

Espaces préhilbertiens réels

Je me souviens	2	
Cours	3	
1	Produit scalaire et norme associée	3
1.1	Produit scalaire	3
1.2	Exemples de référence	3
1.3	Autres exemples	4
1.4	Inégalité de Cauchy-Schwarz	4
1.5	Norme euclidienne	4
1.6	Identités remarquables	5
2	Orthogonalité	5
2.1	Vecteurs orthogonaux	5
2.2	Sous-espaces orthogonaux	5
2.3	Sous-espace orthogonal d'une partie	6
2.4	Orthogonal d'un sous-espace vectoriel	6
3	Bases orthonormées d'un espace euclidien	6
3.1	Existence de bases orthonormées	6
3.2	Construction de bases orthonormées	6
3.3	Coordonnées dans une base orthonormée	7
4	Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	7
4.1	Théorème de la base orthonormée incomplète	7
4.2	Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	7
4.3	Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie	8
4.4	Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt	8
5	Formes linéaires sur un espace euclidien	9
5.1	Représentation des formes linéaires	9
5.2	Distance à un hyperplan, à une droite	9
6	Annexes	10
6.1	Annexe : projecteurs orthogonaux associés à une décomposition orthogonale de l'espace	10
6.2	Annexe : une démonstration astucieuse de l'inégalité de Cauchy-Schwarz	10
Exercices	11	
Exercices et résultats classiques à connaître	11	
Calcul d'une borne inf avec un projeté orthogonal	11	
La matrice de Gramm	11	
Une orthonormalisation	11	
Exercices du CCINP	12	
Exercices	13	
Petits problèmes d'entraînement	14	

Je me souviens

1. Qu'est-ce qu'un produit scalaire ?
2. Qu'est-ce qu'une norme ? Lien entre produit scalaire et norme ?
3. Donner des exemples de produits scalaires et de normes.
4. Qu'est-ce que l'inégalité de Cauchy-Schwarz ?
5. Expression du produit scalaire dans une b.o.n. (e_1, \dots, e_n) . Et la norme ?
6. Expression des coordonnées du vecteur x dans cette b.o.n. ?
7. Comment définit-on deux vecteurs orthogonaux ? Et l'orthogonal d'un sev ?
8. Méthodes pour montrer qu'une famille de vecteurs est libre ?
9. Qu'est-ce que le théorème de Pythagore ?
10. Si a est un vecteur non nul, comment construire un vecteur unitaire colinéaire à a ?
11. Expression du projeté orthogonal du vecteur x sur la droite vectorielle $D = \text{Vect}(a)$?
12. Soit F un sev dont on connaît une b.o.n. (e_1, \dots, e_q) ; expression du projeté orthogonal de x sur F ?
13. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt ?

Dans ce chapitre, E désigne un \mathbb{R} -espace vectoriel.

1 Produit scalaire et norme associée

1.1 Produit scalaire

Définition. On appelle **produit scalaire** sur E une forme bilinéaire, symétrique, positive et définie-positive sur E , c'est-à-dire, en notant φ cette application :

- φ est à valeurs dans \mathbb{R} ;
- φ est linéaire par rapport à chacune de ses deux variables ;
- $\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$;
- $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$;
- $\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \implies x = 0$.

Remarque. La symétrie et la linéarité par rapport à l'une des variables suffit à justifier la bilinéarité.

Notation. On note en général $\langle x, y \rangle$, $(x|y)$ ou $x \cdot y$ le produit scalaire de x avec y .

Définition. Un espace vectoriel sur \mathbb{R} , muni d'un produit scalaire, s'appelle un **espace préhilbertien**.

S'il est en plus de dimension finie, on dit que c'est un **espace euclidien**.

1.2 Exemples de référence

Remarque. Les exemples de cette section figurent explicitement au programme, et peuvent donc être utilisés directement.

Définition. Sur \mathbb{R}^n , le produit scalaire canonique est défini par :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Définition. Sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est défini par :

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$$

Si $A = (a_{ij})_{ij}$ et $B = (b_{ij})_{ij}$, on a de plus l'expression :

$$\langle A, B \rangle = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij} b_{ij}$$

Il s'agit donc de la somme des produits terme à terme des deux matrices.

