I Exemples

On rappelle que P ⊂ NP ⊂ EXP ⊂ Décidables.
Donner la classe de complexité la plus précise possible des problèmes suivants :

1.

REGEXP-EQUIV

Instance : deux expressions régulières e_1 et e_2.
Question : $L(e_1) = L(e_2)$?

Solution : On peut :

- transformer e_1 et e_2 en automates A_1 et A_2 avec l'algorithme de Thompson ou de Berry-Sethi (complexité polynomiale)
- déterminiser A_1 et A_2 (complexité exponentielle)
- construire des automates produits A_1' et A_2' reconnaissants $L(A_1) \cap \overline{L(A_2)}$ et $L(A_2) \cap \overline{L(A_1)}$ (complexité polynomiale)
- tester si $L(A_1') = \emptyset$ et $L(A_2') = \emptyset$ en cherchant un chemin d'un état initial vers un état final par parcours en profondeur (complexité polynomiale)

D'où REGEXP-EQUIV ∈ EXP.

2.

CHEMIN-≤

Instance : un graphe $G = (S, A)$, deux sommets $s, t \in S$ et un entier k.
Question : existe-t-il un chemin élémentaire de s à t de longueur $\leq k$?

Solution : CHEMIN-≤ ∈ P avec un parcours en largeur.

3.

CHEMIN-≥

Instance : un graphe $G = (S, A)$, deux sommets $s, t \in S$ et un entier k.
Question : existe-t-il un chemin élémentaire de s à t de longueur $\geq k$?

Solution : CHEMIN-≥ ∈ NP, où un certificat est un chemin de longueur supérieur ou égal à k, qui est bien de taille polynomiale. On peut vérifier un certificat en temps polynomial : il suffit de vérifier que le chemin est élémentaire et de longueur supérieure ou égale à k.

4.

CHEMIN-≥-ARBRE

Instance : un arbre $G = (S, A)$.
Question : existe-t-il un chemin élémentaire de s à t de longueur $\geq k$?

Solution : On peut enraciner G puis calculer le diamètre d (c'est-à-dire la distance maximum entre deux sommets, qui est aussi la longueur maximum d'un chemin élémentaire) de G avec une fonction récursive en complexité linéaire.
Il suffit ensuite de tester si $d \geq k$.

5.

CHEMIN-HAMILTONIEN

Instance : un graphe $G = (S, A)$.
Question : G admet-il un chemin hamiltonien, c'est-à-dire un chemin passant exactement une fois par chaque sommet ?

Solution : CHEMIN-HAMILTONIEN ∈ NP, où un certificat est un chemin hamiltonien. On peut vérifier un certificat en temps polynomial : il suffit de vérifier que le chemin passe exactement une fois par chaque sommet.

COUPLAGE-PARFAIT-BIPARTI

Instance : un graphe biparti $G = (S, A)$.
Question : G admet-il un couplage parfait ?

6. Solution : On calcule un couplage maximum avec l'algorithme des chemins augmentants (en complexité $\mathrm{O}(|S||A|)$), et on vérifie que sa taille est $\frac{|S|}{2}$. Donc COUPLAGE-PARFAIT-BIPARTI $\in$ P.

II k-COLOR

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. On appelle k-coloration de G une fonction $c : S \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ telle que pour tout arc $(u, v) \in A$, on a $c(u) \neq c(v)$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on considère le problème suivant :

k-COLOR

Entrée : un graphe $G = (S, A)$ non orienté
Sortie : G est-il k-colorable ?

1. Montrer que 1-COLOR et 2-COLOR appartiennent à P.

   Solution : 1-COLOR est vrai si et seulement si le graphe ne contient aucune arête. 2-COLOR est vrai si et seulement si le graphe est biparti, ce qui peut être testé en temps linéaire (parcours en profondeur en alternant les couleurs).

2. Montrer que 3-COLOR appartient à NP.

   Solution : On peut vérifier en temps polynomial qu'une coloration est correcte en parcourant les arêtes du graphe.

3. Montrer que 3-COLOR se réduit polynomialement à 3-SAT.

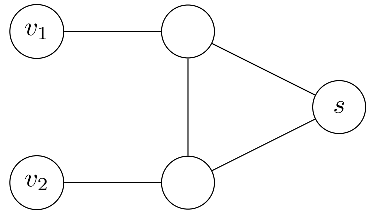
   Solution : Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. Pour chaque sommet $u \in S$, on créé des variables $x_{u,1}, x_{u,2}, x_{u,3}$ ($x_{u,i}$ va être vrai ssi le sommet u est colorié avec la couleur i).
   Pour chaque sommet u, on ajoute la clause $(x_{u,1} \vee x_{u,2} \vee x_{u,3})$ (chaque sommet doit être colorié) et $\neg x_{u,j} \vee \neg x_{u,j'}$ pour $j \neq j'$ (un sommet ne peut pas être colorié avec deux couleurs différentes).
   Pour chaque arête $(u, v) \in A$, on ajoute les clauses $\neg x_{u,i} \vee \neg x_{v,i}$ (deux sommets adjacents ne peuvent pas être coloriés de la même couleur).
   La formule ϕ obtenue par conjonction de ces clauses est une instance de 3-SAT et est satisfiable si et seulement si G est 3-colorable. De plus, la construction et la taille de ϕ sont polynomiales en la taille de G.

