

Intégration sur un segment des fonctions numériques

Je me souviens

1	L'intégrale comme un nombre	2
1.1	Fonctions continues par morceaux	2
1.2	Intégrale d'une fonctions cpm sur un segment	2
1.3	Sommes de Riemann	2
2	L'intégrale comme une fonction de la borne d'en haut	2
2.4	Intégrale et primitive	2
2.5	Intégration par parties, changement de variable	2
2.6	Primitives usuelles	3
2.7	Formules de Taylor	3

Cours

3	Annexes	4
3.1	Annexe : intégrale d'une fonction en escalier sur un segment	4
3.2	Complément : approximation uniforme des fonctions cpm par des fonctions en escalier	4
3.3	Annexe : une construction de l'intégrale des fonctions cpm sur un segment	5
3.4	Complément : démonstration du théorème fondamental	5
3.5	Annexe : les formules de Taylor	6
3.6	Annexe : une démonstration du théorème sur les sommes de Riemann	6
3.7	Complément : une autre démonstration par la continuité uniforme	7
3.8	Annexe : deux primitives	7

Exercices

Exercices et résultats classiques à connaître	9
Lemme de Riemann-Lebesgue	9
Intégrale de Wallis	9
Utilisation d'une somme de Riemann	9
Utilisation d'une formule de Taylor	9
Exercices du CCINP	10
Exercices classiques	10
Calculs d'intégrales et de primitives	10
Petits problèmes d'entraînement	11

Je me souviens — l'intégrale comme un nombre**1.1 Fonctions continues par morceaux**

1. Qu'est-ce qu'une **subdivision** du segment $[a, b]$?
2. Qu'est-ce qu'une fonction **continue par morceaux** sur $[a, b]$?
3. Que dire d'une combinaison linéaire de deux fonctions continues par morceaux ? d'un produit de deux fonctions continues par morceaux ?
4. Prêt à le démontrer ?
5. Est-ce que l'ensemble $\mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{K})$ des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ possède une structure particulière ?

1.2 Intégrale d'une fonctions cpm sur un segment

6. Quel est le lien entre $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_b^a f(t) dt$?
7. Énoncer la relation de Chasles.
8. Qu'est-ce que la linéarité de l'intégrale ?
9. Qu'est-ce que la positivité de l'intégrale ? la croissance de l'intégrale ?
10. Qu'est-ce que l'inégalité triangulaire pour les intégrales ?
11. Que dire face à une intégrale nulle d'une fonction positive ?

1.3 Sommes de Riemann

12. Que dit le théorème sur les sommes de Riemann ?

Je me souviens — l'intégrale comme une fonction de la borne d'en haut**2.4 Intégrale et primitive**

13. Qu'appelle-t-on **primitive** d'une fonction f ?
14. Quelle est la classe des primitives de fonctions continues ?
15. Que dire de deux primitives d'une même fonction sur un intervalle ?
16. Énoncer le théorème fondamental, qui fait le lien entre intégrale et primitive.

17. Si f est continue, comment dériver $x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$?

2.5 Intégration par parties, changement de variable

18. Qu'appelle-t-on « intégration par parties » ?
19. Comment faire un changement de variable pour le calcul d'une intégrale ?

2.6 Primitives usuelles

20. Donner une primitive de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
21. Donner une primitive de $\ln x$.
22. Donner une primitive de $\frac{1}{1+x^2}$.
23. Donner une primitive de $\frac{1}{1-x^2}$.
24. Donner une primitive de $\frac{1}{1+x+x^2}$.

2.7 Formules de Taylor

25. Qu'est-ce que le polynôme de Taylor d'une fonction ?
26. Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral.
27. Comment démontrer la formule précédente ?
28. Énoncer l'inégalité de Taylor-Lagrange.

3 Annexes

3.1 Annexe : intégrale d'une fonction en escalier sur un segment

Définition. Une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est **en escalier** lorsqu'il existe une subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ du segment $[a, b]$ telle que, pour tout i , la restriction $f|_{[x_i, x_{i+1}]}$ soit une fonction constante. On note k_i sa valeur. On dit que la subdivision est **adaptée** à f .

