Déduction naturelle

Quentin Fortier

January 23, 2025

Formules logiques (rappel)

Définition

Soit V un ensemble (de variables).

L'ensemble des formules logiques sur V est défini inductivement :

- $\top$ (vrai) et $\bot$ (faux) sont des formules
- Toute variable $x \in V$ est une formule
- Si φ est une formule alors $\neg\varphi$ est une formule
- Si φ, ψ sont des formules alors $\varphi \wedge \psi$ (conjonction) et $\varphi \vee \psi$ (disjonction) sont des formules

Déduction naturelle

La logique propositionnelle (de MP2I) définit la valeur de vérité d'une formule en considérant toutes les valeurs possibles des variables booléennes.

La déduction naturelle formalise la notion de preuve mathématique.

Déduction naturelle

Définition

Un séquent, noté $\Gamma \vdash A$, est constitué d'un ensemble Γ de formules logiques et une formule logique A.

Intuitivement : $\Gamma \vdash A$ signifie que sous les hypothèses Γ, on peut déduire A.

Règles d'inférence

Définition

Une règle d'inférence est constituée :

- d'un ensemble de séquents $\Gamma_1 \vdash A_1, ..., \Gamma_n \vdash A_n$ appelés prémisses
- d'un séquent $\Gamma \vdash A$ appelé conclusion.

On le représente :

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1 \qquad \Gamma_2 \vdash A_2 \qquad \cdots \qquad \Gamma_n \vdash A_n}{\Gamma \vdash A}$$

Une règle sans prémisse est appelée axiome.

Règles d'inférence

Définition

On définit inductivement une preuve (ou arbre de preuve, dérivation) d'un séquent $\Gamma \vdash A$ par :

- si $\Gamma \vdash A$ est un axiome, alors $\overline{\Gamma \vdash A}$ est une preuve de $\Gamma \vdash A$
- si la règle
$$\frac{\Gamma_1 \vdash A_1 \qquad \Gamma_2 \vdash A_2 \qquad \ldots \qquad \Gamma_k \vdash A_k}{\Gamma \vdash A}\ R$$
est une règle d'inférence et que $P_1, P_2, \ldots, P_k$ sont des preuves de $\Gamma \vdash A_1$, $\Gamma \vdash A_2$, ..., $\Gamma_k \vdash A_k$ respectivement, alors
$$\frac{P_1 \qquad P_2 \qquad \ldots \qquad P_k}{\Gamma \vdash A}\ R$$
est une preuve de $\Gamma \vdash A$.

On dit que $\Gamma \vdash A$ est prouvable s'il existe une preuve de $\Gamma \vdash A$.

Règles d'inférence

Notation d'une preuve de $\Gamma \vdash A$:

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma_1 \vdash A_1} \qquad \ldots \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma_n \vdash A_n}}{\Gamma \vdash A}$$

Logique classique

La logique classique est un ensemble de règles, que nous allons énumérer.

Logique classique

La logique classique est un ensemble de règles, que nous allons énumérer.

- Axiome :

$$\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\ \text{ax}$$

Vrai $\top$ et faux $\bot$

- Introduction de $\top$ (vrai) :

Vrai $\top$ et faux $\bot$

- Introduction de $\top$ (vrai) :

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top}\ \top_i$$

- Élimination de $\bot$ (faux) :

Vrai $\top$ et faux $\bot$

- Introduction de $\top$ (vrai) :

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top}\ \top_i$$

- Élimination de $\bot$ (faux) :

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ \bot_e$$

Implication

Pour chaque connecteur logique ($\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$), on a deux règles d'inférences :

- Règle d'introduction, de la forme : $\dfrac{\ldots \vdash \ldots}{\ldots \vdash \ldots \rightarrow \ldots}$

Implication

Pour chaque connecteur logique ($\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$), on a deux règles d'inférences :

- Règle d'introduction, de la forme : $\dfrac{\ldots \vdash \ldots}{\ldots \vdash \ldots \rightarrow \ldots}$
- Règle d'élimination, de la forme : $\dfrac{\ldots \vdash \ldots \rightarrow \ldots}{\ldots \vdash \ldots}$

Implication

- Introduction de $\rightarrow$:

Implication

- Introduction de $\to$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \to_i$$

- Élimination de $\to$ (modus ponens) :

Implication

- Introduction de $\rightarrow$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i$$

- Élimination de $\rightarrow$ (modus ponens) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \rightarrow_e$$

Implication

- Introduction de $\rightarrow$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i$$

- Élimination de $\rightarrow$ (modus ponens) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \rightarrow_e$$

Question

Prouver le séquent $\vdash A \rightarrow A$.

