

# Topologie des espaces vectoriels normés

<b>Cours</b>	<b>2</b>
1 Points intérieurs, ouvert, voisinage . . . . .	2
1.1 Voisinage d'un point . . . . .	2
1.2 Ouvert . . . . .	2
1.3 Point intérieur, intérieur . . . . .	2
2 Points adhérents, fermé, densité . . . . .	3
2.1 Fermé . . . . .	3
2.2 Point adhérent, adhérence, frontière . . . . .	3
2.3 Densité . . . . .	3
2.4 Caractérisations séquentielles . . . . .	3
3 Topologie et normes équivalentes . . . . .	4
4 Topologie induite . . . . .	4
4.1 Voisinage relatif, ouvert relatif . . . . .	4
4.2 Fermé relatif . . . . .	4
4.3 Densité . . . . .	4
<b>Exercices</b>	<b>5</b>
Exercices et résultats classiques à connaître . . . . .	5
Adhérence et distance . . . . .	5
Densité des matrices inversibles . . . . .	5
Les sous-groupes de $\mathbb{R}$ . . . . .	5
Sous-espace vectoriel d'intérieur non vide . . . . .	5
Exercices du CCINP . . . . .	6
Exercices . . . . .	7
Petits problèmes d'entraînement . . . . .	7

## 1 Points intérieurs, ouvert, voisinage

### 1.1 Voisinage d'un point

**Définition.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé,  $a \in E$ . On dit qu'une partie  $V$  de  $E$  est un **voisinage** de  $a$  lorsqu'il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$B(a, \delta) \subset V$$

où  $B(a, \delta) = \{x \in E, \|x - a\| < \delta\}$ .

**Remarque.**

- L'usage est d'utiliser une boule ouverte, une inégalité stricte.
- On trouve parfois la notation  $\mathcal{V}(a)$  pour désigner l'ensembles des voisinages de  $a$ .

**Proposition.**

- Si  $V$  est un voisinage de  $a$  et  $V \subset W$  alors  $W$  est un voisinage de  $a$ .
- Une intersection finie de voisinages de  $a$  est un voisinage de  $a$ .
- Une réunion de voisinages de  $a$  est un voisinage de  $a$ .

**Remarque.** Pour la réunion, il suffit en fait qu'un seul ensemble soit un voisinage.

**Proposition.** Si  $N$  et  $N'$  sont deux normes équivalentes, les voisinages de  $a$  dans  $(E, N)$  et  $(E, N')$  sont les mêmes.

### 1.2 Ouvert

**Définition.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé. On dit qu'une partie  $U$  de  $E$  est un **ouvert** lorsque  $U$  est voisinage de chacun de ses points, i.e. :

$$\forall x \in U, \exists \delta > 0, B(x, \delta) \subset U$$

**Remarque.**  $E$  et  $\emptyset$  sont ouverts.

**Proposition.** Une boule ouverte est un ouvert.

**Proposition.**

- Une réunion d'ouverts est un ouvert :

$$\bigcup_{i \in I} U_i \text{ est ouvert}$$

- Une intersection finie d'ouverts est un ouvert :

$$U_1 \cap \dots \cap U_p \text{ est ouvert}$$

**Remarque.** L'intérêt de travailler dans un ouvert, c'est que ses éléments ne sont jamais « au bord ».

**Proposition.** Un produit fini d'ouvert est un ouvert.

### 1.3 Point intérieur, intérieur

**Définition.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé et  $A$  une partie de  $E$ . Un point  $a$  de  $E$  est dit **intérieur** à  $A$  lorsque  $A$  est un voisinage de  $a$ , i.e. :

$$\exists \delta > 0, B(a, \delta) \subset A$$

On appelle **intérieur de  $A$**  l'ensemble  $\overset{\circ}{A}$  de tous les points intérieurs à  $A$ .