Définition. Sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est défini par :

$$\langle X, Y \rangle = X^\top Y$$

Remarque. Il coïncide avec le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n , via l'identification usuelle entre une matrice colonne et un n -uplet.

On trouve parfois la définition $\langle X, Y \rangle = \text{tr}(X^\top Y)$. En effet, on a $X^\top Y \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. La trace permet ici d'en faire un réel plutôt qu'une matrice 1×1 . On accepte cependant souvent de confondre \mathbb{R} et $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

Définition. Sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

Proposition. Les produits scalaires définis ci-dessus sont bien des produits scalaires.

1.3 Autres exemples

Remarque. Même s'ils sont très classiques, les exemples de cette section ne figurent pas explicitement au programme.

Exemple. En confondant polynôme et fonction polynomiale associée, $\mathbb{R}[X]$ est muni du produit scalaire défini par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$$

Exemple. Toujours sur $\mathbb{R}[X]$, montrer que

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$$

définit un produit scalaire.

Exemple. Soit w une fonction continue, à valeurs strictement positives sur un intervalle I . On note :

$$E = \{f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \text{ t.q. } f^2w \text{ intégrable sur } I\}$$

C'est un espace vectoriel, que l'on peut munir d'un produit scalaire en posant :

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(t)g(t)w(t) dt$$

Proposition. Les produits scalaires définis ci-dessus sont bien des produits scalaires.

1.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires.

Remarque. On notera $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ la norme associée au produit scalaire. L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'interprète bien géométriquement.

Inégalité de Minkowski. Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens (on dit parfois *positivement liés*).

Remarque. Avec $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, l'inégalité de Minkowski n'est rien d'autre que l'inégalité triangulaire sur la norme euclidienne.

1.5 Norme euclidienne

Définition. On appelle **norme euclidienne** associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'application :

$$\|\cdot\| : x \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Proposition. C'est une norme.

Définition. Un vecteur de norme 1 est qualifié d'**unitaire**.

Proposition. Si E est muni de sa norme euclidienne, le produit scalaire est continu sur $E \times E$.

1.6 Identités remarquables

Proposition. On a les identités remarquables suivantes :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle \quad \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle$$

les identités de polarisation :

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

et l'identité du parallélogramme :

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

2 Orthogonalité

2.1 Vecteurs orthogonaux

Définition. Deux vecteurs x et y sont dits **orthogonaux** si et seulement si :

$$\langle x, y \rangle = 0$$

On note dans ce cas : $x \perp y$.

Remarque. Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de E , et un vecteur orthogonal à tous les vecteurs de E est nul.

Définition. Une famille $(v_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite **orthogonale** si et seulement si :

$$\forall i, j \in I, i \neq j \implies \langle v_i, v_j \rangle = 0$$

Elle est dite **orthonormée** si et seulement si :

$$\forall i, j \in I, \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Proposition. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Toute famille orthonormée est libre.

Exemple. Les polynômes élémentaires de Lagrange forment une famille libre.

Théorème de Pythagore.

x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Cas d'une famille finie de vecteurs. Si (v_1, \dots, v_p) est une famille orthogonale, alors $\left\| \sum_{i=1}^p v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^p \|v_i\|^2$.

2.2 Sous-espaces orthogonaux

Définition. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit qu'ils sont **orthogonaux** si et seulement si :

$$\forall x \in F, \forall y \in G, x \perp y$$

On note $F \perp G$.

Proposition. Lorsque $F \perp G$, la somme $F + G$ est directe, et on la note $F \oplus G$.

Proposition. Si $(F_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une famille de sous-espaces deux à deux orthogonaux, alors leur somme est directe et on la note $\bigoplus_{i=1}^p F_i$.

2.3 Sous-espace orthogonal d'une partie

Définition. Soit A une partie de E . On appelle **orthogonal** de A l'ensemble :

$$A^\perp = \{x \in E \text{ t.q. } \forall a \in A, x \perp a\}$$

Exemple. $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$.

Proposition. Soit A une partie de E espace préhilbertien.

- A^\perp est un sous-espace vectoriel de E
- Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$
- $A \perp B$ signifie que $A \subset B^\perp$ et $B \subset A^\perp$.

Remarque. Pour la dernière propriété, penser à deux droites dans l'espace usuel de dimension 3.

