461.1

Soit E un espace euclidien, dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(a) Soit $a, b, x \in E$, avec $a \neq b$ et $\|x - a\| = \|x - b\|$. Montrer que :

$$\left\| x - \frac{a+b}{2} \right\| < \|x - a\|$$

On considère C un convexe fermé non vide de E.

(b) Montrer qu'il existe un unique vecteur $a \in C$ tel que :

$$\|x - a\| = \operatorname*{Inf}_{y \in C} \|x - y\|$$

On définit alors :

$$\begin{array}{rccc} P : & E & \to & C \\ & x & \mapsto & a \end{array}$$

que l'on appelle **projection sur le convexe** C.

(c) Soit $a \in C$ tel que, pour tout $y \in C$, $\langle x - a, y - a \rangle \leqslant 0$. Montrer que $a = P(x)$.

(d) Inversement, on suppose qu'il existe $y \in C$ tel que :

$$\langle x - P(x), y - P(x) \rangle > 0$$

En considérant les vecteurs de la forme $ty + (1 - t)P(x)$, où $t \in [0, 1]$, obtenir une contradiction.

On a donc montré que $P(x)$ est l'unique vecteur $a \in C$ tel que :

$$\forall y \in C,\ \langle x - a, y - a \rangle \leqslant 0$$

(e) Montrer que, pour tout $x, y \in E$:

$$\langle x - y, P(x) - P(y) \rangle \geqslant \|P(x) - P(y)\|^2$$

En déduire que l'application P est continue.