# Dénombrement

## Cours 2



## Exercices 4

# 1 Ensembles finis

## 1.1 Définition

**Définition.** On dit qu'un ensemble $E$ est **fini** lorsqu'il est vide, ou qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $E$ soit en bijection avec $\{1, \dots, n\}$.
Dans le premier cas, on définit $\mathrm{Card}(E) = 0$. Dans le second cas, $n$ est unique et on définit $\mathrm{Card}(E) = n$.

## 1.2 Propriétés

**Proposition.** Deux ensembles finis ont le même cardinal si et seulement s'il existe une bijection entre ces ensembles.

**Remarque.** *En général, on n'exhibe pas explicitement cette bijection. Mais on décrit les deux ensembles en bijection par une formulation telle que :*

*« Définir [tel élément de A], c'est définir [tel élément de B] et [tel élément de C] »*

*qui signifie que $A$ et $B \times C$ sont de même cardinaux.*

**Proposition.** Soit $E$ un ensemble fini, et $A \subset E$. Alors :

- $A$ est fini et $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(E)$
- $A = E \iff \mathrm{Card}\, A = \mathrm{Card}\, E$.

**Proposition.** Soit $E$ et $F$ deux ensembles finis de même cardinal, et $\varphi : E \to F$. Alors :

$$\varphi \text{ bijective} \iff \varphi \text{ injective} \iff \varphi \text{ surjective}$$

## 1.3 Exemples de cardinaux

**Proposition.** Soit $E$ et $F$ deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini et :

$$\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E)\,\mathrm{Card}(F)$$

**Corollaire.** Si $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont des ensembles finis, alors $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p$ est fini et :

$$\mathrm{Card}(E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_p) = \mathrm{Card}(E_1)\,\mathrm{Card}(E_2) \dots \mathrm{Card}(E_p)$$

**Proposition.** Soit $E$ et $F$ deux ensembles finis. Alors $E \cup F$ est fini et :

- si l'union est disjointe, $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F)$ ;
- en général, $\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E \cap F)$.

**Corollaire.** Si $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont des ensembles finis deux à deux disjoints, alors $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_p$ est fini et :

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{Card}(E_i)$$

# 2 Dénombrement d'applications, de parties d'un ensemble

## 2.1 Nombre d'applications

**Théorème.**

Soit $E$ et $F$ deux ensembles finis de cardinaux respectifs $p$ et $n$. On note $\mathcal{F}(E,F) = F^E$ l'ensemble des applications : $E \to F$.
Alors $F^E$ est fini et :

$$\mathrm{Card}(F^E) = p^n = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}\, E}$$

## 2.2 Nombre de parties d'un ensemble

**Théorème.**

Soit $E$ un ensemble fini de cardinal $n$. Alors l'ensemble de ses parties, $\mathcal{P}(E)$, est fini, et :

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n = 2^{\mathrm{Card}(E)}$$

## 2.3 Fonction indicatrice

**Définition.** Soit $E$ un ensemble et $A$ une partie de $E$. On appelle **fonction indicatrice de** $A$ (ou parfois fonction caractéristique de $A$) l'application :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A : & E & \to & \{0,1\} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

**Proposition.** L'application : $\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \{0,1\}^E \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$ est une bijection.

# 3 Listes, nombre d'injections

**Définition.** Soit $E$ un ensemble. On appelle **$p$-liste d'éléments distincts de** $E$ tout $p$-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ d'éléments de $E$ deux à deux distincts.

**Proposition.** Si $\mathrm{Card}(E) = n$ et $p \leqslant n$, le nombre de $p$-listes d'éléments distincts de $E$ est :

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

**Proposition.** Soit $E$ et $F$ deux ensembles finis, de cardinaux respectifs $p$ et $n$. Le nombre d'applications injectives $E \to F$ est :

$$n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

**Corollaire.** Si $E$ est un ensemble fini de cardinal $n$, alors :

$$\mathrm{Card}(\mathfrak{S}(E)) = n!$$

où $\mathfrak{S}(E)$ désigne l'ensemble des permutations de $E$, c'est-à-dire les bijections : $E \to E$.

# 4 Combinaisons

**Définition.** Soit $E$ un ensemble. On appelle $p$**-combinaison** une partie de $E$ à $p$ éléments.

**Définition.** Pour $n, p \in \mathbb{N}$, on appelle $p$ **parmi** $n$ et on note $\binom{n}{p}$ le nombre de $p$-combinaisons d'un ensemble à $n$ éléments, c'est-à-dire le nombre de parties à $p$ éléments.