2.4 Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Proposition. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors F^\perp est orthogonal à F :

$$F \circledcirc F^\perp$$

mais, en général, $F \circledcirc F^\perp \not\subseteq E$.

Exemple. Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel, et F le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales. Déterminer F^\perp .

Remarque. On verra au § 4 que, lorsque F est de dimension finie (en particulier dans un espace euclidien), F^\perp et F sont supplémentaires.

3 Bases orthonormées d'un espace euclidien

Dans cette section, E est un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

3.1 Existence de bases orthonormées

Définition. On appelle **base orthonormée** de E toute base de E qui soit aussi une famille orthonormée.

Proposition. Toute famille orthonormée de n vecteurs, lorsque $n = \dim E$, est une base orthonormée.

Théorème.

Tout espace euclidien admet au moins une base orthonormée.

Remarque. On verra au § 4.4 un algorithme de construction d'une telle base.

Exemple. Avec le produit scalaire usuel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la famille :

$$\left((E_{ii})_{1 \leq i \leq n}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij} + E_{ji}) \right)_{1 \leq i < j \leq n}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{ij} - E_{ji}) \right)_{1 \leq i < j \leq n} \right)$$

est une base orthonormée.

3.2 Construction de bases orthonormées

Voir l'algorithme de Gram-Schmidt au § 4.4.

3.3 Coordonnées dans une base orthonormée

Proposition. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E , et x un vecteur de E . Ses coordonnées dans \mathcal{B}

sont : $\begin{pmatrix} \langle e_1, x \rangle \\ \vdots \\ \langle e_n, x \rangle \end{pmatrix}$, c'est-à-dire :

$$x = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle e_i$$

Remarque. Si la base n'est qu'orthogonale, il faut adapter la formule en normant les vecteurs.

Si la base n'est pas orthonormée, il n'y a pas d'expression simple des coordonnées à l'aide du produit scalaire.

Proposition. Soit \mathcal{B} une base orthonormée de E , x et y deux vecteurs dont les coordonnées sont respectivement

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \text{ Alors :}$$

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= X^\top Y & \langle x, y \rangle &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ \|x\| &= \sqrt{X^\top X} & \|x\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \end{aligned}$$

Remarque. On voit ici l'avantage des bases orthonormées : les formules de calcul du produit scalaire et de la norme sont celles du produit scalaire et de la norme canonique de \mathbb{R}^n .

Proposition. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $M = (m_{ij})_{ij}$ la matrice de u relativement à la base \mathcal{B} . Alors, pour tout i, j :

$$m_{ij} = \langle e_i, u(e_j) \rangle$$

4 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

4.1 Théorème de la base orthonormée incomplète

Théorème de la base orthonormée incomplète.

Si (e_1, \dots, e_p) est une famille orthonormée de E euclidien de dimension n , on peut la compléter en une base orthonormée $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E .

4.2 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E . On appelle **projection orthogonale sur F** , et on note p_F , la projection sur F parallèlement à F^\perp .

Remarque. Rappelons que, par définition, $p_F(x)$ est l'unique vecteur y tel que :

$$\begin{cases} y \in F \\ y - x \in F^\perp \end{cases}$$

Ceci fournit une méthode de détermination de $p_F(x)$ par résolution d'un système linéaire lorsque l'on connaît une famille génératrice de F .

Remarque. On a supposé F de dimension finie, mais si F est de dimension infinie et que $F \oplus F^\perp = E$, alors la projection orthogonale est bien définie.

Proposition. Si (e_1, \dots, e_p) est une base orthonormée de F , alors :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle e_i, x \rangle e_i$$

Remarque. Ceci fournit une seconde méthode de détermination de $p_F(x)$, lorsque l'on connaît une base orthonormée de F .

Exemple. Soit $a \in E$ un vecteur non nul. Déterminer l'expression de la projection orthogonale sur $\text{Vect}(a)$, et celle sur $\text{Vect}(a)^\perp$.

Exemple. Dans $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer le projeté orthogonal de $t \mapsto t^2$ sur $F = \text{Vect}(t \mapsto 1, t \mapsto t)$.

4.3 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie

Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de E , et $x \in E$. On appelle **distance de x à F** la quantité :

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$$

Théorème.

