2026 **PC**

18.1

Énoncer le théorème spectral, dans ses version endomorphisme et matrice.

18.2

1. Soit x un réel.
   (a) Montrer que la fonction f_x définie par $\forall t \in]0,+\infty[,\ f_x(t) = \dfrac{e^{itx}-1}{t}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et prolongeable par continuité en 0.
   (b) Montrer que f_x est intégrable sur $]0,+\infty[$.

On pose alors $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{itx}-1}{t}e^{-t}\,\mathrm{d}t$

2. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$
   (a) Montrer que $\forall u \in \mathbb{R}, 0 \leqslant 1-\cos(u) \leqslant \dfrac{u^2}{2}$.
   (b) En déduire que $\forall x \in [a,b],\ \forall t \in]0,+\infty[,\quad \left|\dfrac{e^{itx}-1}{t}e^{-t}\right| \leqslant \max(|a|,|b|)e^{-t}$.
3. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

18.3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $S = \frac{1}{2}(A + A^\top)$. On note α (resp. β) la plus petite (resp. plus grande) valeur propre de S. Montrer que, pour toute valeur propre réelle λ de A :

$$\alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta$$

18.4

Donner le définition d'une isométrie.

18.5

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.
2. Montrer que la fonction $F : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée.
4. (a) Déterminer la limite de F en $+\infty$.

   (b) Montrer que $\forall x \in [1, +\infty[,\ F(x) = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{\sin(2x)}{4x^2} - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t^3}\mathrm{d}t$.

   (c) En déduire un équivalent de F en $+\infty$.

18.6

Déterminer toutes les matrices $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ dont la première colonne est :

$$\begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

18.7

Rappeler la définition de l'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle.

18.8

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

1. (a) Expliciter $S = A^\top A$.

   (b) Montrer qu'il existe une matrice P orthogonale telle que $P^\top SP = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) En déduire que S est une matrice symétrique définie positive.
2. Déterminer P.
3. Soit R une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = S$.

   (a) Montrer que $\left(P^\top RP\right)^2 = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) En déduire 8 matrices R qui conviennent.

   (c) Parmi ces matrices combien sont symétriques, combien sont symétriques positives, combien sont symétriques définies positives ?
4. Soit $T = P \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} P^\top$.

   (a) Déterminer T^2.

   (b) Que dire alors sur le nombre de matrices dont le carré est égal à S ?

18.9

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ et } G(x) = \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$$

(a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser F'.

(b) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser G'.

(c) Montrer que la fonction $F + G$ est constante sur $\mathbb{R}$.

(d) Déterminer la limite de $F(x)$ pour $x \to +\infty$.

(e) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

18.10

Existence et calcul de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)\mathrm{e}^{-t}}{t} \, \mathrm{d}t$$

18.11

Sur $\mathbb{R}_n[X]$, on considère le produit scalaire défini par :

$$\langle P|Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) \, \mathrm{d}t$$

On note u l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ telle que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$u(P) = \int_0^1 (X+t)^n P(t) \, \mathrm{d}t$$

On admet le :

Théorème de Fubini.

Si f est une fonction continue sur $[a,b] \times [c,d]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors :

$$\int_a^b \int_c^d (f(x,y) \, \mathrm{d}y) \, \mathrm{d}x = \int_c^d \int_a^b (f(x,y) \, \mathrm{d}x) \, \mathrm{d}y$$

(a) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, autoadjoint.
Justifier l'existence d'une base orthonormale de vecteurs propres $(P_0, \dots, P_n)$ associés à des valeurs propres $\lambda_0, \dots, \lambda_n$.

(b) Montrer que :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x) P_k(y)$$

(c) En déduire la trace de u.