1 Exercices de niveau 1

901.1

cc-INP

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P \in \mathbb{R}[X]$ et M définie par blocs : $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$

(a) Montrer que, si A est semblable à B, alors $P(A)$ est semblable à $P(B)$.

(b) Calculer M^k.

(c) Exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$, A et $P'(A)$.

(d) En déduire que, si M est diagonalisable, A l'est aussi.

(e) Montrer que, si A n'est pas inversible et M diagonalisable, alors A est nulle.

Examinatrice sympathique.

901.2

cc-INP

(a) Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.

(b) Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $C \neq 0$ et telles que $AC = CB$.

b1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k C = CB^k$.

b2. En déduire que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)C = CP(B)$.

b3. Montrer que le produit de deux matrices est inversible si et seulement si chaque matrice est inversible, en déduire que A et B ont une valeur propre commune.

(c) c1. Montrer que si X et Y sont deux matrices colonnes non nulles, alors $XY^\top$ est non nulle.

c2. Montrer que, si A et B ont une valeur propre en commun, il existe une matrice $C \neq 0$ telle que $AC = CB$.

901.3

cc-INP

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

(a) Donner le rang de B en fonction de celui de A.

(b) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$: $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + P(0) \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$

(c) Montre que, si B est diagonalisable, alors A est diagonalisable.

(d) Que penser de la réciproque ?

901.4

Mines-Télécom

Soit E un espace vectoriel, $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on note :

$$\varphi(u) = \frac{1}{2}(u \circ s + s \circ u)$$

(a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

(b) Calculer $\varphi^3(u)$. En déduire un polynôme annulateur de φ.

(c) Est-ce que φ est diagonalisable ?

Examinateur sympathique qui laisse dérouler l'exercice sans trop poser de quetsion et donne des indices si besoin.

901.5

Mines-Télécom

(a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Que peut-on dire des coefficients de la comatrice de M ?

(b) Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $\det(A)$ et $\det(B)$ sont premiers entre eux. Démontrer qu'il existe $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que :
$$AU + BV = I_n$$
et donner une méthode permettant de calculer explicitement un tel couple.

(c) On considère à nouveau $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $\det(A)$ et $\det(B)$ sont premiers entre eux. En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, démontrer l'existence de deux polynômes $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ tels que les matrices $P(A)$ et $Q(B)$ vérifient :
$$AP(A) + BQ(B) = I_n$$

2 Exercices de niveau 2

901.6

Centrale

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $f_\alpha : M \mapsto M^\top + \alpha M$, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(a) f_0 est-elle diagonalisable ?

(b) Pour quelles valeurs de α f_α est-elle diagonalisable ?

(c) Déterminer les éléments propres de f_α.

901.7

Mines-Ponts

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
dans la base $\mathcal{B}$.

(a) Préciser ses valeurs propres. A est-elle diagonalisable ?

(b) On note u un vecteur propre associé à la plus grande valeur propre, v associé à l'autre valeur propre et k de coordonnées $(0, 0, 1)$ dans la base $\mathcal{B}$.
Montrer que :
$$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
où $\mathcal{B}' = (u, v, k)$ et α est à préciser.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer B^n et en déduire A^n.

(d) *Question bonus* Que dire de $\dim \mathrm{Vect}(I_3, A, A^2, A^3, \dots)$?

Examinateur neutre, qui partait à plusieurs reprises et aidait peu.

901.8

Centrale

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $p \geqslant 2$ tel que M admet $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ valeurs propres distinctes. On suppose :

$$\forall i \in [\![2, p]\!],\ |\lambda_i| < |\lambda_1| \qquad (\star)$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{tr}(M^k) \neq 0$, on définit :

$$t_k(M) = \frac{\mathrm{tr}(M^{k+1})}{\mathrm{tr}(M^k)}$$

(a) Montrer que $(t_k)_k$ est définie à partir d'un certain rang et converge.

(b) Montrer que, si $(\star)$ n'est pas vérifiée, ce n'est pas toujours vrai.

(c) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

c1. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c2. Déterminer la limite de $\dfrac{A^k}{k}$.

Examinateur plutôt sympathique qui m'a demandé de faire une méthode « bourrin » pour la question 3a plutôt qu'une analyse/synthèse. C'est un exercice qui reste assez classique.

901.9

Mines-Ponts

Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) 0 est racine de $\chi_A(X)$, d'ordre de multiplicité n ;

(ii) A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ où N et U sont des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont respectivement nilpotente et inversible.

3 Exercices de niveau 3

901.10

X

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{tr}\, A^m \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$. Montrer que les valeurs propres de A sont de module strictement inférieur à 1.

4 Exercices de la banque CC-INP

63, 67 à 75, 83, 88, 91