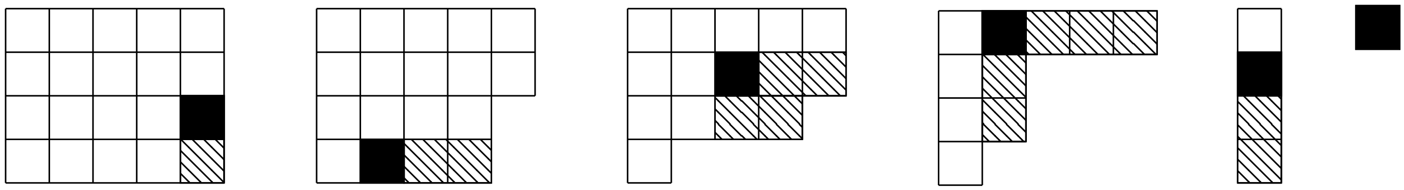
I Jeu de Chomp

Le jeu de Chomp se joue à deux joueurs (Alice et Bob, où Alice commence) sur une tablette de chocolat. Tour à tour, chaque joueur choisit un carré restant de la tablette et le mange ainsi que tous les carrés à droite et en bas de celui-ci. Le joueur qui mange le carré en haut à gauche a perdu. Voici un exemple de partie, où le carré choisi à chaque tour est en noir et les (autres) cases mangées hachurées :

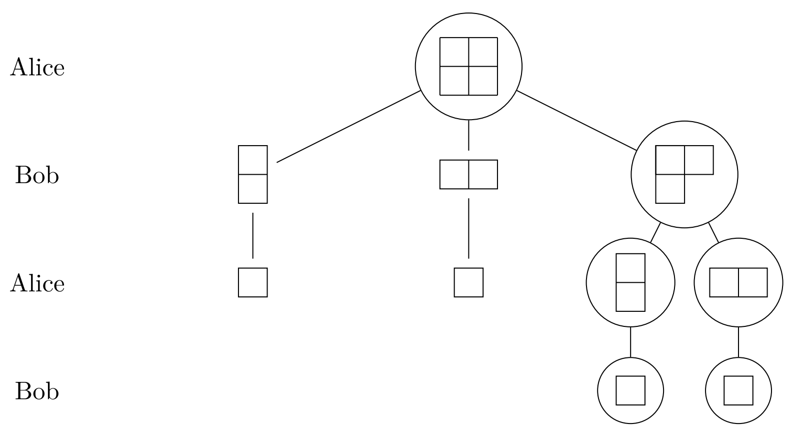


On représente la tablette de chocolat par une matrice, où un 1 indique que la case est mangée et un 0 qu'elle n'est pas mangée. La case en haut à gauche de la tablette de chocolat a pour coordonnées $(0, 0)$ dans cette matrice.

1. Montrer qu'Alice a une stratégie gagnante, pour une tablette initiale rectangulaire contenant au moins deux carrés de chocolat.

> Solution : Supposons qu'Alice mange le carré en bas à droite. Il y a alors deux cas :
>
> - Si Bob a une stratégie gagnante f alors, Alice peut utiliser f (ce qu'on appelle vol de stratégie) depuis la position initiale (tablette rectangulaire) pour gagner.
> - Sinon, comme il n'y a pas d'état nul ni de cycle, Alice a une stratégie gagnante (en utilisant l'exercice 6 du cours).
>
> Dans les deux cas, Alice a une stratégie gagnante.

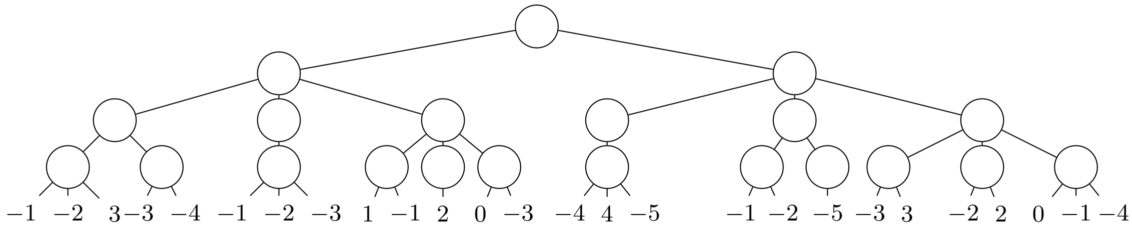
2. Dessiner le graphe des configurations pour une tablette initiale de taille 2×2, c'est-à-dire le graphe dont les sommets sont les configurations possibles de la tablette et dont les arêtes sont les coups possibles. On indiquera sur chaque sommet si c'est Alice ou Bob qui doit jouer.

> Solution : On indique à gauche le joueur qui doit jouer et on utilise l'équation de récurrence du cours.
>
> 
>

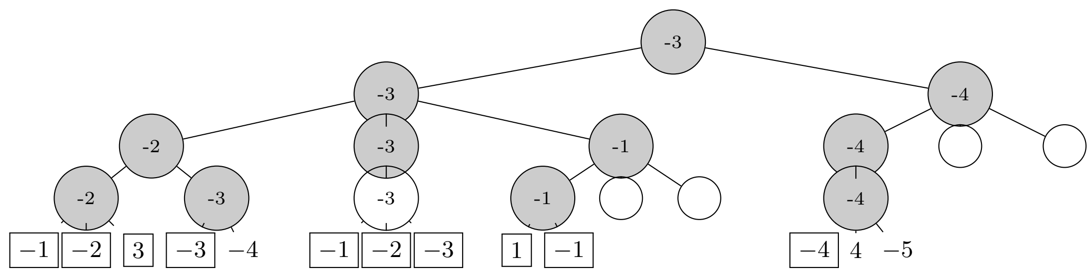
3. Déterminer, à la main, les attracteurs pour Alice sur une tablette initiale de taille 2×2. On pourra les indiquer sur le graphe précédent.

> Solution : Les attracteurs sont entourés sur le graphe précédent. On les détermine de bas en haut, comme dans le cours.

II Min-max



1. En supposant que le joueur 0 commence et souhaite maximiser l'heuristique, déterminer son évaluation par l'algorithme min-max.
2. Identifier les branches qui n'auraient pas été explorées avec un élagage α - β, en supposant que les enfants sont explorés de gauche à droite.

> Solution : On explore uniquement les nœuds internes grisés et les feuilles encadrées ci-dessous :
>
> 
>

III Jeu et couplage

On considère un jeu sur un graphe G non-orienté où chaque joueur (0 et 1, en commençant par 0) doit choisir un sommet non encore choisi et adjacent au sommet choisi par l'autre joueur. Autrement dit, la suite des sommets choisis doit formet un chemin élémentaire dans G. Le joueur qui ne peut plus jouer a perdu.

1. Montrer que si G admet un couplage parfait alors le joueur 1 a une stratégie gagnante.

> Solution : Soit M un couplage parfait de G. Quand le joueur 0 choisit un sommet u, le joueur 1 choisit le sommet v tel que $\{u, v\} \in M$. Comme M est parfait, le joueur 1 a toujours un sommet à choisir.

2. En considérant un couplage de cardinal maximum, montrer que si G n'admet pas de couplage parfait alors le premier joueur a une stratégie gagnante.

