

## Équations différentielles linéaires

<b>Cours</b>	<b>2</b>
1 Généralités . . . . .	2
1.1 Équation différentielle linéaire, système différentiel linéaire . . . . .	2
1.2 Principe de superposition . . . . .	3
1.3 Problème de Cauchy . . . . .	3
1.4 Représentation d'une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre $n$ . . . . .	3
2 Ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire . . . . .	4
2.1 Théorème de Cauchy linéaire . . . . .	4
2.2 Structure de l'ensemble des solutions — équations homogènes . . . . .	5
2.3 Structure de l'ensemble des solutions — équations complète . . . . .	6
3 Annexes . . . . .	7
3.1 Annexe : théorème de Cauchy linéaire . . . . .	7
3.2 Annexe : un résultat utile . . . . .	9
3.3 Complément : le wronskien . . . . .	9
<b>Exercices</b>	<b>10</b>
Exercices . . . . .	10
Petits problèmes d'entraînement . . . . .	10

Sauf mention contraire,  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $E$  un espace vectoriel normé de dimension finie.

## 1 Généralités

### 1.1 Équation différentielle linéaire, système différentiel linéaire

#### Définition.

- On appelle **équation différentielle linéaire** une équation de la forme :

$$x' = a(t) \cdot x + b(t) \quad (E)$$

où  $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$  et  $b : I \rightarrow E$  sont des applications continues.

- Résoudre (E), c'est déterminer les fonctions  $x : I \rightarrow E$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que :

$$\forall t \in I, x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t)$$

- On appelle **équation différentielle homogène associée à (E)** l'équation :

$$x' = a(t) \cdot x \quad (H)$$

**Remarque.**  $a(t)$  est une application linéaire,  $a(t) \cdot x(t)$  désigne l'image par cette application linéaire du vecteur  $x(t)$ .  
On pourrait la noter  $a(t)(x(t))$ .

**Exemple.** Rechercher les  $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, M'(t) = t^2 M(t)$$

c'est vouloir résoudre une équation différentielle linéaire homogène, où  $a : t \mapsto t^2 \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ .

#### Traduction matricielle.

Fixons  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

Notons  $A(t) = \text{Mat}(a(t), \mathcal{B})$ ,  $B(t) = \text{Mat}(b(t), \mathcal{B})$  et  $X(t) = \text{Mat}(x(t), \mathcal{B})$ .

- L'équation différentielle (E) s'écrit sous la forme d'un **système différentiel linéaire** :

$$X' = A(t)X + B(t) \quad (S)$$

où  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B : I \rightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$  sont des applications continues.

- Résoudre (S), c'est déterminer les fonctions  $X : I \rightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que :

$$\forall t \in I, X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

- On appelle **système différentiel homogène associé à (S)** :

$$X' = A(t)X$$

**Exemple.** Rechercher les fonctions  $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + (1+t)y(t) + t^2 \\ y'(t) = \cos(t)x(t) + \sin(t)y(t) + 1+t \end{cases}$$

c'est vouloir résoudre le système différentiel linéaire :

$$X' = A(t)X + B(t)$$

où  $A : t \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1+t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}$  et  $B : t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ 1+t \end{pmatrix}$ .

**Exemple.** Le système de Lotka-Volterra qui modélise l'évolution d'une population de proies et de prédateur s'écrit :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(\alpha - \beta y(t)) \\ y'(t) = y(t)(\delta x(t) - \gamma) \end{cases}$$

C'est un système différentiel, non linéaire. Son étude n'entre pas dans le cadre du programme.

## 1.2 Principe de superposition

**Proposition.** Si  $x_1, x_2$  sont solutions de deux équations différentielles linéaires ayant la même équation homogène associée :  $x' = a(t) \cdot x + b_1(t)$  et  $x' = a(t) \cdot x + b_2(t)$  respectivement, alors  $x_1 + x_2$  est solution de l'équation :

$$x' = a(t) \cdot x + (b_1(t) + b_2(t))$$

## 1.3 Problème de Cauchy

**Définition.** On appelle **problème de Cauchy** l'association d'une équation différentielle linéaire et d'une condition initiale :

$$\begin{cases} x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

où  $t_0 \in I$  et  $x_0 \in E$ .

