# Couplage maximum dans un graphe biparti

Quentin Fortier

November 14, 2024

# Couplage

Dans ce cours, $G = (S, A)$ est un graphe non-orienté.

## Définition

Un couplage de $G$ est un ensemble d'arêtes $M \subset A$ tel qu'aucun sommet ne soit adjacent à $2$ arêtes de $M$, c'est-à-dire :

$$\forall e_1, e_2 \in M,\ \ e_1 \neq e_2 \implies e_1 \cap e_2 = \emptyset$$

# Couplage

Dans ce cours, $G = (S, A)$ est un graphe non-orienté.

**Définition**

Un couplage de $G$ est un ensemble d'arêtes $M \subset A$ tel qu'aucun sommet ne soit adjacent à $2$ arêtes de $M$, c'est-à-dire :

$$\forall e_1, e_2 \in M, \;\; e_1 \neq e_2 \implies e_1 \cap e_2 = \emptyset$$

**Définition**

Un sommet $v \in S$ est couvert par $M$ s'il appartient à une arête de $M$. Sinon, $v$ est libre pour $M$.

# Couplage

Dans ce cours, $G = (S, A)$ est un graphe non-orienté.

**Définition**

Un couplage de $G$ est un ensemble d'arêtes $M \subset A$ tel qu'aucun sommet ne soit adjacent à $2$ arêtes de $M$, c'est-à-dire :

$$\forall e_1, e_2 \in M,\ e_1 \neq e_2 \implies e_1 \cap e_2 = \emptyset$$

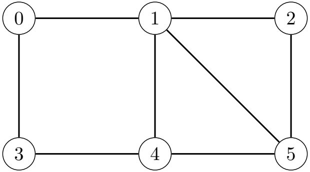
**Définition**

Un sommet $v \in S$ est couvert par $M$ s'il appartient à une arête de $M$. Sinon, $v$ est libre pour $M$.

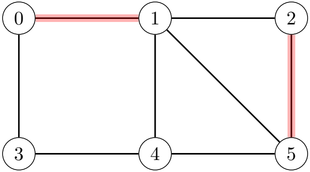
Applications :

- Mariage : chaque personne est mariée à au plus une autre personne
- Rech. de logement : couplage entre étudiants et logements

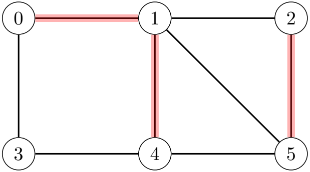
# Couplage




Un graphe $G$




Un couplage de $G$ (en rouge)




Pas un couplage

# Couplage

**Exercice**

Écrire une fonction
`est_couplage : int array array -> (int*int) list -> bool`
déterminant si un ensemble d'arêtes forme un couplage d'un graphe.

# Couplage

Soit $M$ un couplage d'un graphe $G$.

## Définitions

- La taille de $M$, notée $|M|$, est son nombre d'arêtes.
- $M$ est un couplage maximum s'il n'existe pas d'autre couplage de taille strictement supérieure.
- $M$ est un couplage parfait si tout sommet de $G$ appartient à une arête de $M$.

# Couplage

Soit $M$ un couplage d'un graphe $G$.

## Définitions

- La taille de $M$, notée $|M|$, est son nombre d'arêtes.
- $M$ est un couplage maximum s'il n'existe pas d'autre couplage de taille strictement supérieure.
- $M$ est un couplage parfait si tout sommet de $G$ appartient à une arête de $M$.

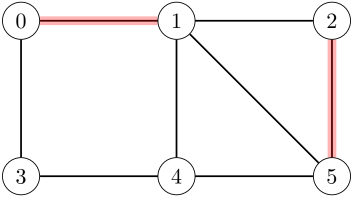
## Question

$M$ est un couplage maximal s'Il n'existe pas de couplage $M'$ tel que $M \subsetneq M'$.
Quelle(s) implication(s) a t-on entre couplage maximum et couplage maximal ?

