

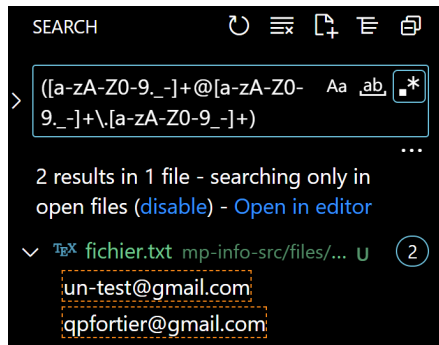
Langages réguliers

Quentin Fortier

September 7, 2025

Motivation des langages formels

- Recherche de motif dans un texte.



Recherche d'email dans Visual Code

- Formalisation de la syntaxe d'un langage de programmation (et conception de nouveau langage) : BNF d'[OCaml](#), de [Python](#).

Définitions

- Un alphabet est un ensemble Σ fini, dont les éléments sont des lettres.

Définitions

- Un alphabet est un ensemble Σ fini, dont les éléments sont des lettres.
- Un mot m d'un alphabet Σ est une suite finie m_1, \dots, m_n de lettres de Σ , et on note $m = m_1 \dots m_n$.

Définitions

- Un alphabet est un ensemble Σ fini, dont les éléments sont des lettres.
- Un mot m d'un alphabet Σ est une suite finie m_1, \dots, m_n de lettres de Σ , et on note $m = m_1 \dots m_n$.
 n est la longueur de m , qu'on note $|m|$.

Définitions

- Un alphabet est un ensemble Σ fini, dont les éléments sont des lettres.
- Un mot m d'un alphabet Σ est une suite finie m_1, \dots, m_n de lettres de Σ , et on note $m = m_1 \dots m_n$.
 n est la longueur de m , qu'on note $|m|$.
- Le mot vide (contenant aucune lettre) est noté ε .

Définitions

- Un alphabet est un ensemble Σ fini, dont les éléments sont des lettres.
- Un mot m d'un alphabet Σ est une suite finie m_1, \dots, m_n de lettres de Σ , et on note $m = m_1 \dots m_n$.
 n est la longueur de m , qu'on note $|m|$.
- Le mot vide (contenant aucune lettre) est noté ε .
- On note Σ^* l'ensemble des mots de Σ et $\Sigma^+ = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$.

Définitions

- Un alphabet est un ensemble Σ fini, dont les éléments sont des lettres.
- Un mot m d'un alphabet Σ est une suite finie m_1, \dots, m_n de lettres de Σ , et on note $m = m_1 \dots m_n$.
 n est la longueur de m , qu'on note $|m|$.
- Le mot vide (contenant aucune lettre) est noté ε .
- On note Σ^* l'ensemble des mots de Σ et $\Sigma^+ = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$.
- On note Σ^n l'ensemble des mots de Σ de taille n .

Définitions

- Un alphabet est un ensemble Σ fini, dont les éléments sont des lettres.
- Un mot m d'un alphabet Σ est une suite finie m_1, \dots, m_n de lettres de Σ , et on note $m = m_1 \dots m_n$.
 n est la longueur de m , qu'on note $|m|$.
- Le mot vide (contenant aucune lettre) est noté ε .
- On note Σ^* l'ensemble des mots de Σ et $\Sigma^+ = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$.
- On note Σ^n l'ensemble des mots de Σ de taille n .

Remarque : on confond parfois la lettre a et le mot a (contenant une seule lettre).

Définition : Égalité de mots

Deux mots $u = u_1 \dots u_n$ et $v = v_1 \dots v_p$ sur le même alphabet Σ sont égaux s'ils ont la même longueur ($n = p$) et si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $u_i = v_i$.

Définition : Égalité de mots

Deux mots $u = u_1 \dots u_n$ et $v = v_1 \dots v_p$ sur le même alphabet Σ sont égaux s'ils ont la même longueur ($n = p$) et si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $u_i = v_i$.

Définition : Concaténation et puissance

- La concaténation de deux mots $u = u_1 \dots u_n$ et $v = v_1 \dots v_p$ est :

$$uv = u_1 \dots u_n v_1 \dots v_p$$

Elle est aussi parfois notée $u \cdot v$.

Définition : Égalité de mots

Deux mots $u = u_1 \dots u_n$ et $v = v_1 \dots v_p$ sur le même alphabet Σ sont égaux s'ils ont la même longueur ($n = p$) et si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $u_i = v_i$.

Définition : Concaténation et puissance

- La concaténation de deux mots $u = u_1 \dots u_n$ et $v = v_1 \dots v_p$ est :

$$uv = u_1 \dots u_n v_1 \dots v_p$$

Elle est aussi parfois notée $u \cdot v$.

- Si u est un mot, on définit $u^0 = \varepsilon$ et $u^k = \underbrace{uu \dots u}_k$.

