I Exemples

On rappelle que P ⊂ NP ⊂ EXP ⊂ Décidables.
Donner la classe de complexité la plus précise possible des problèmes suivants :

1.

REGEXP-EQUIV

Instance : deux expressions régulières l_1 et l_2.
Question : $L(l_1) = L(l_2)$?

Solution : On peut :

- transformer l_1 et l_2 en automates A_1 et A_2 avec l'algorithme de Thompson ou de Berry-Sethi (complexité polynomiale)
- déterminiser A_1 et A_2 (complexité exponentielle)
- construire des automates produits A_1' et A_2' reconnaissants $L(A_1) \cap \overline{L(A_2)}$ et $L(A_2) \cap \overline{L(A_1)}$ (complexité polynomiale)
- tester si $L(A_1') = \emptyset$ et $L(A_2') = \emptyset$ en cherchant un chemin d'un état initial vers un état final par parcours en profondeur (complexité polynomiale)

D'où REGEXP-EQUIV ∈ EXP.

2.

CHEMIN-≤

Instance : un graphe $G = (S, A)$, deux sommets $s, t \in A$ et un entier k.
Question : existe-t-il un chemin élémentaire de s à t de longueur $\leq k$?

Solution : CHEMIN-≤ ∈ P avec un parcours en largeur.

3.

CHEMIN-≥

Instance : un graphe $G = (S, A)$, deux sommets $s, t \in S$ et un entier k.
Question : existe-t-il un chemin élémentaire de s à t de longueur $\geq k$?

Solution : CHEMIN-≥ ∈ NP, où un certificat est un chemin de longueur supérieur ou égal à k, qui est bien de taille polynomiale. On peut vérifier un certificat en temps polynomial : il suffit de vérifier que le chemin est élémentaire et de longueur supérieure ou égale à k.

COUPLAGE-PARFAIT-BIPARTI

Instance : un graphe biparti $G = (S, A)$.
Question : G admet-il un couplage parfait ?

Solution : On calcule un couplage maximum avec l'algorithme des chemins augmentants (en complexité $O(|S||A|)$), et on vérifie que sa taille est $\frac{|S|}{2}$. Donc COUPLAGE-PARFAIT-BIPARTI ∈ P.

4.

COUVERTURE-ARETES

Instance : un graphe $G = (S, A)$ et un entier k.
Question : G possible t-il une couvertures par arêtes de taille $\leq k$, c'est-à-dire un ensemble d'arêtes $A' \subseteq A$ tel que chaque sommet de S est adjacent à au moins une arête de A' ?

Solution : COUVERTURE-ARETES ∈ P en trouvant un couplage maximum puis en ajoutant des arêtes de manière gloutonne pour couvrir tous les sommets. On obtient alors une couverture par arêtes de taille minimum et on vérifie que sa taille est $\leq k$.

5.

CHEMIN-HAMILTONIEN
Instance : un graphe $G = (S, A)$. Question : G admet-il un chemin hamiltonien, c'est-à-dire un chemin passant exactement une fois par chaque sommet ?

Solution : CHEMIN-HAMILTONIEN $\in$ NP, où un certificat est un chemin hamiltonien. On peut vérifier un certificat en temps polynomial : il suffit de vérifier que le chemin passe exactement une fois par chaque sommet.

II k-COLOR

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. On appelle k-coloration de G une fonction $c : S \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ telle que pour tout arc $(u, v) \in A$, on a $c(u) \neq c(v)$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on considère le problème suivant :

k-COLOR
Entrée : un graphe G non orienté Sortie : G est-il k-colorable ?

1. Montrer que 1-COLOR et 2-COLOR appartiennent à P.

   Solution : 1-COLOR est vrai si et seulement si le graphe ne contient aucune arête. 2-COLOR est vrai si et seulement si le graphe est biparti, ce qui peut être testé en temps linéaire (parcours en profondeur en alternant les couleurs).

2. Montrer que 3-COLOR appartient à NP.

   Solution : On peut vérifier en temps polynomial qu'une coloration est correcte en parcourant les arêtes du graphe.

3. Montrer que 3-COLOR se réduit polynomialement à 3-SAT.

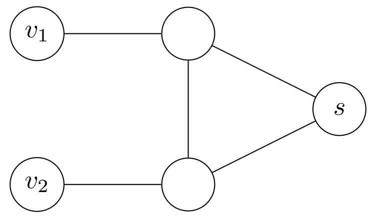
   Solution : Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. Pour chaque sommet $u \in S$, on créé des variables $x_{u,1}, x_{u,2}, x_{u,3}$ ($x_{u,i}$ va être vrai ssi le sommet u est colorié avec la couleur i).
   Pour chaque sommet u, on ajoute la clause $(x_{u,1} \vee x_{u,2} \vee x_{u,3})$ (chaque sommet doit être colorié) et $\neg x_{u,j} \vee \neg x_{u,j'}$ pour $j \neq j'$ (un sommet ne peut pas être colorié avec deux couleurs différentes).
   Pour chaque arête $(u, v) \in A$, on ajoute les clauses $\neg x_{u,i} \vee \neg x_{v,i}$ (deux sommets adjacents ne peuvent pas être coloriés de la même couleur).
   La formule ϕ obtenue par conjonction de ces clauses est une instance de 3-SAT et est satisfiable si et seulement si G est 3-colorable. De plus, la construction et la taille de ϕ sont polynomiales en la taille de G.

