

---

**Aux étudiants**

---

On se présente en colle en étant au point sur les exercices classiques, et sur les exercices sélectionnés du cc-INP, même ceux qui n'ont pas été travaillés en classe.

---

**Aux colleurs**

---

Les parties repérées par **[\*]** ne concernent que les étudiants de **MPI\***, et pas ceux de **MPI**.

**540. Séries de fonctions numériques**

Modes de convergence d'une série de fonctions. Convergence simple. Convergence uniforme, caractérisation, propriétés. Convergence normale, étude pratique à l'aide d'une suite majorante uniforme du terme général. Lien entre les différents modes de convergence.

Transfert de continuité en cas de convergence uniforme. Intérêt de la convergence uniforme sur tout segment de  $I$  (ou famille d'intervalles adaptée).

Théorème de la double limite.

Théorème de la classe  $\mathcal{C}^1$ . Extension aux fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$ .

**Attention** Pas d'interversion somme/intégrale, nous n'avons pas encore travaillé les intégrales généralisées.

**230. Déterminants**

Déterminant d'une famille de  $n$  vecteurs dans une base, changement de base, indépendance linéaire.

Déterminant d'un endomorphisme.

Déterminant d'une matrice carrée.

Calcul de déterminants, développement par rapport à une ligne, à une colonne, cas des matrices diagonales, triangulaires. Opérations élémentaires. Déterminants par blocs dans le cas d'une matrice triangulaires par blocs. Déterminant de Vandermonde.

**[\*]** L'ensemble des formes  $n$ -linéaires alternées est un espace vectoriel de dimension 1.

---

**Aux colleurs**

---

On n'interroge sur les chapitres qui suivent qu'après s'être assuré de la bonne maîtrise des chapitres qui précèdent.

---

**110. Compléments sur les groupes**

---

Révision du programme de première année : loi de composition interne, définitions et propriétés, partie stable. Groupe, exemples, groupe produit, sous-groupes. Morphismes de groupes, noyau, image, isomorphisme.

Sous-groupe engendré par une partie : intersection, plus petit sous-groupe, description extensive.

Interlude :  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Relation de congruence modulo  $n$ ,  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , loi de groupe.  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  est engendré par  $\bar{k}$  si et seulement si  $k \wedge n = 1$ .

---

**120. Compléments sur les anneaux**

---

Produit cartésien d'anneaux.

Idéal d'un anneau commutatif. Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal. Idéal engendré par un élément.

Idéaux de  $\mathbb{Z}$ , pgcd d'entiers, relation de Bézout.

Idéaux de  $\mathbb{K}[X]$ .

Divisibilité dans un anneau, lien avec les idéaux engendrés par un élément.

Algèbre, sous-algèbre, morphisme d'algèbres.

**Exercices et résultats classiques à connaître****540.1**

On définit, lorsque c'est possible :  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

Montrer que  $\zeta$  est une application définie et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $]1, +\infty[$ .

**540.2**

(a) Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$$

(b) Montrer que  $f$  est continue sur  $[0, \infty[$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$ .

(c) Déterminer une équation différentielle simple dont  $f$  est solution et en déduire que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, +\infty[$ .

**540.3**

On considère :

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)}$$

(a) Montrer que  $f$  est définie sur  $] -1, +\infty[$ .

(b) Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ , puis un équivalent de  $f$  en  $+\infty$ .

(c) Déterminer la limite de  $f$  en  $-1$  à droite.

**540.4**

Pour  $x \in [-1, 1]$ , on pose :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

(a) Montrer que  $g$  est continue sur  $[-1, 1]$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -1, 1[$ .

(b) **[\*]** Est-ce que  $g$  est dérivable en 1 ?

**230.1**

Soit un entier  $n \geq 1$ . On considère la matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On désigne par  $D_n$  le déterminant de  $A_n$ .

- (a) Montrer que  $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$ .
- (b) Déterminer  $D_n$  en fonction de  $n$ .

**110.1**

Soit  $(G, \star)$  un groupe. On définit son **centre** comme l'ensemble des éléments de  $G$  qui commutent avec tous les éléments de  $G$  :

$$C = \{g \in G, \forall h \in G, g \star h = h \star g\}$$

Montrer que  $C$  est un sous-groupe de  $(G, \star)$ .

