Quelques classiques d'analyse et de probabilités

1 Topologie . . . 2
2 Suites et séries . . . 10
3 Intégration et dérivation . . . 23
4 Équations différentielles . . . 38
5 Fonctions de plusieurs variables . . . 43
6 Probabilités . . . 50
7 De futurs classiques en probabilités . . . 64

Les exercices qui suivent sont parfois difficiles, et sont choisis suivant les critères suivants : ils sont intéressants, ils se posent à l'oral, on ne perd pas son temps en les cherchant.
Mais faut-il le rappeler ? la priorité, c'est le cours !

1 Topologie

995.1

Comparaison de normes

On note E l'ensemble des fonctions de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ telles que $f(0)=0$. On désigne par $\|.\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme.

1. Montrer que E est un espace vectoriel réel pour les lois usuelles.
2. Montrer que les fonctions données par
$$N_1(f)=\|f+f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N_2(f)=\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$
sont deux normes.
3. Montrer qu'elles sont équivalentes.

---

1. C'est un sous-espace vectoriel de $(C^1([0,1],\mathbf{R}),+,.)$.
2. Comme on ne redemande pas de montrer que $\|.\|_\infty$ est une norme, il faut surtout montrer que si $f+f'=0$ alors $f=0$, ce qui se fait en écrivant que $f'+f=0$ donne $f(t)=ae^{-t}$, la condition $f(0)=0$ donnant $a=0$. Toutes les autres propriétés sont simples.
3. $N_1\leq N_2$ est aisé. Trouver une inégalité $N_2\leq aN_1$ l'est moins, et on met en œuvre une technique assez astucieuse et utile dans quelques exercices d'oral. Posons $g=f'+f$, et écrivons que f est solution de l'équation différentielle
$$y'+y=g$$
que l'on résout par variation de la constante, ou en directement multipliant par e^t, pour obtenir
$$e^t y(t)-e^0 y(0)=\int_0^t e^u g(u)\mathrm{d}u$$
et compte tenu du fait qu'on est dans E, on en tire
$$f(t)=e^{-t}\int_0^t e^u g(u)\mathrm{d}u$$
qui permet la majoration
$$|f(t)|\leq e\|g\|_\infty$$
d'où l'on tire $\|f\|_\infty\leq e\|f+f'\|_\infty$. Et donc (en utilisant aussi l'inégalité triangulaire)
$$N_2(f)\leq \|f+f'\|_\infty+2\|f\|_\infty\leq (2e+1)N_1(f)$$

995.2

Donner un exemple de forme linéaire non continue.

Topologie des evn : continuité des applications linéaires.
Pas très difficile, mais peut être déroutant. Beaucoup d'idées possibles.

Une forme linéaire est une application linéaire de E dans $\mathbf{K}$, où E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Des formes linéaires célèbres :
La trace, mais comme elle est définie sur un espace de dimension finie elle est continue.

L'application qui à un élément de $E = C^0([a,b],\mathbf{R})$ associe $\int_a^b f$. C'est continu sur $(E, \|.\|_\infty)$ en vertu de la caractérisation de la continuité des applications linéaires, et du fait que

$$\forall f \in E \qquad \left|\int_a^b f\right| \leq |b-a|\ \|f\|_\infty$$

mais c'est encore continu pour $\|.\|_1$ (très très facile... $\left|\int_a^b f\right| \leq\ 1 \times \|f\|_1$) et pour $\|.\|2$ (un tout petit peu moins évident, mais avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\left|\int_a^b f\right| \leq \sqrt{|b-a|}\ \|f\|_2$).

Alors quoi ? comme il ne faut pas être sur un espace de dimension finie, on peut vouloir se mettre sur l'espace de dimension infinie le plus simple : $\mathbf{K}[X]$. Ou rester sur $E = C^0([a,b],\mathbf{R})$. Les espaces de suites ne sont pas trop conseillés, pas très commodes à manipuler. On n'a pas encore pensé à une forme linéaire très simple :

$$f \longmapsto f(a)$$

elle est continue sur $E = C^0([a,b],\mathbf{R})$ si on le munit de $\|.\|_\infty$, mais pas si on le munit de $\|.\|_1$ (on a suffisamment dessiné des graphes de fonctions telles que $\|f\|_1 = 1$ et telles que $f(a)$ soit aussi grand qu'on veut).
On peut aussi revenir aux polynômes, en gardant par exemple l'idée de l'intégrale :

$$\phi\ :\ P \mapsto \int_a^b \widetilde{P}(t)\mathrm{d}t$$

mais en munissant astucieusement $\mathbf{R}[X]$ de la norme $\|P\| = \sup\limits_{[c,d]} |\widetilde{P}|$
et en écartant un peu $[a,b]$ de $[c,d]$. Par exemple, en prenant $c=0$, $d=1$, $a=1$, $b=2$, il est difficile de trouver une constante K telle que

$$\forall P \in \mathbf{R}[X] \qquad \left|\int_1^2 \widetilde{P}(t)\mathrm{d}t\right| \leq K \sup_{[0,1]} |\widetilde{P}|$$

comme le montre la suite des polynômes X^n, par exemple.

$\boxed{\textbf{995.3}}$

Soit (E,N) un espace vectoriel normé. Soient F un compact de E et G un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

1. Montrer que $F+G$ est un fermé de E.
2. Montrer que ces résultats tombent en défaut lorsque l'on suppose simplement F fermé.

Topologie des evn : fermés et compacts.
Pas trop difficile pour 1, plus pour le 2 comme chaque fois qu'il s'agit de chercher un exemple de..., assez classique, intéressant.
Critiquons l'énoncé : appeler F un compact, ça n'est pas l'idéal. Tomber en défaut, c'est une expression sophistiquée.
1. Grand classique de la compacité...Le cours dit que G est fermé ; peut-être l'examinateur demandera de le redémontrer. Ne le faisons pas (le meilleur moyen est probablement d'utiliser le fait qu'une suite d'éléments d'un espace vectoriel de dimension finie a au moins une valeur d'adhérence, voir cours sur la compacité). Soit $x \in \overline{F+G}$. Il existe une suite (x_n) d'éléments de $F+G$ qui converge vers x. Il existe donc deux suites (a_n) et (b_n) d'éléments de F et G respectivement telles que

$$a_n + b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$$

On extrait de (a_n) une suite $(a_{\phi(n)})$ qui converge vers $a \in F$ (par compacité) ; comme la suite $(a_{\phi(n)} + b_{\phi(n)})$ converge vers x, la suite $(b_{\phi(n)})$ converge vers $x-a$. Et G est fermé, donc $x-a \in G$, et donc $x \in F+G$.
2. Plus difficile. Mais on peut conclure dans un contexte très simple : $E = \mathbf{R}^2$ (ce qui permet de faire des dessins), G une droite, par exemple l'axe des abscisses. Prenons $F = \{(x,y) \in (\mathbf{R}_*^+)^2\ ;\ xy = 1\}$ dont il ext

facile de voir que c'est un fermé (prendre une suite d'éléments de F qui converge, et utiliser les opérations sur les suites convergentes). $F+G$ peut être vu comme la réunion des $f+G$ avec $f \in F$, donc la réunion de toutes les droites horizontales passant par un point de l'arc d'hyperbole F (faire un dessin au tableau, évidemment). On voit que $F+G$ est $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_*^+$, qui n'est pas fermé (il est d'ailleurs ouvert, mais on est d'accord : ça n'a rien à voir…). Démontrer que $F+G = \mathbf{R} \times \mathbf{R}_*^+$, pas seulement en le dessinant, est simple par double inclusion.

995.4

Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé et $\phi \in \mathcal{L}(E, \mathbf{R})$ non nulle.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}\phi$ est un hyperplan de E.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}\phi$ est soit fermé dans E soit dense dans E.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}\phi$ est fermé dans E si et seulement si ϕ est continue.

---

1. Pas sûr que l'examinateur apprécie que le candidat prenne comme définition d'un hyperplan « le noyau d'une forme linéaire non nulle ». On définira donc un hyperplan comme un sous-espace admettant une droite comme supplémentaire. Soit $H = \mathrm{Ker}\phi$, soit $x_0 \notin H$, alors assez simplement la somme $H \bigoplus \mathrm{Ker}\phi$ est directe. Soit $y \in E$, on aimerait l'écrire sous la forme
$$y = h + \lambda x_0$$
avec $h \in H$, pour cela nécessairement $\lambda = \dfrac{\phi(y)}{\phi(x_0)}$, la réciproque est simple et c'est gagné.

2. Un classique, mais attention, dans un cas particulier assez simple, ne pas reconstituer la démarche un peu astucieuse vue au début de l'année en exercice (mais on ne s'en souvient pas, c'est mieux). Supposons $H = \mathrm{Ker}\phi$ non fermé, alors il existe $x_0 \in \overline{H} \setminus H$. Mais alors, si $y \in E$, décomposons
$$y = h + \lambda x_0$$
avec $h \in H$. On considère une suite (h_n) d'éléments de H qui converge vers h, on obtient
$$h + \lambda h_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} y$$
et donc $y \in \overline{H}$. Donc H est dense.
3. Si ϕ est continue, $H = \phi^{-1}(\{0\})$ est fermé comme image continue d'un fermé par une application continue. La réciproque est plus manipulatoire, se fait de 36 façons dont aucune n'est absolument naturelle. Supposons H fermé. Essayons de montrer que ϕ est continue en 0_E et pour cela, soit (x_n) une suite d'éléments de E qui converge vers 0_E. Fixons $a \notin H$. On décompose
$$x_n = h_n + \lambda_n a$$
où bien sûr les h_n sont dans H, et $\lambda_n = \dfrac{\phi(x_n)}{\phi(a)}$, donc il s'agit de montrer que la suite (λ_n) converge vers 0, ce qui entraînera automatiquement que $(\phi(x_n))$ converge vers 0. Si la suite (λ_n) ne converge par vers 0, soit δ tel que
$$\forall N \quad \exists n \geq N \qquad |\lambda_n| \geq \delta$$
On montre facilement qu'on peut en extraire une suite $(\lambda_{\phi(n)})$ telle que, pour tout n,
$$|\lambda_{\phi(n)}| \geq \delta$$
Divisons tout par $\lambda_{\phi(n)}$:
$$\frac{1}{\lambda_{\phi(n)}} x_{\phi(n)} = \frac{1}{\lambda_{\phi(n)}} h_{\phi(n)} + a$$
On obtient que la suite $\left(\dfrac{1}{\lambda_{\phi(n)}} h_{\phi(n)} \right)_{n \geq 0}$ d'éléments de H converge vers a qui n'est pas dans H, ce qui contredit H fermé.

Autre méthode L'idée recommandée en général pour montrer que si H est fermé alors ϕ est continue est de dire que si H est fermé, si $a \notin H$, alors $d(a, H) > 0$ (on sait, voir cours, et savoir le redémontrer, que $d(a, H) = 0 \iff a \in \overline{H} = H$). On veut montrer que ϕ est continue. On veut donc trouver un K tel que, pour tout x,

$$|\phi(x)| \leq K\|x\|$$

Pour cela, naturellement, on décompose $x = \lambda a + h$ avec $h \in H$, et on a $\lambda = \dfrac{\phi(x)}{\phi(a)}$. On cherche donc un K' tel que

$$|\lambda| \leq K'\|x\|$$

(pour tout x). Si $\lambda = 0$, i.e. $x \in H$, pas de problème. Supposons donc $\lambda \neq 0$. Alors

$$\|x\| = |\lambda| \times \|a + \frac{1}{\lambda}h\| \geq |\lambda| \times d(a, H)$$

Donc $K' = \dfrac{1}{d(a, H)}$ convient.

995.5

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et K un compact convexe non vide de E.

1. Soit u un endomorphisme continu de E qui laisse K stable. Montrer que u possède un point fixe dans K.
   Ind On pourra introduire $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x)$.
2. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite d'endomorphismes continus de E commutant deux à deux et qui laissent tous K stable. Montrer que les u_n ont dans K un point fixe commun.

---

1. Constatons d'abord que K est stable par u donc par chaque u^k, $k \in \mathbf{N}$. Et K est convexe, ce qui fait que, pour tout $n \geq 1$,

$$x_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k(x) \in K$$

   Comme on est dans un compact, on sait que la suite (x_n) admet une valeur d'adhérence dans K. Et vu la question, on aimerait bien que cette valeur d'adhérence soit un point fixe de u. Soit donc une extractrice ϕ telle que la suite $(x_{\phi(n)})$ converge, vers une limite $\ell \in K$. On aimerait $u(\ell) = \ell$. Mais

$$u(x_{\phi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(\ell)$$

   (on utilise la continuité de u, qui ne va pas de soi car on n'est pas en dimension finie). Or $u(x_{\phi(n)})$ ressemble beaucoup à $x_{\phi(n)}$:

$$u(x_{\phi(n)}) = x_{\phi(n)} + \frac{1}{\phi(n)}\left(u^{\phi(n)}(x) - x\right)$$

   La suite $\left(u^{\phi(n)}(x)\right)$ est bornée car c'est une suite d'éléments de K. Donc, prenant les limites quand $n \to +\infty$, on obtient $u(\ell) = \ell$. C'est un théorème de point fixe, dit de Markov-Kakutani.

2. Quelques réminiscences de réduction simultanée peuvent rendre service. Il y a deux idées à avoir pour démarrer : l'ensemble des points fixes de u_0, est un compact convexe non vide (première idée), tous les u_i laissent ce compact convexe (notons-le K_0) stable (deuxième idée). Ces deux points sont très faciles à établir, mais encore faut-il y penser. Donc, à partir de

$$K_0 = \{x \in K \ ; \ u_0(x) = x\}$$

   on définit

$$K_1 = \{x \in K \ ; \ u_1(x) = x\}$$

qui est aussi, encore par la question 1, un compact convexe non vide. Dont tous les éléments sont fixes par u_0 et u_1. Il n'est pas difficile de continuer et de construire ainsi une suite de compacts convexes non vides « emboîtés » (i.e. la suite est décroissante pour l'inclusion) (K_n) par la relation

$$K_{n+1} = \{x \in K_n \ ; \ u_{n+1}(x) = x\}$$

Il faut alors montrer que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbf{N}} K_n$ est non vide (un exercice classique à savoir faire pour l'oral), et les éléments de cette intersection sont fixes pour tous les u_n.

995.6

Soit $n \in \mathbf{N}_*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On note $\rho(A)$ le module maximum d'une valeur propre de A.

1. Montrer que $(A^k)_{k\geq 0}$ converge vers (0) si et seulement si $\rho(A) < 1$.
2. On suppose que les coefficients de A sont dans $\mathbf{R}_*^+$. Montrer que $\rho(A)$ est une valeur propre de A, puis que $\rho(A)$ est la seule valeur propre de A de module $\rho(A)$.

---

1. Parlons des valeurs propres : si λ en est une, soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{C})$, $X \neq (0)$, tel que

$$AX = \lambda X$$

Par récurrence, pour $k \in \mathbf{N}$, $A^k X = \lambda^k X$. Par continuité de l'application $M \mapsto MX$ (linéaire en dimension finie),

$$\lambda^k X \xrightarrow[k\to+\infty]{} (0)$$

et donc, comme $X \neq (0)$,

$$\lambda^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} (0)$$

On en déduit que $|\lambda| < 1$. Ceci est vrai pour tout $\lambda \in Sp(A)$ (spectre complexe, s'entend), on a donc bien $\rho(A) < 1$.

La réciproque est claire si A est diagonalisable. On pourrait alors envisager d'utiliser la densité de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, mais cela ne semble pas très évident à mettre en œuvre ici. Alors…on peut reprendre les chemins traditionnels, qui au moins montrent à l'examinateur qu'on sait son cours. Le polynôme caractéristique de A se scinde (on est sur $\mathbf{C}$) :

$$P_A = (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_d)^{m_d}$$

avec, bien sûr, les λ_i deux à deux distincts. Notant pour chaque i

$$F_i = \mathrm{Ker}\left((A - \lambda_i I_n)^{m_i}\right)$$

le théorème de Cayley-Hamitlon et le théorème des noyaux nous permettent d'écrire

$$\mathbf{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{d} F_i$$

où les F_i sont stables par A, ou plutôt par u, endomorphisme canoniquement associé à A, comme noyaux de polynômes de A (ou de u). Sur chacun d'entre eux, u induit donc un endomorphisme

$$u_i = \lambda_i Id_{F_i} + n_i$$

où n_i est nilpotent. On peut alors écrire, dès que $k \geq n$,

$$u_i^k = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{k}{j} \lambda_i^{k-j} n_i^j$$

Mais

$$\binom{k}{j} = \frac{k(k-1)\dots(k-j+1)}{j!} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{k^j}{j!}$$

et donc, par croissances comparées, si $|\lambda_i| < 1$,

$$u_i^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \Theta_{F_i}$$

(on désigne comme d'habitude avec la lettre Θ les endomorphismes nuls). Si A_i est la matrice de u_i dans une quelconque base $\mathcal{B}_i$ de F_i, cela équivaut à dire

$$A_i^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} (0)$$

(en effet, l'application $u \mapsto M_{\mathcal{B}}(u)$, quand $\mathcal{B}$ est une base d'un espace vectoriel, est continue, car linéaire en dimension finie). Réunissons les bases $\mathcal{B}_i$, on fabrique une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{C}^n$ dans laquelle la matrice de u, semblable à A donc, est diagonale par blocs : $A' = \mathrm{Diag}(A_1, \dots, A_d)$. Et donc

$$(A')^k = \mathrm{Diag}(A_1^k, \dots, A_d^k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} (0)$$

ce qui, compte tenu du fait que A' et A sont semblables, donne le résultat.

2. Vu l'allure de la question, on a envie de considérer une valeur propre de module maximal : $\lambda \in \mathbf{C}$ telle que

$$|\lambda| = \rho(A)$$

Le but étant de montrer que $\lambda \in \mathbf{R}_*^+$. Vu l'hypothèse, on ne va pas hésiter à être analytique : considérons donc $X = (x_1\ x_2\ \dots x_n)^T$ un vecteur propre associé, on écrit alors

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \qquad \lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$$

La nécessité de faire apparaître les modules, et la positivité de tous les $a_{i,j}$, donnent envie d'appliquer l'inégalité triangulaire (sans tricher : on n'est pas sûr que cela aboutisse, mais on peut tenter quelque chose).

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \qquad |\lambda||x_i| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j| \tag{1}$$

Ce qui serait bien, c'est d'avoir l'égalité, parce que ça donnerait beaucoup d'informations. Supposons donc

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \qquad |\lambda||x_i| < \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j|$$

Avec un peu de chance, la première question sert...mais comment ? définissons $|X| = (|x_1|\ |x_2|\ \dots |x_n|)^T$. Les inégalités strictes ci-dessus permettent de dire qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \qquad |x_i| \leq \frac{1}{\rho(A) + \epsilon} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j|$$

ou encore, notant $B = \dfrac{1}{\rho(A) + \epsilon} A$,

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \qquad |x_i| \leq \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}|x_j|$$

on enchaîne :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \qquad |x_i| \leq \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{j,k}|x_k| \right)$$

i.e., en intervertissant les deux sommes, et en notant avec la lettre $b^{(2)}$ les coefficients de la matrice B^2,

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \qquad |x_i| \leq \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}^{(2)} |x_j|$$

et ainsi de suite : pour tout k, par récurrence,

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \qquad |x_i| \leq \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}^{(k)} |x_j|$$

et comme les x_i ne sont pas tous nuls, il est impossible d'avoir $B^k|X| \xrightarrow[k\to+\infty]{} (0)$, donc d'avoir $B^k \xrightarrow[k\to+\infty]{}$ (0). Or les valeurs propres de B sont celles de A multipliées par $\dfrac{1}{\rho(A)+\epsilon}$, donc $\rho(B) < 1$, contradiction avec la première question. Espérons que l'examinateur aura trouvé normal de donner un peu d'indication, tout cela n'est pas simple. Mais on est bien avancé, car il y a un i pour lequel (1) est une égalité ! ce qui dit que les $a_{i,j}x_j$, donc les x_j, ont tous même argument. Notant alors $x_j = |x_j|e^{i\theta}$ on reporte dans la ligne de calcul précédant (1), et on obtient bien $\lambda > 0$. Ce qui termine la première partie de la question. Et d'ailleurs la deuxième aussi !

995.7

1. Quelle est la structure algébrique de $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$? Montrer que c'est un compact non connexe par arcs.
2. Soit $M \in GL_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe $R \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ tels que $M = RS$.
3. Montrer que $GL_n(\mathbf{R}$ possède deux composantes connexes par arcs.
4. Montrer que $GL_n(\mathbf{C})$ est connexe par arcs.

---

1. C'est un groupe, la compacité est très, très classique, l'application déterminant peut servir à montrer qu'il n'est pas connexe par arcs.
2. On parle de $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. On peut dire que c'est l'ensemble des matrices symétriques à valeurs propres strictement positives ou l'ensemble des matrices symétriques telles que pour toute colonne X non nulle on ait $X^T\ A\ X > 0$. Il vaut mieux en cas de besoin savoir montrer l'équivalence, encore un très grand classique (mais algébrique !). L'idée est ensuite de passer de $M = RS$ à $M^T\ M = S^2$, et il est très facile de montrer que toute matrice symétrique positive a une « racine carrée » symétrique positive.
3. L'application $(R, S) \mapsto RS$ est continue sur $\mathcal{SO}_n(\mathbf{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. Or $\mathcal{SO}_n(\mathbf{R})$ est connexe par arcs (classique fait pendant l'année ; rappel de l'idée : en dimension 2, l'application

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t\theta) & -\sin(t\theta) \\ \sin(t\theta) & \cos(t\theta) \end{pmatrix}$$

est un arc tracé sur $\mathcal{SO}_2(\mathbf{R})$ qui joint la matrice unité à la matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. En dimension n, on utilise le théorème de réduction et la dimension 2). La caractérisation

$$\S \in S_n(\mathbf{R}) \qquad \text{et} \qquad \forall X \neq 0 \qquad X^T S X > 0$$

permet de voir que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ est convexe. Un produit de connexes par arcs est connexe par arcs (facile à écrire, mais pas dans le cours). Et il n'y a plus qu'à utiliser le théorème sur l'image d'un connexe par arcs par une application continue pour voir que

$$GL_n^+(\mathbf{R}) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) \ ; \ \det(A) > 0\}$$

est connexe par arcs. L'application $M \mapsto AM$, où A est une matrice de déterminant strictement négatif, est continue, donc $GL_n^-(\mathbf{R})$ (définition évidente) est connexe par arcs, et on a les deux composantes.

4. Une idée importante : la connexité par arcs est peu intuitive géométriquement sur $\mathbf{C}$, on montre une quasi-convexité. En effet, si A et B sont dans $GL_n(\mathbf{C})$, pour que $tA + (1-t)B$ n'y soit pas il faut et il suffit que $t/(t-1)$ soit valeur propre de $A^{-1}B$ (sauf erreur, les calculs étant fait de tête…). On se doute bien que ce n'est « pas de chance ». Si ça arrive, on joint par un arc $t \mapsto e^{it\theta}B$ la matrice B à la matrice $e^{i\theta}B$, dont les valeurs propres sont celles de B multipliées par $e^{i\theta}$. On voit assez facilement qu'il y a plein de valeurs de θ pour lesquelles $e^{i\theta}A^{-1}B$ n'a pas de valeur propre réelle, donc pour lesquelles $e^{i\theta}B$ peut être joint à A par un arc. Ce qui conclut.

2 Suites et séries

995.8

A partir du théorème de Weierstrass

On munit $C^1([a,b],\mathbf{R})$ de la norme N définie par

$$N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

Montrer que l'espace des fonctions polynomiales sur $[a,b]$ est dense dans $\big(C^1([a,b],\mathbf{R}), N\big)$.

