

Diagonalisation

Je me souviens	2
-----------------------	----------

Cours	3
1 Éléments propres d'un endomorphisme	3
1.1 Définition	3
1.2 Propriétés	3
1.3 Exemples	3
1.4 En dimension finie	4
2 Éléments propres d'une matrice carrée	4
2.1 Définition	4
2.2 Critère d'inversibilité	4
2.3 Un mot sur le corps de base	5
3 Éléments propres d'une matrice carrée représentant un endomorphisme	5
3.1 Lien entre matrice et endomorphisme	5
3.2 Éléments propres et matrices semblables	5
4 Polynôme caractéristique	5
4.1 Polynôme caractéristique d'une matrice	5
4.2 Multiplicité, propriétés	6
4.3 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme	6
4.4 Polynôme caractéristique et sous-espace stable	7
5 Diagonalisabilité	7
5.1 Diagonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie	7
5.2 Diagonalisabilité d'une matrice carrée	8
5.3 Le théorème spectral	8
5.4 Des exemples	8
6 Annexes	9
6.1 Annexe : une démonstration élégante de somme directe.	9

Exercices	10
Exercices et résultats classiques à connaître	10
La matrice pleine de 1	10
Autour de la matrice compagnon	10
Un endomorphisme matriciel	10
Un exemple d'équation matricielle	11
Diagonalisation simultanée	11
Réduction d'une matrice circulante	11
Exercices du CCINP	12
Exercices	13
Petits problèmes d'entraînement	15

Je me souviens

1. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, quel est l'endomorphisme canoniquement associé ?
2. Que signifie : « F_1, \dots, F_p sont en somme directe » ?

1 Éléments propres d'un endomorphisme

1.1 Définition

Définition. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est **valeur propre** de u lorsqu'il existe x non nul tel que :

$$u(x) = \lambda x$$

On dit alors que x est **vecteur propre** de u associé à la valeur propre λ .

Remarque. *Insistons : il faut qu'il existe un vecteur **non nul** tel que...*

Remarque. *Un vecteur propre, c'est un vecteur non nul tel que $u(x)$ est colinéaire à x .*

Définition. On appelle **équation aux éléments propres** l'équation :

$$u(x) = \lambda x$$

où l'on cherche les valeurs de λ pour lesquelles il existe des solutions x non nuls à l'équation, et on cherche ces solutions aussi.

Définition. Si λ est une valeur propre de u , on appelle **sous-espace propre associé à λ** l'espace :

$$\begin{aligned} E_\lambda(u) &= \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \\ &= \{x \in E, u(x) = \lambda x\} \end{aligned}$$

1.2 Propriétés

Proposition. x est un vecteur propre de u si et seulement si la droite vectorielle $\text{Vect}(x)$ est stable par u .

Théorème.

Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe. Plus précisément : si E est un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$, et si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres deux à deux distinctes de u , alors la somme $E_{\lambda_1}(u) + \dots + E_{\lambda_p}(u)$ est directe. On l'écrit donc :

$$E_{\lambda_1}(u) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}(u) \quad \text{ou encore} \quad \bigoplus_{k=1}^p E_{\lambda_k}(u)$$

Théorème.

Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. Plus précisément : si E est un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$, et si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres λ_i deux à deux distinctes, alors $(x_i)_{i \in I}$ est libre.

Corollaire. Si E est de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors u admet au plus n valeurs propres distinctes.

Proposition. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$, avec $u \circ v = v \circ u$. Alors :

- Tout sous-espace propre de u est stable par v
- $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont stables par v

1.3 Exemples

Exemple. Soit E un espace vectoriel. Déterminer les éléments propres de :

1. p projecteur de E
2. s symétrie de E
3. h homothétie de rapport k

Exemple. Déterminer les éléments propres de :

1. $u : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$
 $P \mapsto P'$
2. $v : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
 $f \mapsto f'$

Exemple. Donner un exemple simple d'endomorphisme du plan euclidien usuel qui n'a aucune valeur propre.

