

Optimisation

| | |
|---|----------|
| Cours | 2 |
| 1 Optimisation : étude au premier ordre | 2 |
| 1.1 Extremums d'une fonction numérique | 2 |
| 1.2 Condition nécessaire du premier ordre | 2 |
| 1.3 Optimisation sous contrainte | 3 |
| 2 Applications de classe \mathcal{C}^k | 4 |
| 2.1 Dérivées partielles d'ordre $k \geq 2$ | 4 |
| 2.2 Théorème de Schwarz | 4 |
| 2.3 Opérations sur les applications de classe \mathcal{C}^k | 4 |
| 2.4 Exemples d'équations aux dérivées partielles | 5 |
| 3 Optimisation : étude au second ordre | 5 |
| 3.1 Matrice hessienne | 5 |
| 3.2 Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 | 5 |
| 3.3 Conditions du second ordre | 6 |
| 4 Annexes | 7 |
| 4.1 Annexe : théorème de Schwarz | 7 |
| 4.2 Annexe : formule de Taylor-Young à l'ordre 2 | 7 |
| Exercices | 9 |
| Exercices et résultats classiques à connaître | 9 |
| Une fonction qui n'est pas \mathcal{C}^2 | 9 |
| Une fonction harmonique | 9 |
| Une recherche d'extremum sur un ouvert | 9 |
| Une recherche d'extremum sur un compact | 9 |
| Une optimisation sous contrainte | 9 |
| Exercices du CCINP | 10 |
| Petits problèmes d'entraînement | 11 |

Sauf mention contraire, E et F désignent des espaces vectoriels normés de dimension finie sur \mathbb{R} .

1 Optimisation : étude au premier ordre

1.1 Extremums d'une fonction numérique

Définition. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique, définie sur une partie U de E .

- Pour $a \in U$, on dit que f **atteint un maximum global en a** lorsque :

$$\forall x \in U, f(x) \leq f(a)$$

- Pour a intérieur à U , on dit que f **atteint un maximum (local) en a** s'il existe un voisinage V de a dans U tel que :

$$\forall x \in V, f(x) \leq f(a)$$

- On définit de façon analogue **minimum global** et **minimum local**.

Remarque. Sans autre précision, un extremum est un extremum local.

Définition. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique, différentiable sur U ouvert, et $a \in U$. On dit que a **est un point critique** lorsque $df(a) = 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})}$.

Remarque. La différentielle de f en a est nulle si et seulement si les dérivées de f en a selon tous les vecteurs sont nulles, si et seulement si toutes les dérivées partielles (selon une base de E) de f en a sont nulles.

1.2 Condition nécessaire du premier ordre

Théorème.

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur U et $a \in U$.

Si :

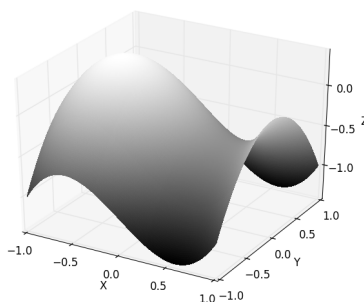
- f est différentiable sur U
- a est intérieur à U
- f admet un extremum local en a

alors :

- a est un point critique de f .

Exemple. Déterminer les points critiques de :

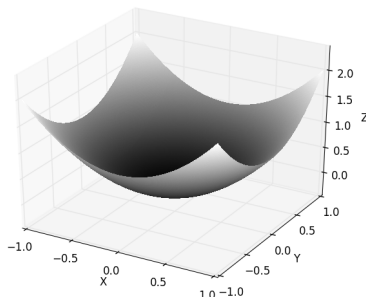
$$(x, y) \mapsto x^3 - y^2 - x$$



Exemple. Où sont les extremums de :

$$(x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

sur $[-1, 1] \times [-1, 1]$?



1.3 Optimisation sous contrainte

Présentation. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert U .

Soit $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , et :

$$X = \{x \in U, g(x) = 0\}$$

L'équation $g(x) = 0$ s'appelle **une contrainte**, et on s'intéresse à la recherche des extremums de $f|_X$.