# Couplage

## Exercice

1. Le couplage ci-dessous est-il parfait ?
2. Quels sont les sommets couverts par ce couplage ? Et ceux libres ?
3. Le graphe ci-dessous admet-il un couplage parfait ?



# Couplage

On va s'intéresser au problème suivant :

**Problème : Couplage maximum**

Entrée : Graphe $G$ non orienté, non pondéré.
Sortie : Un couplage maximum de $G$.

# Chemin augmentant

Soit $M$ un couplage d'un graphe $G$.

**Définition**

- Un chemin est élémentaire s'il ne passe pas deux fois par le même sommet.
- Un chemin élémentaire de $G$ est $M$-alternant si ses arêtes sont alternativement dans $M$ et dans $A \setminus M$.
- Un chemin de $G$ est $M$-augmentant s'il est $M$-alternant et si ses extrémités sont libres pour $M$.

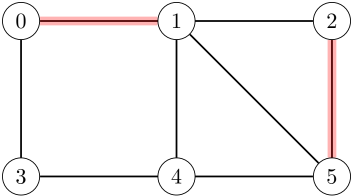
# Chemin augmentant

Soit $M$ un couplage d'un graphe $G$.

## Définition

- Un chemin est élémentaire s'il ne passe pas deux fois par le même sommet.
- Un chemin élémentaire de $G$ est $M$-alternant si ses arêtes sont alternativement dans $M$ et dans $A \setminus M$.
- Un chemin de $G$ est $M$-augmentant s'il est $M$-alternant et si ses extrémités sont libres pour $M$.

Exemple : $3 - 0 - 1 - 2 - 5 - 4$ est un chemin $M$-augmentant pour le couplage ci-dessous.



# Chemin augmentant

## Définition (différence symétrique)

Si $A$ et $B$ sont des ensembles, $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

# Chemin augmentant

**Définition (différence symétrique)**

Si $A$ et $B$ sont des ensembles, $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Un chemin est vu comme un ensemble d'arêtes.

**Théorème**

Soit $M$ un couplage de $G$ et $P$ un chemin $M$-augmentant dans $G$. Alors $M \Delta P$ est un couplage de $G$.

# Chemin augmentant

## Définition (différence symétrique)

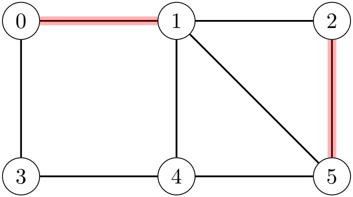
Si $A$ et $B$ sont des ensembles, $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Un chemin est vu comme un ensemble d'arêtes.

## Théorème

Soit $M$ un couplage de $G$ et $P$ un chemin $M$-augmentant dans $G$. Alors $M \Delta P$ est un couplage de $G$.

Exemple : Dessiner $M \Delta P$ pour le couplage ci-dessous et le chemin $P = 3 - 0 - 1 - 4$.



# Chemin augmentant

Soit $M$ un couplage d'un graphe $G$.

**Théorème**

$M$ est un couplage maximum de $G$

$\Longleftrightarrow$

Il n'existe pas de chemin $M$-augmentant dans $G$

# Chemin augmentant

Soit $M$ un couplage d'un graphe $G$.

**Théorème**

$M$ est un couplage maximum de $G$

$\iff$

Il n'existe pas de chemin $M$-augmentant dans $G$

Preuve :

$\Longrightarrow$ Soit $M$ un couplage maximum.
Supposons qu'il existe un chemin $M$-augmentant $P$.
Alors $M \Delta P$ est un couplage de $G$ et $|M \Delta P| > |M|$ : absurde.

# Chemin augmentant

**Théorème**

$M$ est un couplage maximum de $G$

$$\Longleftrightarrow$$

Il n'existe pas de chemin $M$-augmentant dans $G$

Preuve :

$\Longleftarrow$ Supposons qu'il existe un couplage $M^*$ vérifiant $|M^*| > |M|$.