Si F est de dimension finie, alors le projeté orthogonal de x sur F est l'unique vecteur de F qui réalise la distance précédente :

C'est l'unique $y_0 \in F$ tel que :

$$\|x - y_0\| = \min_{y \in F} \|x - y\|$$

Ainsi :

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2}$$

Exemple. Justifier l'existence et déterminer :

$$\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$$

4.4 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème de Gram-Schmidt.

Partant d'une famille (u_1, \dots, u_p) supposée libre de E (par exemple une base), il existe une unique famille (e_1, \dots, e_p) telle que :

- (e_1, \dots, e_p) est orthonormée ;
- $\forall k \in \{1, \dots, p\}$, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$;
- $\forall k \in \{1, \dots, p\}$, $\langle e_k, v_k \rangle > 0$.

Algorithme. Cette famille peut être construite par l'algorithme suivant : Pour chaque $k \in \{1, \dots, p\}$, on définit $e'_k = u_k - p_{k-1}(u_k)$ (où p_{k-1} désigne la projection orthogonale sur $F_{k-1} = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{k-1})$) et $e_k = \frac{e'_k}{\|e'_k\|}$. Comme F_{k-1} est connue par une base orthonormée, l'expression de la projection orthogonale est simple.

Remarque. La matrice de la famille (e_1, \dots, e_p) dans la base (u_1, \dots, u_p) de F_p est triangulaire supérieure.

5 Formes linéaires sur un espace euclidien

5.1 Représentation des formes linéaires

Théorème de représentation des formes linéaires.

Soit φ une forme linéaire sur un espace euclidien E . Alors il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \varphi(x) = \langle a, x \rangle$$

En d'autres termes, en dimension finie, toute forme linéaire peut être représentée à l'aide d'un produit scalaire.

Remarque. Soit H un hyperplan. Alors il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $H = \text{Ker } \varphi$. On applique à φ le théorème précédent, et on a la définition suivante :

Définition. Lorsque $H = \text{Ker } \varphi$, où $\varphi \neq 0$, le vecteur a est orthogonal à l'hyperplan $H = \text{Ker } \varphi$. On dit que a est un **vecteur normal** à H .

Remarque. Les vecteurs orthogonaux à H sont alors les vecteurs colinéaires à a .

Corollaire. On conserve les notations précédentes.

Si E est muni d'une base orthonormée, et que a a pour coordonnées $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, alors une **équation de H** est donnée par :

$$\begin{aligned} x \in H &\iff A^\top X = 0 \\ &\iff a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 \end{aligned}$$

$$\text{où } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

5.2 Distance à un hyperplan, à une droite

Théorème.

Soit H un hyperplan de E , et a un vecteur normal de H . Alors pour tout $x \in E$, on a :

$$d(x, H) = \frac{|\langle a, x \rangle|}{\|a\|}$$

Soit D une droite vectorielle de E , dirigée par un vecteur a . Alors, pour tout $x \in E$, on a :

$$d^2(x, D) = \|x\|^2 - d^2(x, D^\perp)$$

6 Annexes

6.1 Annexe : projecteurs orthogonaux associés à une décomposition orthogonale de l'espace

Proposition. Soit E un espace euclidien, $(F_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de p sous-espaces de E deux à deux orthogonaux. On suppose que la somme (qui est directe orthogonale) des F_i est E :

$$E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$$

On définit, pour tout i , p_i la projection orthogo-

nale sur F_i , c'est-à-dire la projection sur F_i , de direction $\bigoplus_{j \neq i} F_j$. Alors :

$$\text{Id}_E = \sum_{i=1}^p p_i \quad \text{et, pour } i \neq j, \quad p_i \circ p_j = 0$$

6.2 Annexe : une démonstration astucieuse de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour tout $x, y \in E$, on a :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

L'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires.

Preuve.

