

Analyse asymptotique

Je me souviens	2
Exercices	3
Exercices et résultats classiques à connaître	3
Un équivalent par encadrement	3
Le DL de $\tan(x)$	3
Exercices du CCINP	4
Exercices	4
Petits problèmes d'entraînement	5

Je me souviens

1. C'est quoi, l'analyse asymptotique ?
2. Ça veut dire quoi, négligeable ?
3. C'est quoi, un $o(1)$?
4. Ça veut dire quoi, dominé ?
5. C'est quoi, un $O(1)$?
6. On peut faire des opérations sur les petit o ? sur les grand O ?
7. Ça veut dire quoi, équivalent ?
8. Est-ce que c'est une relation d'équivalence ?
9. On peut faire des opérations sur les équivalents ?
10. Y a-t-il des équivalents usuels ?
11. À quoi servent les équivalents ?
12. Qu'est ce qui se cache derrière l'argument souvent avancé de « croissances comparées » ?
13. C'est quoi, un développement limité en 0 ?
14. Est-ce qu'un DL donne un équivalent ? un équivalent donne un DL ?
15. Quels sont les DL que l'on doit connaître ?
16. Opérations sur les DL ?
17. C'est quoi, un développement limité en a ?
18. C'est quoi, un développement asymptotique ?
19. Au voisinage de $n \rightarrow +\infty$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim ?$
20. Donner un exemple de suites telles que $u_n \sim v_n$ mais $e^{u_n} \not\sim e^{v_n}$.
21. Est-ce qu'on a toujours $u_{n+1} \sim n$?

Exercices et résultats classiques à connaître**Un équivalent par encadrement****61.1**

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle décroissante telle que :

$$u_{n+1} + u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

Déterminer un équivalent simple de u_n .

Le DL de $\tan(x)$ **61.2**

(a) Former le développement limité à l'ordre 3 en 0 de :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

(b) Prolonger ce développement limité à l'ordre 5 en exploitant :

$$\tan(\operatorname{Arctan} x) = x$$

(c) Prolonger ce développement limité à l'ordre 7 en exploitant :

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$$

Exercices du CCINP

61.3
 **7.1**

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang.

- (a) Prouver que si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

61.4
 **46.1**

On considère la série : $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$.

- (a) Prouver que, au voisinage de $+\infty$:

$$\pi\sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

où α est un réel que l'on déterminera.

Exercices

61.5

Écrire plus simplement les expressions suivantes :

- (a) $o(2n) - 2o((-1)^n n)$
 (b) $n \ln n + o(n+1) + o(n^2)$
 (c) $2o(n)O(n) - nO(n)$.

61.6

Calculer la limite des expressions suivantes ($\alpha \in \mathbb{R}$) :

- (a) $n\left(1 + \frac{1}{n}\right)^8 - 1$

(b) $(n+1)(n^{\frac{1}{n}} - 1)$

(c) $\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n$

61.7

Déterminer un équivalent simple de :

(a) $\ln n + 2n - 1$

(b) $\frac{(1 + \ln n)(3n^2 + 1)}{\sqrt{n^2 + 2n}}$

(c) $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$

(d) $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$

(e) $\ln(2n^3 + 1)$

(f) $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

(g) $n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

(h) $\ln(n+1) - \ln(n-1)$

(i) $(n+1)^n$

61.8

Déterminer un équivalent de :

(a) $\ln(\operatorname{ch}(x))$ en 0

(b) $\ln(1+x) - x$ en 0

(c) $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

(d) $\ln\left(\frac{n - \ln n}{n + \ln n}\right)$

Déterminer la limite de :

(e) $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ pour $x \in \mathbb{R}$ fixé

61.9

- (a) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\text{Arctan}(e^x)$.
- (b) Quelle est l'allure de la courbe correspondante au voisinage du point d'abscisse 0 ?

61.10

Calculer la limite de :

- (a) $\frac{\ln x}{x-1}$ en 1
- (b) $\frac{e^{2x} - e^x}{x}$ en 0
- (c) $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$ en 0
- (d) $\left(\cos \frac{1}{x}\right)^{x^2}$ en $+\infty$
- (e) $\left(3.2^{\frac{1}{x}} - 2.3^{\frac{1}{x}}\right)^x$ en $+\infty$

61.11

Déterminer le développement asymptotique à trois termes des expressions suivantes :

(a) $\sqrt{n^2 + 1}$

(b) $\sqrt[n]{n}$

(c) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

61.12

- (a) Déterminer le développement asymptotique à trois termes en $+\infty$ de $x \text{Arctan}(x)$.
- (b) Quelle est l'allure de la courbe correspondante, au voisinage de $x \rightarrow +\infty$?

Petits problèmes d'entraînement

61.13

On considère l'application définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = 1 + x^2 \sin \frac{1}{x}$$

- (a) Montrer que f se prolonge en une fonction dérivable sur \mathbb{R} .
- (b) Est-ce que la dérivée de f admet un développement limité en 0 ?

61.14

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , avec $f(1) \neq 0$. On pose :

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$$

Déterminer un équivalent simple de I_n .