# Chemin augmentant

## Théorème

$M$ est un couplage maximum de $G$

$$\Longleftrightarrow$$

Il n'existe pas de chemin $M$-augmentant dans $G$

Preuve :

$\Longleftarrow$ Supposons qu'il existe un couplage $M^*$ vérifiant $|M^*| > |M|$. Considérons $G^* = (S, M \Delta M^*)$. Alors :

1. Les degrés des sommets de $G^*$ sont au plus $2$,

# Chemin augmentant

**Théorème**

$M$ est un couplage maximum de $G$

$\Longleftrightarrow$

Il n'existe pas de chemin $M$-augmentant dans $G$

Preuve :

$\Longleftarrow$ Supposons qu'il existe un couplage $M^*$ vérifiant $|M^*| > |M|$. Considérons $G^* = (S, M \Delta M^*)$. Alors :

1. Les degrés des sommets de $G^*$ sont au plus $2$, donc $G^*$ est composé de cycles et de chemins uniquement.

# Chemin augmentant

**Théorème**

$M$ est un couplage maximum de $G$

$$\Longleftrightarrow$$

Il n'existe pas de chemin $M$-augmentant dans $G$

Preuve :

$\Longleftarrow$ Supposons qu'il existe un couplage $M^*$ vérifiant $|M^*| > |M|$. Considérons $G^* = (S, M \Delta M^*)$. Alors :

1. Les degrés des sommets de $G^*$ sont au plus $2$, donc $G^*$ est composé de cycles et de chemins uniquement.
2. Chacun de ces cycles et chemins alternent entre des arêtes de $M$ et des arêtes de $M^*$.

# Chemin augmentant

## Théorème

$M$ est un couplage maximum de $G$

$$\Longleftrightarrow$$

Il n'existe pas de chemin $M$-augmentant dans $G$

Preuve :

$\Longleftarrow$ Supposons qu'il existe un couplage $M^*$ vérifiant $|M^*| > |M|$. Considérons $G^* = (S, M \Delta M^*)$. Alors :

1. Les degrés des sommets de $G^*$ sont au plus $2$, donc $G^*$ est composé de cycles et de chemins uniquement.
2. Chacun de ces cycles et chemins alternent entre des arêtes de $M$ et des arêtes de $M^*$.
3. Comme $|M^*| > |M|$, un de ces chemins contient plus d'arêtes de $M^*$ que de $M$

# Chemin augmentant

**Théorème**

$M$ est un couplage maximum de $G$

$\Longleftrightarrow$

Il n'existe pas de chemin $M$-augmentant dans $G$

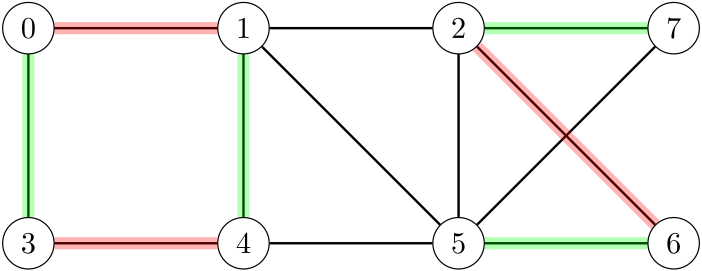
Preuve :

$\Longleftarrow$ Supposons qu'il existe un couplage $M^*$ vérifiant $|M^*| > |M|$. Considérons $G^* = (S, M \Delta M^*)$. Alors :

1. Les degrés des sommets de $G^*$ sont au plus $2$, donc $G^*$ est composé de cycles et de chemins uniquement.
2. Chacun de ces cycles et chemins alternent entre des arêtes de $M$ et des arêtes de $M^*$.
3. Comme $|M^*| > |M|$, un de ces chemins contient plus d'arêtes de $M^*$ que de $M$: c'est un chemin $M^*$-augmentant.