- Si x ou y est nul, l'inégalité est triviale.
- On suppose x et y non nul. Calculons, pour $\varepsilon = \pm 1$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{x}{\|x\|} + \varepsilon \frac{y}{\|y\|} \right|^2 \\ &= \left\langle \frac{x}{\|x\|} + \varepsilon \frac{y}{\|y\|}, \frac{x}{\|x\|} + \varepsilon \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \\ &= 2 + 2\varepsilon \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \end{aligned}$$

donc :

$$-\|x\| \|y\| \leq \varepsilon \langle x, y \rangle$$

c'est-à-dire :

$$-\|x\| \|y\| \leq \langle x, y \rangle \text{ et } -\|x\| \|y\| \leq -\langle x, y \rangle$$

soit encore :

$$-\|x\| \|y\| \leq \langle x, y \rangle \text{ et } \|x\| \|y\| \geq \langle x, y \rangle$$

ce qui fournit l'inégalité annoncée, ainsi que le cas d'égalité.

□

Remarque. Cette démonstration est assez peu connue des correcteurs et interrogateurs des concours, et il n'est pas recommandé de l'utiliser au concours : on lui préférera la version traditionnelle.

Exercices et résultats classiques à connaître

Calcul d'une borne inf avec un projeté orthogonal

310.1

On note $E = \mathbb{R}[X]$.

- (a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$$

- (b) Calculer, pour $p \in \mathbb{N}$, $I_p = \int_0^{+\infty} t^p e^{-t} dt$.

- (c) On considère k entier ≥ 2 . Calculer :

$$\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (t^k - at - b)^2 e^{-t} dt$$

La matrice de Gramm

310.2

Soit E un espace préhilbertien réel. Pour (u_1, \dots, u_p) famille de vecteurs de E , on note $G(u_1, \dots, u_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont le coefficient d'indice i, j est $\langle u_i | u_j \rangle$.

- (a) Montrer que la famille (u_1, \dots, u_p) est liée si et seulement si $\det G(u_1, \dots, u_p) = 0$

- (b) Montrer que, si (e_1, \dots, e_p) est une base d'un sous-espace vectoriel F de E , alors, pour tout $x \in E$:

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(e_1, \dots, e_p, x)}{\det G(e_1, \dots, e_p)}}$$

Un orthonormalisation

310.3

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$, où $n \geq 1$.

- (a) Vérifier que :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x) dx$$

définit un produit scalaire sur E .

On note (e_0, e_1, \dots, e_n) la base obtenue par orthonormalisation de la base $(1, X, \dots, X^n)$.

- (b) Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, on définit :

$$f_k(X) = \frac{d^k}{dX^k} ((X^2 - 1)^k)$$

b1. Déterminer le degré de f_k .

b2. Calculer $\langle X^i, f_k \rangle$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$ et $i \in \{0, \dots, k-1\}$.

b3. En déduire que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, il existe un λ_k tel que $f_k = \lambda_k e_k$.

Exercices du CCINP

310.4

 **39.13**

On note ℓ^2 l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum x_n^2$ converge.

1. (a) Démontrer que, pour $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, la série $\sum x_n y_n$ converge.

On pose alors $(x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

- (b) Démontrer que ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites de nombres réels.

Dans la suite de l'exercice, on admet que $(|)$ est un produit scalaire dans ℓ^2 . On suppose que ℓ^2 est muni de ce produit scalaire et de la norme euclidienne associée, notée $\|\cdot\|$.

3. On considère l'ensemble F des suites réelles presque nulles c'est-à-dire l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini de termes.

Déterminer F^\perp (au sens de $(|)$).

Comparer F et $(F^\perp)^\perp$.

310.5

 **76**

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(|)$.

On pose $\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

- (b) Dans quel cas a-t-on égalité ? Le démontrer.

2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \forall x \in [a, b] f(x) > 0\}$.

Prouver que l'ensemble $\left\{ \int_a^b f(t) dt \times \int_a^b \frac{1}{f(t)} dt, f \in E \right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m .

310.6

 **77**

Soit E un espace euclidien.

1. Soit A un sous-espace vectoriel de E .
Démontrer que $(A^\perp)^\perp = A$.
2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .
 - (a) Démontrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
 - (b) Démontrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

310.7

 **79.23**

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

2. Soit E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .
On pose : $\forall (f, g) \in E^2, (f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.
Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .
3. Majorer $\int_0^1 \sqrt{x} e^{-x} dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

310.8

 **80**

Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

1. Démontrer que $(f | g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$ définit un produit scalaire sur E .
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

310.9

 **81**

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \text{tr}(A^T A')$, où $\text{tr}(A^T A')$ désigne la trace du produit de la matrice A^T par la matrice A' .