**Proposition.** Lorsque $0 \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

**Remarque.** *Il est maladroit de systématiquement remplacer un coefficient binomial par son expression factorielle.*

**Proposition.**

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$
- Pour $p > n$ ou $p < 0$, $\binom{n}{p} = 0$
- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
- $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$ *(formule de Pascal)*
- $\binom{n}{p} = \dfrac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$ pour $n, p \geqslant 1$
- $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$

## Exercices et résultats classiques à connaître

### Nombre de parties

**810.1**

(a) Justifier que $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$.

(b) Justifier que $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}^2 = \binom{2n}{n}$ en commençant par remarquer que $\binom{n}{p}^2 = \binom{n}{p}\binom{n}{n-p}$.

# Exercices du CCINP

**810.2** CCINP 112

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E$ un ensemble possédant $n$ éléments.
On désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de $E$.

1. Déterminer le nombre $a$ de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre $b$ de couples $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre $c$ de triplets $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$ tels que $A$, $B$ et $C$ soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

# Exercices

**810.3**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

**810.4**

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

**810.5**

On appelle **main** d'un joueur cinq cartes issues d'un jeu de 32 cartes.

(a) Combien y a-t-il de mains différentes ?

(b) Combien comportent exactement un as ?

(c) Combien comportent au moins un as ?

(d) Combien comportent exactement un as et un cœur ?

(e) Combien comportent au moins un as ou un cœur ?

(f) Combien comportent au moins un as et au moins un cœur ?

# Petits problèmes d'entrainement

**810.6**

Pour $E$ ensemble, on appelle **recouvrement** de $E$ tout couple $(A, B)$ tel que $A \cup B = E$. On note $R_n$ le nombre de recouvrements d'un ensemble à $n$ éléments.

(a) Que valent $R_0$ et $R_1$ ?

(b) Soit $E$ un ensemble de cardinal $n$.

- b1. Pour $k \in [\![0, n]\!]$ et $A$ une partie de $E$ à $k$ éléments, combien y a-t-il de parties $B$ telles que $A \cup B = E$ ?
- b2. En déduire $R_n$ sous la forme d'une somme, puis simplifier cette somme.

**810.7**

Soit $p, q \in \mathbb{N}$ et $n \in \{0, \ldots, p+q\}$.

(a) Montrer que $\displaystyle\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$.

(b) En déduire que $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

**810.8**

Lorsque l'on énumère, en binaire, tous les entiers de 1 à 1024, combien de fois utilise-t-on le chiffre 1 ?

**810.9**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E$ un ensemble de cardinal $n$.

(a) Combien y a-t-il de lois de composition interne sur $E$ ?

(b) Combien y a-t-il de lois de composition interne commutatives sur $E$ ?

(c) Combien y a-t-il de lois de composition interne sur $E$ admettant un élément neutre ?

**810.10**

Soit $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \neq 0$, et $E = [\![1, n]\!]$.

(a) Dénombrer les suites $(x_1, \ldots, x_p)$ strictement croissantes d'éléments de $E$.

(b) Dénombrer les suites $(x_1, \ldots, x_p)$ croissantes d'éléments de $E$.

**810.11**

On appelle **partition** d'un ensemble $E$ tout ensemble constitué de parties de $E$, deux à deux disjointes, non vides, et dont la réunion est $E$. On note $B_n$ le nombre de partitions d'un ensemble fini à $n$ éléments, et on pose $B_0 = 1$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

**810.12**

Soit $E$ et $F$ deux ensembles finis non vides, de cardinaux respectifs $p$ et $n$. On note $S_{p,n}$ le nombre de surjections de $E$ dans $F$.

(a) Déterminer $S_{p,1}$, $S_{n,n}$ et $S_{p,n}$ lorsque $p < n$.

(b) On suppose $p > 1$ et $n > 1$. On choisit $a \in E$. En étudiant la restriction à $E \setminus \{a\}$ d'une surjection, établir :

$$S_{p,n} = n\big(S_{p-1,n} + S_{p-1,n-1}\big)$$

(c) En déduire que, pour tout $n, p \geqslant 1$ :

$$S_{p,n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$

**810.13**

Soit $E$ un ensemble fini. On appelle **dérangement** de $E$ toute permutation $\sigma$ de $E$ vérifiant $\sigma(x) \neq x$ pour tout $x \in E$. On note $D_n$ le nombre de dérangements d'un ensemble à $n$ éléments.

(a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$ : $D_{n+1} = n(D_n + D_{n-1})$.

(b) En déduire que, pour tout $n \geqslant 2$ : $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$.

(c) Conclure que, pour tout $n \geqslant 1$ : $D_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.