# Fonctions usuelles

# Je me souviens

## 1.1 Puissances

1. Que sont les fonctions puissances ?
2. Quel est le domaine de définition de ces fonctions ? Comment sont-elles définies ?
3. Sont-elles dérivables ? Où ça ? Que sont leurs dérivées ? À quoi ressemblent leurs graphes ?

## 1.2 Exponentielles et logarithmes

4. Que sont les fonctions exponentielles ? logarithmes ?
5. Quel est le domaine de définition de ces fonctions ? Comment sont-elles définies ?
6. Sont-elles dérivables ? Où ça ? Que sont leurs dérivées ? À quoi ressemblent leurs graphes ?
7. Comment utiliser le cercle trigonométrique ?

## 1.3 Trigonométrie hyperbolique

8. Que sont les fonctions hyperboliques ?
9. Quel est le domaine de définition de ces fonctions ? Comment sont-elles définies ?
10. Sont-elles dérivables ? Où ça ? Que sont leurs dérivées ? À quoi ressemblent leurs graphes ?
11. Quel est le comportement au voisinage de l'infini ?
12. Il y a un formulaire de trigonométrie hyperbolique ?

## 1.4 Trigonométrie circulaire

13. Quelles sont les fonctions de trigonométrie circulaire ?
14. Quel est le domaine de définition de ces fonctions ? Ont-elles des propriétés remarquables ?
15. Sont-elles dérivables ? Où ça ? Que sont leurs dérivées ? À quoi ressemblent leurs graphes ?
16. Comment utiliser le cercle trigonométrique ?
17. Il y a un formulaire de trigonométrie circulaire ?

## 1.5 Trigonométrie circulaire réciproque

18. Quelles sont les fonctions de trigonométrie circulaire réciproques ?
19. Quel est le domaine de définition de ces fonctions ? Comment sont-elles définies ?
20. Sont-elles dérivables ? Où ça ? Que sont leurs dérivées ? À quoi ressemblent leurs graphes ?
21. Comment utiliser le cercle trigonométrique ?

# Exercices et résultats classiques à connaître

## Une formule classique avec la fonction $\operatorname{Arctan}$

**61.1**

Montrer que, pour tout $x > 0$ :

$$\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

Et pour $x < 0$ ?

## Une fonction hyperbolique réciproque

**61.2**

Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ :

$$\operatorname{ch} x = y$$

## Exercices

**61.3**

Déterminer les réels $x$ tels que :

$$\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$$

**61.4**

Déterminer les réels $x > 0$ tels que :

$$x^{(x^x)} = (x^x)^x$$

**61.5**

Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ :

$$\ln(x+1) + \ln(4x-1) = \ln(2x-1) + \ln(3x+1)$$

**61.6**

Résoudre l'inéquation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$\log_4(x+2) > \log_2(x-1)$$

**61.7**

Résoudre le système d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} 2\ln x - 3\ln y = \ln 2 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

**61.8**

Résoudre le système d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} \mathrm{e}^x - y = \mathrm{e}^y - x \\ y - \ln x = \ln y + x \end{cases}$$

**61.9**

Montrer que $\log_3(2)$ est irrationnel.

**61.10**

Résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ :

$$2\operatorname{ch} x + 3\operatorname{sh} x = 2$$

**61.11**

Résoudre le système, d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = \dfrac{27}{8} \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = \dfrac{21}{8} \end{cases}$$

**61.12**

Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, résoudre l'équation :

$$\operatorname{sh} x = y$$

**61.13**

Pour $y \in \,]-1, 1[$ fixé, résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ :

$$\operatorname{th} x = y$$

**61.14**

(a) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$

(b) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$

**61.15**

Soit $x \neq 0\,(2\pi)$. Montrer que :

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

(a) en procédant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ ;

(b) en exploitant les nombres complexes.

**61.16**

Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \cos^2 \frac{k\pi}{9}$.

**61.17**

Simplifier les expressions suivantes :

(a) $\cos(2 \operatorname{Arccos} x)$

(b) $\cos(2 \operatorname{Arcsin} x)$

(c) $\sin(2 \operatorname{Arccos} x)$

(d) $\cos(2 \operatorname{Arctan} x)$

(e) $\sin(2 \operatorname{Arctan} x)$

(f) $\tan(2 \operatorname{Arcsin} x)$

**61.18**

Simplifier les expression $\sin(\operatorname{Arcsin} x)$ et $\operatorname{Arcsin}(\sin x)$.

**61.19**

Résoudre l'équation :

$$\operatorname{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2} = \frac{\pi}{3}$$

**61.20**

Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$ :

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2}$$

**61.21**

Résoudre l'équation :

$$\operatorname{Arccos} x = \operatorname{Arcsin} x$$

## Petits problèmes d'entrainement

**61.22** ✍

Étudier et représenter la fonction définie par :

$$f(x) = \operatorname{Arcsin} \frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}$$

**61.23** ✍

On s'intéresse à la série de terme général $u_p = \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{p^2+p+1}$.

(a) Montrer la convergence de cette série.

(b) Calculer $\operatorname{Arctan}(p+1) - \operatorname{Arctan}(p)$.

(c) En déduire la somme de la série.

**61.24**

Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée de $x \mapsto \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

**61.25**

Étude de $f : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arcsin}(1-2x^2)$.

**61.26**

Calculer, pour $n$ entier non nul et $x \in \mathbb{R}$ :

$$\prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

**61.27**

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1+\operatorname{sh} x}{1+\operatorname{ch} x}$$

Montrer que $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle $I$ à préciser, et exprimer $f^{-1}$.