Définition : Égalité de mots

Deux mots $u = u_1 \dots u_n$ et $v = v_1 \dots v_p$ sur le même alphabet Σ sont égaux s'ils ont la même longueur ($n = p$) et si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $u_i = v_i$.

Définition : Concaténation et puissance

- La concaténation de deux mots $u = u_1 \dots u_n$ et $v = v_1 \dots v_p$ est :

$$uv = u_1 \dots u_n v_1 \dots v_p$$

Elle est aussi parfois notée $u \cdot v$.

- Si u est un mot, on définit $u^0 = \varepsilon$ et $u^k = \underbrace{uu \dots u}_k$.

Exercice

Soient Σ un alphabet, $a, b \in \Sigma$ et $u \in \Sigma^*$. On suppose $au = ub$. Montrer que $a = b$ et qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u = a^k$.

Un monoïde (HP) est comme un groupe, sauf qu'il n'y a pas forcément d'inverse.

Lemme

(Σ^*, \cdot) est un monoïde (où \cdot est la concaténation de mots), c'est-à-dire :

- $\varepsilon \cdot m = m \cdot \varepsilon = m$ (ε est élément neutre)
- $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$ (associativité)

Un monoïde (HP) est comme un groupe, sauf qu'il n'y a pas forcément d'inverse.

Lemme

(Σ^*, \cdot) est un monoïde (où \cdot est la concaténation de mots), c'est-à-dire :

- $\varepsilon \cdot m = m \cdot \varepsilon = m$ (ε est élément neutre)
- $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$ (associativité)

Lemme

La fonction qui à un mot associe sa longueur est un morphisme de monoïde de (Σ^*, \cdot) vers $(\mathbb{N}, +)$, c'est-à-dire :

- $|\varepsilon| = 0$
- $|m \cdot n| = |m| + |n|$

Soit u et m deux mots de Σ^* .

Définitions

- u est un préfixe de m s'il existe un mot v tel que $m = uv$.

Soit u et m deux mots de Σ^* .

Définitions

- u est un préfixe de m s'il existe un mot v tel que $m = uv$.
- u est un suffixe de m s'il existe un mot v tel que $m = vu$.

Soit u et m deux mots de Σ^* .

Définitions

- u est un préfixe de m s'il existe un mot v tel que $m = uv$.
- u est un suffixe de m s'il existe un mot v tel que $m = vu$.
- u est un facteur (*substring* en anglais) de m s'il existe des mots v , w tels que $m = vuw$.

Soit u et m deux mots de Σ^* .

Définitions

- u est un préfixe de m s'il existe un mot v tel que $m = uv$.
- u est un suffixe de m s'il existe un mot v tel que $m = vu$.
- u est un facteur (*substring* en anglais) de m s'il existe des mots v , w tels que $m = vuw$.
- u est un sous-mot (*subsequence* en anglais) de m si u est une sous-suite (ou : suite extraite) de m .

Exemple : abc est un sous-mot de $aabacb$, mais pas un facteur.

Soit u et m deux mots de Σ^* .

Définitions

- u est un préfixe de m s'il existe un mot v tel que $m = uv$.
- u est un suffixe de m s'il existe un mot v tel que $m = vu$.
- u est un facteur (*substring* en anglais) de m s'il existe des mots v, w tels que $m = vuw$.
- u est un sous-mot (*subsequence* en anglais) de m si u est une sous-suite (ou : suite extraite) de m .

Exemple : abc est un sous-mot de $aabacb$, mais pas un facteur.

Exercice

Soit m un mot de taille n dont toutes les lettres sont différentes. Quel est son nombre de préfixes, de suffixes, de facteurs et de sous-mots ? Et si des lettres peuvent être répétées ?

Rappels d'utilisation d'une chaîne de caractères (**string**) :

```
let s = "abc" (* défini une chaîne de caractères *)  
s.[1] (* donne 'b' *)  
String.length s (* donne 3 *)  
"abc" ^ "def" (* concaténation *)
```

Remarque : Contrairement à **array**, le type **string** est immuable (on ne peut pas modifier un caractère d'une chaîne de caractères).

Rappels d'utilisation d'une chaîne de caractères (**string**) :

```
let s = "abc" (* défini une chaîne de caractères *)  
s.[1] (* donne 'b' *)  
String.length s (* donne 3 *)  
"abc" ^ "def" (* concaténation *)
```

Remarque : Contrairement à **array**, le type **string** est immuable (on ne peut pas modifier un caractère d'une chaîne de caractères).

Question

Écrire une fonction `sous_mot` : **string** -> **string** -> **bool** qui teste si un mot est un sous-mot d'un autre, en complexité linéaire.

Définition

Un langage L sur un alphabet Σ est un ensemble de mots de Σ .

De façon équivalente, L est un langage si $L \subseteq \Sigma^*$ ou encore $L \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$.

Définition

Un langage L sur un alphabet Σ est un ensemble de mots de Σ .

