Suites numériques

Je me souviens

1.1 Récurrence

1. Raconter ce qu'est une récurrence.
2. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme T_n tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(nx) = T_n(\cos x)$.

1.2 Suite numérique, convergence, divergence

3. C'est quoi, une suite numérique ?
4. On peut plutôt parler de famille ?
5. Proposer trois modes de définition pour une suite numérique.
6. Comment définir « $(u_n)_n$ converge » ? Comment ça se comprend ?
7. Et « $(u_n)_n$ ne converge pas » ?
8. Y a-t-il un lien entre « converge » et « bornée » ?
9. Est-ce que $(u_n)_n$ converge, c'est la même chose que $(u_n)_n$ est stationnaire ?
10. Est-ce que $(u_n)_n$ converge, c'est la même chose que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$?
11. Que dire d'une suite $(u_n)_n$ qui converge vers $\ell > 0$?
12. On sait qu'il y a des opérations sur les limites de suites convergentes, des formes indéterminées, etc.
13. Qu'est-ce que le résultat « limite par encadrement » ?
14. Que signifie « étudier une suite » ?
15. Citer le « théorème de convergence monotone ».
16. Donner la définition de « suites adjacentes », et le théorème des suites adjacentes.

1.3 Suites remarquables

17. On est d'accord pour ne pas rappeler les résultats concernant les suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants ?

1.4 Suites récurrentes

Parlons maintenant des suites récurrentes. On considère $(u_n)_n$ définie par la donnée de u_0 et de la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

18. Qu'est-ce qu'un intervalle stable par f ? Quel est l'intérêt de les déterminer ?
19. Qu'est-ce qu'un point fixe pour f ? Quel est l'intérêt dans le cadres des suites récurrentes ?
20. En quoi l'étude du signe de $f(x) - x$ informe sur le comportement de la suite $(u_n)_n$?
21. Qu'est-ce qu'une fonction lispschitzienne ? contractante ?
22. Si f est contractante et admet un point fixe a, qu'en déduire pour $(u_n)_n$?
23. Lorsque f est décroissante, que dire des suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$?

1.5 Relation d'ordre

24. Qu'est-ce qui permet d'assurer l'existence d'une borne supérieure ?
25. Ça veut dire quoi, Sup $A \leqslant 3$?
26. Qu'est qu'une relation d'ordre ?
27. Donner trois exemples de relation d'ordre.
28. Qu'est-ce qu'un ordre total ? partiel ?
29. Dans E muni d'une relation d'ordre $\preccurlyeq$, on considère A une partie de E. Que signifie « A est majorée » ? « A admet un plus grand élément » ?
30. Y a-t-il unicité du plus grand élément quand il existe ?
31. On est d'accord pour ne pas parler de minorant, plus petit élément, partie bornée, etc.
32. Y a-t-il des résultats concernant les plus petits éléments, plus grands éléments, pour des parties de $\mathbb{N}$ muni de $\leqslant$?
33. Dans quel contexte parle-t-on de « borne supérieure » ?

Exercices et résultats classiques à connaître

Étudier une suite récurrente

51.1

Étudier la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sin u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

51.2

Étudier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\cos u_n \qquad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Le théorème de Cesàro

51.3

On considère une suite réelle $(u_n)_n$, et on note $v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ la moyenne arithmétique de ses premiers termes.

(a) On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Démontrer que la suite $(v_n)_n$ converge vers 0.

(b) On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

(c) Que penser de la réciproque ?

Une suite définie de façon implicite

51.4

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $x_n \in I_n = \left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ tel que :

$$\tan x_n = x_n$$

(b) Montrer qu'il existe des réels a, b, c, d que l'on déterminera tels que :

$$x_n \underset{n\to+\infty}{=} a\,n + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercices de la banque CCINP

51.5 CCINP 43

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\text{Arctan}\, x)$.

51.6 CCINP 55

Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\text{i}a - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.

