

## Suites et séries de fonctions à valeurs dans un evn de dimension finie

<b>Cours</b>	<b>2</b>
1 Suites de fonctions . . . . .	2
1.1 Convergence simple . . . . .	2
1.2 Interlude : la norme infinie sur un evn de dimension finie . . . . .	2
1.3 Convergence uniforme . . . . .	2
1.4 Convergence uniforme sur tout compact . . . . .	3
1.5 Continuité de la limite . . . . .	3
1.6 Théorème de la double limite . . . . .	3
1.7 Intégration sur un segment/primitivation et convergence uniforme . . . . .	4
1.8 Limite d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ . . . . .	4
1.9 Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ . . . . .	5
2 Séries de fonctions . . . . .	6
2.1 Convergence simple . . . . .	6
2.2 Convergence uniforme . . . . .	6
2.3 Convergence normale . . . . .	6
2.4 Transfert de continuité . . . . .	7
2.5 Théorème de la double limite . . . . .	7
2.6 Primitivation, intégration terme à terme sur un segment et convergence uniforme . . . . .	8
2.7 Somme d'une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ . . . . .	9
2.8 Extension aux fonctions de classes $\mathcal{C}^k$ . . . . .	9
3 Annexes . . . . .	10
3.1 Annexe : équivalence des $N_\infty$ . . . . .	10
<b>Exercices</b>	<b>11</b>
Petits problèmes d'entraînement . . . . .	11

On reprend essentiellement dans ce chapitre la théorie des suites et des séries de fonctions à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et on l'adapte aux fonctions entre deux evn de dimensions finies.

## 1 Suites de fonctions

### 1.1 Convergence simple

**Définition.** Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions définies sur  $A$  partie de  $E$  evn de dimension finie, à valeurs dans  $F$  evn de dimension finie, et  $f : A \rightarrow F$  une fonction. On dit que  $(f_n)_n$  **converge simplement vers  $f$  sur  $A$**  si et seulement si, pour tout  $x \in A$  fixé :

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$$

**Remarque.**

- Pour faire l'étude pratique de la convergence simple, on commence par fixer  $x \in A$ , et on étudie la suite (vectorielle, d'éléments de  $F$ )  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ .
- On peut quantifier cette définition par :

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N, \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon$$

### 1.2 Interlude : la norme infinie sur un evn de dimension finie

**Définition.** Soit  $F$  un evn de dimension finie, et  $A \subset E$  une partie d'un evn de dimension finie. On définit sur  $\mathcal{B}(A, F)$ , l'espace des fonctions bornées  $A \rightarrow F$ , la **norme infinie** en posant, pour  $f \in \mathcal{B}(A, F)$  :

$$N_\infty(f) = \sup_{x \in A} (\|f(x)\|_F)$$

**Proposition.** Si on change la norme de  $F$  en une norme qui lui est équivalente, on change la norme  $N_\infty$  en une norme qui lui est équivalente.

**Remarque.** On suppose  $F$  de dimension finie, et donc  $\|\cdot\|_F^1$  et  $\|\cdot\|_F^2$  sont automatiquement équivalentes. La proposition précédente permet de justifier que  $N_\infty^1$  et  $N_\infty^2$  sont toujours équivalentes, même si l'espace vectoriel  $\mathcal{B}(A, F)$  n'est pas de dimension finie.

### 1.3 Convergence uniforme

**Définition.** Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions définies sur  $A$  partie de  $E$  evn de dimension finie, à valeurs dans  $F$  evn de dimension finie, et  $f : A \rightarrow F$  une fonction. On dit que  $(f_n)_n$  **converge uniformément vers  $f$  sur  $A$**  si et seulement si la suite numérique  $(N_\infty(f_n - f))_n$  converge vers 0.

**Remarque.**

- Pour que cette définition ait un sens, on doit naturellement supposer que, au moins à partir d'un certain rang, la fonction  $f - f_n$  soit bornée sur  $A$ .
- On peut quantifier la définition :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N, \forall x \in A, \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon$$

**Théorème.**

La convergence uniforme implique la convergence simple.

**Étude pratique pour montrer la convergence uniforme.**

- On commence par déterminer la limite simple de  $(f_n)_n$ , notée  $f$ .
- On cherche à majorer  $\|f_n(x) - f(x)\|_F$  **indépendamment** de  $x \in A$  par une suite numérique qui converge vers 0.
- Le calcul explicite de  $N_\infty(f_n - f)$  est parfois possible.

**Étude pratique pour montrer la non-convergence uniforme.**

- On commence par déterminer la limite simple de  $(f_n)_n$ , notée  $f$ .
- S'il n'existe pas de rang à partir duquel  $f_n - f$  est bornée, la convergence ne peut pas être uniforme.
- On peut montrer le non-transfert à la limite d'une propriété, comme la continuité.
- On exhibe une suite  $(x_n)_n$  d'éléments de  $I$  telle que la suite  $(f_n(x_n) - f(x_n))_n$  ne converge pas vers 0.

**1.4 Convergence uniforme sur tout compact**

**Définition.** Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions  $A \subset E : F$  et  $f : A \rightarrow F$ .

On dit que  $(f_n)_n$  **converge vers  $f$  uniformément sur tout compact** si et seulement si pour tout compact  $K \subset A$ ,  $(f_n|_K)_n$  converge uniformément vers  $f|_K$  sur  $K$ .

**1.5 Continuité de la limite****Transfert de continuité par convergence uniforme****Théorème.**

Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions définies sur  $A \subset E$  à valeurs dans  $F$ .

Si :

- pour tout  $n$ ,  $f_n$  est continue en  $a$ ,
- $(f_n)_n$  converge uniformément sur  $A$  (ou sur un voisinage de  $a$ ) vers  $f$ ,

alors :

- $f$  est continue en  $a$ .

**Corollaire.** Si  $(f_n)_n$  converge simplement sur  $A$  vers  $f$ , que les  $f_n$  sont continues sur  $A$  mais que  $f$  n'est pas continue sur  $A$ , alors la convergence n'est pas uniforme sur  $A$ .

**Raisonnement classique.** Si  $(f_n)_n$  converge simplement sur  $A$  vers  $f$ , que les  $f_n$  sont continues sur  $A$  et qu'il y a convergence uniforme sur tout compact de  $A$ , alors  $f$  est continue sur tout compact de  $A$  donc sur  $A$ .

**1.6 Théorème de la double limite****Théorème de la double limite.**

Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions définies sur  $A \subset E$  à valeurs dans  $F$  et  $a$  un point adhérent à  $A$ .

Si :

- pour tout  $n$ ,  $f_n(x)$  admet une limite finie  $\ell_n$  lorsque  $x \rightarrow a$ ,
- $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $I$ ,

alors :

- la suite  $(\ell_n)_n$  converge vers  $\ell \in \mathbb{R}$ ,
- $f(x)$  admet une limite lorsque  $x \rightarrow a$ ,
- cette limite est égale à  $\ell$ .

**Remarque.**

- On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$$

qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites envisagées et de mode de convergence de la suite de fonctions.

- Le théorème s'applique aussi lorsque  $A \subset \mathbb{R}$  et que  $a = \pm\infty$  est adhérent à  $A$ .

## 1.7 Intégration sur un segment/primitivation et convergence uniforme

**Lemme.** Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions définies sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $F$ , et  $a \in I$ .

Si :

- $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$  sur tout segment  $K \subset I$ ,
- les  $f_n$  sont continues.

alors, en notant  $G_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$  et  $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ ,

- $(G_n)_n$  converge uniformément vers  $G$  sur tout segment de  $I$ .

**Remarque.** Ainsi, la convergence uniforme sur tout segment se transmet par primitivation, à condition de prendre les primitives qui s'annulent toutes en un même point  $a$  donné.

### **Théorème d'interversion limite-intégrale par cv uniforme sur un segment.**

Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions définies sur un segment  $[a, b]$ , à valeurs dans  $F$ .

