

Intégrales à paramètre

Cours	2
1 Continuité	2
1.1 Continuité des intégrales à paramètre	2
1.2 Limite des intégrales à paramètre	2
2 Dérivation	3
2.1 Classe \mathcal{C}^1	3
2.2 Extension à la classe \mathcal{C}^k	4
3 Annexes	5
3.1 Annexe : démonstration du théorème de continuité	5
3.2 Complément : démonstration du théorème de dérivation	5
Exercices	6
Exercices et résultats classiques à connaître	6
Continuité et limite d'une intégrale à paramètre	6
L'incontournable fonction Γ	6
Exemple où l'on peut expliciter $f'(x)$	6
Transformée de Fourier	6
Transformée de Laplace	7
Exercices du CCINP	8
Exercices	8
Petits problèmes d'entraînement	9

1 Continuité

1.1 Continuité des intégrales à paramètre

Théorème.

Soit A et I deux intervalles de \mathbb{R} , et $h : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$
 $(x, t) \mapsto h(x, t)$

Si :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x, t)$ est **continue** sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- h satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que

$$|h(x, t)| \leq \varphi(t) \quad \forall (x, t) \in A \times I$$

où $\varphi(t)$ est intégrable sur I et indépendante de x .

Alors :

- pour tout $x \in A$, l'application $t \mapsto h(x, t)$ est intégrable sur I
- la fonction : $f : x \mapsto \int_I h(x, t) dt$ est continue sur A .

Remarque. L'hypothèse de domination est vraiment l'hypothèse fondamentale de ce théorème.

L'application de ce théorème permet de justifier en particulier que f est définie sur A . Mais l'analyse menée lors de l'étude de la convergence de l'intégrale fournit en général les clefs de la domination.

Exemple. On note $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$. Donner le domaine de définition de f , et étudier sa continuité.

Remarque. Lorsque l'intégrale n'est pas généralisée, on peut utiliser comme fonction dominante une fonction constante.

Exemple. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_0^1 \cos(xt) dt$. Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R} .

Raisonnement classique. La continuité étant une propriété locale, on peut appliquer le théorème précédent localement, par exemple sur tout segment de A .

Remarque. On ne peut pas modifier l'intervalle d'intégration ! Le caractère « local » porte bien sur la variable x , pas la variable d'intégration t .

Exemple. Montrer que $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \sin t}{x\sqrt{t} + t} dt$ est continue sur $]0, +\infty[$.

1.2 Limite des intégrales à paramètre

Théorème de convergence dominée à paramètre continu.

Soit A et I deux intervalles de \mathbb{R} , a une borne de A éventuellement infinie et $h : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$
 $(x, t) \mapsto h(x, t)$

Si :

- pour tout $t \in I$, $h(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell(t)$;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x, t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I ;
- h satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que

$$|h(x, t)| \leq \varphi(t) \quad \forall (x, t) \in A \times I$$

où $\varphi(t)$ est intégrable sur I et indépendante de x .

Alors :

- ℓ est intégrable sur I
- $\int_I h(x, t) dt \xrightarrow{x \rightarrow a} \int_I \ell(t) dt$

Remarque. Il s'agit d'une simple extension du théorème relatif aux suites de fonctions.

Exemple. On note $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t+1}} dt$ et on donne : $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi}$.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ pour $x \rightarrow +\infty$. Donner un équivalent pour $x \rightarrow +\infty$.
2. Déterminer un équivalent de $f(x)$ pour $x \rightarrow 0$.

2 Dérivation

Remarque. Étudier les variations d'une fonction f , c'est comparer $f(x)$ et $f(y)$ pour $x \leq y$. On peut souvent le faire en comparant les intégrandes $h(x, t)$ et $h(y, t)$.

2.1 Classe \mathcal{C}^1

Théorème.

Soit A et I deux intervalles de \mathbb{R} , et $h : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$
 $(x, t) \mapsto h(x, t)$

Si :

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x, t)$ est cpm et **intégrable** sur I ;
- pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x, t)$ est **de classe \mathcal{C}^1** sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ est cpm sur I ;
- $\frac{\partial h}{\partial x}$ satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \quad \forall (x, t) \in A \times I$$

où $\varphi(t)$ est intégrable sur I et indépendante de x .

Alors :

- la fonction : $f : x \mapsto \int_I h(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A ;
- pour tout $x \in A$: $f'(x) = \int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) dt$

Remarque. L'hypothèse de domination est l'hypothèse fondamentale. Elle justifie aussi l'intégrabilité de $\frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$.

