# 1 Exercices de niveau 1

**906.1**

*Mines-Télécom*

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon infini.

(a) Montrer que :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{\mathrm{i}t})e^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n a^n$$

(b) Une autre question non traitée.

**906.2**

*Mines-Télécom*

On considère

$$(E)\ :\ 4xy'' + 2y' - y = 0$$

(a) a1. Déterminer les solutions développables en série entière : $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(2n+1)(2n+2)}$$

a2. Exprimer ces solutions à l'aide des fonctions usuelles.

(b) On souhaite résoudre $(E)$ sur $]0, +\infty[$.

b1. Que peut-on dire de l'ensemble des solutions ?

b2. Résoudre $(E)$ en posant $x = t^2$.

b3. Résoudre le problème de Cauchy avec $\begin{cases} y(1) = 0 \\ y'(1) = 2 \end{cases}$

J'ai réussi mes deux exos sans indication, l'interrogateur était un monsieur très sympa, avenant, à l'écoute et très attentif à tout ce que je disais. J'ai eu 20/20, donc ça s'est plutôt bien passé !

**906.3**

*cc-INP*

On cherche à résoudre l'équation différentielle :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0 \quad (H)$$

On cherche les solutions développables en séries entières sous la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et on note $r$ le rayon de convergence.

(a) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et donner $f'$ et $f''$.

(b) Déterminer $(b_n)_n$ telle que :

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n$$

(c) Déterminer une relation de récurrence satisfaite par $(a_n)_n$.

(d) *Question non traitée.*
*On peut demander :* Expliciter les solutions de $(H)$ qui sont développables en série entière et préciser le rayon de convergence.
Résoudre $(H)$ par la méthode de Lagrange.

**906.4**

*Mines-Télécom*

On définit :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \text{ et } f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$$

(a) Déterminer un équivalent de $H_n$. En déduire le rayon de convergence de $f$, noté $R$.

(b) Pour $x \in ]-R, R[$, déterminer $f(x)$.

**906.5**

*cc-INP*

Soit $\forall n \geqslant 1,\ a_n = \dfrac{\operatorname{ch}(n)}{n}$.

(a) Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.

(b) Calculer sa somme.

**906.6**

*cc-INP*

(a) Étude de la convergence simple de $(f_n)_n$ où $f_n\ :\ x \mapsto \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$.

(b) Étude de la convergence uniforme en s'aidant de $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

**906.7**

*CC-INP*

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de :

$$\sum_{n\geqslant 1} n^{(-1)^n} x^n$$

## 2 Exercices de niveau 2

**906.8**

*Centrale*

(a) Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la série entière $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$. On note $f$ la somme de cette série entière, et on dit qu'une telle fonction est une **fonction entière**.

(b) Soit $\omega$ un complexe tel que $|\omega| < 1$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi k\theta}}{1-\omega\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \omega^k$$

(c) Soit $a \in \mathbb{C}$ et $R > 0$. Montrer que, pour tout $z \in D(a, R)$ :

$$f(z) = \int_0^1 f\big(a + R\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\theta}\big) \frac{R\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\theta}}{a + R\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\theta} - z}\,\mathrm{d}\theta$$

(d) En déduire l'existence d'une suite $(\alpha_n)_n$ telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z-a)^n$$

(e) En déduire que si $f$ n'est pas identiquement nulle, alors il existe une fonction entière $g$ et un entier naturel $m$ tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) = (z-a)^m g(z) \text{ et } g(a) \neq 0$$

(f) Conclure que, si $f$ n'est pas identiquement nulle, alors pour tout compact $K$ de $\mathbb{C}$ :

$$\{z \in K,\ f(z) = 0\} \text{ est fini}$$

**906.9**

*Mines-Ponts*

On définit, pour $n \in \mathbb{N}$ :

$$u_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t}\, t^n\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que $(u_n)_n$ est bien définie. Préciser ses variations et sa limite pour $n \to +\infty$.

(b) Calculer $u_{n+1} + u_n$. En déduire un équivalent de $u_n$.

(c) On note $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Déterminer le rayon de convergence et le domaine de définition de $S$.

Examinateur sympathique qui donne quelques indices lorsqu'on bloque.

**906.10**

*Mines-Ponts*

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.
Domaine de définition de $f$ et expression de $f(x)$.

**906.11**

*Mines-Ponts*

Soit $\alpha > 1$ et $\forall n \geqslant 1,\ a_n = \frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}$.

(a) Trouver le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$. On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

(b) Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \Gamma(\alpha+1) x^{-\alpha} \mathrm{e}^x$.

**906.12**

*Mines-Ponts et Centrale*

Pour $n \geqslant 1$, on note $D_n$ le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ sans point fixe et on convient que $D_0 = 1$. On note :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_n}{n!} x^n$$

et $R$ le rayon de convergence de cette série entière.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$.

(b) Montrer que $R \geqslant 1$.

(c) Calculer $\mathrm{e}^x S(x)$ puis déterminer $D_n$.

(d) Trouver un équivalent de $D_n$.

**906.13**

*Mines-Ponts*

On note $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.

(a) Calculer le rayon de convergence $R$ de la série entière, puis étudier la convergence en $\pm R$.

(b) Déterminer la limite en 1 de $(1-x)f(x)$.

**906.14**

*Mines-Ponts*

On pose :

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln(n) x^n \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) x^n$$

(a) Déterminer les rayons de convergence $R_f$ et $R_g$.

(b) Montrer que $g$ est définie et continue sur $[-1, 1[$.

(c) Trouver une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$ sur $]-1, 1[$.

(d) Montrer que $f$ peut-être prolongée par continuité en une fonction continue sur $[-1, 1[$.

(e) Trouver un équivalent de $g$ et $f$ en 1.

*15 min de préparation pour 25 min de passage, puis 20 min sur exercice sans préparation. Examinateur extrêmement bienveillant, il mettait en confiance.*

**906.15**

*Centrale*

Soit $\sum a_n$ une série convergente de somme $S$. On suppose $S \neq 0$ et on note $(S_n)_n$ la suite de ses sommes partielles.

(a) Déterminer le rayon de convergence des séries entières :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \text{ et } g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} x^n$$

(b) Montrer que $f' = g' - g$.

(c) En déduire que :

$$\int_0^x f(u)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = (g(x) - f(x))\mathrm{e}^{-x}$$

(d) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$.

## 3 Exercices de la banque CC-INP

**2, 20 à 24, 51**