Séries à termes dans un evn de dimension finie

Cours **2**

Exercices **5**

On reprend essentiellement dans ce chapitre la théorie des séries numériques, et on l'adapte aux evn. Dans tout le chapitre, E désigne un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$.

1 Séries à termes dans un espace vectoriel normé de dimension finie

1.1 Somme partielle, convergence, divergence, somme, reste d'une série convergente

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On s'intéresse à la **série** $\sum u_n$.

- $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ est la **somme partielle** d'ordre n.
- La série $\sum u_n$ **converge** lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans l'espace vectoriel normé E, c'est-à-dire s'il existe $S \in E$ tel que :
$$\left\| \sum_{k=0}^{n} u_k - S \right\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
On dit qu'elle **diverge** sinon.
- En cas de convergence, on appelle **somme de la série**, et on note $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, la limite de la suite des sommes partielles.

Remarque. *Étudier une série, c'est déterminer si elle converge ou si elle diverge.*

Définition. Lorsque la série $\sum u_n$ converge, on peut définir son **reste** d'ordre n, avec les notations précédentes :
$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Proposition. La suite des restes est bien définie lorsque $\sum u_n$ converge, et $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

1.2 Divergence grossière

Proposition. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_n$ converge vers 0

Remarque. *Il s'agit d'une condition nécessaire.*

Définition. Lorsque $(u_n)_n$ ne converge pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

1.3 Opérations

Proposition. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes, λ et μ deux scalaires. Alors la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Corollaire. L'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel, et l'application $\sum u_n \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ y est linéaire.

Lien suite-série. Soit $(u_n)_n$ une suite à valeurs dans E. On a :
$$\text{la suite } (u_n)_n \text{ converge} \iff \text{la série } \sum(u_{n+1} - u_n) \text{ converge}$$

Proposition. La convergence et la valeur de la somme d'une série convergente est indépendante du choix de la norme sur E qui est de dimension finie.

1.4 Caractérisation par les coordonnées dans une base

Définition. Soit $\sum u_n$ une série à termes dans E, et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire :

$$u_n = u_n^{(1)} e_1 + \dots + u_n^{(p)} e_p = \sum_{i=1}^{p} u_n^{(i)} e_i$$

l'unique écriture de u_n comme C.L. de $\mathbb{B}$.
La suite $(u_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle la i-ème suite coordonnée de $(u_n)_n$.

Proposition. Avec les notations précédentes,

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \forall i \in \{1, \dots, p\},\ \sum u_n^{(i)} \text{ converge}$$

et dans ce cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}\right) e_1 + \dots + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}\right) e_p = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(i)}\right) e_i$$

Remarque. *La convergence de $\sum u_n$ est caractérisée par la convergence de ses séries coordonnées dans une base $\mathcal{B}$ fixée.*

1.5 Convergence absolue

Définition. Soit $\sum u_n$ une série à termes dans E. On dit que $\sum u_n$ **converge absolument** si et seulement si la série numérique $\sum \|u_n\|$ converge.

Remarque. *Lorsque $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la norme la valeur absolue ou le module, et on retrouve bien la convergence absolue des séries numériques.*

Remarque. *On ne confondra pas la convergence absolue de $\sum u_n$ dans $(E, \|\cdot\|)$ evn de dimension finie, avec la convergence normale de $\sum f_n$ dans l'espace $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ des fonctions bornées, qui est la convergence de la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$.*

Théorème.

Dans E espace vectoriel normé de dimension finie, si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge.

Preuve. Une justification est proposée en annexe. □

2 Application : séries de matrices, séries d'endomorphismes

2.1 Exponentielle de matrice, d'endomorphisme en dimension finie

Définition.

- Pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on définit :

$$\exp(A) = \mathrm{e}^A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

- Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, on définit :

$$\exp(u) = \mathrm{e}^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} u^n$$

2.2 Exemples

Proposition. Si $D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_p \end{pmatrix}$ est diagonale, alors $\exp(D) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{a_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{e}^{a_p} \end{pmatrix}$.

Proposition. Si $T = \begin{pmatrix} a_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & a_p \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure, alors $\exp(T)$ est de la forme :

$$\exp(T) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{a_1} & * & \cdots & * \\ 0 & \mathrm{e}^{a_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \mathrm{e}^{a_p} \end{pmatrix}$$

Proposition. Si $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors $\exp(N) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} N^k$.

2.3 Propriétés

Proposition. Soit $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ deux matrices semblables, et $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$. Alors :

$$\exp(A) = P \exp(B) P^{-1}$$

Corollaire. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Alors $\mathrm{Sp}(\exp(A)) = \{\mathrm{e}^\lambda,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$.

Proposition.

- L'application $\exp\ \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est continue.
- Pour E evn de dimension finie, $\exp\ \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ est continue.

Proposition. Soit $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, telles que $AB = BA$.

- $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$
- $\exp(A)$ est inversible et $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

Proposition. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ où E est un evn de dimension finie, tels que $u \circ v = v \circ u$.