Exemple. Si g est affine, c'est-à-dire de la forme : $x \mapsto c + \ell(x)$ où $c \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, on parle de **contrainte linéaire**.

Lemme. Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur U ouvert. Soit X une partie de U et $x \in X$.

Si $f|_X$ admet un extremum local en x , alors $df(x)$ s'annule sur $T_x X$:

$$\forall v \text{ tangent à } X, df(x) \cdot v = 0$$

Théorème.

Soit $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert U . On note : $X = \{x \in U, g(x) = 0\}$.
Si :

- $x \in X$
- $f|_X$ admet un extremum en x
- $dg(x) \neq 0$

alors :

- $df(x)$ et $dg(x)$ sont colinéaires.

Remarque. La condition de colinéarité peut encore s'écrire :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, df(x) = \lambda dg(x)$$

Le coefficient λ s'appelle un **multiplicateur de Lagrange** associé à la contrainte $g(x) = 0$.

Proposition. Dans le cas où E est euclidien, par exemple lorsque $E = \mathbb{R}^n$, la conclusion du théorème s'écrit :

$$\nabla f(x) \text{ et } \nabla g(x) \text{ sont colinéaires}$$

ou encore, puisque $\nabla g(x) \perp T_x X$:

$$\nabla f(x) \in (T_x X)^\perp$$

Exemple. Déterminer le maximum de $f : (x, y) \mapsto xy$ sur Γ d'équation $x^3 + y^3 = 1$.

2 Applications de classe \mathcal{C}^k

2.1 Dérivées partielles d'ordre $k \geq 2$

Définition. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction définie sur un ouvert U . On considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

- Lorsqu'elles existent, les $\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont les **dérivées partielles premières** de f .
- Lorsqu'elles existent, on définit les **dérivées partielles secondes** comme dérivées partielles des dérivées partielles premières :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)}{\partial x_j}(a)$$

que l'on note encore $\partial_j \partial_i f(a)$ ou encore $\partial_{ij} f(a)$.

- On dit que f est de classe \mathcal{C}^2 sur U lorsque toutes ses dérivées partielles secondes existent et sont continues sur U .
- On définit par récurrence les **dérivées partielles d'ordre k** , et la **classe \mathcal{C}^k** .
- f est de classe \mathcal{C}^∞ lorsqu'elle est de classe \mathcal{C}^k pour tout k .

2.2 Théorème de Schwarz

Théorème de Schwarz.

Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction définie sur un ouvert U . On considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Si f est de classe \mathcal{C}^2 sur U , alors pour tout i, j :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Remarque. Plus généralement, si f est de classe \mathcal{C}^k , les dérivées partielles k -ièmes ne dépendent pas de l'ordre des dérivations.

Exemple. On considère la fonction :

$$p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. Qu'en déduire ?

2.3 Opérations sur les applications de classe \mathcal{C}^k

Proposition. Une combinaison linéaire d'applications \mathcal{C}^k est \mathcal{C}^k ; une composée d'applications de classe \mathcal{C}^k est \mathcal{C}^k ; une composée d'application \mathcal{C}^k sur U avec un arc \mathcal{C}^k à valeurs dans U est \mathcal{C}^k .

Proposition. L'ensemble $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$ est une \mathbb{R} -algèbre.

2.4 Exemples d'équations aux dérivées partielles

Remarque. Aucun résultat spécifique n'est à connaître. Fréquemment, on applique un changement de variable (et donc un changement de fonction inconnue) pour se ramener à une équation plus simple, ne faisant intervenir que les dérivées partielles par rapport à une seule variable, comme par exemple :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Les fonctions solutions de cette équation sont, sur un ouvert convexe, les fonctions « constantes en x_1 », c'est-à-dire telles qu'il existe φ :

$$\forall x, y, f(x, y) = \varphi(y)$$

Exemple. Effectuer le changement de variable $\begin{cases} u = x \\ v = y - x \end{cases}$ pour résoudre sur \mathbb{R}^2 l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f$$

Exemple. Résoudre sur $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'équation aux dérivées partielles :

$$x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{x} f$$

en passant en coordonnées polaires.