Dans la suite, on veut trouver une réduction polynomiale de 3-SAT à 3-COLOR.
On considère une formule φ de 3-SAT de variables $x_1, ..., x_n$ et on veut construire un graphe G qui soit 3-colorable si et seulement si φ est satisfiable.
On ajoute n sommets dans G (encore appelés x_1, ..., x_n par abus de notation) correspondant à x_1, ..., x_n, n sommets correspondant à $\neg x_1$, ..., $\neg x_n$ et 3 sommets V, F, B reliés deux à deux.
Dans un 3-coloriage de G, S et F doivent être de couleurs différentes. Chaque variable x_i sera considérée comme fausse si le sommet correspondant est de la même couleur que F et vraie s'il est de la même couleur que V.

4. Expliquer comment ajouter des arêtes à G pour que chaque variable x_i soit vraie ou fausse (c'est-à-dire coloriée avec la même couleur que F ou la même couleur que V) et de valeur opposée à $\neg x_i$.

   Solution : Pour chaque i, on relie x_i, $\neg x_i$ et B deux à deux. Ainsi, x_i est coloriée avec la même couleur que V ou F et $\neg x_i$ avec la couleur opposée.

On considère un sous-graphe (*gadget*) de la forme suivante à ajouter dans G :

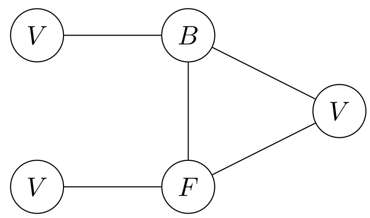


5. Montrer que si v_1 et v_2 sont de la même couleur que F alors la couleur de s est imposée et préciser cette dernière.

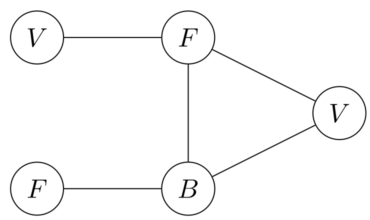
   Solution : On trouve que s doit être de la même couleur que F.

6. Montrer que si v_1 ou v_2 est de la même couleur que V alors il existe un coloriage de G où s est de la même couleur que V.

   Solution : Si $v_1 = v_2 = V$, on peut utiliser le coloriage :

   Si $v_1 = V$ et $v_2 = F$ (le cas $v_1 = F$ et $v_2 = V$ étant symétrique):

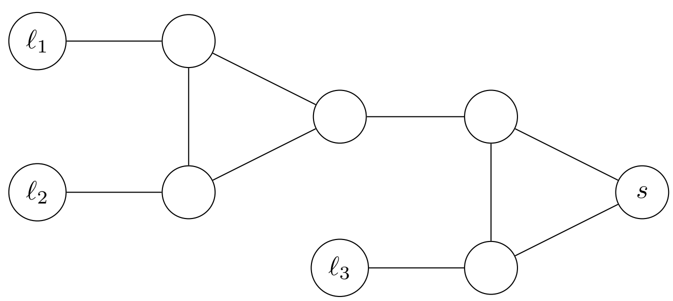
   

7. Quelle formule logique le gadget ci-dessus permet-il de représenter ?

   Solution : $v_1 \vee v_2$.

8. Quel gadget ajouter à G de façon pour représenter une clause $\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3$?

   Solution : Comme $\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3 = (\ell_1 \vee \ell_2) \vee \ell_3$, on connecte la sortie du gadget de $\ell_1 \vee \ell_2$ à l'entrée du gadget de ℓ_3 :

9. Montrer que 3-COLOR est NP-complet.

   Solution : Pour chaque clause $\ell_1 \vee \ell_2 \vee \ell_3$ de φ, on ajoute un gadget comme ci-dessus ainsi qu'une arête entre s et B et une arête entre s et F, pour forcer la valeur de s à V.
   Soit G le graphe obtenu. Montrons que G est 3-colorable si et seulement si φ est satisfiable.