Si :

- $(f_n)_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, b]$ ,
- $[a, b]$  est un segment,
- les  $f_n$  sont continues.

alors :

- la suite  $\left( \int_a^b f_n(t) dt \right)_n$  converge,
- $\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$

**Remarque.** On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt$$

qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites envisagées et de mode de convergence de la suite de fonctions.

## 1.8 Limite d'une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

### **Théorème de dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions.**

Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions définies sur  $I$  intervalle, à valeurs dans  $F$ .

Si :

- pour tout  $n$ ,  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ,

- $(f_n)_n$  converge simplement sur  $I$  vers  $f$ ,
- la suite des fonctions dérivées  $(f'_n)_n$  converge uniformément sur  $I$  vers une fonction  $g$ ,

alors :

- $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ,
- $f' = g$ .

### Remarque.

- On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\frac{d}{dx} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{d}{dx} f_n(x) \right)$$

qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites et dérivées envisagées.

- La convergence uniforme de  $(f_n)_n$  n'entraîne pas la dérivabilité de la limite.
- Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur  $I$  de  $(f'_n)_n$  par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de  $I$ , ou d'autres intervalles adaptés à la situation.

## 1.9 Extension aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

### Théorème.

Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions définie sur  $I$  intervalle, à valeurs dans  $F$ , et  $k \in \mathbb{N}^*$ .

Si :

- pour tout  $n$ ,  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ ,
- pour tout  $0 \leq j \leq k-1$ ,  $(f_n^{(j)})_n$  converge simplement sur  $I$  vers une fonction  $g_j$ ,
- la suite  $(f_n^{(k)})_n$  converge uniformément sur  $I$  vers une fonction  $g_k$ ,

alors :

- la limite simple  $g_0$  de  $(f_n)_n$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$
- pour tout  $1 \leq j \leq k$ ,  $g_0^{(j)} = g_j$ .

### Remarque.

- On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\frac{d^k}{dx^k} \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{d^k}{dx^k} f_n(x) \right)$$

qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites et dérivées envisagées.

- Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur  $I$  de  $(f_n^{(k)})_n$  par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de  $I$ , ou d'autres intervalles adaptés à la situation.
- Pour montrer que  $g_0$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , on montre la convergence simple de  $(f_n)_n$  et la convergence uniforme de toutes les  $(f_n^{(j)})_n$ , pour  $j \geq 1$ .

## 2 Séries de fonctions

### 2.1 Convergence simple

**Définition.** Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions  $A \subset E \rightarrow F$ . On dit que  $\sum f_n$  **converge simplement** si et seulement si, pour tout  $x \in A$  fixé, la série vectorielle  $\sum f_n(x)$  converge.

Dans ce cas, on définit :

$$\begin{aligned} S : A &\rightarrow F \\ x &\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \end{aligned}$$

appelée **somme** de la série de fonctions  $\sum f_n$ .

**Remarque.**

- La convergence simple est la convergence point à point. On rédige toujours l'étude de la convergence simple en travaillant « à  $x$  fixé ».
- Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on peut noter :

$$S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

Alors  $(S_n)_n$  la suite de fonctions des sommes partielles de  $\sum f_n$ , et la convergence simple de  $\sum f_n$  est équivalente à la convergence simple de  $(S_n)_n$ .

- En cas de convergence simple sur  $I$ , on note :

$$R_n : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = S(x) - S_n(x)$$

Alors la suite de fonctions  $(R_n)_n$  converge simplement vers la fonction constante nulle sur  $A$ .

- On peut rencontrer des séries de fonctions qui sont indexées par  $n \geq n_0$ .

### 2.2 Convergence uniforme

**Définition.** Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions :  $A \subset E \rightarrow F$ . On dit que  $\sum f_n$  **converge uniformément** sur  $A$  si et seulement si la suite de fonctions  $(S_n)_n$  de ses sommes partielles converge uniformément sur  $A$ .