Exemple. Pour $c \in \mathbb{R}$, poser $\begin{cases} u = x - ct \\ v = x + ct \end{cases}$ pour résoudre l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

3 Optimisation : étude au second ordre

3.1 Matrice hessienne

Définition. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur U ouvert. Pour $a \in U$, on définit la **matrice hessienne de f en a** :

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

Remarque. Ainsi, pour $n = 2$:

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Proposition. Pour tout $a \in U$, $H_f(a) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

3.2 Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

Théorème.

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 sur U ouvert, et $a \in U$. Alors :

$$\begin{aligned} f(a + h) &= f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(a) h, h \rangle + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|^2) \\ &= f(a) + \nabla f(a)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|^2) \end{aligned}$$

Remarque. Sous forme développée avec les dérivées partielles, l'expression s'écrit :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|^2)$$

On reconnaît la différentielle de f en a dans le terme linéaire. Le terme suivant s'appelle « quadratique ».

3.3 Conditions du second ordre

Théorème.

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 sur U ouvert, et $a \in U$.

Si :

- f admet un minimum local en a

alors :

- $\nabla f(a) = 0$
- $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$

Remarque. De façon équivalente, on peut conclure que les valeurs propres de $H_f(a)$ sont ≥ 0 .

Remarque. On peut adapter le résultat dans le cas d'un maximum : les valeurs propres de $H_f(a)$ sont ≤ 0 .

Théorème.

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 sur U ouvert, et $a \in U$.

Si :

- a est un point critique de f
- $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

alors :

- f admet un minimum local strict en a

Remarque. De façon équivalente, on peut supposer que les valeurs propres de $H_f(a)$ sont > 0 .

Remarque. On peut adapter le résultat dans le cas d'un maximum : les valeurs propres de $H_f(a)$ sont < 0 .

Corollaire. Dans le cas où $n = 2$, on note :

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

$$\text{où } r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) \text{ et } t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a).$$

$$\text{On suppose que } a \text{ est un point critique : } \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0.$$

- Si $\det H_f(a) = rt - s^2 > 0$ et $\text{tr } H_f(a) = r + t > 0$, alors $H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc f présente un minimum local strict en a .
- Si $\det H_f(a) = rt - s^2 > 0$ et $\text{tr } H_f(a) = r + t < 0$, alors $-H_f(a) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc f présente un maximum local strict en a .
- Si $\det H_f(a) = rt - s^2 < 0$, f présente un point col en a .
- Si $\det H_f(a) = rt - s^2 = 0$, on ne peut rien dire.

4 Annexes

4.1 Annexe : théorème de Schwarz

On se place dans le cas particulier des fonctions numériques de deux variables.

Théorème de Schwarz.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et \mathcal{C}^2 sur U ouvert. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Preuve. Soit $a = (x_0, y_0) \in U$. Pour $h, k > 0$ et assez petits pour que $[x_0, x_0 + h] \times [y_0, y_0 + k] \subset U$, on pose :

$$\begin{aligned} \delta(h, k) &= \left(f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) \right) \\ &\quad - \left(\underbrace{f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)}_{\text{noté } \varphi(y_0)} \right) \\ &= \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) \text{ à } k \text{ fixé} \\ &= h\varphi'(x_0 + \theta_1 h) \text{ où } \theta_1 \in]0, 1[\\ &\quad \text{par l'égalité des accroissements finis, } \varphi \in \mathcal{C}^1 \\ &= h \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0)}_{\text{noté } \psi(y_0)} \right) \\ &= h \left(\psi(y_0 + k) - \psi(y_0) \right) \text{ à } h \text{ fixé} \\ &= h \left(k\psi'(y_0 + \theta_2 k) \right) \text{ où } \theta_2 \in]0, 1[\\ &\quad \text{par l'égalité des accroissements finis, } \psi \in \mathcal{C}^1 \\ &= hk \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_2 k) \end{aligned}$$

Par continuité de $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, on a donc :

$$\frac{1}{hk} \delta(h, k) \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

