

Topologie des espaces vectoriels normés

Cours	2
1 Points intérieurs, ouvert, voisinage	2
1.1 Voisinage d'un point	2
1.2 Ouvert	2
1.3 Point intérieur, intérieur	2
2 Points adhérents, fermé, densité	3
2.1 Fermé	3
2.2 Point adhérent, adhérence, frontière	3
2.3 Densité	3
2.4 Caractérisations séquentielles	3
3 Topologie et normes équivalentes	4
4 Topologie induite	4
4.1 Voisinage relatif, ouvert relatif	4
4.2 Fermé relatif	4
4.3 Densité	4
Exercices	5
Exercices et résultats classiques à connaître	5
Adhérence et distance	5
Densité des matrices inversibles	5
Les sous-groupes de \mathbb{R}	5
Sous-espace vectoriel d'intérieur non vide	5
Exercices du CCINP	6
Exercices	7
Petits problèmes d'entraînement	7

1 Points intérieurs, ouvert, voisinage

1.1 Voisinage d'un point

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel normé, $a \in E$. On dit qu'une partie V de E est un **voisinage** de a lorsqu'il existe $\delta > 0$ tel que :

$$B(a, \delta) \subset V$$

où $B(a, \delta) = \{x \in E, \|x - a\| < \delta\}$.

Remarque.

- L'usage est d'utiliser une boule ouverte, une inégalité stricte.
- On trouve parfois la notation $\mathcal{V}(a)$ pour désigner l'ensembles des voisinages de a .

Proposition.

- Si V est un voisinage de a et $V \subset W$ alors W est un voisinage de a .
- Une intersection finie de voisinages de a est un voisinage de a .
- Une réunion de voisinages de a est un voisinage de a .

Remarque. Pour la réunion, il suffit en fait qu'un seul ensemble soit un voisinage.

Proposition. Si N et N' sont deux normes équivalentes, les voisinages de a dans (E, N) et (E, N') sont les mêmes.

1.2 Ouvert

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel normé. On dit qu'une partie U de E est un **ouvert** lorsque U est voisinage de chacun de ses points, i.e. :

$$\forall x \in U, \exists \delta > 0, B(x, \delta) \subset U$$

Remarque. E et \emptyset sont ouverts.

Proposition. Une boule ouverte est un ouvert.

Proposition.

- Une réunion d'ouverts est un ouvert :

$$\bigcup_{i \in I} U_i \text{ est ouvert}$$

- Une intersection finie d'ouverts est un ouvert :

$$U_1 \cap \dots \cap U_p \text{ est ouvert}$$

Remarque. L'intérêt de travailler dans un ouvert, c'est que ses éléments ne sont jamais « au bord ».

Proposition. Un produit fini d'ouvert est un ouvert.

1.3 Point intérieur, intérieur

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel normé et A une partie de E . Un point a de E est dit **intérieur** à A lorsque A est un voisinage de a , i.e. :

$$\exists \delta > 0, B(a, \delta) \subset A$$

On appelle **intérieur de A** l'ensemble $\overset{\circ}{A}$ de tous les points intérieurs à A .

Proposition. A est ouvert si et seulement si $\overset{\circ}{A} = A$.

Proposition. L'intérieur de A est le plus grand ouvert contenu dans A .

2 Points adhérents, fermé, densité

2.1 Fermé

Définition. On dit qu'une partie A de E est un **fermé** lorsque $E \setminus A = A^c$ est un ouvert.

Exemple. E et \emptyset sont fermés.

Proposition. Une boule fermée est fermée, une sphère est fermée, un singleton $\{a\}$ est fermé.

Proposition.

- Une réunion finie de fermés est un fermé.
- Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

Proposition. Un produit fini de fermés est un fermé.

2.2 Point adhérent, adhérence, frontière

Définition. Soit A une partie de E . On dit que $x \in E$ est **adhérent** à A lorsque :

$$\forall \delta > 0, B(x, \delta) \cap A \neq \emptyset$$

On appelle **adhérence** de A l'ensemble \overline{A} de tous les points adhérents à A .

Proposition. A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$.

Proposition. L'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A .

Proposition. On dispose de l'équivalence suivante :

$$x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$$

Définition. On appelle **frontière** de A l'ensemble :

$$\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$$

2.3 Densité

Définition. Une partie A de l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dite **dense** dans E lorsque $\overline{A} = E$, c'est-à-dire :

- tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de A

ou alors

- $\forall x \in E, \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.

Exemple. \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .

Exemple. Le sous-espace des fonctions polynomiales est dense dans $(\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ par le théorème de Weierstrass.

Exemple. Le sous-espace des fonctions en escalier est dense dans l'ensemble $(\mathcal{C}_{\text{pm}}^0([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ des fonctions continues par morceaux.

2.4 Caractérisations séquentielles

Proposition. Une partie A de E est un fermé si et seulement si, pour toute suite convergente d'éléments de A , sa limite est dans A .

Remarque. L'intérêt de travailler dans un fermé, c'est que « quand on y est, on y reste », même en passant à la limite.

Proposition. x est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x .

3 Topologie et normes équivalentes

Théorème.

Les notions topologiques étudiées ci-avant sont invariante par passage à une norme équivalente :

- Si A est un ouvert de (E, N_1) et N_2 équivalente à N_1 , alors A est un ouvert de (E, N_2) .
- L'intérieur de A dans (E, N_1) , lorsque N_2 équivalente à N_1 , est le même que l'intérieur de A dans (E, N_2) .
- etc.

4 Topologie induite

4.1 Voisinage relatif, ouvert relatif

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel normé et A une partie quelconque de E . Soit $a \in A$ et $X \subset A$. On dit que X est un **voisinage relatif de a dans A** s'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \cap A \subset X$.

Remarque. Ainsi, les voisinages relatifs de a dans A sont les intersections avec A des voisinages de a (dans E).

Définition. On conserve les notations précédentes. On dit que X est un **ouvert relatif de A** si et seulement s'il est voisinage relatif de chacun de ses points, c'est-à-dire :

$$\forall a \in X, \exists r > 0 \text{ t.q. } B(a, r) \cap A \subset X$$

Proposition. X est un ouvert relatif de A si et seulement s'il existe U ouvert (de E) tel que $X = U \cap A$.

Remarque. On dit parfois que $U \cap A$ est la **trace** laissée par U sur A .

Exemple. Les parties suivantes sont-elles des ouverts relatifs de $[0, 1]$?

- | | | | |
|-------------|---------------|----------------------------------|---------------|
| 1. $[0, 1]$ | 3. $[0, 1/2]$ | 5. $[0, 1] \setminus [1/2, 3/4]$ | 7. $]0, 1/2[$ |
| 2. $\{0\}$ | 4. $[0, 3/4[$ | 6. $]0, 1[$ | |

4.2 Fermé relatif

Définition. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel normé et A une partie quelconque de E . On dit que $X \subset A$ est un **fermé relatif de A** lorsque $A \setminus X$ est un ouvert relatif de A .

Proposition. X est un fermé relatif de A si et seulement s'il existe F fermé (de E) tel que $X = F \cap A$.

Remarque. On dit parfois que $F \cap A$ est la **trace** laissée par F sur A .

Caractérisation séquentielle. X est un fermé relatif de A si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers un élément ℓ de A , alors $\ell \in X$.

Exemple. Est-ce que $] -\infty, 0[$ est un ouvert relatif de \mathbb{R}^* ? un fermé relatif de \mathbb{R}^* ?

Exemple. Dans $E = \mathbb{R}^2$, on note $O = (0, 0)$ et $a = (1, 1)$ et on considère $A = B(O, 1/4) \cup B(a, 1/4)$. Proposer quatre parties de A qui sont à la fois des ouverts relatifs et des fermés relatifs de A .

4.3 Densité

Définition. On dit que $X \subset A$ est **dense** dans A lorsque tout élément de A est limite d'une suite d'éléments de X .

Exercices et résultats classiques à connaître**Adhérence et distance****430.1**

Soit A une partie non vide de E espace normé, et $x \in E$.

(a) Justifier l'existence de $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\| \in \mathbb{R}_+$.

(b) Montrer que :

$$x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0$$

Densité des matrices inversibles**430.2**

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Les sous-groupes de \mathbb{R} **430.3**

Soit H un sous-groupe non nul de $(\mathbb{R}, +)$.

(a) Justifier l'existence de $\alpha = \inf\{x \in H, x > 0\}$.

(b) On suppose $\alpha > 0$. Montrer que $\alpha \in H$, puis $H = \alpha\mathbb{Z}$.

(c) On suppose $\alpha = 0$. Montrer que H est dense dans \mathbb{R} .

(d) Montrer que $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. En déduire que $\{\cos(n), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Sous-espace vectoriel d'intérieur non vide**430.4**

Soit E un espace vectoriel normé, et F un sous-espace vectoriel de E . On suppose que $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$. Montrer que $F = E$.

Exercices du CCINP

430.5

 1.3

On note E l'espace vectoriel des applications continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} .

On pose : $\forall f \in E$, $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$ et $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.

3. Dans cette question, on munit E de la norme $\|\cdot\|_1$.

$$\text{Soit } c : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 1 \end{cases}$$

$$\text{On pose : } \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\|f_n - c\|_1$.

(b) On pose $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$.

On note \overline{F} l'adhérence de F .

Prouver que $c \in \overline{F}$.

F est-elle une partie fermée de E pour la norme $\|\cdot\|_1$?

430.6

 34

Soit A une partie non vide d'un \mathbb{R} -espace vectoriel normé E .

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A , en termes de voisinages ou de boules.

2. Démontrer que : $x \in \overline{A} \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$.

3. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E , alors \overline{A} est un sous-espace vectoriel de E .

4. Soit B une autre partie non vide de E . Montrer que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

430.7

 37.13

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans \mathbb{R} .