- $\exp(u + v) = \exp(u) \circ \exp(v) = \exp(v) \circ \exp(u)$
- $\exp(u)$ est inversible et $\exp(u)^{-1} = \exp(-u)$.

Remarque. *En pratique, pour calculer $\exp(A)$ lorsque A est quelconque, on décompose A sous la forme $A = D + N$ où D est diagonalisable, N nilpotente et $ND = DN$. Ce résultat n'étant pas au programme, on se laisse guider par l'énoncer.*

3 Annexe : pourquoi la convergence absolue implique la convergence

Théorème.

> Dans E espace vectoriel normé de dimension finie, si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge.

Preuve. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Les normes sur E étant équivalentes, on peut choisir comme norme :

$$\|x\|_\infty = \operatorname*{Max}_{i=1}^{p} |x_i|$$

où $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ est l'écriture de x comme C.L. de $\mathcal{B}$.
On note $(u_n^{(i)})_n$ les suites coordonnées de $(u_n)_n$, et on remarque que, pour tout i :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n^{(i)}| \leqslant \|u_n\|_\infty$$

Par majoration, on a donc établi que, pour tout i, $\sum |u_n^{(i)}|$ converge, c'est-à-dire que la série numérique $\sum u_n^{(i)}$ converge absolument, donc converge. Ceci suffit à conclure. $\square$

Exercices et résultats classiques à connaître

Exponentielle d'une matrice antisymétrique

57.1

Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer $\exp \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminant de l'exponentielle d'une matrice

57.2

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A))$$

L'exponentielle d'une matrice est un polynôme de cette matrice

57.3

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Montrer que $\exp(A)$ est un polynôme de A.

Exercices du CCINP

57.4 CCINP 40

Soit A une algèbre de dimension finie admettant e pour élément unité et munie d'une norme notée $|| \, ||$.
On suppose que : $\forall (u,v) \in A^2$, $||u.v|| \leqslant ||u||.||v||$.

1. Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.
   (a) Démontrer que la série $\sum u^n$ est convergente.
   (b) Démontrer que $(e-u)$ est inversible et que $(e-u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.
2. Démontrer que, pour tout $u \in A$, la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ converge.

57.5 CCINP 54.22

Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent vers 0.

2. On pose : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $||u|| = \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
   (b) Prouver que : $\forall\, u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, $\sum \frac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.

57.6 CCINP 61.23

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose : $\|A\| = \operatorname*{Max}_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} |a_{i,j}|$.

2. Démontrer que : $\forall\, (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$, $\|AB\| \leqslant n\,\|A\|\,\|B\|$.
   Puis, démontrer que, pour tout entier $p \geqslant 1$, $\|A^p\| \leqslant n^{p-1}\,\|A\|^p$.
3. Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum \frac{A^p}{p!}$ est absolument convergente.
   Est-elle convergente ?

Exercices

57.7

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Montrer que $\exp(A)^\top = \exp(A^\top)$.

57.8

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie p. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$ tel que :

$$\exp(u) = P(u)$$

Petits problèmes d'entrainement

57.9 ✍

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, et $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ qui vérifie, pour tout $M, N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$:

$$\|MN\| \leqslant \|M\|\|N\|$$

On suppose que $\|A\| < 1$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$

(b) Montrer que $\sum A^k$ converge absolument.

(c) Montrer que $I_p - A$ est inversible et que $(I_p - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$.

57.10

On propose dans cet exercice une autre démonstation du théorème affirmant que toute série absolument convergente d'un evn de dimension finie converge.

On considère E, muni d'une norme $\|\cdot\|$, et $\sum u_n$ une série que l'on suppose absolument convergente. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

(a) Montrer que $(S_n)_n$ est bornée.

Comme E est de dimension finie, on peut donc extraire de $(S_n)_n$ une suite $(S_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers une limite ℓ.

(b) Montrer que la suite $(S_n - S_{\varphi(n)})_n$ converge vers 0_E.

(c) Montrer que $\sum u_n$ converge.

57.11

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que :

$$\left(\mathrm{Id}_E + \frac{1}{n}u\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(u)$$

Indication : Comparer $\dfrac{1}{k!}$ et $\dfrac{\binom{n}{k}}{n^k}$.

57.12

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Comparer les espaces :

$$\mathrm{Ker}(N) \text{ et } \mathrm{Ker}(\exp(N) - I_n)$$

57.13

Soit $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\left(\exp\left(\frac{A}{N}\right)\exp\left(\frac{B}{N}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(A+B)$$

57.14

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, et $\|\cdot\|$ une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On suppose que $\|A\| < 1$.

(a) Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k$.

(b) Calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} kA^{k-1}$.

57.15

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre les trois propositions suivantes :

(i) Toute valeur propre de M est en module < 1 ;

(ii) La suite $(A^n)_n$ tend vers 0 ;

(iii) La série $\sum A^n$ converge.