Soit $f \in C^1([a,b],\mathbf{R})$. La mauvaise idée serait d'appliquer le théorème de Weierstrass à f et de considérer une suite (h_p) de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur $[a,b]$ vers f : la suite (h'_p) n'aurait vraiment aucune raison de converger vers f'.
En revanche, la bonne idée, c'est de considérer une suite (h_p) de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur $[a,b]$ vers f'. La suite des fonctions (H_p), où

$$H_p \ : \ x \longmapsto \int_a^x h_p(t)\mathrm{d}t$$

converge uniformément sur $[a,b]$ vers la fonction

$$x \longmapsto \int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$$

qui est en fait la fonction $x \mapsto f(x) - f(a)$. Considérons alors la suite de fonctions (G_p), où

$$G_p \ x \mapsto H_p(x) + f(a)$$

Alors (G_p) converge uniformément vers f, (G'_p) converge uniformément vers f', donc (G_p) converge vers f dans $\big(C^1([a,b],\mathbf{R}), N\big)$, et les G_p sont polynomiales, c'est bon.

995.9

Etude asymptotique de la somme d'une série de fonctions

1. Trouver le domaine de définition de
$$f \ : \ x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$$
2. Trouver la limite de f en $+\infty$.
3. Trouver la limite de f en 0.
4. Trouver un équivalent de f en 0.

---

1. Le domaine de définition est $\mathbf{R}_*^+$: ailleurs, il y a divergence grossière de la série. Et sur $\mathbf{R}_*^+$, la convergence est conséquence par exemple de la croissance comparée :
$$e^{-x\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \ .$$
que l'on vérifie par exemple en écrivant $n^2 e^{-x\sqrt{n}}$ sous forme exponentielle.
2. La convergence est assez facilement normale, donc uniforme, sur tout $[a,+\infty[$, $a > 0$, ce qui autorise l'utilisation du théorème de la double limite et donne en $+\infty$ une limite nulle.

3. Pour la limite en 0, on peut faire une comparaison à une intégrale, ou plus simplement remarquer que f décroît (pas besoin pour cela de la dériver, mais montrer que f est C^1 sur $]0,+\infty[$ avec le théorème sur les séries de fonctions de classe C^1 ne présente pas de difficulté particulière). Si elle avait une limite réelle en 0, elle serait majorée. A fortiori, par positivité de tous les termes, pour n'importe quel N la somme partielle S_N qui serait majorée par $\lim_0(f)$. En prenant la limite en 0, on obtiendrait $N \leq \lim_0(f)$ pour tout N, ce qui n'est pas très raisonnable. Donc la limite en 0 est $+\infty$.

4. Comparaison à une intégrale…c'est la méthode « générique » dans ce genre d'exercice, cela ne veut pas dire qu'elle marche toujours mais c'est la seule méthode qu'on peut légitimement vous reprocher de ne pas penser à essayer. Cela demande un peu de concentration : la comparaison à une intégrale se fait à x fixé. La fonction à considérer est alors
$$h_x \ : \ t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$$
On va la noter simplement h, pas la peine de rappeler x qui est fixé et > 0. La fonction h est bien décroissante sur $[0,+\infty[$. Comme on a déjà montré la convergence, l'intégrabilité en découle, et on peut directement écrire l'encadrement (après avoir fait un dessin au tableau) :
$$\int_1^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{n=1}^{+\infty} h(n) \leq \int_0^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t$$
Le changement de variable $x\sqrt{t} = u$, $t = u^2/x^2$, est bien pour sortir x de l'intégrale :
$$\frac{1}{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-u} \times 2u \ \mathrm{d}u \leq \sum_{n=1}^{+\infty} h(n) \leq \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} e^{-u} \times 2u \ \mathrm{d}u$$
Mais
$$\int_x^{+\infty} e^{-u} \times 2u \ \mathrm{d}u \xrightarrow[x\to 0]{} \int_0^{+\infty} e^{-u} \times 2u \ \mathrm{d}u = 1$$
(intégration par parties, bien sûr). et on trouve comme équivalent $1/x^2$.

995.10

Rayons de convergence

Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$,

1. a_n étant le n-ième chiffre du développement décimal de $\sqrt{3}$.
2. Avec $a_n = \sin n$.
3. Avec $a_n = \ln\Big(\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\Big)$
4. En supposant que (a_n) est une suite de nombres complexes non nuls, telle que
$$\lim\Big|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\Big| = l_1 \quad \text{et} \quad \lim\Big|\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}\Big| = l_2$$
où l_1 et l_2 sont deux éléments de $[0,+\infty]$.

Evidemment, on a lu les rapports de concours qui rappellent que le critère de d'Alembert n'est pas l'α et l'ω de la détermination d'un rayon de convergence, et que les suites bornées sont souvent bien plus efficaces.

1. La suite (a_n) est bornée, le rayon de convergence est donc ≥ 1. Elle ne tend pas vers 0, donc le rayon de convergence est ≤ 1.

2. La suite $(\sin n)$ est bornée, le rayon de convergence de $\sum(\sin n)z^n$ est donc ≥ 1. Mais elle ne converge pas vers 0, le rayon de convergence est donc ≤ 1. Pour montrer que la suite $(\sin n)$ ne converge pas vers 0, on peut par exemple utiliser la formule de développement de $\sin(n+1)$, comme $\sin 1 \neq 0$ on obtient que $(\cos n)$ convergerait aussi vers 0, ce qui contredit $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$.

3. La suite (a_n) converge vers 0. Donc le rayon de convergence est ≥ 1. Réécrivons (technique ordinaire : on met en facteur le terme prépondérant en haut et en bas) :

$$a_n = \ln\left(\frac{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}\right) = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Donc $a_n \equiv \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Ce qui ne permet pas de conclure à la convergence ni à la divergence de $\sum a_n$, mais en tout cas $\sum a_n$ ne converge pas absolument, donc le rayon est ≤ 1.

4. Commençons par supposer l_1 réel. Alors, si $z \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$,

$$\frac{|a_{2n+2}z^{2n+2}|}{|a_{2n}z^{2n}|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1|z|^2$$

On en déduit que, si $l_1|z|^2 > 1$, la suite $\left(a_{2n}z^{2n}\right)_{n\geq 0}$ est non bornée. Et que, en revanche, si $l_1|z|^2 < 1$, la suite $\left(a_{2n}z^{2n}\right)_{n\geq 0}$ est bornée. Ce qui reste encore vrai avec des conventions compréhensibles ($+\infty\times r = +\infty$ si r est un réel strictement positif) si $l_1 = +\infty$. On tient le même genre de raisonnement avec la suite $\left(a_{2n+1}z^{2n+1}\right)_{n\geq 0}$. Et enfin, on constate que la suite $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ est bornée si et seulement si les deux suites $\left(a_{2n}z^{2n}\right)_{n\geq 0}$ et $\left(a_{2n+1}z^{2n+1}\right)_{n\geq 0}$ le sont. On en déduit que le rayon de convergence est $\mathrm{Min}\left(\dfrac{1}{\sqrt{l_1}}, \dfrac{1}{\sqrt{l_2}}\right)$ (conventions habituelles $1/+\infty = 0, 1/0 = +\infty$).

995.11

Un lemme utile sur les rayons de convergence

1. Montrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence non nul si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ et $M > 0$ tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad |a_n| \leq M\alpha^n$$

Ce lemme est utile lorsqu'une suite (a_n) est donnée par une relation de récurrence. On trouve $\alpha > 0$ tel que l'inégalité $|a_n| \leq M\alpha^n$ soit récurrente. On ajuste M pour que cette inégalité soit vraie pour les petites valeurs de n.

2. Si une suite (a_n) vérifie

$$\forall n \geq 2 \qquad a_n = \frac{a_{n-1}}{n} + 2a_{n-2}$$

montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence non nul.

---

1. La série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence non nul si et seulement si il existe $\rho > 0$ tel que la suite $(a_n\rho^n)$ soit bornée. Donc si et seulement si il existe $\rho > 0$ et $M > 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad |a_n|\rho^n \leq M$$

ce qui donne le résultat (en notant $\alpha = 1/\rho$).

2. Pour l'exemple : si $n \geq 2$, supposons que $a_{n-1} \leq M\alpha^{n-1}$ et $a_{n-2} \leq M\alpha^{n-2}$, α étant un réel > 0. Alors

$$|a_n| \leq M\left(\frac{\alpha^{n-1}}{n} + 2\alpha^{n-2}\right) = M\alpha^n\left(\frac{1}{n\alpha} + \frac{2}{\alpha^2}\right) \leq M\alpha^n\left(\frac{1}{n\alpha} + \frac{2}{\alpha^2}\right)$$

Si on choisit $\alpha > 0$ tel que $\dfrac{1}{2\alpha} + \dfrac{2}{\alpha^2} \leq 1$, ce qui est facile (par exemple, $\alpha = 2$), ça marche, c'est récurrent. Et il suffit d'initialiser. On prend M tel que $|a_0| \leq M$ et $|a_1| \leq M\alpha$, l'initialisation est alors réalisée. Il existe donc un $\alpha > 0$ et un M tels que

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad |a_n| \leq M\alpha^n$$

Donc la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence non nul. Et on peut même dire que ce rayon de convergence est supérieur ou égal à $1/\alpha$ pour n'importe quel α qui convient, donc supérieur ou égal à $1/2$ (on pourrait mieux faire).

$\boxed{\textbf{995.12}}$

Résultats et méthode très classiques...

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs, décroissante, ayant pour limite 0. Démontrer que la série entière $\sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n a_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, et que sa somme est continue sur le segment $[0, 1]$. En partant des développements en série entière de $\ln(1 + x)$ et $\mathrm{Arctan}\, x$, en déduire les égalités suivantes :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}$$

C'est la manière la plus commode, avec le programme, d'aboutir à la somme de la série harmonique alternée. Il est donc intéressant de savoir faire cette démonstration.

Par théorème spécial sur les séries alternées, $\sum(-1)^n a_n\ (1)^n$ converge. Donc le rayon de convergence est ≥ 1. De plus, la série $\sum(-1)^n a_n x^n$ vérifie les hypothèses du théorème spécial pour tout $x \in [0, 1]$. Ce qui permet, d'une part de définir, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k x^k$$

et d'autre part d'écrire, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|R_n(x)| \leq a_{n+1}x^{n+1} \leq a_{n+1}$$

Ce qui montre la convergence uniforme vers $\widetilde{0}$ de la suite de fonctions (R_n), c'est-à-dire la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0}(x \mapsto (-1)^n a_n x^n)$. Les fonctions $x \mapsto (-1)^n a_n x^n$ étant continues, la transmission de la continuité par convergence uniforme conclut.

L'application de ce résultat à la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par $a_n = 1/n$ (on commence à $n = 1$, ça ne change rien) permet de prolonger en 1 l'identité connue

$$\forall x \in [0, 1[\qquad \ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

d'où la somme de la série harmonique alternée. Pour l'autre série, on dit que, de même, l'identité

$$\forall x \in [0, 1[\qquad \mathrm{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n + 1}$$

se prolonge par continuité en 1 (si on tient à se ramener scrupuleusement aux hypothèses précédentes, on peut tout diviser par x, poser $y = \sqrt{x}$, etc...mais il est plus naturel de remarquer que le raisonnement utiisant le théorème spécial marche aussi bien dans ce cas particulier.

Le théorème radial d'Abel permet aussi de conclure.

995.13

Une formule classique, une interversion série/intégrale

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R strictement positif. On note f sa somme. Soit r un élément de $[0, R[$. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$a_n \;=\; \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$$

On note alors $M(r) = \operatorname*{Sup}_{|z|=r} |f(z)|$. Justifier l'existence de $M(r)$, et majorer $|a_n|$ à l'aide de r, n, $M(r)$.
Que peut-on dire d'une série entière dont le rayon de convergence est infini et dont la somme est bornée ?

Si $0 \leq r < R$, on a $|re^{i\theta}| < R$, ce qui permet d'écrire

$$f\left(re^{i\theta}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p r^p e^{ip\theta}$$

et donc, si n est un entier naturel,

$$f\left(re^{i\theta}\right)e^{-in\theta} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p r^p e^{i(p-n)\theta}$$

On peut alors se douter qu'il va s'agir d'un problème de permutation série-intégrale. Définissons (après avoir fixé $n \in \mathbf{N}$)

$$\phi_p \ : \ \theta \longmapsto a_p r^p e^{i(p-n)\theta}$$

On a $N_\infty(\phi_p) = |a_p|r^p$, donc $\sum_p N_\infty(\phi_p)$ converge (car $r < R$), donc $\sum \phi_p$ converge uniformément car normalement sur le segment $[0, 2\pi]$. On peut alors permuter.
On peut aussi utiliser le théorème le plus fréquemment utilisé pour ce genre de permutation (parce qu'il ne demande pas la convergence uniforme, parce qu'il n'impose pas d'être sur un segment…), celui dont l'hypothèse cruciale est la convergence de $\sum N_1(\phi_p)$. Il suffit de remarquer que

$$N_1(\phi_p) \leq 2\pi|a_p|r^p$$

Bref, tout cela permet d'écrire

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(a_p r^p \int_0^{2\pi} e^{i(p-n)\theta}\mathrm{d}\theta\right)$$

Or on calcule facilement (surtout sans repasser par cosinus et sinus !) :

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\mathrm{d}\theta = 0 \quad \text{si} \quad k \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$$

Si $k = 0$, le calcul est immédiat. On aboutit finalement à la formule souhaitée.
Le cercle de centre 0 et de rayon r est un compact inclus dans le disque ouvert de convergence, donc f, continue, est bornée sur ce compact, ce qui justifie l'existence de $M(r)$. Une majoration d'intégrale standard donne alors

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

Si $R = +\infty$ et si f est bornée, on peut majorer tous les $M(r)$ par un même M indépendant de r. On a alors

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$$

et en prenant la limite quand $r \to +\infty$, on trouve

$$\forall n \geq 1 \qquad a_n = 0$$

et donc f est constante.
Rappelons que l'on n'en déduit nullement (heureusement !) que le cosinus ou le sinus sont constants. En effet ils sont bornés sur $\mathbf{R}$ mais pas sur $\mathbf{C}$.

995.14

Interversion série/intégrale

Trouver le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}$. On note $f(x)$ sa somme.

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt$, si $x > 0$?.

Avec, par exemple, la règle de d'Alembert, on trouve que la série converge toujours. Donc le rayon de convergence vaut $+\infty$. Soit maintenant $x > 0$; on a, pour tout $t \geq 0$,

$$e^{-xt} f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xt} \frac{(-1)^n t^n}{(n!)^2}$$

Définissons donc, sur $[0, +\infty[$, ϕ_n $(n \in \mathbf{N})$ par

$$\phi_n(t) = e^{-xt} \frac{(-1)^n t^n}{(n!)^2}$$

comme $|\phi_n(t)| = \underset{t \to +\infty}{\mathrm{o}} \left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, ϕ_n est continue intégrable (comparaison à l'exemple de Riemann) sur $[1, +\infty[$, donc sur $[0, +\infty[$. $\displaystyle\sum_n \phi_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$, sa somme est continue (on la connaît). On calcule par intégrations par parties successives :

$$N_1(\phi_n) = \frac{1}{n! x^{n+1}}$$

qui est le terme général d'une série convergente (encore d'Alembert par exemple. Mais on peut dire que c'est une série exponentielle). On conclut que $t \mapsto e^{-xt} f(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, et que son intégrale est

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \phi_n(t)\ dt = \frac{1}{x} e^{-1/x}$$

995.15

Un exercice d'observation

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On définit, pour tout entier naturel n,

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\ .$$

Démontrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n z^n$ est au moins égal à $\mathrm{Min}(1, R)$, et calculer sa somme à l'aide de la somme de la série $\sum a_n z^n$.

La série $\sum b_n z^n$ est le produit de Cauchy de la série entière $\sum a_n z^n$ par la série entière $\sum z^n$ dont la somme vaut $1/(1 - z)$.

995.16

Un calcul de série

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \sin(n\theta)$ (x réel)

Rayon de convergence infini encore…mais pas par D'Alembert. Les croissances comparées et les suites bornées marchent bien. x est réel, on fait donc apparaître la somme comme partie imaginaire de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}e^{in\theta}$ qui est l'exponentielle de $xe^{i\theta}$. On trouve

$$e^{x\cos\theta}\sin(x\sin\theta)$$

Si x était complexe non réel, on devrait commencer par écrire

$$\sin(n\theta)=\frac{1}{2i}\left(e^{in\theta}-e^{-in\theta}\right)$$

995.17

Un calcul de série

$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\sin(n\theta)$ (x réel)

Commençons par remarquer que le rayon de convergence est ≥ 1. Visiblement, pour θ multiple de π, il est infini. Supposons ici aussi x réel. On passe alors par la dérivation : par théorème de dérivation des séries entières, sur $]-1,1[$ la somme a pour dérivée

$$\sum_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}\sin(n\theta)$$

On est donc ramené à calculer la partie imaginaire de

$$\sum_{n=0}^{+\infty}x^n e^{in\theta}$$

Or cette série est géométrique…

995.18

Un calcul de série

Démontrer que ϕ définie par

$$\phi(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n$$

est continue sur $[-1,1]$, et exprimer ϕ au moyen des fonctions usuelles (on utilisera deux méthodes : dérivation, et décomposition en éléments simples).

La décomposition en éléments simples est la méthode la plus générale (y penser quand on demande de calculer $\sum F(n)z^n$ où F est une fraction rationnelle). On commence par constater que la série entière définissant ϕ converge normalement sur $[-1,1]$, d'où la continuité de la somme sur $[-1,1]$. Le calcul qui suit comporte une étape délicate : on coupe en deux la somme de la série. Pour cela, il est prudent (c'est même impératif !) de supposer $x\in]-1,1[$. On trouve alors

$$\begin{aligned}\phi(x)&=\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)x^n\\&=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}x^n-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n\\&=x\ln(1+x)+\ln(1+x)-x\\&=(x+1)\ln(1+x)-x\end{aligned}$$

Et, par continuité, $\phi(1)=2\ln 2-1$, $\phi(-1)=-1$.

L'autre méthode est ici assez naturelle : on voit n au dénominateur, on dérive pour le simplifier. Mais attention là aussi, il faut prudemment rester dans $]-1,1[$. Le fait que ϕ soit continue sur tout $[-1,1]$ fermé ne prouve pas qu'elle soit dérivable sur $[-1,1]$.
On a donc

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \phi'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^{n-1} = \ln(1+x)$$

Comme une primitive de ln est $u \mapsto u\ln(u) - u$, on en déduit le résultat (pour « la constantre », on sait que $\phi(0) = 0$).

995.19

Un calcul de série

Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$ sur son domaine de définition.

Le rayon de convergence est 1, le domaine de définition $[-1,1[$ (la convergence en -1 s'obtient par TSSA). Si $x > 0$, on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1}$$

Reste à calculer

$$\phi(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{2n+1}}{2n+1}$$

Mais la dérivée fait disparaître le dénominateur, donc, si $y \in]-1,1[$,

$$\phi'(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} y^{2n} = \frac{1}{1-y^2}$$

Et donc, comme $\phi(0) = 0$, si $y \in]-1,1[$,

$$\phi(y) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

Donc, si $x > 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$$

Si $x < 0$, on peut écrire $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$. On en déduit, si $-1 < x < 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{-x}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{-x})^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{-x}\right)}{\sqrt{-x}}$$

995.20

Développement en série entière

On pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$$

1. Donner le domaine de définition de F.
2. Montrer que F est développable en série entière au voisinage de 0, préciser sur quel intervalle.

On peut utiliser les théorèmes de classe C^∞ sous le signe $\int$, calculer les dérivées successives, majorer le reste dans l'inégalité de Taylor-Lagrange...Seul réel inconvénient : c'est long. Il y a plus rapide, ce qui suit :

Principales étapes : développer t^x en utilisant le dse de l'exponentielle. On doit alors intervertir. Pour appliquer le théorème le permettant, on doit évaluer l'ordre de grandeur de

$$\int_0^1 \frac{(-\ln t)^n}{1+t}\mathrm{d}t$$

Et la bonne idée est de se débarrasser du $1+t$ en l'encadrant entre 1 et 2. Ce qui permet alors d'intégrer.

995.21

Analyticité d'une somme de série entière

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note f sa somme, définie sur $D(0, R)$. Soit a un point de ce disque ouvert. En utilisant une série double, démontrer qu'il existe une suite (b_n) telle que, pour tout nombre complexe h tel que $|h| < R - |a|$,

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n h^n$$

(on développera les $(a+h)^k$ dans l'écriture de $f(a+h)$ par la formule du binôme)

Si $|h| < R - |a|$, alors $|a+h| < R$, ce qui permet d'écrire

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (a+h)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_n a^{n-k} h^k\right)$$

Ici, inutile de rajouter des coefficients nuls dans la suite double qu'on va considérer : on peut en effet écrire directement

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (a+h)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n}{k} a_n a^{n-k} h^k\right)$$

Peut-on intervertir ? posons, si $(n, k) \in \mathbf{N}^2$,

$$u_{n,k} = \binom{n}{k} a_n a^{n-k} h^k$$

On pourra intervertir dès lors qu'on aura montré la sommabilité de la famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbf{N}^2}$. C'est-à-dire la sommabilité de la famille $(|u_{n,k}|)_{(n,k)\in\mathbf{N}^2}$. Pour laquelle on fait évidemment le chemin inverse de celui suivi pour arriver à cette famille :
Pour tout n, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} |u_{n,k}|$ converge, et

$$s_n = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}| = \sum_{k=0}^{n} |u_{n,k}| = |a_n|\ (|a| + |h|)^n$$

Or $|a_n|\ (|a|+|h|)^n \leq |a_n| R^n$ donc, par comparaison, $\displaystyle\sum_n |a_n| R^n$ converge. On a donc la sommabilité voulue, on peut donc intervertir et obtenir

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k} a_n a^{n-k}\right) h^k$$

995.22

Développabilité en série entière

Démontrer que la fonction $x \mapsto \exp(\exp x)$ est développable en série entière sur $\mathbf{R}$.

On peut le faire avec une équation différentielle et un produit de Cauchy, ce n'est pas très rapide. Le mieux est de penser à écrire

$$\exp(\exp x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} e^{nx} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{n^p}{p!\ n!} x^p\right)$$

Il suffit donc de pouvoir intervertir, ce qui est faisable si la famille

$$\left(\frac{n^p}{p!\ n!}x^p\right)_{(n,p)\in\mathbf{N}^2}$$

est sommable. Or cela se vérifie facilement. On n'oublie pas de mettre des valeurs absolues (ou des modules, si on veut : l'exercice est posé sur $\mathbf{R}$ mais le résultat marche très bien sur $\mathbf{C}$). Et on dit : pour tout n, la série $\displaystyle\sum_p \frac{n^p}{p!\ n!}|x|^p$ converge, sa somme vaut $s_n = \dfrac{1}{n!}\exp(n|x|)$. Et $\displaystyle\sum_n s_n$ converge (c'est une série exponentielle).

995.23

Série génératrice d'un dénombrement

Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit d_n le nombre de permutations sans point fixe de $\{1,\ldots,n\}$. On convient $d_0 = 1$.

1. Montrer que le rayon de convergence de $\displaystyle\sum \frac{d_n x^n}{n!}$ est ≥ 1.
2. Pour $n \in \mathbf{N}$, prouver : $\displaystyle n! = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_{n-k}$.
3. Si x est dans $]-1,1[$, calculer $\displaystyle e^x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d_n x^n}{n!}$ et en déduire : $\displaystyle d_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.
4. Déterminer la limite de $\dfrac{d_n}{n!}$. Interprétation ?

---

1. Il suffit de remarquer que $d_n \leq n!$: la suite $\left(\dfrac{d_n x^n}{n!}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est donc bornée.
2. Soit, pour tout k entre 0 et n, $\mathcal{A}_k$ l'ensemble des permutations de $\{1,\ldots,n\}$ ayant exactement k points fixes. Les $\mathcal{A}_k$ sont deux à deux disjoints, et leur réunion est $\mathfrak{S}_n$ (ce n'est pas vraiment une partition de cet ensemble, car $\mathcal{A}_k = \emptyset$). Il y a $\dbinom{n}{k}$ parties à k éléments dans $\{1,\ldots,n\}$. Pour chacune de ces parties, il y a exactement d_{n-k} permutations dont elle est l'ensemble des points fixes (il y a une bijection entre l'ensemble des permutations dont A est l'ensemble des points fixes et l'ensemble des permutations sans point fixe de $\{1,\ldots,n\}\setminus A$). La formule résulte alors de
$$n! = \sum_{k=0}^{n}\mathrm{Card}(\mathcal{A}_k)$$
3. Par produit de Cauchy, pour $x \in]-1,1[$, $\displaystyle e^x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d_n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}w_n x^n$ où $\displaystyle w_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\frac{d_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}n! = 1$ d'après la question précédente. Donc
$$e^x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d_n x^n}{n!} = \frac{1}{1-x}$$
et donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d_n x^n}{n!} = \frac{1}{1-x}e^{-x}$ et un nouveau produit de Cauchy donne alors
$$\frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$
qui est bien la formule attendue.
4. La limite est donc $1/e$, il y a moins de permutations sans point fixe que de permutations avec point fixe.

