

# Calcul différentiel

<b>Cours</b>	<b>2</b>
1 Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles . . . . .	2
1.1 Dérivée selon un vecteur . . . . .	2
1.2 Dérivées partielles dans une base . . . . .	2
2 Différentielle . . . . .	3
2.1 Notation $o(h)$ . . . . .	3
2.2 Différentielle d'une application en un point . . . . .	3
2.3 Différentielle d'une application sur un ouvert . . . . .	4
2.4 Cas où $E = \mathbb{R}$ : fonctions d'une variable réelle . . . . .	5
2.5 Cas où $E$ est euclidien . . . . .	5
3 Applications de classe $\mathcal{C}^1$ . . . . .	5
4 Opérations sur les applications différentiables, sur les applications $\mathcal{C}^1$ . . . . .	6
4.1 Linéarité . . . . .	6
4.2 Composée avec une application bilinéaire ou multilinéaire . . . . .	6
4.3 Composition d'applications différentiables . . . . .	7
4.4 Dérivée le long d'un arc . . . . .	7
4.5 Calcul des dérivées partielles d'une fonction composée . . . . .	8
4.6 Caractérisation des applications constantes . . . . .	8
5 Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie . . . . .	8
6 Annexes . . . . .	10
6.1 Annexe : caractérisation par des dérivées partielles des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ . . . . .	10
6.2 Annexe : caractérisation des fonctions de plusieurs variables qui sont constantes . . . . .	10
6.3 Annexe : espace tangent à une partie définie par une équation implicite . . . . .	11
<b>Exercices</b>	<b>11</b>
Exercices et résultats classiques à connaître . . . . .	11
Dérivées partielles en coordonnées polaire . . . . .	11
Un calcul de différentielle . . . . .	11
Un exemple d'équation aux dérivées partielles . . . . .	11
Une détermination d'espace tangent . . . . .	11
Exercices du CCINP . . . . .	12
Exercices . . . . .	12
Petits problèmes d'entraînement . . . . .	13

Sauf mention contraire,  $E$  et  $F$  désignent des espaces vectoriels normés de dimension finie sur  $\mathbb{R}$ .

## 1 Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

### 1.1 Dérivée selon un vecteur

**Définition.** Soit  $f : E \rightarrow F$  une fonction définie sur un ouvert  $U$ . Soit  $a \in U$  et  $v \in E$ . On dit que  $f$  **admet une dérivée en  $a$  selon  $v$**  lorsque :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow F \\ t &\mapsto f(a + tv) \end{aligned}$$

est dérivable en 0.

Dans ce cas, on note  $D_v f(a)$  la dérivée en 0 de cette application, et on l'appelle **dérivée de  $f$  en  $a$  selon  $v$** .

**Remarque.**

- Comme  $U$  est ouvert, c'est un voisinage de  $a$ , et donc il existe  $\delta > 0$  tel que,  $\forall t \in [-\delta, \delta]$ ,  $a + tv \in U$  : la fonction  $t \mapsto f(a + tv)$  est définie au voisinage de 0.
- $D_v f(a)$  est un élément de  $F$ .

**Exemple.** On considère :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Montrer que  $f$  admet une dérivée en  $(0, 0)$  selon tout vecteur  $v = (\alpha, \beta)$ . La fonction  $f$  est-elle continue en  $(0, 0)$  ?

### 1.2 Dérivées partielles dans une base

**Définition.** On suppose  $E$  muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ . On considère  $f : E \rightarrow F$  une fonction définie sur  $U$  ouvert de  $E$ , et  $a \in U$ .

Si  $f$  est dérivable en  $a$  selon  $e_i$  pour  $i \in \{1, \dots, p\}$ , on dit que  $f$  **admet des dérivées partielles dans la base  $\mathcal{B}$** , et on note :

$$\partial_i f(a) = D_{e_i} f(a)$$

**Remarque.**

- En notant  $(a_1, \dots, a_n)$  les coordonnées dans  $\mathcal{B}$  de  $a$ ,  $\partial_i f(a)$  est, si elle existe, la dérivée en  $a_i$  de :

$$t \mapsto f(a_1 e_1 + \dots + t e_i + \dots + a_n e_n)$$

- On utilise aussi la notation  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  pour désigner  $\partial_i f(a)$ .
- Lorsqu'une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  est fixée, on identifie  $f(x)$  et  $f(x_1, \dots, x_n)$ , où  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les coordonnées de  $x$  dans  $\mathcal{B}$ .
- Souvent,  $E = \mathbb{R}^2$  (ou  $E = \mathbb{R}^3$ ) et la base  $\mathcal{B}$  est canonique. On note alors  $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$  et les dérivées partielles, lorsqu'elles existent,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

**Exemple.** On considère :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned}$$

Montrer que  $f$  admet des dérivées partielles en tout point, et les calculer.

