1 Exercices de niveau 1

902.1

cc-INP

On note $E = \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$. Pour $X, Y \in E$, on définit $\langle X, Y \rangle = X^\top Y$.

(a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire.

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $\mathrm{Im}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A^\top)$.

(c) Soit $Y \in E$. On note $f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ X & \mapsto & \|AX - Y\| \end{array}$

Montrer que $f(X) = \operatorname*{Inf}_{Z \in E}(f(Z))$ si et seulement si $A^\top(AX - Y) = 0$.

902.2

cc-INP

Pour $f, g \in E = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$, on note $\phi(f, g) = \displaystyle\int_0^1 fg + f'g'$.

(a) Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E.

(b) On note $F = \{f \in E,\ f(1) = f(0) = 0\}$ et $G = \{f \in E,\ f'' = f\}$. Montrer que $F \bigoplus^{\perp} G = E$.

(c) Pour $a, b \in [0,1]$, on pose $E_{a,b} = \{f \in E, f(0) = a \text{ et } f(1) = b\}$.

c1. Trouver un élément f_0 dans $E_{a,b}$, puis montrer que $E_{a,b} = \{f_0 + f,\ f \in F\}$.

c2. Trouver le projeté orthogonal de f_0 sur G.

(d) *et une autre question non traitée. Peut-être :* En déduire $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{h \in E_{a,b}} \int_0^1 h^2 + h'^2$.

Examinateur qui n'intervient que rarement et pose des questions sur le cours.

902.3

Mines-Télécom

Soit f un endomorphisme bijectif dans E euclidien, tel que :

$$\forall x, y \in E,\ \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$$

(a) Montrer que $f(x)$ et x sont orthogonaux.

(b) Montrer que $s = f \circ f$ est autoadjoint.

(c) Soit a une valeur propre de s et V_a son espace propre associé. On fixe $x \in V_a \setminus \{0\}$.

c1. Montrer que : $\langle s(x), x \rangle = a\|x\|^2 = -\|f(x)\|^2$ et en déduire que $a < 0$.

c2. Montrer que $F = \mathrm{Vect}(x, f(x))$ et $F^\perp$ sont stables par f.

(d) *et d'autres questions...*

Examinateur assez maniaque qui n'hésite pas à couper pendant les explications, il veut aller vite. Lorsqu'on est bloqué, il nous fait passer à la question suivante.

902.4

cc-INP

$\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle\, | \,\rangle$ et de sa norme euclidienne associée $\|\,.\,\|$.
On appelle endomorphisme stabilisant un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \langle f(x)|x \rangle = \|x\|^2$.

(a) Soit $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que h est stabilisant.

(b) b1. Soit f un endomorphisme stabilisant différent de $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. On pose $g = f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \langle g(x)|x\rangle = 0$.

b2. Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de g.
En étudiant le degré de χ_g, montrer que 0 est valeur propre de g.

(c) c1. Montrer que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^3)^2,\ \langle x|g(y)\rangle + \langle g(x)|y\rangle = 0$.

c2. Monrer que $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ sont orthogonaux.

(d) Soit e_1 un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ associé à la valeur propre 0 pour g.
Soit e_2 un vecteur unitaire tel que $e_2 \in \mathrm{Im}(g)$.
Montrer que $g(e_2) \neq 0$.
On pose $e_3 = \dfrac{g(e_2)}{\|g(e_2)\|}$.
Montrer que $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(e) Écrire la matrice de f dans $\mathcal{C}$.

2 Exercices de niveau 2

902.5

Mines-Ponts

On note $E = \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On considère $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ ses valeurs propres.

(a) Montrer que, pour tout $X \in E$, $\langle AX, X\rangle \leqslant \lambda_n \|X\|^2$.

(b) *Autres questions du style :*
Montrer que :

$$\lambda_k = \operatorname*{Min}_{F \in V_k} \left(\operatorname*{Max}_{\substack{X \in F \\ \|X\|=1}} \langle AX, X\rangle \right)$$

où V_k est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension k.

902.6

Centrale

Soit $I_k = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$.

Soit $\varphi\ :\ (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2 \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$.

(a) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) On admet que $I_0 = I_2 = 1$ et $I_1 = 0$ et $n = 2$ dans cette question.
Déterminer une b.o.n. (P_0, P_1, P_2) de $\mathbb{R}_2[X]$ pour φ.

(c) Montrer qu'il existe une b.o.n. $(P_0, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ pour φ, échelonnée en degrés.

902.7

Centrale

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On veut montrer :

$$A^\top A = B^\top B \iff \exists U \in O_n(\mathbb{R}),\ B = UA$$

(a) a1. On suppose B inversible. Montrer le résultat.

a2. Application : résoudre l'équation $X^\top X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) On suppose $A^\top A = B^\top B$.

b1. Montrer que $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B$ puis que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$. On note r ce nombre.

b2. Montrer que les valeurs propres de $A^\top A = B^\top B$ sont positives. On les note :

$$\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r > \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$$

b3. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ A^\top A \epsilon_i = \lambda_i \epsilon_i$$

b4. On pose, pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, $e_i = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A\epsilon_i$. Montrer que $(e_1, \ldots, e_r)$ est une base orthonormée de $\operatorname{Im}(A)$.

b5. Montrer qu'il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $B = UA$.

902.8

Mines-Ponts

Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On se propose de montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale réelle telles que :

$$A = P^\top P \text{ et } B = P^\top D P$$

(a) Montrer qu'il existe $R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = R^\top R$.

(b) Conclure qu'il existe P et D solutions du problème posé.

3 Exercices de niveau 3

902.9

X

Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique de valeurs propres : $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.
On pose : $E = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,\ \|X\| = \|Y\| = 1 \text{ et } \langle X, Y \rangle = 0\}$.
Montrer que : $\lambda_n - \lambda_1 = 2 \operatorname*{Sup}_{(X,Y)\in E} |X^\top S Y|$.

4 Exercices de la banque CC-INP

39, 63, 76 à 82, 92