# Chemin augmentant

Illustration de la preuve précédente :




Un couplage $M$ et un couplage maximum $M^*$

# Chemin augmentant

**Couplage maximum par chemin augmentant**

**Entrée :** Graphe $G = (S, A)$
**Sortie :** Couplage maximum $M$ de $G$

$M \leftarrow \emptyset$
**Tant que** il existe un chemin $M$-augmentant $P$ dans $G$ **:**
    $M \leftarrow M \Delta P$

# Chemin augmentant

**Couplage maximum par chemin augmentant**

**Entrée :** Graphe $G = (S, A)$
**Sortie :** Couplage maximum $M$ de $G$

$M \leftarrow \emptyset$
**Tant que** il existe un chemin $M$-augmentant $P$ dans $G$ **:**
  $M \leftarrow M \Delta P$

**Question**

Comment trouver un chemin $M$-augmentant ?

- Dans un graphe quelconque, avec le Blossom algorithm (très compliqué et HP).
- Plus facilement dans un graphe biparti.

# Graphe biparti

## Définition

Un graphe $G = (S, A)$ est biparti s'il existe une partition $S = X \sqcup Y$ telle que toute arête de $A$ a une extrémité dans $X$ et une extrémité dans $Y$.

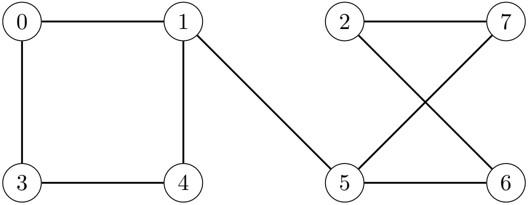
# Graphe biparti

## Définition

Un graphe $G = (S, A)$ est biparti s'il existe une partition $S = X \sqcup Y$ telle que toute arête de $A$ a une extrémité dans $X$ et une extrémité dans $Y$.

## Question

Montrer que le graphe ci-dessous est biparti, en donnant une partition de ses sommets.



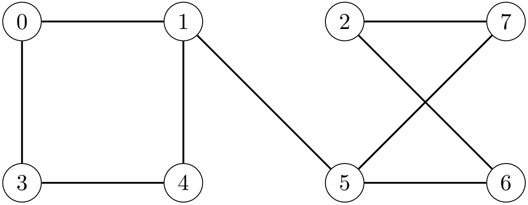
# Graphe biparti

## Définition

Un graphe $G = (S, A)$ est biparti s'il existe une partition $S = X \sqcup Y$ telle que toute arête de $A$ a une extrémité dans $X$ et une extrémité dans $Y$.

## Question

Montrer que le graphe ci-dessous est biparti, en donnant une partition de ses sommets.




## Question

Donner un exemple de graphe non biparti.

# Graphe biparti

Définition équivalente :

**Définition**

On appelle $k$-coloration de $G$ une fonction $c : S \longrightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ telle que pour tout arc $(u, v) \in A$, on a $c(u) \neq c(v)$.

**Lemme**

$$G \text{ admet une } 2\text{-coloration} \iff G \text{ est biparti}$$

# Graphe biparti

**Exercice**

Écrire une fonction `est_biparti : int list array -> bool` pour déterminer si un graphe est biparti, en complexité linéaire.

# Graphe biparti

**Exercice**

Écrire une fonction `est_biparti : int list array -> bool` pour déterminer si un graphe est biparti, en complexité linéaire.

**Exercice**

Modifier la fonction précédente pour renvoyer un $2$-coloriage.

# Graphe biparti

Pour trouver un chemin $M$-augmentant dans un graphe biparti $G$ :

1. Partir d'un sommet libre.
2. Se déplacer en alternant entre des arêtes de $M$ et des arêtes de $G \setminus M$, sans revenir sur un sommet visité (DFS).
3. Si on arrive à un sommet libre, alors on a trouvé un chemin $M$-augmentant.

