1 Exercices de niveau 1

911.1

cc-INP

Soit X, Y deux va indépendantes, qui suivent la même loi, d'espérance et de variance finie, et telles que $Z = X + Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre p.

(a) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

(b) Déterminer $G_X \ : \ t \mapsto E(t^X)$.

(c) En déduire la loi de X.

911.2

Mines-Télécom

Soit X une va telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $P(X \geqslant n) > 0$ pour tout n. On note $x_n = P(X = n | X \geqslant n)$.

(a) Montrer que : $x_n = \dfrac{P(X = n)}{P(X \geqslant n)}$ et $1 - x_n = \dfrac{P(X \geqslant n+1)}{P(X \geqslant n)}$.

(b) b1. Montrer que : $P(X \geqslant n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{P(X \geqslant k+1)}{P(X \geqslant k)} = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - x_k)$.

b2. Exprimer $P(X = n)$ à l'aide des termes de la suite $(x_n)_n$.

b3. Montrer que $(P(X = n))_n$ est une suite géométrique si et seulement si $(x_n)_n$ est constante.

911.3

cc-INP

(a) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 2b \end{pmatrix}$. Trouver une CNS sur a, b pour que M soit diagonalisable.

(b) Soit $X \sim \mathscr{G}(p)$. Que vaut $P(X > n)$ pour $n \in \mathbb{N}$?

(c) Soit X, Y deux va indépendantes telles que $X \sim \mathscr{G}(p_1)$ et $Y \sim \mathscr{G}(p_2)$. On note : $M = \begin{pmatrix} 0 & -X \\ X & 2Y \end{pmatrix}$.
Quelle est la probabilité de l'événement « M est diagonalisable » ?

(d) Même question avec $X \sim Y \sim \mathscr{B}(n, 1/2)$.
Quelle est la limite de cette probabilité lorsque $n \to +\infty$.

J'ai fini cet exercice au bout d'environ 20 minutes, mais l'examinateur n'a validé que deux questions traitées sur 4.

911.4

cc-INP

Soit $p \in \left]0, 1\right[$. On note $p_k = k(1-p)^{k-1}p^2$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une distribution de probabilité.

On considère X une va dont la loi est donnée par $(p_k)_k$, c'est-à-dire que $P(X = k) = p_k$ pour tout k.

(b) Montrer l'existence et calculer l'espérance de $X - 1$ et de $(X-1)(X-2)$.

(c) Calculer alors $E(X)$ puis $V(X)$.

Examinateur gentil, il m'aidait quand je bloquais et me laissait gérer mon oral tout en me signalant lorsque le temps s'écoulait trop.

911.5

Mines-Télécom

On réalise des expériences aléatoires indépendantes qui ont une probabilité p de succès et $1 - p$ d'échec. On considère la va T_n qui compte le nombre d'étapes pour obtenir n succès.

(a) Déterminer la loi de T_1.

(b) Déterminer la loi de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Donner le DSE de $\dfrac{1}{(1-t)^n}$.

911.6

cc-INP

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une Bernoulli de paramètre p.
On pose $\forall n,\ Y_n = X_n X_{n+1}$.
Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y_n, $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_{k+i})$ avec $i \in [\![1, n]\!],\ k \in [\![0, n-i]\!]$.

911.7

cc-INP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement 2 boules, sans remise. X désigne le numéro de la 1ère boule, Y celui de la 2ème.
Déterminer la loi de X, puis celle du couple (X, Y), et enfin celle de Y.

911.8

cc-INP

On pose $\forall n \geqslant 1,\ \forall k,\ a_{n,k} = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^k}\right)^{n-1}$ et $\forall n \geqslant 1,\ \forall k \geqslant 1,\ p_{n,k} = a_{n,k-1} - a_{n,k}$.

(a) Montrer que $\forall p \geqslant 1,\ I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-t}\right)^p\right) \mathrm{d}t$ converge.

(b) Montrer que $p_{n,k} \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} p_{n,k} = 1$.
On dispose alors d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et d'une variable aléatoire X_n telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X_n = k) = p_{n,k}$.

(c) c1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} a_{n,k}$ converge.

c2. En déduire que X_n admet une espérance et que $E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}$.