De façon équivalente, L est un langage si $L \subseteq \Sigma^*$ ou encore $L \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$.

Exemples :

- 1 L'ensemble $L_0 = \{\varepsilon, a, bab\}$ sur $\Sigma = \{a, b\}$.
- 2 L'ensemble L_1 des mots du dictionnaire français sur $\Sigma = \{a, b, \dots, z\}$.
- 3 L'ensemble L_2 des formules arithmétiques sur $\Sigma = \{0, \dots, 9, +, -, /, *\}$.
- 4 L'ensemble L_3 des programmes OCaml sur $\Sigma = \{a, \dots, z, !, <, >, \dots\}$.

Exercice : Résumé des définitions

Soit $\Sigma = \{a, b\}$.

- ❶ Σ est
- ❷ a est
- ❸ ε est
- ❹ $abaaabb$ est
- ❺ $\{a, b, abaaabb\}$ est

Exercice : Résumé des définitions

Soit $\Sigma = \{a, b\}$.

- ❶ Σ est un alphabet.
- ❷ a est une lettre (et aussi un mot de longueur 1...).
- ❸ ε est le mot vide.
- ❹ $abaaabb$ est un mot.
- ❺ $\{a, b, abaaabb\}$ est un langage.

On veut des algorithmes pour résoudre les problèmes suivants :

Problème

Étant donné un langage L et un mot m , est-ce que $m \in L$?

Applications : correcteur orthographique, coloration syntaxique...

On veut des algorithmes pour résoudre les problèmes suivants :

Problème

Étant donné un langage L et un mot m , est-ce que $m \in L$?

Applications : correcteur orthographique, coloration syntaxique...

Problème

Étant donné un texte s et un langage L , s contient-il un mot de L ?

On veut des algorithmes pour résoudre les problèmes suivants :

Problème

Étant donné un langage L et un mot m , est-ce que $m \in L$?

Applications : correcteur orthographique, coloration syntaxique...

Problème

Étant donné un texte s et un langage L , s contient-il un mot de L ?
(Cas particulier $L = \{m\}$: le mot m apparaît-il dans un texte s ?)

Application : recherche de motif (adresse mail, séquence d'ADN...) dans un texte.

Soient L_1 et L_2 deux langages de même alphabet.

Définition : Concaténation

La concaténation $L_1 L_2$ de L_1 et L_2 est définie par :

$$L_1 L_2 = \{m_1 m_2 \mid m_1 \in L_1, m_2 \in L_2\}$$

Soient L_1 et L_2 deux langages de même alphabet.

Définition : Concaténation

La concaténation $L_1 L_2$ de L_1 et L_2 est définie par :

$$L_1 L_2 = \{m_1 m_2 \mid m_1 \in L_1, m_2 \in L_2\}$$

$L_1 L_2$ est donc l'ensemble des mots obtenus par concaténation d'un mot de L_1 et d'un mot de L_2 .

Soient L_1 et L_2 deux langages de même alphabet.

Définition : Concaténation

La concaténation $L_1 L_2$ de L_1 et L_2 est définie par :

$$L_1 L_2 = \{m_1 m_2 \mid m_1 \in L_1, m_2 \in L_2\}$$

$L_1 L_2$ est donc l'ensemble des mots obtenus par concaténation d'un mot de L_1 et d'un mot de L_2 .

Exercice

- 1 Soit $L_1 = \{a, ab\}$ et $L_2 = \{\varepsilon, b, bba\}$. Déterminer $L_1 L_2$.
- 2 Quel lien a-t-on entre $|L_1 L_2|$ et $|L_1| |L_2|$, dans le cas général ?

Exercice

- 1 La concaténation de deux langages est-elle commutative ? Associative ?
- 2 Quel est l'élément neutre de la concaténation ? L'élément absorbant ?

Exercice

- 1 La concaténation de deux langages est-elle commutative ? Associative ?
- 2 Quel est l'élément neutre de la concaténation ? L'élément absorbant ?

La concaténation est distributive par rapport à l'union :

$$L_1(L_2 \cup L_3) = L_1L_2 \cup L_1L_3.$$

Définition : Puissance

On définit la puissance L^n du langage L par récurrence :

$$L^0 = \{\varepsilon\}$$

$$L^n = L^{n-1}L, \text{ pour } n \geq 1$$

Définition : Puissance

On définit la puissance L^n du langage L par récurrence :

$$L^0 = \{\varepsilon\}$$

$$L^n = L^{n-1}L, \text{ pour } n \geq 1$$

Dit autrement : $L^n = \underbrace{L \cdot \dots \cdot L}_n = \{m_1 \cdots m_n \mid m_1 \in L, \dots, m_n \in L\}.$

Définition : Puissance

On définit la puissance L^n du langage L par récurrence :

$$L^0 = \{\varepsilon\}$$

$$L^n = L^{n-1}L, \text{ pour } n \geq 1$$

Dit autrement : $L^n = \underbrace{L \cdot \dots \cdot L}_n = \{m_1 \cdots m_n \mid m_1 \in L, \dots, m_n \in L\}$.