De façon symétrique :

$$\begin{aligned} \delta(h, k) &= \left(f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) \right) \\ &\quad - \left(\underbrace{f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0)}_{\text{noté } \phi(y_0)} \right) \\ &= k \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h, y_0 + \theta_3 k) - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta_3 k)}_{\text{noté } \Psi(x_0)} \right) \\ &\quad \text{où } \theta_3 \in]0, 1[\text{ par accroissements finis} \\ &= k \left(h \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_3 k) \right) \\ &\quad \text{où } \theta_4 \in]0, 1[\text{ par accroissements finis} \end{aligned}$$

Par continuité de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, on a donc :

$$\frac{1}{hk} \delta(h, k) \xrightarrow{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

On conclut alors, par unicité de la limite :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

□

4.2 Annexe : formule de Taylor-Young à l'ordre 2

On se place dans le cas où $n = 2$.

Théorème.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 sur U ouvert, et $a \in U$. Alors :

$$\begin{aligned} f(a + h) &= f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \right. \\ &\quad \left. + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \right) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|^2) \end{aligned}$$

Preuve. Fixons $a \in U$, et h au voisinage de 0, suffisamment petit pour que $B(a, 2\|h\|) \subset U$. On définit :

$$\varphi : t \mapsto f(a + th)$$

et on a :

$$f(a + h) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0)$$

Par composition, φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ et :

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= df(a + th) \cdot h \\ &= h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a + th) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a + th) \end{aligned}$$

On peut dériver à nouveau, car $t \mapsto \partial_i f(a + th)$ est de classe \mathcal{C}^1 par composition :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a + th) \right) &= h_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a + th) \right) + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a + th) \right) \\ &= h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a + th) + h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + th) \\ \text{et } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a + th) \right) &= h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + th) + h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a + th) \end{aligned}$$

On en déduit que φ est de classe \mathcal{C}^2 et, pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= h_1 \left(h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a + th) + h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + th) \right) \\ &\quad + h_2 \left(h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + th) + h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a + th) \right) \\ &= h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a + th) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + th) \\ &\quad + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a + th) \text{ par le th. de Schwarz} \end{aligned}$$

On peut appliquer à φ la formule de Taylor avec reste-intégral :

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= \varphi(0) + (1-0)\varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t) dt \\ &= \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(0) dt \\ &\quad + \int_0^1 (1-t)(\varphi''(t) - \varphi''(0)) dt \\ &= \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2}\varphi''(0) + \int_0^1 (1-t)(\varphi''(t) - \varphi''(0)) dt\end{aligned}$$

ce qui s'écrit, en utilisant les expressions de φ à l'aide de f :

$$\begin{aligned}f(a+h) &= f(a) + \left(h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\right) + R_a(h)\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}R_a(h) &= \int_0^1 (1-t) \left(h_1^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+th) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \right) \right. \\ &\quad + 2h_1 h_2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+th) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) \right) \\ &\quad \left. + h_2^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+th) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \right) \right) dt\end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de montrer que $R_a(h) = o_{h \rightarrow 0}(\|h\|^2)$. On revient pour cela à la définition. Fixons $\varepsilon > 0$. Par continuité de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ appliqué à 2ε , il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\|u - a\| \leq \eta \implies \begin{cases} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \right| \leq 2\varepsilon \\ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) \right| \leq 2\varepsilon \\ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \right| \leq 2\varepsilon \end{cases}$$

Lorsque $\|h\| \leq \eta$, pour tout $t \in [0, 1]$, $\|(a+th) - a\| = t\|h\| \leq \eta$, et donc :

$$\begin{aligned}|R_a(h)| &\leq 2\varepsilon \int_0^1 (1-t)(h_1^2 + 2|h_1||h_2| + h_2^2) dt \\ &= 2\varepsilon \int_0^1 (1-t)(|h_1| + |h_2|)^2 dt \\ &= 2\varepsilon \|h\|_1^2 \int_0^1 (1-t) dt \\ &= \varepsilon \|h\|_1^2\end{aligned}$$

On a montré que $R_a(h) = o_{h \rightarrow 0}(\|h\|_1^2)$. Les normes étant toutes équivalentes sur \mathbb{R}^2 , le choix de $\|\cdot\|_1$ n'est pas restrictif. \square

Exercices et résultats classiques à connaître

Une fonction qui n'est pas \mathcal{C}^2

730.1

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par :

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

- (a) Prolonger f par continuité en $(0,0)$.
- (b) Montrer l'existence et comparer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Une fonction harmonique

730.2

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de la variable complexe, de rayon de convergence $R > 0$.