**Théorème.**

La recherche des fonctions  $x : I \rightarrow E$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que

$$\begin{cases} \forall t \in I, x'(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

est équivalente à la recherche des fonctions  $x : I \rightarrow E$  continues telles que :

$$\forall t \in I, x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t a(u) \cdot x(u) + b(u) du$$

**Remarque.** On dit qu'on a mis sous forme intégrale le problème de Cauchy.

**Traduction matricielle.**

Un **problème de Cauchy** pour un système différentiel linéaire s'écrit :

$$\begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

où  $t_0 \in I$  et  $X_0 \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ .

## 1.4 Représentation d'une équation différentielle scalaire linéaire d'ordre $n$

**Définition.**

- On appelle **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre  $n$**  une équation de la forme :

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t) \quad (E)$$

où  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b : I \rightarrow \mathbb{K}$  sont des applications continues.

- Résoudre  $(E)$ , c'est déterminer les fonctions  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  de classe  $\mathcal{C}^k$  telles que :

$$\forall t \in I, f^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)f^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)f'(t) + a_0(t)f(t) + b(t)$$

- On appelle **équation différentielle homogène associée à  $(E)$**  l'équation :

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y \quad (E_0)$$

**Remarque.** Il importe que l'équation différentielle soit « normalisée », c'est-à-dire que le coefficient devant  $y^{(n)}$  soit 1.

**Théorème.**

Une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre  $n$  peut être représentée par le système différentiel linéaire :

$$X' = A(t)X + B(t)$$

en posant dans  $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  :

$$X(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \dots & a_{n-2}(t) & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

**Remarque.** On reconnaît la transposée d'une matrice compagnon.

**Définition.** On appelle problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre  $n$  l'association d'une équation différentielle et d'une condition initiale :

$$\begin{cases} y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

où  $t_0 \in I$  et  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{K}$ .

**Remarque.** Il existe d'autres problèmes, dont l'étude n'est pas au programme, comme celui des conditions aux limites.

## 2 Ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire

### 2.1 Théorème de Cauchy linéaire

**Théorème de Cauchy linéaire.**

Si :

- $I$  est un intervalle
- $a$  et  $b$  sont continues sur  $I$

alors le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x' = a(t) \cdot x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur  $I$ .

**Remarque.** Ce théorème est un cas particulier d'un théorème plus général, le théorème de Cauchy-Lipschitz.

**Traduction matricielle.**

Si :

- $I$  est un intervalle
- $A$  et  $B$  sont continues sur  $I$

alors le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur  $I$ .

**Corollaire.**

Si :

- $I$  est un intervalle
- $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b$  sont continues sur  $I$

alors le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur  $I$ .**Exemple.** Soit  $\phi : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une solution de l'équation homogène :

$$X' = A(t)X$$

où  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est continue sur  $J$ . Montrer l'équivalence :

$$\exists t \in I, \phi(t) = 0 \iff \forall t \in I, \phi(t) = 0$$

**2.2 Structure de l'ensemble des solutions — équations homogènes****Théorème.**

Si :

- $I$  est un intervalle
- $a$  est continue sur  $I$
- $\mathcal{S}_H$  désigne l'ensemble des solutions l'équation différentielle linéaire homogène :  $x' = a(t) \cdot x$

alors :

- $\mathcal{S}_H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^1(I, E)$
- pour  $t_0 \in I$ ,  $\mathcal{S}_H \rightarrow E$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels  

$$x \mapsto x(t_0)$$
- $\dim \mathcal{S}_H = \dim E$

**Traduction matricielle.** Si :

- $I$  est un intervalle
- $A$  est continue sur  $I$
- $\mathcal{S}_H$  désigne l'ensemble des solutions du système différentiel linéaire homogène :  $X' = A(t)X$

alors :