Exemple : Σ^n est l'ensemble des mots de longueur n sur l'alphabet Σ .

Définition : Puissance

On définit la puissance L^n du langage L par récurrence :

$$L^0 = \{\varepsilon\}$$

$$L^n = L^{n-1}L, \text{ pour } n \geq 1$$

Dit autrement : $L^n = \underbrace{L \cdot \dots \cdot L}_n = \{m_1 \cdots m_n \mid m_1 \in L, \dots, m_n \in L\}$.

Exemple : Σ^n est l'ensemble des mots de longueur n sur l'alphabet Σ .

Exercice

- 1 À quelle condition a-t-on $L \subseteq L^2$?
- 2 Quel lien a-t-on entre L^2 et $\{u^2 \mid u \in L\}$?

Soit L un langage.

Définition : Étoile de Kleene

On définit l'étoile (de Kleene) L^* d'un langage L par :

$$L^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} L^k$$

Soit L un langage.

Définition : Étoile de Kleene

On définit l'étoile (de Kleene) L^* d'un langage L par :

$$L^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} L^k$$

L^* est donc l'ensemble des mots obtenus par concaténation d'un nombre quelconque de mots de L .

Opérations sur les langages

Soit L un langage.

Définition : Étoile de Kleene

On définit l'étoile (de Kleene) L^* d'un langage L par :

$$L^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} L^k$$

L^* est donc l'ensemble des mots obtenus par concaténation d'un nombre quelconque de mots de L .

Remarque : L^* contient toujours ε , car $L^0 = \{\varepsilon\}$.

Opérations sur les langages

Soit L un langage.

Définition : Étoile de Kleene

On définit l'étoile (de Kleene) L^* d'un langage L par :

$$L^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} L^k$$

L^* est donc l'ensemble des mots obtenus par concaténation d'un nombre quelconque de mots de L .

Remarque : L^* contient toujours ε , car $L^0 = \{\varepsilon\}$.

Question

Montrer que $(L^*)^* = L^*$.

Langages réguliers

Soit Σ un alphabet.

Définition

L'ensemble $\text{Reg}(\Sigma)$ des langages réguliers sur Σ est défini par :

- $\text{Reg}(\Sigma)$ contient tous les langages finis.
- $\text{Reg}(\Sigma)$ est stable par union, concaténation et étoile de Kleene.
- $\text{Reg}(\Sigma)$ est le plus petit ensemble de langages ayant ces propriétés (si P est un ensemble de langages contenant les langages finis et stable par union, concaténation et étoile de Kleene, alors $\text{Reg}(\Sigma) \subseteq P$).

Langages réguliers

Soit Σ un alphabet.

Définition

L'ensemble $\text{Reg}(\Sigma)$ des langages réguliers sur Σ est défini par :

- $\text{Reg}(\Sigma)$ contient tous les langages finis.
- $\text{Reg}(\Sigma)$ est stable par union, concaténation et étoile de Kleene.
- $\text{Reg}(\Sigma)$ est le plus petit ensemble de langages ayant ces propriétés (si P est un ensemble de langages contenant les langages finis et stable par union, concaténation et étoile de Kleene, alors $\text{Reg}(\Sigma) \subseteq P$).

On a donc :

Propriété

- Tout langage fini est régulier.
- Si L_1 et L_2 réguliers alors $L_1 \cup L_2$ est régulier.
- Si L_1 et L_2 réguliers alors $L_1 L_2$ est régulier.
- Si L est régulier alors L^* est régulier.

Propriété

Par récurrence immédiate, si L_1, \dots, L_n sont réguliers alors $L_1 \cup \dots \cup L_n$ et $L_1 L_2 \dots L_n$ sont réguliers.

Attention :

- Une union infinie de langages réguliers n'est pas forcément régulière.
- Un langage particulier n'est pas forcément stable par concaténation.

Définition

- Tout langage fini est régulier.
- L_1 et L_2 réguliers $\implies L_1 \cup L_2$ régulier.
- L_1 et L_2 réguliers $\implies L_1 L_2$ régulier.
- L régulier $\implies L^*$ régulier.

Exemples :

- 1 Soit m un mot. Alors $\{m\}$ est fini donc est un langage régulier, qu'on note aussi m par abus de notation.

Définition

- Tout langage fini est régulier.
- L_1 et L_2 réguliers $\implies L_1 \cup L_2$ régulier.
- L_1 et L_2 réguliers $\implies L_1 L_2$ régulier.
- L régulier $\implies L^*$ régulier.

Exemples :

- 1 Soit m un mot. Alors $\{m\}$ est fini donc est un langage régulier, qu'on note aussi m par abus de notation.
- 2 Σ est fini donc est régulier. Σ^* est l'étoile d'un langage régulier donc est régulier.

