921.1

Centrale II

On note $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Tracer son graphe sur $[-10, 10]$. Que peut-on conjecturer ?

(c) c1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

c2. En effectuant le changement de variable $u = xt$, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

(d) On considère (E) : $y'' - y = 0$, $y(0) = \frac{\pi}{2}$, $y'(0) = -\frac{\pi}{2}$.

d1. Montrer que (E) admet une unique solution.

d2. Tracer les solutions sur $[0, 10[$, avec `scipy.integrate.odeint`. Qu'en déduire par rapport à f ?

(e) e1. Montrer que $\dfrac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\dfrac{x}{u^2+x^2}\right) = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\dfrac{x}{u^2+x^2}\right)$.

e2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' = y$.

Et d'autres questions.

921.2

Concours Centrale Supélec - Math II

Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la matrice carrée $M(n)$ formée « en serpent » par les nombres 1, 2, 3, 4, ..., n^2. Par exemple :

$$M(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad M(3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad M(4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$$

(a) Donner en Python une fonction f telle que $f(n,i,j) = (M(n))_{i,j}$.

(b) Créer une fonction M d'argument $n \in \mathbb{N}^*$ et renvoyant $M(n)$. Tester pour $1 \leqslant n \leqslant 5$.

(c) Calculer le rang de $M(n)$ pour $1 \leqslant n \leqslant 10$.

(d) Conjecturer la valeur de $\mathrm{rg}(M(n))$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et démontrer cette conjecture.

(e) Définir une fonction permettant d'afficher la ligne brisée formée par les points de coordonnées $(k, \mathrm{tr}(M(k)))$, pour $1 \leqslant k \leqslant n$.
Tester pour $n = 100$. Essayer aussi pour $n = 1000$.

(f) Afficher les 100 premières valeurs de $\dfrac{\mathrm{tr}(M(n))}{n^3}$. Commenter.

(g) Trouver un équivalent de $\mathrm{tr}(M(n))$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(h) Trouver une expression pour $\mathrm{tr}(M(n))$ (on pourra commencer par traiter le cas où n est pair).

921.3

 Concours Centrale Supélec - Math II

Soit n un entier naturel. On dispose de $(n+1)$ urnes $U_0, \ldots, U_n$. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, l'urne U_j contient $j+1$ boules numérotées de 0 à j. On effectue une succession de tirages d'une boule avec remise selon le protocole suivant :

- au premier tirage, on tire une boule avec remise dans l'urne U_n ;
- à l'issue de ce premier tirage, si on obtient la boule numéro j ($j \in [\![0, n]\!]$), le second tirage s'effectue dans l'urne U_j ;
- on continue alors les tirages selon la même règle : pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, on tire une boule avec remise au k-ième tirage et on note le numéro j de la boule tirée. Le $(k+1)$-ième tirage s'effectue alors avec remise dans l'urne U_j.

Pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro tiré lors du k-ième tirage. Le premier tirage ayant lieu dans l'urne U_n, on pose $X_0 = n$.
Pour tout entier naturel k, on considère la matrice W_k dans $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et la matrice A dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définies par :

$$W_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 0) \\ P(X_k = 1) \\ \vdots \\ P(X_k = n) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & 0 & \frac{1}{3} & \ddots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel k, on note $E(X_k)$ l'espérance de X_k.

(a) a1. La matrice A est-elle diagonalisable ?

a2. Déduire du résultat précédent que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite P dont on précisera brièvement la nature géométrique.

a3. Écrire une fonction `matriceA(n)` qui prend en paramètre un entier n et renvoie la matrice A correspondante.

a4. En utilisant la fonction `linalg.eig` de `numpy` déterminer le vecteur propre associé à la valeur propre 1 de A.

(b) Écrire une fonction qui prend en paramètres deux entiers k et n et renvoie une liste contenant le résultat de k tirages (on pourra utiliser la fonction `random.randint` du module `random` de Python).
Tester plusieurs fois avec $n = 10$ (puis $n = 100$) et $k = 50$.

(c) c1. Pour tout j dans $[\![0, n]\!]$, écrire $P(X_{k+1} = j)$ en fonction de certains des nombres $P(X_k = i)$ pour i dans $[\![0, n]\!]$.

c2. En déduire la relation : $W_{k+1} = AW_k$ puis une expression de W_k en fonciton de A et de W_0.

c3. Écrire une fonction en Python qui prend en paramètres deux entiers k et n qui engendre le vecteur W_0, calcule A^k (en utilisant `matriceA(n)`) et renvoie le vecteur W_k correspondant.
Tester le programme avec $n = 10$ (puis $n = 100$) et $k = 20$.

(d) d1. Déterminer la matrice B dans $\mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telle que $BW_k = E(X_k)$.

d2. Calculer le produit BA en fonction de B.

d3. Pour tout entier naturel k, exprimer $E(X_{k+1})$ en fonction de $E(X_k)$.

d4. En déduire l'expression de $E(X_k)$ en fonction de k et n.
Ce résultat est-il en accord avec les résultats théoriques et empiriques précédents ?

921.4

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par :

$$\forall P, Q \in (\mathbb{R}[X])^2,\ \langle P, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Pour les simulations informatiques sous Python, on importera les bibliothèques scientifiques à l'aide des instructions suivantes :

```python
from numpy.polynomial import Polynomial
from math import *
```

(a) Vérifier que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien un produit scalaire.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et on admettra que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

b1. Trouver une relation entre I_n et I_{n-2}.
Écrire une fonction récursive `Calcul(n)` qui renvoie la valeur de I_n.

b2. Calculer I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Écrire une fonction `ps(P,Q)` qui renvoie le produit scalaire ci-dessus de P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ avec l'aide de la fonction `Calcul`.

(d) Soit $(P_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de polynômes définie par $P_0 = 1$, $P_1 = X - \dfrac{1}{2}$ et :

$$\forall n \geqslant 2,\ P_n' = P_{n-1} \text{ et } \int_0^1 P_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

d1. Exprimer P_n en fonction de P_{n-1}.

d2. Écrire une fonction `Poly1(n)` qui renvoie la valeur de P_n.

d3. Calculer P_n pour $n \in [\![0, 5]\!]$ et $\langle P_i, P_j\rangle$ pour $(i, j) \in [\![0, 5]\!]^2$.

(e) Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

e1. Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{-x^2} H_n(x)$$

e2. Trouver une relation entre H_{n+2}, H_{n+1} et H_n.

e3. Écrire une fonction `Poly2(n)` qui renvoie la valeur de H_n.

e4. Calculer H_n pour $n \in [\![0, 5]\!]$ et $\langle H_i, H_j\rangle$ pour $(i, j) \in [\![0, 5]\!]^2$. Observation.