Implication

- Introduction de $\rightarrow$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow_i$$

- Élimination de $\rightarrow$ (modus ponens) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \rightarrow_e$$

Question

Prouver le séquent $\vdash A \rightarrow A$.

$$\frac{\overline{A \vdash A}\ \text{ax}}{\vdash A \rightarrow A} \rightarrow_i$$

Implication

- Introduction de $\to$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \to_i$$

- Élimination de $\to$ (modus ponens) :

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \to_e$$

Question

Prouver le séquent $A \to (B \to C) \vdash (B \to A) \to (B \to C)$

Implication

Question

Prouver le séquent $A \to (B \to C) \vdash (B \to A) \to (B \to C)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash A \to (B \to C)}\,\text{ax} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash B \to A}\,\text{ax} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash B}\,\text{ax}}{\Gamma \vdash A}\,\to_e}{\Gamma \vdash B \to C}\,\to_e \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash B}\,\text{ax}}{\dfrac{\Gamma \vdash C}{A \to (B \to C), B \to A \vdash B \to C}\,\to_i}\,\to_e}{A \to (B \to C) \vdash (B \to A) \to (B \to C)}\,\to_i
$$

Où $\Gamma = \{A \to (B \to C), B \to A, B\}$.

Conjonction $\wedge$

- Introduction du $\wedge$:

Conjonction $\wedge$

- Introduction du $\wedge$:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i$$

- Élimination du $\wedge$:

Conjonction $\wedge$

- Introduction du $\wedge$:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ \wedge_i$$

- Élimination du $\wedge$:

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ \wedge_e^g \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ \wedge_e^d$$

Il y a deux règles d'élimination pour le $\wedge$: on peut utiliser l'une ou l'autre.

Conjonction $\wedge$

Remarque : on peut aussi généraliser les règles avec différents contextes Γ, Γ', pour simplifier les preuves.
Ainsi, on peut aussi utiliser :

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma' \vdash A}{\Gamma, \Gamma' \vdash B} \to_e$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash A \wedge B} \wedge_i$$

Conjonction $\land$

Question

Montrer $(A \land B) \to C \vdash A \to (B \to C)$.

Conjonction $\wedge$

Question

Montrer $(A \wedge B) \to C \vdash A \to (B \to C)$.

$$\dfrac{\dfrac{}{A \wedge B \to C \vdash A \wedge B \to C}\,\text{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\text{ax} \qquad \dfrac{}{B \vdash B}\,\text{ax}}{A, B \vdash A \wedge B}\,\wedge_i}{\dfrac{(A \wedge B) \to C, A, B \vdash C}{\dfrac{(A \wedge B) \to C, A \vdash B \to C}{(A \wedge B) \to C \vdash A \to (B \to C)}\,\to_i}\,\to_i}\,\to_e$$

Question

Montrer $A \to (B \to C) \vdash (A \wedge B) \to C$.

Disjonction $\vee$

- Introduction de $\vee$:

Disjonction $\vee$

- Introduction de $\vee$:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee_i^g \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee_i^d$$

- Élimination de $\vee$:

Disjonction $\vee$

- Introduction de $\vee$:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee_i^g \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee_i^d$$

- Élimination de $\vee$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C \qquad \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C}\ \vee_e$$

Disjonction $\vee$

- Introduction de $\vee$:

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee_i^g \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee_i^d$$

- Élimination de $\vee$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C \qquad \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C}\ \vee_e$$

Exercice

1. Montrer $A \vee (B \wedge C) \vdash A \vee B$.
2. On admet aussi $A \vee (B \wedge C) \vdash A \vee C$.
   En déduire $\vdash A \vee (B \wedge C) \longrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Négation $\neg$

- Introduction de $\neg$:

Négation $\neg$

- Introduction de $\neg$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ \neg_i$$

- Élimination de $\neg$:

Négation $\neg$

- Introduction de $\neg$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A} \; \neg_i$$

- Élimination de $\neg$:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot} \; \neg_e$$

Négation $\neg$

- Introduction de $\neg$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ \neg_i$$

- Élimination de $\neg$:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg_e$$

Question

Montrer $A \vdash \neg\neg A$.