Définition

- Tout langage fini est régulier.
- L_1 et L_2 réguliers $\implies L_1 \cup L_2$ régulier.
- L_1 et L_2 réguliers $\implies L_1 L_2$ régulier.
- L régulier $\implies L^*$ régulier.

Exemples :

- 1 Soit m un mot. Alors $\{m\}$ est fini donc est un langage régulier, qu'on note aussi m par abus de notation.
- 2 Σ est fini donc est régulier. Σ^* est l'étoile d'un langage régulier donc est régulier.
- 3 Soit m un mot. L'ensemble des mots ayant comme facteur m

Définition

- Tout langage fini est régulier.
- L_1 et L_2 réguliers $\implies L_1 \cup L_2$ régulier.
- L_1 et L_2 réguliers $\implies L_1 L_2$ régulier.
- L régulier $\implies L^*$ régulier.

Exemples :

- 1 Soit m un mot. Alors $\{m\}$ est fini donc est un langage régulier, qu'on note aussi m par abus de notation.
- 2 Σ est fini donc est régulier. Σ^* est l'étoile d'un langage régulier donc est régulier.
- 3 Soit m un mot. L'ensemble des mots ayant comme facteur m est égal à $\Sigma^* m \Sigma^*$ donc est un langage régulier.
- 4 Soit $m = m_1 \cdots m_n$ un mot. L'ensemble des mots ayant comme sous-mot m

Définition

- Tout langage fini est régulier.
- L_1 et L_2 réguliers $\implies L_1 \cup L_2$ régulier.
- L_1 et L_2 réguliers $\implies L_1 L_2$ régulier.
- L régulier $\implies L^*$ régulier.

Exemples :

- 1 Soit m un mot. Alors $\{m\}$ est fini donc est un langage régulier, qu'on note aussi m par abus de notation.
- 2 Σ est fini donc est régulier. Σ^* est l'étoile d'un langage régulier donc est régulier.
- 3 Soit m un mot. L'ensemble des mots ayant comme facteur m est égal à $\Sigma^* m \Sigma^*$ donc est un langage régulier.
- 4 Soit $m = m_1 \cdots m_n$ un mot. L'ensemble des mots ayant comme sous-mot m est égal à $\Sigma^* m_1 \Sigma^* m_2 \cdots \Sigma^* m_n \Sigma^*$ donc est un langage régulier.

Exercice

Montrer que les langages suivants sont réguliers sur $\Sigma = \{a, b\}$:

- 1 Mots commençants par a .
- 2 Mots commençants par a et finissant par b .
- 3 Mots de taille paire.
- 4 Mots de taille impaire.

Expressions régulières

Les expressions régulières sont une notation plus concise pour représenter un langage régulier :

Expressions régulières

L'ensemble des expressions régulières sur un alphabet Σ est le plus petit langage \mathcal{R} sur $\Sigma \cup \{\emptyset, \varepsilon, |, *, (,)\}$ vérifiant :

- $\forall a \in \Sigma, a \in \mathcal{R}$
- $\emptyset \in \mathcal{R}, \varepsilon \in \mathcal{R}$
- $\forall e_1, e_2 \in \mathcal{R}, (e_1|e_2) \in \mathcal{R}$ et $(e_1 e_2) \in \mathcal{R}$
- $\forall e \in \mathcal{R}, e^* \in \mathcal{R}$

Expressions régulières

Les expressions régulières sont une notation plus concise pour représenter un langage régulier :

Expressions régulières

L'ensemble des expressions régulières sur un alphabet Σ est le plus petit langage \mathcal{R} sur $\Sigma \cup \{\emptyset, \varepsilon, |, *, (,)\}$ vérifiant :

- $\forall a \in \Sigma, a \in \mathcal{R}$
- $\emptyset \in \mathcal{R}, \varepsilon \in \mathcal{R}$
- $\forall e_1, e_2 \in \mathcal{R}, (e_1|e_2) \in \mathcal{R}$ et $(e_1 e_2) \in \mathcal{R}$
- $\forall e \in \mathcal{R}, e^* \in \mathcal{R}$

Remarques :

- On utilisera seulement les parenthèses nécessaires. Ainsi, $((((ab)c)|d)$ sera noté $abc|d$.
- $e_1|e_2$ est aussi noté $e_1 + e_2$.

Expressions régulières

Les expressions régulières sont une notation plus concise pour représenter un langage régulier :

Expressions régulières

L'ensemble des expressions régulières sur un alphabet Σ est le plus petit langage \mathcal{R} sur $\Sigma \cup \{\emptyset, \varepsilon, |, *, (,)\}$ vérifiant :

- $\forall a \in \Sigma, a \in \mathcal{R}$
- $\emptyset \in \mathcal{R}, \varepsilon \in \mathcal{R}$
- $\forall e_1, e_2 \in \mathcal{R}, (e_1|e_2) \in \mathcal{R}$ et $(e_1 e_2) \in \mathcal{R}$
- $\forall e \in \mathcal{R}, e^* \in \mathcal{R}$

Remarques :

- On utilisera seulement les parenthèses nécessaires. Ainsi, $((((ab)c)|d)$ sera noté $abc|d$.
- $e_1|e_2$ est aussi noté $e_1 + e_2$.

Exemples : a^* , $(a|aba)^*$, $a(a|b)^*b$ sont des expressions régulières.

Expressions régulières

L'ensemble des expressions régulières sur un alphabet Σ est le plus petit langage \mathcal{R} sur $\Sigma \cup \{\emptyset, \varepsilon, |, *, (,)\}$ vérifiant :

- $\forall a \in \Sigma, a \in \mathcal{R}$
- $\emptyset \in \mathcal{R}, \varepsilon \in \mathcal{R}$
- $\forall e_1, e_2 \in \mathcal{R}, (e_1|e_2) \in \mathcal{R}$ et $(e_1 e_2) \in \mathcal{R}$
- $\forall e \in \mathcal{R}, e^* \in \mathcal{R}$

```
type 'a regexp =  
  | Vide | Epsilon | L of 'a (* L a est la lettre a *)  
  | Union of 'a regexp * 'a regexp  
  | Concat of 'a regexp * 'a regexp  
  | Etoile of 'a regexp
```

Expressions régulières

L'ensemble des expressions régulières sur un alphabet Σ est le plus petit langage \mathcal{R} sur $\Sigma \cup \{\emptyset, \varepsilon, |, *, (,)\}$ vérifiant :

- $\forall a \in \Sigma, a \in \mathcal{R}$
- $\emptyset \in \mathcal{R}, \varepsilon \in \mathcal{R}$
- $\forall e_1, e_2 \in \mathcal{R}, (e_1|e_2) \in \mathcal{R}$ et $(e_1 e_2) \in \mathcal{R}$
- $\forall e \in \mathcal{R}, e^* \in \mathcal{R}$

```
type 'a regexp =  
  | Vide | Epsilon | L of 'a (* L a est la lettre a *)  
  | Union of 'a regexp * 'a regexp  
  | Concat of 'a regexp * 'a regexp  
  | Etoile of 'a regexp
```

Par exemple, $a(a|b)^*b$ est représenté par :

```
Concat(L 'a', Concat(Etoile(Union(L 'a', L 'b')), L 'b'))
```

```
type 'a regexp =  
  | Vide | Epsilon | L of 'a  
  | Union of 'a regexp * 'a regexp  
  | Concat of 'a regexp * 'a regexp  
  | Etoile of 'a regexp
```

Question

Écrire une fonction `lettres : 'a regexp -> 'a list` qui renvoie la liste des lettres utilisées dans une expression régulière.

Langage d'une expression régulière

Le langage $L(e)$ d'une expression régulière e est définie récursivement :

- $L(a) = \{a\}$ si $a \in \Sigma$
- $L(\emptyset) = \emptyset$, $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- $L(e|e') = L(e) \cup L(e')$
- $L(ee') = L(e)L(e')$
- $L(e^*) = L(e)^*$

Par abus de notation, on oublie souvent le $L(e)$ et on confond expression régulière et langage associé.

Langage d'une expression régulière

Le langage $L(e)$ d'une expression régulière e est définie récursivement :

- $L(a) = \{a\}$ si $a \in \Sigma$
- $L(\emptyset) = \emptyset$, $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- $L(e|e') = L(e) \cup L(e')$
- $L(ee') = L(e)L(e')$
- $L(e^*) = L(e)^*$

Par abus de notation, on oublie souvent le $L(e)$ et on confond expression régulière et langage associé.

Équivalence entre langage régulier et expression régulière

Un langage L est régulier.



Il existe une expression régulière e telle que $L = L(e)$.

Langage d'une expression régulière

Le langage $L(e)$ d'une expression régulière e est définie récursivement :

- $L(a) = \{a\}$ si $a \in \Sigma$
- $L(\emptyset) = \emptyset$, $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- $L(e|e') = L(e) \cup L(e')$
- $L(ee') = L(e)L(e')$
- $L(e^*) = L(e)^*$

Exemples avec $\Sigma = \{a, b\}$:

- $(a|b)^*$: ensemble de tous les mots ($= \Sigma^*$).

Langage d'une expression régulière

Le langage $L(e)$ d'une expression régulière e est définie récursivement :

- $L(a) = \{a\}$ si $a \in \Sigma$
- $L(\emptyset) = \emptyset$, $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- $L(e|e') = L(e) \cup L(e')$
- $L(ee') = L(e)L(e')$
- $L(e^*) = L(e)^*$

Exemples avec $\Sigma = \{a, b\}$:

- $(a|b)^*$: ensemble de tous les mots ($= \Sigma^*$).
- $(a|b)^*bb$:

Langage d'une expression régulière

Le langage $L(e)$ d'une expression régulière e est définie récursivement :

- $L(a) = \{a\}$ si $a \in \Sigma$
- $L(\emptyset) = \emptyset$, $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$
- $L(e|e') = L(e) \cup L(e')$
- $L(ee') = L(e)L(e')$
- $L(e^*) = L(e)^*$

Exemples avec $\Sigma = \{a, b\}$:

- $(a|b)^*$: ensemble de tous les mots ($= \Sigma^*$).
- $(a|b)^*bb$: mots finissant par bb .

Exercice

Donner une expression régulière pour les langages suivants, sur $\Sigma = \{a, b\}$:

- 1 Mots contenant au plus un a .
- 2 Mots de taille $n \equiv 1 \pmod{3}$.
- 3 Mots contenant un nombre pair de a .
- 4 Mots contenant un nombre impair de a .
- 5 Écritures en base 2 des entiers divisibles par 4.

Équivalence d'expressions régulières

Deux expressions régulières e_1 et e_2 sont dites équivalentes, noté $e_1 \equiv e_2$, si elles définissent le même langage, c'est-à-dire si $L(e_1) = L(e_2)$.

Exemple : $(ab)^*a \equiv a(ba)^*$.

Propriétés sur les expressions régulières

Pour des expressions régulières e , e_1 , e_2 :

- ❶ $e\emptyset \equiv$
- ❷ $e\{\varepsilon\} \equiv$
- ❸ $e|\emptyset \equiv$
- ❹ $\emptyset^* \equiv$
- ❺ $\varepsilon^* \equiv$
- ❻ $(e_1|e_2)e_3 \equiv$
- ❼ $e_1(e_2e_3) \equiv$

Théorème

Soit $\mathcal{P}(L)$ une propriété sur les langages réguliers L telle que :

- $\mathcal{P}(L)$ est vraie pour les langages L finis (cas de base)
- $\mathcal{P}(L_1) \wedge \mathcal{P}(L_2) \implies \mathcal{P}(L_1 L_2)$
- $\mathcal{P}(L_1) \wedge \mathcal{P}(L_2) \implies \mathcal{P}(L_1 \cup L_2)$
- $\mathcal{P}(L) \implies \mathcal{P}(L^*)$

Alors $\mathcal{P}(L)$ est vraie pour tout langage régulier L .

Théorème

Soit $\mathcal{P}(L)$ une propriété sur les langages réguliers L telle que :

- $\mathcal{P}(L)$ est vraie pour les langages L finis (cas de base)
- $\mathcal{P}(L_1) \wedge \mathcal{P}(L_2) \implies \mathcal{P}(L_1 L_2)$
- $\mathcal{P}(L_1) \wedge \mathcal{P}(L_2) \implies \mathcal{P}(L_1 \cup L_2)$
- $\mathcal{P}(L) \implies \mathcal{P}(L^*)$

Alors $\mathcal{P}(L)$ est vraie pour tout langage régulier L .

$\{L \mid \mathcal{P}(L)\}$ est alors un ensemble contenant les langages finis et stable par union, concaténation et étoile de Kleene.

Donc il contient tous les langages réguliers, par définition.

Méthode

De même, on peut démontrer une propriété $\mathcal{P}(e)$ sur les expressions régulières e en montrant :

- $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\varepsilon)$ sont vraies (cas de base)
- $\mathcal{P}(a)$ est vraie pour $a \in \Sigma$ (cas de base)
- $\mathcal{P}(e_1) \wedge \mathcal{P}(e_2) \implies \mathcal{P}(e_1 e_2)$
- $\mathcal{P}(e_1) \wedge \mathcal{P}(e_2) \implies \mathcal{P}(e_1 | e_2)$
- $\mathcal{P}(e) \implies \mathcal{P}(e^*)$

Exercice : Miroir

Si $m = m_1 \dots m_n$ est un mot, on définit son miroir $\tilde{m} = m_n \dots m_1$.

Si L est un langage, on définit son miroir $\tilde{L} = \{\tilde{m} \mid m \in L\}$.

- 1 Donner une expression régulière du miroir de $a(a|b)^*b$.
- 2 Soit e une expression régulière de langage L . Montrer que \tilde{L} est régulier.
- 3 Écrire une fonction OCaml `miroir` : `'a regexp -> 'a regexp` renvoyant le miroir d'une expression régulière.

Méthode

- Pour montrer une égalité de deux mots, on peut faire une récurrence sur la longueur du mot.
- Pour montrer une égalité de deux langages, on peut montrer une double inclusion.

Question

Soient e_1 et e_2 deux expressions régulières.

Montrer que $(e_1^* e_2)^* e_1^* \equiv (e_1 | e_2)^*$.

