Préambule algébrique

On se place dans un anneau commutatif, mais considérer qu'on est dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ne change rien.
Écrire les termes du développement de

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^4$$

qui ne contiennent que des a_k à des puissances paires (on suppose $n \geqslant 2$).

832.1

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

(a) Montrer, à l'aide d'une comparaison série-intégrale, que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n \ln^4(n)}$ converge.

(b) b1. Montrer que, pour tout $a > 0$, $P(|S_n| \geqslant a) \leqslant \dfrac{3n^2}{a^4}$.

b2. On pose $A = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{m=n}^{+\infty} \left(|S_m| < m^{3/4} \ln(m) \right) \right)$. Montrer que $P(A) = 1$.

b3. Montrer que la suite $\left(\dfrac{S_n}{n^{3/4} \ln(n)} \right)$ converge presque sûrement vers 0.

832.2

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs réelles et admettant un moment d'ordre 4. On note $m = E(X_1)$, $V_2 = E\left((X_1 - m)^2\right)$ et $V_4 = E\left((X_1 - m)^4\right)$.
Pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'événement :

$$A_n^\varepsilon = \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k - m \right| \geqslant \varepsilon \right)$$

(a) Majorer $P\left(A_n^\varepsilon\right)$ en fonction de n, ε, V_2 et V_4.

(b) Montrer que $\sum P\left(A_n^\varepsilon\right)$ converge.

(c) Montrer que $P\left(\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k^\varepsilon \right) \right) = 0$

(d) Conclure.