**Remarque.** On peut quantifier la définition par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \text{ t.q. } \forall n \geq N, \forall x \in A, \left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right\|_F \leq \varepsilon$$

**Proposition.** La convergence uniforme d'une série de fonctions implique sa convergence simple.

**Théorème.**

$\sum f_n$  converge uniformément sur  $A$  si et seulement si :

$$\begin{cases} \sum f_n \text{ converge simplement sur } A \\ (R_n)_n \text{ converge uniformément sur } A \text{ vers } 0 \end{cases}$$

### 2.3 Convergence normale

**Définition.** Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions :  $A \subset E \rightarrow F$ . On dit que  $\sum f_n$  **converge normalement** sur  $A$  si et seulement si :

$$\begin{cases} f_n \text{ est bornée sur } A \text{ pour tout } n \\ \sum N_\infty(f_n) \text{ converge} \end{cases}$$

**Remarque.**

- On rappelle que  $N_\infty(f) = \sup_{x \in A} (\|f(x)\|_F)$ . Le premier point permet de garantir l'existence de  $N_\infty(f_n)$ .
- On peut donner une définition moins forte, en ne travaillant que pour  $n \geq n_0$ .
- Le second point est la convergence d'une série **numérique**.
- La convergence normale de  $\sum f_n$ , c'est la convergence de  $\sum N_\infty(f_n)$ .

**Théorème.**

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions :  $A \subset E \rightarrow F$ .

S'il existe une série numérique  $\sum \alpha_n$  convergente et majorante, c'est-à-dire telle que :

$$\forall n, \forall x, \|f_n(x)\|_F \leq \alpha_n$$

où  $\alpha_n$  est positive, indépendante de  $x$  et t.g. d'une série convergente, alors  $\sum f_n$  converge normalement.

**Proposition.** La convergence normale implique la convergence absolue en tout point.

**Proposition.** La convergence normale implique la convergence uniforme.

## 2.4 Transfert de continuité

**Théorème.**

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions :  $A \subset E \rightarrow F$ .

Si :

- $\sum f_n$  converge uniformément sur  $A$  (on note  $S$  sa somme),
- pour tout  $n$ ,  $f_n$  est continue sur  $A$ ,

alors :

- $S$  est continue sur  $A$ .

**Raisonnement classique.** Si  $\sum f_n$  converge uniformément sur tout compact  $K \subset A$ , et si les  $f_n$  sont continues sur  $A$ , alors  $S$  est continue sur tout  $K \subset A$  donc sur  $A$ .

**Exemple.**

- $\exp : \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  est continue sur  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ .
- Pour  $E$  espace vectoriel de dimension finie,  $\exp : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$  est continue sur  $\mathcal{L}(E)$ .

**Corollaire.** Une série entière  $\sum a_n z^n$  de variable complexe, dont le rayon de convergence est  $R$  :

- converge normalement sur tout disque  $DF(0, r)$  où  $r < R$ ;
- a une somme continue sur  $D(0, R)$ .

## 2.5 Théorème de la double limite

**Théorème de la double limite.**

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions :  $A \subset E \rightarrow F$  et  $a$  adhérent à  $A$ .

Si :

- $\sum f_n$  converge uniformément sur  $A$  (on note  $S$  sa somme),
- pour tout  $n$ ,  $f_n$  admet une limite  $\ell_n$  en  $a$ ,

alors :

- la série (vectorielle)  $\sum \ell_n$  converge (on note  $\ell$  sa somme),
- la fonction  $S$  admet une limite en  $a$ ,
- cette limite est égale à  $\ell$ .

**Remarque.** On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right)$$

mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries et d'existence des limites envisagées.

## 2.6 Primitivation, intégration terme à terme sur un segment et convergence uniforme

**Lemme.** Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions continues sur un intervalle  $I$  à valeurs dans  $F$ . Soit  $a \in I$ . Pour tout  $n$ , on note  $G_n$  la primitive de  $f_n$  qui s'annule en  $a$ .

Si :

- $\sum f_n$  converge uniformément sur tout segment  $K \subset I$  (on note  $S$  sa somme),

alors :

- la série  $\sum G_n$  converge uniformément sur tout segment  $K \subset I$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} G_n$  est la primitive de  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  qui s'annule en  $a$ .

