

**1 Exercices de niveau 1****902.1**

cc-INP

On note  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Pour  $X, Y \in E$ , on définit  $\langle X, Y \rangle = X^\top Y$ .

- (a) Montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  définit un produit scalaire.
- (b) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\text{Im}(A)^\perp = \text{Ker}(A^\top)$ .
- (c) Soit  $Y \in E$ . On note  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$   
 $X \mapsto \|AX - Y\|$   
 Montrer que  $f(X) = \inf_{Z \in E} (f(Z))$  si et seulement si  $A^\top(AX - Y) = 0$ .

**902.2**

cc-INP

Pour  $f, g \in E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ , on note  $\phi(f, g) = \int_0^1 fg + f'g'$ .

- (a) Montrer que  $\phi$  est un produit scalaire sur  $E$ .
- (b) On note  $F = \{f \in E, f(1) = f(0) = 0\}$  et  $G = \{f \in E, f'' = f\}$ . Montrer que  $F \oplus G = E$ .
- (c) Pour  $a, b \in [0, 1]$ , on pose  $E_{a,b} = \{f \in E, f(0) = a \text{ et } f(1) = b\}$ .
  - c1. Trouver un élément  $f_0$  dans  $E_{a,b}$ , puis montrer que  $E_{a,b} = \{f_0 + f, f \in F\}$ .
  - c2. Trouver le projeté orthogonal de  $f_0$  sur  $G$ .
- (d) *et une autre question non traitée. Peut-être :* En déduire  $\inf_{h \in E_{a,b}} \int_0^1 h^2 + h'^2$ .

*Examinateur qui n'intervient que rarement et pose des questions sur le cours.*

**902.3**

Mines-Télécom

Soit  $f$  un endomorphisme bijectif dans  $E$  euclidien, tel que :

$$\forall x, y \in E, \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle$$

- (a) Montrer que  $f(x)$  et  $x$  sont orthogonaux.
- (b) Montrer que  $s = f \circ f$  est autoadjoint.
- (c) Soit  $a$  une valeur propre de  $s$  et  $V_a$  son espace propre associé. On fixe  $x \in V_a \setminus \{0\}$ .
  - c1. Montrer que  $\langle s(x), x \rangle = a\|x\|^2 = -\|f(x)\|^2$  et en déduire que  $a < 0$ .
  - c2. Montrer que  $F = \text{Vect}(x, f(x))$  et  $F^\perp$  sont stables par  $f$ .
- (d) *et d'autres questions...*

*Examinateur assez maniaque qui n'hésite pas à couper pendant les explications, il veut aller vite. Lorsqu'on est bloqué, il nous fait passer à la question suivante.*

**902.4**

cc-INP

$\mathbb{R}^3$  est muni de son produit scalaire canonique  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  et de sa norme euclidienne associée  $\| \cdot \|$ .  
 On appelle endomorphisme stabilisant un endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R}^3, \langle f(x) | x \rangle = \|x\|^2$ .

- (a) Soit  $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  dont la matrice dans la base canonique est  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .  
Montrer que  $h$  est stabilisant.
- (b) b1. Soit  $f$  un endomorphisme stabilisant différent de  $\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ . On pose  $g = f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ .  
Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}^3, \langle g(x)|x \rangle = 0$ .  
b2. Montrer que 0 est la seule valeur propre possible de  $g$ .  
En étudiant le degré de  $\chi_g$ , montrer que 0 est valeur propre de  $g$ .
- (c) c1. Montrer que  $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^3)^2, \langle x|g(y) \rangle + \langle g(x)|y \rangle = 0$ .  
c2. Montrer que  $\text{Im}(g)$  et  $\text{Ker}(g)$  sont orthogonaux.
- (d) Soit  $e_1$  un vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^3$  associé à la valeur propre 0 pour  $g$ .  
Soit  $e_2$  un vecteur unitaire tel que  $e_2 \in \text{Im}(g)$ .  
Montrer que  $g(e_2) \neq 0$ .  
On pose  $e_3 = \frac{g(e_2)}{\|g(e_2)\|}$ .  
Montrer que  $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- (e) Écrire la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{C}$ .

## 2 Exercices de niveau 2

902.5

Mines-Ponts

On note  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  muni de son produit scalaire canonique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On considère  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  ses valeurs propres.

- (a) Montrer que, pour tout  $X \in E, \langle AX, X \rangle \leq \lambda_n \|X\|^2$ .
- (b) *Autres questions du style :*  
Montrer que :

$$\lambda_k = \min_{F \in V_k} \left( \max_{\substack{X \in F \\ \|X\|=1}} \langle AX, X \rangle \right)$$

où  $V_k$  est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $E$  de dimension  $k$ .

902.6

Centrale

Soit  $I_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

Soit  $\varphi : (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2 \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

- (a) Montrer que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .
- (b) On admet que  $I_0 = I_2 = 1$  et  $I_1 = 0$  et  $n = 2$  dans cette question.  
Déterminer une b.o.n.  $(P_0, P_1, P_2)$  de  $\mathbb{R}_2[X]$  pour  $\varphi$ .
- (c) Montrer qu'il existe une b.o.n.  $(P_0, \dots, P_n)$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  pour  $\varphi$ , échelonnée en degrés.

902.7

Centrale

Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On veut montrer :

$$A^\top A = B^\top B \iff \exists U \in O_n(\mathbb{R}), B = UA$$

- (a) a1. On suppose  $B$  inversible. Montrer le résultat.
- a2. Application : résoudre l'équation  $X^T X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- (b) On suppose  $A^T A = B^T B$ .
- b1. Montrer que  $\text{Ker } A = \text{Ker } B$  puis que  $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$ . On note  $r$  ce nombre.
- b2. Montrer que les valeurs propres de  $A^T A = B^T B$  sont positives. On les note :
- $$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$$
- b3. Montrer qu'il existe une base orthonormée  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  telle que :
- $$\forall i \in \{1, \dots, n\}, A^T A \epsilon_i = \lambda_i \epsilon_i$$
- b4. On pose, pour  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $e_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A \epsilon_i$ . Montrer que  $(e_1, \dots, e_r)$  est une base orthonormée de  $\text{Im}(A)$ .
- b5. Montrer qu'il existe  $U \in O_n(\mathbb{R})$  telle que  $B = UA$ .

**902.8***Mines-Ponts*

Soit  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  et  $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . On se propose de montrer qu'il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  et  $D$  diagonale réelle telles que :

$$A = P^T P \text{ et } B = P^T D P$$

- (a) Montrer qu'il existe  $R \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A = R^T R$ .
- (b) Conclure qu'il existe  $P$  et  $D$  solutions du problème posé.

**3 Exercices de niveau 3****902.9** $X$ 

Soit  $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice symétrique de valeurs propres :  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ .

On pose :  $E = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \|X\| = \|Y\| = 1 \text{ et } \langle X, Y \rangle = 0\}$ .

Montrer que :  $\lambda_n - \lambda_1 = 2 \sup_{(X,Y) \in E} |X^T S Y|$ .

**4 Exercices de la banque CC-INP**

39, 63, 76 à 82, 92