1 Exercices de niveau 1

905.1

cc-INP

On pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2x+n}$.

(a) Montrer que S est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$.

(c) Trouver un équivalent de S en $+\infty$.

(d) Une autre question dont je ne me souviens pas.

905.2

cc-INP

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite décroissante de réels positifs. On pose $\forall n \geqslant 0,\ \forall x \in [0,1],\ u_n(x) = a_n x^n(1-x)$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ 0 \leqslant u_n(x) \leqslant a_1 x^n(1-x)$.
Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

(b) On pose $\forall x \in [0,1],\ u(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.
Calculer $u(x)$ lorsque $\forall n,\ a_n = 1$, puis $a_n = \frac{1}{n}$, puis $a_n = \frac{1}{2^n n!}$.

(c) c1. On pose $\forall n,\ x_n = \frac{n}{n+1}$. Donner un équivalent simple de $x_n^n(1-x_n)$.
c2. Montrer que $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,1] \iff \sum \frac{a_n}{n}$ converge.

(d) On note $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\ R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k(1-x)$. Montrer que $0 \leqslant R_n(x) \leqslant a_{n+1}$.

(e) Déterminer une CNS pour que $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

905.3

cc-INP

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x$.

(a) Étudier la convergence de $\sum u_n$.

(b) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

L'examinateur était passif tout au long du passage et répondait à toute question par : « c'est à vous de décider comment mener votre oral ».
J'ai décidé d'admettre la première question pour résoudre la seconde.

905.4

Mines-Télécom

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(nx)}{n^2}$.

On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(b) Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

(c) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$.

(d) Déduire le graphe de f.

905.5

cc-INP

On note : $f\ :\ t \mapsto \mathrm{e}^t\ \ln(t)$.

(a) Montrer que f est intégrable sur $]0,1]$.

(b) Montrer que :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^t\ \ln(t)\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!n}$$

Ça s'est parfaitement passé, j'ai réussi sans indication, heureusement que je connaissais mon cours.

905.6

Mines-Télécom

On note :

$$\begin{array}{rccl} f_n\ :\ ]n,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-k} \end{array}$$

(a) Montrer que f_n est strictement décroissante sur $]n,+\infty[$.

(b) Déterminer les limites de f_n en n^+ et en $+\infty$.

(c) Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.

- c1. Montrer qu'il existe un unique x_n tel que $f_n(x_n) = A$.
- c2. Déterminer la limite de $(x_n)_n$ si elle existe.
- c3. Calculer $f_n(n+1)$ et déterminer sa limite en $+\infty$.
- c4. Montrer qu'il existe n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, $x_n \geqslant n+1$.
- c5. *et d'autres questions.*

905.7

cc-INP

Soit $\varphi\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que : $\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |\varphi(x)| \leqslant \dfrac{C}{1+x^2}$.
On considère la fonction f définie par : $f(x) = \varphi(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(x+n) + \varphi(x-n)$.

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que f est 1-périodique.

(c) On considère $g\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et 1-périodique. Montrer que φg est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

905.8

cc-INP

(a) Étude de la convergence simple de $(f_n)_n$ où $f_n\ :\ x \mapsto \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$.

(b) Étude de la convergence uniforme en s'aidant de $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.

2 Exercices de niveau 2

905.9

Centrale

Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t)^2\,\mathrm{d}t$$

(a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$:

$$f_n(x) \leqslant \frac{1}{1-x}$$

(b) Démontrer que $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0,1[$.

On note f la limite simple de cette suite de fonctions.

(c) Soit $a \in \,]0,1[$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,a]$:

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{2}{1-a}\right)^n$$

(d) En déduire la continuité de f sur $[0,1[$.

(e) Démontrer que, pour tout $x \in [0,1[$:

$$f(x) = 1 + \int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t$$

(f) En déduire l'expression de f sur $[0,1[$.

905.10

Centrale

Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

(a) Étudier le domaine de définition et la continuité sur $]0,+\infty[$ de la fonction :

$$S\ :\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$$

(b) Démontrer que, pour tout $x > 0$, $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ converge.

(c) Décomposer en élément simples la fraction rationnelle :

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

(d) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{1}{j!} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}$$

(e) Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $x > 0$:

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)} - \mathrm{e}\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!(x+k)} = -\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!(x+k)} \left(\sum_{j=N-k+1}^{+\infty} \frac{1}{j!} \right)$$

(f) En déduire que, pour tout $x > 0$:

$$S(x) = \mathrm{e}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$

905.11

Mines-Ponts

Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

(a) Montrer que la fonction f est nulle.

(b) Calculer :

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x$$

(c) En déduire qu'il existe f dans $\mathcal{C}([0,+\infty[,\mathbb{R})$, non identiquement nulle, telle que :

$$\int_0^{+\infty} x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

905.12

Mines-Ponts

(a) Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1)$$

(b) On note, pour $a > 0$:

$$f_a : \begin{array}{ccc}]a,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(1 - \dfrac{a}{x}\right)^x \end{array}$$

b1.
- Justifier la définition et la croissance de f_a sur son ensemble de définition.
- Quelle est la limite de $f_a(x)$ pour $x \to +\infty$?

b2. On note, pour $n \geqslant 1$: $I_n = \displaystyle\int_0^n f_t(n)\ln(t)\,\mathrm{d}t$.
Démontrer l'existence de la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$.

(c) c1. Montrer, en justifiant l'existence des quantités étudiées, que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\ln(t)\,\mathrm{d}t$$

c2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\ln(t)\,\mathrm{d}t = -\gamma$.

905.13

Centrale 1

On définit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par :

$$\begin{cases} \forall x \in [0,1],\ u_0(x) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ u_{n+1}(x) = x + \displaystyle\int_0^1 \sin(xy)u_n(y)\,\mathrm{d}y \end{cases}$$

(a) Montrer qu'il existe $k \in \,]0,1[$ tel que, pour tout $x \in \,]0,1]$:

$$0 \leqslant \frac{1-\cos x}{x} \leqslant k$$

(b) Montrer que, pour tout n, u_n est bien définie et continue sur $[0,1]$.

(c) Démontrer, en travaillant sur $\sum(u_{n+1}-u_n)$, que $(u_n)_n$ converge uniformément.

(d) une autre question

Examinateur calme et rigoureux. Laisse chercher et se tromper avant de corriger.

905.14

Centrale 1

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $a_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On définit la série d'applications :

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n \sin(n\ \cdot)$$

(a) Montrer la convergence simple de cette série.

(b) On note $f\ :\ t \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(nt)$. Montrer que f est continue.

(c) Déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + x = \sin(nt)$$

(d) Déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + x = f(t)$$

On cherchera à exprimer les solutions sous forme de somme de série.

(e) Les solutions sont-elles 2π-périodiques ?

3 Exercices de la banque CC-INP

8 à 12, 14 à 19, 27, 48, 53