On note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < R^2\}$ et on définit sur D la fonction f par :

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x + iy)^n$$

Montrer que f admet des dérivées partielles d'ordre 2 sur D , et qu'elle vérifie :

$$\forall (x, y) \in D, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

Une recherche d'extremum sur un ouvert

730.3

Déterminer les extremums locaux de :

$$f : (x, y) \mapsto x^2 - 2x + 2 + \cos(y)$$

Une recherche d'extremum sur un compact

730.4

On considère $f : (x, y) \mapsto xy(1 - x - y)$ définie sur :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

- (a) Justifier que f admet un maximum sur A .
- (b) Montrer que ce maximum est atteint en un point intérieur à A .
- (c) Déterminer la valeur de ce maximum.

Une optimisation sous contrainte

730.5

Soit Γ la courbe d'équation $x^3 + y^3 = 1$. Déterminer le maximum de $f : (x, y) \mapsto xy$ sur Γ .

Exercices du CCINP

730.6
 41

Soit f l'application de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par $f : (x, y) \mapsto 4x^2 + 12xy - y^2$.
Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 13\}$.

- Justifier que f atteint un maximum et un minimum sur C .
- Soit $(u, v) \in C$ un point où f atteint un de ses extremums.
 - Justifier avec un théorème du programme qu'il existe un réel λ tel que le système (S) suivant soit vérifié :

$$(S) : \begin{cases} 4u + 6v = \lambda u \\ 6u - v = \lambda v \end{cases}$$
 - Montrer que $(\lambda - 4)(\lambda + 1) - 36 = 0$.
En déduire les valeurs possibles de λ .
- Déterminer les valeurs possibles de (u, v) , puis donner le maximum et le minimum de f sur C .

730.7
 56

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.

- f admet-elle des extrema locaux sur \mathbb{R}^2 ? Si oui, les déterminer.
- f admet-elle des extrema globaux sur \mathbb{R}^2 ? Justifier.
- On pose $K = [0, 1] \times [0, 1]$.
Justifier, oralement, que f admet un maximum global sur K puis le déterminer.

Exercices

730.8

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . On définit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$g(u, v) = f(uv, u^2 + v^2)$$

- Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f .
- Exprimer les dérivées partielles secondes de g en fonction des dérivées partielles de f .

730.9

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 et F définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par :

$$F(x, y) = xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

- Exprimer $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ à l'aide de f .
- Déterminer les fonctions f telles que $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$.
- Déterminer les fonctions f telles que $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{1}{x}$.

730.10

Déterminer les extremums sur \mathbb{R}^2 de :

$$f : (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y$$

730.11

Déterminer les extremums sur \mathbb{R}^2 de :

$$f : (x, y) \mapsto x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 4y$$

730.12

Déterminer les extremums de la fonction définie par :

- $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$
- $g(x, y) = x^3 + y^3$
- $h(x, y) = x^2 + y^2 + x^3$

730.13

Déterminer les extremums de la fonction définie par :

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz - 4(x + y + z)$$


730.14

Déterminer les extremums de :

$$f : (x, y) \mapsto xy$$

sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.