1.4 En dimension finie

Remarque. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\begin{aligned}
 \lambda \text{ valeur propre de } u &\iff \exists x \neq 0_E, u(x) = \lambda x \\
 &\iff \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\} \\
 &\iff u - \lambda \text{Id}_E \text{ non injective} \\
 &\iff u - \lambda \text{Id}_E \text{ non bijective} \quad \text{car } u \text{ endomorphisme de } E \text{ qui est de dimension finie.}
 \end{aligned}$$

Définition. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **spectre de u** :

$$\begin{aligned}
 \text{Sp}(u) &= \{\lambda \in \mathbb{K}, u - \lambda \text{Id}_E \notin \text{GL}(E)\} \\
 &= \{\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \text{ valeur propre de } u\}
 \end{aligned}$$

Proposition. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$u \in \text{GL}(E) \iff 0 \notin \text{Sp}(u)$$

2 Éléments propres d'une matrice carrée

2.1 Définition

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les éléments propres de A sont les éléments propres de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ qui lui est canoniquement associé :

$$\begin{aligned}
 u_A : \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) &\rightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\
 X &\mapsto AX
 \end{aligned}$$

Ainsi, λ est une **valeur propre de A** s'il existe une matrice colonne non nulle X telle que $AX = \lambda X$. On dit alors que X est un **vecteur propre de A , associé à λ** . L'espace $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$ est l'**espace propre associé à λ** , et l'équation :

$$AX = \lambda X$$

est l'**équation aux éléments propres**. Le **spectre de A** , noté $\text{Sp}(A)$, est l'ensemble des valeurs propres de A .

2.2 Critère d'inversibilité

Proposition. Avec les notations de la définition :

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff 0 \notin \text{Sp}(A)$$

2.3 Un mot sur le corps de base

Remarque. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On peut donc chercher les valeurs propres réelles ou les valeurs propres complexes de A . On note $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et on a :

$$\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$$

Exemple. Déterminer les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Proposition. Plus généralement, si \mathbb{K} est un sous-corps de \mathbb{K}' et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \subset \text{Sp}_{\mathbb{K}'}(A)$.

3 Éléments propres d'une matrice carrée représentant un endomorphisme

3.1 Lien entre matrice et endomorphisme

Proposition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , \mathcal{B} une base de E , $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \text{Mat}(u, \mathcal{B})$.

- Les valeurs propres de A sont les valeurs propres de u :

$$\text{Sp}(A) = \text{Sp}(u)$$

- Les vecteurs propres de A sont les matrices des vecteurs propres de u :

$$\begin{aligned} X \in E_{\lambda}(A) &\iff AX = \lambda X \\ &\iff u(x) = \lambda x \\ &\iff x \in E_{\lambda}(u) \end{aligned}$$

où $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.

3.2 Éléments propres et matrices semblables

Proposition. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables, $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

- Les valeurs propres de A sont les valeurs propres de B :

$$\text{Sp}(A) = \text{Sp}(B)$$

- Les vecteurs propres de A et les vecteurs propres de B sont liés par la formule de changement de base :

$$\begin{aligned} X \in E_{\lambda}(A) &\iff AX = \lambda X \\ &\iff PBP^{-1}X = \lambda X \\ &\iff B(P^{-1}X) = \lambda(P^{-1}X) \\ &\iff P^{-1}X \in E_{\lambda}(B) \end{aligned}$$

$X \mapsto P^{-1}X$ est un isomorphisme de $E_{\lambda}(A) \rightarrow E_{\lambda}(B)$.

4 Polynôme caractéristique

4.1 Polynôme caractéristique d'une matrice

Définition. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit :

$$\chi_A = \det(XI_n - A) \in \mathbb{K}[X]$$

appelé le **polynôme caractéristique** de A .

Proposition. χ_A est de degré n et on connaît *a priori* quelques coefficients :

$$\chi_A = \det(XI_n - A) = X^n - \operatorname{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$$

Proposition. Les valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les racines de son polynôme caractéristique χ_A .

Exemple. Déterminer les valeurs propres de :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition. Soit A diagonale ou triangulaire :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \spadesuit & \cdots & \cdots & \spadesuit \\ 0 & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \spadesuit \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\chi_A = \prod_{i=1}^n (X - a_{ii})$$

Corollaire. Les valeurs propres d'une matrice diagonale, d'une matrice triangulaire, sont les coefficients diagonaux de la matrice.

4.2 Multiplicité, propriétés

Définition. On dit que λ est valeur propre de A **de multiplicité** m lorsque λ est racine de multiplicité m de χ_A .

Proposition. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet au plus n valeurs propres, comptées avec multiplicité.

Proposition. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le nombre de valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, comptées avec multiplicité, est n .

Proposition. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et n impair, alors $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$.

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est valeur propre de A , alors $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre de A , avec même multiplicité.

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A et A^T ont le même polynôme caractéristique, et donc les mêmes valeurs propres.