On appelle **intégrale de f sur $[a, b]$** le nombre :

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} k_i (x_{i+1} - x_i)$$

que l'on interprète géométriquement comme on le pense.

Remarque. Cette définition est indépendante du choix de la subdivision adaptée à f .

Notation. On note indifféremment $\int_a^b f(t) dt$, $\int_a^b f$, $\int_{[a,b]} f(t) dt$ ou $\int_{[a,b]} f$. Il n'est pas toujours judicieux de vouloir faire l'économie de l'écriture de la variable d'intégration.

Proposition. Pour f, g en escalier sur $[a, b]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

- $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$.
- Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.
- Si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

3.2 Complément : approximation uniforme des fonctions cpm par des fonctions en escalier

Proposition. L'ensemble $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ est dense dans $(\mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, ce qui signifie que toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.

Preuve. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. On veut construire une suite de fonctions en escalier qui tend, au sens de la norme $\|\cdot\|_\infty$, vers f .

- 1^{er} cas : si f est continue.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par le théorème de Heine, f est uniformément continue sur le segment $[a, b]$. Ainsi, par définition appliquée à $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$, il existe $\eta_n > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in [a, b], |x - y| \leq \eta_n \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Considérons alors p entier tel que $\frac{b-a}{p} < \eta_n$, la subdivision régulière de $[a, b]$ $\left(x_k = a + k \frac{b-a}{p} \right)_{0 \leq k \leq p}$ et la fonction en escalier :

$$\forall k \in \{0, \dots, p-1\}, \forall x \in [x_k, x_{k+1}], g_n(x) = f(x_k)$$

complétée par $g_n(b) = f(b)$.

La fonction g_n ainsi définie est constante sur chaque $[x_k, x_{k+1}]$, donc en escalier.

De plus, pour tout $x \in [a, b]$, il existe $k \in \{0, \dots, p-1\}$ tel que $x \in [x_k, x_{k+1}]$, donc $|x - x_k| \leq \frac{b-a}{p} < \eta_n$ et par suite :

$$|f(x) - g_n(x)| = |f(x) - f(x_k)| \leq \frac{1}{n}$$

La majoration, aussi valable pour $x = b$, est indépendante de x donc :

$$\|f - g_n\|_\infty^{[a,b]} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On a donc montré que $(g_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

- 2^e cas : si f est continue par morceaux.

On considère $(y_j)_{0 \leq j \leq q}$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à f , c'est-à-dire que chaque $f|_{[y_j, y_{j+1}]}$ est continue et admet une limite finie à droite en y_j et à gauche en y_{j+1} . Elle se prolonge donc à $[y_j, y_{j+1}]$ en une fonction continue notée f_j .

On applique à f_j le point précédent, ce qui fournit une suite $(g_n^j)_n$ qui converge uniformément vers f_j sur $[y_j, y_{j+1}]$.

On définit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [a, b]$:

$$h_n(x) = \begin{cases} g_n^j(x) & \text{si } x \in]y_j, y_{j+1}[\\ f(y_j) & \text{si } x = y_j \end{cases}$$

La fonction h_n est en escalier sur $[a, b]$, et, pour tout x ,

$$|f(x) - h_n(x)| = \begin{cases} |f_j(x) - g_n^j(x)| & \text{si } x \in]y_j, y_{j+1}[\\ 0 & \text{si } x = y_j \end{cases} \leq \frac{1}{n}$$

donc

$$\|f - h_n\|_\infty^{[a,b]} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On a donc montré que $(h_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$. \square

Corollaire. Si f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, à valeurs réelles, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe φ, ψ en escalier sur $[a, b]$ telles que :

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ et } \psi - \varphi \leq \varepsilon$$