On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que \mathcal{F} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de \mathcal{F}^\perp .
3. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur \mathcal{F}^\perp .
4. Calculer la distance de J à \mathcal{F} .

310.10

 82

Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$.

On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $\langle A | A' \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$.

1. Démontrer que $\langle . | . \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

310.11

 92

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n .

On pose : $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ où tr désigne la trace et A^T désigne la transposée de la matrice A .

1. Prouver que \langle , \rangle est un produit scalaire sur E .
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de E .
Une matrice A de E est dite antisymétrique lorsque $A^T = -A$.
On note $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E .
On admet que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de E .

(a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

(b) Prouver que $A_n(\mathbb{R})^\perp = S_n(\mathbb{R})$.

3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E .
Déterminer F^\perp .

Exercices

310.12

Soit E un espace euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Montrer que, pour $f \in \mathcal{L}(E)$:

$$\text{tr}(f) = \sum_{k=1}^n \langle e_k, f(e_k) \rangle$$

310.13

Montrer que, pour $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$:

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq \sqrt{n} \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

310.14

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, alors on pose $\langle A, A' \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$.

- (a) Démontrer que \langle , \rangle est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- (b) Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

310.15

\mathbb{R}^4 est muni de sa structure euclidienne canonique. Soit F le sous-espace vectoriel défini par :

$$F = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

Déterminer la matrice, dans la base canonique, de la projection orthogonale sur F .

310.16

(a) Montrer que le système $\begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ x + 3y + z - t = 0 \end{cases}$ définit un plan P de \mathbb{R}^4 .

(b) Construire une base orthonormale $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de P .

(c) Écrire la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^4 de la projection orthogonale sur P , puis de la symétrie orthogonale par rapport à P .

(d) Soit $v = (1, 1, 1, -1)$: calculer $d(v, P)$.

310.17

Montrer que :

$$(P, Q) \mapsto \int_0^2 (2-t)P(t)Q(t) dt$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$ et en déterminer une base orthonormée.

310.18

Sur $\mathbb{R}_2[X]$, on définit :

$$\langle P, Q \rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$$

- (a) Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
- (b) Trouver une base orthonormale (P_0, P_1, P_2) telle que $\deg(P_k) = k$.
- (c) Déterminer la projection orthogonale de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.

Petits problèmes d'entraînement

310.19 ↗

On note $E = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_n$ telles que la série $\sum u_n^2$ converge. Pour $u, v \in E$, on pose :

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

(a) Montrer que E est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

(b) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E .

On note F le sous-espace des suites nulles à partir d'un certain rang, et $v \in E \setminus F$.

(c) Donner un exemple de suite $v = (v_n)_n$.

(d) Déterminer F^\perp . Est-ce que F et F^\perp sont supplémentaires ?

(e) On pose $G = \text{Vect}(v)$. Comparer $F^\perp + G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp$.

310.20 ↗

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique.

(a) Montrer que $\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Calculer la distance $d(A, \mathcal{S}_3(\mathbb{R}))$, où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

310.21

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E euclidien de dimension n . On considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires tels que :

$$i \neq j \implies \|e_i - e_j\| = 1$$

Montrer que \mathcal{B} est une base de E .

310.22

On note \mathcal{B} l'ensemble des suites réelles bornées, et F le sous-espace vectoriel de \mathcal{B} formé des suites nulles à partir d'un certain rang.

(a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur \mathcal{B} en posant :

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n v_n}{2^n}$$

(b) Déterminer F^\perp .(c) Est-ce que $F^{\perp\perp} = F$?**310.23**Soit A une partie de E espace préhilbertien.(a) Montrer que A^\perp est une partie fermée.(b) Montrer que A et \overline{A} ont le même orthogonal.**310.24**Soit E un espace vectoriel normé réel, et S la sphère de centre 0 et de rayon 1, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de norme 1.(a) Est-il vrai que, pour $x, y \in S$ avec $x \neq y$:

$$\forall \lambda \in]0, 1[, (1 - \lambda)x + \lambda y \notin S ?$$

(b) Et si E est un espace préhilbertien, et que la norme est la norme euclidienne?**310.25**Soit E euclidien, a, b deux vecteurs unitaires de E . On définit f l'endomorphisme de E :

