Aux colleurs

Je vous remercie d'**interroger systématiquement les étudiants sur un « exercice ou résultat classique » ou du cc-INP**, qu'ils auront préparé, puis de proposer un ou deux exercices en privilégiant les raisonnements très classiques aux astuces. Si l'exercice préparé est long, il pourra être tronqué.

530. Suites de fonctions numériques

Convergence simple, propriétés.
Interlude : la norme infinie sur l'ensemble des fonctions bornées. On sait rédiger l'inégalité triangulaire.
Convergence uniforme. La convergence uniforme implique la convergence simple. Étude pratique pour montrer la convergence uniforme, pour montrer la non convergence uniforme. Propriétés.
Transfert de continuité par convergence uniforme. Intérêt de la convergence uniforme sur tout segment de I (ou famille d'intervalles adaptée).
Théorème de la double limite.
Théorèmes d'approximation uniforme par des fonctions en escalier, de Weierstrass.

Attention Pas de convergence dominée, nous n'avons pas encore travaillé les intégrales généralisées. En cas de convergence uniforme, on justifie rapidement que la limite de l'intégrale sur un segment est l'intégrale de la limite, nous n'avons pas énoncé de théorème à ce stade.

Exercices et résultats classiques à connaître

530.1

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose :

$$f_n(x) = x^n$$

(a) Représenter quelques fonctions f_n.

(b) Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_n$ sur $[0,1]$.

530.2

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f_n(x) = x(1 + \mathrm{e}^{-nx})$$

(a) Sur quelle partie D de $\mathbb{R}$ la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{R}}$ converge simplement ?

(b) La convergence est-elle uniforme sur D ?

(c) Déterminer la limite, pour $n \to +\infty$, de $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

530.3

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Montrer que f est la fonction nulle.

Exercices du CCINP à travailler

0.4 CCINP 9

1. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.

2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos\left(\sqrt{n}x\right)$.

   (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).

   (b) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$?

   (c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a, +\infty[$?

   (d) La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?

0.5 CCINP 10

On pose $f_n(x) = \left(x^2+1\right)\dfrac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}$.

1. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$.

2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \left(x^2+1\right)\frac{ne^x + xe^{-x}}{n+x}\mathrm{d}x$.

0.6 CCINP 11

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.

   Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.

   (a) Étudier la convergence simple de la suite (f_n).

   (b) Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.

0.7 CCINP 12

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

   On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a, b]$.

   Démontrer que f est continue en x_0.

2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0;1]$, $g_n(x) = x^n$.
   La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0;1]$?

0.8 CCINP 49

Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente à termes complexes. On pose $M = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [0,+\infty[$, $f_n(t) = \dfrac{a_n t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t}$.

1. (a) Justifier que la suite (a_n) est bornée.
   (b) Justifier que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

On admettra, pour la suite de l'exercice, que $f : t \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

2. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n : t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t$.
   En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$.
   (b) Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n\, t^n}{n!}\,\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.