**Exemple.** Calculer les trois dérivées partielles dans la base canonique, en un point quelconque, de l'application :

$$f : (r, \varphi, \theta) \mapsto (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta)$$

## 2 Différentielle

### 2.1 Notation $o(h)$

**Définition.** Soit  $\alpha : E \rightarrow F$  définie sur un voisinage de  $0_E$ . On dit que :

$$\alpha(h) = o_{h \rightarrow 0_E}(h)$$

lorsque  $\|\alpha(h)\|_F = o_{h \rightarrow 0_E}(\|h\|_E)$ , c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\|h\|_E} \alpha(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0_E} 0_F$$

### 2.2 Différentielle d'une application en un point

**Rappel.** Pour  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un intervalle ouvert  $I$ , et  $a \in I$ , on dit que  $f$  est dérivable en  $a$  si et seulement s'il existe  $\ell \in \mathbb{R}$  telle que :

$$f(a+h) = f(a) + \ell h + o_{h \rightarrow 0}(h)$$

et l'application  $h \mapsto \ell h$  est linéaire. C'est cette application linéaire qui permet la généralisation de la dérivation aux fonctions de variable vectorielle.

**Définition.** Soit  $f : E \rightarrow F$  une fonction définie sur un ouvert  $U$ , et  $a \in U$ . On dit que  $f$  est différentiable en  $a$  lorsqu'il existe une application linéaire  $\ell \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que :

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o_{h \rightarrow 0_E}(h)$$

L'application  $\ell$  est alors unique, et appelée **différentielle de  $f$  en  $a$** , notée  $df(a)$ .

**Remarque.**

- La différentielle de  $f$  en  $a$  s'appelle aussi **application linéaire tangente à  $f$  en  $a$** .
- La différentiabilité de  $f$  en  $a$ , c'est l'existence d'un **développement limité à l'ordre 1 en  $a$**  :

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + o_{h \rightarrow 0_E}(h)$$

où  $df(a) \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- On note souvent  $df(a) \cdot h$  pour désigner  $(df(a))(h)$ .

**Exemple.** Déterminer la différentielle en  $a = (2, 1)$  de :

$$f : (x, y) \mapsto x^2 y^3$$

**Exemple.** Calculer la différentielle en  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X &\mapsto X^2 \end{aligned}$$

**Exemple.** Soit  $E$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{S}(E)$  un endomorphisme autoadjoint de  $E$ . Montrer que :

$$f : x \mapsto \langle x, u(x) \rangle$$

est différentiable en tout  $a \in E$ , et calculer sa différentielle.

**Proposition.** Soit  $f : E \rightarrow F$  définie sur  $U$  ouvert.

- Si  $f$  est constante, alors elle est différentiable en tout point de  $U$  et :

$$\forall a \in U, df(a) = 0_{\mathcal{L}(E, F)}$$

- Si  $f$  est (la restriction d'une application) linéaire, alors elle est différentiable en tout point de  $U$  et :

$$\forall a \in U, df(a) = f$$

**Proposition.** Si  $f$  est différentiable en  $a$ , alors  $f$  est continue en  $a$ .

**Proposition.** Si  $f$  est différentiable en  $a$ , alors  $f$  admet des dérivées en  $a$  selon tout vecteur et :

$$D_v f(a) = df(a) \cdot v$$

**Corollaire.** Si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et si  $f$  est différentiable en  $a$ , alors  $f$  admet des dérivées partielles en  $a$  dans la base  $\mathcal{B}$  et :

$$\forall h \in E, df(a) \cdot h = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$$

où  $(h_1, \dots, h_n)$  sont les coordonnées de  $h$  dans  $\mathcal{B}$ .

**Définition.** Dans le cas particulier où  $E = \mathbb{R}^n$  et  $F = \mathbb{R}^m$ , lorsque  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est différentiable en  $a$ , on appelle **matrice jacobienne de  $f$  en  $a$**  la matrice de  $df(a)$  dans les bases canoniques :

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$$

où  $f_1, \dots, f_p$  sont les fonction coordonnées de  $f$ .

## 2.3 Différentielle d'une application sur un ouvert

**Définition.** Soit  $f : E \rightarrow F$  une fonction définie sur un ouvert  $U$ . On dit que  $f$  est **différentiable sur  $U$**  lorsqu'elle est différentiable en tout point  $a \in U$ . On appelle **différentielle de  $f$  sur  $U$**  l'application :

$$\begin{aligned} df &\rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ a &\mapsto df(a) \end{aligned}$$

**Remarque.** Les physiciens écrivent :

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

et ils ont bien raison.