Remarque. A et A^T ont les mêmes valeurs propres, mais pas les mêmes vecteurs propres. On peut cependant montrer que, pour λ valeur propre, $E_{\lambda}(A)$ et $E_{\lambda}(A^T)$ ont la même dimension.

4.3 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Proposition. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Définition. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **polynôme caractéristique de u** le polynôme caractéristique de toute matrice représentant u dans une base.

4.4 Polynôme caractéristique et sous-espace stable

Lemme. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme, et F un sous-espace vectoriel de E stable par u . On note u_F l'endomorphisme induit par u sur F .
Alors χ_{u_F} divise χ_u .

Théorème.

La dimension d'un sous-espace propre est au plus égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante :

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie, si $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et si $m(\lambda)$ désigne la multiplicité de λ , alors :

$$1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m(\lambda)$$

Le résultat se traduit aussi matriciellement.

Corollaire. Si λ est une valeur propre de multiplicité 1, alors le sous-espace propre associé est une droite vectorielle, c'est-à-dire est de dimension 1.

5 Diagonalisabilité

5.1 Diagonalisabilité d'un endomorphisme en dimension finie

Définition. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **diagonalisable** s'il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}(u, \mathcal{B})$ soit diagonale.

Cela revient à dire qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u .

Caractérisation.

Soit E espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est diagonalisable si et seulement si E est somme (directe) des sous-espaces propres de u :

$$\begin{aligned} u \text{ diagonalisable} &\iff \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E \\ &\iff \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u)) = n \end{aligned}$$

Caractérisation.

Soit E espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est diagonalisable si et seulement si

- χ_u est scindé
- chaque sous-espace propre a pour dimension la multiplicité de la valeur propre associée

Remarque. Ça signifie que l'on peut écrire :

$$\chi_u = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m_i}, \quad \text{avec les } \lambda_i \text{ distincts}$$

et

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \dim(E_{\lambda_i}(u)) = m_i$$

Corollaire. Soit E espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u admet n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable. Et ses sous-espace propres sont des droites vectorielles.

Remarque. C'est bien une condition suffisante, non nécessaire.

5.2 Diagonalisabilité d'une matrice carrée

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **diagonalisable** si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale :

$$\exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ diagonale}, \exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{K}), A = PDP^{-1}$$

Remarque. Les coefficients de D sont les valeurs propres de A , avec multiplicité.

Les propriétés vues pour les endomorphismes se traduisent matriciellement :

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\begin{aligned} A \text{ diagonalisable} &\iff \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} E_\lambda(A) = \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ &\iff \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n \\ &\iff \begin{cases} \chi_A \text{ est scindé} \\ \forall \lambda \in \text{Sp}(A), \dim(E_\lambda(A)) = m(\lambda) \end{cases} \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\chi_A \text{ est scindé à racines simples} \implies A \text{ diagonalisable}$$

Enfin, si $A = \text{Mat}(u, \mathcal{B})$,

$$A \text{ est diagonalisable} \iff u \text{ diagonalisable}$$

Remarque. Diagonaliser A , c'est trouver une matrice de passage P et une matrice D diagonale telle que $A = PDP^{-1}$.
Sauf si c'est demandé, on ne calcule pas P^{-1} .

Proposition. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$A \text{ diagonalisable} \iff A^\top \text{ diagonalisable}$$

5.3 Le théorème spectral

On démontrera et on complètera plus tard le résultat suivant :

Proposition. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique à coefficients réels, alors A est diagonalisable.

5.4 Des exemples

Exemple. Diagonaliser $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, matrice pleine de 1.

Exemple. Diagonaliser $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où $a_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{si } i = j \\ \beta & \text{sinon} \end{cases}$

Exemple. On considère $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer une base de $\text{Ker } B$ et une base de $\text{Im } B$. Puis montrer que B est diagonalisable.

6 Annexes

6.1 Annexe : une démonstration élégante de somme directe.

Théorème.

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des scalaires deux à deux distincts, et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors la somme des $F_k = \text{Ker}(u - \lambda_k \text{Id}_E)$ est directe :

$$\sum_{k=1}^p \text{Ker}(u - \lambda_k \text{Id}_E) = \bigoplus_{k=1}^p \text{Ker}(u - \lambda_k \text{Id}_E)$$

Preuve. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_p$ tels que $x_1 + x_2 + \dots + x_p = 0$.