> Solution : Soit M un couplage maximum de G. Le joueur 0 commence par jouer un sommet libre x (non couvert par M) puis fait en sorte que le chemin joué avant le k-ème coup du joueur 1 soit de la forme
>
> $$x - a_1 - b_1 - a_2 - b_2 - \cdots - a_{k-1} - b_{k-1}$$
>
> avec :
>
> - x libre ;
> - $a_i b_i \in M$ pour tout i ;
> - $b_i a_{i+1} \notin M$ pour tout i
> - Le joueur 1 ne peut suivre une arête du couplage (pour $k = 1$, parce que x est libre, pour $k > 1$ parce que $a_{k-1} b_{k-1} \in M$) ;
> - le joueur 1 ne peut jouer un sommet y libre, sinon le chemin obtenu serait augmentant pour M. C'est absurde puisque M est de cardinalité maximale.
> - Donc le joueur 1 joue a_k, couvert par M. Le joueur 0 peut alors suivre l'arête de M qui couvre a_k et jouer b_k (b_k ne peut pas avoir été déjà joué : à part x qui est libre et donc différent de b_k, les a_i et b_i déjà joués sont deux à

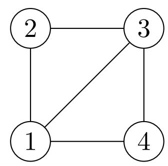
deux appariés).

On voit que le joueur 0 peut toujours jouer (il dispose toujours d'une arête du couplage). Le graphe étant fini, c'est le joueur 0 qui finit par perdre.

IV Jeu de Shannon

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Si T_1 et T_2 sont deux arbres couvrants de G, on dit qu'ils sont disjoints s'ils n'ont aucune arête en commun.

1. Le graphe suivant possède t-il deux arbres couvrants disjoints ?



2. Soient T_1 et T_2 deux arbres couvrants de G et e_1 une arête de T_1. Montrer qu'il existe une arête e_2 de T_2 telle que $T_1 - e_1 + e_2$ (le graphe obtenu à partir de T_1 en enlevant e_1 et en ajoutant e_2) soit un arbre couvrant de G.
3. Soit T un arbre couvrant de G et e une arête de T. Soient T' et G' obtenus en contractant e dans T et G, c'est-à-dire en supprimant e et identifiant ses extrémités. Montrer que T' est un arbre couvrant de G'.

Si P est une partition de V, on note $|P|$ son cardinal et $\|P\|$ le nombre d'arêtes de G dont les deux extrémités sont dans des ensembles différents de P.

On s'intéresse maintenant au théorème suivant :

Théorème : Théorème de Tutte

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. G possède k arbres couvrants disjoints si et seulement si, pour toute partition P de V, $\|P\| \geq k(|P| - 1)$.

4. En admettant le théorème de Tutte, montrer que le problème suivant appartient à NP.

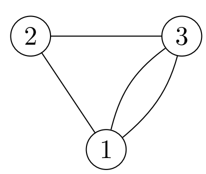
   co-PACKING-TREES

   Entrée : Un graphe $G = (V, E)$ et un entier k.
   Question : Est-il faux que G possède k arbres couvrants disjoints ?

5. Montrer le théorème de Tutte pour $k = 1$.
6. Montrer le sens direct du théorème de Tutte : si G possède k arbres couvrants disjoints, alors $\|P\| \geq k(|P| - 1)$.

On considère un jeu avec un graphe $G = (V, E)$ non orienté qui peut posséder plusieurs arêtes entre deux sommets.
Deux joueurs A et B, où A commence, choisissent alternativement une arête de G non encore choisie. Si, à un moment de la partie, les arêtes choisies par B forment un arbre couvrant de G alors B gagne. Sinon, A gagne.

7. Indiquer si B a une stratégie gagnante si G est le graphe ci-dessous.



Dans la suite, on veut montrer que B possède une stratégie gagnante si et seulement si G possède deux arbres couvrants disjoints. Pour cela, on admet le théorème de Tutte.

8. Supposons qu'il existe une partition P de V telle que $\|P\| < 2(|P| - 1)$. Montrer que A a une stratégie gagnante.
9. Supposons qu'il existe deux arbres couvrants disjoints T_1 et T_2 dans G. Montrer que B a une stratégie gagnante.
   On pourra raisonner par récurrence sur $|V|$.

Solution :

1. Non car 2 arbres couvrants disjoints auraient 6 arêtes au total, alors qu'il n'y en a que 5.

2. Soit $T_1' = T_1 - e_1$. T_1' n'est pas connexe donc contient deux composantes connexes C_1 et C_2. T_2 est connexe donc contient une arête e_2 reliant C_1 et C_2. $T_1 - e_1 + e_2$ est alors un arbre couvrant de G.