En effet, en notant  $x_i : x \mapsto x_i$  l'application qui, à un vecteur  $x$  de  $E$ , associe sa coordonnée  $x_i$  dans la base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ , on définit une application linéaire. On a donc :

$$\forall a \in U, dx_i(a) = x_i$$

et donc, pour tout  $h \in E$  :

$$dx_i(a) \cdot h = x_i(h) = h_i$$

Finalement, pour tout  $a \in U$ , on a les égalités dans  $F$  :

$$\begin{aligned} \forall h \in E, df(a) \cdot h &= \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i(a) \cdot h \end{aligned}$$

donc, dans  $\mathcal{L}(E, F)$  :

$$\forall a \in U, df(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i(a)$$

ce qui peut encore s'écrire, dans  $(\mathcal{L}(E, F))^U$  :

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

## 2.4 Cas où $E = \mathbb{R}$ : fonctions d'une variable réelle

**Proposition.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow F$  une fonction d'une variable réelle, définie sur un intervalle ouvert  $U$ , et  $a \in U$ .  
 $f$  est différentiable en  $a$  si et seulement si  $f$  est dérivable en  $a$ . Dans ce cas :

$$f'(a) = df(a) \cdot 1$$

**Remarque.** Ainsi, l'application linéaire tangente de  $f$  en  $a$  est l'application :

$$h \mapsto f'(a)h$$

## 2.5 Cas où $E$ est euclidien

**Définition.** Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction numérique définie sur un ouvert  $U$ , et  $a \in U$ . On suppose que  $E$  est un espace euclidien, et que  $f$  est différentiable en  $a$ .

Alors il existe un unique vecteur, appelé **gradient de  $f$  en  $a$** , et noté  $\nabla f(a)$ , tel que :

$$\forall h \in E, df(a) \cdot h = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

**Remarque.** Ainsi, lorsque  $f$  est différentiable en  $a$  :

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + o_{h \rightarrow 0}(h)$$

**Proposition.** Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormale de  $E$ . Alors :

$$\nabla f(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) e_k$$

En particulier, lorsque  $E = \mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{B}$  est la base canonique :

$$\nabla f(a) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right)$$

**Interprétation géométrique.** Si  $\nabla f(a) \neq 0$ , alors  $\nabla f(a)$  est positivement colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de  $f$  en  $a$  est maximale.

**Remarque.** Bref,  $\nabla f(a)$  indique la direction de plus grande variation de  $f$  : le vecteur unitaire  $v$  pour lequel  $D_v f(a)$  est maximale est :

$$v = \frac{1}{\|\nabla f(a)\|} \nabla f(a)$$

## 3 Applications de classe $\mathcal{C}^1$

**Définition.** Soit  $f : E \rightarrow F$  une fonction définie sur un ouvert  $U$ . On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  lorsqu'elle est différentiable en tout point de  $U$ , et que :

$$\begin{aligned} df : U &\rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ a &\mapsto df(a) \end{aligned}$$

est continue sur  $U$ .

**Remarque.** Comme  $\mathcal{L}(E, F)$  est de dimension finie, toutes les normes y sont équivalentes.

**Théorème.**

Soit  $f : E \rightarrow F$  une fonction définie sur un ouvert  $U$ , et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  si et seulement si les dérivées partielles de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  existent et sont continues sur  $U$ .

Dans ce cas :

$$df(a) \cdot h = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

**Remarque.** Ce résultat est indépendant du choix de la base.

**Exemple.** Montrer que :

$$h : (r, \varphi, \theta) \mapsto (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta)$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^3$ .

**Exemple.** Montrer que :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , mais pas sur  $\mathbb{R}^2$ .

## 4 Opérations sur les applications différentiables, sur les applications $\mathcal{C}^1$

### 4.1 Linéarité

**Proposition.** Soit  $f, g : E \rightarrow F$  deux fonctions définies sur  $U$  ouvert,  $a \in U$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Si  $f$  et  $g$  sont différentiables en  $a$ , alors  $\lambda f + \mu g$  aussi et :

$$d(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda df(a) + \mu dg(a)$$

**Proposition.** Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ , alors  $\lambda f + \mu g$  l'est aussi.

**Proposition.** Si  $f$  et  $g$  admettent des dérivées en  $a$  selon un vecteur  $v$ , alors  $\lambda f + \mu g$  aussi et :

$$D_v(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda D_v f(a) + \mu D_v g(a)$$

**Proposition.** Si  $E$  est muni d'une base  $\mathcal{B}$ , si  $f$  et  $g$  admettent des dérivées partielles en  $a$  alors  $\lambda f + \mu g$  aussi et :

$$\forall i, \partial_i(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \partial_i f(a) + \mu \partial_i g(a)$$

### 4.2 Composée avec une application bilinéaire ou multilinéaire

**Proposition.** Soit  $f : E \rightarrow F$  et  $g : E \rightarrow G$  deux fonctions définies sur  $U$  ouvert,  $a \in U$ . Soit  $B : F \times G \rightarrow H$  une application bilinéaire. Si  $f$  et  $g$  sont différentiables en  $a$ , alors  $B(f, g) : x \mapsto B(f(x), g(x))$  aussi et :

$$\forall h \in E, d(B(f, g))(a) \cdot h = B(df(a) \cdot h, g(a)) + B(f(a), dg(a) \cdot h)$$

**Proposition.** Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ , alors  $B(f, g)$  l'est aussi.

**Généralisation.** Soit  $f_1, \dots, f_p$  des fonctions définies sur  $U$  ouvert de  $E$ , à valeurs dans  $F_1, \dots, F_p$  respectivement. Soit  $a \in U$ . Soit  $M : F_1 \times \dots \times F_p \rightarrow G$  une application  $p$ -linéaire. Si  $f_1, \dots, f_p$  sont différentiables en  $a$ , alors  $M(f_1, \dots, f_p) : x \mapsto M(f_1(x), \dots, f_p(x))$  aussi et, pour tout  $h \in E$  :

$$d(M(f_1, \dots, f_p))(a) \cdot h = M(df_1(a) \cdot h, f_2(a), \dots, f_p(a)) + M(f_1(a), df_2(a) \cdot h, \dots, f_p(a)) \\ + \dots + M(f_1(a), f_2(a), \dots, df_p(a) \cdot h)$$

**Proposition.** Si les  $f_k$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ , alors  $M(f_1, \dots, f_p)$  l'est aussi.

### 4.3 Composition d'applications différentiables

**Règle de la chaîne.** Soit  $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$  deux applications, avec  $f$  définie sur  $U$  ouvert de  $E$ ,  $g$  définie sur  $V$  ouvert de  $F$  et  $f$  à valeurs dans  $V$ .

Soit  $a \in U$ . Si  $f$  est différentiable en  $a$  et  $g$  différentiable en  $f(a)$ , alors  $g \circ f$  est différentiable en  $a$  et :

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$$

**Proposition.** Si  $f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  et  $V$  respectivement, alors  $g \circ f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ .

### 4.4 Dérivée le long d'un arc

**Dérivée le long d'un arc.** Soit  $\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} E \xrightarrow{f} F$  deux applications, avec  $\gamma$  un arc défini sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f$  définie sur un ouvert  $U$  et  $\gamma$  à valeurs dans  $U$ . Soit  $t \in I$ . Si  $\gamma$  est dérivable en  $t$  et  $f$  différentiable en  $\gamma(t)$ , alors  $f \circ \gamma$  est dérivable en  $t$  et :

$$(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

Dans le cas où  $E$  est muni d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ , et que  $x_1, \dots, x_n$  désignent les applications coordonnées de  $\gamma$  dans cette base, cela s'écrit :

$$(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{k=1}^n x'_k(t) \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

**Proposition.** Si  $\gamma$  et  $f$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et  $U$  respectivement, alors  $f \circ \gamma$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .

**Corollaire.** Soit  $[0, 1] \xrightarrow{\gamma} E \xrightarrow{f} F$  deux applications, avec  $\gamma$  un arc défini sur un intervalle  $[0, 1]$ ,  $f$  définie sur un ouvert  $U$  et  $\gamma$  à valeurs dans  $U$ . Soit  $a = \gamma(0)$  et  $b = \gamma(1)$ . Si  $\gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, 1]$  et  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ , alors :

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

**Remarque.** En particulier, avec  $\gamma(t) = a + tv$  :

$$f(a + v) = f(a) + \int_0^1 df(a + tv) \cdot v dt$$

**Exemple.** Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et  $t : (u(t), v(t))$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que :

$$h : t \mapsto f(u(t), v(t))$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et exprimer  $h'(t)$  à l'aide des dérivées partielles de  $f$  et des dérivées de  $u$  et  $v$ .

**Exemple.** Soit  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^3$  et  $t : (u(t), v(t), w(t))$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Montrer que :

$$h : t \mapsto f(u(t), v(t), w(t))$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et exprimer  $h'(t)$  à l'aide des dérivées partielles de  $f$  et des dérivées de  $u$ ,  $v$  et  $w$ .

## 4.5 Calcul des dérivées partielles d'une fonction composée

**Exemple.** Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow F \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto f(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $V$ , et

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto (g_1(u, v), g_2(u, v), g_3(u, v)) \end{aligned}$$

de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  et à valeurs dans  $V$ .

