# 1 Exercices de niveau 1

**909.1**

*Mines-Télécom*

Justifer l'existence et calculer :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

**909.2**

*cc-INP*

On définit, pour $x \in \mathbb{R}$ :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

(a) Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I = ]0, +\infty[$.

(c) Déterminer des constantes $a$ et $b$ telles que :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2}\right) = a\frac{t}{1+t^2} + b\frac{t}{1+x^2t^2}$$

(d) Déterminer $f'(x)$ et calculer cette intégrale.

(e) Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$.

**909.3**

*Mines-Télécom*

On s'intéresse à : $f \;:\; x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$

(a) Déterminer $D_f$.

(b) Étudier la continuité de $f$.

(c) Montrer que $f(x) = f(1-x)$.

(d) Déterminer un équivalent en 0.

**909.4**

*cc-INP*

Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(a) Montrer que $(H_n)$ est croissante. Que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} H_n$ ?

Soit $F \;:\; x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{1-(1-u)^x}{u}\mathrm{d}u$.

(b) Montrer que $F$ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $F$ est croissante.

(c) Calculer, pour tout $x \geqslant 0,\ F(x+1) - F(x)$. En déduire l'expression de $F(n)$ en fonction de $H_n$.

(d) Montrer que, $\forall x \geqslant 0,\ \ln(x+1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$.

(e) Montrer que $F(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x+1)$.

## 2 Exercices de niveau 2

**909.5**

*Centrale*

On définit : $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t-1)(t-x)}}$.

(a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ et le sens de variation de $f$.

(b) Étudier la continuité de $f$ sur $\mathcal{D}$.

(c) Démontrer que $f$ est développable en série entière sur un intervalle $]-R, R[$ à préciser.
*On exprimera les coefficients $a_n$ de ce développement à l'aide de :*

$$u_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{n+1}\sqrt{t-1}}$$

(d) Donner une méthode permettant le calcul de $u_n$.

(e) Étudier l'existence de $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)$.

(f) La fonction $f$ est-elle intégrable sur $[0, 1[$ ? Si oui, montrer l'existence et calculer : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}$.

**909.6**

*Mines-Ponts*

On définit : $f(x) = \left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que $f$ et $g$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et déterminer leur dérivée.

(b) Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$ :

$$f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$$

(c) En déduire que la valeur de :

$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

**909.7**

*Centrale*

On définit, lorsque c'est possible :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$$

(a) Déterminer le domaine de définition de $F$.

(b) $F$ est-elle continue ?

(c) Sur quel intervalle $F$ est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ ?

(d) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$$

(e) Donner le développement en série entière de $F$ autour de 0.

## 3 Exercices de la banque CC-INP

**29, 30, 50**