   Indication : discuter suivant les valeurs de a.

Exercices

51.7

Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$ définie par :

(a) $u_n = 2^n \sin\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$, où $\theta \in [0, \pi]$

(b) $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = \text{e}^{u_n} - 1$, $\forall n$

(c) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

(d) $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{2k^2}\right)$

51.8

Étudier les limites des expressions suivantes :

(a) $\text{e}^n - n$

(b) $\dfrac{n^3 + n + 1}{2n^2 + 1}$

(c) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(d) $n^{\frac{1}{n}}$

(e) $(2 + \cos n)^{\frac{1}{n}}$

(f) $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

(g) $\dfrac{\text{e}^{in\theta}}{n}$

51.9

Étudier les limites des expressions suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n + \sqrt{k}}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$

(c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{(n+k)^2}$

51.10

Proposer dans chacun des cas un exemple de suite :

(a) qui n'est ni majorée, ni minorée

(b) qui est minorée, non majorée, et ne tends pas vers $+\infty$

(c) positive, de limite nulle, mais non décroissante

51.11

Exprimer le terme général de la suite réelle $(u_n)_n$ définie par :

(a) $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

(b) $u_0 = 1$, $u_1 = -3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = 0$

(c) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = 0$

51.12

Étudier la suite définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$$

51.13

Étudier la suite définie par :

$$u_0 \geqslant 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \ln(u_n)$$

51.14

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On s'intéresse aux suites de terme général :

$$a_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \text{ et } b_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$$

Montrer que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes, de limite x.

Petits problèmes d'entrainement

51.15

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+$. On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ v_0 = b \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont bien définies, et convergent vers une même limite.

51.16

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles, qui convergent respectivement vers ℓ et ℓ'. On suppose $\ell < \ell'$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n < v_n$.

51.17

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

(b) En déduire que $H_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

51.18

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle, positive, décroissante et de limite nulle. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} u_k$$

Montrer la convergence de la suite $(S_n)_n$ en étudiant les suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$.

51.19

En considérant, pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = \frac{1}{n\,n!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

montrer que e est irrationnel.

51.20

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}$$

et

$$a_n = n u_n^2 \text{ et } b_n = \big(n + \frac{1}{2}\big) u_n^2$$

Montrer que les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent vers une même limite strictement positive.

51.21 ✍

On dit qu'une suite réelle $(u_n)_n$ **est de Cauchy** lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \in \mathbb{N},\ \big(p \geqslant N \text{ et } q \geqslant N\big) \implies |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon$$

(a) Montrer qu'une suite convergente est de Cauchy.

(b) Inversement, montrer à l'aide du théorème de Bolzano-Weierstrass qu'une suite de Cauchy est convergente.

51.22

Soit $(u_n)_n$ une suite dont les termes sont deux à deux distincts, et dans $\mathbb{N}$. Étudier sa convergence.

51.23

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels positifs telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$$

Montrer que $(u_n)_n$ converge.

On peut étudier la monotonie de $(v_n)_n$ où $v_n = \mathrm{Max}(u_{n+1}, u_n)$.

51.24

Étudier la suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$$

51.25

Étudier la suite définie par :

$$u_0 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{3 - u_n}$$

51.26

Soit $a > 0$ et $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\big(u_n + \frac{a}{u_n}\big)$$

(a) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_n$.

(b) Déterminer, si elle existe, la limite de $\dfrac{un + 1 - \sqrt{a}}{(u_n - \sqrt{a})^2}$.

51.27

Montrer que :

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots}}$$

51.28

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \,]0, \pi[$.

(a) Justifier l'existence de :

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt) - \cos(n\theta)}{\cos(t) - \cos(\theta)}\,\mathrm{d}t$$

(b) Exprimer $I_{n+1} - I_{n-1}$ en fonction de I_n pour $n \geqslant 1$.

(c) En déduire la valeur de I_n.