

1 Exercices de niveau 1**910.1***Mines-Télécom*

Soit (G, \star) et (G', \top) deux groupes, et $f : G \rightarrow G'$ un morphisme de groupes.

- (a) Montrer que, pour tout sous-groupe H de G , $f(H)$ est un sous-groupe de G' .
- (b) Montrer que, pour tout sous-groupe H' de G' , $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G .

910.2*Mines-Télécom*

Soit (G, \cdot) un groupe. Un sous-groupe H de G est dit **distingué** si :

$$\forall x \in H, \forall a \in G, axa^{-1} \in H$$

- (a) Montrer que le noyau d'un morphisme de groupes au départ de G est distingué.
- (b) Soit H et K deux sous-groupes de G . On suppose H distingué, et on définit :

$$HK = \{hk, h \in H, k \in K\}$$

Montrer que HK est un sous-groupe de G .

910.3*cc-INP*

Soit (G, \cdot) un groupe abélien fini.

- (a) Soit x, y deux éléments de G d'ordres finis respectifs p et q supposés premiers entre eux. Montrer que $z = xy$ est d'ordre pq .
- (b) On note m le ppcm des ordres des éléments de G , que l'on décompose en facteurs premiers :

$$m = p_1^{\alpha_1} \dots p_N^{\alpha_N}$$

Montrer qu'il existe un élément x_i de G d'ordre $p_i^{\alpha_i}$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$.

- (c) Montrer qu'il existe dans G un élément d'ordre exactement m .

910.4*Mines-Télécom*

On note :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

- (a) Calculer le polynôme caractéristique de M . La matrice M est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?
- (b) Soit $G = \{M^k, k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que G est un groupe cyclique et préciser son cardinal.

910.5*cc-INP*

Soit (G, \star) un groupe cyclique à n éléments engendré par a .

Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$\begin{aligned} f : G &\rightarrow G \\ x &\mapsto x^r \end{aligned}$$

- (a) Vérifier que f est un endomorphisme de (G, \star) .
- (b) Déterminer le noyau de f .
- (c) Montrer que $\text{Im}(f)$ est le sous-groupe de G engendré par a^d , où $d = \text{pgcd}(n, r)$.
- (d) Pour $y \in G$, combien l'équation $x^r = y$ possède-t-elle de solutions ?

2 Exercices de niveau 2

910.6

Mines-Ponts

Soit $n \geq 2$ un entier. Combien y a-t-il de sous-groupes de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$?

910.7

Centrale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n . On note \mathcal{S}_n l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$.

- (a) Expliciter le cardinal de \mathcal{S}_n . Le justifier.

Pour $i \in \{2, \dots, n\}$, on note $t_i = (1, i)$

- (b) Montrer que $\{t_2, t_3, \dots, t_n\}$ engendre \mathcal{S}_n .

Pour $s \in \mathcal{S}_n$, on note u_s l'endomorphisme de \mathbb{R}^n défini par :

$$u_s(e_i) = e_{s(i)} \quad \forall i$$

- (c) Interpréter géométriquement u_s lorsque s est une transposition.
- (d) Soit $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$. On suppose que s est la composée de p transpositions. Montrer que $p \geq n-1$.
- (e) Quel est le cardinal minimal d'une famille de transpositions génératrice de \mathcal{S}_n ?

910.8

Soit p un nombre premier. On note :

$$G_p = \{z \in \mathbb{C} \text{ t.q. } \exists k \in \mathbb{N}, z^{p^k} = 1\}$$

- (a) Montrer que G_p est un sous-groupe multiplicatif de \mathbb{C}^* .
- (b) Montrer que les sous-groupes propres de G_p sont cycliques et qu'aucun d'eux n'est maximal pour l'inclusion.
- (c) Montrer que G_p n'est pas engendré par un nombre fini d'éléments.

910.9

Mines-Ponts

On note :

$$K = \mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q} + \sqrt{3}\mathbb{Q} + \sqrt{6}\mathbb{Q}$$

- (a) Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$ est une base du \mathbb{Q} -espace vectoriel K .
- (b) Montrer que K est un sous-corps de \mathbb{R} .

910.10*Mines-Ponts*

Quel est le dernier chiffre de l'écriture décimale de 7^{7^7} ?

910.11*Mines-Ponts*

Soit G un groupe cyclique engendré par a , de cardinal n .

- (a) Montrer que tout sous-groupe de G est cyclique, de cardinal divisant n .
- (b) Soit d un diviseur de n . Montrer que G possède un unique sous-groupe de cardinal d .
- (c) Si $d \in \mathbb{N}$, on note $\varphi(d)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et d qui sont premiers avec d . Démontrer que :

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

910.12*Mines-Ponts*

Soit (G, \cdot) un groupe fini et p un nombre premier.

On suppose qu'il existe deux éléments a, b de G , d'ordre p et tels que $a \notin \text{gr}(b)$.

- (a) On suppose que $ab = ba$. Démontrer que G possède au moins $p^2 - 1$ éléments d'ordre p .

On ne suppose plus que a et b commutent. On pose :

$$H = \text{gr}(b) \text{ et } \forall j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, K_j = a^j \cdot H \cdot a^{-j}$$

- (b) Démontrer que, pour $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, si $K_j = H$ alors $j = 0$.
- (c) En déduire que, pour tout $i, j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, si $i \neq j$ alors $K_i \cap K_j = \{e\}$. Conclure que G contient au moins $p^2 - p$ éléments d'ordre p .

3 Exercices de niveau 3**910.13***X*

- (a) Montrer que tout sous-groupe additif de \mathbb{R} qui n'est pas monogène est dense dans \mathbb{R} .
- (b) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe une infinité de $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

- (c) Montrer la divergence de la suite $\left(\frac{1}{n \sin n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

4 Exercices de la banque CC-INP

78, 84, 86, 89, 94