

1 Exercices de niveau 1**908.1***cc-INP*

On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0 \quad (E)$$

- (a) Observer qu'il existe deux solutions très simples solutions de (E) sur \mathbb{R} .
- (b) Résoudre (E) sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
- (c) Déterminer les solutions de (E) définies sur \mathbb{R} .
- (d) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

À quelle condition existe-t-il une solution définie sur \mathbb{R} , vérifiant la condition initiale $\begin{cases} y(1) = \alpha \\ y'(1) = \beta \end{cases}$?

908.2*Mines-Télécom*

Résoudre sur $]0, \pi[$ l'équation différentielle :

$$y'' + y = \cotan(x)$$

908.3*cc-INP*

On pose \mathcal{S} l'ensemble des fonctions \mathcal{C}^2 qui vérifient $y''(t) + q(t)y(t) = 0$ avec q une fonction T -périodique. Soit y_1, y_2 dans \mathcal{S} telles que $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0, y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$. On admet que $\mathcal{B} = (y_1, y_2)$ est une base de \mathcal{S} .

- (a) Trouver \mathcal{S} dans le cas où q est la fonction constante égale à 1. Montrer que $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) =$ ens. des fonctions bornées de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
- (b) Pour y dans \mathcal{S} , on pose $\forall t \in \mathbb{R}, f(y)(t) = y(t+T)$.
 - b1. Montrer que $f(y) \in \mathcal{S}$, puis que f est un endomorphisme de \mathcal{S} .
 - b2. Montrer que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{pmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ y_1'(T) & y_2'(T) \end{pmatrix}$
- (c) c1. On pose $\forall t \in \mathbb{R}, W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t)$. Montrer que W est constante égale à 1.
 c2. Montrer que $\chi_A(X) = X^2 - \text{tr}(A)X + 1$.
- (d) On suppose maintenant que $|\text{tr}(A)| < 2$. Montrer que A a deux valeurs propres complexes conjuguées de module 1. Montrer que $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- (e) On suppose $|\text{tr}(A)| = 2$. Montrer que \mathcal{S} possède des solutions bornées.

2 Exercices de niveau 2

908.4

Mines-Ponts

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note \mathcal{E}_A l'équation différentielle d'inconnue $Y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C}))$:

$$Y' = AY$$

Démontrer que toutes les solutions sur \mathbb{R} de \mathcal{E}_A sont bornées si et seulement si A est diagonalisable et $\text{Sp}(A) \subset i\mathbb{R}$.

908.5

Mines-Ponts

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note \mathcal{E}_A l'équation différentielle d'inconnue $Y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{C}))$:

$$Y' = AY$$

Que peut-on dire de A si toutes les solutions sur \mathbb{R} de \mathcal{E}_A sont 1-périodiques ?

908.6

Centrale

Soit $q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue et strictement négative. On s'intéresse aux solutions sur \mathbb{R}_+ de l'équation différentielle :

$$y'' + qy = 0 \quad (\mathcal{E}_q)$$

(a) Énoncer le théorème de Cauchy-linéaire appliqué à cette équation différentielle.

On note y_1 la solution sur \mathbb{R}_+ de (\mathcal{E}_q) vérifiant $y(0) = y'(0) = 1$.

(b) Démontrer que la fonction y_1 est strictement positive, strictement croissante et convexe sur \mathbb{R}_+ .

(c) Démontrer que la fonction $\frac{1}{y_1^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

(d) Démontrer que la fonction définie par :

$$y_2(x) = y_1(x) \int_x^{+\infty} \frac{dt}{y_1^2(t)} \quad \forall x \geq 0$$

est une solution de (\mathcal{E}_q) .

(e) Est-ce que (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions ?

(f) Étudier les variations de y_2 . En déduire que y_2 possède une limite finie en $+\infty$.

(g) Parmi les solutions sur \mathbb{R}_+ de (\mathcal{E}_q) , quelles sont celles qui sont bornées ?

(h) On suppose maintenant que q est intégrable sur \mathbb{R}_+ . Démontrer que $y_2'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

908.7

Mines-Ponts

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre $\|\cdot\|$.

(a) Démontrer que, pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\exp(B) - \exp(A) = \int_0^1 \exp(tB)(B - A) \exp((1-t)A) dt$$

- (b) On admet pour l'instant que, pour tout $R > 0$ et tout $X, Y \in \overline{B}(0, R)$:

$$\|\exp(X) - \exp(Y)\| \leq e^R \|X - Y\|$$

Démontrer que \exp est différentiable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que, pour $A, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$d(\exp)(A)(H) = \int_0^1 \exp(tA) H \exp((1-t)A) dt$$

- (c) Démontrer la propriété admise à la question précédente.

908.8

Centrale

On munit \mathbb{R}^n d'une norme $\|\cdot\|$. On considère Ω un ouvert non vide de \mathbb{R}^n , $a \in \Omega$ et $f \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$.

- (a) Rappeler la définition de « Ω est ouvert ».
- (b) Soit $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|h\| < r$. On définit :

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(a + th) \end{aligned}$$

Expliquer pourquoi φ est de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, 1]$, et exprimer φ' et φ'' en fonction des dérivées partielles de f et des coordonnées h_1, \dots, h_n de h .

- (c) On suppose que, pour tout $x \in B(a, r)$, $f(x) \leq f(a)$.
Que vaut $\varphi'(0)$? Démontrer que $\varphi''(x) \leq 0$.

- (d) En déduire que la Hessienne :

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j}$$

est symétrique négative.

Que peut-on dire du laplacien $\Delta f(a) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(a)$ de f en a ?

- (e) On suppose de plus que, pour tout $x \in \Omega$, $\Delta f(x) \geq f(x)$ et qu'il existe $a \in \Omega$ tel que $f(a) = \max_{x \in \Omega} f(x)$.
Démontrer que $f \leq 0$ sur Ω .

On suppose maintenant que Ω est un ouvert borné et non vide de \mathbb{R}^n . On note $\partial\Omega$ la frontière de Ω . On considère une fonction $f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie les hypothèses suivantes :

- (i) $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$
(ii) $f|_{\Omega} \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$
(iii) $\forall x \in \Omega, \Delta f(x) = 0$

On se propose de démontrer que :

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} f(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} f(x)$$

- (a) Pourquoi f est-elle bornée sur $\overline{\Omega}$?
- (b) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$\begin{aligned} f_p : \overline{\Omega} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) + \frac{1}{p} \|x\|^2 \end{aligned}$$

Calculer Δf_p sur Ω . En déduire que $\sup_{x \in \overline{\Omega}} f_p(x)$ ne peut pas être atteinte en un point de Ω .

- (c) Conclure que : $\sup_{x \in \overline{\Omega}} f(x) = \sup_{x \in \partial\Omega} f(x)$.

908.9

Mines-Ponts

- (a) Rechercher les solutions développables en série entière de :

$$2xy'(x) + y(x) = 3x\varphi(x) \text{ avec } \varphi(x) = \begin{cases} \cos(x^{3/2}) & \text{si } x \geq 0 \\ \operatorname{ch}((-x)^{3/2}) & \text{sinon} \end{cases}$$

- (b) Résoudre l'équation différentielle sur
- \mathbb{R}_+^*
- et tracer l'allure de ses solutions.

*Examinatrice qui n'a pas envie d'être là, qui ne veut pas aider et qui souffle très fort à chaque fois qu'on écrit quelque chose (juste ou faux).***908.10**

Centrale 1

Soit g une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui tend vers 0 en $+\infty$. On considère l'équation :

$$(E) : y' + 3y = g$$

- (a) On admet provisoirement que

$$e^{-3x} \int_0^x g(t)e^{3t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Montrer que, si f est solution de (E) , alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

- (b) Démontrer le résultat admis précédemment.

- (c) On suppose maintenant que
- $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$
- . Que peut-on dire de
- f
- solution de
- (E)
- ?

- (d) et d'autres questions.

*Examinateur qui dessinait pendant mes explications.***908.11**

Mines-Ponts

- (a) Pour
- $n \in \mathbb{N}^*$
- , résoudre sur
- \mathbb{R}
- l'équation différentielle :

$$y'' + y' + y = \frac{\cos(nx)}{n^3}$$

- (b) Montrer que
- $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$
- est définie et continue sur
- \mathbb{R}
- .

- (c) Résoudre sur
- \mathbb{R}
- l'équation différentielle :

$$y'' + y' + y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$$

908.12

Mines-Ponts

Déterminer les extremums sur \mathbb{R}^3 de $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

3 Exercices de la banque CC-INP

3, 4, 31 à 33, 41, 42, 52, 56 à 58