En appliquant à cette égalité u , puis u^2 , ..., puis u^{p-1} , on obtient :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_p = 0 & (L_0) \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p = 0 & (L_1) \\ \vdots \\ \lambda_1^{p-1} x_1 + \lambda_2^{p-1} x_2 + \dots + \lambda_p^{p-1} x_p = 0 & (L_{p-1}) \end{cases}$$

Tout polynôme $P \in \mathbb{K}_{p-1}[X]$ s'écrit $P = \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$. En effectuant $a_0(L_0) + a_1(L_1) + \dots + a_{p-1}(L_{p-1})$, on obtient :

$$P(\lambda_1)x_1 + P(\lambda_2)x_2 + \dots + P(\lambda_p)x_p = 0$$

Cette égalité est vraie pour tout polynôme de $\mathbb{K}_{p-1}[X]$, donc en particulier pour les polynômes d'interpolation de Lagrange L_k associés à $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$, qui satisfont :

$$\begin{cases} L_k(\lambda_k) = 1 \\ L_k(\lambda_i) = 0 \text{ pour } i \neq k \end{cases}$$

ce qui fournit $x_k = 0$ pour tout k .

On a montré que les $\text{Ker}(u - \lambda_k \text{Id}_E)$ sont en somme directe. \square

Exercices et résultats classiques à connaître

La matrice pleine de 1

240.1

Déterminer les éléments propres de :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Autour de la matrice compagnon

240.2

Soit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire. On appelle **matrice compagnon** de P la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

- (a) Montrer que P est le polynôme caractéristique de C .
- (b) On suppose dans cette question que P est scindé à racines simples, notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Montrer que :

$$C^\top = V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)^{-1}$$

où $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ désigne la matrice de Vandermonde de $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Un endomorphisme matriciel

240.3

On considère les matrices réelles :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- (a) Calculer $AM - MA$.
- (b) Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme :

$$M \mapsto AM - MA$$

Un exemple d'équation matricielle

240.4

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On propose de résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation : $(E) : X^2 + X = A$.

- Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.
- Déterminer les matrices $Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $Y^2 + Y = D$. On commencera pour cela par montrer qu'une telle matrice Y commute avec D , et par en déduire que c'est une matrice diagonale.
- Résoudre alors l'équation (E) .

Diagonalisation simultanée

240.5

Dans un espace vectoriel E de dimension finie, on considère deux endomorphismes u et v diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$.

- Montrer que les sous-espaces propres de v sont stables par u .
- Montrer que l'endomorphisme induit de u à un sous-espace propre de v est diagonalisable.
- Montrer qu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u et v .

Réduction d'une matrice circulante

240.6

On considère, pour $n \geq 2$, la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

- Montrer que la matrice J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

(b) Application : calculer, pour $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$,

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix}$$

Exercices du CCINP

240.7
 **59.13**

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n .


On pose : $\forall P \in E, f(P) = P - P'$.

- Démontrer que f est bijectif
 - en utilisant une matrice de f .
- f est-il diagonalisable ?

240.8
 **67**

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ où a, b, c sont des réels.

M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

240.9
 **68.111**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Démontrer que A est diagonalisable de ~~quatre~~ deux manières :
 - en calculant directement le déterminant $\det(\lambda I_3 - A)$, où I_3 est la matrice identité d'ordre 3, et en déterminant les sous-espaces propres,
 - en utilisant le rang de la matrice,

240.10
 **69**

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

- Déterminer le rang de A .

- Pour quelles valeurs de a , la matrice A est-elle diagonalisable ?

240.11
 **70.1**

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A . A est-elle diagonalisable ?

240.12
 **72**

Soit n un entier naturel non nul.

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n , et soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = \dots = f(e_n) = v$, où v est un vecteur donné de E .

- Donner le rang de f .
- f est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur v)

240.13
 **73**

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

- Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A .
- Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.
En déduire que l'ensemble des matrices qui commutent avec A est $\text{Vect}(I_2, A)$.

240.14
 **74**

- On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.

- (b) Déterminer les valeurs propres de A puis une base de vecteurs propres associés.

2. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = x + 2z \\ y' = y \\ z' = 2x + z \end{cases}$ où x, y, z désignent trois fonctions de la variable t , dérivables sur \mathbb{R} .

En utilisant la question 1. et en le justifiant, résoudre ce système.

240.15



Soit u et v deux endomorphismes d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E .