- $\mathcal{S}_H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$
- pour  $t_0 \in I$ ,  $\mathcal{S}_H \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels  

$$X \mapsto X(t_0)$$
- $\dim \mathcal{S}_H = n$

**Corollaire.** Si :

- $I$  est un intervalle
- $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  sont continues sur  $I$
- $\mathcal{S}_H$  désigne l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire scalaire homogène :

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y$$

alors :

- $\mathcal{S}_H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$
- pour  $t_0 \in I$ ,  $\mathcal{S}_H \rightarrow \mathbb{K}^n$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels  

$$y \mapsto (y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(n-1)}(t_0))$$
- $\dim \mathcal{S}_H = n$

**Remarque.** À part dans le cas où  $n = 1$ , ou le cas où  $A$  est constant, on ne sait en général pas déterminer l'espace vectoriel  $\mathcal{S}_H$  des solutions de l'équation homogène.

**Définition.** Une base de  $\mathcal{S}_H$  s'appelle un **système fondamental de solutions** de l'équation homogène.

**Exemple.** Déterminer un système fondamental de solutions du système :

$$\begin{cases} x'(t) = tx(t) - y(t) \\ y'(t) = x(t) + ty(t) \end{cases}$$

On pourra commencer par chercher un système dont sont solutions  $u : t \mapsto e^{-t^2/2}x(t)$  et  $v : t \mapsto e^{-t^2/2}y(t)$ .

## 2.3 Structure de l'ensemble des solutions — équations complète

**Théorème.**

Si :

- $I$  est un intervalle
- $a$  et  $b$  sont continues sur  $I$
- $\mathcal{S}_E$  désigne l'ensemble des solutions l'équation différentielle linéaire :  $x' = a(t) \cdot x + b(t)$

alors :

- $\mathcal{S}_E$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{C}^1(I, E)$  de direction  $\mathcal{S}_H$  :

$$\mathcal{S}_E = x_{\text{part}} + \mathcal{S}_H$$

et qui est de dimension  $\dim E$ .

**Traduction matricielle.** Si :

- $I$  est un intervalle
- $A$  et  $B$  sont continues sur  $I$
- $\mathcal{S}$  désigne l'ensemble des solutions du système différentiel linéaire :  $X' = A(t)X + B(t)$

alors :

- $\mathcal{S}$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}))$  dirigé par  $\mathcal{S}_H$  :

$$\mathcal{S} = X_{\text{part}} + \mathcal{S}_H$$

et qui est de dimension  $n$ .

**Corollaire.** Si :

- $I$  est un intervalle
- $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b$  sont continues sur  $I$
- $\mathcal{S}$  désigne l'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire scalaire :

$$y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y + b(t)$$

alors :

- $\mathcal{S}$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$  dirigé par  $\mathcal{S}_H$  :

$$\mathcal{S} = y_{\text{part}} + \mathcal{S}_H$$

et qui est de dimension  $n$ .

## 3 Annexes

### 3.1 Annexe : théorème de Cauchy linéaire

**Théorème.**

Si :

- $I$  est un intervalle
- $A$  et  $B$  sont continues sur  $I$

alors le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur  $I$ .

*Preuve.* On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  d'une norme sous-multiplicative,

par exemple une norme d'opérateur subordonnée à une norme sur  $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ .

- La mise sous forme intégrale du problème de Cauchy nous amène donc à chercher les fonctions continues  $X : I \rightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$  telles que :

$$\forall t \in I, X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t (A(u)X(u) + B(u)) du$$

Pour  $X \in \mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}))$ , on définit :

$$\Phi(X) : t \mapsto X_0 + \int_{t_0}^t (A(u)X(u) + B(u)) du$$

de sorte que l'on cherche  $X$  telle que  $\Phi(X) = X$ , c'est-à-dire un point fixe de  $\Phi$ .

- Commençons par montrer l'existence d'une solution.

On définit par récurrence la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en posant :

$$X_0 : t \mapsto X_0$$

$$\text{et, } \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = \Phi(X_n)$$

Travaillons pour  $t \in K = [t_0, b] \subset I$ , segment sur lequel les fonctions continues admettent une borne supérieure (le travail sur  $[a, t_0] \subset I$  est analogue).

$$\begin{aligned} \|X_2(t) - X_1(t)\| &= \|\Phi(X_1)(t) - \Phi(X_0)(t)\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^t A(u)(X_1(u) - X_0(u)) du \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|A(u)(X_1(u) - X_0(u))\| du \\ &\quad \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq \int_{t_0}^t \|A(u)\| \|X_1(u) - X_0(u)\| du \\ &\quad \text{par sous-multiplicativité} \\ &\leq \int_{t_0}^t \|A\|_{\infty}^K \|X_1 - X_0\|_{\infty}^K du \\ &= \|A\|_{\infty}^K \|X_1 - X_0\|_{\infty}^K (t - t_0) \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \|X_3(t) - X_2(t)\| &= \|\Phi(X_2)(t) - \Phi(X_1)(t)\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^t A(u)(X_2(u) - X_1(u)) du \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|A(u)(X_2(u) - X_1(u))\| du \\ &\quad \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq \int_{t_0}^t \|A(u)\| \|X_2(u) - X_1(u)\| du \\ &\quad \text{par sous-multiplicativité} \\ &\leq \int_{t_0}^t \|A\|_{\infty}^K \|A\|_{\infty}^K \|X_1 - X_0\|_{\infty}^K (u - t_0) du \\ &\quad \text{par la majoration précédente} \\ &= (\|A\|_{\infty}^K)^2 \|X_1 - X_0\|_{\infty}^K \frac{(t - t_0)^2}{2} \end{aligned}$$

Alors, par récurrence, pour tout  $n \geq 1$  :

$$\begin{aligned} \|X_{n+1}(t) - X_n(t)\| &\leq \frac{(\|A\|_{\infty}^K (t - t_0))^n}{n!} \|X_1 - X_0\|_{\infty}^K \\ &\leq \frac{(\|A\|_{\infty}^K (b - t_0))^n}{n!} \|X_1 - X_0\|_{\infty}^K \\ &\quad \text{indépendant de } t \\ &\quad \text{t.g. d'une série convergente} \end{aligned}$$

Donc  $\sum (X_{n+1} - X_n)$  converge normalement, donc uniformément sur  $K$ . Par le lien suite-série, la suite  $(X_n)_n$  converge sur  $K$ ; on note  $X$  sa limite.

On a :

$$\begin{aligned} \|X(t) - X_n(t)\| &= \left\| \sum_{k=n}^{+\infty} X_{k+1}(t) - X_k(t) \right\| \\ &\leq \sum_{k=n}^{+\infty} \|X_{k+1} - X_k\|_{\infty}^K \\ &\quad \text{indépendant de } t \\ &\quad \text{de limite nulle comme reste} \\ &\quad \text{d'une série convergente} \end{aligned}$$

donc la convergence de  $(X_n)_n$  vers  $X$  est uniforme sur  $K$ .

Par transfert de continuité,  $X$  est continue sur  $K$ .

Par définition, on a :

$$\forall n, X_{n+1}(t) = X_0 + \int_{t_0}^t (A(u)X_n(u) + B(u)) du$$

Par convergence uniforme sur le segment  $[t_0, t]$ , on a à la limite :

$$X(t) = X_0 + \int_{t_0}^t (A(u)X(u) + B(u)) du$$

ce qui justifie que  $X$  est solution du problème de Cauchy sur  $K$ .

- Justifions maintenant l'unicité de la solution.

Soit  $X, Y : I \rightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$  deux solutions du problème de Cauchy, et  $Z = X - Y$ .

Pour  $t \in I$ , on a :

$$\begin{aligned} Z'(t) &= X'(t) - Y'(t) \\ &= (A(t)X(t) + B(t)) - (A(t)Y(t) + B(t)) \\ &= A(t)Z(t) \\ \text{et } Z(t_0) &= X(t_0) - Y(t_0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

En mettant sous forme intégrale ce problème de Cauchy, on a donc :

$$Z(t) = 0 + \int_{t_0}^t A(u)Z(u) du$$

On travaille maintenant pour  $t \geq t_0$ , mais le raisonnement est analogue lorsque  $t \leq t_0$ .

$$\begin{aligned} \|Z(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t A(u)Z(u) du \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \|A(u)Z(u)\| du \quad \text{par inég. triangulaire} \quad (*) \\ &\leq \int_{t_0}^t \|A(u)\| \|Z(u)\| du \quad \text{car } \|\cdot\| \text{ sous-multiplicative} \\ &\leq \int_{t_0}^t \|A\|_{\infty}^{[t_0, t]} \|Z\|_{\infty}^{[t_0, t]} du \\ &= (t - t_0) \|A\|_{\infty}^{[t_0, t]} \|Z\|_{\infty}^{[t_0, t]} \end{aligned}$$

donc, en reportant dans  $(*)$  :

$$\begin{aligned} \|Z(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|A(u)\| \|Z(u)\| du \\ &\leq \int_{t_0}^t \|A(u)\| (u - t_0) \|A\|_{\infty}^{[t_0, t]} \|Z\|_{\infty}^{[t_0, t]} du \\ &\leq (\|A\|_{\infty}^{[t_0, t]})^2 \|Z\|_{\infty}^{[t_0, t]} \int_{t_0}^t (u - t_0) du \\ &= (\|A\|_{\infty}^{[t_0, t]})^2 \|Z\|_{\infty}^{[t_0, t]} \frac{(t - t_0)^2}{2} \end{aligned}$$

Par récurrence, on établit alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\|Z(t)\| \leq \frac{((t - t_0) \|A\|_{\infty}^{[t_0, t]})^n}{n!} \|Z\|_{\infty}^{[t_0, t]}$$

On reconnaît le terme général d'une série exponentielle, convergente. En faisant  $n \rightarrow +\infty$ , on en déduit donc :

$$\|Z(t)\| = 0$$

et donc  $X(t) = Y(t)$ .

□



### 3.2 Annexe : un résultat utile

**Proposition.** Soit  $X : I \rightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$  une solution du système différentiel linéaire homogène :

$$X' = A(t)X$$

où  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est continue sur  $I$ . On dispose de l'alternative : soit  $X$  est constante nulle, soit  $X$  ne s'annule pas.

**Remarque.** On peut reformuler en :

$$\begin{aligned} \exists t_0 \in I, X(t_0) = 0_{\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})} \\ \implies \forall t \in I, X(t) = 0_{\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})} \end{aligned}$$

*Preuve.* On suppose que  $X$  s'annule en  $t_0$ . Alors  $X$  est solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X' = A(t)X \\ X(t_0) = 0_{\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})} \end{cases}$$

dont  $t \mapsto 0_{\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})}$  est une solution évidente. Par unicité de la solution d'un problème de Cauchy,  $X = (t \mapsto 0_{\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})})$ .  $\square$

### 3.3 Complément : le wronskien

**Définition.** Si  $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}))$  sont  $n$  solutions de l'équation différentielle linéaire homogène :

$$X' = A(t)X$$

où  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est continue, on appelle **wronskien** associé à  $X_1, \dots, X_n$  :

$$W : t \mapsto \det(X_1(t), \dots, X_n(t))$$

**Remarque.** Le déterminant est calculé dans la base canonique de  $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ .

**Théorème.**

Sont équivalentes :

- (i)  $(X_1, \dots, X_n)$  base de  $\mathcal{S}_H$
- (ii)  $W$  est nulle :  $\forall t \in I, W(t) \neq 0$
- (iii)  $W$  s'annule :  $\exists t_0 \in I, W(t_0) \neq 0$

*Preuve.*

$$(i) \implies (ii)$$

On suppose que  $(X_1, \dots, X_n)$  est une base de  $\mathcal{S}_H$ . Pour tout  $t \in I$  fixé, on sait que :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{S}_H &\rightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ X &\mapsto X(t) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel. Sa matrice relativement aux bases  $(X_1, \dots, X_n)$  de  $\mathcal{S}_H$  et canonique de  $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$  est, par blocs colonnes :

$$A = (X_1(t) | \dots | X_n(t))$$

On a donc :

$$0 \neq \det(A) = W(t)$$

$$(ii) \implies (iii)$$

Cette implication est claire.

$$(iii) \implies (i)$$

Par contraposée. On suppose que  $(X_1, \dots, X_n)$  n'est pas une base de  $\mathcal{S}_H$ , donc n'est pas libre. Ainsi, il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  non tous nuls tels que :

$$\forall t \in I, \lambda_1 X_1(t) + \dots + \lambda_n X_n(t) = 0$$

Ainsi, pour tout  $t$ ,  $(X_1(t), \dots, X_n(t))$  est liée donc  $W(t) = \det(X_1(t), \dots, X_n(t)) = 0$ . On a montré la négation de (iii).  $\square$

## Exercices

### 68.1

L'espace  $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$  est muni de sa structure euclidienne usuelle. Pour  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $A$  est antisymétrique ;
- (ii) Si  $X$  est solution de  $X' = AX$ , alors  $\|X\|$  est constante.

### 68.2

Soit  $T > 0$ ,  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$  deux applications continues et  $T$ -périodiques. On considère  $\phi$  une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation :

$$X' = A(t)X + B(t)$$

Montrer que  $\phi$  est  $T$ -périodique si et seulement si elle vérifie  $\phi(T) = \phi(0)$ .  
*On remarquera que  $\phi$  est  $T$ -périodique si et seulement si  $\phi = \psi$ , où  $\psi : t \mapsto \phi(t+T)$ .*

## Petits problèmes d'entraînement

### 68.3

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , supposée non inversible.

- (a) Justifier qu'il existe un hyperplan vectoriel de  $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$  qui contient  $\text{Im } A$ .
- (b) En déduire que les solutions du système différentiel :  $X'(t) = AX(t)$  prennent leurs valeurs dans un hyperplan affine, c'est-à-dire le translaté d'un hyperplan vectoriel.

### 68.4

Soit  $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- (a) On suppose dans cette question que  $AB = BA$ . En dérivant :

$$t \mapsto \exp(t(A+B)) \exp(-tA) \text{ et } t \mapsto \exp(tB)$$

montrer que  $\exp(A+B) = \exp(A) \exp(B)$ .

On ne suppose plus que  $A$  et  $B$  commutent, et on note  $[A, B] = AB - BA$ .

- (b) En commençant par traiter le cas où  $n = 1$ , déterminer toutes les fonctions  $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, M'(t) = tM(t)C$$

- (c) On suppose que  $C = [A, B]$ ,  $AC = CA$  et  $BC = CB$ .  
 Utiliser  $t \mapsto \exp(tA) \exp(tB) \exp(-t(A+B))$  pour montrer que :

$$\exp(A+B) = \exp(A) \exp(B) \exp\left(-\frac{1}{2}[A, B]\right)$$

### 68.5

- (a) Soit  $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  deux matrices. On note  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes de  $N$ . Utiliser la définition du déterminant pour montrer que :

$$\sum_{i=1}^n \det(C_1, \dots, MC_i, \dots, C_n) = \text{tr}(M) \det(N)$$

- (b) Soit  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On s'intéresse au système différentiel sur  $I$  :

$$X'(t) = A(t)X(t)$$

On considère  $n$  solutions  $X_1, \dots, X_n$ , et on note :

$$w(t) = \det(X_1(t), \dots, X_n(t))$$

Déduire de la question précédente que, si  $t_0 \in I$  :

$$\forall t \in I, w(t) = w(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \text{tr}(A(u)) du\right)$$

Que penser du cas où  $A$  est constante ?

### 68.6

Soit  $p, q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues. On considère l'équation différentielle, définie sur  $[0, 1]$  :

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (E)$$

Montrer que la seule solution de  $(E)$  admettant une infinité de racines est la solution nulle.