

1 Exercices de niveau 1**903.1***cc-INP*

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}), f(0) = 0\}$.

- (a) Justifier que E est un espace vectoriel.
- (b) On note $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que N est une norme.
- (c) Montrer que, pour $f \in E$ et $x \in [0, 1]$:

$$e^x f(x) = \int_0^x e^t (f(t) + f'(t)) dt$$

- (d) On note $N'(f) = \|f + f'\|_\infty$. Montrer que N' est une norme.
- (e) Montrer qu'il existe α et β strictement positifs tels que, pour tout $f \in E$:

$$\alpha N'(f) \leq N(f) \leq \beta N'(f)$$

Examinateur cordial, qui laisse avancer et revient plus tard sur des points mal abordés.

903.2*cc-INP*

On note E l'ensemble des suites complexes n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls, et $\varphi : E \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par :

$$\varphi : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n}$$

Pour $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, on pose :

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \text{ et } \|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

- (a) Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E .
 - (b) Montrer que φ est continue pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, et calculer $\|\varphi\|_{\text{op}}$.
- On admet que $\|\cdot\|_1$ est une norme.
- (c) Montrer que φ est continue pour la norme $\|\cdot\|_1$, et calculer $\|\varphi\|_{\text{op}}$.
 - (d) Déterminer une norme sur E pour laquelle φ n'est pas continue.

2 Exercices de niveau 2**903.3***Mines-Ponts*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $e^{2i\pi P(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$. Que peut-on en déduire sur P ?

903.4*Mines-Ponts*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle. Montrer que φ est continue si et seulement si $\text{Ker } \varphi$ est une partie fermée de E .

903.5*Centrale 1*

- (a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire et de degré $n \geq 1$. Démontrer que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si :

$$\forall z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Im} z|^n \leq |P(z)|$$

- (b) Pour tout entier $n \geq 1$, on note \mathcal{U}_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ qui sont unitaires, de degré n et scindé dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer que \mathcal{U}_n est une partie fermée de $\mathbb{R}_n[X]$.
- (c) On note \mathcal{T}_n l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont trigonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que \mathcal{T}_n est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

903.6*Mines-Ponts*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $S(A)$ sa classe de similitude : $S(A) = \{P^{-1}AP, P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{C})\}$.
Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $S(A)$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3 Exercices de niveau 3

903.7*ÉNS*

Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ et F un sous-espace vectoriel de E vérifiant :

$$\exists C > 0, \forall f \in F, \|f\|_\infty \leq C\|f\|_2$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

Montrer que F est de dimension finie, et que cette dimension est inférieure à C^2 .

903.8*ÉNS*

Soit $(E_p, \|\cdot\|_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces vectoriels normés et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, X_p une partie compacte de E_p .
On considère, pour tout $p \in \mathbb{N}$, une suite $(x_{p,n})_{n \in \mathbb{N}}$ de X_p .

- (a) Soit $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications strictement croissantes de \mathbb{N} dans \mathbb{N} . Démontrer que l'application :

$$\psi : n \mapsto \varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$$

est strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} .

- (b) Construire par récurrence une suite $(\varphi_n)_n$ d'applications strictement croissantes de \mathbb{N} dans \mathbb{N} ainsi qu'un élément $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de $\prod_{p \in \mathbb{N}} X_p$ tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, x_{k, \varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_k(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a_k$$

- (c) Démontrer alors, avec les notations de la première question, que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$x_{k, \psi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a_k$$

- (d) **Application :** soit $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$ une suite sommable. On note :

$$X_\alpha = \{u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N}), \text{ for all } n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq \alpha_n\}$$

Montrer que X_α est une partie compacte de $\ell^1(\mathbb{N})$.

4 Exercices de la banque CC-INP

13, 34 à 41, 44, 45, 54, 61