# Graphe biparti

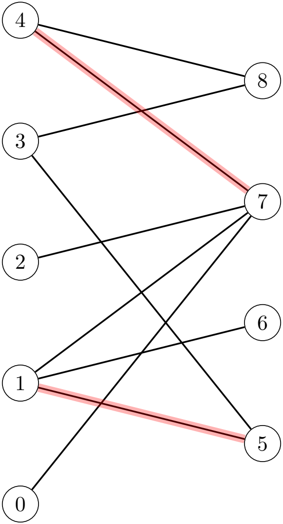
Pour trouver un chemin $M$-augmentant dans un graphe biparti $G$ :

1. Partir d'un sommet libre.
2. Se déplacer en alternant entre des arêtes de $M$ et des arêtes de $G \setminus M$, sans revenir sur un sommet visité (DFS).
3. Si on arrive à un sommet libre, alors on a trouvé un chemin $M$-augmentant.

**Question**

Pourquoi cet algorithme ne fonctionne pas sur un graphe général (non biparti) ?

# Graphe biparti



# Graphe biparti

On peut aussi construire un graphe $G_M$ pour simplifier la recherche d'un chemin $M$-augmentant.

# Graphe biparti

On peut aussi construire un graphe $G_M$ pour simplifier la recherche d'un chemin $M$-augmentant.

Soit $G = (S, A)$ un graphe biparti, avec $S = X \sqcup Y$, et $M$ un couplage de $G$.
On définit un graphe orienté $G_M = (S_M, A_M)$ où :

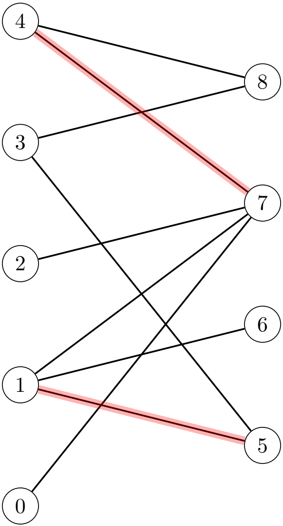
- $S_M = S \cup \{s, t\}$, où $s$ et $t$ sont deux nouveaux sommets.
- $A_M = \{(s, u) \mid u \in A \text{ et } u \text{ est libre}\} \cup \{(v, t) \mid v \in B \text{ et } v \text{ est libre}\} \cup \{(u, v) \mid \{u, v\} \in A \setminus M\} \cup \{(v, u) \mid \{u, v\} \in M\}$.

# Graphe biparti

Autrement dit, $G_M$ est construit à partir de $G$ de la façon suivante :

- On ajoute deux nouveaux sommets $s$ et $t$.
- On mets des arcs depuis $s$ vers chaque sommet libre de $X$.
- On mets des arcs depuis chaque sommet libre de $Y$ vers $t$.
- On oriente les arcs de $M$ de $Y$ vers $X$.
- On oriente les arcs de $A \setminus M$ de $X$ vers $Y$.

# Graphe biparti



# Graphe biparti

**Couplage maximum par chemin augmentant**

**Entrée :** Graphe $G = (S, A)$
**Sortie :** Couplage maximum $M$ de $G$

$M \leftarrow \emptyset$
**Tant que** il existe un chemin $M$-augmentant $P$ dans $G$ **:**
$\quad M \leftarrow M \Delta P$

Complexité pour un graphe biparti :

- Chaque recherche d'un chemin $M$-augmentant se fait par DFS en O$(|S| + |A|)$.
- Il y a au plus $|A|$ d'itération du « Tant que », car on ajoute une arête au couplage à chaque fois.

D'où une complexité totale O$(|A|(|S| + |A|))$.

# Graphe biparti

## Question

Appliquer l'algorithme précédent au graphe ci-dessous.