage engendré

Exemples :

- Soit $G = (\Sigma = \{a, b\}, V = \{S\}, R = \{S \to aaS \mid b\}, S)$.
  G génère aab car $S \Rightarrow aaS \Rightarrow aab$.
  $L(G) = (aa)^* b$.
- Soit $G = (\{a, b\}, \{S\}, \{S \to aSb \mid \varepsilon\}, S)$.
  $L(G) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- Soit $G = (\{x, y, \top, \bot, \vee, \wedge, \neg\}, \{S\}, R, S)$ avec P contenant les règles suivantes : $S \to \top \mid \bot \mid x \mid y \mid \neg S \mid S \vee S \mid S \wedge S$.
  $L(G)$ est l'ensemble des formules logiques bien formées, avec x et y comme variables propositionnelles.

Définitions : Langage engendré

On peut décrire un langage de programmation à l'aide d'une grammaire (BNF) : en C et en OCaml.

Définitions : Langage engendré

Exercice

Donner des grammaires engendrant les langages suivants sur $\{a, b\}$:

1. $L_1 = ab^*a$.
2. $L_2 =$ ensemble des mots dont la taille est un multiple de 3.
3. $L_3 =$ ensemble des mots ayant bbb comme facteur.
4. $L_4 =$ ensemble des expressions arithmétiques bien formées, comme $4 + 3 \times 2$.
5. $L_5 =$ ensembles des palindromes, c'est-à-dire des mots qui se lisent de la même façon de gauche à droite et de droite à gauche.
6. $L_6 =$ ensembles des mots qui ne sont pas des palindromes.

Définitions : Langage engendré

On peut montrer rigoureusement $L(G) = L$ par double inclusion.

- $L(G) \subset L$: montrer que si $S \Rightarrow^n u$ alors $u \in L$, par récurrence sur n.
- $L \subset L(G)$: montrer que si $u \in L$ alors $u \in L(G)$, par récurrence sur $|u|$.

Définitions : Langage engendré

On utilise alors souvent le théorème « évident » suivant :

Théorème

Soit $G = (\Sigma, V, R, S)$ une grammaire, $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in (V \cup \Sigma)^*$ et $n \in \mathbb{N}$.
Si $\alpha_1\alpha_2 \Rightarrow^n \beta$ alors il existe $\beta_1, \beta_2 \in (V \cup \Sigma)^*$, $k, p \in \mathbb{N}$ tels que :

- $\beta = \beta_1\beta_2$
- $\alpha_1 \Rightarrow^k \beta_1$
- $\alpha_2 \Rightarrow^p \beta_2$
- $n = k + p$

Définitions : Langage engendré

Exercice

Soit G la grammaire définie par les règles $S \to aSbS \mid bSaS \mid \varepsilon$.
Déterminer $L(G)$, en le démontrant.

Langages non-contextuels et langages réguliers

Théorème

L'ensemble des langages non-contextuels est stable par union, concaténation et étoile.
C'est-à-dire : si L_1 et L_2 sont des langages non-contextuels alors $L_1 \cup L_2$, $L_1 L_2$ et L_1^* sont des langages non-contextuels.

Langages non-contextuels et langages réguliers

Théorème

Tout langage régulier est non-contextuel.

Langages non-contextuels et langages réguliers

Théorème

Tout langage régulier est non-contextuel.

Remarque : la réciproque est fausse car $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est non-contextuel mais n'est pas régulier.

Langages non-contextuels et langages réguliers

Définition : Grammaire régulière (HP)

Une grammaire est dite régulière (à droite) si chaque règle est de la forme $X \to aY$, $X \to a$ ou $X \to \varepsilon$.

Exercice

Donner des grammaires régulières engendrant les langages suivants sur $\{a, b\}$:

1. Ensemble des mots finissant par a.
2. Ensemble des mots de taille un multiple de 3.
3. a^*ba^*.

Langages non-contextuels et langages réguliers

Théorème

Un langage est régulier si et seulement s'il est engendré par une grammaire régulière.