**Proposition.**  $A$  est ouvert si et seulement si  $\overset{\circ}{A} = A$ .

**Proposition.** L'intérieur de  $A$  est le plus grand ouvert contenu dans  $A$ .

## 2 Points adhérents, fermé, densité

### 2.1 Fermé

**Définition.** On dit qu'une partie  $A$  de  $E$  est un **fermé** lorsque  $E \setminus A = A^c$  est un ouvert.

**Exemple.**  $E$  et  $\emptyset$  sont fermés.

**Proposition.** Une boule fermée est fermée, une sphère est fermée, un singleton  $\{a\}$  est fermé.

**Proposition.**

- Une réunion finie de fermés est un fermé.
- Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

**Proposition.** Un produit fini de fermés est un fermé.

### 2.2 Point adhérent, adhérence, frontière

**Définition.** Soit  $A$  une partie de  $E$ . On dit que  $x \in E$  est **adhérent** à  $A$  lorsque :

$$\forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap A \neq \emptyset$$

On appelle **adhérence** de  $A$  l'ensemble  $\overline{A}$  de tous les points adhérents à  $A$ .

**Proposition.**  $A$  est fermé si et seulement si  $\overline{A} = A$ .

**Proposition.** L'adhérence de  $A$  est le plus petit fermé contenant  $A$ .

**Proposition.** On dispose de l'équivalence suivante :

$$x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$$

**Définition.** On appelle **frontière** de  $A$  l'ensemble :

$$\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$$

### 2.3 Densité

**Définition.** Une partie  $A$  de l'espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|)$  est dite **dense** dans  $E$  lorsque  $\overline{A} = E$ , c'est-à-dire :

- tout élément de  $E$  est limite d'une suite d'éléments de  $A$

ou alors

- $\forall x \in E, \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ .

**Exemple.**  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Exemple.** Le sous-espace des fonctions polynomiales est dense dans  $(\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$  par le théorème de Weierstrass.

**Exemple.** Le sous-espace des fonctions en escalier est dense dans l'ensemble  $(\mathcal{C}_{\text{pm}}^0([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$  des fonctions continues par morceaux.

### 2.4 Caractérisations séquentielles

**Proposition.** Une partie  $A$  de  $E$  est un fermé si et seulement si, pour toute suite convergente d'éléments de  $A$ , sa limite est dans  $A$ .

**Remarque.** L'intérêt de travailler dans un fermé, c'est que « quand on y est, on y reste », même en passant à la limite.

**Proposition.**  $x$  est adhérent à  $A$  si et seulement s'il existe une suite d'éléments de  $A$  qui converge vers  $x$ .

### 3 Topologie et normes équivalentes

#### Théorème.

Les notions topologiques étudiées ci-avant sont invariante par passage à une norme équivalente :

- Si  $A$  est un ouvert de  $(E, N_1)$  et  $N_2$  équivalente à  $N_1$ , alors  $A$  est un ouvert de  $(E, N_2)$ .
- L'intérieur de  $A$  dans  $(E, N_1)$ , lorsque  $N_2$  équivalente à  $N_1$ , est le même que l'intérieur de  $A$  dans  $(E, N_2)$ .
- etc.

### 4 Topologie induite

#### 4.1 Voisinage relatif, ouvert relatif

**Définition.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé et  $A$  une partie quelconque de  $E$ . Soit  $a \in A$  et  $X \subset A$ . On dit que  $X$  est un **voisinage relatif de  $a$  dans  $A$**  s'il existe  $r > 0$  tel que  $B(a, r) \cap A \subset X$ .

**Remarque.** Ainsi, les voisinages relatifs de  $a$  dans  $A$  sont les intersections avec  $A$  des voisinages de  $a$  (dans  $E$ ).

**Définition.** On conserve les notations précédentes. On dit que  $X$  est un **ouvert relatif de  $A$**  si et seulement s'il est voisinage relatif de chacun de ses points, c'est-à-dire :

$$\forall a \in X, \exists r > 0 \text{ t.q. } B(a, r) \cap A \subset X$$

**Proposition.**  $X$  est un ouvert relatif de  $A$  si et seulement s'il existe  $U$  ouvert (de  $E$ ) tel que  $X = U \cap A$ .