Négation $\neg$

- Introduction de $\neg$:

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ \neg_i$$

- Élimination de $\neg$:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot}\ \neg_e$$

Question

Montrer $A \vdash \neg\neg A$.

Remarque : il n'est pas possible de démontrer $\neg\neg A \vdash A$ sans règle supplémentaire (tiers-exclu ou raisonnement par l'absurde).

Raisonnement par l'absurde, tiers-exclu

Les règles précédentes forment la logique intuitioniste.
On peut ajouter l'une des règles équivalentes suivantes pour obtenir la logique classique :

- Raisonnement par l'absurde :

Raisonnement par l'absurde, tiers-exclu

Les règles précédentes forment la logique intuitioniste.
On peut ajouter l'une des règles équivalentes suivantes pour obtenir la logique classique :

- Raisonnement par l'absurde :

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ \text{raa}$$

- Tiers-exclu :

Raisonnement par l'absurde, tiers-exclu

Les règles précédentes forment la logique intuitioniste.
On peut ajouter l'une des règles équivalentes suivantes pour obtenir la logique classique :

- Raisonnement par l'absurde :

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ \textsf{raa}$$

- Tiers-exclu :

$$\frac{}{\vdash A \vee \neg A}\ \textsf{te}$$

Raisonnement par l'absurde, tiers-exclu

Les règles précédentes forment la logique intuitioniste.
On peut ajouter l'une des règles équivalentes suivantes pour obtenir la logique classique :

- Raisonnement par l'absurde :

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ \textsf{raa}$$

- Tiers-exclu :

$$\frac{}{\vdash A \vee \neg A}\ \textsf{te}$$

Question

On ajoute raa à la logique intuitioniste et on veut montrer te.

1. Prouver $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$.
2. Prouver $\vdash A \vee \neg A$.

Rappels de logique propositionnelle

Définition

Une valuation sur un ensemble V de variables est une fonction de V vers $\{0, 1\}$.

Définition

Soit v une valuation sur V.
L'évaluation $[\![\varphi]\!]_v$ d'une formule φ sur v est définie inductivement :

- $[\![\top]\!]_v = 1$, $[\![\bot]\!]_v = 0$
- $[\![x]\!]_v = v(x)$ si $x \in V$
- $[\![\neg\varphi]\!]_v = 1 - [\![\varphi]\!]_v$
- $[\![\varphi \wedge \psi]\!]_v = \min([\![\varphi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v)$
- $[\![\varphi \vee \psi]\!]_v = \max([\![\varphi]\!]_v, [\![\psi]\!]_v)$

Si $[\![\varphi]\!]_v = 1$, on dit que v est un modèle pour φ.

Rappels de logique propositionnelle

Définition

On note $\Gamma \models A$, et on dit que Γ est un modèle pour A, si toute valuation satisfaisant les formules de Γ satisfait aussi A, c'est-à-dire :

$$(\forall A \in \Gamma,\ [\![A]\!]_v = 1) \implies [\![A]\!]_v = 1$$

Rappels de logique propositionnelle

Définition

On note $\Gamma \models A$, et on dit que Γ est un modèle pour A, si toute valuation satisfaisant les formules de Γ satisfait aussi A, c'est-à-dire :

$$(\forall A \in \Gamma,\ [\![A]\!]_v = 1) \implies [\![A]\!]_v = 1$$

Question

Quel est le lien entre la notion de séquent prouvable (avec un arbre de dérivation) et celle de formule vraie (qui s'évalue à vrai pour tout valuation) ?

Rappels de logique propositionnelle

Définition

On note $\Gamma \models A$, et on dit que Γ est un modèle pour A, si toute valuation satisfaisant les formules de Γ satisfait aussi A, c'est-à-dire :

$$(\forall A \in \Gamma, [\![A]\!]_v = 1) \implies [\![A]\!]_v = 1$$

Question

Quel est le lien entre la notion de séquent prouvable (avec un arbre de dérivation) et celle de formule vraie (qui s'évalue à vrai pour tout valuation) ?

On peut montrer :

- Correction : Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.
- Complétude (HP) : Si $\Gamma \models A$ alors $\Gamma \vdash A$ est prouvable.

Correction de la déduction naturelle

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

Correction de la déduction naturelle

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

<u>Preuve</u> : Soit $P(h)$: « si T est un arbre de dérivation de hauteur h pour $\Gamma \vdash A$ alors $\Gamma \models A$ ».

Correction de la déduction naturelle

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

<u>Preuve</u> : Soit $P(h)$: « si T est un arbre de dérivation de hauteur h pour $\Gamma \vdash A$ alors $\Gamma \models A$ ».

$P(0)$ est vraie : Si T est un arbre de hauteur 0 pour $\Gamma \models A$ alors il est constitué uniquement d'une application de ax, ce qui signifie que $A \in \Gamma$ et implique $\Gamma \models A$.

Correction de la déduction naturelle

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

Preuve (suite) : Soit T un arbre de dérivation pour pour $\Gamma \vdash A$ de hauteur $h+1$. Considérons la règle appliquée à la racine de T.

Correction de la déduction naturelle

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

Preuve (suite) : Soit T un arbre de dérivation pour pour $\Gamma \vdash A$ de hauteur $h+1$. Considérons la règle appliquée à la racine de T.

$\wedge_i$ Supposons T de la forme : $\dfrac{\dfrac{T_1}{\Gamma \vdash A} \qquad \dfrac{T_2}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A \wedge B} \wedge_i$

Par récurrence sur T_1 et T_2, on obtient $\Gamma \models A$ et $\Gamma \models B$.
Une valuation v satisfaisant toutes les formules de Γ satisfait donc à la fois A et B, et donc $A \wedge B$. On a bien $\Gamma \models A \wedge B$.

Correction de la déduction naturelle

Théorème de correction

Si $\Gamma \vdash A$ est prouvable alors $\Gamma \models A$.

Preuve (suite) : Soit T un arbre de dérivation pour pour $\Gamma \vdash A$ de hauteur $h+1$. Considérons la règle appliquée à la racine de T.

$\wedge_i$ Supposons T de la forme : $\dfrac{\dfrac{T_1}{\Gamma \vdash A} \qquad \dfrac{T_2}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A \wedge B} \; \wedge_i$

Par récurrence sur T_1 et T_2, on obtient $\Gamma \models A$ et $\Gamma \models B$.
Une valuation v satisfaisant toutes les formules de Γ satisfait donc à la fois A et B, et donc $A \wedge B$. On a bien $\Gamma \models A \wedge B$.

$\wedge_e$ Supposons T de la forme : $\dfrac{\dfrac{T_1}{\Gamma \vdash A \wedge B}}{\Gamma \vdash A} \; (\wedge_e^g)$

Par récurrence sur T_1, $\Gamma \models A \wedge B$ et donc $\Gamma \models A$.

Les autres cas sont similaires.

Correction de la déduction naturelle

Exercice

Montrer que le séquent $\vdash \bot$ n'est pas prouvable (on dit que la déduction naturelle est cohérente).

Correction de la déduction naturelle

Théorème de complétude (HP)

Si $\Gamma \models A$ alors $\Gamma \vdash A$ est prouvable.

Correction de la déduction naturelle

Exercice

On considère les deux problèmes suivants :

DNAT

- Instance : un séquent $\Gamma \vdash \varphi$
- Question : $\Gamma \vdash \varphi$ est-il dérivable ?

TAUTOLOGIE

- Instance : une formule logique φ
- Question : φ est-elle une tautologie ?

On admet le théorème de complétude.

1. Montrer que TAUTOLOGIE se réduit polynomialement à DNAT.
2. Que peut-on dire sur la complexité de DNAT ?
3. Montrer que DNAT se réduit polynomialement à TAUTOLOGIE.

Logique du premier ordre et quantificateurs

La logique du premier ordre permet de faire des raisonnements dans un langage plus élaboré que celui qui se limite aux variables propositionnelles.

Définition

Un langage du premier ordre est la donnée de symboles de fonctions et d'un nombre de symboles de relation, ayant chacun d'une arité strictement positive.
Une fonction d'arité 0 est dite constante.

Exemples :

- La théorie des groupes avec la constante e, la fonction $^{-1}$ d'arité 1, la fonction $\star$ d'arité 2 et la relation $=$ d'arité 2.
- La théorie des ensembles avec la constante $\emptyset$, la fonction ^{c} d'arité 1, les fonctions $\cap$ et $\cup$ d'arité 2 et les relations $=$, $\in$, $\subset$ d'arité 2.

Logique du premier ordre et quantificateurs

Définition

Soit $\mathcal{X}$ un ensemble de variables. On définit par induction l'ensemble des termes sur $\mathcal{X}$:

- Une variable $x \in \mathcal{X}$ est un terme.
- Une constante est un terme.
- Si f est une fonction d'arité $n > 0$ et $t_1, ..., t_n$ des termes alors $f(t_1, ..., t_n)$ est un terme.

