

## Dérivation des fonctions numériques

<b>Je me souviens</b>	<b>2</b>
0.1 Dérivée . . . . .	2
0.2 Théorème de Rolle . . . . .	2
0.3 Accroissements finis . . . . .	2
0.4 Opérations sur les fonctions dérivables . . . . .	2
0.5 Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ . . . . .	3
0.6 Limite de la dérivée . . . . .	3
<b>Cours</b>	<b>4</b>
1 Annexes . . . . .	4
1.1 Complément : le théorème de Darboux . . . . .	4
<b>Exercices</b>	<b>4</b>
Exercices et résultats classiques à connaître . . . . .	4
Si $P$ est scindé simple sur $\mathbb{R}$ , $P'$ aussi . . . . .	4
Un prolongement $\mathcal{C}^1$ . . . . .	4
Exercices du CCINP . . . . .	5
Exercices . . . . .	5
Petits problèmes d'entraînement . . . . .	5

**Je me souviens****0.1 Dérivée**

---

1. Comment définir la dérivée en  $a$  de  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  .
2. Équation de la tangente ?
3. Une ~~autre définition~~ caractérisation de la dérivée ?
4. Dérivée à droite ? à gauche ?
5. Lien entre dérivabilité et continuité ?
6. Dérivée des fonctions  $I \rightarrow \mathbb{C}$  ?
7. Quelle est la dérivée de  $e^{(1+i)t}$  ?

**0.2 Théorème de Rolle**

---

On ne parle ici que de fonctions réelles.

8. Pour  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , définir «  $f$  admet un maximum global en  $a$  ».
9. Pour  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , définir «  $f$  admet un maximum local en  $a$  ».
10. Énoncer le théorème faisant le lien entre extremum local et annulation de la dérivée.
11. Énoncer le théorème de Rolle.

**0.3 Accroissements finis**

---

12. Quelle est l'égalité des accroissements finis ?
13. Quelle est l'inégalité des accroissements finis ?
14. Il y a un lien avec le théorème fondamental de l'analyse ?
15. À quelle condition  $f$  dérivable est-elle constante ?
16. À quelle condition  $f$  dérivable à valeurs réelles est-elle croissante ?
17. À quelle condition  $f$  dérivable à valeurs réelles est-elle strictement croissante ?

**0.4 Opérations sur les fonctions dérivables**

---

18.  $(\lambda f + \mu g)'(x) =$
19.  $(f \times g)'(x) =$
20.  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) =$
21.  $(g \circ f)'(x) =$
22.  $(f^{-1})'(x) =$

**0.5 Fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$** 

---

- 23. Définir «  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  »
- 24. Définir «  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  », où  $k \in \mathbb{K}$ .
- 25. Définir «  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$  »
- 26.  $(\lambda f + \mu g)^{(k)}(x) =$
- 27. Énoncer la formule de Leibniz.
- 28. Comment démontrer la formule de Leibniz ?
- 29. Pour  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  de classe  $\mathcal{C}^k$  et  $\phi : J \rightarrow I$  de classe  $\mathcal{C}^k$ , que dire de  $f \circ \phi$  ?

**0.6 Limite de la dérivée**

---

- 30. Énoncer le théorème limite de la dérivée.
- 31. Comment utiliser le résultat précédent pour prolonger à  $I$  de façon  $\mathcal{C}^1$  une fonction définie sur  $I \setminus \{a\}$  ?

## 1 Annexes

## 1.1 Complément : le théorème de Darboux

**Théorème de Darboux.**

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , dérivable. Alors  $f'$  satisfait la propriété des valeurs intermédiaires.

**Remarque.** Ce théorème est complètement hors programme. Il est intéressant lorsque  $f$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$ , c'est-à-dire lorsque l'on ne peut pas appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à  $f'$ .

*Preuve.*

- On suppose  $f$  dérivable sur  $[a, b]$ , et on considère  $\gamma$  entre  $f'(a)$  et  $f'(b)$ . On cherche  $c \in [a, b]$  tel que  $f'(c) = \gamma$ . L'idée est celle du théorème de Rolle, pour lequel la

conclusion est analogue, mais avec  $\gamma = 0$ . On considère donc :

$$g : x \mapsto f(x) - \gamma x$$

$g$  est continue sur le segment  $[a, b]$ , donc admet un minimum et un maximum, par le théorème des bornes atteintes.

- Si le minimum ou le maximum est atteint en  $c \in ]a, b[$ , on a trouvé  $c$  tel que  $g'(c) = 0$ , c'est-à-dire  $f'(c) = \gamma$ .
- Sinon, le minimum et le maximum sont par exemple atteints en  $a$  et  $b$  respectivement, et donc  $g'(a) \geq 0$  et  $g'(b) \leq 0$ . Par hypothèse,  $g'(a) = f'(a) - \gamma$  et  $g'(b) = f'(b) - \gamma$  sont de signes opposés, donc les deux inégalités ne peuvent être strictes. On a trouvé  $c$  (égal à  $a$  ou  $b$ ) tel que  $g'(c) = 0$ , c'est-à-dire  $f'(c) = \gamma$ . □

## Exercices et résultats classiques à connaître

Si  $P$  est scindé simple sur  $\mathbb{R}$ ,  $P'$  aussi

## 630.1

- Montrer que, si  $P \in \mathbb{R}[X]$  est un polynôme de degré  $\geq 2$ , scindé à racines simples, alors  $P'$  est aussi scindé à racines simples.
- Le résultat est-il vrai si on suppose  $P \in \mathbb{C}[X]$  ?
- Montrer que, si  $P \in \mathbb{R}[X]$  est un polynôme scindé, alors  $P'$  est aussi scindé.

Un prolongement  $\mathcal{C}^1$ 

## 630.2

Montrer que la fonction, définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :

$$f : x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

se prolonge à  $\mathbb{R}$  en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

## Exercices du CCINP

630.3



1. On pose  $g(x) = e^{2x}$  et  $h(x) = \frac{1}{1+x}$ .

Calculer, pour tout entier naturel  $k$ , la dérivée d'ordre  $k$  des fonctions  $g$  et  $h$  sur leurs ensembles de définitions respectifs.

2. On pose  $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+x}$ .

En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée  $n^{\text{ième}}$  d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel  $n$  et pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , la valeur de  $f^{(n)}(x)$ .

3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

630.4



1. Énoncer le théorème des accroissements finis.

2. Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et soit  $x_0 \in ]a, b[$ .

On suppose que  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et que  $f$  est dérivable sur  $]a, x_0[$  et sur  $]x_0, b[$ .

Démontrer que, si  $f'$  admet une limite finie en  $x_0$ , alors  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ .

3. Prouver que l'implication : ( $f$  est dérivable en  $x_0$ )  $\implies$  ( $f'$  admet une limite finie en  $x_0$ ) est fausse.

**Indication** : on pourra considérer la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$  si  $x \neq 0$  et  $g(0) = 0$ .

## Exercices

630.5

Montrer que le polynôme :

$$((X^2 - 1)^n)^{(n)}$$

est scindé à racines simples sur  $\mathbb{R}$ .

630.6

Utiliser les accroissements finis pour démontrer les inégalités :

- (a)  $|\sin x| \leq |x|$  pour  $x \in \mathbb{R}$   
 (b)  $\ln(1+x) \leq x$  pour  $x \in \mathbb{R}_+$ .

630.7

Montrer que, pour  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\frac{d^n}{dx^n}(\cos x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \text{ et } \frac{d^n}{dx^n}(\sin x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

630.8

Calculer, pour  $n \in \mathbb{N}$ , la dérivée  $n$ -ème de :

- |                           |                         |
|---------------------------|-------------------------|
| (a) $x^k$                 | (d) $\cos^3 x$          |
| (b) $\frac{1}{x}$         | (e) $\cos(x)e^x$        |
| (c) $(x^2 - x + 1)e^{-x}$ | (f) $\frac{1}{x^2 - 1}$ |

## Petits problèmes d'entraînement

630.9

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $f$  admet des limites finies et égales en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . Montrer qu'il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $f'(c) = 0$ .

630.10

- (a) On définit sur  $\mathbb{R}$  :

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

(b) En déduire que la fonction définie par :

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{\frac{2}{x^2-1}} & \text{si } x \in ]-1, 1[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est aussi de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

### 630.11

Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\frac{d^n}{dx^n} \operatorname{Arctan}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$$

où  $P_n$  est un polynôme, scindé à racines simples sur  $\mathbb{R}$ .

### 630.12

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée et dérivable. On suppose que la dérivée  $f'$  admet une limite  $\ell$  en  $+\infty$ . Déterminer  $\ell$ .

### 630.13

On considère :

$$f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x) + \sin(x)$$

- (a) Montrer que  $f$  n'a pas de limite en  $+\infty$ .
- (b) Montrer que  $f$  est majorée, et déterminer sa borne supérieure.
- (c) Montrer que la dérivée de  $f$  s'annule une infinité de fois sur  $\mathbb{R}$ .
- (d) Montrer que  $f$  n'admet pas de maximum global sur  $\mathbb{R}$ .

### 630.14

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  admettant une limite finie en  $+\infty$  et en  $-\infty$ . Montrer que  $f''$  s'annule.

### 630.15

Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable. On suppose que :

$$f(0) = f'(0) = 0 \text{ et } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$$

Montrer qu'il existe  $a \in ]0, +\infty[$  abscisse d'un point où la tangente à la courbe représentative de  $f$  passe par l'origine.

### 630.16

On définit, pour  $x \in \mathbb{R}$  :

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $P_n \in \mathbb{R}[X]$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-x^2}$$

Montrer que  $P_n$  admet exactement  $n$  racines réelles.

### 630.17

Soit  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que  $|f'(x)| < 1$  pour tout  $x \in [a, b]$ .

- (a) Montrer que  $f$  admet un unique point fixe  $\alpha$ .
- (b) Montrer que toute suite définie par :

$$u_0 \in [a, b] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

converge vers  $\alpha$ .

### 630.18

Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **hölderienne d'exposant**  $\alpha > 0$  lorsqu'il existe  $M \geq 0$  tel que :

$$\forall x, y \in I, |f(y) - f(x)| \leq M|y - x|^\alpha$$

- (a) Montrer qu'une fonction  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  qui est de classe  $\mathcal{C}^1$  est hölderienne d'exposant 1.
- (b) Démontrer que les fonctions hölderiennes d'exposant  $> 1$  sont constantes.

On considère la fonction  $f : x \mapsto x \ln(x)$  définie sur  $]0, 1]$ .

- (c) Montrer que  $f$  n'est pas hölderienne d'exposant 1.
- (d) Montrer que  $f$  est hölderienne d'exposant  $\alpha$  pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ .

**630.19**

Déterminer les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables vérifiant :

$$f \circ f = f$$

**630.20**

Soit  $f$  une fonction numérique deux fois dérivable sur  $I$  intervalle. On consi-

dère  $a, b, c \in I$  tels que  $a < b < c$ . Montrer qu'il existe  $d \in I$  tel que :

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-b)(c-a)} = \frac{1}{2}f''(d)$$

On pourra introduire :

$$\varphi : x \mapsto (x-b)f(a) + (a-x)f(b) + (b-a)f(x) - K(b-a)(b-x)(x-a)$$

où  $K$  est une constante bien choisie.