**Remarque.** On dit parfois que  $U \cap A$  est la **trace** laissée par  $U$  sur  $A$ .

**Exemple.** Les parties suivantes sont-elles des ouverts relatifs de  $[0, 1]$  ?

- |             |               |                                  |               |
|-------------|---------------|----------------------------------|---------------|
| 1. $[0, 1]$ | 3. $[0, 1/2]$ | 5. $[0, 1] \setminus [1/2, 3/4]$ | 7. $]0, 1/2[$ |
| 2. $\{0\}$  | 4. $[0, 3/4[$ | 6. $]0, 1[$                      |               |

#### 4.2 Fermé relatif

**Définition.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé et  $A$  une partie quelconque de  $E$ . On dit que  $X \subset A$  est un **fermé relatif de  $A$**  lorsque  $A \setminus X$  est un ouvert relatif de  $A$ .

**Proposition.**  $X$  est un fermé relatif de  $A$  si et seulement s'il existe  $F$  fermé (de  $E$ ) tel que  $X = F \cap A$ .

**Remarque.** On dit parfois que  $F \cap A$  est la **trace** laissée par  $F$  sur  $A$ .

**Caractérisation séquentielle.**  $X$  est un fermé relatif de  $A$  si et seulement si, pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $X$  qui converge vers un élément  $\ell$  de  $A$ , alors  $\ell \in X$ .

**Exemple.** Est-ce que  $] -\infty, 0[$  est un ouvert relatif de  $\mathbb{R}^*$  ? un fermé relatif de  $\mathbb{R}^*$  ?

**Exemple.** Dans  $E = \mathbb{R}^2$ , on note  $O = (0, 0)$  et  $a = (1, 1)$  et on considère  $A = B(O, 1/4) \cup B(a, 1/4)$ . Proposer quatre parties de  $A$  qui sont à la fois des ouverts relatifs et des fermés relatifs de  $A$ .

#### 4.3 Densité

**Définition.** On dit que  $X \subset A$  est **dense** dans  $A$  lorsque tout élément de  $A$  est limite d'une suite d'éléments de  $X$ .

**Exercices et résultats classiques à connaître****Adhérence et distance****430.1**

Soit  $A$  une partie non vide de  $E$  espace normé, et  $x \in E$ .

(a) Justifier l'existence de  $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\| \in \mathbb{R}_+$ .

(b) Montrer que :

$$x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$$

**Densité des matrices inversibles****430.2**

Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , montrer que  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$  est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Les sous-groupes de  $\mathbb{R}$** **430.3**

Soit  $H$  un sous-groupe non nul de  $(\mathbb{R}, +)$ .

(a) Justifier l'existence de  $\alpha = \inf\{x \in H, x > 0\}$ .

(b) On suppose  $\alpha > 0$ . Montrer que  $\alpha \in H$ , puis  $H = \alpha\mathbb{Z}$ .

(c) On suppose  $\alpha = 0$ . Montrer que  $H$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

(d) Montrer que  $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$  est un sous-groupe de  $(\mathbb{R}, +)$ . En déduire que  $\{\cos(n), n \in \mathbb{N}\}$  est dense dans  $[-1, 1]$ .

**Sous-espace vectoriel d'intérieur non vide****430.4**

Soit  $E$  un espace vectoriel normé, et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On suppose que  $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$ . Montrer que  $F = E$ .

## Exercices du CCINP

430.5

CINP 1.3

On note  $E$  l'espace vectoriel des applications continues sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

On pose :  $\forall f \in E$ ,  $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$  et  $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ .

3. Dans cette question, on munit  $E$  de la norme  $\|\cdot\|_1$ .

$$\text{Soit } c : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 1 \end{cases}$$

$$\text{On pose : } \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

(a) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer  $\|f_n - c\|_1$ .

(b) On pose  $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$ .

On note  $\overline{F}$  l'adhérence de  $F$ .

Prouver que  $c \in \overline{F}$ .

$F$  est-elle une partie fermée de  $E$  pour la norme  $\|\cdot\|_1$  ?

430.6

CINP 34

Soit  $A$  une partie non vide d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé  $E$ .

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à  $A$ , en termes de voisinages ou de boules.

2. Démontrer que :  $x \in \overline{A} \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que,  $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ .

3. Démontrer que, si  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors  $\overline{A}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

4. Soit  $B$  une autre partie non vide de  $E$ . Montrer que  $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ .

430.7

CINP 37.13

On note  $E$  l'espace vectoriel des applications continues de  $[0; 1]$  dans  $\mathbb{R}$ .