Remarque. L'intégrabilité de $t \mapsto h(x, t)$ est souvent conséquence de la domination du théorème de continuité.

Exemple. On reprend $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$.

Étudier la dérivabilité de f puis donner une expression simple de $f(x)$.

On donne : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Raisonnement classique. La dérivabilité, la classe \mathcal{C}^1 sont des notions locales. On peut donc appliquer le théorème précédent localement, par exemple sur tout segment de A .

Exemple. Pour $x \in]-1, +\infty[$, on pose $f(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x dt$.

Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, +\infty[$, et donner une expression de $f'(x)$ à l'aide des fonctions usuelles. En déduire une expression de $f(x)$.

2.2 Extension à la classe \mathcal{C}^k

En itérant le théorème de dérivation k -fois, on peut justifier le résultat suivant :

Théorème.

Soit A et I deux intervalles de \mathbb{R} , $h : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
 $(x, t) \mapsto h(x, t)$

Si :

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x, t)$ est cpm et **intégrable** sur I ;
- pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x, t)$ est **de classe \mathcal{C}^k** sur A ;
- pour tout $p \in \{1, \dots, k-1\}$, pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x, t)$ est cpm et **intégrable** sur I ;
- $\frac{\partial^k h}{\partial x^k}$ satisfait l'**hypothèse de domination** :

$$\left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \quad \forall (x, t) \in A \times I$$

où $\varphi(t)$ est intégrable sur I et indépendante de x .

Alors :

- la fonction : $f : x \mapsto \int_I h(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^k sur A ;
- pour tout $p \in \{1, \dots, k\}$, pour tout $x \in A$: $f^{(p)}(x) = \int_I \frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x, t) dt$

3 Annexes

3.1 Annexe : démonstration du théorème de continuité

Théorème.

Soit A et I deux intervalles de \mathbb{R} , et :

$$\begin{aligned} h : A \times I &\rightarrow \mathbb{K} \\ (x, t) &\mapsto h(x, t) \end{aligned}$$

Si :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x, t)$ est **continu** sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- h satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que

$$|h(x, t)| \leq \varphi(t) \quad \forall (x, t) \in A \times I$$

où $\varphi(t)$ est intégrable sur I et indépendante de x .

Alors :

- pour tout $x \in A$, l'application $t \mapsto h(x, t)$ est intégrable sur I
- la fonction : $f : x \mapsto \int_I h(x, t) dt$ est continue sur A .

Preuve. Soit $x_0 \in A$. On va montrer la continuité de f en x_0 en combinant la caractérisation séquentielle de la limite et le théorème de convergence dominée.

Soit $(x_n)_n$ une suite quelconque d'éléments de A qui converge vers x_0 , et $h_n(t) = h(x_n, t)$. Par continuité de $h(\cdot, t)$, on a :

$$h_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{C.S.}} h(x_0, \cdot)$$

Dominons :

$$|h_n(t)| = |h(x_n, t)| \leq \varphi(t)$$

qui est indépendant de n , et intégrable sur I .

Donc, par convergence dominée :

$$\int_I h_n(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_I h(x_0, t) dt$$

ce que l'on ré-écrit :

$$f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x_0)$$

Par caractérisation séquentielle, on a donc montré que :

$$f(x) \xrightarrow[x \rightarrow x_0]{} f(x_0)$$

□

3.2 Complément : démonstration du théorème de dérivation

Théorème.

Soit A et I deux intervalles de \mathbb{R} , et :

$$\begin{aligned} h : A \times I &\rightarrow \mathbb{K} \\ (x, t) &\mapsto h(x, t) \end{aligned}$$

Si :

- pour tout $x \in A$, $t \mapsto h(x, t)$ est cpm et **intégrable** sur I ;
- pour tout $t \in I$, $x \mapsto h(x, t)$ est **de classe C^1** sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)$ est cpm sur I ;
- $\frac{\partial h}{\partial x}$ satisfait l'**hypothèse de domination** : il existe φ telle que

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) \quad \forall (x, t) \in A \times I$$

où $\varphi(t)$ est intégrable sur I et indépendante de x .