- Soit λ un réel non nul. Prouver que si λ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est valeur propre de $v \circ u$.
- On considère, sur $E = \mathbb{R}[X]$ les endomorphismes u et v définis par $u : P \mapsto \int_1^X P$ et $v : P \mapsto P'$.
Déterminer $\text{Ker}(u \circ v)$ et $\text{Ker}(v \circ u)$. Le résultat de la question 1. reste-t-il vrai pour $\lambda = 0$?
- Si E est de dimension finie, démontrer que le résultat de la première question reste vrai pour $\lambda = 0$.

Indication : penser à utiliser le déterminant.

240.16



On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
- La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

240.17



2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.

- (b) Prouver que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.

- (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.

Remarque : le calcul de P^{-1} n'est pas demandé.

Exercices

240.18

Soit $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

- Déterminer les valeurs propres de A .
- Déterminer une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.
- Quelle est la limite de $(A^n)_n$?

240.19

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Déterminer les valeurs propres réelles de A . La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$?
- Déterminer les valeurs propres complexes de A . La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$?

240.20

Soit a, b réels,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

- (a) Montrer que A est diagonalisable, et préciser une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
- (b) Exprimer $P^{-1}M(a, b)P$ en fonction de a et b .
- (c) En déduire le déterminant et le spectre de $M(a, b)$.

240.21

Déterminer les éléments propres de :

- (a) $D : f \mapsto f'$ sur $E = \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.
- (b) $\Delta : (u_n)_n \mapsto (u_{n+1} - u_n)_n$ sur E ensemble des suites réelles qui convergent vers 0.

240.22

Déterminer les éléments propres de :

$$\begin{aligned} \tau : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto M^\top \end{aligned}$$

240.23

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si ses coefficients sont des réels ≥ 0 , et si la somme des coefficients de chacune de ses lignes est égale à 1.

- (a) Démontrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A , alors $|\lambda| \leq 1$.
- (b) Démontrer que 1 est valeur propre et donner un vecteur propre associé.

240.24

Déterminer les réels x, y tq $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ soit vecteur propre de $\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

240.25

Soit u un automorphisme d'un \mathbb{K} -e.v. E . Montrer que :

$$\text{Sp}(u^{-1}) = \left\{ \frac{1}{\lambda}, \lambda \in \text{Sp}(u) \right\}$$

240.26

Déterminer les éléments propres de :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

240.27

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit :

$$\varphi(P) = (X - 1)(X - 2)P' - 2XP$$

- (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
- (b) Soit P un vecteur propre de φ . Déterminer le degré de P .
- (c) Écrire la matrice M de l'endomorphisme induit par φ sur $\mathbb{R}_2[X]$, dans la base $(1, (X - 1), (X - 1)^2)$.
- (d) Déterminer les éléments propres de φ .

240.28

Soit $n \geq 3$, $a \in \mathbb{C}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Quel est le rang de M ? Préciser $\text{Ker } M$ et $\text{Im } M$.
- (b) Donner les valeurs propres de M .
- (c) La matrice M est-elle diagonalisable?

Petits problèmes d'entraînement

240.29

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $p \geq 1$, $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

$$u \circ v - v \circ u = u$$

(a) Montrer que $\text{tr}(u) = 0$.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u^n \circ v - v \circ u^n = nu^n$$

(c) Montrer que $\phi : f \mapsto f \circ v - v \circ f$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

(d) En déduire, en utilisant la dimension de $\mathcal{L}(E)$, que u est nilpotent.

240.30

On considère $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, et $x \geq 0$, on pose :

$$T_f(x) = \begin{cases} f(0) & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que $T : f \mapsto T_f$ est un endomorphisme de E .

(b) Déterminer les éléments propres de T .

240.31

(a) Montrer qu'une matrice nilpotente est de trace nulle.

(b) On considère $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer, sans calculer de polynôme caractéristique, qu'il existe λ réel tel que $A - \lambda I_3$ soit nilpotente.

240.32

Soit u un endomorphisme de E \mathbb{K} -espace vectoriel.

- (a) Montrer que tout sous-espace propre associé à une valeur propre non nulle est inclus dans $\text{Im } u$.
- (b) Montrer que tout vecteur propre de u est dans $\text{Im } u$ ou dans $\text{Ker } u$.
- (c) Montrer que, pour que u soit diagonalisable, il est nécessaire que $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$.
- (d) Montrer qu'avec $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $u : P \mapsto P - P'$, on a $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$ mais u n'est pas diagonalisable.

240.33

(a) Montrer que l'application définie par :

$$\varphi(P) = (X^2 - 1)P'(X) - (4X + 1)P(X)$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$.