On pose :  $\forall f \in E$ ,  $N_\infty(f) = \sup_{x \in [0;1]} |f(x)|$  et  $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$ .

1. (b) Démontrer qu'il existe  $k > 0$  tel que, pour tout  $f$  de  $E$ ,  $N_1(f) \leq k N_\infty(f)$ .

(c) Démontrer que tout ouvert pour la norme  $N_1$  est un ouvert pour la norme  $N_\infty$ .

430.8

CINP 44

Soit  $E$  un espace vectoriel normé. Soient  $A$  et  $B$  deux parties non vides de  $E$ .

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.

(b) Montrer que :  $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$ .

2. Montrer que :  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

**Remarque** : une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.

3. (a) Montrer que :  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ .

(b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre  $E = \mathbb{R}$ ).

430.9

CINP 45

**Les questions 1. et 2. sont indépendantes.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé. On note  $\|\cdot\|$  la norme sur  $E$ .

Soit  $A$  une partie non vide de  $E$ .

On note  $\overline{A}$  l'adhérence de  $A$ .

1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de  $\overline{A}$ .

(b) Prouver que, si  $A$  est convexe, alors  $\overline{A}$  est convexe.

2. On pose :  $\forall x \in E$ ,  $d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$ .

(a) Soit  $x \in E$ . Prouver que  $d_A(x) = 0 \implies x \in \overline{A}$ .

- (b) On suppose que  $A$  est fermée et que :  $\forall (x, y) \in E^2, \forall t \in [0, 1], d_A(tx + (1-t)y) \leq td_A(x) + (1-t)d_A(y)$ .  
Prouver que  $A$  est convexe.

## Exercices

### 430.10

Montrer que  $\mathbb{Z}$  est un fermé de  $\mathbb{R}$  :

- en utilisant la caractérisation séquentielle ;
- en étudiant son complémentaire.

### 430.11

Soit  $E$  un espace vectoriel normé, et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer que  $\overline{F}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

### 430.12

Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$  non vide et majorée. Montrer que :

$$\text{Sup}(A) \in \overline{A}$$

### 430.13

Montrer que l'adhérence d'une partie convexe est convexe.

### 430.14

Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

### 430.15

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Le groupe linéaire  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  est-il un fermé de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ? un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ?

### 430.16

Déterminer  $\text{Fr}(\mathbb{Q})$ .

### 430.17

Dans  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ , montrer que :

$$\overline{[0, 1[} = [0, 1] \text{ et } \widehat{[0, 1[} = ]0, 1[$$

## Petits problèmes d'entraînement

### 430.18

On travaille dans  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , et on définit :

$$A = \left\{ f \in E, f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t) dt \geq 1 \right\}$$

- Montrer que  $A$  est un fermé.
- Vérifier que, pour tout  $f \in A$ ,  $\|f\|_\infty > 1$ .
- Calculer  $d(0_E, A)$ .

*On peut se poser la question : ce résultat est-il en contradiction avec le fait que  $A$  est fermé ?*

### 430.19

- Montrer que les parties  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\}$  et  $B = \{0\} \times \mathbb{R}$  sont fermées dans  $\mathbb{R}^2$ .
- Observer que  $A + B$  n'est pas fermée.

### 430.20

Soit  $N_1$  et  $N_2$  deux normes sur un même espace vectoriel  $E$ . On suppose qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que :

$$\forall x \in E, N_1(x) \leq \alpha N_2(x)$$

Montrer que tout ouvert de  $(E, N_1)$  est ouvert de  $(E, N_2)$ .

### 430.21

Dans  $E$  espace normé, montrer que l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre, de même rayon.

compact, i.e. :

$$f \in F \iff \exists M > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-M, M], f(x) = 0$$

Montrer que  $F$  est dense dans  $E$ .

**430.23**

Montrer que l'intérieur d'une partie convexe est convexe.

**430.22**

On considère  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ , à valeurs réelles, ayant pour limite 0 en  $\pm\infty$ . On le munit de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , toute fonction de  $E$  étant bornée sur  $\mathbb{R}$ .

On considère  $F$  le sous-espace vectoriel constitué des fonctions à support