3. Remarquons d'abord que T' est couvrant et a le bon nombre d'arêtes : si G a n sommets alors G' en a $n-1$ et T' a $n-2$ arêtes.
De plus, T' est acyclique car s'il avait un cycle C, alors T en aurait un aussi (en ajoutant e à C).

4. - Supposons que, pour toute partition P de V, $\|P\| \geq |P| - 1$.
   Supposons par l'absurde que G ne soit pas connexe. Alors G possède deux composantes connexes C_1 et C_2. Soit $P = \{C_1, C_2\}$. Alors $\|P\| = 0$ et $|P| = 2$, ce qui contredit l'hypothèse : absurde.
   Donc G est connexe.
   - Supposons que G possède un arbre couvrant T et considérons une partition $P = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ de V.
   Soit $v \in V$ et C_i l'ensemble de P contenant v. On enracine T en v, en orientant les arêtes du père vers le fils. Alors chaque ensemble de P à part C_i possède un arc entrant (car T est connexe). Donc $\|P\| \geq k - 1$.

5. On reprend la même démonstration que le sens direct ci-dessus.

6. B a une stratégie gagnante, en choisissant une arête adjacente à 2 puis la dernière arête restante qui lui assure d'avoir un arbre couvrant.

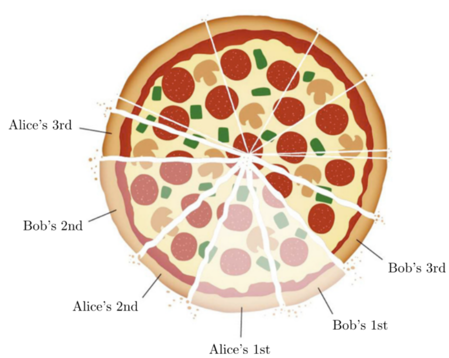
7. Il suffit que A choisisse toujours une arête entre deux ensembles différents de P. Comme A commence, cela lui permet de sélectionner au moins la moitié de ces arêtes. Donc B en sélectionne strictement moins que $|P|-1$, ce qui l'empêche de former un arbre couvrant.

8. Montrer par récurrence sur $|G|$ que si G possède deux arbres couvrants disjoints alors B a une stratégie gagnante.
Si $|G| = 1$ alors B gagne car l'arbre vide est couvrant.
Soit $n \geqslant 1$. Supposons la propriété acquise pour tout graphe à n sommets.
Soit G un graphe à $n + 1$ sommets possédant deux arbres couvrants disjoints T_1 et T_2. Considérons la première arête e_1 choisie par A.
Si $e_1 \notin T_1 \cup T_2$ alors B choisit une arête e_2 quelconque de G.
Sinon, supposons par exemple que $e_1 \in T_1$. Soit $e_2 \in T_2$ donné par la question 2, c'est-à-dire telle que $T_1 - e_1 + e_2$ soit un arbre couvrant de G.
Soit G', T_1, T_2 obtenus à partir de G, T_1, T_2 en supprimant e_1 et en contractant e_2. D'après la question 3, T_1 et T_2 sont des arbres couvrants de G'.
Comme G' possède n sommets et possède deux arbres couvrants disjoints, B a une stratégie gagnante dans G' par hypothèse de récurrence. Cette stratégie donne aussi un arbre couvrant de G, ce qui permet à B de gagner dans G.

V Pizza

Alice et Bob se partagent une pizza, qui est découpée en n parts. Chaque part possède un poids. Ils choisissent une part chacun leur tour, avec les règles suivantes :

- Alice commence et choisit la part de son choix.
- Ensuite, ils alternent en choisissant à chaque fois une part adjacente à une part déjà choisie (de façon à ce que les parts mangées soient contigües).