**Théorème d'intégration terme à terme sur un segment par convergence uniforme.**

Soit  $a < b$ , et  $\sum f_n$  une série de fonctions définies sur un segment  $[a, b]$ , à valeurs dans  $F$ .  
Si :

- $\sum f_n$  converge uniformément sur  $[a, b]$  (on note  $S$  sa somme),
- $[a, b]$  est un segment,
- les  $f_n$  sont continues,

alors :

- la série  $\sum \left( \int_a^b f_n(t) dt \right)$  converge,
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b S(t) dt$

**Remarque.** On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt$$

Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries envisagées.



## 2.7 Somme d'une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

### Théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions.

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions définies sur  $I$ , à valeurs dans  $F$ .  
Si :

- $\sum f_n$  converge simplement sur  $I$  (on note  $S$  sa somme),
- pour tout  $n$ ,  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ,
- la série des dérivées  $\sum f'_n$  converge uniformément sur  $I$ ,

alors :

- $S$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ ,
- pour tout  $x : S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$ .

### Remarque.

- On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{df_n}{dx}(x)$$

qui explique le nom du théorème. Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes de convergence des séries et d'existence des dérivées envisagées.

- La convergence uniforme de  $\sum f_n$  n'entraîne pas la dérivabilité de la somme.
- Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur  $I$  de  $\sum f'_n$  par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de  $I$ , ou d'autres intervalles adaptés à la situation.

## 2.8 Extension aux fonctions de classes $\mathcal{C}^k$

### Théorème.

Soit  $\sum f_n$  une série de fonctions définie sur  $I$  à valeurs dans  $F$ , et  $k \in \mathbb{N}^*$ .  
Si :

- pour tout  $n$ ,  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ ,
- pour tout  $0 \leq j \leq k-1$ ,  $\sum f_n^{(j)}$  converge simplement sur  $I$ ,
- la série  $\sum f_n^{(k)}$  converge uniformément sur  $I$ ,

alors :

- la somme  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$
- pour tout  $1 \leq j \leq k$ ,  $S^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$ .

### Remarque.

- On peut symboliser la conclusion de ce théorème par :

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)$$

Mais cette « formule » ne présente pas les hypothèses d'application de ce théorème, et masque les problèmes d'existence des limites et dérivées envisagées.

- Comme la dérivabilité est une propriété locale, on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme sur  $I$  des  $\sum f_n^{(k)}$  par l'hypothèse moins forte de convergence uniforme sur tout segment de  $I$ , ou d'autres intervalles adaptés à la situation.
- Pour montrer que  $S$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , on montre la convergence simple de  $\sum f_n$  et la convergence uniforme de toutes les  $\sum f_n^{(j)}$ , pour  $j \geq 1$ .

**Exemple.**

- Soit  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ . L'application  $t \mapsto \exp(tA)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et sa dérivée est  $t \mapsto A \exp(tA) = \exp(tA)A$ .
- Pour  $E$  espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$ , l'application  $t \mapsto \exp(tu)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , et sa dérivée est  $t \mapsto u \circ \exp(tu) = \exp(tu) \circ u$ .

**Remarque.** On retiendra :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\exp(tA)) &= A \exp(tA) = \exp(tA)A \\ \frac{d}{dt}(\exp(tu)) &= u \circ \exp(tu) = \exp(tu) \circ u\end{aligned}$$

## 3 Annexes

### 3.1 Annexe : équivalence des $N_\infty$

**Définition.** Soit  $F$  un evn de dimension finie, et  $A \subset E$  une partie d'un evn de dimension finie. On définit sur  $\mathcal{B}(A, F)$ , l'espace des fonctions bornées  $A \rightarrow F$ , la **norme infinie** en posant, pour  $f \in \mathcal{B}(A, F)$  :

$$N_\infty(f) = \sup_{x \in A} (\|f(x)\|_F)$$

**Proposition.** Si on change la norme de  $F$  en une norme qui lui est équivalente, on change la norme  $N_\infty$  en une norme qui lui est équivalente.