On pose : $\forall f \in E$, $N_\infty(f) = \sup_{x \in [0; 1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)| dt$.

1. (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E , $N_1(f) \leq k N_\infty(f)$.

(c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞ .

430.8

 44

Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E .

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.

(b) Montrer que : $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$.

2. Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Remarque : une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.

3. (a) Montrer que : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

(b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

430.9

 45

Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel normé. On note $\|\cdot\|$ la norme sur E .

Soit A une partie non vide de E .

On note \overline{A} l'adhérence de A .

1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de \overline{A} .

(b) Prouver que, si A est convexe, alors \overline{A} est convexe.

2. On pose : $\forall x \in E$, $d_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$.

(a) Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \implies x \in \overline{A}$.

- (b) On suppose que A est fermée et que : $\forall (x, y) \in E^2, \forall t \in [0, 1], d_A(tx + (1-t)y) \leq td_A(x) + (1-t)d_A(y)$.
Prouver que A est convexe.

Exercices

430.10

Montrer que \mathbb{Z} est un fermé de \mathbb{R} :

- en utilisant la caractérisation séquentielle ;
- en étudiant son complémentaire.

430.11

Soit E un espace vectoriel normé, et F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que \overline{F} est un sous-espace vectoriel de E .

430.12

Soit A une partie de \mathbb{R} non vide et majorée. Montrer que :

$$\text{Sup}(A) \in \overline{A}$$

430.13

Montrer que l'adhérence d'une partie convexe est convexe.

430.14

Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

430.15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le groupe linéaire $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est-il un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

430.16

Déterminer $\text{Fr}(\mathbb{Q})$.

430.17

Dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, montrer que :

$$\overline{[0, 1[} = [0, 1] \text{ et } \widehat{[0, 1[} =]0, 1[$$

Petits problèmes d'entraînement

430.18

On travaille dans $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et on définit :

$$A = \left\{ f \in E, f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t) dt \geq 1 \right\}$$

- Montrer que A est un fermé.
- Vérifier que, pour tout $f \in A$, $\|f\|_\infty > 1$.
- Calculer $d(0_E, A)$.

On peut se poser la question : ce résultat est-il en contradiction avec le fait que A est fermé ?

430.19

- Montrer que les parties $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\}$ et $B = \{0\} \times \mathbb{R}$ sont fermées dans \mathbb{R}^2 .
- Observer que $A + B$ n'est pas fermée.

430.20

Soit N_1 et N_2 deux normes sur un même espace vectoriel E . On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in E, N_1(x) \leq \alpha N_2(x)$$

Montrer que tout ouvert de (E, N_1) est ouvert de (E, N_2) .

430.21

Dans E espace normé, montrer que l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre, de même rayon.

430.22

On considère E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues sur \mathbb{R} , à valeurs réelles, ayant pour limite 0 en $\pm\infty$. On le munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$, toute fonction de E étant bornée sur \mathbb{R} .

On considère F le sous-espace vectoriel constitué des fonctions à support compact, i.e. :

$$f \in F \iff \exists M > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-M, M], f(x) = 0$$

Montrer que F est dense dans E .

430.23

Montrer que l'intérieur d'une partie convexe est convexe.

430.24

On considère E l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Est-ce que les ensembles suivant sont fermés ?

- (a) A l'ensemble des suites croissantes.
- (b) B l'ensemble des suites qui convergent vers 0.
- (c) C l'ensemble des suites périodiques.

430.25

Soit A une partie fermée non vide de E espace normé. Pour $x \in E$, on note $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$ la distance de x à A .

Montrer que A est convexe si et seulement si :

$$\forall x, y \in A, \forall t \in [0, 1], d((1-t)x + ty, A) \leq (1-t)d(x, A) + td(y, A)$$

430.26

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ est $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$.

- (a) Montrer que F est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

- (b) Montrer que F est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

- (c) On munit E d'une norme quelconque. Montrer que F est soit dense, soit fermé.

430.27

Montrer que l'ensemble des racines de l'unité dans \mathbb{C} est dense dans \mathbb{U} .

430.28

- (a) Montrer qu'un ouvert de \mathbb{R} peut s'écrire comme réunion d'intervalles ouverts.
- (b) Montrer qu'un ouvert de \mathbb{R} peut s'écrire comme réunion dénombrable d'intervalles ouverts.

430.29

Soit E un espace vectoriel normé, A, B deux parties de E . On suppose que :

$$\inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \|y - x\| > 0$$

Démontrer que l'on peut séparer A et B par des ouverts, c'est-à-dire qu'il existe U et V ouverts tels que :

$$A \subset U, B \subset V, U \cap V = \emptyset$$

430.30

Soit E un espace vectoriel normé, et $X \subset E$

- (a) Montrer que $\overset{\circ}{X}$ est la réunion de tous les ouverts inclus dans X .
- (b) En déduire que $\overset{\circ}{X}$ est le plus grand ouvert inclus dans X .
- (c) Montrer que \overline{X} est le plus petit fermé contenant X .