On considère la composée :

$$h : (u, v) \mapsto f(g_1(u, v), g_2(u, v), g_3(u, v))$$

Justifier que  $h$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $V$ , et exprimer les dérivées partielles de  $h$  en fonction de celles de  $f$  et  $g$ .

**Exemple.** Dans le plan euclidien usuel, exprimer le gradient en coordonnées polaires.

**Exemple.** Écrire les dérivées partielles de :

$$(u_1, \dots, u_m) \mapsto f(x_1(u_1, \dots, u_m), \dots, x_m(u_1, \dots, u_m))$$

## 4.6 Caractérisation des applications constantes

**Théorème.**

Soit  $f : E \rightarrow F$  une fonction définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  ouvert, avec  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés de dimension finie. On suppose  $U$  convexe. Alors :

$$f \text{ est constante sur } U \iff df \text{ est nulle sur } U$$

**Remarque.** Le résultat est encore valable si  $U$  n'est que connexe par arcs.

## 5 Vecteurs tangents à une partie d'un espace normé de dimension finie

**Définition.** Soit  $X$  une partie non vide de  $E$  et  $x \in X$ .

On dit qu'un vecteur  $v \in E$  est **tangent à  $X$  en  $x$**  lorsqu'il existe  $\varepsilon > 0$  et un arc  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow E$ , à valeurs dans  $X$ , dérivable en 0, et tel que  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma'(0) = v$ .

On note  $T_x X$  l'ensemble des vecteurs tangents à  $X$  en  $x$ .

**Exemple.** Pour  $X$  est un ouvert de  $E$  et  $x \in X$ , déterminer  $T_x X$ .

**Exemple.** Pour  $X = a + F$  sous-espace affine de  $E$  et  $x \in X$ , déterminer  $T_x X$ .

**Exemple.** Lorsque  $E$  est euclidien,  $X = S(0, 1)$  la sphère unité et  $x \in X$ , déterminer  $T_x X$ .

**Exemple.** Pour  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $X$  graphe d'une fonction numérique  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  différentiable sur un ouvert  $U$  et  $m \in X$ , montrer que  $T_m X$  est un plan vectoriel.

**Exemple.** Déterminer l'ensemble des vecteurs tangents à  $\text{SO}_n(\mathbb{R})$  en  $I_n$ .

**Théorème.**

Soit  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction numérique de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$ . On considère l'ensemble :

$$X = \{x \in U, g(x) = 0\}$$

Si  $x \in X$  et  $dg(x) \neq 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})}$ , alors :

$$T_x X = \text{Ker}(dg(x))$$

C'est un hyperplan, comme noyau d'une forme linéaire non nulle.

*Preuve.* Démonstration hors programme. □



**Corollaire.** Lorsque  $E$  est euclidien, la différentielle peut être représentée par le gradient :

Si  $x \in X$  et  $\nabla g(x) \neq 0_E$ , alors :

$$T_x X = (\nabla g(x))^\perp$$

C'est un hyperplan, et  $\nabla g(x)$  en est un vecteur orthogonal.

**Corollaire.** Lorsque  $E = \mathbb{R}^3$  et :

$$X = \{(x, y, z), g(x, y, z) = 0\}$$

alors, pour  $m \in X$ , si  $\nabla(g)(m) \neq (0, 0, 0)$ , l'ensemble  $T_m X$  des vecteurs tangents à  $X$  en  $m$  est l'hyperplan d'équation :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(m)x + \frac{\partial g}{\partial y}(m)y + \frac{\partial g}{\partial z}(m)z = 0$$

**Exemple.** Dans  $\mathbb{R}^2$ , déterminer l'espace tangent en un point à l'ensemble :

$$X = \{(x, y), x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

**Exemple.** Dans  $\mathbb{R}^2$ , déterminer l'espace tangent en  $(0, 0)$  à l'ensemble :

$$X = \{(x, y), y^2 - 4(1 - x^2)x^2 = 0\}$$

**Exemple.** Dans  $\mathbb{R}^3$ , déterminer l'espace tangent en un point à l'ensemble :

$$X = \{(x, y, z), x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0\}$$

## 6 Annexes

### 6.1 Annexe : caractérisation par des dérivées partielles des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

**Définition.** Soit  $f : E \rightarrow F$  une fonction définie sur un ouvert  $U$ . On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  lorsqu'elle est différentiable en tout point de  $U$ , et que :

$$\begin{aligned} df : U &\rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ a &\mapsto df(a) \end{aligned}$$

est continue sur  $U$ .

**Théorème.**

Soit  $f : E \rightarrow F$  une fonction définie sur un ouvert  $U$ , et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  si et seulement si les dérivées partielles de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  existent et sont continues sur  $U$ .