995.24

Transformations d'Abel

Exercice technique mais important.

Pour $n \in \mathbf{N}_*$ et $t \in [0, \pi]$, soit $S_n(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kt}{k}$.

1. $(S_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[\delta, \pi - \delta]$, pour tout $\delta \in]0, \pi/2[$.
2. En utilisant la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(x \mapsto \frac{\sin(nt)}{n} x^n\right)$, montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers $t \mapsto \dfrac{\pi - t}{2}$ sur $]0, \pi[$.
3. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas uniformément sur $]0, \pi[$.

---

1. C'est un contexte typique d'application de la transformation d'Abel. On pose
$$\sigma_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kt)$$
(avec $\sigma_0(t) = 0$). On calcule
$$\sigma_n(t) = \sin\left(\frac{n+1}{2} t\right) \frac{\sin\left(\dfrac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)}$$
que l'on peut majorer indépendamment de n (ce qui fera « marcher » la transformation d'Abel) :
$$|\sigma_n(t)| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)\right|}$$
Mais sur $[\delta, \pi - \delta]$, on peut majorer, non seulement indépendamment de n, mais aussi indépendamment de t, et c'est ce qui donnera la convergence uniforme :
$$|\sigma_n(t)| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\dfrac{t}{2}\right)\right|} \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\dfrac{\delta}{2}\right)\right|}$$
Ensuite, la transformation d'Abel montre (calcul classique)
$$S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \sigma_k(t) \; + \frac{1}{n} \sigma_n(t)$$
Mais la majoration ci-dessus montre que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \sigma_n$ converge normalement sur $[\delta, \pi - \delta]$. Donc la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \sigma_k\right)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[\delta, \pi - \delta]$. Mais la suite $\left(\dfrac{1}{n}\sigma_n\right)_{n\geq 1}$ converge uniformément (vers $\widetilde{0}$). Et finalement la suite (S_n) converge uniformément.
2. Soit $t \in]0, \pi[$, fixé (faire bien attention au fait que dans la question précédente, la variable, c'était t, ici cela va être x). Notons $a_n = \dfrac{1}{n}\sin(nt)$. On vient de voir que $\sum a_n$ converge. Définissons, pour $x \in [0, 1]$,
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

Commençons par calculer f sur $[0,1[$ en la dérivant (elle est de classe C^∞ sur cet intervalle comme somme d'une série entière de rayon de convergence ≥ 1, vu la convergence simple en $x=1$) :

$$\forall x \in [0,1[\qquad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(nt)\ x^{n-1}$$

Donc, si $x \in [0,1[$,

$$f'(x) = \mathrm{Im}\left(e^{it}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(xe^{it}\right)^n\right)$$

ou encore

$$f'(x) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{it}}{1-xe^{it}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{it}(1-xe^{-it})}{1-2x\cos t+x^2}\right)$$

On aboutit à

$$f'(x) = \frac{\sin t}{1-2x\cos t+x^2}$$

Il va falloir primitiver, avec une arctangente :

$$f'(x) = \frac{\sin t}{(x-\cos t)^2+\sin^2 t} = \frac{\dfrac{1}{\sin t}}{\left(\dfrac{x-\cos t}{\sin t}\right)^2+1}$$

(on a $t \in]0,\pi[$, donc $\sin t \neq 0$). Donc il existe une constante c telle que

$$\forall x \in [0,1[\qquad f(x) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{x-\cos t}{\sin t}\right)+c$$

Et comme $f(0)=0$, et que l'arctangente est impaire,

$$c = \mathrm{Arctan}\left(\frac{\cos t}{\sin t}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\right) = \frac{\pi}{2}-t$$

(on a bien $\pi/2-t$ entre 0 et $\pi/2$). Reste à justifier le passage à la limite : a-t-on

$$f(1) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1-\cos t}{\sin t}\right)+\frac{\pi}{2}-t \qquad ?$$

cela donnerait le résultat attendu, avec un peu de trigonométrie : en effet,

$$\frac{1-\cos t}{\sin t} = \frac{2\sin^2 t/2}{2\sin(t/2)\ \cos(t/2)} = \tan(t/2)$$

ce qui donnerait

$$f(1) = \frac{t}{2}+\frac{\pi}{2}-t = \frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}$$

Maintenant, f est-elle continue en 1, ce qui justifierait

$$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) \qquad ?$$

C'est ce qui reste à montrer, à l'aide d'une transformation d'Abel (encore !), cette fois sur les restes. On pose, pour tout $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbf{N}$,

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$$

et on note $r_n = R_n(1)$. On fait attention ci-dessous au fait que parfois x est dans $[0,1]$, parfois dans $[0,1[$. On a alors

$$a_k = r_{k-1}-r_k$$

ce qui permet la transformation d'Abel suivante, si $x \in [0,1[$ (la suite (r_n), qui converge vers 0, est bornée, ce qui autorise à couper en deux morceaux la série ci-dessous) :

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_{k-1} x^k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k x^k \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} r_k x^{k+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k x^k \\ &= r_n x^{n+1} + (x-1) \sum_{k=n+1}^{+\infty} r_k x^k \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$. Il y a un rang n_0 (que l'on fixe) tel que

$$\forall n \geq n_0 \qquad |r_n| \leq \epsilon$$

Et alors, si $x \in [0,1[$ et $n \geq n_0$,

$$|R_n(x)| \leq \epsilon + (1-x)\epsilon \frac{x^{n+1}}{1-x} \leq 2\epsilon$$

et donc

$$\forall n \geq n_0 \qquad \forall x \in [0,1[\qquad |R_n(x)| \leq 2\epsilon$$

On a bien montré la convergence uniforme des restes vers 0, donc la convergence uniforme de la série $\sum a_n x^n$ sur $[0,1]$, on conclut que la somme en 1 est bien la limite de la somme pour $x \in [0,1[$.

3. **Première méthode :** La convergence n'est pas uniforme : sinon, par double limite, $\pi - t/2$ tendrait vers 0 quand t tend vers 0.

   Seconde méthode : Il est classique de demander à l'oral la non convergence uniforme sans avoir préalablement calculé la somme de la série (le calcul de cette somme est quand même un gros travail quand on n'a pas la théorie des séries de Fourier au programme, alors que la non convergence uniforme directe est plus élémentaire, quoiqu'un peu astucieuse, voir ci-après). Notons, si $x \in [0,1[$,

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{x}$$

   Si la suite (S_n) converge uniformément sur $]0,\pi[$, alors la suite $(S_{2n} - S_n)$ converge uniformément vers 0. On aimerait bien montrer que ce n'est pas le cas. Il suffit pour cela de trouver une suite (x_n) telle que la suite $(S_{2n}(x_n) - S_n(x_n))$ ne converge pas vers 0. On va prendre (x_n) tendant vers 0, car c'est vers 0 qu'il y a problème. Un bon choix (ce n'est pas le seul) est $x_n = \dfrac{\pi}{4n}$. En effet, si $n+1 \leq k \leq 2n$, on a $\pi/4 \leq kx_n \leq \pi/2$, donc

$$S_{2n}(x_n) - S_n(x_n) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{\sqrt{2}}{4}$$

   et on a bien non convergence uniforme.

3 Intégration et dérivation

995.25

Théorème de Rolle et algèbre des polynômes

Soit P un polynôme réel scindé (sur $\mathbf{R}$).

1. Démontrer que son polynôme dérivé P' est scindé.
2. Démontrer que, si a et b ne sont pas tous les deux nuls, $aP + bP'$ est scindé.
3. Démontrer que, si $Q = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ est scindé, $\sum_{k=0}^{d} a_k Q^{(k)}$ est scindé. *Question nettement plus difficile, classiquement posée à l'X par exemple ; on peut utiliser la question précédente, et l'endomorphisme $Q(D)$, D désignant l'endomorphisme de dérivation.*

---

1. On note $x_1, x_2, \ldots, x_q$ les zéros de P, on note m_i la multiplicité du zéro m_i. Alors $m_1 + \ldots + m_q = \deg(P)$. Chaque x_i est racine de P' avec multiplicité $m_i - 1$ (pour les racines simples de P, convenir qu'elles sont racines de P' avec multiplicité 0 permet d'éviter de considérer des cas). Le théorème de Rolle dit qu'il y a au moins $q-1$ racines supplémentaires de P', une dans chaque $]x_i, x_{i+1}[$ au moins. Ce qui fait en tout, au moins
$$\sum_{i=1}^{q}(m_i - 1) + (q-1) = \sum_{i=1}^{q} m_i \ - 1 = \deg(P')$$
racines de P'. On peut donc conclure, et ajouter qu'il n'y a pas d'autre racine, et que les y_i sont racines simples.
2. Si $a = 0$, on vient de le faire. Si $b = 0$, il n'y a rien à faire. Supposons $ab \neq 0$. Reprenons les notations de la question précédente. De nouveau, les x_i sont racines de multiplicité $m_i - 1$ de $aP + bP'$. Soit $1 \leq i \leq q-1$. P' garde un même signe strict sur $]x_i, y_i[$ d'une part, sur $]y_i, x_{i+1}[$ d'autre part (il ne s'annule sur aucun de ces intervalles). Ces signes sont opposés car y_i est racine simple de P'. De plus, P/P' est équivalent au voisinage de x_i à quelque chose du type $x \mapsto \alpha_i(x - x_i)$, donc $P = \underset{x_i}{o}(P')$. Et donc $aP + bP' \equiv_{x_i} bP'$. Deux fonctions équivalentes en un point ont strictement même signe au voisinage de ce point, donc $aP + bP'$ a un signe différent au voisinage à droite de x_i et au voisinage à gauche de x_{i+1}. On en déduit, par théorème des valeurs intermédiaires, que $aP + bP'$ s'annule sur $]x_i, x_{i+1}[$. Ce qui fait presque assez de zéros...à un près, mais si le nombre de zéros d'un polynôme réel (comptés avec leur multiplicité) est au moins égal à son degré moins un, ce polynôme est scindé sur $\mathbf{R}$. Cela dit, on peut trouver où le zéro supplémentaire est. Supposons par exemple P de degré pair. Supposer P unitaire et $a > 0$ n'est pas restrictif. Alors P a pour limite $+\infty$ en $\pm\infty$. De plus P' a un degré impair, donc a des signes opposés avant sa plus petite racine et après sa plus grande, respectivement $-$ et $+$ car les hypothèses font que le coefficient dominant de P' est strictement positif. Donc $aP + bP'$ est, suivant le signe de b, strictement négatif au voisinage à gauche de x_1 ou au voisinage à droite de x_q (rappelons qu'au voisinage de chaque x_i, $aP + bP'$ est équivalent à bP'. Ce qui nous fournit, par théorème des valeurs intermédiaires, le zéro supplémentaire cherché avant x_1 ou après x_q. Le cas où P est de degré impair se règle (espère-t-on !) de même.
3. Question amusante, qu'on aurait pu poser de manière moins déroutante...En effet, on démontre en fait que que, si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ est scindé, et si Q est scindé, alors $\sum_{k=0}^{d} a_k Q^{(k)}$ est scindé (il n'y a aucun intérêt à supposer que $P = Q$). On a
$$\sum_{k=0}^{d} a_k Q^{(k)} = [Q(D)](Q)$$
Mais $Q = \lambda \prod_{i=1}^{d}(X - \alpha_i)$, les α_i n'étant pas distincts. Donc
$$[Q(D)](Q) = \lambda(D - \alpha_q Id) \circ \cdots \circ (D - \alpha_1 Id)(Q)$$

Or la question précédente permet de montrer par récurrence que, pour tout $k \geq 1$, $[(D-\alpha_q Id)\circ\cdots\circ(D-\alpha_1 Id)](Q)$ est scindé...

995.26

Démontrer que le polynôme

$$D^n\Big((X^2-1)^n\Big)$$

est scindé sur $\mathbf{R}$, que toutes ses racines sont simples et appartiennent à l'intervalle ouvert $]-1,1[$.

On constate que -1 et 1 sont racines de multiplicité n de $(X^2-1)^n$. Notant $P=(X^2-1)^n$ ce polynôme, -1 et 1 sont donc racines de D^kP pour $0 \leq k \leq n-1$. On montre alors par récurrence que D^kP a au moins k racines distinctes dans $]-1,1[$ pour $0 \leq k \leq n$ par application répétée du théorème de Rolle. A l'oral, on schématisera les zéros sur un axe, la rédaction un peu laborieuse à l'écrit sera remplacée par une explication plus facile à mener. La scission vient alors du fait que D^nP est de degré n.

995.27

Inégalité de Jensen

Soit $f\ :\ [a,b]\to\mathbf{R}$ et $\phi\ :\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ continues, ϕ convexe. On suppose $a<b$. On veut montrer que

$$\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi\left(f(t)\right)\mathrm{d}t$$

appelée inégalité de Jensen.

1. Démontrer l'inégalité en utilisant des sommes de Riemann.
2. On suppose désormais ϕ de classe C^1. Soit $\gamma\in\mathbf{R}$, montrer
$$\forall x\in\mathbf{R}\qquad \phi(x)\geq\phi(\gamma)\ +\ (x-\gamma)\phi'(\gamma) \tag{1}$$
3. On applique (1) à $f(t)$, puis on intègre l'inégalité obtenue entre a et b. Comment choisir γ pour en déduire l'inégailté de Jensen ?
4. Ecrire l'inégalité de Jensen pour $\phi\ :\ x\longmapsto x^2$. Vérifier que le résultat obtenu peut s'obtenir grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
5. Ecrire l'inégalité de Jensen pour $\phi\ :\ x\longmapsto 1/x$: on supposera la fonction f à valeurs réelles strictement positives. Vérifier que le résultat obtenu peut (encore !) s'obtenir grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

---

1. Définissons, pour tout $n\geq 1$, $S_n=\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)$. C'est une somme de Riemann associée à f et à la subdivision régulière de pas $\dfrac{b-a}{n}$ sur le segment $[a,b]$. En utilisant la convexité de ϕ,
$$\phi\left(\frac{S_n}{b-a}\right)=\phi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right)\leq\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi\left(f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right)$$
Mais $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$,
$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\phi\left(f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi\left(f(t)\right)\ \mathrm{d}t$,
ϕ est continue, les inégalités larges « sont conservées à la limite »...On conclut donc.
2. C'est du cours (le graphe de ϕ est au-dessus de ses tangentes).

3. Donc, pour tout $t \in [a,b]$,
$$\phi\left(f(t)\right) \geq \phi(\gamma) + \left(f(t)-\gamma\right)\phi'(\gamma)$$
On intègre entre a et b ($a<b$, donc l'inégalité ne change pas de sens), ce qui donne
$$\int_a^b \phi\left(f(t)\right)\mathrm{d}t \geq (b-a)\phi(\gamma) + \left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \gamma(b-a)\right)\phi'(\gamma)$$
En particulier, prenons $\gamma = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b \phi\left(f(t)\right)\mathrm{d}t$, on obtient bien l'inégalité souhaitée.

4. La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe, l'inégalité s'écrit :
$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$$
ou encore
$$\left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t$$
ce qui est bien une inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\left(\int_a^b 1\times f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leq \left(\int_a^b 1^2\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t\right)$$

5. La fonction $x \mapsto 1/x$ est convexe sur $]0,+\infty[$, ce qui permet d'écrire
$$\frac{b-a}{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t} \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$$
ou encore
$$(b-a)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\right)$$
(inégalité rencontrée par exemple dans un exercice d'oral X avec $a=0$, $b=1$, ce qui la rend plus esthétique :
$$1 \leq \left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\right)$$
Mais en tout cas, Cauchy-Schwarz fonctionne encore ici, en prenant les fonctions $\sqrt{f}$ et $1/\sqrt{f}$.

995.28

Sommes de Riemann

On désigne par x un nombre complexe de module différent de 1 ; on pose, pour tout entier naturel k,
$$I_k = \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikt}}{x-e^{it}}dt$$

1. Calculer, pour k entier naturel non nul, $I_k - xI_{k-1}$.
2. Calculer I_0 à l'aide de sommes de Riemann (on pourra se poser la question suivante : si les ξ_k $(1 \leq k \leq n)$ sont les racines du polynôme P, de quel polynôme les $1/(x-\xi_k)$ sont-ils les racines ?).
3. Calculer I_k pour tout k.
4. Faire dans I_1 le « changement de variable » $u = e^{it}$. Qu'en conclure ?

---

1. $I_1 - xI_0 = -2\pi$, et si $k \geq 1$, $I_k - xI_{k-1} = 0$.
2. $$I_0 = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{x-e^{2ik\pi/n}}\right)$$

   Si les ξ_k sont les racines de P, et si toutes ces racines sont différentes de x, les $1/(x-\xi_k)$ sont les racines de $P(x-1/X)$ qui n'est pas un polynôme…mais qui le devient si on le multiplie par X^n. Et vérifions :

   $$\begin{aligned} X^n P(x-1/X) &= X^n \prod_{k=1}^{n}\left(x - \frac{1}{X} - \xi_k\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n}\left(1 - X(x-\xi_k)\right) \\ &= c\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x-\xi_k} - X\right) \end{aligned}$$

   On peut donc dire que les $\dfrac{1}{x-e^{2ik\pi/n}}$ sont les racines du polynôme $X^n\left(\left(x-\dfrac{1}{X}\right)^n - 1\right)$ c'est-à-dire du polynôme $(xX-1)^n - X^n$. Leur somme, par relation coefficients-racines, vaut donc

   $$-\frac{-nx^{n-1}}{x^n-1}$$

   Multiplier par $2\pi/n$ et prendre la limite quand $n \to +\infty$ est alors facile, à condition de bien distinguer les cas $|x| < 1$ et $|x| > 1$.
3.
4. Le changement de variable $u = e^{it}$ est un faux changement de variable ! Quand t décrit $[0, 2\pi]$, u ne décrit pas du tout un intervalle de $\mathbf{R}$. Et d'ailleurs on n'obtient pas un résultat cohérent…

995.29

Lemme de Riemann-Lebesgue, résultat classique

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. On veut montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I \sin(nt)f(t)dt \;=\; 0$$

1. Démontrer le résultat pour une application constante.
2. En déduire le résultat pour une application en escalier.
3. En déduire le résultat pour une application continue par morceaux.
4. Sans utiliser les questions précédentes, démontrer directement et simplement le résultat pour une application de classe C^1.

Remarque : On peut décliner cet exercice en remplaçant $\sin(nt)$ *par* $\cos(nt)$ *ou* $\exp(int)$.

1. Calcul direct.
2. S'en déduit sans difficulté en considérant une subdivision de I adaptée à f.

3. *Cette troisième question est importante.*
   Soit f continue par morceaux sur I.

   Soit $\epsilon > 0$. Soit h en escalier sur I telle que

$$N_\infty(f-h) \leq \epsilon$$

   (densité connue des applications en escalier sur I dans les applications continues par morceaux sur I, pour la norme N_∞, on dit aussi pour la topologie de la convergence uniforme). On écrit naturellement, pour $n \geq 0$,

$$\int_I \sin(nt)f(t)\mathrm{d}t = \int_I \sin(nt)h(t)\mathrm{d}t + \int_I \sin(nt)(f(t)-h(t))\mathrm{d}t$$

   Si $\|.\|$ désigne la norme sur l'espace dans lequel f et h prennent leurs valeurs, on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\left\|\int_I \sin(nt)(f(t)-h(t))\mathrm{d}t\right\| \leq \int_I |\sin(nt)| \ \ \|f(t)-h(t)\|\,\mathrm{d}t \leq \epsilon\delta(I)$$

   où $\delta(I)$ est la longueur du segment I (ainsi notée car c'est ce que l'on peut aussi appeler le diamètre de I). Il ne reste plus qu'à dire que, en vertu du résultat de la question précédente, il y a un rang n_0 à partir duquel on a

$$\left\|\int_I \sin(nt)h(t)\mathrm{d}t\right\| \leq \epsilon$$

   et que si l'on veut, suivant les usages de bonne rédaction, avoir un ϵ tout rond à la fin, on aurait pu imposer $N_\infty(f-h) \leq \dfrac{\epsilon}{2\delta(I)}$ et considérer un rang n_0 à partir duquel $\left\|\displaystyle\int_I \sin(nt)h(t)\mathrm{d}t\right\| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$.

   Ici on a utilisé la densité « avec les boules » : on peut trouver h aussi près que l'on veut de f. On a souvent tendance à ne considérer la densité qu'avec les suites : il y a une suite (h_p) de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f. On sait donc que, pour tout p,

$$\int_I \sin(nt)h_p(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

   Et on aimerait bien que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_I \sin(nt)\lim_{p\to+\infty}(h_p(t))\,\mathrm{d}t\right) = 0$$

   On peut commencer par dire que cela revient au même d'écrire

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{p\to+\infty}\left(\int_I \sin(nt)h_p(t)\mathrm{d}t\right)\right) = 0$$

   En effet, de $|\sin| \leq 1$ on déduit facilement que la suite de fonctions
   $(t \mapsto h_p(t)\sin(nt))_{p\geq 0}$ converge uniformément, pour tout n, vers la fonction $t \mapsto f(t)\sin(nt)$. Et la convergence uniforme sur un segment suffit à assurer la convergence des intégrales sur ce segment.

   On aimerait donc intervertir les limites. Mais le théorème de la double limite ne se présente pas tout-à-fait sous cette forme, l'effort pour s'y ramener n'est pas négligeable. Et il n'est pas inutile de réécrire ce théorème pour faire coïncider sa formulation et notre problème. On définit donc, sur $\mathbf{N}$, chaque

$$\phi_p \ : \ n \longmapsto \int_I h_p(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$$

   Il n'est pas difficile de vérifier que la suite (ϕ_p) converge uniformément sur $\mathbf{N}$ vers

$$\phi \ : \ n \longmapsto \int_I f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$$

   puis, à partir de là, on peut utiliser la double limite. Mais c'est plus dur que la première méthode.

4. Evidemment, si les hypothèses permettent de faire une intégration par parties en primitivant le sinus de manière à faire apparaître un $1/n$, c'est plus facile !

995.30

Suite d'intégrales

Soit f réelle continue sur $[0,1]$. Montrer que la suite de terme général $n\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\ dt$ admet pour limite $f(1)$.

Changement de variable $t^n = u$, ou plutôt $t = u^{1/n}$. Fonction dominante, par exemple : $\widetilde{N_\infty(f)}$.

995.31

Suite d'intégrales

Soit f continue sur $[0,1]$. Déterminer la limite ℓ quand n tend vers l'infini de $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t^n)}{1+t}dt$; on suppose f dérivable en 0, déterminer un équivalent de
$\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t^n)}{1+t}dt\ -\ell$

La limite est $\ln 2\ f(0)$ (théorème de convergence dominée, fonction dominante, par exemple $\widetilde{N_\infty(f)}$). Puis (remarquons que la limite s'écrit sous forme d'une intégrale, forme à laquelle il faut évidemment revenir)

$$\int_0^1 \frac{f(t^n)}{1+t}dt\ -\ell = \int_0^1 \frac{f(t^n)-f(0)}{1+t}\mathrm{d}t$$

Le changement de variable habituel dans ce genre d'exercice : $u = t^n$, ou plutôt $t = u^{1/n}$.

$$\int_0^1 \frac{f(t^n)}{1+t}dt\ -\ell = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{f(u)-f(0)}{u}\,\frac{u^{1/n}}{1+u^{1/n}}\mathrm{d}u$$

La fonction $g\ :\ u \longmapsto \dfrac{f(u)-f(0)}{u}$ se prolonge à $[0,1]$ en restant continue. On en déduit, par théorème de convergence dominée (domination par exemple par $\widetilde{N_\infty(g)}$) qu'un équivalent est

$$\frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{f(u)-f(0)}{u}\mathrm{d}u$$

sous réserve que cette intégrale soit non nulle.

995.32

Suite d'intégrales

Pour tout entier naturel non nul n, on définit

$$I_n = \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n\ \ln x\ dx\ .$$

Démontrer que la suite (I_n) converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\ \ln x\ dx$.

On peut montrer l'existence de l'intégrale pour commencer.
Puis on considère $\phi_n\ :\ x \mapsto \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n\ \ln x\ \mathbf{1}_{]0,n[}(x)$. Le suite (ϕ_n) converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers $x \mapsto e^{-x}\ln x$. Et on montre, à l'aide de l'inégalité classique $\ln(1+u) \leq u$, que la suite (ϕ_n) est dominée par sa limite, limite qui est intégrable (on fait des études sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$, et on compare à l'exemple de Riemann dans chacun des cas).

995.33

Calcul d'intégrale

Calculer, après avoir montré son existence, l'intégrale suivante :

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}dt$$

(on suppose $a < b$).

L'existence se fait avec des équivalents à Riemann, sans trop de problème. Il faudrait au moins, à l'oral, avoir l'idée de mettre $(b-t)(t-a)$ sous forme canonique

$$(b-t)(t-a) = -(t^2 - (a+b)t + ab) = -\left(\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(a+b)^2 - 4ab}{4}\right)$$

Ou encore

$$\begin{aligned}(b-t)(a-t) &= \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 - \left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{t - \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)^2\end{aligned}$$

D'où l'idée de faire un changement de variable

$$u = \frac{t - \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}$$

c'est-à-dire, écrit dans le bon sens :

$$t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}u$$

L'autre idée, moins systématique, mais intéressante du point de vue de l'observation, part du fait qu'on sait (on doit savoir) calculer l'intégrale si $a = -1$ et $b = 1$: très facilement, elle vaut π. On peut alors essayer un changement de variable affine qui transformerait le segment d'intégration $[a, b]$ en $[-1, 1]$. Il faut être capable d'écrire un tel changement de variable ! On paramètre le segment $[a, b]$ non pas comme d'habitude (je pars de a et j'ajoute un petit morceau de segment : $t = a + u(b-a)$, mais là u varierait entre 0 et 1), mais d'une manière aussi très intéressante : je pars du milieu de $[a, b]$, et j'ajoute ou je retranche un petit peu du « rayon » (demi-diamètre) du segment ; bref, paramétrage

$$t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}u$$

avec u qui varie entre -1 et 1. Bref, l'intégrale vaut $\pi(b-a)/2$.

995.34

Suite d'intégrales, difficile, type X-ens

Soit f, g deux applications de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}_*^+$ et, si $n \in \mathbf{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 fg^n$. Montrer que la suite $\left(I_n^{1/n}\right)$, puis la suite $\left(I_{n+1}/I_n\right)$, convergent vers $\max(g)$.

On commencera par une majoration simple (on dira évidemment que f et g sont strictement positives sur $[0, 1]$, continues donc atteignant chacune un minimum et un maximum sur ce segment) :

$$\forall t \in [0, 1] \qquad f(t)\ \left(g(t)\right)^n \leq f(t)\left(\max(g)\right)^n$$

d'où l'on tire

$$I_n^{1/n} \leq \max(g)\ \left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)^{1/n}$$

et le majorant tend vers $\max(g)$.
Bien sûr, minorer, c'est un peu moins naturel. Il va sans doute falloir sortir les epsilons. Soit $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ et un segment J de longueur η inclus dans $[0, 1]$ tel que

$$\forall t \in J \qquad g(t) \geq \max(g) - \frac{\epsilon}{2}$$

(il n'est pas restrictif de supposer $\max(g) - \dfrac{\epsilon}{2} > 0$).
Ensuite, il y a un peu de technique. L'histoire des I_{n+1}/I_n est nettement plus dure. On peut commencer par dire que

$$I_{n+1} \leq \max(g) I_n$$

mais c'est dans l'autre sens que, tout au moins si g atteint son maximum en une infinité de points, la rédaction est compliquée. On s'en sort autrement, via l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui permet de dire que

$$I_{n+1}^2 \leq I_n I_{n+2}$$

et donc la suite de terme général I_{n+1}/I_n croît. Majorée par $\max(g)$, elle converge vers une limite $\ell > 0$. Donc la suite de terme général $\ln(I_{n+1} - \ln(I_n)$ converge vers $\ln(\ell)$. Par le théorème de Césaro (hors programme, mais la sommation des relations de comparaison nous permettra de l'obtenir facilement),

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} [\ln(I_{k+1} - \ln(I_k)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

et le résultat sur $\left(I_n^{1/n}\right)$ permet alors de conclure.

995.35

Fonction définie par une intégrale

Soit $f \; : \; x \mapsto \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que f se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, étudier son comportement en $+\infty$; étudier ses extremums sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Il est très important de penser dans ce genre d'exercice aux deux idées principales : utilisation d'une primitive, utilisation d'un changement de variable pour se ramener au segment fixe $[0, 1]$.
On peut définir F primitive de $\dfrac{\cos t}{t}$, de classe C^∞ comme primitive d'une fonction de classe C^∞. Mais une telle primitive ne peut être définie que sur $\mathbf{R}_*^+$ ou sur $\mathbf{R}_*^-$. L'écriture

$$f(x) = F(3x) - F(x)$$

ne montre donc la classe C^∞ de f que sur $\mathbf{R}_*^+$ ou sur $\mathbf{R}_*^-$. Pour montrer que f est prolongeable en une fonction de classe C^∞, il faudrait montrer que f puis ses dérivées ont des limites en 0, et appliquer de manière récurrente le théorème « limite de la dérivée ». Ce serait au moins fastidieux.
L'astuce est donc de procéder autrement : le changement de variable

$$t = x + u(3x - x)$$

permet de ramener (classique) l'intégrale aux deux bornes fixes 0 et 1. On a ainsi

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\cos(x + 2xu)}{x + 2xu} 2x du = 2\int_0^1 \frac{\cos(x + 2xu)}{1 + 2u} du$$

La dernière expression obtenue ne pose pas de problème en 0, on peut donc prolonger f à $\mathbf{R}$ entier en posant

$$\widetilde{f}(x) = 2\int_0^1 \frac{\cos(x + 2xu)}{1 + 2u} du$$

et $\widetilde{f}$ est de classe C^∞ comme le prouve une application récurrente (certes un peu longue à rédiger, mais les dominations sont simples) du théorème de dérivation sous le signe $\int$.

Autre méthode : Ecrire

$$f(x) = \int_x^{3x} \frac{(-1 + \cos t) + 1}{t} dt = \ln 3 + \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt$$

puis développer $\dfrac{\cos t - 1}{t}$ en série entière. On intègre terme à terme sans réel problème (convergence normale sur un segment, la série entière a un rayon de convergence infini). On obtient que f est dse sur $\mathbf{R}$, donc C^∞. Pour l'étude des extremums, en revanche, ailleurs qu'en 0 on dérive

$$f'(x) = \frac{\cos(3x) - \cos x}{x}$$

et il n'y a plus qu'à utiliser la formule de différence des cosinus :

$$f'(x) = \frac{-2}{x}\sin(2x)\ \sin x = \frac{-4}{x}\sin^2 x\ \cos x$$

Il y a extremum en les $\pi/2 + k\pi$ où f' change de signe. En les multiples de π non nuls, f' s'annule mais garde un signe strictement constant au voisinage, pas d'extremum donc.

995.36

Fonction définie par une intégrale

Soit

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}\ dt\ .$$

Domaine de définition ? La fonction f est-elle continue ? de classe C^1 ? Calculer la dérivée de f, puis f. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{Arctan}\, t}{t}\right)^2\ dt$

Le domaine de définition est $\mathbf{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ se prolongeant par continuité à $[0, +\infty[$ et étant $\underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$, or $3 > 1$...Définissons, sur $\mathbf{R}\times]0, +\infty[$,

$$h\ :\ (x,t) \mapsto \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$$

Il est préférable de montrer directement la classe C^1, la domination étant plus simple, mais il n'est pas impossible que l'examinateur demande expressément la continuité pour commencer. Pour dominer h, on ne peut pas utiliser

$$|\mathrm{Arctan}(xt)| \leq \pi/2$$

car la fonction $x \mapsto \dfrac{\pi}{2t(1+t^2)}$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$. On a donc recours à l'inégalité

$$|\mathrm{Arctan}\, u| \leq |u|$$

qui se montre par concavité de la fonction Arctan sur $\mathbf{R}^+$ (la courbe est en-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0) puis par imparité. On est alors amené à une domination sur tout segment (on suppose $M > 0$) :

$$\forall (x,t) \in [-M, M]\times]0, +\infty[\qquad |h(x,t)| \leq \frac{M}{1+t^2}$$

Les autres hypothèses du théorème de continuité étant bien évidentes, on conclut.

Mais il aurait été plus judicieux de s'occuper d'abord de la classe C^1, en disant que h est dérivable par rapport à sa première variable sur son domaine de définition, et

$$\forall (x,t) \in \mathbf{R}\times]0, +\infty[\qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} \leq \frac{1}{1+t^2}$$

qui constitue une domination irréprochable. On ne s'attarde pas sur les hypothèses autres que la domination, elles sont faciles à vérifier. On aboutit au fait que f est C^1 sur $\mathbf{R}$, sa dérivée valant en tout $x \in \mathbf{R}$:

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\mathrm{d}t$$

que l'on calcule en décomposant en éléments simples, supposant $x \notin \{-1, 0, 1\}$. On cherche a, b, c, d tels que

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{at+b}{1+x^2t^2} + \frac{ct+d}{1+t^2}$$

La parité nous montre d'abord que $a = c = 0$. On réduit au même dénominateur, on voit que $b + d = 1$ et $b + dx^2 = 0$, d'où les valeurs de b et d et la décomposition

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{x^2}{x^2-1}\frac{1}{1+x^2t^2} - \frac{1}{x^2-1}\frac{1}{1+t^2}$$

Il faut alors éviter de se tromper avec le signe de x...supposons donc $x > 0$ et $x \neq 1$ dorénavant. Alors

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-1}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(x+1)}$$

Cette valeur est encore valable pour $x = 1$ car f' est continue. Compte tenu de $f(0) = 0$ on obtient

$$\forall x \geq 0 \qquad f(x) = \frac{\pi}{2}\ln(x+1)$$

et pour $x < 0$, par imparité, on trouve $-f(-x)$...L'intégrale demandée se calcule par parties pour se ramener à $f(1)$.

995.37

Fonction définie par une intégrale

Existence et calcul éventuel de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(tx)}{t}dt$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}\sin(tx)}{t}$ est continue sur $\mathbf{R}_*^+$, prolongeable par continuité en 0 (elle a pour limite x en 0), seul se pose donc le problème de l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$. Mais on a, par croissances comparées,

$$e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t}\right)$$

donc, sin étant bornée,

$$\left|\frac{e^{-t}\sin(tx)}{t}\right| \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

ce qui prouve par comparaison à l'exemple de Riemann l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$ et, par suite, sur $]0, +\infty[$. L'intégrale est bien définie.
Définissons maintenant

$$\begin{array}{rccl} h : & \mathbf{R}\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & (x,t) & \longmapsto & \dfrac{e^{-t}\sin(xt)}{t} \end{array}$$

- Pour tout $x \in \mathbf{R}$, la fonction $h(x, .)\ :\ t \mapsto h(x,t)$ est continue (par morceaux suffirait) sur $]0, +\infty[$, intégrable sur cet intervalle (vu lors de l'étude de l'existence de l'intégrale).
- h est dérivable par rapport à sa première variable sur son domaine de définition, et

$$\forall (x,t) \in \mathbf{R}\times]0,+\infty[\qquad \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = e^{-t}\cos(xt)$$

- Pour tout $x \in \mathbf{R}_*^+$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x, .)$ est continue (par morceaux suffirait) sur $]0, +\infty[$, intégrable sur cet intervalle (c'est une conséquence des dominations ci-dessous mais on peut le voir rapidement : pas de problème en 0, et négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$).
- Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $\dfrac{\partial h}{\partial x}(., t)$ est continue sur $\mathbf{R}$.
- **Domination :** Soit K un compact inclus dans $\mathbf{R}$. Il existe M tel que $0 < M$ et $K \subset [-M, M]$. On a alors

$$\forall (x,t) \in K\times]0,+\infty[\qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq Mte^{-t}$$

(en utilisant l'inégalité, vraie pour tout réel u : $|\sin u| \leq |u|$) et $\phi_K \ : \ t \mapsto Mte^{-t}$ est indépendante de x, continue (*par morceaux* suffirait), intégrable sur $]0,+\infty[$ par comparaison à l'exemple de Riemann (pas de problème en 0, et négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$).
En appliquant le théorème de dérivation sous le signe $\int$, on conclut :
l'application $\phi \ : \ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(tx)}{t}dt$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, et

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad \phi'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}dt$$

on calcule facilement en interprétant comme partie réelle d'une intégrale facile à calculer, puis on primitive, et on utilise $\phi(0) = 0$.

995.38

Fonction définie par une intégrale

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}dt$.

Le bon réflexe, après avoir montré l'existence (comparaison à Riemann en 0 et en $+\infty$) est de considérer cette intégrale, définie sur $\mathbf{R}$, comme fonction de x, de classe C^1 sur $\mathbf{R}_*^+$, et de dérivée

$$x \mapsto 2x \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(x^2+t^2)}\mathrm{d}t$$

(se montre par domination sur $[a,b]$, $0 < a < b$, du type

$$\frac{1}{(1+t^2)(x^2+t^2)} \leq \frac{1}{(1+t^2)(a^2+t^2)}$$

On calcule la dérivée par décomposition en éléments simples (même chose que dans un autre exercice plus haut, on écarte momentanément $x = 1$ puis on le récupère par continuité). On obtient, notant $I(x)$ l'intégrale :

$$\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\qquad I'(x) = \frac{2x}{x^2-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{x^2+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

Donc, si $x > 0$ et $x \neq 1$,

$$I'(x) = \frac{2x}{x^2-1}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2x}\right) = \frac{\pi}{x+1}$$

formule qui reste vraie pour $x = 1$, par continuité. Donc

$$\forall x > 0 \qquad I(x) = \pi\ln(x+1) + k$$

où $k \in \mathbf{R}$. Le principal problème est la continuité de I en 0. Une domination n'est pas évidente, on peut partir, si $x \in [0,a]$, $a > 0$, de la constatation suivante : si $x^2+t^2 \leq 1$, on a $0 < t^2 \leq x^2+t^2 \leq 1$, donc

$$\left|\ln(x^2+t^2)\right| \leq \left|\ln(t^2)\right|$$

si au contraire $x^2+t^2 \geq 1$, on a $1 \leq x^2+t^2 \leq a^2+t^2$ et donc

$$\left|\ln(x^2+t^2)\right| \leq \left|\ln(a^2+t^2)\right|$$

Comment dominer à partir de ces remarques ? car l'ensemble des t qui vérifie la première condition et l'ensemble des t qui vérifient la seconde condition dépendent tous les deux de x. Mais, de toute manière,

$$\left|\ln(x^2+t^2)\right| \leq 2\left|\ln(t)\right| + \left|\ln(a^2+t^2)\right|$$

et donc on peut dominer

$$\forall (x,t) \in [0,a]\times]0,+\infty[\qquad \left|\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\right| \leq \frac{2\left|\ln(t)\right| + \left|\ln(a^2+t^2)\right|}{1+t^2}$$

ce qui permet de montrer la continuité sur $\mathbf{R}^+$ et donc, par parité, sur $\mathbf{R}$. Or $I(0) = 0$ (découper l'intégrale en deux intégrales, sur $]0,1[$ et sur $]0,+\infty[$, et faire dans l'une d'elles le changement de variable $t = 1/u$). Donc, si $x \geq 0$,

$$I(x) = \pi \ln(1+x)$$

Et, pour x quelconque, $I(x) = \pi \ln(1+|x|)$.

995.39

Fonction définie par une intégrale

Soit a et b des réels avec $0 < a < b$. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(tx)\, dt$. Trouver I, domaine de définition de F. Montrer que F est C^1 et calculer F'. Calculer $F(0)$, puis $F(x)$ pour tout x de I.

La fonction à l'intérieur de l'intégrale se prolonge par continuité en 0, et est négligeable devant n'importe quelle puissance de $1/t$ au voisinage de $+\infty$. On a donc $I = \mathbf{R}$.
Le théorème de dérivation sous le signe $\int$ s'applique sans grande difficulté (on domine la dérivée partielle par rapport à x par $e^{-at} - e^{-bt}$. Le calcul de la dérivée est facilité par le fait de poser $\sin(xt) = \mathrm{Im}(e^{ixt})$. On trouve

$$F'(x) = \frac{x}{b^2 + x^2} - \frac{x}{a^2 + x^2}$$

Et donc

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{b^2 + x^2}{a^2 + x^2}\right) + cte$$

Pour la constante, on peut calculer la valeur en 0, qui est la limite quand $\epsilon \to 0$ de

$$\int_\epsilon^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt$$

On coupe l'intégrale en deux (ce qu'on ne pourrait pas faire avec $\epsilon = 0$), on fait dans la première intégrale le changement de variable $t = u/a$, dans la deuxième $t = u/b$, on obtient

$$F(0) = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{e^{-u}}{u}\, du \right)$$

limite qui vaut $\ln(b/a)$ (même technique que celle vue dans l'exercice sur $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$). La constante est donc nulle.
Détail de la dernière étape : on peut faire le changement de variable $u = a\epsilon + (b\epsilon - a\epsilon)v$; ou écrire :

$$\int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{e^{-u}}{u}\, du = \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{du}{u} + \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{e^{-u} - 1}{u}\, du$$

La première intégrale se calcule. La fonction $u \mapsto \dfrac{e^{-u} - 1}{u}$ se prolonge par continuité en 0, et a pour limite 0 en $+\infty$. Or elle est continue. Elle est donc bornée. Et en majorant

$$\left| \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{e^{-u} - 1}{u}\, du \right| \leq \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \left| \frac{e^{-u} - 1}{u} \right|\, du \leq M(b-a)\epsilon$$

on voit que cette intégrale tend vers 0 quand ϵ tend vers 0 (rappelons que $\epsilon > 0$ dans tous les calculs).
Pour le changement de variable :

$$\int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{e^{-u}}{u}\, du \;=\; (b-a) \int_0^1 \frac{e^{-a\epsilon + (a\epsilon - b\epsilon)v}}{a + (b-a)v} dv$$

qui tend sans trop de problème, quand $\epsilon \to 0$, vers

$$(b-a) \int_0^1 \frac{1}{a + (b-a)v} dv$$

qui vaut bien ce qu'on veut.

995.40

Fonction définie par une intégrale

Donner le domaine de définition de $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$. Montrer que f est convexe, de classe C^∞. Déterminer ses limites en 0 et $+\infty$ puis donner un équivalent en $+\infty$.

Avec un équivalent, on trouve le domaine de définition : $]0,+\infty[$. On doit montrer, si $\alpha \in [0,1]$, si x,y sont des réels strictement positifs,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

pour ceci, l'idéal serait d'avoir

$$\forall t \geq 1 \qquad \frac{1}{t^{\alpha x + (1-\alpha)y}} \leq \frac{\alpha}{t^x} + \frac{1-\alpha}{t^y}$$

Car il suffirait alors de multiplier tout par $\dfrac{1}{1+t}$, et d'intégrer l'inégalité sur $[1,+\infty[$. Bref, on aimerait bien que la fonction $u \mapsto t^{-u}$ soit convexe sur $]0,+\infty[$. Elle l'est (calculer sa dérivée seconde).
On définit alors

$$h \;:\; (x,t) \longmapsto \frac{t^{-x}}{1+t}$$

qui est continue par rapport à t, intégrable sur $[1,+\infty[$ pour tout $x > 0$. Elle est indéfiniment dérivable par rapport à x sur son domaine de définition, et on calcule sans grande difficulté

$$\frac{\partial^k h}{\partial x^k} \;:\; (x,t) \longmapsto (-\ln t)^k \frac{t^{-x}}{1+t}$$

La domination, pour $k \geq 0$,

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times]1,+\infty[\qquad \left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k} \right| \leq \frac{(\ln t)^k}{t^a(1+t)}$$

où $0 < a < b$ permet de montrer la classe C^∞. L'intégrabilité de la fonction dominante se montrant à l'aide d'une croissance comparée : si $0 < a' < a$,

$$\frac{(\ln t)^k}{t^a(1+t)} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^{a'}(1+t)} \right)$$

f décroît, sa limite en $+\infty$ est nulle par théorème de convergence dominée. Si elle a une limite réelle ℓ en 0, cette limite la majore. Et a fortiori, la fonction intégrée étant positive, majore $\displaystyle\int_1^A \frac{dt}{t^x(1+t)}$ pour n'importe quel $A \geq 1$. Or, avec une domination par $1/(1+t)$ par exemple et le théorème de convergence dominée,

$$\int_1^A \frac{dt}{t^x(1+t)} \xrightarrow[x\to 0]{} \int_1^A \frac{dt}{(1+t)}$$

On aurait alors $\ln(1+A) - \ln 2 \leq \ell$ pour tout A, pas possible. Donc la limite en 0 est $+\infty$.
Pour un équivalent en $+\infty$, on aimerait, par changement de variable ou intégration par parties, faire « sortir » un terme qui tend vers 0. On peut penser faire le changement de variable $u = t^x$, $t = u^{1/x}$, qui donne

$$f(x) = \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} \frac{u^{1/x}}{u^2(1+u^{1/x})} \mathrm{d}u$$

Mais, avec une domination par $1/u^2$, le théorème de convergence dominée montre que

$$\int_1^{+\infty} \frac{u^{1/x}}{u^2(1+u^{1/x})} \mathrm{d}u \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2}$$

ce qui donne assez facilement un équivalent. Qui marche aussi en 0.

995.41

Fonction définie par une intégrale

Soit, pour $a \in \mathbf{R}$, $f(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\bigl(-x^2 - \frac{a^2}{x^2}\bigr)\, dx$. Démontrer que f est de classe C^1 sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$; trouver une équation différentielle vérifiée par f sur cet ensemble, puis montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$. En déduire la valeur de f en tout point.

La définition de f en tout point peut se déduire par exemple de la majoration

$$\left|\exp\left(-x^2 - \frac{a^2}{x^2}\right)\right| \leq \exp(-x^2)$$

et la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est notoirement intégrable sur $[0, +\infty[$ donc sur $]0, +\infty[$ (il est superflu de revenir à la comparaison à l'exemple de Riemann). Notons que cette majoration est indépendante de a, c'est donc une « domination », ce qui devrait nous permettre de montrer la continuité assez facilement.
La parité de f permet de ne l'étudier que sur $\mathbf{R}_*^+$ pour montrer la classe C^1. On définit donc

$$h \ : \ (a, x) \mapsto \exp\left(-x^2 - \frac{a^2}{x^2}\right)$$

sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et on vérifie les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe $\int$:
• On vient de voir que, pour tout $a > 0$, $h(a, .)$ est continue par morceaux (elle est même continue) sur $]0, +\infty[$, intégrable.
• h est dérivable par rapport à sa première variable sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, et

$$\forall (a, x) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[\qquad \frac{\partial h}{\partial a}(a, x) = -\frac{2a}{x^2} \exp\left(-x^2 - \frac{a^2}{x^2}\right)$$

Pour tout $x > 0$, $\dfrac{\partial h}{\partial a}(., x)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
Pour tout $a > 0$, $\dfrac{\partial h}{\partial a}(a, .)$ est continue sur $]0, +\infty[$ (continue par morceaux suffirait...). Montrons son intégrabilité sur $]0, +\infty[$:
$\left|\dfrac{\partial h}{\partial a}(a, x)\right| \leq \dfrac{2a}{x^2}$ montre, par comparaison à l'exemple de Riemann, l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$.
Par croissances comparées,

$$-\frac{2a}{x^2} \exp\left(-\frac{a^2}{x^2}\right) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

et donc $\dfrac{\partial h}{\partial a}(a, .)$ se prolonge par continuité en 0 (par la valeur 0), ce qui assure son intégrabilité sur $]0, 1]$.
• Si $0 < \alpha < \beta$, on peut dominer :

$$\forall (a, x) \in [\alpha, \beta]\times]0, +\infty[\qquad \left|\frac{\partial h}{\partial a}(a, x)\right| \leq \frac{2\beta}{x^2} \exp\left(-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right)$$

et la fonction majorante est (même démonstration que ci-dessus) intégrable sur $]0, +\infty[$.
Par théorème de « dérivation sous le signe Inf », f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, et

$$\forall a > 0 \qquad f'(a) = -2a \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \exp\left(-x^2 - \frac{a^2}{x^2}\right) dx$$

On peut avoir l'idée d'un changement de variable $x = 1/u$, qui nous donne

$$\forall a > 0 \qquad f'(a) = -2a \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{u^2} - a^2 u^2\right) du$$

puis le changement de variable $u = v/a$ nous rapproche du résultat :

$$\forall a > 0 \qquad f'(a) = -2 \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{a^2}{v^2} - v^2\right) dv$$

et donc f vérifie sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle

$$y' = -2y$$

ce qui nous permet d'affirmer l'existence d'une constante C telle que

$$\forall a > 0 \quad f(a) = Ce^{-2a}$$

La continuité de f sur $\mathbf{R}$ ne pose guère de problème si on se souvient de la majoration du début (qui était en fait une domination), on en déduit que $C = f(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. D'où, pour tout a réel et par parité,

$$f(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|a|}$$

(on pourrait tracer le graphe de f, il y a deux demi-tangentes en 0 mais f n'est pas dérivable en 0).

---

4 Équations différentielles

Sur les équations différentielles, la révision est normalement assez courte : on vérifie qu'on sait bien présenter la recherche d'une solution d'équation différentielle somme d'une série entière, qu'on connaît parfaitement le théorème de Cauchy et la structure des espaces de solutions, avec ça on fait beaucoup de choses. L'idée qui sert le plus souvent est la considération du wronskien, même si l'énoncé en parle rarement il ne faut pas oublier d'y penser.

995.42

On considère l'équation différentielle (E) : $xy'' + y' + xy = 0$.

1. Soit $f\ :\ x \longmapsto \int_0^\pi \cos(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta$. Montrer que f est solution de (E) sur $\mathbf{R}$.
2. Déterminer les solutions de (E) sur $]-\eta,\eta[$ sommes d'une série entière autour de 0 sur un tel intervalle.
3. Soit S l'ensemble des solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ et $g \in S$. On désigne ici par f la restriction de f à $]0,+\infty[$. Montrer que (f,g) est une base de S si et seulement si g n'est pas bornée au voisinage de 0.

Equations différentielles linéaires d'ordre 2.
Moyennement difficile. Très intéressant.

1. Dérivation deux fois sous le signe $\int$. Avec des dominations non problématiques, vu qu'on est sur un segment :
$$f'(x) = -\int_0^\pi \sin\theta\sin(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta \quad , \qquad f''(x) = -\int_0^\pi \sin^2\theta\cos(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$
(domination par 1 à chaque fois...). Donc
$$xy'' + xy = x\int_0^\pi \cos^2\theta\ \cos(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$
Ou mieux, vu qu'on veut rapprocher ça de f' :
$$xy'' + xy = \int_0^\pi (\cos\theta)\times(x\cos\theta\cos(x\sin\theta))\,\mathrm{d}\theta$$
Une intégration par parties (on primitive le deuxième terme, on dérive le premier) donne bien le résultat.
2. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $\geq \eta > 0$. On définit sur $]-\eta,\eta[$
$$f(x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$
Par théorème de dérivation terme à terme des séries entières sur leur intervalle ouvert de convergence, on a, pour tout $x \in]-\eta,\eta[$,
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad , \qquad f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$
Et donc f est solution de (E) si et seulement si
$$\forall x \in]-\eta,\eta[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}[n(n-1)+n]a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 0$$
ce qui équivaut à
$$\forall x \in]-\eta,\eta[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)^2 a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n = 0$$

ce qui équivaut, par unicité du développement en série entière, à

$$\forall n \geq 1 \qquad a_{n+1} = \frac{-a_{n-1}}{(n+1)^2}$$

et $a_1 = 0$. Reste à vérifier que les suites (a_n) obtenues donnent des séries entières de rayon de convergence non nul, mais en fait ce sont même des rayons de convergence infinis (règle de d'Alembert). On peut d'ailleurs facilement exprimer ces coefficients à l'aide de factorielles.

Remarque. On peut d'ailleurs remarquer que

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \forall \theta \in [0, \pi] \qquad \cos(x \sin\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}(\sin\theta)^{2n}}{(2n)!}$$

et l'interversion se fait sans difficulté (convergence normale donc uniforme sur un segment, ou convergence de $\sum N_1$), l'identification à la solution précédente permet d'ailleurs de retrouver des formules sur les intégrales de Wallis. Mais ne nous égarons pas : reprenons l'exercice.

3. Il est assez facile de voir que la question revient à montrer qu'il y a des solutions de (E) non bornées au voisinage de 0. Comme les solutions développables en série entière ne s'expriment pas au moyen des fonctions usuelles, la mise en œuvre de la variation de la constante pour la recherche d'une deuxième solution ne donne pas grand chose d'exploitable. On va donc avoir une idée qu'il faut toujours avoir à portée de main quand on considère ce genre d'équation : le wronskien ! Et si l'examinateur demande « comment envisagez-vous de vérifier que deux solutions sont ou ne sont pas indépendantes », il vaut mieux y penser.

   Notons donc f la fonction du **1.**, qui est la solution développable en série entière valant π en 0, et notons g une autre solution. Calculons le wronskien :

$$w = fg' - f'g$$

   en le dérivant :

$$w' = fg'' - f''g$$

   et donc

$$xw'(x) = f(x)(-g'(x) - xg(x)) + g(x)(f'(x) + xf(x)) = -w(x)$$

   ce qui donne $w(x) = \dfrac{k}{x}$.

   Supposons g bornée au voisinage de 0 et $k \neq 0$. Comme $f'(0) = 0$:

$$\frac{k}{x} = w(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \underset{x\to 0}{\sim} f(x)g'(x)$$

   En effet, fg' a une limite nulle, w une limite infinie. On en déduit que $g'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{k}{xf(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{k}{xf(0)}$. Par intégration des relations de comparaison, $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{k}{f(0)} \ln x$. Ceci contredit la bornitude supposée de g.

   Et réciproquement, si g n'est pas bornée, elle est évidemment indépendante de f.

$\boxed{\textbf{995.43}}$

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + ay' + by = 0$ avec a et b 1-périodiques. Soit ϕ une solution telle que $\phi(0) = \phi(1) = 0$. Montrer que ϕ s'annule en tout point de $\mathbf{Z}$.

On commencera toujours par dire que la continuité de a et b permet d'utiliser les théorèmes du cours : existence et unicité de la solution à un problème de Cauchy, structure de l'ensemble des solutions...La remarque principale (classique car les équations différentielles à « coefficients » périodiques sont fréquentes dans les exercices d'oral) est que $\psi \;:\; x \mapsto \phi(x+1)$ est aussi solution de (E). Et on a $\phi(0) = \psi(0)$. Si $\phi'(0) = \psi'(0)$, c'est gagné, par unicité on a $\phi = \psi$, et ψ est nulle sur $\mathbf{R}$. Mais voilà...$\phi'(0) = \psi'(0)$, c'est $\phi'(1) = \phi'(0)$, il n'y a pas de raison pour que ce soit vrai. Mais ce n'est pas grave, car on a mieux que $\phi(0) = \psi(0)$, on a $\phi(0) = \psi(0) = 0$...et donc, pour tout α, on a $\psi(0) = \alpha\ \phi(0)$. Or on peut choisir α tel que $\phi'(1) = \alpha\ \phi'(0)$ (en effet, $\phi'(0) \neq 0$, ou alors

$\phi = \widetilde{0}$ par unicité, et il n'y a rien à faire). Mais alors $\alpha\phi$ et ϕ sont solutions du même problème de Cauchy, donc égales, ce qui conclut ensuite assez facilement.

995.44

Soient q une fonction continue, intégrable sur $[0, +\infty[$ et (E) l'équation différentielle $y'' + q(x)y = 0$.

1. Si f est une solution bornée de (E), montrer que sa dérivée f' tend vers 0 en $+\infty$.
2. Soient f et g deux solutions bornées. Montrer que $f'g - fg' = 0$.
3. En déduire qu'il existe des solutions non bornées de (E).

---

1. Si f est bornée, $f'' = -qf$ est intégrable car produit d'une fonction bornée par une fonction intégrable. A fortiori, $\displaystyle\int_0^y f''(t)\mathrm{d}t$ a une limite réelle quand $y \to +\infty$. Autrement dit, f' a une limite réelle en $+\infty$. Si cette limite est non nulle, supposons-la strictement positive, il y aura un $\delta > 0$ et un $A > 0$ tels que
$$\forall t \geq A \qquad f'(t) \geq \delta$$
Mais alors en intégrant cette inégalité :
$$\forall y \geq A \qquad f(y) \geq f(A) + \delta(y - A)$$
ce qui contredit la bornitude de f. De même si la limite n'est pas strictement négative. Donc elle est nulle.
2. Le wronskien de deux solutions d'une telle équation est constant…ce qu'on vérifier sans peine en le dérivant. Or il a une limite nulle en $+\infty$.
3. Soit (f, g) une base de l'espace des solutions. Comme $w(f, g)$ ne peut pas être nul, f et g ne sont pas toutes les deux bornées (question précédente).

995.45

Soit $q\ :\ \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ continue, positive. Montrer que, si ϕ est une solution de $y'' - qy = 0$, ϕ s'annule au plus une fois.
Désormais, $q(t) = e^t$. Montrer que les solutions de l'équation sont développables en série entière.

On commence par dessiner, et par voir qu'il s'agit d'un problème de convexité. Si le graphe d'une solution franchit l'axe des abscisses, la convexité l'empêche de franchir de nouveau cet axe. Reste à mettre cela en forme.
Première méthode
Supposons $\phi(t_0) = 0$; comme ϕ n'est pas la solution nulle, le théorème d'unicité donne $\phi(t_0) \neq 0$. Quitte à remplacer ϕ par $-\phi$, on peut supposer $\phi'(t_0) > 0$.
(**raisonnement classique : ϕ est solution si et seulement si $-\phi$ est solution, car l'équation est homogène. Et ϕ s'annule aux mêmes points que $-\phi$**).
L'idée est maintenant de supposer que ϕ ne peut plus franchir l'axe des abscisses. On va voir à cette occasion un type de raisonnement classique, applicable dans d'autres contextes. Le principe est de considérer le premier instant après t_0 où ϕ s'annule. Mais il faut (avec un peu de topologie) montrer que ce « premier instant après t_0 » est bien défini.
Soit $A = \{t > t_0\ ;\ \phi(t) = 0\}$. Supposons $A \neq \emptyset$. Alors A, non vide et minoré par t_0, a une borne inférieure t_1.
Il faut montrer que $t_1 \in A$, i.e. que t_1 est un plus petit élément, pas seulement une borne inférieure. Et il faut aussi montrer que $t_1 \neq t_0$. On va tout faire à la fois, en utilisant le fait que toute racine de ϕ est isolée. Tout ce qui suit, sans être difficile, demande un peu de technique…et un peu de topologie.
Il existe $\eta > 0$ tel que
$$|t - t_0| \leq \eta \ \Rightarrow\ |\phi'(t) - \phi'(t_0)| \leq \frac{1}{2}\phi'(t_0)$$

et donc
$$|t-t_0|\leq \eta \ \Rightarrow\ \phi'(t)\geq \frac{1}{2}\phi'(t_0)>0$$
On peut admettre une rédaction du type « par continuité, si $\phi'(t_0)>0$, ϕ' est strictement positive au voisinage de t_0 ».
On peut donc alors écrire
$$A=\{t\geq t_0+\eta\ ;\ \phi(t)=0\}$$
Et donc $A=[t_0+\eta,+\infty[\,\cap\,\phi^{-1}(\{0\})$; A est donc fermé comme intersection de fermés. Et donc $t_1\in A$, d'une part (la borne inférieure d'un ensemble est dans son adhérence), $t_1\geq t_0+\eta$, d'autre part.
Sur $]t_0,t_1[$, ϕ ne s'annule pas, donc garde un signe constant (théorème des valeurs intermédiaires). Comme ϕ croît sur $[t_0,t_0+\eta]$, ce signe est positif. Donc $\phi''=q\phi$ est positif sur $[t_0,t_1]$. Donc ϕ', croissante sur $[t_0,t_1]$ et positive en t_0, est positive sur $t_0,t_1]$. Et donc ϕ croît sur $[t_0,t_1]$. Nulle en t_0 et en t_1, il faudrait qu'elle soit constamment nulle sur $[t_0,t_1]$, ce qui est contradictoire.
Un tableau de variations aurait rendu cette dernière partie un peu plus claire.
On peut dire qu'on fait « de même » à gauche de t_0. Mais, plus élégamment, la fonction $\psi\ :\ t\mapsto\phi(-t)$ est solution de l'équation $y''-q(-t)y=0$, et $t\mapsto q(-t)$ est positive, donc le raisonnement précédent montre que ψ ne s'annule pas à droite de $-t_0$.

Deuxième méthode
On peut aussi, supposant $\phi'(t_0)>0$, considérer
$$B=\{t\geq t_0\ ;\ \forall u\in[t_0,t]\ \phi(u)\geq 0\}$$
et montrer que B n'est pas majorée, ce qui donne la conclusion. Pour cela, on raisonne par l'absurde, on suppose que B est majorée, alors, comme $B\neq\emptyset$, B a une borne supérieure m, et $m>t_0$ (car il existe $\delta>0$ tel que $\phi'>0$ sur $[t_0-\delta,t_0+\delta]$). Par continuité et définition de la borne supérieure, on obtient $\phi\geq 0$ sur $[0,\alpha]$. Donc ϕ convexe sur $[0,\alpha]$, donc (courbe au-dessus de sa tangente)
$$\phi(\alpha)\geq(\alpha-t_0)\phi'(t_0)>0$$
et donc, par continuité, il existe $\eta>0$ tel que $\phi\geq 0$ sur $[t_0,\alpha+\eta]$ ce qui contredit la définition de α.

Troisième méthode
On peut montrer que ϕ' garde un signe constant strict sur $[t_0,+\infty[$ en montrant qu'elle ne peut pas s'annuler. Si elle s'annule, on considère
$$C=\{t\geq t_0\ ;\ \phi'(t)=0\}=[t_0,+\infty[\cap(\phi')^{-1}(\{0\})$$
On voit que C est fermé, si il est non vide, comme il est minoré, il a une borne inférieure qui est aussi un minimum…et si γ est cette borne inférieure, on a $\phi'(\alpha)=0$, $\alpha>t_0$, $\phi'>0$ sur $[t_0,\alpha[$. On arrive à une contradiction encore par considération de la convexité de ϕ sur $[0,\alpha]$…

Soit $\sum a_nt^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$. Par théorème, sa somme est C^∞ sur $]-R,R[$, et est solution de l'équation sur $]-R,R[$ si et seulement si (on utiliser aussi le produit de Cauchy de séries entières)
$$\forall t\in]-R,R[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{(n-k)!}\right)x^n$$
ce qui équivaut, par unicité du développement en série entière, à
$$\forall n\geq 0\qquad a_{n+2}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{(n-k)!}$$
On utilise alors une **technique classique** pour montrer que réciproquement le rayon de convergence des séries entières ainsi obtenues est $+\infty$: on cherche à établir une inégalité du type $\forall n\geq 0\quad |a_n\rho^n|\leq M$, avec $\rho>0$, ce qui impliquera que le rayon de convergence est $\geq\rho$. Ou, notant $\alpha=1/\rho$, on cherche à obtenir
$$\forall n\geq 0\quad |a_n|\leq M\alpha^n$$

avec la question : à quelle condition cette inégalité est-elle « récurrente » ? La majoration (si $\alpha > 0$)

$$\left|\frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k}{(n-k)!}\right| \leq \alpha^{n+2}e^{1/\alpha}\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)\alpha^2}\right)$$

montre que pour tout α l'inégalité est récurrente au moins à partir d'un certain rang n_0. On fixe alors M de telle manière qu'elle soit vraie jusqu'à n_0. Et on conclut que le rayon de convergence est $+\infty$, pour toutes les suites, et on a un plan vectoriel de solutions, donc on les a toutes.

995.46

Montrer qu'une solution non nulle de

$$y'' + e^t y = 0$$

a une infinité dénombrable de zéros.

On va montrer que l'ensemble des zéros n'est pas majoré, ce qui implique évidemment qu'il est infini. Supposons donc qu'il existe A tel que

$$x \geq A \ \Rightarrow \phi(x) \neq 0$$

où ϕ est une solution de $y'' + e^t y = 0$. Quitte à remplacer ϕ par $-\phi$, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'écrire

$$\forall x \geq A \qquad \phi(x) > 0$$

et par conséquent

$$\forall x \geq A \qquad \phi''(x) = -e^t\phi(x) < 0$$

ϕ' décroît donc. Si ϕ' reste positive, ϕ croît, donc $\phi''(t) \leq -\phi(A)e^t$, d'où, en intégrant, $\phi'(t) - \phi'(A) \leq -\phi(A)(e^t - e^A)$, d'où $\lim\limits_{+\infty}\phi' = -\infty$, contradiction.

Donc il existe B tel que $\phi'(B) < 0$. Et donc, si $t \geq B$, $\phi'(t) \leq \phi'(B)$. Et donc, si $t \geq B$, $\phi(t) - \phi(B) \leq \phi'(B)(t - B)$. Donc $\lim\limits_{+\infty}\phi = -\infty$, nouvelle contradiction.

Pourquoi une infinité dénombrable ? on montre (fait dans d'autres exercices) que tout zéro de ϕ est isolé. Ce qui permet de définir, si t_0 est un zéro, t_1 comme le « zéro suivant » (voir méthode dans l'exercice précédent) et, par récurrence, t_{n+1} comme le « zéro suivant » t_n. On définit ainsi une suite (il y a toujours un « zéro suivant », la suite des zéros n'étant pas majorée) (t_n) strictement croissante de zéros consécutifs. Cette suite tend vers $+\infty$ (sinon elle aurait une limite ℓ, qui serait par continuité un zéro non isolé). Et tout zéro supérieur à t_0 fait partie des éléments de cette suite (si u est un zéro, il existe n tel que $u \in [t_n, t_{n+1}[$, et $u \in]t_n, t_{n+1}[$ est impossible). On ordonne de même les éventuels zéros précédant t_0 en une suite finie ou dénombrable, ce qui conclut.

---

5 Fonctions de plusieurs variables

Sur un chapitre traditionnellement craint par les candidats, une bonne connaissance et compréhension du cours sera déjà très appréciée par l'examinateur.

995.47

Mines-Ponts

Soit $n \in \mathbf{N}_*$, f une fonction différentiable de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}$.

1. Soit V un sous-espace affine de $\mathbf{R}^n$. On supposer que la restriction de f à V atteint un extremum local en a. Que peut-on dire de $df(a)$?

2. Soit S la sphère unité de $\mathbf{R}^n$ pour la norme euclidienne canonique. On supposer que la restriction de f à S atteint un extremum local en a. Que peut-on dire de $df(a)$?

L'exercice dont tout le monde rêve : des espaces affines et des fonctions de plusieurs variables. Le seul fait d'avoir des bases fermes sur ces thèmes suffira à construire une note correcte. Connaître un sous-espace affine V, c'est en connaître un élément (ici, $a \in V$) et la direction. On fait un dessin (d'un plan affine vu en perspective en dimension 3). La direction de V, que nous noterons par exemple $\overrightarrow{V}$, est un sous-espace vectoriel. On a

$$V = a + \overrightarrow{V} = \{a + u \ ; \ u \in \overrightarrow{V}\}$$

Comme souvent, on se ramène à une fonction d'une variable réelle, en disant que, pour tout $u \in \overrightarrow{V}$, la fonction $t \mapsto f(a + tu)$, définie sur $\mathbf{R}$, atteint un maximum en 0. Or elle est dérivable, donc sa dérivée est nulle en 0. On connaît cette dérivée : c'est

$$df(a)(u)$$

La conclusion : $\overrightarrow{V} \subset \mathrm{Ker}\,(df(a))$.

Pour la deuxième question, c'est un petit peu moins simple. On refait un dessin, d'une sphère en dimension 3, même si ça n'aide pas énormément. On peut aborder le sujet de deux façons, qui d'ailleurs se rejoignent : le plan tangent à la sphère en a (analogie avec la première question) et les chemins tracés sur la sphère (qui permettent de définir ce plan tangent). On peut donc dessiner un chemin sur la sphère qui passe par a. Si

$$\gamma \ : \ ]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow S$$

est un tel chemin, avec $\gamma(0) = a$ et γ dérivable en 0, alors $t \mapsto f(\gamma(t))$ atteint un extremum local en 0, qui n'est pas sur le bord de $]-\epsilon, \epsilon[$. Et donc la dérivée en 0 de cette fonction est nulle :

$$df(a)(\gamma'(0)) = 0$$

Finalement, l'ensemble des vecteurs tangents à S est inclus dans $\mathrm{Ker}\,(df(a))$. Mais il est évident (géométriquement) que cet ensemble de vecteurs tangents à S est l'hyperplan affine contenant a et orthogonal à a. Peut-on le montrer ? on ne peut faire appel à nos connaissances du programme sur le plan tangent à une surface, ou la droite tangente à une courbe, que si $n = 2$ ou $n = 3$. Mais c'est bien du cours, l'examinateur a donc le droit de poser des questions à ce sujet [rappel : une version améliorée du chapitre de géométrie a été distribuée]. Sinon, d'abord, un chemin sur S vérifie

$$\forall t \qquad \|\gamma(t)\|^2 = \langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = 1$$

et donc en dérivant, en tout point où c'est possible,

$$\langle \gamma'(t), \gamma(t) \rangle = 0$$

Donc, déjà, tout vecteur tangent en a à S est orthogonal à S. Réciproquement, soit $u \in \mathbf{R}^n$ tel que $\langle a, u \rangle = 0$. Si on part de a dans la direction de u, en considérant $t \mapsto a + tu$, on ne reste pas sur la sphère. Mais si on considère

$$\gamma \ : \ t \mapsto \frac{1}{\|a + tu\|}(a + tu)$$

c'est en revanche tracé sur la sphère. Et comme

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2\|u\|^2}}(a + tu)$$

il n'est pas très difficile par bilinéarité de dériver

$$\gamma'(t) = -\frac{2t\|u\|^2}{(1 + t^2\|u\|^2)^{3/2}}(a + tu) + \frac{1}{\sqrt{1 + t^2\|u\|^2}}u$$

et donc $\gamma'(0) = u$.
Une manière plus élégante et plus géométrique est de tracer l'arc suivant, si $\langle u, a \rangle = 0$:

$$\delta(t) = (\cos t) \ a + (\sin t) \ \frac{1}{\|u\|}u$$

(on suppose bien sûr u non nul, le vecteur nul est toujours tangent à tout, il suffit de prendre un arc qui stationne en le point voulu). On trace ainsi un « grand cercle » (ou un méridien) de la sphère S. Et $\delta'(0) = \dfrac{1}{\|u\|}u$ est un calcul particulièrement simple. Or l'ensemble des vecteurs tangents à un ensemble est un espace vectoriel : en effet, si δ est un arc tracé sur S, $t \mapsto \delta(\alpha t)$ est aussi bien un arc tracé sur S. Et la dérivée en 0 vaut $\alpha\delta'(0)$. Bref, c'est terminé. Mais même si ce n'est pas demandé, ces choses sont beaucoup plus claires exprimées en termes de gradient. Compte tenu de la très importante définition

$$df(a)(u) = \langle \text{grad} f(a), u\rangle$$

on a

$$u \in \text{Ker}(df(a)) \Leftrightarrow \langle \text{grad} f(a), u\rangle = 0$$

Le résultat de la première question peut donc s'écrire « le gradient de f en a est orthogonal à V » (ou à la direction de V, c'est la même chose), et le résultat de la seconde s'écrit « le gradient de f en a est colinéaire à a ». Une bonne compréhension du gradient comme indiquant la direction de plus grande variation de f rend ces énoncés plus concrets. A méditer !

995.48

Mines-Ponts

Soit $U =]0, +\infty[^2$.

1. Montrer que $\phi\ :\ (x, y) \longmapsto (y/x, x^2 + y^2)$ est une bijection de classe C^∞ de U sur U.
2. Résoudre $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \lambda f$ en posant $g = f \circ \phi^{-1}$.

Fonctions de plusieurs variables.
Moyennement difficile. Très intéressant.

1. L'application ϕ (qui est une variante du changement de variable en coordonnées polaires) n'a pas de propriétés qui permettent de traiter la bijection autrement que directement. On pourrait montrer qu'elle est injective et surjective, mais le plus simple est de montrer la bijectivité en exhibant directement la réciproque : si (u, v) et (x, y) sont deux éléments de U,

$$(u = y/x, v = x^2 + y^2) \Longleftrightarrow (y = ux, v = x^2(1 + u^2))$$

ou encore

$$(u = y/x, v = x^2 + y^2) \Longleftrightarrow \left(x = \sqrt{\frac{v}{1+u^2}}, y = u\sqrt{\frac{v}{1+u^2}}\right)$$

ce qui conclut bien à la bijectivité. La classe C^∞ ne pose pas trop de problèmes, par récurrence sur m toutes les $\dfrac{\partial^m f}{\partial y^q \partial x^p}$ où $p+q = m$ sont des $\dfrac{P_{p,q}(x,y)}{x^{\alpha(p,q)}}$ où $P_{p,q}$ est polynomiale et $\alpha(p, q)$ est un entier naturel.

2. On peut définir g comme indiqué, ce qui conduit à

$$f(x,y) = g\left(y/x, x^2+y^2\right)$$

et donc avec des notations naturelles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial u}(\frac{y}{x}, x^2+y^2) + 2x\frac{\partial g}{\partial v}(\frac{y}{x}, x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial u}(\frac{y}{x}, x^2+y^2) + 2y\frac{\partial g}{\partial v}(\frac{y}{x}, x^2+y^2)$$

L'équation aux dérivées partielles proposée équivaut donc à

$$\forall (u,v) \in U \qquad 2v\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \lambda g(u,v)$$

dans laquelle il n'y a qu'une dérivée partielle, ce qui permet de la traiter comme une équation différentielle ordinaire. Autrement dit, on écrit

$$\forall (u,v) \in U \qquad \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) - \frac{\lambda}{2v}g(u,v) = 0$$

On multiplie par $v^{-\lambda/2}$, on obtient la condition équivalente

$$\frac{\partial}{\partial v}\Big((u,v) \longmapsto v^{-\lambda/2}g\Big) = 0$$

dont les solutions sont les

$$(u,v) \longmapsto v^{\lambda/2}\phi(u)$$

On sait ce qu'est u, on sait ce qu'est v, on remplace…et on obtient le résultat.

995.49

Mines-Ponts

Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et $h \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ telle que $h = a\frac{\partial h}{\partial x} + b\frac{\partial h}{\partial y}$. On suppose h bornée sur $\mathbf{R}^2$. Montrer que h est nulle.

Fonctions de plusieurs variables.
Moyennement difficile. Très intéressant.

Le cas éclairant est le cas où l'un des deux nombres a ou b est nul. Par exemple, si h vérifie

$$h = \frac{\partial h}{\partial x}$$

Alors, comme toujours, ne traite cette équation qui ne contient qu'une dérivée partielle comme s'il s'agissait d'une équation différentielle ordinaire. On écrit donc

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \qquad \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) - h(x,y) = 0 \tag{E}$$

en la multipliant par e^{-x}, on obtient

$$(E) \iff \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \qquad \frac{\partial}{\partial x}\big((x,y) \mapsto e^{-x}h(x,y)\big) = 0$$

Les solutions sont les fonctions

$$(x,y) \longmapsto e^x\phi(y)$$

où ϕ est une fonction C^1. Pour qu'elle soit bornée, il faut qu'elle soit nulle (si $\phi(y_0) \neq 0$, l'application $x \mapsto h(x,y_0)$ ne risque pas d'être bornée).

Mais maintenant, le cas général n'est pas bien loin ! en effet, si on fait un changement de variable linéaire, du type
$$x = \alpha u + \beta v \qquad , \qquad y = \gamma u + \delta v$$
Et on considère la fonction
$$g \ : \ (u,v) \longmapsto h(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)$$
Alors g est C^1, et
$$\frac{\partial g}{\partial u} \ : \ (u,v) \longmapsto \alpha \frac{\partial h}{\partial x}(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v) + \gamma \frac{\partial h}{\partial y}(\alpha u + \beta v, \gamma u + \delta v)$$
Choisissons $\alpha = a$, $\gamma = b$. On a alors
$$\forall (u,v) \in \mathbf{R}^2 \qquad \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = g(u,v)$$
et g est bornée. Donc g est nulle. A-t-on pour autant h nulle ? Il faudrait pouvoir écrire $h(x;y) = g(\ldots,\ldots)$. Pour cela, on impose $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, avec $a = \alpha$ et $\gamma = b$, ce qui est possible si $(a,b) \neq (0,0)$. Dans ce cas, l'application
$$(u,v) \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$
est un isomorphisme. Notant
$$\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1}$$
on a
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
et donc pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ il existe $(u,v) \in \mathbf{R}^2$ tel que
$$x = \alpha u + \beta v \qquad , \qquad y = \gamma u + \delta v$$
et donc
$$h(x,y) = g(u,v)$$
Donc, si g est nulle, h l'est bien aussi. Le cas $a = b = 0$ ne pose bien sûr aucun problème.

995.50

X assez classique

Soient g une fonction de classe C^1 de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$, h une fonction de classe C^1 paire de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, E l'ensemble des fonctions de classe C^1 de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ telles que, pour (x,y) dans $\mathbf{R}^2$, on ait : $-y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = g(x,y)$, $f(x,0) = h(x)$.

1. Montrer que E contient au plus un élément.
2. On suppose que, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $g(x,y) = xy$. Déterminer E.

Fonctions de plusieurs variables.
Moyennement difficile. Intéressant.

1. Si f_1 et f_2 vérifient les conditions requises, la fonction $f = f_1 - f_2$ vérifie $-y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, $f(x,0) = 0$. On veut montrer que dans ces conditions, f est nulle. Ce n'est pas complètement évident. Il faut quand même se souvenir que les seuls changements de variables auxquels on puisse nous reprocher de ne pas avoir pensé sont les changements de variables linéaires ($u = ax+by$, $v = cx+dy$) ou le changement de variable en polaires. Essayons celui-ci, autrement dit définissons sur $\mathbf{R}^2$ la fonction

$$a \;:\; (r,t) \longmapsto f(r\cos t, r\sin t)$$

Elle est de classe C^1, et on sait calculer ses dérivées partielles :
$\dfrac{\partial a}{\partial r}(r\cos t, r\sin t) = \cos t\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t) + \sin t\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)$
$\dfrac{\partial a}{\partial t}(r\cos t, r\sin t) = -r\sin t\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t) + r\cos t\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)$
L'équation aux dérivées partielles vérifiée par f donne alors

$$\frac{\partial a}{\partial t} = 0$$

c'est-à-dire qu'il existe une fonction ϕ telle que

$$\forall (r,t) \in \mathbf{R}^2 \qquad a(r,t) = \phi(r)$$

En particulier, $\phi(r) = f(r,0) = 0$ (en prenant $t = 0$ par exemple), ce qui donne $a = 0$, donc $f = 0$. On a donc bien l'unicité.

2. Il est alors bien naturel de reprendre le changement de variable en polaires pour résoudre l'équation aux dérivées partielles
$-y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xy$
qui devient alors, avec les notations de la première question :
$\dfrac{\partial a}{\partial t}(r,t) = r^2 \sin t\ \cos t$
ce qui peut s'écrire, pour détailler :
$\dfrac{\partial}{\partial t}\left((r,t) \mapsto a(r,t) + \dfrac{1}{4}r^2\cos(2t)\right) = 0.$
Ce qui équivaut à l'existence d'une fonction ϕ de classe C^1 telle que

$$\forall (r,t) \in \mathbf{R}^2 \qquad a(r,t) = -\frac{1}{4}r^2\cos(2t) + \phi(r)$$

Mais $a(r,t) = f(r\cos t, r\sin t)$ donc, si $t = k\pi$, $a(r,t) = h(r)$. Donc

$$-\frac{1}{4}r^2 + \phi(r) = h(r)$$

Donc

$$\forall (r,t) \in \mathbf{R}^2 \qquad a(r,t) = -\frac{1}{4}r^2\cos(2t) + h(r) + \frac{1}{4}r^2$$

Ou encore

$$\forall (r,t) \in \mathbf{R}^2 \qquad a(r,t) = \frac{1}{4}r^2(-\cos(2t)\ +\ 1) + h(r)$$

et donc, avec $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$,

$$f(x,y) = \frac{1}{4}\left(-x^2 + y^2 + (x^2+y^2)\right) + h\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2}{2} + h\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

La réciproque est à faire : il n'est nullement évident que f ainsi définie soit C^1 sur $\mathbf{R}^2$, elle l'est sans problème sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

De $f(x,0)=h(|x|)=h(x)$ on déduit que $\dfrac{\partial f}{\partial x}((0,0))=h'(0)$. De même, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=h'(0)$. On calcule, si $(x,y)\neq(0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}h'(\sqrt{x^2+y^2})$$

Pour que cela tende vers $h'(0)$ en $(0,0)$, il faut et il suffit que $h'(0)=0$, ce qui est acquis par imparité de h'. Donc ça marche, idem pour la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

---

6 Probabilités

En probabilités peut-être plus que dans d'autres chapitres, la théorie est parfois un peu oubliée lorsqu'on s'entraîne aux exercices. Or il est tout-à-fait possible d'avoir à rappeler ce qu'est une tribu, un espace probabilisé, une variable aléatoire...et comme ailleurs, ce sont les lacunes sur le cours qui sont les plus sévèrement pénalisées. Revoir son cours, donc...

La limitation de notre programme aux variables aléatoires discrètes lie cette partie du programme à la théorie de la sommabilité, qui intervient dans de nombreux exercices.

Le type même de l'utilisation de la sommabilité à maîtriser est la classique formule pour l'espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ *:*

$$E(X) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(X \geq j)$$

On la retrouve assez facilement à l'aide de l'écriture en tableau suivante (qu'il faut savoir interpréter) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
P(X=1) & + & P(X=2) & + & P(X=3) & + & P(X=4) & + & ... \\
 & & P(X=2) & + & P(X=3) & + & P(X=4) & + & ... \\
 & & & & P(X=3) & + & P(X=4) & + & ... \\
 & & & & & & P(X=4) & + & ...
\end{array}$$

Mais on remarque d'autre part que, si X *est une variable aléatoire réelle positive,*

$$\mathbf{E}(X) < +\infty \iff \mathbf{E}(\lfloor X \rfloor) < +\infty$$

Il suffit pour le voir d'écrire $\lfloor X \rfloor \leq X \leq \lfloor X \rfloor + 1$*. Et donc* X *est d'espérance finie si et seulement si* $\sum_{j\geq 1} P(\lfloor X \rfloor \geq j)$ *converge, i.e. si et seulement si* $\sum_{j\geq 1} P(X \geq j)$ *converge. Bien sûr on n'a plus* $E(X) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(X \geq j)$ *si* X *est seulement à valeurs réelles positives, mais on a une condition d'espérance finie.*

Bien connaître et savoir reconnaître ses inégalités classiques (Cauchy-Schwarz, Markov, Bienaymé-Tchebychev) est fort utile à l'oral.

995.51

Fonction de répartition d'une variable aléatoire

1. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs réelles. Montrer que la fonction

$$F \ : \ x \longmapsto \mathbf{P}(X \leq x)$$

   est bien définie sur $\mathbf{R}$.

2. Etudier la monotonie de F.

3. Etudier les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de F.

4. Etudier la continuité à gauche et à droite de F (on montrera que F est continue à ...en tout point, mais qu'elle n'est pas partout continue à ...)

$X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, donc $I_x = \{t \in X(\Omega)\ ;\ t \leq x\}$ est fini ou dénombrable, $(X \leq x) = \displaystyle\bigcup_{t \in I_x} (X = t)$ est donc un évènement, F est donc bien définie. Elle est croissante, car si $x \leq x'$,

$$(X \leq x) \subset (X \leq x')$$

Elle est bornée, elle a donc des limites en $+\infty$ et en $-\infty$. Or

$$\lim_{+\infty}(F) = \lim_{n \to +\infty} (F(n)) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (X \leq n)\right) = P(\Omega) = 1$$

(on utilise la continuité croissante) et, en utilisant la continuité décroissante, et le fait que

$$\lim_{-\infty}(F) = \lim_{n \to +\infty} (F(-n))$$

on obtient que la limite en $-\infty$ vaut 0. En utilisant la continuité décroissante et le fait que

$$(X \leq x) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(X \leq x + \frac{1}{n}\right)$$

on obtient que F est continue à droite (inutile de prendre n'importe quelle suite qui tend vers x, les $x + 1/n$ suffisent puisque la monotonie de F assure qu'elle a une limite à gauche et à droite en tout point). En revanche, on montre de même que la limite à gauche de F en x est $P(X < x)$, donc il y a discontinuité en x si et seulement si $P(X = x) \neq 0$.

995.52

Espérance d'une limite

Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé et $(E_n)_{n \in \mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}$ une suite d'événements quelconques. On suppose que $\displaystyle\sum_{n \geq 0} P(E_n) < +\infty$. Pour X un ensemble, on note 1_X la fonction indicatrice de X.

1. Soit $Z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 1_{E_n}$ (on convient que $Z = +\infty$ si la série diverge). Prouver que Z est une variable aléatoire discrète.
2. Soit $F = \{\omega \in \Omega\ ;\ \omega$ appartient à un nombre fini de $E_n\}$. Prouver que F est un événement et que $P(F) = 1$.
3. Prouver que $\mathbf{E}(Z) < +\infty$.

Exercice pas si facile, mais plein de choses importantes. Se trouve à peu de choses près sur le site de Centrale. Exercice très « ensembliste » : réunion croissante, réunion décroissante...

1. Z est bien une application définie sur Ω à valeurs dans $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ qui est un ensemble dénombrable (si on nous demande de détailler une bijection de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, on pourra par exemple donner $0 \mapsto +\infty$, $n \mapsto n - 1$ si $n \geq 1$).

   On doit ensuite montrer (il faut connaître la définition d'une variable aléatoire !) que, si $x \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, $X^{-1}(\{x\}) \in A$.

   Première méthode

   Peut-être vaut-il mieux aller à la deuxième méthode, plus sympathique

   Pour $x = 0$, par exemple, c'est facile, car

$$Z^{-1}(\{0\}) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{E_n}$$

Or, pour tout n, $\overline{E_n} \in A$ (stabilité de A par passage au complémentaire), et A est stable par réunion dénombrable.

Pour $x = 1$, ce n'est pas non plus très difficile : $Z(\omega) = 1$ signifie que ω appartient à un E_n et à aucun autre :

$$Z^{-1}(\{1\}) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \left(E_n \cap \bigcap_{p \neq n} \overline{E_p} \right)$$

et là aussi, la stabilité de A par réunion dénombrable, passage au complémentaire et intersection dénombrable conclut.

On est à l'oral : la résolution des deux cas particuliers ci-dessus sera déjà très appréciée par l'interrogateur, qui d'ailleurs, si cela a été fait avec rigueur, se contentera peut-être d'une explication « avec les mains » pour le cas général ci-dessous. C'est une différence entre l'écrit et l'oral.

D'une manière générale, soit $x \in \mathbf{N}$. Notons P_x l'ensemble des parties de $\mathbf{N}$ à x éléments. On peut espérer que P_x soit dénombrable. Il l'est, par exemple l'application qui à $Y \in P_x$ associe la liste ordonnée par ordre croissant des éléments de Y définit une application injective de P_x dans $\mathbf{N}^x$, donc une bijection de P_x sur une partie de $\mathbf{N}^x$, or une partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable (car une partie de $\mathbf{N}$ est finie ou dénombrable). Et on sait par le cours que $\mathbf{N}^x$ est dénombrable. Or

$$Z^{-1}(\{x\}) = \bigcup_{Y \in P_x} \left(\bigcap_{n \in Y} E_n \cap \bigcap_{n \in \mathbf{N} \setminus Y} \overline{E_n} \right)$$

D'où l'appartenance à A de $Z^{-1}(\{x\})$, pour tout $x \in \mathbf{N}$. Et par suite celle de $Z^{-1}(\{+\infty\})$, car

$$X^{-1}(\{+\infty\}) = \overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} X^{-1}(\{n\})}$$

Deuxième méthode Peut-être aura-t-on le droit de dire qu'une somme finie de variables aléatoires est une variable aléatoire, après tout c'est dans le cours. Et le redémontrer n'est pas si difficile, il suffit de le faire pour deux variables, puis une récurrence conclut. Et si X, Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$, $X + Y$ est aussi une variable aléatoire par

$$(X + Y = n) = \bigcup_{k=0}^{n} (X = k) \cap (Y = n - k)$$

et le fait qu'une tribu est stable par réunion et intersection dénombrables, a fortiori finies. Donc, notant

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{E_k}$$

chaque S_n est une variable aléatoire. Or il est facile d'écrire, avec les S_n, que $(Z \leq p)$ est un événement. En effet,

$$(Z \leq p) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} (S_n \leq p)$$

et comme chaque $(S_n \leq p)$ est un évènement, $(Z \leq p)$ en est un. Et maintenant,

$$(Z = p) = (Z \leq p) \cap \overline{(Z \leq p - 1)}$$

est donc aussi un évènement. Et $(Z = +\infty)$ aussi, car

$$(Z = +\infty) = \overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} (Z = n)}$$

2. Comme $F = (Z < +\infty) = \overline{(Z = +\infty)}$, l'appartenance de F à A a déjà été montrée. La question est alors la version « facile » de Borel-Cantelli :

$$\begin{aligned} \omega \in F &\iff \exists p \geq 0 \quad \forall n \geq p \quad \omega \notin E_n \\ &\iff \omega \in \bigcup_{p=0}^{+\infty} \left(\bigcap_{n=p}^{+\infty} \overline{E_n} \right) \end{aligned}$$

Donc $F = \bigcup_{p=0}^{+\infty} \left(\bigcap_{n=p}^{+\infty} \overline{E_n} \right)$. Et par continuité croissante,

$$\mathbf{P}(F) = \lim_{p \to +\infty} \left(\mathbf{P} \left(\bigcap_{n=p}^{+\infty} \overline{E_n} \right) \right)$$

Mais $\mathbf{P} \left(\bigcap_{n=p}^{+\infty} \overline{E_n} \right) = 1 - \mathbf{P} \left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} E_n \right)$. Enfin, pour tout p,

$$0 \leq \mathbf{P} \left(\bigcup_{n=p}^{+\infty} E_n \right) \leq \sum_{n=p}^{+\infty} \mathbf{P}(E_n)$$

Une série convergente a une suite de restes qui converge vers 0, on conclut.

3. Une remarque préliminaire : l'énoncé n'est pas conforme au programme, puisque Z n'est pas une variable aléatoire réelle. Néanmoins, l'événement $(Z = +\infty)$ étant négligeable (d'après la deuxième question), on ne se formalisera pas de ce petit « dérapage », déjà rencontré aussi à l'oral de l'X.

Posons $Z_N = \sum_{n=0}^{N} 1_{E_n}$; alors $E(Z_N) = \sum_{n=0}^{N} P(E_n)$. Mais peut-on « passer à la limite » quand $N \to +\infty$? Il n'est pas évident, avec les outils du programme, de montrer que

$$E(Z_N) \xrightarrow[N \to +\infty]{} E(Z)$$

Si on admet que dans un certain sens, celui de la théorie de Lebesgue, l'espérance est une intégrale, on se doute qu'il existe des conditions d'interversion. Mais elles ne figurent pas dans le cours. C'est aussi pour cela qu'il faut bien connaître le cours : pour ne pas avoir peur d'avoir oublié des choses qui, en fait, n'y figurent pas.

Comme d'habitude à l'oral, quand on ne voit pas, **on revient au cours** : cela montre à l'examinateur qu'on le connaît (le cours, pas l'examinateur), et on aura au tableau de quoi travailler. Donc, fini ou $+\infty$ pour la deuxième somme, on a

$$\mathbf{E}(Z_N) = \sum_{j=0}^{+\infty} j\mathbf{P}(Z_N = j) \quad , \quad \mathbf{E}(Z) = \sum_{j=0}^{+\infty} j\mathbf{P}(Z = j)$$

(on aurait pu arrêter la première somme à N, mais ce n'est pas forcément une bonne idée puisqu'on veut la rapprocher de la deuxième somme). Naturellement, on peut se demander si

$$\mathbf{P}(Z_N = j) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \mathbf{P}(Z = j)$$

et il y a au moins deux manières d'aborder les choses, la plus simple mais pas la plus naturelle étant de montrer plutôt que

$$\mathbf{P}(Z_N \geq j) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \mathbf{P}(Z \geq j)$$

En effet, la suite (Z_N) étant une suite croissante d'entiers naturels, et sa limite étant Z, on a $(Z \geq j)$ si et seulement si (Z_n) n'est pas majorée par $j - 1$, i.e. si et seulement si elle atteint j. Donc

$$(Z \geq j) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (Z_n \geq j)$$

et la continuité croissante donne la limite attendue. Il suffit ensuite de dire que

$$\mathbf{P}(Z_n = j) = \mathbf{P}(Z_n \geq j) - \mathbf{P}(Z_n \geq j+1)$$

(et même chose pour Z : c'est dû au fait que l'évènement $(Z \geq j+1)$ est inclus dans l'évènement $(Z \geq j)$) pour conclure que

$$\mathbf{P}(Z_N = j) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \mathbf{P}(Z = j)$$

Mais alors, pour tout p,

$$\sum_{i=0}^{p} i\mathbf{P}(Z_N = i) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \sum_{i=0}^{p} i\mathbf{P}(Z = i)$$

Or le membre de gauche est majoré par $\mathbf{E}(Z_n)$, lui-même majoré par $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(E_n)$. Par conservation des inégalités larges à la limite, on obtient que la suite des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_i i\mathbf{P}(Z = i)$ est majorée. Et donc que cette série, qui est à termes réels positifs, converge.

Remarque : Si la formule pour l'espérance d'une variable à valeurs dans $\mathbf{N}$:

$$E(Z) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(Z \geq j)$$

était au programme, ce serait un peu plus commode. Cela dit, il faut savoir démontrer cette formule. Voir cours !

Remarque : On peut en utilisant ce qui est fait ci-dessus (et en montrant $\leq$ et $\geq$ séparément) montrer que

$$\mathbf{E}(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(E_n)$$

995.53

Un peu de théorie préhilbertienne

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé dénombrable, tel que

$$\forall \omega \in \Omega \quad \mathbf{P}(\{\omega\}) \neq 0$$

On notera $\mathcal{L}^2$ l'ensemble des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ qui admettent un moment d'ordre 2.

1. Montrer que $\mathcal{L}^2$ est un espace vectoriel, et que

$$(X|Y) = \mathbf{E}(XY)$$

définit un produit scalaire sur cet espace.

2. Si $X \in \mathcal{L}^2$, déterminer le projeté orthogonal de X sur l'espace des variables aléatoires constantes. Déterminer la distance de X à cet espace.

3. A partir de la question précédente, retrouver la formule

$$\mathbf{V}(aX + b) = a^2\mathbf{V}(X)$$

4. Si X et Y sont deux éléments de $\mathcal{L}^2$, Y non constante, déterminer la projection orthogonale de X sur $\{aY + b \ ;\ (a, b) \in \mathbf{R}^2\}$. Calculer la distance de X a ce plan.

5. Si X et Y sont deux éléments de $\mathcal{L}^2$, on définit leur coefficient de corrélation linéaire :

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Montrer que $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$. Quand ce coefficient est-il égal à ± 1 ?

1. L'inégalité
$$|XY| \leq \frac{1}{2}\left(X^2+Y^2\right)$$
fait que le produit de deux éléments de $\mathcal{L}^2$ est d'espérance finie. Et donc, si X et Y sont dans $\mathcal{L}^2$, $X+Y$ y est aussi, en vertu de
$$(X+Y)^2 = X^2+Y^2+2XY$$
le membre de droite ne contenant que des termes d'espérance finie. Comme λX y est évidemment, $\mathcal{L}^2$ est bien un espace vectoriel. Et $(X,Y)\mapsto \mathbf{E}(XY)$ est bien défini dessus. Les propriétés d'un produit scalaire sont sans problème, on remarque seulement que si $(X|X)=0$,
$$\sum_{\omega\in\Omega} \mathbf{P}(\{\omega\})X^2(\omega) = 0$$
ce qui vu l'hypothèse de départ donne $X=0$. *Sans l'hypothèse de départ, on peut toujours construire ce genre de produit scalaire, mais on a seulement $(X|X)=0 \Rightarrow X=0$ presque sûrement. Ce qui n'est dans le fond pas gênant, mais oblige à déborder un peu du strict cadre du programme.*

2. L'existence et l'unicité est assurée par le théorème de projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie. Soit a la projection cherchée : on a $X-a\perp 1$, donc
$$\mathbf{E}\left((X-a)\times 1\right) = 0$$
et cela donne $a=\mathbf{E}(X)$. Pas si étonnant si on y réfléchit. Et notant $F=\mathrm{Vect}(1)$,
$$d(X,F) = \sqrt{\mathbf{E}\left((X-\mathbf{E}(X))^2\right)} = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$$

3. Soit p la projection orthogonale sur F. On a
$$p(aX+b) = ap(x)+p(b) = ap(X)+b$$
et donc
$$(aX+b)-p(aX+b) = a(X-p(X))$$
Prenant le carré de la norme des deux membres, on obtient bien par la question précédente
$$\mathbf{V}(aX+b) = a^2\mathbf{V}(X)$$

4. Notons $\alpha Y+\beta$ la projection cherchée. Alors $(X-\alpha Y-\beta|1) = (X-\alpha Y-\beta|Y) = 0$. Ce qui donne le système
$$\begin{cases} \mathbf{E}(Y^2)\alpha & + & \mathbf{E}(Y)\beta & = & \mathbf{E}(XY) \\ \mathbf{E}(Y)\alpha & + & \beta & = & \mathbf{E}(X) \end{cases}$$
On remarque que le déterminant est $\mathbf{V}(Y)$, non nul car Y n'est pas constante. Et on trouve
$$\alpha = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathbf{V}(Y)} \qquad , \qquad \beta = \frac{\mathbf{E}(Y^2)\mathbf{E}(X)-\mathbf{E}(Y)\mathbf{E}(XY)}{\mathbf{V}(Y)}$$
Pour le calcul de la distance, il est utile de remarquer que $\left(1, \dfrac{1}{\sigma(Y)}(Y-\mathbf{E}(Y))\right)$ est une base orthonormale du plan $\mathrm{Vect}(1,Y)$ (facile à voir si on a compris la deuxième question). Donc avec les notations précédentes,
$$\mathrm{d}(X,F)^2 = \|X\|^2 - \left[(X|1)^2 + \frac{1}{\mathbf{V}(Y)}\left(X|Y-\mathbf{E}(Y)\right)^2\right]$$
ou encore
$$\mathrm{d}(X,F)^2 = \mathbf{E}(X^2) - \left(\mathbf{E}(X)\right)^2 - \frac{1}{\mathbf{V}(Y)}\left(\mathrm{Cov}(X,Y)\right)^2$$
D'où finalement
$$\mathrm{d}(X,F)^2 = \frac{1}{\mathbf{V}(Y)}\left[\mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y) - \left(\mathrm{Cov}(X,Y)\right)^2\right]$$

5. De la question précédente, ou de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (en effet, on remarque que

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = (X - \mathbf{E}(X)|Y - \mathbf{E}(Y)) \qquad)$$

on déduit l'encadrement proposé. Avec égalité si et seulement si Y est constante ou X est de la forme $aY + b$.

995.54

L'espérance via une loi conditionnelle

On considère deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$; on suppose que Y est d'espérance finie. Montrer que

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{x\in X(\Omega), \mathbf{P}(X=x)\neq 0} \mathbf{E}(Y|X=x)\mathbf{P}(X=x)$$

où l'on désigne par $\mathbf{E}(Y|X=x)$ l'espérance de la loi conditionnelle de Y sachant $(X=x)$, qui peut être vue aussi comme l'espérance de Y vue comme variable aléatoire sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}_{(X=x)})$.

Formule importante. Montrée dans le cas fini à l'écrit Centrale 2017. Comment passer du cas fini au cas général ? en utilisant la sommabilité.

Rappelons que la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est définie par, pour $y \in Y(\Omega)$:

$$\mathbf{P}_{Y|X=x}(\{y\}) = \mathbf{P}(Y=y|X=x)$$

Commençons par supposer $Y \geq 0$. Pour $y \in Y(\omega)$, la famille

$$(y\mathbf{P}(X=x)\mathbf{P}(Y=y|X=x))_{x\in X(\Omega)}$$

est sommable, de somme $y\mathbf{P}(Y=y)$ (formule des probabilités totales). Et la famille $(y\mathbf{P}(Y=y))_{y\in Y}$ est sommable (du fait que Y est d'espérance finie). Il en découle, par sommabilité par paquets, que la famille

$$(y\mathbf{P}(X=x)\mathbf{P}(Y=y|X=x))_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$$

est sommable. Et donc, pour tout $x \in X(\Omega)$, la famille

$$(y\mathbf{P}(X=x)\mathbf{P}(Y=y|X=x))_{y\in Y(\Omega)}$$

est sommable, donc aussi la famille

$$(y\mathbf{P}(Y=y|X=x))_{y\in Y(\Omega)}$$

ce qui exprime que la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est d'espérance finie. Et on a

$$\sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbf{P}(X=x)\mathbf{P}(Y=y|X=x) = \mathbf{P}(X=x)\mathbf{E}(Y|X=x)$$

ce qui permet de dire que la famille $(\mathbf{P}(X=x)\mathbf{E}(Y|X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable ; et la formule

$$\sum_{x\in X(\omega)} \mathbf{P}(X=x)\mathbf{E}(Y|X=x) = \sum_{y\in Y(\omega) y\mathbf{P}(Y=y)}$$

donne le résultat.

Si Y n'est pas à valeurs positives, ce qui précède appliqué à $|Y|$ permet d'affirmer que la famille

$$(y\mathbf{P}(X=x)\mathbf{P}(Y=y|X=x))_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$$

est sommable, on a le droit de la sommer « dans les deux sens » et on obtient la formule.

995.55

Une formule importante pour l'espérance ; espérance d'un maximum

1. Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$.
   (a) Montrer que U a une espérance si et seulement si la famille $(\mathrm{P}(U \geq j))_{j\geq 1}$ est sommable, et que
   $$\mathrm{E}(U) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathrm{P}(U \geq j)$$
   (b) Trouver une formule reliant $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} j\mathrm{P}(U \geq j)$ à $\mathrm{E}(U)$ et $\mathrm{E}(U^2)$.
2. On considère n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendantes et de même loi, à valeurs dans $\mathbf{N}$. On pose, pour tout $k \geq 0$,
   $$F_k = \mathrm{P}(X_1 \leq k)$$
   En notant $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, exprimer $\mathrm{P}(M_n \leq k)$ à l'aide de F_k.
3. On reprend les hypothèses de la question précédente, la loi commune aux X_i étant une loi $\mathcal{G}(p)$. Exprimer $\mathrm{E}(M_n)$ sous forme d'une somme finie. Calculer $\mathrm{E}(M_3)$ dans le cas $p = 1/2$.

---

1. (a) La σ-additivité montre que, pour tout $j \geq 1$,
   $$\mathrm{P}(U \geq j) = \sum_{k=j}^{+\infty} \mathrm{P}(U = k)$$
   (il est naturel de faire intervenir les $\mathrm{P}(U = k)$ vu la formule de définition de l'espérance d'une variable à valeurs entières). On doit donc étudier
   $$\sum_{j\geq 1} \left(\sum_{k=j}^{+\infty} \mathrm{P}(U = k) \right)$$
   ce qui conduit naturellement, pour pouvoir utiliser la théorie de la sommabilité des suites doubles, à introduire la suite double $(\alpha_{j,k})_{(j,k)\in\mathbf{N}}$ définie par
   $$\alpha_{j,k} = \mathrm{P}(U = k) \quad \text{si } 1 \leq j \leq k, \qquad \alpha_{j,k} = 0 \quad \text{sinon}$$
   C'est une suite double de réels **positifs**. On peut donc directement lui appliquer les résultats sur la sommabilité « par paquets » sans avoir à mettre des valeurs absolues.
   Remarquons que (*paquets à j fixé*), pour tout $j \in \mathbf{N}$, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \alpha_{j,k}$ converge, et sa somme vaut $\sigma_j = 0$ si $j = 0$, $\sigma_j = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{j,k} = \sum_{k=j}^{+\infty} \alpha_{j,k} = \mathrm{P}(U \geq j)$ sinon.
   Remarquons d'autre part (*paquets à k fixé*) que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, la série $\displaystyle\sum_{j\geq 0} \alpha_{j,k}$ converge. Et sa somme vaut $s_k = 0$ si $k = 0$, $s_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_{j,k} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{j,k} = k\mathrm{P}(U = k)$ sinon.
   Par théorème de sommabilité et sommation par paquets, les trois énoncés suivants sont équivalents :
   (i) La famille $(\alpha_{j,k})_{(j,k)\in\mathbf{N}^2}$ est sommable.
   (ii) La série $\sum_j \sigma_j$ converge.
   (iii) La série $\sum_k s_k$ converge.
   Et le cas échéant (*C'est la façon snob classique de dire « si c'est le cas ». Vérifier que vous savez bien conjuguer le verbe échoir à tous les temps, tous les modes. Indication : c'est la même chose que choir)*, $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \sigma_j = \sum_{k=0}^{+\infty} s_k$ (la valeur commune est la somme de la suite double : $\displaystyle\sum_{(j,k)\in\mathbf{N}^2} \alpha_{i,j}$). Or l'énoncé (iii)

est par définition de l'espérance équivalent à « U a une espérance ». Quand U a une espérance, on a donc bien $\displaystyle\sum_{j\geq 1} \mathrm{P}(U \geq j)$ convergente, et $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \mathrm{P}(U \geq j) = \mathrm{E}(U)$. Dans le cas contraire, ces deux choses sont aussi égales, à condition de leur attribuer la valeur $+\infty$.

C'est une question classique et importante, qui demande de bien maîtriser les bases de la sommabilité. Bien entendu, si on rencontre dans un problème la formulation « on suppose que U est d'espérance finie, montrer que $\sum_j P(U \geq j)$ converge et que sa somme vaut $E(U)$ », c'est un peu plus facile à rédiger. Le faire est un très bon entraînement. Notons enfin que cette formule a été admise à l'écrit math 2 des Mines 2015. On peut considérer que la démonstration n'en est pas évidente.

(b) Pourquoi ne pas refaire la même chose ? en s'intéressant cette fois à la suite double $(j\alpha_{j,k})_{(j,k)\in\mathbf{N}^2}$. De nouveau, pour tout $j \in \mathbf{N}$, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} j\alpha_{j,k}$ converge, et sa somme vaut $\sigma_j = 0$ si $j = 0$, $\displaystyle\sigma_j = \sum_{k=0}^{+\infty} j\alpha_{j,k} = \sum_{k=j}^{+\infty} j\alpha_{j,k} = j\mathrm{P}(U \geq j)$ sinon.

Et aussi, pour tout $k \in \mathbf{N}$, la série $\displaystyle\sum_{j\geq 0} j\alpha_{j,k}$ converge. Et sa somme vaut $s_k = 0$ si $k = 0$, $\displaystyle s_k = \sum_{j=0}^{+\infty} j\alpha_{j,k} = \sum_{j=1}^{k} j\alpha_{j,k} = \frac{k(k+1)}{2}\mathrm{P}(U = k)$ sinon.

Les mêmes arguments de sommabilité et sommation par paquets qu'en (a) (on a encore une famille positive) montrent que $\displaystyle\sum_{j} j\mathrm{P}(U \geq j)$ converge si et seulement si $\displaystyle\sum_{k} \frac{k(k+1)}{2}\mathrm{P}(U = k)$ converge, donc si et seulement si $\displaystyle\sum_{k} k^2\mathrm{P}(U = k)$ converge, donc si et seulement si U a un moment d'ordre 2. Et le cas échéant,

$$\sum_{j=1}^{+\infty} j\mathrm{P}(U \geq j) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{E}(U^2) + \mathrm{E}(U)\right)$$

(formule de transfert).

2.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(M_n \leq k) &= \mathrm{P}(X_1 \leq k, \ldots, X_n \leq k) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X_i \leq k) \qquad \text{(indépendance)} \\
&= F_k^n
\end{aligned}$$

3. Et donc, pour tout $j \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(M_n \geq j) &= 1 - \mathrm{P}(M_n \leq j-1) \\
&= 1 - \left(\mathrm{P}(X_1 \leq j-1)\right)^n \\
&= 1 - \left(1 - \mathrm{P}(X_1 \geq j)\right)^n \\
&= 1 - (1 - (1-p)^{j-1})^n \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (1-p)^{k(j-1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} (1-p)^{k(j-1)}
\end{aligned}$$

Et la formule donne alors (la convergence des séries écrites ci-dessous ne pose pas de problème : ce sont des séries géométriques de raison dans $]-1,1[$)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(M_n) &= \sum_{j=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k+1}(1-p)^{k(j-1)}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k+1}\left(\sum_{j=1}^{+\infty}(1-p)^{k(j-1)}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{1-(1-p)^k}
\end{aligned}$$

995.56

Quelques calculs d'espérance

1. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ $(0<p<1)$, calculer $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)$
2. Si X et Y sont indépendantes de même loi $\mathcal{G}(p)$, montrer que $|X-Y|$ et $\min(X,Y)$ sont indépendantes.
3. Si X et Y sont indépendantes de même loi $\mathcal{G}(p)$, calculer

$$\mathrm{E}\left(\frac{|X-Y|}{\min(X,Y)}\right)$$

On n'essaiera pas de trop simplifier le résultat.

---

1. On applique le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\frac{1}{X}\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(1-p)^{n-1}p\\
&= \frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-p)^n}{n}\\
&= -\frac{p}{1-p}\ln(p)
\end{aligned}$$

2. Plutôt que calculer les lois séparément, calculons la loi conjointe : si $(m,n)\in\mathbf{N}_*\times\mathbf{N}_*$,

$$\begin{aligned}
P\left(|X-Y|=m,\min(X,Y)=n\right) &= P(X=n,Y=n+m)+P(Y=n,X=n+m)\\
&= 2p^2(1-p)^{2n+m-2}
\end{aligned}$$

et

$$P\left(|X-Y|=0,\min(X,Y)=n\right) = P(X=n,Y=n) = p^2(1-p)^{2n-2}$$

D'où l'on tire les lois marginales :

$$\begin{aligned}
P(\min(X,Y)=n) &= \sum_{m=0}^{+\infty}P(\min(X,Y)=n,|X-Y|=m)\\
&= p^2(1-p)^{2n-2}+2p^2(1-p)^{2n-1}\times\frac{1}{p}\\
&= p(1-p)^{2n-2}(p+2(1-p))
\end{aligned}$$

Or $1-(1-p)^2 = 2p-p^2$, on retrouve bien que $\min(X,Y)$ suit une loi $\mathcal{G}(1-(1-p)^2)$. Maintenant, la loi de $|X-Y|$:

$$P(|X-Y|=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2n-2} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2}$$

et, si $m \in \mathbf{N}_*$,

$$P(|X-Y|=m) = \frac{2p^2(1-p)^m}{1-(1-p)^2}$$

On vérifie l'indépendance, ce qui permet sans difficulté le calcul de l'espérance cherchée :

$$\mathrm{E}\left(\frac{|X-Y|}{\min(X,Y)}\right) = \mathrm{E}\left(|X-Y|\right) \times \mathrm{E}\left(\frac{1}{\min(X,Y)}\right)$$

(indépendance), puis

$$\mathrm{E}\left(|X-Y|\right) = \sum_{m=1}^{+\infty} m\frac{2p^2(1-p)^m}{1-(1-p)^2} = \frac{2p^2(1-p)}{1-(1-p)^2} \times \frac{1}{p^2}$$

(d'après la loi trouvée à la question précédente et la série entière dérivée classique

$$\sum_{m=1}^{+\infty} mx^{m-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad (|x|<1) \qquad)$$

et

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{\min(X,Y)}\right) = -\frac{1-(1-p)^2}{(1-p)^2}\ln\left(1-(1-p)^2\right)$$

(première question). On en déduit un résultat…pas très très simple.

995.57

Loi binomiale négative

Si $X_1,\ldots,X_m$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi $\mathcal{G}(p)$ $(0<p<1)$, déterminer la loi de $X_1+\ldots+X_m$, son espérance, sa variance.

Un exercice pour réviser une loi célèbre (mais hors programme), et se souvenir de quelques principes simples : la fonction génératrice, c'est parfois utile, et il faut savoir y penser même quand on ne nous le demande pas. L'espérance et la variance demandent rarement de connaître la loi.

Notant $Y = X_1+\ldots+X_m$,

$$G_Y(t) = \left(\frac{pt}{1-qt}\right)^m$$

et on connaît le développement en série entière :

$$\forall x \in]-1,1[\qquad (1+x)^{-m} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\binom{m+k-1}{k}x^k$$

Donc

$$G_Y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{m+k-1}{k}p^m q^k x^{m+k}$$

Donc Y est à valeurs dans $[\![m,+\infty[\![$, et

$$\mathbf{P}(Y=k) = p^m q^{k-m}\binom{k-1}{k-m}$$

Mais bien sûr, sans faire tout ça,

$$\mathbf{E}(Y) = \frac{m}{p} \qquad , \qquad \mathbf{V}(Y) = \frac{mp}{q^2}$$

995.58

Somme aléatoire de variables aléatoires, identités de Wald

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}_*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribuées sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, et N une variable aléatoire sur le même espace, indépendante des X_i (i.e. la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$, avec $X_0 = N$, est une suite de variables aléatoires indépendantes). On suppose que les X_i et N sont à valeurs dans $\mathbf{N}_*$. Et on pose

$$S_N = X_1 + \ldots + X_N$$

c'est-à-dire, pour tout $\omega \in \Omega$:

$$S_{N(\omega)} = X_1(\omega) + \ldots + X_{N(\omega)}(\omega)$$

1. Exprimer la fonction génératrice de S_N à l'aide des fonctions génératrices de X_1 et de N (on rappelle que toutes les X_i ont même loi, donc même fonction génératrice).

2. En déduire que, si les X_i et N sont d'espérances finies, S_N l'est, et calculer $\mathbf{E}(S_N)$ en fonction de $\mathbf{E}(X_1)$ et de $\mathbf{E}(N)$.

3. On suppose que N et X_1 ont des moments d'ordre 2. Montrer

$$\mathbf{E}\big((S_N - \mathbf{E}(X)N)^2\big) = \mathbf{V}(X)\mathbf{E}(N)$$

---

1. Soit z tel que $|z| \leq 1$. On peut supposer z réel ou z complexe, cela ne change rien au calcul. Notons G_S la fonction génératrice cherchée :

$$G_S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_N = n)z^n$$

(la somme commence à $n = 1$ parce que l'énoncé précise que les X_i et N sont à valeurs dans $\mathbf{N}_*$, mais on pourrait faire commencer la somme à $n = 0$ sans inconvénient). La formule des probabilités totales permet d'écrire, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(S_N = n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_N = n, N = k)\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_k = n, N = k)\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_k = n)\mathbf{P}(N = k)\end{aligned}$$

En effet, $S_k = X_1 + \ldots + X_k$ et N sont indépendantes, pour tout $k \geq 1$. Donc

$$G_S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(S_k = n)\mathbf{P}(N = k)z^n \right)$$

Mais, si l'on pose $u_{n,k} = \mathbf{P}(S_k = n)\mathbf{P}(N = k)z^n$, la famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbf{N}_*^2}$ est sommable ; on peut en effet écrire, pour tout (n, k), $|u_{n,k}| \leq v_{n,k}$ où

$$v_{n,k} = \mathbf{P}(S_k = n)\mathbf{P}(N = k)$$

Or, pour tout n, par formule des probabilités totales, $\displaystyle\sum_k v_{n,k}$ converge, et

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{+\infty} v_{n,k} = \mathbf{P}(S_N = n)$$

donc $\sum_n \sigma_n$ converge. Il en résulte la sommabilité de la famille $(v_{n,k})$, et par suite celle de la famille $(u_{n,k})$.

On peut donc intervertir les sommations :

$$\begin{aligned}
G_S(z) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{P}(S_k=n)\mathbf{P}(N=k)z^n\right)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}(N=k)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{P}(S_k=n)z^n\right)
\end{aligned}$$

Or le cours affirme, par indépendance des X_i, que, si $|z|\leq 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{P}(S_k=n)z^n = (G_X(z))^k$$

où G_X désigne la fonction génératrice de chaque variable aléatoire X_i. Finalement,

$$\begin{aligned}
G_S(z) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}(N=k)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{P}(S_k=n)z^n\right)\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}(N=k)\left(G_X(z)\right)^k\\
&= G_N\left(G_X(z)\right)
\end{aligned}$$

où l'on note G_N la fonction génératrice de N. On notera que $|G_X(z)|\leq 1$, ce qui autorise l'écriture $G_N\left(G_X(z)\right)$. Mais de toute manière, la sommabilité montrée précédemment justifie l'existence de toutes les sommes écrites.

2. Si les X_i et N sont d'espérances finies, G_N et G_X, que l'on considère ici comme fonctions définies sur $[0,1]$ à valeurs réelles, sont dérivables en 1. Donc G_S l'est (autre rédaction : G_X et G_N sont C^1 sur $[0,1]$, donc G_S l'est), et
$$G_S'(1) = G_X'(1)G_N'\left(G_X(1)\right) = \mathbf{E}(X)\ G_N'(1) = \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(N)$$

3. Ici, G_N et G_X sont de classe C^2 sur $[0,1]$. Par composition ($[0,1]$ est stable par n'importe quelle fonction génératrice), G_S l'est, et
$$\forall t\in[0,1]\qquad G_S''(t) = G_X''(t)G_N'\left(G_X(t)\right)+\left(G_X'(t)\right)^2G_N''\left(G_X(t)\right)$$
Toutes les variables aléatoires, S_N, X, N ont des moments d'ordre 2, et donc les produits de deux de ces variables aléatoires admettent des moments d'ordre 1. Donc $\mathbf{E}(NS_N)<+\infty$, et d'autre part, par transfert,
$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(\left(S_N-\mathbf{E}(X)N\right)^2\right) &= \sum_{(p,q)\in\mathbf{N}_*}\left(p-q\mathbf{E}(X)\right)^2\mathbf{P}(S_N=p,N=q)\\
&= \sum_{(p,q)\in\mathbf{N}_*}\left(p-q\mathbf{E}(X)\right)^2\mathbf{P}(S_q=p,N=q)\\
&= \sum_{(p,q)\in\mathbf{N}_*}\left(p-q\mathbf{E}(X)\right)^2\mathbf{P}(S_q=p)\mathbf{P}(N=q)\\
&= \sum_{q=1}^{+\infty}\mathbf{P}(N=q)\left(\sum_{p=1}^{+\infty}\left(p-\mathbf{E}(S_q)\right)^2\mathbf{P}(S_q=p)\right)\\
&= \sum_{q=1}^{+\infty}\mathbf{P}(N=q)\mathbf{V}(S_q)\\
&= \sum_{q=1}^{+\infty}q\mathbf{V}(X)\mathbf{P}(N=q)\\
&= \mathbf{V}(X)\mathbf{E}(N)
\end{aligned}$$
On a utilisé diverses choses : indépendance, sommabilité, transfert…

995.59

Bernoulli ∘ Poisson = Poisson

On fait l'hypothèse que le nombre N de véhicules passant pendant une journée devant une station service suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Chaque véhicule s'arrête à la station indépendamment des autres véhicules, avec une probabilité p. Quelle loi suit le nombre de véhicules s'arrêtant quotidiennement à la station ?

Assez souvent posé, avec des contextes variables

Notons X ce nombre de véhicules. Il est naturel de conditionner par les valeurs de N : si $k \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n, X = k) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) P_{N=n}(X = k) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n (1-p)^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= e^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} \\
&= e^{-\lambda p} \frac{(p\lambda)^k}{k!}
\end{aligned}$$

Donc X suit une loi de Poisson de paramètre λp.

7 De futurs classiques en probabilités

995.60

Mines-Ponts

Soit $n \in \mathbf{N}_*$, $(X_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une famille de variables aléatoires réelles discrètes centrées réduites i.i.d., M la matrice $(X_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, D le déterminant de M. Calculer $\mathbf{E}(D)$ et $\mathbf{V}(D)$.

Difficulté : assez facile pour l'espérance, assez difficile pour la variance.
Propriétés du déterminant. Définitions de l'espérance et de la variance.
Il est conseillé d'aller voir l'exercice de l'X sur ce sujet, il contient en plus quelques cacluls sur les traces des puissances qui sont intéressants.
Pour l'espérance, tout marche.
⋆ Développement par rapport à une ligne ou une colonne :

$$D = \sum_{j=1}^{n} X_{1,j} C_{1,j}$$

où, par coalitions, $C_{1,j}$ et $X_{1,j}$ sont indépendantes. Donc

$$\mathbf{E}(D) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\left(X_{1,j}\right) \mathbf{E}\left(C_{1,j}\right) = 0$$

⋆ Formule avec les permutations : par linéarité de l'espérance, et indépendance, pas besoin de coalitions ici,

$$D = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma)\mathbf{E}\left(X_{\sigma(1),1}\right)\mathbf{E}\left(X_{\sigma(2),2}\right)\dots\mathbf{E}\left(X_{\sigma(n),n}\right) = 0$$

⋆ Considérations judicieuses : M a même loi que la matrice obtenue en permutant les deux premières colonnes de M (équidistribution et indépendance des $X_{i,j}$), ou en multipliant la première colonne de M par -1 (centrage des $X_{i,j}$), etc...
Bref, $\mathbf{E}(D) = 0$.
Pour la variance,

$$D = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} Y_\sigma$$

où

$$Y_\sigma = \epsilon(\sigma)X_{\sigma(1),1}X_{\sigma(2),2}\dots X_{\sigma(n),n}$$

(attention à ne pas dire que les Y_σ sont indépendantes, c'est faux). Il nous suffit de calculer

$$\mathbf{E}(Y_\sigma Y'_\sigma)$$

Qui vaut 0 si $\sigma \neq \sigma'$ (si $\sigma(i) \neq \sigma'(i)$, dans $\mathbf{E}(Y_\sigma Y'_\sigma)$ on peut factoriser $\mathbf{E}(X_{\sigma(i),i})$), et 1 si $\sigma = \sigma'$ car

$$Y_\sigma^2 = X_{\sigma_1,1}^2 \dots X_{\sigma(n),n}^2$$

et les $X_{\sigma_(i),i}^2$ sont indépendantes, d'espérance 1 vu l'hypothèse. Finalement $\mathbf{V}(D) = n!$

995.61

X

Soit $d \in \mathbf{N}_*$. Soit $(A_{i,j})_{1\leq i,j\leq d}$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Considérons la matrice $A = (A_{i,j})_{1\leq i,j\leq d}$.

1. Déterminer $\mathbf{E}\left(\mathrm{Tr}(A^k)\right)$ pour $k = 1, 2, 3, 4$.
2. Déterminer l'espérance et la variance de $\det(A)$.

Moyennement difficile, mais quand même, exercice d'oral de l'X. Varié et intéressant (risque de plaire aux examinateurs et de devenir classique).
Indépendance, coalitions, algèbre linéaire sans réduction.

Remarque préliminaire : dans ce genre d'exercice, il ne faut pas calculer les lois des traces et du déterminant : si on en avait besoin, on le demanderait.

1. $\mathrm{Tr}(A) = A_{1,1} + \cdots + A_{d,d}$, donc $\mathbf{E}\left(\mathrm{Tr}(A)\right) = 0$.

   De même,
$$\mathrm{Tr}(A^2) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{d} A_{i,j}A_{j,i}\right)$$

   Par indépendance, si $i \neq j$, $\mathbf{E}(A_{i,j}A_{j,i}) = \mathbf{E}(A_{i,j})\mathbf{E}(A_{j,i}) = 0$. Ne restent que les espérances des $A_{i,i}^2$ qui sont des variables certaines égales à 1. Donc $\mathbf{E}\left(\mathrm{Tr}(A^2)\right) = d$.

   Pour $\mathrm{Tr}(A^3)$, on peut faire le même calcul, ce n'est d'ailleurs pas bête car on passera d'autant plus facilement à $\mathrm{Tr}(A^4)$. Mais c'est quand même bien de voir que $-A$ a la même loi que A, donc $\mathrm{Tr}(A^3)$ est une variable symétrique, et son espérance est nulle. Ce qui marche d'ailleurs pour n'importe quelle puissance impaire.

   On pouvait aussi écrire
$$\mathrm{Tr}(A^3) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{d}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}A_{j,k}A_{k,i}\right)\right)$$

   Si $i = j = k$, $A_{i,j}A_{j,k}A_{k,i} = A_{i,i}^3 = A_{i,i}$, d'espérance nulle. Sinon, il y a au moins un des trois couples (i,j), (j,k), (k,i) qui est « tout seul » (i.e. égal à aucun des autres), et par indépendance, l'espérance de $A_{i,j}A_{j,k}A_{k,i}$ vaut 0.

   Pour $\mathrm{Tr}(A^4)$, on repart avec les grosses formules :
$$\mathrm{Tr}(A^3) = \sum_{i=1}^{d}\left(\sum_{k=1}^{d}\left(\sum_{j=1}^{d}\left(\sum_{\ell=1}^{n} A_{i,j}A_{j,k}A_{k,\ell}A_{\ell,i}\right)\right)\right)$$

   Si $i = j = k = l$, $A_{i,j}A_{j,k}A_{k,\ell}A_{\ell,i} = A_{i,i}^4 = 1$. Si $|\{(i,j),(j,k),(k,\ell),(\ell,i)\}| \in \{3,4\}$, au moins un des quatre couples $(i,j),(j,k),(k,\ell),(\ell,i)$ est différent des autres, supposons par exemple que (i,j) soit un tel couple, alors
$$\mathbf{E}\left(A_{i,j}A_{j,k}A_{k,\ell}A_{\ell,i}\right) = \mathbf{E}(A_{i,j})\mathbf{E}\left(A_{j,k}A_{k,\ell}A_{\ell,i}\right) = 0$$
   et de même pour les autres cas. Supposons maintenant $|\{(i,j),(j,k),(k,\ell),(\ell,i)\}| = 2$. Notons que $(i,j) \neq (j,k)$, sinon $i = j = k$ et alors $|\{(i,j),(j,k),(k,\ell),(\ell,i)\}| = |\{(i,i),(i,\ell),(\ell,i)\}| = 3$ ou 1. De même, $(i,j) \neq (\ell,i)$. Donc $(i,j) = (k,\ell)$ et $(j,k) = (\ell,i)$. Autrement dit, $i = k \neq j = \ell$. On a
$$\mathbf{E}\left(A_{i,j}A_{j,k}A_{k,\ell}A_{\ell,i}\right) = \mathbf{E}\left(A_{i,j}^2A_{j,i}^2\right) = \mathbf{E}\left(A_{i,j}^2\right)\mathbf{E}\left(A_{j,i}^2\right) = 1$$

   Il y a $n(n-1)$ tels quadruplets (i,j,k,ℓ). Donc $\mathbf{E}\left(\mathrm{Tr}(A^4)\right) = n(n-1) + n = n^2$.

   Contrairement à ce qu'on pourait penser, la méthode utilisée pour calculer $\mathbf{E}\left(\mathrm{Tr}(A^4)\right)$ n'est pas réservée à ce petit exercice sans intérêt, elle sert aussi pour la preuve de la loi des grands nombres de Borel.

2. Pour l'espérance, tout marche.

   ⋆ Développement par rapport à une ligne ou une colonne :
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{1,j}C_{1,j}$$
   où, par coalitions, $C_{1,j}$ et $A_{1,j}$ sont indépendantes. Donc
$$\mathbf{E}\left(\det(A)\right) = \sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\left(A_{1,j}\right)\mathbf{E}\left(C_{1,j}\right) = 0$$

$\star$ Formule avec les permutations : par linéarité de l'espérance, et indépendance, pas besoin de coalitions ici,

$$\mathbf{E}\left(\det(A)\right) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma)\mathbf{E}\left(A_{\sigma(1),1}\right)\mathbf{E}\left(A_{\sigma(2),2}\right)\ldots\mathbf{E}\left(A_{\sigma(n),n}\right) = 0$$

$\star$ Considérations judicieuses (comme pour $\mathbf{E}(\mathrm{Tr}(A))$) : A a même loi que la matrice obtenue en permutant les deux premières colonnes de A (équidistribution et indépendance des $A_{i,j}$), ou en multipliant la première colonne de A par -1 (centrage des $A_{i,j}$), etc...

Bref, $\mathbf{E}\left(\det(A)\right) = 0$.

Pour la variance, c'est une autre histoire, un peu plus dure parce qu'il faut bien choisir sa méthode. Et « la » bonne méthode (attention, il y en a peut-être d'autres que je n'ai pas vues !) c'est

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} Y_\sigma$$

où

$$Y_\sigma = \epsilon(\sigma)A_{\sigma(1),1}A_{\sigma(2),2}\ldots A_{\sigma(n),n}$$

(attention à ne pas dire que les Y_σ sont indépendantes, c'est faux). Il nous suffit de calculer

$$\mathbf{E}(Y_\sigma Y'_\sigma)$$

Qui vaut 0 si $\sigma \neq \sigma'$ (si $\sigma(i) \neq \sigma'(i)$, dans $\mathbf{E}(Y_\sigma Y'_\sigma)$ on peut factoriser $\mathbf{E}(A_{\sigma(i),i})$), et 1 si $\sigma = \sigma'$ (car $Y_\sigma^2 = 1$). On trouve donc $\mathbf{V}\left(\det(A)\right) = n!$

995.62

ÉNS

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles ayant un moment d'ordre 2 et telles que $\mathbf{V}(X) > 0$ et $\mathbf{V}(Y) > 0$. Trouver $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ minimisant $\mathbf{E}\left((Y - aX - b)^2\right)$

Difficulté : moyenne. Très intéressant....
Définitions de l'espérance, de la variance, de la covariance. Théorème de projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.

Si on voit un rapport avec le théorème de projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, on n'a pas tort. Mais quel serait le produit scalaire ? sur l'espace des variables aléatoires réelles de carré intégrable ayant un moment d'ordre 2, on pourrait définir

$$(X|Y) = \mathbf{E}(XY)$$

Le problème est que ce n'est pas un vrai produit scalaire, car $(X|X) = 0$ implique que X est presque sûrement nulle, pas nulle. Les autres propriétés sont bien vérifiées, il faut s'attendre à ce que l'examinateur pose éventuellement des questions sur ce point, on devra donc peut-être parler de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Le fait que ce ne soit pas un vrai produit scalaire n'empêche pas de s'inspirer de ce qui est au programme en algèbre bilinéaire. *Et c'est là tout l'intérêt de l'exercice, assez facile si on a bien assimilé le théorème de projection.* Si c'était un vrai produit scalaire, a et b seraient uniques et caractérisés par

$$Y - aX - b \in \mathrm{Vect}(X, 1)^\perp$$

(ne pas oublier, au tableau, de faire un dessin), ce qui équivaut à

$$(1|Y - aX - b) = (X|Y - aX - b) = 0$$

ou encore à

$$a\mathbf{E}(X) + b = \mathbf{E}(Y) \qquad \text{et} \qquad a\mathbf{E}(X^2) + b\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(XY)$$

On trouve (après avoir remarqué que le déterminant du système était au signe près $\mathbf{V}(X)$

$a = \dfrac{E(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)}{\mathbf{V}(X)} = \dfrac{\mathbf{Cov}(X,Y)}{\mathbf{V}(X)}$
et $b = \dfrac{\mathbf{E}(Y)\mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(XY)\mathbf{E}(X)}{V(X)}$. Supposons dorénavant que a et b aient ces valeurs. Si α et β sont deux réels,

$$\mathbf{E}\left((Y-\alpha X-\beta)^2\right) = \mathbf{E}\left(((Y-aX-b)+(\alpha' X+\beta'))^2\right)$$

où $\alpha' = a-\alpha$ et $\beta' = b-\beta$. Or par construction :

$$\mathbf{E}\left((Y-aX-b)(\alpha' X+\beta')\right) = 0$$

Donc

$$\mathbf{E}\left((Y-\alpha X-\beta)^2\right) = \mathbf{E}\left((Y-aX-b)^2\right) + \mathbf{E}\left((\alpha' X+\beta')^2\right)$$

ce qui prouve bien la propriété de minimisation voulue.
Une autre idée est de chercher les points critiques de la fonction

$$(a,b) \longmapsto \mathbf{E}\left((Y-aX-b)^2\right)$$

ce qui se fait en développant le carré et en coupant l'espérance en petits morceaux (on obtient une fonction de degré 2 en a et b). On tombe sur les mêmes équations. Mais il est moins facile de montrer qu'on a effectivement un minimum.

Il est fréquent de voir des exercice posés à l'oral des ens « descendre » ensuite à Centrale-Mines. On peut être quasiment certain que c'est ce qui arrivera à celui-ci. Qui d'ailleurs est d'une difficulté très modérée pour un oral ens.

995.63

ÉNS

Une matrice symétrique $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ est dite positive lorsque

$$\forall Y \in \mathbf{R}^n \qquad {}^tY\ S\ Y \geq 0$$

1. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$. Montrer que S est positive si et seulement s'il existe, sur un certain espace probabilisé, une famille $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires réelles bornées telles que $s_{i,j} = \mathbf{E}(X_i X_j)$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
2. Soient A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ positives. Montrer que $(a_{i,j}b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ l'est.

Difficulté moyenne. Très, très intéressant.
Théorème spectral, lois de Bernoulli, construction de variables aléatoires indépendantes sur l'univers (simple) d'un Pile ou Face fini.

(On remarque l'identification habituelle entre éléments de $\mathbf{R}^n$ et matrices colonnes).

1. Un sens est manifestement d'abord plus accessible, car on possède une information précise : si, avec les hypothèses écrites ci-dessus,
$$\forall (i,j) \qquad s_{i,j} = \mathbf{E}(X_i X_j)$$
Alors, avec des notations évidentes,
$$\begin{aligned} {}^t\!Y\ S\ Y &= \sum_{i=1}^n y_i \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{E}(X_i X_j) y_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{E}\left(X_i \sum_{j=1}^n y_j X_j \right) \\ &= \mathbf{E}(Z^2) \end{aligned}$$
avec
$$Z = \sum_{i=1}^n y_i X_i$$
La condition suffisante en résulte. Dans l'autre sens, on commence par faire un peu d'algèbre bilinéaire, et on montre que la condition
$$\forall Y \in \mathbf{R}^n \qquad {}^t\!Y\ S\ Y \geq 0$$
est équivalente, pour une matrice symétrique réelle, à la condition
$$\mathrm{Sp}(S) \subset \mathbf{R}^+$$
(A un oral d'ens, montrer cette équivalence avec facilité est au moins aussi important qu'avoir de belles idées sur le reste de l'exercice). On a donc l'occasion de parler du théorème spectral, qui n'est jamais bien loin quand on parle de matrices symétriques, et qui justifie en général la recette suivante : **Lorsqu'on doit résoudre une question dans laquelle il est question de matrices symétriques réelles, on commence souvent par résoudre la question pour des matrices diagonales, puis on essaye d'étendre avec le théorème spectral.**
Si, donc,
$$S = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$
avec les d_i tous positifs, la condition devient $\mathbf{E}(X_i^2) = d_i$ pour tout i, et $\mathbf{E}(X_i X_j) = 0$ pour $i \neq j$. On aura tendance à chercher des variables aléatoires centrées indépendantes, de variance $\sqrt{d_i}$. Que ce telles variables existent et puissent être bornées, on imagine que ce n'est pas bien compliqué, mais peut-être l'examinateur voudra-t-il préciser un peu. D'abord, si $d_i = 0$ on peut prendre $X_i = 0$ (une variable aléatoire constante, on dit parfois certaine, est indépendante de toute variables aléatoire, si on n'en est pas persuadé c'est bien d'y réfléchir un peu). Sinon, on peut essayer des variables aléatoires très, très simples : soit Z_i suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$. Si $X_i = aZ_i + b$, alors $\mathbf{E}(X_i) = \dfrac{a}{2} + b$ et $\mathbf{V}(X_i) = \dfrac{a^2}{4}$. On aimerait $\dfrac{a}{2} + b = 0$ et $\dfrac{a^2}{4} = d_i$ ce qui ne pose pas de problème particulier. Mais on veut aussi l'indépendance (pour que $\forall i \qquad \mathbf{E}(X_i) = 0$ implique $\forall i \neq j \qquad \mathbf{E}(X_i X_j) = 0$). Il suffit pour cela de prendre une famille $(Z_1, \dots, Z_n)$ de variables aléatoires indépendantes suivant des lois $\mathcal{B}(1/2)$ et de prendre, pour tout i,
$$X_i = \sqrt{d_i}(2Z_i - 1)$$
Peut-être l'examinateur voudra-t-il davantage (ce n'est pas absurde, si on lit les rapports d'oraux) : une telle famille $(Z_1, \dots, Z_n)$ existe-t-elle ? cette « réalisation » (au sens de Kolmogorov) est assez simple, puisqu'il suffit de redonner l'univers naturel d'une partie de Pile ou Face à n lancers :
$$\Omega = \{0,1\}^n$$

(on peut évidemment remplacer 0 et 1 par P et F ou n'importe quoi d'autre). Cet univers étant fini, on le munit de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$, et on définit dessus la probabilité uniforme, la plus simple donc. Alors les

$$Z_i \ : \ (\omega_1, \ldots, \omega_n) \longmapsto \omega_i$$

conviennent.

Le problème est donc résolu pour les matrices diagonales. Soit maintenant S symétrique positive, soit $(P, D) \in \mathcal{O}(n) \times \mathcal{D}_n(\mathbf{R})$ telles que

$$S = PDP^{-1} = PD^tP$$

Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de S et sont donc ≥ 0. Ce qui permet d'affirmer l'existence d'un n-uplet de variables aléatoires réelles $(X_1, \ldots, X_n)$ telles que

$$\forall (i,j) \qquad d_{i,j} = \mathbf{E}(X_i X_j)$$

Pour que les choses soient simples, on peut écrire cela

$$D = \mathbf{E}(X\ {}^tX)$$

avec $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et en convenant que l'espérance d'une matrice aléatoire est la matrice dont les coefficients sont les espérances des coefficients (on connaît ce genre de chose pour l'intégrale, et même si on ne sait pas que l'espérance est une intégrale, on a vu que ses propriétés y faisaient fortement penser). Par linéarité de l'espérance, on aura alors

$$S = \mathbf{E}((PX)\ {}^t(PX))$$

(si on n'y croit pas, on peut vérifier coefficient par coefficient…) et la question est résolue.

2. Si on considère deux n-uplets $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ de variables aléatoires telles que, pour tout couple (i, j),
$$a_{i,j} = \mathbf{E}(X_i X_j) \qquad , \qquad b_{i,j} = \mathbf{E}(Y_i Y_j)$$
on aura
$$a_{i,j} b_{i,j} = \mathbf{E}((X_i Y_i)(X_j Y_j))$$
si on a $(X_1, \ldots, X_n)$ indépendante de $(Y_1, \ldots, Y_n)$. Aucun problème ! on fait un Pile-Face à $2n$ lancers, on utilise les n premiers lancers pour définir les X_i comme en **1**, et les n lancers suivants pour définir les Y_i.

Il est bien de savoir qu'on définit, pour tout $s > 1$, une loi de probabilité sur $\mathbf{N}_*$ par la formule

$$\mathbf{P}(X = n) = \frac{1}{\zeta(s)\ n^s}$$

et que cette probabilité donne de sympathiques applications arithmétiques. Par exemple :

995.64

ÉNS

1. Soit $a > 1$ un réel. Montrer qu'il existe une probabilité P sur $\mathbf{N}$ telle que $P(k\mathbf{N}) = 1/k^a$ pour tout $k \in \mathbf{N}_*$.
2. Montrer que la série des inverses des nombres premiers diverge.
3. Montrer qu'il n'existe pas de probabilité P sur $\mathbf{N}$ telle que $P(k\mathbf{N}) = 1/k$ pour tout $k \in \mathbf{N}_*$.

Classique de l'« arithmétique probabiliste ». Loi zeta non donnée (mieux vaut la connaître). Indépendance.

1. Remarquons que nécessairement $P(\{0\}) = 0$, car 0 est dans tous les $k\mathbf{N}$, donc pour tout $k \geq 1$, $P(\{0\}) \leq 1/k^a$. Un petit peu de réflexion conduit assez naturellement à poser, si $n \geq 1$,

$$P(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(a)} \frac{1}{n^a}$$

qui vérifie assez simplement la condition imposée, car

$$P(k\mathbf{N}) = \frac{1}{\zeta(a)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(kn)^a}$$

2. Notons $(p_k)_{k\geq 1}$ la suite des nombres premiers (strictement croissante si on veut, ce n'est pas très nécessaire). On vérifie assez facilement, à partir de

$$(p_{i_1}\mathbf{N}) \cap \cdots \cap (p_{i_m}\mathbf{N}) = p_{i_1} \dots p_{i_m}\mathbf{N}$$

pour toute famille finie $(p_{i_1}, \dots, p_{i_m})$ de nombres premiers, que $(p_k\mathbf{N})_{k\geq 1}$ est une famille d'évènements indépendants. La famille des complémentaires est aussi indépendante. Or

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} \overline{p_k\mathbf{N}} = \{1\}$$

Donc, par indépendance et continuité décroissante,

$$\prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_k^a}\right) \xrightarrow[m\to+\infty]{} \frac{1}{\zeta(a)}$$

(formule d'Euler, tellement plus facile à obtenir avec des probabilités que de façon purement arithmétique...). Si $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{p_k}$ converge, par comparaison de série à termes réels de signes constants, $\sum_{k\geq 1} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$ converge. Et donc il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \xrightarrow[m\to+\infty]{} \lambda$$

Mais, si $a > 1$, pour tout k, $p_k \leq p_k^a$, donc $1 - \frac{1}{p_k} \leq 1 - \frac{1}{p_k^a}$; on peut multiplier ces inégalités entre réels strictement positifs, puis prendre les limites quand $m \to +\infty$ pour obtenir

$$\lambda \leq \frac{1}{\zeta(a)}$$

Mais $\zeta(a) \xrightarrow[a\to 1]{} +\infty$ (comparaison à une intégrale, par exemple), contradiction.

3. On aurait

$$\prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \xrightarrow[m\to+\infty]{} \mathbf{P}(\{1\})$$

d'où nécessairement (prenant la limite quand $m \to +\infty$) d'après la question précédente, $\mathbf{P}(\{1\}) = 0$. Puis comme de même la question précédente dit que

$$\prod_{k=2}^{m} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$$

alors $\mathbf{P}\left(\{m \geq 2 \ ; \ \forall k \geq 3 \quad \nu_{p_k}(m) = 0\}\right) = 0$ et ainsi de suite (ce n'est pas la meilleurs manière de rédiger) on arrive à $\mathbf{P}(\mathbf{N}) = 0$, contradiction.