Expression régulière en pratique (non exigible)

grep est une commande Linux qui permet de chercher des motifs dans un texte en utilisant une version étendue des expressions régulières :

Expression régulière	Signification
.	n'importe quel caractère
[aei]	un caractère parmi a, e, i
[a-z]	un caractère entre a et z
[^aei]	un caractère qui n'est pas a, e, i
:	:

Complément : Dénombrabilité et langages non réguliers

Soit Σ un alphabet non vide.

Théorème

Σ^+ (et donc aussi Σ^*) est infini dénombrable.

Complément : Dénombrabilité et langages non réguliers

Soit Σ un alphabet non vide.

Théorème

Σ^+ (et donc aussi Σ^*) est infini dénombrable.

Preuve : on identifie les p lettres de Σ avec les entiers de 1 à p .
L'écriture en base $p + 1$ donne une injection de Σ^+ vers \mathbb{N} .

Complément : Dénombrabilité et langages non réguliers

Soit Σ un alphabet non vide.

Théorème

Σ^+ (et donc aussi Σ^*) est infini dénombrable.

Preuve : on identifie les p lettres de Σ avec les entiers de 1 à p .
L'écriture en base $p + 1$ donne une injection de Σ^+ vers \mathbb{N} .

On en déduit :

Théorème

Un langage $L \subseteq \Sigma^*$ est au plus dénombrable.

Par exemple, le langage des programmes OCaml est dénombrable.

Complément : Dénombrabilité et langages non réguliers

Théorème de Cantor

Un ensemble E ne peut pas être en bijection avec $\mathcal{P}(E)$.

Complément : Dénombrabilité et langages non réguliers

Théorème de Cantor

Un ensemble E ne peut pas être en bijection avec $\mathcal{P}(E)$.

Preuve : si $f : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ alors $Y = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$ n'a pas d'antécédent par f .

Complément : Dénombrabilité et langages non réguliers

Théorème de Cantor

Un ensemble E ne peut pas être en bijection avec $\mathcal{P}(E)$.

Preuve : si $f : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ alors $Y = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$ n'a pas d'antécédent par f .

Corollaire

L'ensemble $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ des langages sur Σ n'est pas dénombrable.

Complément : Dénombrabilité et langages non réguliers

Théorème de Cantor

Un ensemble E ne peut pas être en bijection avec $\mathcal{P}(E)$.

Preuve : si $f : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ alors $Y = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$ n'a pas d'antécédent par f .

Corollaire

L'ensemble $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ des langages sur Σ n'est pas dénombrable.

Comme l'ensemble des langages est indénombrable alors que l'ensemble des programmes OCaml est dénombrable, il existe des langages L pour lesquels le problème suivant ne peut pas être résolu par un algorithme :

Problème

Étant donné un mot m , est-ce que $m \in L$?

Complément : Dénombrabilité et langages non réguliers

Théorème de Cantor

Un ensemble E ne peut pas être en bijection avec $\mathcal{P}(E)$.

Preuve : si $f : E \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ alors $Y = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$ n'a pas d'antécédent par f .

Corollaire

L'ensemble $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ des langages sur Σ n'est pas dénombrable.

Comme l'ensemble des langages est indénombrable alors que l'ensemble des programmes OCaml est dénombrable, il existe des langages L pour lesquels le problème suivant ne peut pas être résolu par un algorithme :

Problème

Étant donné un mot m , est-ce que $m \in L$?

On va donc se restreindre à un ensemble plus simple de langages.

Complément : Dénombrabilité et langages non réguliers

Soit Σ un alphabet non vide.

Théorème

L'ensemble des langages réguliers sur Σ est infini dénombrable.

Preuve :

Complément : Dénombrabilité et langages non réguliers

Soit Σ un alphabet non vide.

Théorème

L'ensemble des langages réguliers sur Σ est infini dénombrable.

Preuve : l'ensemble des expressions régulières sur Σ est dénombrable (c'est un langage) donc l'ensemble des langages réguliers aussi.

Complément : Dénombrabilité et langages non réguliers

Soit Σ un alphabet non vide.

Théorème

L'ensemble des langages réguliers sur Σ est infini dénombrable.

Preuve : l'ensemble des expressions régulières sur Σ est dénombrable (c'est un langage) donc l'ensemble des langages réguliers aussi.

Comme l'ensemble de tous les langages sur Σ est non dénombrable :

Corollaire

Il existe des langages non réguliers sur Σ .

Complément : Dénombrabilité et langages non réguliers

Soit Σ un alphabet non vide.

Théorème

L'ensemble des langages réguliers sur Σ est infini dénombrable.

Preuve : l'ensemble des expressions régulières sur Σ est dénombrable (c'est un langage) donc l'ensemble des langages réguliers aussi.

Comme l'ensemble de tous les langages sur Σ est non dénombrable :

Corollaire

Il existe des langages non réguliers sur Σ .

On verra plus tard comment montrer qu'un langage n'est pas régulier...