Analyse asymptotique

Je me souviens

1. C'est quoi, l'analyse asymptotique ?
2. Ça veut dire quoi, négligeable ?
3. C'est quoi, un $o(1)$?
4. Ça veut dire quoi, dominé ?
5. C'est quoi, un $O(1)$?
6. On peut faire des opérations sur les petit o ? sur les grand O ?
7. Ça veut dire quoi, équivalent ?
8. Est-ce que c'est une relation d'équivalence ?
9. On peut faire des opérations sur les équivalents ?
10. Y a-t-il des équivalents usuels ?
11. À quoi servent les équivalents ?
12. Qu'est ce qui se cache derrière l'argument souvent avancé de « croissances comparées » ?
13. C'est quoi, un développement limité en 0 ?
14. Est-ce qu'un DL donne un équivalent ? un équivalent donne un DL ?
15. Quels sont les DL que l'on doit connaître ?
16. Opérations sur les DL ?
17. C'est quoi, un développement limité en a ?
18. C'est quoi, un développement asymptotique ?
19. Au voisinage de $n \to +\infty$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim$?
20. Donner un exemple de suites telles que $u_n \sim v_n$ mais $\mathrm{e}^{u_n} \not\sim \mathrm{e}^{v_n}$.
21. Est-ce qu'on a toujours $u_{n+1} \sim n$?

Exercices et résultats classiques à connaître

Un équivalent par encadrement

61.1

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle décroissante telle que :

$$u_{n+1} + u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Déterminer un équivalent simple de u_n.

Le DL de $\tan(x)$

61.2

(a) Former le développement limité à l'ordre 3 en 0 de :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

(b) Prolonger ce développement limité à l'ordre 5 en exploitant :

$$\tan(\operatorname{Arctan} x) = x$$

(c) Prolonger ce développement limité à l'ordre 7 en exploitant :

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$$

Exercices du CCINP

61.3 CCINP 7.1

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.

(a) Prouver que si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

61.4 CCINP 46.1

On considère la série : $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

(a) Prouver que, au voisinage de $+\infty$:
$$\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
où α est un réel que l'on déterminera.

Exercices

61.5

Écrire plus simplement les expressions suivantes :

(a) $\mathrm{o}(2n) - 2\mathrm{o}\big((-1)^n n\big)$

(b) $n\ln n + \mathrm{o}(n+1) + \mathrm{o}(n^2)$

(c) $2\mathrm{o}(n)\mathrm{O}(n) - n\mathrm{O}(n)$.

61.6

Calculer la limite des expressions suivantes ($\alpha \in \mathbb{R}$) :

(a) $n\Big(\big(1+\frac{1}{n}\big)^8 - 1\Big)$

(b) $(n+1)(n^{\frac{1}{n}} - 1)$

(c) $\left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)^n$

61.7

Déterminer un équivalent simple de :

(a) $\ln n + 2n - 1$

(b) $\dfrac{(1+\ln n)(3n^2+1)}{\sqrt{n^2+2n}}$

(c) $\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$

(d) $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$

(e) $\ln(2n^3+1)$

(f) $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(g) $n\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

(h) $\ln(n+1) - \ln(n-1)$

(i) $(n+1)^n$

61.8

Déterminer un équivalent de :

(a) $\ln(\mathrm{ch}(x))$ en 0

(b) $\ln(1+x) - x$ en 0

(c) $\ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

(d) $\ln\left(\dfrac{n-\ln n}{n+\ln n}\right)$

Déterminer la limite de :

(e) $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$ pour $x \in \mathbb{R}$ fixé

61.9

(a) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^x)$.

(b) Quelle est l'allure de la courbe correspondante au voisinage du point d'abscisse 0 ?

61.10

Calculer la limite de :

(a) $\dfrac{\ln x}{x-1}$ en 1

(b) $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x}{x}$ en 0

(c) $\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$ en 0

(d) $\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$ en $+\infty$

(e) $\left(3.2^{\frac{1}{x}} - 2.3^{\frac{1}{x}}\right)^x$ en $+\infty$

61.11

Déterminer le développement asymptotique à trois termes des expressions suivantes :

(a) $\sqrt{n^2+1}$

(b) $\sqrt[n]{n}$

(c) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

61.12

(a) Déterminer le développement asymptotique à trois termes en $+\infty$ de $x\operatorname{Arctan}(x)$.

(b) Quelle est l'allure de la courbe correspondante, au voisinage de $x \to +\infty$?

Petits problèmes d'entrainement

61.13 ✍

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = 1 + x^2 \sin\frac{1}{x}$$

(a) Montrer que f se prolonge en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) Est-ce que la dérivée de f admet un développement limité en 0 ?

61.14 ✍

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, avec $f(1) \neq 0$. On pose :

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

Déterminer un équivalent simple de I_n en supposant :

1. f de classe $\mathcal{C}^1$;
2. f continue.

61.15

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le polynôme :

$$P_n = X(X-1)\dots(X-n)$$

(a) Montrer que le polynôme P_n' possède une unique racine dans l'intervalle $]0,1[$. On la note x_n.

(b) Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$.

(c) Former la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle :

$$F_n = \frac{P_n'}{P_n}$$

(d) Déterminer un équivalent de x_n.

61.16

Déterminer le développement asymptotique :

(a) à 2 termes de $u_n = \dfrac{1}{n+\sin n}$

(b) à 3 termes de $v_n = (n+1)\ln(n) - n\ln(n+1)$

61.17

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$:

$$x + \sqrt[3]{x} = n$$

(a) Montrer que cette équation possède une unique solution x_n.

(b) Déterminer la limite, puis un équivalent simple de $(x_n)_n$.

(c) Donner un développement asymptotique à trois termes de $(x_n)_n$.

61.18

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$x^n \ln x = 1$$

(a) Montrer que cette équation possède une unique solution x_n, et que $x_n > 1$.

(b) Montrer que $(x_n)_n$ est décroissante, et déterminer sa limite.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $y_n = x_n - 1$.

(c) Justifier que $ny_n \sim -\ln y_n$ et en déduire un équivalent de y_n.