Dans la suite, on veut trouver une réduction polynomiale de 3-SAT à 3-COLOR.
On considère une formule φ de 3-SAT de variables $x_1, ..., x_n$ et on veut construire un graphe G qui soit 3-colorable si et seulement si φ est satisfiable.
On ajoute n sommets dans G (encore appelés x_1, ..., x_n par abus de notation) correspondant à x_1, ..., x_n, n sommets correspondant à $\neg x_1$, ..., $\neg x_n$ et 3 sommets T, F, B reliés deux à deux.
Dans un 3-coloriage de G, S et F doivent être de couleurs différentes. Chaque variable x_i sera considérée comme fausse si le sommet correspondant est de la même couleur que F et vraie s'il est de la même couleur que T.

4. Expliquer comment ajouter des arêtes à G pour que chaque variable soit vraie ou fausse (c'est-à-dire coloriée avec la même couleur que F ou la même couleur que T).

   Solution : Pour chaque i, on relie x_i, $\neg x_i$ et B deux à deux. Ainsi, x_i est coloriée avec la même couleur que T ou F et $\neg x_i$ avec la couleur opposée.

On considère un sous-graphe (*gadget*) de la forme suivante à ajouter dans G :



5. Montrer que si v_1 et v_2 sont de la même couleur que F alors la couleur de s est imposée et préciser cette dernière.
6. Montrer que si v_1 ou v_2 est de la même couleur que T alors il existe un coloriage de G où s est de la même couleur que T.
7. Quelle formule logique le gadget ci-dessus permet-il de représenter ?
8. Quel gadget ajouter à G de façon pour représenter une clause $l_1 \vee l_2 \vee l_3$?
9. Montrer que 3-COLOR est NP-complet.
10. Que dire de k-COLOR pour $k \geq 4$?

III Stable et clique

STABLE

• Instance : un graphe G et un entier k
• Question : G contient-il un ensemble stable de taille k, c'est-à-dire un ensemble de k sommets deux à deux non adjacents ?

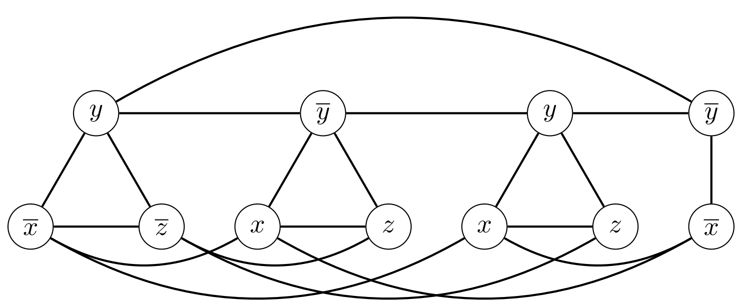
CLIQUE

• Instance : un graphe G et un entier k
• Question : G contient-il une clique de taille k, c'est-à-dire un ensemble de k sommets deux à deux adjacents ?

1. Montrer que STABLE $\in$ NP.
2. Pour $\varphi = \bigwedge_{k=1}^{p} C_k$ une instance de 3-SAT, on définit $G_\varphi = (S, A)$ où :
   • S contient un sommet par littéral, autant de fois qu'il apparaît dans φ.
   • A contient une arête entre deux sommets s'ils sont dans la même clause ou s'ils sont la négation l'un de l'autre.
   Dessiner G_φ si $\varphi = (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})$.
3. Montrer que si G_φ contient une clique de taille p alors φ est satisfiable.
4. Montrer que si φ est satisfiable alors G_φ contient une clique de taille p. Conclure.
5. Montrer que CLIQUE est NP-complet.

Solution :

1. Un sous-ensemble $X \subseteq S$ est un certificat. Un vérificateur consiste à vérifier que pour $\{x, y\} \subseteq X, \{x, y\} \notin A$. Cela se fait bien en temps polynomial.
2. On obtient le graphe suivant :



3. Si G_φ possède un stable X de taille m, alors un seul sommet par clause peut être choisi (car tous les sommets d'une même clause sont adjacents). De plus, il n'est pas possible de choisir un sommet x et un sommet $\overline{x}$ (qui sont toujours adjacents). On définit une valuation μ tel que $\mu(\ell) = 1$ si $\ell \in X$ et $\mu(\ell) = 0$ sinon. D'après la remarque précédente, μ est bien défini et μ est un modèle de chaque clause, donc un modèle de φ.

4. Si φ est satisfiable, il possède un modèle μ. Il existe (au moins) un littéral ℓ_i dans chaque clause C_i tel que $\mu(\ell_i) = 1$. On choisit les sommets correspondant dans le graphe G_φ pour former un ensemble X. Cet ensemble forme bien un stable de taille m.

5. Comme G_φ se construit en temps polynomial en $|\varphi|$, on a montré par les deux questions précédentes que 3-SAT $\leq_p$ STABLE. Sachant que 3-SAT est NP-complet, on en déduit que STABLE est NP-difficile, donc NP-complet (car dans NP).

6. On a montré dans des exercices précédents que CLIQUE $\in$ NP et que STABLE $\leq_p$ CLIQUE. On en déduit que CLIQUE est NP-complet.