Preuve. Par la proposition précédente, on sait qu'il existe ψ en escalier telle que $\|(f + \frac{\varepsilon}{4}) - \psi\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{4}$, c'est-à-dire :

$$f \leq \psi \leq f + \frac{\varepsilon}{2}$$

On pose $\varphi = \psi - \frac{\varepsilon}{2}$. \square

3.3 Annexe : une construction de l'intégrale des fonctions cpm sur un segment

Construction. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. On considère :

$$\mathcal{I}^-(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi, \varphi \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R}), \varphi \leq f \right\}$$

$$\mathcal{I}^+(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \psi, \psi \in \mathcal{E}([a,b], \mathbb{R}), f \leq \psi \right\}$$

$\mathcal{I}^-(f)$ admet une borne supérieure, $\mathcal{I}^+(f)$ admet une borne inférieure, et :

$$\text{Sup } \mathcal{I}^-(f) = \text{Inf } \mathcal{I}^+(f)$$

Cette valeur commune s'appelle **l'intégrale de f sur $[a, b]$** .

Preuve.

- f est continue par morceaux sur $[a, b]$, donc il existe une subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ adaptée à f , c'est-à-dire telle que, pour tout i , la restriction $f|_{[x_i, x_{i+1}]}$ se prolonge à $[x_i, x_{i+1}]$ en une fonction continue, donc bornée. On note M_i un majorant. Alors $M = \max\{f(x_0), \dots, f(x_n), M_0, \dots, M_{n-1}\}$ est un majorant

de f sur $[a, b]$. C'est aussi une fonction en escalier (constante) majorant f , donc $M(b - a)$ majore $\mathcal{I}^-(f)$. Ainsi, $\mathcal{I}^-(f)$ est une partie non vide, majorée, de \mathbb{R} , donc admet une borne supérieure. On la note S .

- $\mathcal{I}^+(f)$ admet une borne inférieure pour des raisons analogues. On la note I .
- $\forall \varphi, \psi$ en escalier telles que $\varphi \leq f \leq \psi$, on a $\int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi$. Comme ceci est vrai pour tout φ , c'est que $\int_a^b \psi$ est un majorant, donc par définition de la borne sup, $S \leq \int_a^b \psi$. Mais ceci est vrai pour tout ψ , donc S est un minorant et par définition de la borne inf, $S \leq I$.
- Fixons $\varepsilon > 0$. En appliquant le corollaire de la section précédente avec $\frac{\varepsilon}{b-a}$, il existe deux fonctions en escalier φ et ψ telles que :

$$\varphi \leq f \leq \psi \text{ et } \psi - \varphi \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

On a $\int_a^b \varphi \leq S \leq I \leq \int_a^b \psi$, donc :

$$I - S \leq \int_a^b \psi - \varphi \leq \varepsilon.$$

Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, c'est que $I - S \leq 0$.

On a montré que $I = S$. \square

3.4 Complément : démonstration du théorème fondamental

Théorème.

Soit I intervalle de \mathbb{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue et $a \in I$. Il existe une unique primitive de f sur I qui s'annule en a , et cette primitive est :

$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

Preuve.

- *Existence*

Définissons, pour $x \in I$: $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

On veut montrer que F est une primitive de f sur I , c'est-à-dire que, pour tout $x \in I$:

$$F(x+h) = F(x) + hf(x) + \underset{h \rightarrow 0}{\text{o}}(h)$$

Soit $x \in I$ fixé. Si x est une extrémité de I , un seul des points suivants s'applique.

- Au voisinage de $h \xrightarrow{} 0$, $x+h \in I$ et :

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) - hf(x) &= \int_x^{x+h} f(t) dt - hf(x) \\ &= \int_x^{x+h} f(t) - f(x) dt \end{aligned}$$

donc

$$|F(x+h) - F(x) - hf(x)| \leq \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt$$

On revient à la définition de limite avec des ε . Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Par définition de la continuité de f en x , il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall y \in I, |y-x| \leq \eta \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Lorsque $h \leq \eta$, tout $t \in [x, x+h]$ satisfait $|t-x| \leq \eta$, donc $|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$. On a donc, pour $h \leq \eta$:

$$\begin{aligned} |F(x+h) - F(x) - hf(x)| &\leq \int_x^{x+h} \varepsilon dt \\ &= \varepsilon h \end{aligned}$$

- Au voisinage de $h \xrightarrow{} 0$, on travaille de façon symétrique en faisant attention à l'ordre des bornes d'intégration.