Dans ce cas :

$$df(a) \cdot h = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

*Preuve.*

$\Rightarrow$  On suppose  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ . Alors les dérivées partielles existent et, pour tout  $a \in U$  et  $k \in \{1, \dots, n\}$ , on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = df(a) \cdot e_k$$

Mais  $a \mapsto df(a)$  est continue et  $\mathcal{L}(E, F) \rightarrow F$   
 $\ell \mapsto \ell(e_k)$   
 est aussi continue, car linéaire sur un espace de dimension finie. Par composition  $a \mapsto df(a) \cdot e_k$  est continue.

On a montré que les  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  existent et sont continues sur  $U$ .

$\Leftarrow$  On traite le cas où  $n = 2$ , pour simplifier l'écriture. Cela ne change pas le raisonnement. On suppose donc que  $\frac{\partial f}{\partial x_1}$  et  $\frac{\partial f}{\partial x_2}$  existent et sont continues sur  $U$ .

- Montrons que  $f$  est différentiable en tout  $a \in U$ . Soit  $a = a_1 e_1 + a_2 e_2 \in U$ . On cherche une application linéaire  $\ell$  telle que, avec  $h = h_1 e_1 + h_2 e_2$  au

voisinage de  $(0, 0)$  :

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o_{h \rightarrow 0}(h)$$

Écrivons :

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(a + h_1 e_1 + h_2 e_2) - f(a + h_1 e_1) \\ &\quad + f(a + h_1 e_1) - f(a) \\ &= h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a + h_1 e_1) + o_{h_2 \rightarrow 0}(h_2) \\ &\quad + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + o_{h_1 \rightarrow 0}(h_1) \\ &= h_2 \left( \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + o_{h_1 \rightarrow 0}(1) \right) + o_{h_2 \rightarrow 0}(h_2) \\ &\quad + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + o_{h_1 \rightarrow 0}(h_1) \\ &\quad \text{par continuité de } \frac{\partial f}{\partial x_2} \text{ en } a \\ &= h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + o_{h \rightarrow 0}(h) \\ &\quad \text{car } |h_k| \leq \|h\| \text{ pour } \|\cdot\|_\infty \text{ par exemple} \\ &= \ell(h) + o_{h \rightarrow 0}(h) \end{aligned}$$

avec  $\ell : h \mapsto h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$  linéaire. Donc  $f$  est différentiable en  $a$ , et :

$$df(a) : h \mapsto h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$$

- Montrons que  $a \mapsto df(a)$  est continue sur  $U$ . On a obtenu ci-dessus :

$$\begin{aligned} df : U &\rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ a &\mapsto \ell_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \ell_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \end{aligned}$$

où  $\ell_k : E \rightarrow \mathbb{R}$  associe à un vecteur sa  $k$ -ième coordonnée dans  $\mathcal{B}$ . La continuité sur  $U$  des  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  justifie donc celle de  $df$ . □

### 6.2 Annexe : caractérisation des fonctions de plusieurs variables qui sont constantes

**Théorème.**

Soit  $f : E \rightarrow F$  une fonction définie et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  ouvert, avec  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés de dimension finie. On suppose  $U$  convexe. Alors :

$$f \text{ est constante sur } u \iff df \text{ est nulle sur } U$$

**Remarque.** Le résultat est encore valable si  $U$  n'est que connexe par arcs.

*Preuve.*

- Si  $f$  est constante, sa différentielle est nulle.
- Supposons que  $df$  soit nulle sur  $U$ . Soit  $a, b \in U$ . Comme  $U$  est convexe, l'arc  $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$  est tracé sur  $U$  et est de classe  $\mathcal{C}^1$ . On a donc :

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \int_0^1 df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^1 0 dt \text{ car } df = 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a montré que  $f$  est constante sur  $U$ . □

### 6.3 Annexe : espace tangent à une partie définie par une équation implicite

#### Théorème.

Soit  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction numérique de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$ . On considère l'ensemble :

$$X = \{x \in U, g(x) = 0\}$$

Si  $x \in X$  et  $dg(x) \neq 0_{\mathcal{L}(E, \mathbb{R})}$ , alors :

$$T_x X = \text{Ker}(dg(x))$$

c'est un hyperplan, comme noyau d'une forme linéaire non nulle.

sion  $\square$  n'est pas accessible avec les outils à notre disposition. On peut cependant montrer l'inclusion directe. Soit  $v \in T_x X$ . Alors il existe  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow E$  un arc dérivable, à valeurs dans  $X$ , tel que  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma'(0) = v$ . Alors :

$$\forall t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[, g(\gamma(t)) = 0$$

En dérivant, on a donc :

$$\forall t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[, dg(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$$

et en particulier lorsque  $t = 0$  :

$$dg(x) \cdot v = 0$$

On a montré que  $v \in \text{Ker}(dg(x))$ , et donc :

$$T_x X \subset \text{Ker}(dg(x))$$

□

*Preuve.* Cette démonstration est hors programme, car l'inclu-

### Exercices et résultats classiques à connaître

#### Dérivées partielles en coordonnées polaire

##### 720.1

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . On définit  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Exprimer les dérivées partielles de  $f$  en fonction de celles de  $g$ .