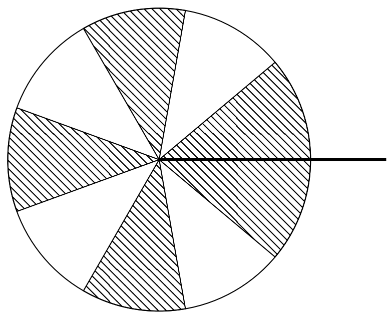


L'objectif pour chaque joueur est de manger un poids de pizza le plus important possible.

1. Combien y a t-il de configurations possibles pour ce jeu ?

2. Donner une stratégie gloutonne pour Alice et montrer qu'elle n'est pas optimale.
3. On suppose que n est pair. Montrer qu'Alice a une stratégie gagnante (lui garantissant de manger au moins la moitié de la pizza).

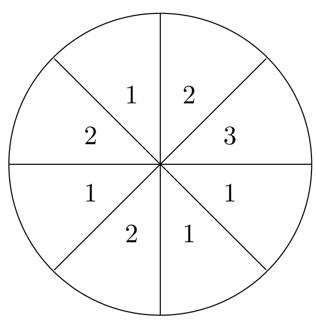
Dans la suite, on suppose que n est impair.
Une coupe désigne la zone entre deux parts de pizza adjacente. Pour chaque coupe C, on sépare les parts en deux ensembles $R(C)$ (hachuré) et $G(C)$ (en blanc) comme sur l'exemple suivant :



4. Montrer que Alice a une stratégie lui garantissant de manger toutes les parts de $R(C)$, pour une certain coupe C (quelconque).
5. En déduire qu'Alice a une stratégie lui garantissant de manger au moins $\frac{1}{3}$ de la pizza.

Solution :

1. On numérote les parts entre 1 et n. Une configuration est déterminée par l'intervalle de parts déjà mangées. Si au moins une part a été mangée, il y a n possibilités pour le début de cet intervalle et $n-1$ pour la fin. En ajoutant la configuration initiale, il y a donc $n(n-1)+1$ configurations possibles.
2. On choisit de toujours manger la plus grosse part possible. Ceci n'est pas optimal sur la pizza suivante (où chaque entier correspond au poids de la part correspondante) car Alice mange alors $3+1+1+1=6$ alors qu'elle pourrait manger $2+1+2+2=7$.



3. On colorie alternativement les parts de deux couleurs (rouge et bleu). Soient S_1 la somme des poids des parts rouges, S_2 la somme des poids des parts bleues et S le poids total de la pizza. Comme $S_1+S_2=S$, on a $S_1 \geqslant \frac{S}{2}$ ou $S_2 \geqslant \frac{S}{2}$.
Supposons que $S_1 \geqslant \frac{S}{2}$. Alors Alice peut choisir à chaque fois une part bleue pour manger au moins $\frac{S}{2}$.
4. Alice choisit une part quelconque puis choisit toujours la part adjacente à la dernière part choisie par Bob (comme pour la question 3). Comme Alice mange une part de plus que Bob, il y a deux parts adjacentes mangées par Alice. On note C la coupe entre ces deux parts. Alors Alice mange toutes les parts de $R(C)$.
5. Si C est une coupe, on note $|R(C)|$ le poids total des parts de $R(C)$, en proportion du poids total. Soit C_m une coupe telle que $|R(C_m)|$ soit minimum.
Si $|R(C_m)| \geq \frac{1}{3}$ alors la coupe C de la question 4 convient.
Sinon, $|G(C_m)| \geq \frac{2}{3}$. Soit p une part de $G(C_m)$ telle que le poids des parts de $G(C_m)$ des deux côtés de C_m à p

soit au moins $\frac{1}{2}|G(C_m)|$. Alors Alice peut choisir d'abord p, puis toujours choisir la part adjacente à la dernière part choisie par Bob. Ainsi, Alice mange toutes les parts entre p et C_m dans au moins une direction, donc mange au moins $\frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ de la pizza.