(b) Résoudre l'équation différentielle :

$$y' = \left(\frac{5 + \lambda}{2(x - 1)} + \frac{3 - \lambda}{2(x + 1)} \right) y$$

(c) En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de φ .

240.34

Soient u endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 2$. On suppose que E est le seul sous-espace vectoriel non nul stable par u .

- (a) L'endomorphisme u possède-t-il des valeurs propres ?
- (b) Montrer que pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E . Quelle est la forme de la matrice de u dans cette base ?
- (c) Montrer que cette matrice ne dépend pas du choix de x .

240.35

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et les matrices définies par blocs dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$:

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & -I_n \end{pmatrix}$$

- (a) Que vaut P^2 ? En déduire que P est inversible et donner P^{-1} .
- (b) Préciser la matrice $B' = P^{-1}BP$.
- (c) Montrer que $\text{Sp}(B) = \text{Sp}(A) \cup \{0\}$.
- (d) Pour $\lambda \in \text{Sp}(B)$, préciser $\dim \text{Ker}(B' - \lambda I_{2n})$ en fonction de $\dim \text{Ker}(A - \lambda I_n)$.
- (e) En déduire que B est diagonalisable si et seulement si A l'est.

240.36

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et la matrice définie par blocs dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Montrer que $\lambda \in \text{Sp}(B)$ si et seulement si $\lambda^2 \in \text{Sp}(A)$ et comparer dans ce cas $\dim \text{Ker}(B - \lambda I_{2n})$ et $\dim \text{Ker}(A - \lambda^2 I_n)$.
- (b) En déduire que B est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et inversible.

240.37

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E . On note :

$$C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = g \circ f\}$$

On suppose que f est diagonalisable.

- (a) Montrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
- (b) Pour $g \in \mathcal{L}(E)$, montrer que $g \in C(f)$ si et seulement si chaque sous-espace propre de f est stable par g .
- (c) En déduire que :

$$\dim C(f) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} m_\lambda^2$$

où m_λ désigne la multiplicité de λ dans le polynôme χ_f .

240.38

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- (a) Montrer que, si $\text{rg}(A) < n - 1$, alors $(\text{Com } A)^\top = 0$.
- (b) Montrer que les vecteurs propres de A sont aussi vecteurs propres de $(\text{Com } A)^\top$.
- (c) Que dire de $(\text{Com } A)^\top$ et de $\text{Com } A$ lorsque A est diagonalisable?

240.39

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E . On suppose que I a au moins deux éléments.

- (a) Montrer que, si les f_i commutent deux à deux, ils sont simultanément diagonalisables, c'est-à-dire qu'il existe une base de E formée de vecteurs qui sont vecteurs propres de chacun des f_i .
On pourra raisonner par récurrence sur la dimension de E , et écarter le cas où tous les f_i sont des homothéties.
- (b) Soit u, v deux endomorphismes diagonalisables qui commutent. Montrer que, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda u + \mu v$ est diagonalisable.
- (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, G un sous-groupe de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $M^2 = I_n$ pour tout $M \in G$. Montrer que $\text{Card}(G) \leq 2^n$. En déduire que, pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$, $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\text{GL}_m(\mathbb{K})$ sont isomorphes si et seulement si $n = m$.

240.40

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique, c'est-à-dire satisfaisant :

$$\begin{cases} 0 \leq a_{ij} \leq 1 & \forall i, j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 & \forall i \end{cases}$$

- (a) Montrer que 1 est valeur propre de A .
- (b) Établir que :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A), \exists i \text{ t.q. } |\lambda - a_{ii}| \leq 1 - a_{ii}$$

En déduire que :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n BF(a_{ii}, 1 - a_{ii})$$

240.41

Pour $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on pose $T(u) = v$ où :

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$$

Déterminer les éléments propres de T .

240.42

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie et muni d'une base \mathcal{B} , $f \in \mathcal{L}(E)$ et H un hyperplan de E . On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

(a) Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel :

$$\{u \in E^* \text{ t.q. } u(H) = \{0\}\}$$

(b) Montrer que si H a pour équation $u(x) = 0$ alors H est stable par f si et seulement si, $u \circ f$ est colinéaire à u .

(c) Soient A et L les matrices dans \mathcal{B} de f et u . Montrer que H est stable par f si, et seulement si, L^{\top} est vecteur propre de A^{\top} .

(d) Déterminer les plans stables par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$