Logique du premier ordre et quantificateurs

Définition

Soit $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre. L'ensemble des formules de la logique du premier ordre est alors défini par induction par :

- si R est une relation d'arité n et $t_1, ..., t_n$ des termes alors $R(t_1, t_2, ..., t_n)$ est une formule de la logique du premier ordre.
- si A et B sont des formules de la logique du premier ordre et $x \in \mathcal{X}$, alors :
  - $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$ et $A \rightarrow B$ sont des formules de la logique du premier ordre.
  - $\exists x\, A$ et $\forall x\, A$ sont des formules de la logique du premier ordre.

Logique du premier ordre et quantificateurs

Exemples :

- Dans le langage de la théorie des groupes, $\forall x \exists y (x \star y = e)$ est une formule.
- Dans le langage de la théorie des ensembles, $\forall x \forall y ((x \cup y)^c = x^c \cap y^c))$ est une formule.

Logique du premier ordre et quantificateurs

<u>Exemples</u> :

- Dans le langage de la théorie des groupes, $\forall x \exists y (x \star y = e)$ est une formule.
- Dans le langage de la théorie des ensembles, $\forall x \forall y ((x \cup y)^c = x^c \cap y^c))$ est une formule.

<u>Attention</u> : il ne faut pas confondre variable (terme décrivant un objet du langage du premier ordre étudié), par exemple un nombre réel, et variable propositionnelle (objet qui possède une valeur de vérité).

Logique du premier ordre et quantificateurs

Définition

Si φ est une formule du premier ordre et x une variable, on dit que x est libre dans φ si elle n'est pas associée à un $\exists$ ou un $\forall$. Sinon, on dit que x est liée.

Définition

Si φ est une formule du premier ordre, on note $\varphi[x := t]$ la formule obtenue en remplaçant toutes les occurrences libres de x par t dans φ, après renommage des variables si nécessaire.

Exemple : Si $A = (\forall x(x = x)) \wedge \exists y(x = y)$. Alors $A[x := y \star y] = (\forall x(x = x)) \wedge \exists z(y \star y = z)$.

Logique du premier ordre et quantificateurs

- Introduction de $\forall$, si x n'est pas une variable libre de Γ :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x\, A}\ \forall_i$$

Intuitivement : si A est vraie sans faire d'hypothèse sur x, alors elle est vraie quelle que soit la valeur de cette variable.

Logique du premier ordre et quantificateurs

- Introduction de $\forall$, si x n'est pas une variable libre de Γ :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x\, A}\ \forall_i$$

<u>Intuitivement</u> : si A est vraie sans faire d'hypothèse sur x, alors elle est vraie quelle que soit la valeur de cette variable.

- Élimination de $\forall$, si A n'a pas de variable liée en commun avec t :

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x\, A}{\Gamma \vdash A[x := t]}\ \forall_e$$

<u>Intuitivement</u> : si A est vraie pour toute valeur de x, alors elle est vraie en remplaçant x par t.

- Introduction de $\exists$:

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x\, A}\ \exists_i$$

Intuitivement : si A est vraie dans un cas particulier, c'est qu'il existe une variable pour laquelle elle est vraie.

Logique du premier ordre et quantificateurs

- Introduction de $\exists$:

$$\frac{\Gamma \vdash A[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x\, A}\ \exists_i$$

Intuitivement : si A est vraie dans un cas particulier, c'est qu'il existe une variable pour laquelle elle est vraie.

- Élimination de $\exists$, si x n'est pas une variable libre de B ni de Γ :

$$\frac{\Gamma \vdash \exists\, xA \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ \exists_e$$

Intuitivement : si B est vraie pour une certaine variable et que cette variable n'intervient nulle part alors B est tout le temps vraie.

Logique du premier ordre et quantificateurs

Exercice

Montrer les séquents suivants :

1. $\forall x \, \exists y \, x \vee y$
2. $\exists x \, (A \vee B) \vdash \exists x \, A \vee \exists x \, B$
3. $\neg(\exists x \, \varphi) \vdash \forall x \, \neg\varphi$
4. $\forall x \, (x \star x^{-1} = e) \vdash \forall x \forall y \exists z \, (x \star y) \star z = e$ dans le langage de la théorie des groupes