(d) On pose $g_n\ :\ u \mapsto 1 - \left(1 - \dfrac{1}{2^u}\right)^{n-1}$.

d1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_{n,k} \leqslant \int_0^N g_n(u)\mathrm{d}u \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} a_{n,k}$.

d2. En déduire que $E(X_n) - 1 \leqslant \dfrac{I_{n-1}}{\ln(2)} \leqslant E(X_n)$.

(e) En admettant que $I_{n-1} \sim \ln(n)$, trouver un équivalent simple de $E(X_n)$.

911.9

IMT

On dispose de deux variables aléatoires réelles X et Y, indépendantes, telles que $X \sim \mathscr{G}(\frac{1}{3})$ et $Y \sim \mathscr{G}(\frac{2}{3})$. On pose $W = X + Y$.

(a) Trouver la variance de W.

(b) Trouver la loi de W.

2 Exercices de niveau 2

911.10

Mines-Ponts

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit $(X_n : \Omega \to \mathbb{R})_n$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes, non sûrement constantes et bornées, de même loi.
Soit $Y_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 1,\ Y_n = Y_{n-1}X_n$.
On admet que les Y_n suivent la même loi.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}/\ P(X_1 = x) > 0$.

- a1. Montrer que $P(X_1 = x^2) > 0$.
- a2. En déduire que $|x| \leqslant 1$.
- a3. Montrer que $x \in \{-1, 1\}$.

(b) Donner la loi de X_1.

(c) Montrer que la suite (Y_n) est composée de v.a. mutuellement indépendantes.

911.11

Mines-Ponts

On fixe $s \in]1, +\infty[$. On considère X un va avec $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$$P(X = n) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s} \text{ où } \zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s}$$

(a) Calculer $P(n|X)$ où la notation $n|X$ signfie n divise X.

(b) On note $v_p(X) = \mathrm{Max}\{k \in \mathbb{N},\ p^k|X\}$. Déterminer la loi de $v_p(X)$ et son espérance.

Examinateur qui sort de la salle et qui parle moyennement français.

911.12

Centrale 1

Soit X et Y deux v.a. supposées indépendantes telles que :

$$X^2 \hookrightarrow \mathscr{G}(p) \text{ et } Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$$

avec $p \in]0, 1[$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
On définit :

$$M = \begin{pmatrix} 2Y-3 & -2 & -2Y+4 \\ Y-8X-11 & -10 & 8X-Y+20 \\ 2Y-4X-7 & -6 & 4X-2Y+12 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } W = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Donner une valeur propre et un vecteur propre U associé, indépendants de X et Y.

(b) Calculer MV et MW.

(c) En fonction de X et Y, définir/donner l'événement « M est diagonalisable » (dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).

(d) Donner la probabilité que M soit diagonalisable.

L'examinateur était agréable et donnait des indications pour avancer, en posant quelques questions de cours pour aider à la réflexion. Mais il ne faut pas se fier à ses impressions ! Je n'ai eu que 09/20 en ayant presque fini l'exercice.

911.13

Mines-Ponts

Soit $U, V : \Omega \to \{-1, 1\}$ deux v.a. discrètes indépendantes. On suppose que U et V suivent la même loi de probabilité :

$$P(U = -1) = \frac{1}{3} \text{ et } P(U = 1) = \frac{2}{3}$$

On pose $X = U$ et $Y = \text{signe}(U)V$.

(a) Montrer que Y est une v.a. discrète.

(b) Donner la loi de (X, Y).

(c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

(d) Les variables X^2 et Y^2 sont-elles indépendantes ?

911.14

Centrale

On lance un dé équilibré à n faces, et on étudie le nombre T de lancers nécessaires pour obtenir les n faces du dé.
Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note T_k le nombre de lancers nécessaires depuis que l'on a obtenu $k - 1$ faces différentes pour obtenir une nouvelle face. On a bien-sûr $T = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} T_k$.

(a) Donner l'espérance et la variance d'une v.a. qui suit une loi géométrique de paramètre p.

(b) Déterminer la loi de la variable T_k. Que penser de la famille $(T_k)_k$?

(c) Déterminer le nombre moyen de lancers nécessaires pour obtenir les n faces du dé. En donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$.

(d) Soit $\alpha > 1$ fixé. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorer en fonction de n la probabilité $P\big(T \geqslant \alpha E(T)\big)$.

(e) Soit $(u_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'entiers telle que, pour tout n, $u_n > E(T)$. Montrer que :

$$P(T \geqslant u_n) \leqslant n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{u_n}$$

En posant $u_n = \lceil \alpha n \ln n \rceil$ et en utilisant l'inégalité $\ln(1 + x) \leqslant x$ pour $x > -1$, qu'obtient-on comme inégalité ?

911.15

Centrale

Soit G un groupe fini non commutatif.
On choisit au hasard, indépendamment et avec équiprobabilité deux éléments de G. On note P la probabilité que ces deux éléments commutent.

(a) Montrer que $P \in]0, 1[$.

(b) Calculer P lorsque G est le groupe des isométries d'un carré du plan.

On admet le théorème de Lagrange : l'ordre de tout sous-groupe d'un groupe fini divise l'ordre du groupe. En particulier, l'ordre d'un élément divise l'ordre du groupe.
On note $Z(G)$ le centre de G et, pour $a \in G$, $\mathcal{N}_a = \{g \in G,\ g \cdot a = a \cdot g\}$.

(c) Montrer que, pour tout $a \in G \setminus Z(G)$:

$$\frac{\operatorname{Card} G}{\operatorname{Card} \mathcal{N}_a} \geqslant 2 \text{ et } \frac{\operatorname{Card} \mathcal{N}_a}{\operatorname{Card} Z(G)} \geqslant 2$$

puis que $\operatorname{Card} Z(G) \leqslant \dfrac{1}{4} \operatorname{Card} G$.

(d) Montrer que la relation :
$$a \sim b \iff \exists g \in G,\ g \cdot a \cdot g^{-1} = b$$
est une relation d'équivalence.
On note $\mathrm{cl}(a)$ la classe d'équivalence de a.

(e) Montrer que si $a \sim b$, alors $\mathcal{N}_a$ et $\mathcal{N}_b$ sont isomorphes.

(f) Montrer que, pour $a \in G$:
$$\big(\operatorname{Card} \mathcal{N}_a\big) \times \big(\operatorname{Card} \mathrm{cl}(a)\big) = \operatorname{Card} G$$

(g) Montrer que :
$$P = \frac{\text{nombre de classes d'équivalences de } \sim}{\operatorname{Card} G}$$

(h) Montrer que $P \leqslant \dfrac{5}{8}$.

(i) Montrer que si $P = \dfrac{5}{8}$, alors $\operatorname{Card} G \equiv 0\ [8]$.

911.16

Centrale

Une usine possède n machines électroniques identiques travaillant de façon synchronisées mais indépendantes. On modélise l'évolution du nombre de machines en état de marche en fonction d'un temps discrétisé.
À chaque étape du temps :

- une machine en état de marche a une probabilité $p \in]0,1[$ de tomber en panne à la prochaine étape ;
- si une machine est en panne, un programme automatique de réparation se lance avec une probabilité $q \in]0,1[$ de réussir à réparer la machine pour la prochaine étape.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $t \in \mathbb{N}$, on note $X_{i,t}$ la variable aléatoire qui donne l'état de la machine n°i à l'instant t :
$$X_{i,t} = \begin{cases} 1 & \text{si la machine } i \text{ est en état de marche à l'instant } t \\ 0 & \text{si la machine } i \text{ est en panne à l'instant } t \end{cases}$$

On pose $S_t = \sum\limits_{i=1^n} X_{i,t}$ le nombre de machines en état de marche à l'instant t.

(a) Pour $t \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \{0,1\}$, déterminer les probabilités conditionnelles :
$$P(X_{i,t+1} = a \mid X_{i,t} = b)$$

(b) Pour $t \in \mathbb{N}$, exprimer le vecteur ligne $\big(P(X_{i,t} = 0) \quad P(X_{i,t} = 1)\big)$ en fonction de $\big(P(X_{i,0} = 0) \quad P(X_{i,0} = 1)\big)$ et de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1-q & q \\ p & 1-p \end{pmatrix}$.

(c) Montrer que, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$ et $t \in \mathbb{N}$:
$$P(S_t = j) = \binom{n}{j} P(X_{1,t} = 1)^j P(X_{1,t} = 0)^{n-j}$$

(d) Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} P(S_t = j)$.

Ces probabilités aideront l'industriel à décider suivant les valeurs de p et q s'il vaut mieux acheter des machines plus fiables ou développer des techniques de réparation plus efficaces.

3 Exercices de la banque CC-INP

95 à 112