$$f : x \mapsto x - \langle a, x \rangle b$$

(a) À quelle condition f est bijectif?(b) À quelle condition f est diagonalisable?**310.26**Soit E euclidien de dimension $n \geq 2$, a, b deux vecteurs unitaires de E . On définit f par :

$$f : x \mapsto \langle a, x \rangle \langle b, x \rangle$$

Déterminer le maximum et le minimum de f sur la sphère unité de E .**310.27**Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.(a) Comparer $\text{Ker}(A)$ et $\text{Ker}(A^\top A)$.(b) Comparer $\text{Im}(A)$ et $\text{Im}(AA^\top)$.**310.28**Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0$.(a) Montrer que $\text{Ker}(A^\top + A) = \text{Ker}(A) \cap \text{Ker}(A^\top)$.

(b) En déduire :

$$A^\top + A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \iff \text{Im}(A) = \text{Ker}(A)$$

310.29Soit E un espace préhilbertien réel, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On s'intéresse à p projecteur de E .(a) Montrer que, si p est un projecteur orthogonal, alors :

$$\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$$

(b) Réciproquement, on suppose que, pour tout $x \in E$, $\|p(x)\| \leq \|x\|$.b1. Pour $x \in \text{Im } p$, $y \in \text{Ker } p$ et $t \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$0 \leq 2t\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

b2. En déduire que le projecteur p est orthogonal.**310.30**Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire défini par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$$

On note q_n la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_n[X]$, $P_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = X^n - q_{n-1}(X^n)$.(a) Justifier que $(P_n)_n$ est une famille libre.(b) Montrer que, pour tout $n, k \in \mathbb{N}$:

$$k \neq n \implies \langle P_k, P_n \rangle = 0$$

- (c) Soit $n \geq 2$. Montrer que $P_n - X P_{n-1}$ est combinaison linéaire de P_{n-1} et P_{n-2} .

310.31

Pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, calculer :

$$m_k = \inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} (t^k - at - b)^2 e^{-t} dt$$

310.32

E est un espace euclidien de dimension n pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0$$

Montrer que $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont supplémentaires orthogonaux et que le rang de u est pair.

310.33

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$. Montrer que $\det(A) > 0$.

310.34

Soit E un espace préhilbertien, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée. On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et e_1, \dots, e_n des vecteurs unitaires tels que :

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle^2$$

Est-ce que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est nécessairement une base orthonormale de E ?

310.35

On munit l'espace $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $p_n : t \mapsto t^n$ et \mathcal{P} l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[a, b]$.

- (a) Justifier que la famille $(p_n)_n$ est totale, c'est-à-dire qu'elle engendre un espace vectoriel dense dans E .

- (b) Déterminer l'orthogonal de \mathcal{P} .

310.36

Soit E euclidien de dimension $n \geq 1$ et x_1, \dots, x_{n+2} des vecteurs de E . Montrer qu'il est impossible d'avoir :

$$\forall i, j, \langle x_i, x_j \rangle < 0$$

310.37

Soit p un projecteur d'un espace euclidien E . On suppose que :

$$\forall x \in E, \langle p(x), x \rangle \geq 0$$

Montrer que p est un projecteur orthogonal.

310.38

On note E l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. On définit sur $E \times E$ l'application φ par :

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 (fg + f'g') dt$$

On définit les deux ensembles :

$$\begin{aligned} V &= \{f \in E \text{ t.q. } f(0) = f(1) = 0\} \\ W &= \{f \in E \text{ t.q. } f'' \text{ existe et } f'' = f\} \end{aligned}$$

- (a) Montrer que φ est bien un produit scalaire sur E .
- (b) Montrer que W est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, et en donner une base.
- (c) Montrer que V est le supplémentaire orthogonal de W dans E . Donner l'expression de la projection orthogonale sur W .
- (d) Pour $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, on définit :

$$E_{\alpha, \beta} = \{f \in E \text{ t.q. } f(0) = \alpha, f(1) = \beta\}$$

$$\text{Calculer } \inf_{f \in E_{\alpha, \beta}} \left(\int_0^1 (f^2 + f'^2) dt \right).$$