

18.1

Énoncer le théorème spectral, dans ses version endomorphisme et matrice.

18.2

1. Soit x un réel.

(a) Montrer que la fonction f_x définie par $\forall t \in]0, +\infty[, f_x(t) = \frac{e^{itx} - 1}{t}e^{-t}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et prolongeable par continuité en 0.

(b) Montrer que f_x est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On pose alors $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx} - 1}{t} e^{-t} dt$

2. Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R}

(a) Montrer que $\forall u \in \mathbb{R}, 0 \leq 1 - \cos(u) \leq \frac{u^2}{2}$.

(b) En déduire que $\forall x \in [a, b], \forall t \in]0, +\infty[, \left| \frac{e^{itx} - 1}{t} e^{-t} \right| \leq \max(|a|, |b|) e^{-t}$.

3. Montrer que F est continue sur \mathbb{R} .

18.3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $S = \frac{1}{2}(A + A^\top)$. On note α (resp. β) la plus petite (resp. plus grande) valeur propre de S . Montrer que, pour toute valeur propre réelle λ de A :

$$\alpha \leq \lambda \leq \beta$$

18.4

Donner la définition d'une isométrie.

18.5

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$ converge.
2. Montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$ est définie sur \mathbb{R} .
3. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et donner sa dérivée.
4. (a) Déterminer la limite de F en $+\infty$.
(b) Montrer que $\forall x \in [1, +\infty[, F(x) = \frac{1}{2x} + \frac{\sin(2x)}{4x^2} - \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t^3} dt$.
(c) En déduire un équivalent de F en $+\infty$.

18.6

Déterminer toutes les matrices $A \in O_3(\mathbb{R})$ dont la première colonne est :

$$\begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

18.7

Rappeler la définition de l'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle.

18.8

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

1. (a) Expliciter $S = A^T A$.

(b) Montrer qu'il existe une matrice P orthogonale telle que $P^T S P = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) En déduire que S est une matrice symétrique définie positive.

2. Déterminer P .

3. Soit R une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = S$.

(a) Montrer que $(P^T R P)^2 = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) En déduire 8 matrices R qui conviennent.

(c) Parmi ces matrices combien sont symétriques, combien sont symétriques positives, combien sont symétriques définies positives ?

4. Soit $T = P \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} P^T$.

(a) Déterminer T^2 .

(b) Que dire alors sur le nombre de matrices dont le carré est égal à S ?

18.9

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \text{ et } G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$$

(a) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et préciser F' .

(b) Montrer que G est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et préciser G' .

(c) Montrer que la fonction $F + G$ est constante sur \mathbb{R} .

(d) Déterminer la limite de $F(x)$ pour $x \rightarrow +\infty$.

(e) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

18.10

Existence et calcul de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)e^{-t}}{t} dt$$

18.11

Sur $\mathbb{R}_n[X]$, on considère le produit scalaire défini par :

$$\langle P|Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$$

On note u l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ telle que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$u(P) = \int_0^1 (X+t)^n P(t) dt$$

On admet le :

Théorème de Fubini.

Si f est une fonction continue sur $[a, b] \times [c, d]$ à valeurs dans \mathbb{R} , alors :

$$\int_a^b \int_c^d (f(x, y) dy) dx = \int_c^d \int_a^b (f(x, y) dx) dy$$

- (a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, autoadjoint.
Justifier l'existence d'une base orthonormale de vecteurs propres (P_0, \dots, P_n) associés à des valeurs propres $\lambda_0, \dots, \lambda_n$.

- (b) Montrer que :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(x) P_k(y)$$

- (c) En déduire la trace de u .