**110.2**

**[\*]** Montrer que, si  $G$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$ , alors il est soit de la forme  $\alpha\mathbb{Z}$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$ , soit dense dans  $\mathbb{R}$ .

Dans le cas où  $G \neq \{0\}$ , on s'intéressera à  $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$  et on discutera selon que  $\alpha > 0$  ou  $\alpha = 0$ .

**120.1**

Soit  $(A, +, \times)$  un anneau. On dit que  $x \in A$  est **nilpotent** lorsqu'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $x^n = 0_A$ . On considère  $x, y \in A$ .

- (a) Montrer que, si  $x$  est nilpotent et que  $x$  et  $y$  commutent, alors  $xy$  est nilpotent.
- (b) Montrer que, si  $xy$  est nilpotent, alors  $yx$  est nilpotent.
- (c) Montrer que, si  $x$  et  $y$  sont nilpotents et commutent, alors  $x + y$  est nilpotent.
- (d) Montrer que, si  $x$  est nilpotent, alors  $1_A - x$  est inversible et préciser  $(1_A - x)^{-1}$ .

**Exercices du CCINP à travailler****0.2**

2. On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n}$ .

- (a) Étudier la convergence simple sur  $\mathbb{R}$  de la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$ .
- (b) Étudier la convergence uniforme sur  $[0, +\infty[$  de la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} f_n$ .

**0.3**

1. Soit  $a$  et  $b$  deux réels donnés avec  $a < b$ .

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions continues sur  $[a, b]$ , à valeurs réelles.

Démontrer que si la suite  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[a, b]$  vers  $f$ , alors la suite  $\left( \int_a^b f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\int_a^b f(x) dx$ .

2. Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.

3. Démontrer que  $\int_0^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$ .

**0.4** 15.12

Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

1. Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions définies sur  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Rappeler la définition de la convergence normale de  $\sum f_n$  sur  $X$ , puis celle de la convergence uniforme de  $\sum f_n$  sur  $X$ .

2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , normalement convergente sur  $X$  est uniformément convergente sur  $X$ .

**0.5** 16

On considère la série de fonctions de terme général  $u_n$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1], \quad u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}.$$

On pose, lorsque la série converge,  $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right]$ .

1. Démontrer que  $S$  est définie sur  $[0, 1]$ .

2. On définit une suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  par  $u_n = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

En utilisant  $S(1)$ , démontrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est convergente.

En déduire un équivalent simple de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

3. Démontrer que  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$  et calculer  $S'(1)$ .

**0.6** 17

Soit  $A \subset \mathbb{C}$  et  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $A$  dans  $\mathbb{C}$ .

1. Démontrer l'implication :

$$\begin{aligned} & \left( \text{la série de fonctions } \sum f_n \text{ converge uniformément sur } A \right) \\ & \quad \Downarrow \\ & \left( \text{la suite de fonctions } (f_n) \text{ converge uniformément vers } 0 \text{ sur } A \right) \end{aligned}$$

2. On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0; +\infty[, f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ .

Prouver que  $\sum f_n$  converge simplement sur  $[0; +\infty[$ .

$\sum f_n$  converge-t-elle uniformément sur  $[0; +\infty[$ ? Justifier.

**0.7** 18

On pose :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{(-1)^n x^n}{n}$ .

On considère la série de fonctions  $\sum_{n \geq 1} u_n$ .

1. Étudier la convergence simple de cette série.

On note  $D$  l'ensemble des  $x$  où cette série converge et  $S(x)$  la somme de cette série pour  $x \in D$ .

2. (a) La fonction  $S$  est-elle continue sur  $D$  ?  
(b) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur  $D$ .  
(c) Étudier la convergence uniforme de cette série sur  $[0, 1]$ .

**0.8** 53

On considère, pour tout entier naturel  $n$  non nul, la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_n(x) = \frac{x}{1 + n^4 x^4}$ .

1. (a) Prouver que  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$ .

On pose alors :  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ .

- (b) Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $0 < a < b$ .

$\sum_{n \geq 1} f_n$  converge-t-elle normalement sur  $[a, b]$  ? sur  $[a, +\infty[$  ?

- (c)  $\sum_{n \geq 1} f_n$  converge-t-elle normalement sur  $[0, +\infty[$  ?

2. Prouver que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ .

3. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .