Fonctions usuelles

Je me souviens

1.1 Puissances

1. Que sont les fonctions puissances ?
2. Quel est le domaine de définition de ces fonctions ? Comment sont-elles définies ?
3. Sont-elles dérivables ? Où ça ? Que sont leurs dérivées ? À quoi ressemblent leurs graphes ?

1.2 Exponentielles et logarithmes

4. Que sont les fonctions exponentielles ? logarithmes ?
5. Quel est le domaine de définition de ces fonctions ? Comment sont-elles définies ?
6. Sont-elles dérivables ? Où ça ? Que sont leurs dérivées ? À quoi ressemblent leurs graphes ?
7. Comment utiliser le cercle trigonométrique ?

1.3 Trigonométrie hyperbolique

8. Que sont les fonctions hyperboliques ?
9. Quel est le domaine de définition de ces fonctions ? Comment sont-elles définies ?
10. Sont-elles dérivables ? Où ça ? Que sont leurs dérivées ? À quoi ressemblent leurs graphes ?
11. Quel est le comportement au voisinage de l'infini ?
12. Il y a un formulaire de trigonométrie hyperbolique ?

1.4 Trigonométrie circulaire

13. Quelles sont les fonctions de trigonométrie circulaire ?
14. Quel est le domaine de définition de ces fonctions ? Ont-elles des propriétés remarquables ?
15. Sont-elles dérivables ? Où ça ? Que sont leurs dérivées ? À quoi ressemblent leurs graphes ?
16. Comment utiliser le cercle trigonométrique ?
17. Il y a un formulaire de trigonométrie circulaire ?

1.5 Trigonométrie circulaire réciproque

18. Quelles sont les fonctions de trigonométrie circulaire réciproques ?
19. Quel est le domaine de définition de ces fonctions ? Comment sont-elles définies ?
20. Sont-elles dérivables ? Où ça ? Que sont leurs dérivées ? À quoi ressemblent leurs graphes ?
21. Comment utiliser le cercle trigonométrique ?

Exercices et résultats classiques à connaître

Une formule classique avec la fonction Arctan

61.1

Montrer que, pour tout $x > 0$:

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

Et pour $x < 0$?

Une fonction hyperbolique réciproque

61.2

Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\operatorname{ch} x = y$$

Exercices

61.3

Déterminer les réels x tels que :

$$\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$$

61.4

Déterminer les réels $x > 0$ tels que :

$$x^{(x^x)} = (x^x)^x$$

61.5

Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\ln(x+1) + \ln(4x-1) = \ln(2x-1) + \ln(3x+1)$$

61.6

Résoudre l'inéquation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\log_4(x+2) > \log_2(x-1)$$

61.7

Résoudre le système d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2\ln x - 3\ln y = \ln 2 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

61.8

Résoudre le système d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \mathrm{e}^x - y = \mathrm{e}^y - x \\ y - \ln x = \ln y + x \end{cases}$$

61.9

Montrer que $\log_3(2)$ est irrationnel.

61.10

Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$2\,\mathrm{ch}\,x + 3\,\mathrm{sh}\,x = 2$$

61.11

Résoudre le système, d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \mathrm{ch}\,x + \mathrm{ch}\,y = \dfrac{27}{8} \\ \mathrm{sh}\,x + \mathrm{sh}\,y = \dfrac{21}{8} \end{cases}$$

61.12

Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, résoudre l'équation :

$$\mathrm{sh}\,x = y$$

61.13

Pour $y \in \left]-1, 1\right[$ fixé, résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{th}\,x = y$$

61.14

(a) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$

(b) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$

61.15

Soit $x \neq 0\,(2\pi)$. Montrer que :

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

(a) en procédant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$;

(b) en exploitant les nombres complexes.

61.16

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \cos^2 \frac{k\pi}{9}$.

61.17

Simplifier les expressions suivantes :

(a) $\cos(2\operatorname{Arccos} x)$	(c) $\sin(2\operatorname{Arccos} x)$	(e) $\sin(2\operatorname{Arctan} x)$
(b) $\cos(2\operatorname{Arcsin} x)$	(d) $\cos(2\operatorname{Arctan} x)$	(f) $\tan(2\operatorname{Arcsin} x)$

61.18

Simplifier les expression $\sin(\operatorname{Arcsin} x)$ et $\operatorname{Arcsin}(\sin x)$.

61.19

Résoudre l'équation :

$$\operatorname{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2} = \frac{\pi}{3}$$

61.20

Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}$$

61.21

Résoudre l'équation :

$$\operatorname{Arccos} x = \operatorname{Arcsin} x$$

Petits problèmes d'entrainement

61.22 ✍

Étudier et représenter la fonction définie par :

$$f(x) = \operatorname{Arcsin} \frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}$$

61.23 ✍

On s'intéresse à la série de terme général $u_p = \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{p^2+p+1}$.

(a) Montrer la convergence de cette série.

(b) Calculer $\operatorname{Arctan}(p+1) - \operatorname{Arctan}(p)$.

(c) En déduire la somme de la série.

61.24

Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée de $x \mapsto \text{Arcsin}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

61.25

Étude de $f\ :\ x \mapsto \text{Arcsin}(x) + \text{Arcsin}(1-2x^2)$.

61.26

Calculer, pour n entier non nul et $x \in \mathbb{R}$:

$$\prod_{k=1}^{n} \text{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

61.27

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1+\text{sh}\, x}{1+\text{ch}\, x}$$

Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à préciser, et exprimer f^{-1}.

61.28

Simplifier l'expression, pour $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\text{Arccos}\, \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}$$

61.29

Calculer :

$$\text{Arctan}\, \frac{1}{2} + \text{Arctan}\, \frac{1}{5} + \text{Arctan}\, \frac{1}{8}$$

61.30

Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\sin x + \text{Arcsin}\, x \geqslant 2x$$