On a donc montré :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0,$$

$$|h| \leq \eta \implies |F(x+h) - F(x) - hf(x)| \leq \varepsilon h$$

c'est-à-dire :

$$F(x+h) - F(x) - hf(x) = \underset{h \rightarrow 0}{\text{o}}(h)$$

Ce qui prouve que F est dérivable en x , et que $F'(x) = f(x)$.

- *Unicité*

Si F et G conviennent, pour tout $x \in I$:

$$(F-G)'(x) = 0$$

Il s'agit d'une fonction dérivable à dérivée nulle sur un intervalle, donc $F-G$ est constante, c'est donc que $F=G$. \square

3.5 Annexe : les formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral.

Soit f de classe \mathcal{C}^{n+1} sur un intervalle I contenant 0, à valeurs réelles ou complexes. Alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt}_{R_n(x)}$$

Corollaire. Pour $a \in I$, on a :

$$\begin{aligned} f(a+x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} x^k \\ &\quad + \int_a^{a+x} \frac{(a+x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) dt \end{aligned}$$

Preuve. On raisonne par récurrence sur n .

- Pour $n = 0$, la formule proposée est le théorème fondamental :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la formule vérifiée pour ce n . On

considère alors f de classe \mathcal{C}^{n+2} . On calcule :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \\ &\quad \text{par H.R. à } f \text{ qui est } \mathcal{C}^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \left[\frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_0^x \\ &\quad - \int_0^x \frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \\ &\quad \text{par parties avec } f^{(n+1)} \text{ qui est } \mathcal{C}^1 \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \end{aligned}$$

- Par le principe de récurrence, la formule est établie pour tout n .

□

Inégalité de Taylor-Lagrange.

Si f est \mathcal{C}^{n+1} sur I et $0 \in I$, alors :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{n+1}\|_\infty^I$$

Corollaire. Pour $a \in I$, on a :

$$\left| f(a+x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{n+1}\|_\infty^I$$

3.6 Annexe : une démonstration du théorème sur les sommes de Riemann

Théorème.

Pour f k -lipschizienne sur $[a, b]$:

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$$

Remarque. Le résultat est vrai, et à utiliser, sous l'hypothèse moins forte que f est continue par morceaux sur $[a, b]$.

Preuve. On ne traite que ici que le cas où f est k -lipschitzienne, par exemple lorsque f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, avec $\|f'\|_\infty \leq k$. On note :

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

On calcule, en posant $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) - S_n(f) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k) - f(t) dt \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(a_k) - f(t)| dt \right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} k(t - a_k) dt \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(k \left[\frac{(t - a_k)^2}{2} \right]_{a_k}^{a_{k+1}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(k \frac{(b-a)^2}{2n^2} \right) \\ &= \frac{k(b-a)^2}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

□

3.7 Complément : une autre démonstration par la continuité uniforme

Définition. Soit f continue sur $[a, b]$.

Pour $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ subdivision de $[a, b]$, on appelle **pas** de la subdivision le réel $\delta(\sigma) = \max_{0 \leq i \leq n-1} x_{i+1} - x_i$.

Définition. On appelle **somme de Riemann** associée à f et σ toute somme qui peut s'écrire sous la forme :

$$R_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i)$$

où $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Remarque. Dans le paragraphe précédent, les subdivisions considérées sont de pas $\frac{b-a}{n}$ et ξ_i est toujours choisi comme étant égal à x_i .

Théorème.

Pour f continue par morceaux sur $[a, b]$.

$$R_\sigma(f) \xrightarrow[\delta(\sigma) \rightarrow 0]{} \int_a^b f(t) dt$$

Preuve. On traite le cas des fonctions continues sur $[a, b]$, celles des fonctions continues par morceaux s'y ramenant comme au § 3.2.

On interprète $R_\sigma(f)$ comme l'intégrale d'une fonction en escalier sur $[a, b]$:

$$R_\sigma(f) = \int_a^b h(t) dt$$

où h est constante égale à $f(\xi_i)$ sur chaque $[x_i, x_{i+1}]$. Fixons $\varepsilon > 0$.

La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$, donc est uniformément continue. Par définition appliquée à $\frac{\varepsilon}{b-a}$, il existe donc $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in [a, b], |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Si $\delta(\sigma) \leq \eta$, alors pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$ et tout $t \in]x_i, x_{i+1}[$:

$$|t - \xi_i| \leq x_{i+1} - x_i \leq \delta(\sigma) \leq \eta$$

donc :

$$|f(t) - h(t)| = |f(t) - f(\xi_i)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt - R_\sigma(f) \right| &= \left| \int_a^b f(t) - h(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(t) - h(t)| dt \\ &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dt \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

On a montré, en revenant à la définition, que :

$$R_\sigma(f) \xrightarrow[\delta(\sigma) \rightarrow 0]{} \int_a^b f(t) dt$$

□

3.8 Annexe : deux primitives

Proposition. Sur \mathbb{R} :

$$\int^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \text{cte}$$

Preuve. On calcule :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt &= \int_0^{\operatorname{sh}^{-1}(x)} \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}} \operatorname{ch} u du \\ &\quad \text{en posant } t = \operatorname{sh} u, dt = \operatorname{ch} u du \\ &\quad u \text{ de } 0 \text{ à } \operatorname{sh}^{-1}(x) \\ &= \int_0^{\operatorname{sh}^{-1}(x)} 1 du \\ &\quad \text{car } \operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1 \\ &= \operatorname{sh}^{-1}(x) \end{aligned}$$

On résout donc l'équation :

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} y = x &\iff \frac{e^y - e^{-y}}{2} = x \\ &\iff e^{2y} - 2e^y x - 1 = 0 \\ &\iff e^y \text{ est racine de } t^2 - 2tx - 1 \\ &\iff e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1} \text{ avec } \Delta = \dots \\ &\iff y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \text{ car } e^y > 0 \end{aligned}$$

donc $\operatorname{sh}^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. □

Proposition. Sur $]1, +\infty[$:

$$\int^x \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} dt = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + \text{cte}$$

Preuve. On calcule :

$$\begin{aligned} \int_2^x \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}} dt &= \int_{\operatorname{ch}^{-1}(2)}^{\operatorname{ch}^{-1}(x)} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 u - 1}} \operatorname{sh} u du \\ &\quad \text{en posant } t = \operatorname{ch} u, dt = \operatorname{sh} u du \\ &\quad u \text{ de } \operatorname{ch}^{-1}(2) \text{ à } \operatorname{ch}^{-1}(x) \\ &\quad \operatorname{ch} \text{ réalise bijection } [0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[\\ &= \int_{\operatorname{ch}^{-1}(2)}^{\operatorname{ch}^{-1}(x)} \frac{\operatorname{sinh} u}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 u}} du \\ &\quad \text{car } \operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1 \\ &= \int_{\operatorname{ch}^{-1}(2)}^{\operatorname{ch}^{-1}(x)} 1 du \\ &\quad \text{car } \operatorname{sh} u \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \\ &= \operatorname{ch}^{-1}(x) - \operatorname{ch}^{-1}(2) \end{aligned}$$

On résout donc l'équation, où $y \geq 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} y = x &\iff \frac{e^y + e^{-y}}{2} = x \\ &\iff e^{2y} - 2e^y x + 1 = 0 \\ &\iff e^y \text{ est racine de } t^2 - 2tx + 1 \\ &\iff e^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1} \text{ avec } \Delta = \dots \\ &\iff y = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) &= \ln\left(\frac{x - (x^2 - 1)}{x + \sqrt{x^2 - 1}}\right) \text{ quantité conjuguée} \\ &= -\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \end{aligned}$$

Comme y est positif, on conserve la plus grande des deux valeurs, et donc $\operatorname{ch}^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

□

Exercices et résultats classiques à connaître**Lemme de Riemann-Lebesgue****640.1**

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que :

$$\int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0$$

Intégrale de Wallis**640.2**

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$$

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

(b) Donner une expression de I_n à l'aide de factorielles.

Utilisation d'une somme de Riemann**640.3**

Déterminer un équivalent simple de :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + n^2}$$

Utilisation d'une formule de Taylor**640.4**

Utiliser une formule de Taylor pour montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Exercices du CCINP**640.5**

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans \mathbb{R} .

Démontrer que $\int_a^b h(x)dx = 0 \implies h = 0$.

Exercices**640.6**

Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$$

640.7

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue et T périodique. Montrer que la valeur de :

$$\int_a^{a+T} f(t) dt$$

ne dépend pas du choix de a . On la note $\int_{[T]} f(t) dt$.

640.8

Utiliser l'intégration par parties pour calculer :

(a) $\int_0^x e^{-t} \sin t dt$

(b) $\int_1^x \frac{\ln t}{t^3} dt$

(c) $\int_1^x \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^2} dt$

(d) $\int_0^x t^3 \sin t dt$

79.1**640.9**

Calculer la dérivée, sur $]1, +\infty[$, de :

$$x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

640.10

Montrer la convergence de la suite de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

640.11

Utiliser une formule de Taylor pour montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

Calculs d'intégrales et de primitives**640.12**

Calculer les primitives suivantes :

(a) $\int \frac{\operatorname{Arctan}^2 t}{1+t^2} dt$

(b) $\int \frac{\operatorname{Arcsin} t}{\sqrt{1-t^2}} dt$

(c) $\int \frac{1}{t \ln^5 t} dt$

(d) $\int \sin t e^{2t} dt$

(e) $\int \frac{e^{2t}}{1+e^t} dt$

(f) $\int \frac{1}{\cos tw} dt$

640.13

Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \tan t dt$

(b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 t dt$

(c) $\int_0^1 \operatorname{Arctan} t dt$

(d) $\int_0^1 \frac{1}{t + \sqrt{1 - t^2}} dt$

(e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^5 t dt$

(f) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 t dt$

(g) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t} dt$

640.14

Calculer les primitives des expressions suivantes :

(a) $\frac{1}{x^3 - x}$

(b) $\frac{x - 2}{x(x + 1)^2}$

(c) $\frac{x + 1}{x^3 + x}$

(d) $\frac{x - 1}{x^2 + 2x + 2}$

(e) $\frac{x}{x^3 - 1}$

(f) $\frac{x}{x^4 + 1}$

640.15

Déterminer une primitive des expressions suivantes :

(a) $\sin^4 x$

(b) $\sin x \cos^3 x$

(c) $\cos^5 x$

640.16

Déterminer une primitive des expressions suivantes :

(a) $\frac{1}{a^2 + x^2}$

(b) $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

640.17

Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, d'écriture algébrique $\lambda = a + ib$. Déterminer une primitive sur \mathbb{R} de :

$$t \mapsto \frac{1}{t - \lambda}$$

640.18

Calculer :

$$\int_0^\pi t \sin(t) e^{-t} dt$$

640.19

Calculer, par intégration par parties :

(a) $\int_0^1 (t - 1)e^{2t} dt$

(b) $\int_0^1 \ln(t^2 + 1) dt$

(c) $\int_0^{\frac{1}{2}} \operatorname{Arcsin} t dt$

(d) $\int_0^\pi t \sin t dt$

(e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2 t} dt$

(f) $\int_0^1 t(\operatorname{Arctan} t)^2 dt$

640.20

Calculer :

$$\int_0^{e^\pi} \sin(\ln t) dt$$

Petits problèmes d'entraînement**640.21**

On considère, pour $x > 0$:

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{x+t} dt$$

Démontrer que f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et donner l'expression de sa dérivée.
Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

640.22

- (a) Pour $\alpha \geq 0$, utiliser une somme de Riemann pour déterminer un équivalent simple de :

$$v_n = \sum_{k=1}^n k^\alpha$$

- (b) Vérifier le résultat pour $\alpha = 1, \alpha = 2$.

640.23

Soit f et g deux fonctions continues sur \mathbb{R}_+ . On définit :

$$f * g : x \mapsto \int_0^x f(x-t)g(t) dt$$

Montrer que $g * f = f * g$.

640.24

Pour $n \geq 2$, on pose :

$$w_n = \int_{n-1}^n \frac{1}{t} dt - \frac{1}{n}$$

- (a) Écrire w_n sous la forme d'une seule intégrale sur $[n-1, n]$, puis montrer, par exemple à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$w_n = \int_{n-1}^n \frac{t - (n-1)}{t^2} dt$$

- (b) En déduire que :

$$w_n = \frac{1}{2n^2} + \int_{n-1}^n \frac{(t - (n-1))^2}{t^3} dt$$

puis que :

$$w_n = \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

- (c) En déduire que $\sum_{n \geq 2} w_n$ converge. On note σ sa somme.

- (d) Montrer qu'il existe un réel M tel qu'à partir d'un rang n_0 , on ait :

$$\left| w_n - \frac{1}{2n^2} \right| \leq \frac{M}{n^3}$$

En déduire que, pour $n \geq n_0$:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(w_k - \frac{1}{2k^2} \right) \right| \leq \frac{M}{3n^2}$$

- (e) Montrer que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

- (f) Conclure de tout ce qui précède l'existence d'une constante γ telle que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

640.25

Pour $x > 0$, on pose :

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{t}{1+t+t^2+t^3} dt$$

- (a) Montrer que F est définie et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

- (b) Calculer $F'(x)$ et en déduire une expression simple de $F(x)$, pour tout $x > 0$.

640.26

Soit f définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t^2}}{t} dt$$

- (a) Montrer que f est bien définie sur \mathbb{R}^* , et étudier sa parité.

- (b) Déterminer la limite de f en 0.

On prolonge f par continuité en 0 à l'aide de la valeur obtenue.

- (c) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} .

- (d) Étudier la limite de f en $+\infty$.

640.27

Pour $x \in]0, 1[$, on pose :

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$$

et on pose $F(1) = \ln 2$.

(a) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$.

Pour $x \in]0, 1[$, préciser le signe de $F'(x)$ et celui de $F(x)$.

(b) Montrer que, pour tout $t \in [\frac{1}{2}, 1[$:

$$0 \leq \frac{t-1}{t \ln(t)} \leq \frac{1}{t}$$

En déduire que $\int_x^{x^2} \frac{t-1}{t \ln(t)} dt \xrightarrow{x \searrow 1} 0$.

(c) Calculer, pour $x \in]0, 1[$, $\int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln(t)} dt$.

(d) Montrer que F est continue en 1.

(e) Est-ce que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1]$?

640.28

Étudier la convergence et déterminer la limite éventuelle de la suite de terme général :

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 - \frac{k}{n}}$$

640.29

Déterminer les limites pour $n \rightarrow +\infty$ de :

$$(a) \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

$$(b) \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2}$$

$$(c) \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}$$

640.30

Montrer que, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

640.31

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nt) \cos^n t dt$$

640.32

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{n\pi} t |\sin t| dt$$

640.33

(a) Justifier :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left(\cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right) \right) dt$$

(b) En déduire la valeur de :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t) dt$$

640.34

Soit $\alpha \in]0, \pi[$. En utilisant le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$, calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x \cos \alpha} dx$$

640.35

Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\int_{-1}^1 P(t) dt = -i \int_0^\pi P(e^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$$

640.36

Soit $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Déterminer la limite pour $n \rightarrow +\infty$ de :

$$\int_0^\pi f(t) |\sin(nt)| dt$$

640.37

(a) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. À quelle condition portant sur f a-t-on l'égalité :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| = \int_a^b |f(t)| dt$$

(b) Et si f est à valeurs complexes ?

640.38

Calculer :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{\operatorname{Arcsin} t} dt$$

640.39

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$X^{2n} - 1 = (X^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1 \right)$$

(b) Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Déduire du calcul précédent la valeur de :

$$\int_0^\pi \ln(a^2 - 2a \cos t + 1) dt$$

640.40

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} . On suppose :

$$f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0 \text{ et } f^{(n+1)}(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$$

Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$f^{(k)}(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$$