#### Un calcul de différentielle

##### 720.2

On définit  $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$f(M) = \text{tr}(M^2)$$

Montrer que  $f$  est différentiable, et calculer sa différentielle en tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

#### Un exemple d'équation aux dérivées partielles

##### 720.3

Utiliser les coordonnées polaires pour résoudre :

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 2axy$$

#### Une détermination d'espace tangent

##### 720.4

Déterminer l'espace tangent à  $O_n(\mathbb{R})$  en  $I_n$ .

## Exercices du CCINP

720.5

INP 33.23

On pose :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  et  $f(0, 0) = 0$ .

2. Démontrer que  $f$  admet des dérivées partielles en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .

3.  $f$  est-elle de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ ? Justifier.

720.6

INP 52.3

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

On considère l'application définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

3. Dans cette question, on suppose que  $\alpha = 0$ .

(a) Justifier l'existence de  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et les calculer.

(b) Justifier l'existence de  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  et donner leur valeur.

(c)  $f$  est-elle de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ ?

720.7

INP 57.2

1. Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ .

(b) Donner la définition de «  $f$  différentiable en  $(0, 0)$  ».

2. On considère l'application définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(b) Montrer que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

720.8

INP 58

1. Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit  $a \in E$  et soit  $f : E \rightarrow F$  une application.

Donner la définition de «  $f$  différentiable en  $a$  ».

2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Soit  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

On pose :  $\forall x \in E$ ,  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ , où  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ .

On pose :  $\forall (x, y) \in E \times E$ ,  $\|(x, y)\| = \max(\|x\|_\infty, \|y\|_\infty)$ .

On admet que  $\|\cdot\|_\infty$  est une norme sur  $E$  et que  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $E \times E$ .

Soit  $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire sur  $E$ .

(a) Prouver que  $\exists C \in \mathbb{R}^+ / \forall (x, y) \in E \times E$ ,  $|B(x, y)| \leq C \|x\|_\infty \|y\|_\infty$ .

(b) Montrer que  $B$  est différentiable sur  $E \times E$  et déterminer sa différentielle en tout  $(u_0, v_0) \in E \times E$ .

## Exercices

720.9

On définit  $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par :

$$f(M) = M^3$$

Montrer que  $f$  est différentiable, et calculer sa différentielle en tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

720.10

Déterminer les fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  qui sont solution de l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + xyf(x, y) = 0$$

## Petits problèmes d'entraînement

### 720.11

Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  avec  $(x, y) \neq (0, 0)$ , on pose :

$$f(x, y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

- Montrer que l'on peut prolonger  $f$  par continuité en  $(0, 0)$ .
- Calculer les dérivées partielles de  $f$  en  $(x, y) \neq (0, 0)$ .
- Calculer les dérivées partielles de  $f$  en  $(0, 0)$ .
- La fonction  $f$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  ?
- La fonction  $f$  est-elle de classe  $\mathcal{C}^2$  ?

### 720.12

Soit  $f$  définie sur  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \neq 1\}$  par :

$$f(x, y) = \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(y) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

- Montrer que  $U$  est ouvert, et que  $f$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ .
- Montrer que, pour tout  $(x, y) \in U$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ .
- Donner, pour tout  $(x, y) \in U$ , le gradient  $\operatorname{grad} f(x, y)$ .
- En déduire les valeurs de  $f(x, y)$ .

### 720.13

On étudie l'application  $f : M \mapsto M^{-1}$  définie sur l'ouvert  $\operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$ .

- En exploitant l'égalité  $(I_n + H)(I_n - H) = I_n - H^2$ , établir que  $f$  est différentiable en  $I_n$ .
- En déduire que  $f$  est différentiable en toute matrice  $M \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$  et exprimer sa différentielle.

### 720.14

Montrer que l'application :

$$\varphi : (x, y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x + iy)^n}{(2n)!}$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

### 720.15

On donne :  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ .

On définit, pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$  :

$$\Gamma(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$$

et, pour  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et bornée, on définit, pour  $x, t$  réels :

$$Kf(x, t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \Gamma(x - y, t) dy & \text{si } t > 0 \\ f(x) & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

- Montrer que  $Kf$  est dérivable par rapport à sa première variable sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ .
- Montrer que  $\frac{\partial(Kf)}{\partial x}$  est continue sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ .
- Montrer que  $Kf$  est dérivable par rapport à sa seconde variable sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ .
- Montrer que  $\frac{\partial(Kf)}{\partial t}$  est continue sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ .
- Conclure que  $Kf$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ .

### 720.16

Déterminer les fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  qui sont solution de l'équation :

$$3 \frac{\partial f}{\partial x} - 2 \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

en effectuant le changement de variable  $\begin{cases} u = x + y \\ v = 2x + 3y \end{cases}$

### 720.17

Une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **homogène de degré**  $\alpha \in \mathbb{R}$  lorsque :

$$\forall t > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$$

On suppose ici  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

(a) Montrer que, si  $f$  est homogène de degré  $\alpha$ , alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y)$$

(b) Montrer la réciproque.

### 720.18

Soit  $X$  une partie non vide de  $E$  espace normé, et  $a$  intérieur à  $X$ . Déterminer l'espace tangent  $T_a X$  des vecteurs tangents à  $X$  en  $a$ .

### 720.19

Soit  $B$  la boule unité euclidienne fermée. Déterminer les vecteurs tangents à  $B$  en  $a$ , où  $a$  est un élément de la sphère unité.

### 720.20

Déterminer l'ensemble tangent à  $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$  en  $I_n$ .

### 720.21

(a) Déterminer l'espace tangent à  $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$  en  $I_n$ .

(b) Déterminer l'espace tangent à  $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$  en une matrice  $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ .

### 720.22

On considère l'ensemble  $X \subset \mathbb{R}^3$  d'équation  $f(x, y, z) = 0$  où :

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 - 16(x^2 + y^2)$$

(a) Y a-t-il des points de  $X$  où  $df$  s'annule ?

(b) Déterminer l'espace tangent  $T_{(3,0,0)} X$ .

(c) Décrire l'intersection de  $X$  avec le plan d'équation  $z = \lambda$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

(d) Comprendre que  $X$  est la surface obtenue en faisant tourner un cercle autour d'une droite contenue dans le plan du cercle. Quelle est la forme obtenue ?

### 720.23

On souhaite dans cet exercice déterminer la différentielle du déterminant par deux approches. On note :

$$\begin{aligned} \det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \det(A) \end{aligned}$$

**Première approche** Par les dérivées partielles.

(a) Justifier que l'application  $\det$  est différentiable, et même  $\mathcal{C}^1$ .

Pour une matrice  $A$ , on note  $a_{ij}$  son coefficient générique.

(b) En exploitant le développement par rapport à une ligne ou une colonne, exprimer à l'aide des cofacteurs de  $A$  les dérivées partielles  $\frac{\partial \det}{\partial a_{ij}}(A)$ .

(c) En déduire la différentielle de  $\det$ .

**Seconde approche** Par la définition de la différentielle.

(d) On a justifié précédemment que  $\det$  est  $\mathcal{C}^1$ .

Utiliser la dérivée selon un vecteur pour montrer que :

$$d \det(I_n) = \mathrm{tr}$$

(e) Calculer  $d \det(A)$  pour  $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ .

(f) Montrer que  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$  est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

(g) Conclure :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), d \det(A) : H \mapsto \mathrm{tr}(\mathrm{Com}(A)^\top H)$$

**720.24**

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :

$$u_n : (x, y) \mapsto \frac{\cos(ny)}{\sqrt{n}} x^n$$

On note  $D$  l'ensemble des  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tels que la série  $\sum u_n(x, y)$  converge, et on note  $f(x, y)$  sa somme.

- (a) Déterminer  $D$ .
- (b) Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'intérieur  $\overset{\circ}{D}$  de  $D$ .

**720.25**

Soit  $E$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{S}(E)$  un endomorphisme autoadjoint de  $E$ .

- (a) Montrer que :

$$f : x \mapsto \langle u(x), x \rangle$$

est différentiable et calculer sa différentielle en tout point de  $E$ .

- (b) Montrer que l'application :

$$F : x \mapsto \frac{\langle u(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

est différentiable sur  $E \setminus \{0_E\}$ , et que sa différentielle vérifie :

$$\forall a \in E \setminus \{0_E\}, \mathrm{d}F(a) = 0 \iff a \text{ est vecteur propre de } u$$

**720.26**

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . On suppose qu'en tout point la matrice de la différentielle de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  est antisymétrique.

Montrer qu'il existe  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  une matrice antisymétrique et  $b \in \mathbb{R}^n$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x) = Ax + b$$

**720.27**

- (a) Montrer que  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$  est ouvert dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- (b) Montrer que :

$$\begin{array}{ccc} f : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & X^{-1} \end{array}$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$ , et calculer sa différentielle.