I Mots qui commutent

Soient u et v deux mots. Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. $uv = vu$.
2. Il existe un mot w et des entiers $k, p \in \mathbb{N}$ tels que $u = w^k$ et $v = w^p$.

II Mots de Fibonacci

Les mots de Fibonacci sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ sont définis par :

$$f_0 = a, \quad f_1 = b, \quad f_{n+2} = f_{n+1} f_n \text{ pour } n \geq 0.$$

1. Montrer que pour $n \geq 2$, le suffixe de longueur 2 de f_n est ba si n est pair, ab si n est impair.
2. Pour $n \geq 3$, on note g_n le préfixe de f_n obtenu en supprimant ses deux dernières lettres.
   Montrer que g_n est un palindrome, c'est-à-dire que $g_n = \widetilde{g_n}$ où $\widetilde{g_n}$ est obtenu en inversant les lettres de g_n.

III Règles sur les expressions régulières

Pour chacune des propositions suivantes sur des expressions régulières quelconques, donner une preuve ou un contre-exemple :

1. $(e^*)^* \equiv e^*$
2. $(e_1|e_2)^* \equiv e_1^*|e_2^*$
3. $(e_1 e_2)^* \equiv e_1^* e_2^*$
4. $(e_1|e_2)^* \equiv (e_1^* e_2^*)^*$

IV Exemples de langages réguliers

1. Donner une expression régulière dont le langage est l'ensemble des mots sur $\{a, b, c\}$ contenant exactement un a et un b (et un nombre quelconque de c).
2. Donner une expression régulière dont le langage est l'ensemble des mots sur $\{a, b, c\}$ ne contenant pas de a consécutifs (aa ne doit pas apparaître).
3. Donner une expression régulière dont le langage est l'ensemble des mots sur $\{a, b, c\}$ contenant exactement deux a et tels que tout c est précédé d'un b.
4. Si $x \in \mathbb{R}$, on note $L(x)$ l'ensemble des préfixes des chiffres de x après la virgule. Par exemple, $L(\pi) = \{\varepsilon, 1, 14, 141, 1415...\}$.
   En sachant que $\frac{1}{6} = 0.1666...$ et $\frac{1}{7} = 0.142857142857...$, montrer que $L(\frac{1}{6})$ et $L(\frac{1}{7})$ sont réguliers.
5. Montrer plus généralement que $L(x)$ est régulier si $x \in \mathbb{Q}$ (on montrera plus tard que c'est en fait une équivalence).
6. Donner une expression régulière dont le langage est $\{a^n b^p \mid n = p \mod 2\}$.

V Distance de Hamming

Si $u = u_1...u_n$ et $v = v_1...v_n$ sont deux mots de même longueur sur un alphabet Σ, leur distance de Hamming est :

$$d(u, v) = |\{i \mid u_i \neq v_i\}|$$

1. Montrer que la distance de Hamming est une distance sur Σ^*.

Étant donné un langage L sur Σ, on définit son voisinage de Hamming $\mathcal{H}(L) = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in L,\ d(u, v) \leq 1\}$.

2. Donner une expression régulière pour $\mathcal{H}(L(0^*1^*))$.
3. Montrer que si L est un langage régulier alors $\mathcal{H}(L)$ est un langage régulier.
4. Écrire une fonction `f : 'a regexp -> 'a regexp` renvoyant une expression régulière pour le voisinage de Hamming d'un langage, en utilisant le type suivant :

```
type 'a regexp =
    | Vide | Epsilon | L of 'a (* L a est la lettre a *)
    | Union of 'a regexp * 'a regexp
    | Concat of 'a regexp * 'a regexp
    | Etoile of 'a regexp
```

VI Clôture par sur-mot (oral ENS info)

On fixe un alphabet Σ. Étant donné deux mots $w, w' \in \Sigma^*$, on dit que w' est un sur-mot de w, noté $w \preccurlyeq w'$, s'il existe une fonction strictement croissante ϕ de $\{1, \dots, |w|\}$ dans $\{1, \dots, |w'|\}$ telle que $w_i = w'_{\phi(i)}$ pour tout $1 \leq i \leq |w|$, où $|w|$ dénote la longueur de w et w_i dénote la i-ème lettre de w. Étant donné un langage L, on note $\overline{L}$ le langage des sur-mots de mots de L, c'est-à-dire $\overline{L} := \{w' \in \Sigma^* \mid \exists w \in L, w \preccurlyeq w'\}$.

1. On pose L_0 le langage défini par l'expression régulière ab^*a, et L_1 le langage défini par l'expression régulière $(ab)^*$. Donner une expression régulière pour $\overline{L_0}$ et pour $\overline{L_1}$.

2. Montrer que, pour tout langage L, on a $\overline{\overline{L}} = \overline{L}$.

3. Existe-t-il des langages L' pour lesquels il n'existe aucun langage L tel que $\overline{L} = L'$?

4. Montrer que, pour tout langage régulier L, le langage $\overline{L}$ est également régulier.

5. On admettra pour cette question le résultat suivant : pour toute suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de mots de Σ^*, il existe $i < j$ tels que $w_i \preccurlyeq w_j$.

   Montrer que, pour tout langage L (non nécessairement régulier), il existe un langage fini $F \subseteq L$ tel que $\overline{F} = \overline{L}$.

6. Un langage L est clos par sur-mots si, pour tout $u \in L$ et $v \in \Sigma^*$ tel que $u \preccurlyeq v$, on a $v \in L$. Déduire de la question précédente que tout langage clos par sur-mots est régulier.

7. On admet que les langages réguliers sont stables par passage au complémentaire. Un langage L est clos par sous-mots si, pour tout $u \in L$ et $v \in \Sigma^*$ tel que $v \preccurlyeq u$, on a $v \in L$. Montrer que tout langage clos par sous-mots est régulier.

8. Démontrer le résultat admis à la question 5.