   - Supposons ϕ satisfiable. Alors il existe une valuation mettant au moins un littéral de chaque clause à vrai. On colorie les sommets correspondants à ces littéraux avec V et les autres avec F. Alors chaque gadget possède au moins un sommet en entrée avec la couleur V donc il peut-être colorié d'après la question 6.
   - Supposons que G est 3-colorable. Alors chaque gadget est colorié correctement. On peut alors construire une

valuation v en prenant vrai pour chaque littéral correspondant à un sommet colorié avec V et faux pour les autres.
Chaque gadget a une sortie coloriée avec V donc au moins un sommet en entrée colorié avec V. Donc chaque clause possède au moins un littéral à vrai : cette valuation satisfait φ.

10. Montrer que k-COLOR est NP-complet pour $k \geq 4$.

Solution : On montre que k-COLOR $\in$ NP en utilisant une coloration comme certificat.
Montrons k-COLOR $\leq_p$ $(k+1)$-COLOR.
Soit G une instance de k-COLOR. Soit G' le graphe obtenu en ajoutant un sommet s et en le reliant à tous les sommets de G. Alors G est k-colorable si et seulement si G' est $(k+1)$-colorable.
Ainsi k-COLOR $\leq_p$ $(k+1)$-COLOR. Comme 3-COLOR est NP-complet, on en déduit par récurrence immédiate que k-COLOR est NP-complet pour tout $k \geq 4$.

III Stable et clique

STABLE

- Instance : un graphe G et un entier k
- Question : G contient-il un ensemble stable de taille k, c'est-à-dire un ensemble de k sommets deux à deux non adjacents ?

CLIQUE

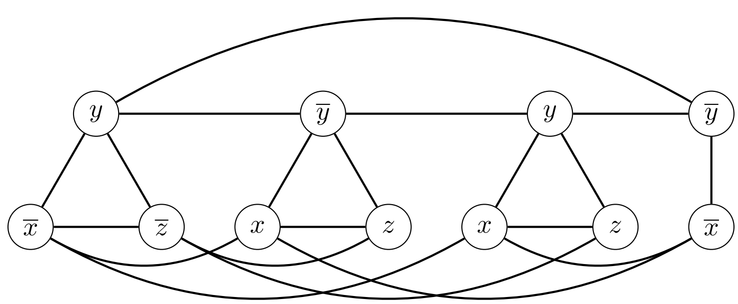
- Instance : un graphe G et un entier k
- Question : G contient-il une clique de taille k, c'est-à-dire un ensemble de k sommets deux à deux adjacents ?

1. Montrer que STABLE $\in$ NP.
2. Pour $\varphi = \bigwedge_{k=1}^{p} C_k$ une instance de 3-SAT, on définit $G_\varphi = (S, A)$ où :
   - S contient un sommet par littéral, autant de fois qu'il apparaît dans φ.
   - A contient une arête entre deux sommets s'ils sont dans la même clause ou s'ils sont la négation l'un de l'autre.

   Dessiner G_φ si $\varphi = (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})$.
3. Montrer que si G_φ contient une clique de taille p alors φ est satisfiable.
4. Montrer que si φ est satisfiable alors G_φ contient une clique de taille p. Conclure.
5. Montrer que CLIQUE est NP-complet.

Solution :

1. Un sous-ensemble $X \subseteq S$ est un certificat. Un vérificateur consiste à vérifier que pour $\{x, y\} \subseteq X, \{x, y\} \notin A$. Cela se fait bien en temps polynomial.
2. On obtient le graphe suivant :



3. Si G_φ possède un stable X de taille m, alors un seul sommet par clause peut être choisi (car tous les sommets d'une même clause sont adjacents). De plus, il n'est pas possible de choisir un sommet x et un sommet $\overline{x}$ (qui sont toujours adjacents). On définit une valuation μ tel que $\mu(\ell) = 1$ si $\ell \in X$ et $\mu(\ell) = 0$ sinon. D'après la remarque précédente, μ

est bien défini et μ est un modèle de chaque clause, donc un modèle de φ.

4. Si φ est satisfiable, il possède un modèle μ. Il existe (au moins) un littéral ℓ_i dans chaque clause C_i tel que $\mu(\ell_i) = 1$. On choisit les sommets correspondant dans le graphe G_φ pour former un ensemble X. Cet ensemble forme bien un stable de taille m.

5. Comme G_φ se construit en temps polynomial en $|\varphi|$, on a montré par les deux questions précédentes que 3-SAT $\leq_p$ STABLE. Sachant que 3-SAT est NP-complet, on en déduit que STABLE est NP-difficile, donc NP-complet (car dans NP).

6. On a montré dans des exercices précédents que CLIQUE $\in$ NP et que STABLE $\leq_p$ CLIQUE. On en déduit que CLIQUE est NP-complet.