Petits problèmes d'entraînement

730.15 Justifier l'existence et déterminer le maximum global sur $K = [0, 1] \times [0, 1]$ de la fonction :

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x + y}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$$

730.16Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 , et g définie sur $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ par :

$$g(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

Montrer que g est de classe \mathcal{C}^2 et :

$$\Delta g(x, y, z) = f''(\rho) + \frac{2}{\rho} f'(\rho)$$

$$\text{où } \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ et } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

730.17Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. On suppose qu'en tout point, la matrice de la différentielle de f dans la base canonique de \mathbb{R}^n est antisymétrique.(a) Montrer que la différentielle de f est constante.(b) Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique et $b \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = Ax + b$$

730.18Déterminer les extremums sur \mathbb{R}^2 de :

$$f : (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y$$

730.19Déterminer les extremums sur \mathbb{R}^2 de :

$$f : (x, y) \mapsto x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 4y$$

730.20On travaille dans \mathbb{R}^n euclidien muni de son produit scalaire usuel. On considère f un endomorphisme autoadjooint défini positif, $u \in \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \frac{1}{2} \langle f(x), x \rangle - \langle u, x \rangle$$

(a) Calculer le gradient de g en tout $x \in \mathbb{R}^n$.(b) Montrer que g admet un unique point critique.(c) Montrer que g admet un minimum global.**730.21**On considère f définie sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ par :

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch}(2y) - \cos(2x))$$

(a) Justifier que f admet sur D un maximum et un minimum. Que vaut le minimum ?

- (b) Déterminer les points critiques de f sur l'intérieur de D . Montrer qu'il existe $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$ tel que :

$$\max_{(x,y) \in D} f(x,y) = f(\cos \theta_0, \sin \theta_0)$$

- (c) Justifier rapidement que :

$$\forall t \geq 0, \operatorname{sh}(t) \geq t \text{ et } \sin(t) \leq t$$

Montrer que $\theta \mapsto f(\cos \theta, \sin \theta)$ est croissante sur $[0, \pi/2]$.

- (d) Donner la valeur du maximum de f sur D .

730.22

Soit $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, les valeurs propres de la hessienne de f en x soient ≥ 1 .

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x) \geq f(0) + \langle \operatorname{grad} f(0), x \rangle + \frac{\|x\|^2}{2}$$

En déduire que f atteint un minimum.

730.23

On considère :

$$f : (x, y) \rightarrow x^2 e^{-(x^2 + y^2)}$$

- (a) Soit $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = f(x, y)\}$. Déterminer le plan tangent à S au point $(1, 1, e^{-2})$.
- (b) Soit $P(1, -1, 3)$. Pour $Q \in S$, on note $d_P(Q)$ la distance de Q à P . Montrer que la fonction d_P admet un minimum sur S .

730.24

Déterminer les extremums de :

$$f : (x, y, z) \mapsto xy + z^2$$

sous la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

730.25

Déterminer les extremums de :

$$f : (x, y) \mapsto e^{xy}$$

sous la contrainte $x^5 + 2x + y^5 + 2y - 6 = 0$.

730.26

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction \mathcal{C}^2 telle que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

- (a) Montrer qu'il existe $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telle que :

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

- (b) Pour $r \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\varphi(r) = \int_0^{2\pi} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) d\theta$$

Montrer que φ est de classe \mathcal{C}^1 et expliciter φ .

730.27

Déterminer les extremums de la fonction définie sur \mathbb{R}^n par :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 - \sum_{k=1}^n x_k$$

730.28

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 . On suppose que $\Delta f > 0$ sur la boule unité $B = \{x, \|x\| < 1\}$. Montrer que f admet un maximum sur \overline{B} , et qu'il est atteint sur la sphère $\overline{B} \setminus B$.

730.29

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que :

$$\forall x, \|x\| \geq 1 \implies \operatorname{df}(x) \cdot x \geq 0$$

Montrer que f admet un minimum global.

730.30

On considère f définie sur $[0, 1]^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} x(1 - y) & \text{si } x \leq y \\ y(1 - x) & \text{si } y < x \end{cases}$$

Montrer que f admet un maximum atteint en un unique point que l'on précisera.

730.31

Soit $U =]0, 1[^n$ ouvert de \mathbb{R}^n , et h définie sur U par :

$$h(x_1, \dots, x_n) = - \sum_{k=1}^n x_k \ln(x_k)$$

- (a) Calculer en tout point $x \in U$ le gradient $\text{grad } h(x)$ et la hessienne $H_h(x)$.
- (b) Montrer que h admet un unique extremum sous la contrainte $x_1 + \dots + x_n = 1$.