Alors :

- la fonction : $f : x \mapsto \int_I h(x, t) dt$ est de classe C^1 sur A ;
- pour tout $x \in A$: $f'(x) = \int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) dt$

Preuve. Soit $x_0 \in A$. On s'intéresse à :

$$\begin{aligned} |\delta(u)| &= \left| f(x_0 + u) - f(x_0) - u \int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, t) dt \right| \\ &= \left| \int_I \left(h(x_0 + u, t) - h(x_0, t) - u \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, t) \right) dt \right| \\ &= \left| \int_I \left(\int_{x_0}^{x_0+u} \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) dx - u \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, t) \right) dt \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left| \int_I \left(\int_{x_0}^{x_0+u} \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) dx - \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, t) u \right) dt \right| \\ &\leq \int_I \left| \int_{x_0}^{x_0+u} \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) dx - \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, t) u \right| dt \\ &= |u| \int_I \underbrace{\left| \frac{1}{u} \int_{x_0}^{x_0+u} \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) dx - \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, t) \right|}_{\psi(u, t)} dt \end{aligned}$$

avec, pour tout $t \in I$:

$$\psi(u, t) \xrightarrow[u \rightarrow 0]{} 0$$

par dérivabilité de l'intégrale fonction de la borne d'en haut d'une fonction continue.

Dominons :

$$\begin{aligned} |\psi(u, t)| &\leq \frac{1}{|u|} \int_{x_0}^{x_0+u} \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) - \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, t) \right| dx \\ &\leq \frac{1}{|u|} \int_{x_0}^{x_0+u} 2\varphi(t) dx \\ &= 2\varphi(t) \end{aligned}$$

pour $u > 0$, et le calcul est le même pour $u < 0$. On a majoré bien dominé, puisqu'on a majoré la valeur absolue de $\psi(u, t)$ par une expression indépendante de u , intégrable sur I .

Par le théorème de convergence dominée à paramètre continu, on en déduit que :

$$\int_I \psi(u, t) dt \xrightarrow[u \rightarrow 0]{} 0$$

c'est-à-dire que, au voisinage de $u \rightarrow 0$:

$$f(x_0 + u) = f(x_0) + u \int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, t) dt + o(u)$$

On a donc montré que f est dérivable en x_0 , et que :

$$f'(x_0) = \int_I \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, t) dt$$

La continuité de f' s'obtient alors en appliquant le théorème de continuité. □

Exercices et résultats classiques à connaître

Continuité et limite d'une intégrale à paramètre

660.1

Montrer que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur \mathbb{R} , et déterminer sa limite en $+\infty$.

$$x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t^2} dt$$

L'incontournable fonction Γ

660.2

On pose, pour tout x de $]0, +\infty[$ et pour tout t de $]0, +\infty[$:

$$f(x, t) = e^{-t} t^{x-1}$$

(a) Démontrer que la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On pose, pour $x \in]0, +\infty[$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

(b) Démontrer que, pour tout x de $]0, +\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(c) Démontrer que Γ est de classe \mathcal{C}^1 et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

Exemple où l'on peut expliciter $f'(x)$

660.3

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt$.

(a) Montrer que f est définie sur $[0, +\infty[$.

(b) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$. Exprimer $f'(x)$ et en déduire une expression simple de $f(x)$ sur $]0, +\infty[$.

(c) On admet que f est continue en 0. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

Transformée de Fourier

660.4

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que $t \mapsto tf(t)$ soit intégrable sur \mathbb{R} . Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t) dt$$

La fonction g est appelée la **transformée de Fourier de f** .

Montrer que g est une application de classe \mathcal{C}^1 et calculer sa dérivée.

Transformée de Laplace

660.5

Pour f continue sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles, on définit sous réserve d'existence :

$$\mathcal{L}\{f\} : s \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

appelée **transformée de Laplace** de f .

On suppose dorénavant que :

$$\exists k \in \mathbb{N}^*, f(t) = o_{t \rightarrow +\infty}(t^k) \quad (H)$$

et on note $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$.

(a) Montrer que F est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

(b) Montrer que $F(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0$.

(c) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall s > 0, F'(s) = -\mathcal{L}\{tf(t)\}$$

Exercices du CCINP

660.6
 **29.3**

On pose : $\forall x \in]0, +\infty[, \forall t \in]0, +\infty[, f(x, t) = e^{-t} t^{x-1}$.

3. Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

660.7
 **30**

1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
2. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} .
3. (a) Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 dont f est solution.
(b) Résoudre (E) .

660.8
 **50**

On considère la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{x+t} dt$.

1. Prouver que F est définie et continue sur $]0; +\infty[$.
2. Prouver que $x \mapsto xF(x)$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.
3. Déterminer un équivalent, au voisinage de $+\infty$, de $F(x)$.

Exercices

660.9

Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

- (a) Déterminer le domaine de définition de F . Étudier la continuité de F sur \mathbb{R}_+ .
- (b) Déterminer la valeur de $F(0)$.
- (c) Déterminer la limite de F en $+\infty$.

660.10

Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^3+t^3}$.

- (a) Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R}_+ .
- (b) Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et déterminer cette limite.

660.11

Montrer que $F : x \mapsto \int_0^1 \sin(tx) dt$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

660.12

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-xt} dt$.


- (a) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.
- (b) Montrer que f est solution de l'équation $y' + \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^2}$.
- (c) Exprimer $f(x)$ à l'aide de $C = \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt$.

660.13

On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}} dt$.

- (a) Déterminer le domaine de définition de f . Montrer que f est C^1 sur \mathbb{R}_+ .
- (b) Établir que f est solution d'une équation différentielle linéaire.
- (c) Calculer les limites de f en 0 et $+\infty$. Donner un équivalent de f en 0.


Petits problèmes d'entraînement

660.14 

On définit :

$$f(x) = \int_e^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1} \ln t} dt$$

- (a) Déterminer le domaine de définition de f , noté D .
- (b) Montrer que f est continue sur D .
- (c) Déterminer la limite de f en $+\infty$;
- (d) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur D , et calculer f' .
- (e) On pose $\varphi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$. Préciser le domaine de définition de φ et le lien entre φ et f .
- (f) En introduisant $\int_x^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} dt$, déterminer un équivalent de $f(x)$ pour $x \xrightarrow{+} 0$.

660.15 

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{u^2 + x^2} du \text{ et } \varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x \cos(u)}{u^2 + x^2} du$$

- (a) Montrer que φ est définie sur \mathbb{R} .
- (b) Montrer que φ est continue sur $]0, +\infty[$.
- (c) Montrer que :

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- (d) On note $K = \int_0^{+\infty} \frac{|\cos(u) - 1|}{u^2} du$.

d1. Montrer que cette intégrale existe.

d2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\left| \varphi(x) - \frac{\pi}{2} \right| \leq Kx$.

- (e) La fonction φ est-elle continue sur \mathbb{R} ? Est-elle continue par morceaux sur \mathbb{R} ?

660.16

$$\text{Soit } F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1} dt$$

- (a) Montrer que $F(x)$ existe pour tout réel x .
- (b) Développer $F(x)$ en série de fonctions. Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

660.17

$$\text{Pour } x > 0 \text{ on note } F(x) = \int_0^{1/x} \frac{dt}{x + \sin^2 t}$$

- (a) Montrer que F est bien définie et étudier sa monotonie.
- (b) Déterminer la limite de F en 0 et en $+\infty$.
- (c) Poser $\theta = \tan t$ et déterminer un équivalent de F et 0.

660.18

$$\text{Soit } F : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt.$$

- (a) Déterminer l'ensemble de définition de F .
- (b) Avec le changement de variable $t = u^2$, calculer $F(1/2)$.
- (c) En déduire $F(3/2)$.

660.19

$$\text{Soit } f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt.$$

- (a) Déterminer le domaine de définition de f .

(b) Montrer que f est \mathcal{C}^∞ .

(c) Montrer que f admet un développement en série entière et le déterminer.

660.20

On veut calculer pour $x > 0$ et $n \geq 1$, $I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x+t^2)^n}$.

(a) Calculer $I_1(x)$.

(b) Montrer que la fonction I_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer $I'_n(x)$ en fonction de $I_{n+1}(x)$.

(c) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, et tout $x > 0$:

$$I_n(x) = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-2)!}{(2^{n-1}(n-1)!)^2} \frac{1}{x^{n-\frac{1}{2}}}$$

660.21

(a) Déterminer le domaine de définition réel de :

$$F : t \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-u^2+i)t^2}}{u^2 - i} du$$

(b) Quelle est la limite de $F(t)$ en $+\infty$?

(c) Déterminer F' .

(d) On admet que $F(0) = \pi \frac{1+i}{2\sqrt{2}}$.

En déduire les valeurs de $\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt$ et $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt$.

660.22

Pour tout réel x , on pose $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et $g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

(a) Montrer que f et g sont de classe \mathcal{C}^1 .

(b) Montrer que $f + g^2$ est une fonction constante que l'on déterminera.

(c) En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et retrouver ainsi la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.