*Preuve.* Soit  $\|\cdot\|_F^1$  et  $\|\cdot\|_F^2$  deux normes équivalentes, qui satisfont :

$$\forall y \in F, \alpha \|y\|_F^1 \leq \|y\|_F^2 \leq \beta \|y\|_F^1$$

Pour tout  $f \in \mathcal{B}(A, F)$ , on a d'une part :

$$\begin{aligned}\forall x \in A, \|f(x)\|_F^2 &\leq \beta \|f(x)\|_F^1 \\ &\leq \beta N_\infty^1(f) \text{ indépendant de } x\end{aligned}$$

donc  $N_\infty^2(f) \leq N_\infty^1(f)$  ;  
et d'autre part :

$$\begin{aligned}\forall x \in A, \alpha \|f(x)\|_F^1 &\leq \|f(x)\|_F^2 \\ &\leq N_\infty^2(f) \text{ indépendant de } x\end{aligned}$$

donc  $\alpha N_\infty^1(f) \leq N_\infty^2(f)$ .

On a montré que  $N_\infty^1$  et  $N_\infty^2$  sont équivalentes.  $\square$

## Petits problèmes d'entraînement

### 58.1

Soit  $n \geq 2$ .

- (a) Pourquoi  $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  n'est ni surjective, ni injective.
- (b) On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  d'une norme sous-multiplicative.
- b1. Soit  $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $\|U\| < 1$ . Montrer que  $I_n + U$  est inversible, et déterminer son inverse.
- b2. En déduire que  $\exp$  est injective sur un voisinage de 0.  
*On montrera que si  $\|M\| < \frac{1}{2}$  et  $\exp(M) = I_n$ , alors  $M = 0$ .*

### 58.2

Soit  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  une matrice antisymétrique et  $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  continue. Montrer que :

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} (f(\exp(xA))) > 0$$

### 58.3

Pour  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  nilpotente, on pose :

$$L(M) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} M^k$$

Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exp(L(tM)) = I_n + tM$$

### 58.4

Pour  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  nilpotente, on pose :

$$L(M) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} M^k$$

On étudier la fonction  $f$  donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \exp(-L(tM))$$

(a) Établir :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \prod_{k=1}^{n-1} \exp\left(-\frac{t^k}{k} M^k\right)$$

(b) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, (I_n - tM)f'(t) = -Mf(t)$$

(c) Montrer que  $f'$  est constante.

(d) En déduire que  $\exp(L(M)) = (I_n - M)^{-1}$ .

### 58.5

On cherche les applications  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dérivables, vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$$

(a) Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Vérifier que  $t \mapsto \exp(tA)$  est solution.

(b) Soit  $\varphi$  une solution vérifiant  $\varphi(0) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

b1. Calculer  $\varphi(0)$ .

b2. Montrer que :  $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = \varphi(t)\varphi'(0)$ .

(c) En déduire qu'il existe  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\varphi(t) = \exp(tA)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

(d) On ne suppose plus  $\varphi(0)$  inversible. Déterminer les fonctions  $\varphi$  solutions du problème.

### 58.6

On considère  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$  continue et telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$$

(a) On suppose dans cette question que  $\varphi$  est  $\mathcal{C}^1$ . Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = \varphi'(0)\varphi(t)$$

En déduire qu'il existe  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  :

$$\varphi(t) = \exp(tA)$$

12/12

(b) Soit  $\theta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$  une fonction intégrable, et telle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) dt = 1$ .

On suppose qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\theta(x) = 0$  pour tout  $|x| > \alpha$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$ , on pose :

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x-t)\varphi(t) dt$$

Montrer que  $\psi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , puis qu'il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\psi(x) = \varphi(x)B$$

(c) Déterminer  $\varphi$ .

**58.7**

Soit  $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  trois matrices telles que  $AB - BA = C$ ,  $AC = CA$  et

$$BC = CB.$$

(a) Montrer que  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont simultanément trigonalisables. Que dire de  $C$  ?

(b) On considère :

$$f : t \mapsto \exp(-t(A+B)) \exp(tA) \exp(tB) \text{ et } g : t \mapsto \exp\left(\frac{t^2}{2}C\right)$$

Montrer que  $f = g$ .

**58.8**

Déterminer  $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ .