

## Analyse asymptotique

<b>Je me souviens</b>	<b>2</b>
<b>Exercices</b>	<b>3</b>
Exercices et résultats classiques à connaître . . . . .	3
Un équivalent par encadrement . . . . .	3
Le DL de $\tan(x)$ . . . . .	3
Exercices du CCINP . . . . .	4
Exercices . . . . .	4
Petits problèmes d'entraînement . . . . .	5

**Je me souviens**

1. C'est quoi, l'analyse asymptotique ?
2. Ça veut dire quoi, négligeable ?
3. C'est quoi, un  $o(1)$  ?
4. Ça veut dire quoi, dominé ?
5. C'est quoi, un  $O(1)$  ?
6. On peut faire des opérations sur les petit  $o$  ? sur les grand  $O$  ?
7. Ça veut dire quoi, équivalent ?
8. Est-ce que c'est une relation d'équivalence ?
9. On peut faire des opérations sur les équivalents ?
10. Y a-t-il des équivalents usuels ?
11. À quoi servent les équivalents ?
12. Qu'est ce qui se cache derrière l'argument souvent avancé de « croissances comparées » ?
13. C'est quoi, un développement limité en 0 ?
14. Est-ce qu'un DL donne un équivalent ? un équivalent donne un DL ?
15. Quels sont les DL que l'on doit connaître ?
16. Opérations sur les DL ?
17. C'est quoi, un développement limité en  $a$  ?
18. C'est quoi, un développement asymptotique ?
19. Au voisinage de  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim ?$
20. Donner un exemple de suites telles que  $u_n \sim v_n$  mais  $e^{u_n} \not\sim e^{v_n}$ .
21. Est-ce qu'on a toujours  $u_{n+1} \sim n$  ?

**Exercices et résultats classiques à connaître****Un équivalent par encadrement****62.1**

Soit  $(u_n)_n$  une suite réelle décroissante telle que :

$$u_{n+1} + u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Déterminer un équivalent simple de  $u_n$ .

**Le DL de  $\tan(x)$** **62.2**

(a) Former le développement limité à l'ordre 3 en 0 de :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

(b) Prolonger ce développement limité à l'ordre 5 en exploitant :

$$\tan(\operatorname{Arctan} x) = x$$

(c) Prolonger ce développement limité à l'ordre 7 en exploitant :

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$$

## Exercices du CCINP

**62.3**
 **7.1**

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles telles que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est non nulle à partir d'un certain rang.

1. Prouver que si  $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$  alors  $u_n$  et  $v_n$  sont de même signe à partir d'un certain rang.

**62.4**
 **46.1**

On considère la série :  $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ .

1. Prouver que, au voisinage de  $+\infty$  :

$$\pi\sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha \frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

où  $\alpha$  est un réel que l'on déterminera.

## Exercices

**62.5**

Écrire plus simplement les expressions suivantes :

- (a)  $o(2n) - 2o((-1)^n n)$
- (b)  $n \ln n + o(n+1) + o(n^2)$
- (c)  $2o(n)O(n) - nO(n)$ .

**62.6**

Calculer la limite des expressions suivantes ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) :

- (a)  $n \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^8 - 1 \right)$

- (b)  $(n+1)(n^{\frac{1}{n}} - 1)$

- (c)  $\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$

**62.7**

Déterminer un équivalent simple de :

- (a)  $\ln n + 2n - 1$

- (b)  $\frac{(1 + \ln n)(3n^2 + 1)}{\sqrt{n^2 + 2n}}$

- (c)  $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$

- (d)  $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$

- (e)  $\ln(2n^3 + 1)$

- (f)  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

- (g)  $n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

- (h)  $\ln(n+1) - \ln(n-1)$

- (i)  $(n+1)^n$

**62.8**

Déterminer un équivalent de :

- (a)  $\ln(\operatorname{ch}(x))$  en 0

- (b)  $\ln(1+x) - x$  en 0

- (c)  $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

- (d)  $\ln\left(\frac{n - \ln n}{n + \ln n}\right)$

Déterminer la limite de :

(e)  $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  pour  $x \in \mathbb{R}$  fixé

### 62.9

- (a) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de  $\text{Arctan}(e^x)$ .
- (b) Quelle est l'allure de la courbe correspondante au voisinage du point d'abscisse 0 ?

### 62.10

Calculer la limite de :

- (a)  $\frac{\ln x}{x-1}$  en 1
- (b)  $\frac{e^{2x} - e^x}{x}$  en 0
- (c)  $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$  en 0
- (d)  $\left(\cos \frac{1}{x}\right)^{x^2}$  en  $+\infty$
- (e)  $\left(3.2^{\frac{1}{x}} - 2.3^{\frac{1}{x}}\right)^x$  en  $+\infty$

### 62.11

Déterminer le développement asymptotique à trois termes des expressions suivantes :

(a)  $\sqrt{n^2 + 1}$

(b)  $\sqrt[n]{n}$

(c)  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

### 62.12

- (a) Déterminer le développement asymptotique à trois termes en  $+\infty$  de  $x \text{Arctan}(x)$ .
- (b) Quelle est l'allure de la courbe correspondante, au voisinage de  $x \rightarrow +\infty$  ?

## Petits problèmes d'entraînement

### 62.13

On considère l'application définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :

$$f(x) = 1 + x^2 \sin \frac{1}{x}$$

- (a) Montrer que  $f$  se prolonge en une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- (b) Est-ce que la dérivée de  $f$  admet un développement limité en 0 ?

### 62.14

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , avec  $f(1) \neq 0$ . On pose :

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$$

Déterminer un équivalent simple de  $I_n$ .