Compléments sur les matrices

Je me souviens

1. Qu'est-ce qu'une **matrice** ?
2. À quoi ça sert ?
3. Qu'est-ce que la matrice d'un vecteur ? d'une famille de vecteurs ? d'une application linéaire ?
4. Y a-t-il un isomorphisme entre les applications linéaires et les matrices ?
5. Qu'est-ce que l'application linéaire canoniquement associée à une matrice ?
6. Que sont l'image et le noyau d'une matrice ?
7. Qu'est-ce que le **rang** d'une matrice ?
8. Qu'est-ce que la **transposée** d'une matrice ?
9. Qu'est-ce que la **trace** d'une matrice ?

1 Matrice comme tableau de scalaires

1.1 Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$

Proposition. Soit n, p, q des entiers. L'application $\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{nq}(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \mapsto & A \times B \end{array}$ est bilinéaire.

En passant.

$$AB = 0 \iff \operatorname{Im} B \subset \operatorname{Ker} A$$

Proposition. $(\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Il est de dimension finie np.

Définition. La **base canonique** de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est $(E_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ où les coefficients de E_{ij} sont tous nuls, sauf celui de la i-ème colonne, j-ème ligne qui vaut 1.

Remarque. *Ainsi, pour $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$, on a :*

$$A = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} a_{ij} E_{ij}$$

Proposition. Si les dimensions des matrices sont compatibles, par exemples pour des matrices carrées, on a :

$$E_{ij} \times E_{k\ell} = \delta_{jk} E_{i\ell}$$

Proposition. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ est una algèbre, non commutative et non intègre.

Proposition. $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe, non commutatif.

Remarque. *Il est remarquable que, pour une matrice carrée, l'existence d'un inverse à droite ou à gauche soit équivalent à l'existence d'un inverse.*

1.2 Opérations par blocs

1.2.1 Les blocs-colonnes, les blocs-lignes

Exemple. Calculer le produit :

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Proposition. Si C est une colonne, le produit AC est une colonne, combinaison linéaire des colonnes de A.

Proposition. Si A et B sont des matrices telles que le produit AB est compatibles, on a :

$$AB = \big(AB_1 \mid \cdots \mid AB_q\big)$$

où $B_1, \ldots, B_q$ sont les colonnes de B.

Proposition. Si A et B sont des matrices telles que le produit AB est compatibles, on a :

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \hline \vdots \\ \hline A_n B \end{pmatrix}$$

où $A_1, \ldots, A_n$ sont les lignes de A.

1.2.2 Matrices par blocs

Considérer une matrice par blocs, c'est regrouper des coefficients adjacents dans la matrice en blocs de sous-matrices.

Exemple. La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ peut être vue par blocs en regroupant :

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \text{ soit } \left(\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline C & D \end{array}\right)$$

en notant $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$.

Définition. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on considère des matrices :

$$A_{ij} \in \mathcal{M}_{n_i p_j}(\mathbb{K})$$

et on note $N = n_1 + \cdots + n_n$, $P = p_1 + \cdots + p_p$. On définit alors la **matrice par blocs** :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{NP}(\mathbb{K})$$

Définition. En conservant les notations précédentes, on dit que A est :

- **diagonale par blocs** lorsque pour tout i, $n_i = p_i$ et, pour tout i, j :

$$i \neq j \implies A_{ij} = 0$$

- **triangulaire supérieure par blocs** lorsque pour tout i, $n_i = p_i$ et, pour tout i, j :

$$i > j \implies A_{ij} = 0$$

Remarque. *Une matrice diagonale par blocs (resp. triangulaire par blocs) n'est pas, en général, diagonale (resp. triangulaire).*

Exemple. La matrice précédente est diagonale par blocs.

Combinaisons linéaires de matrices par blocs. Soit A et B deux matrices par blocs de dimensions compatibles pour les combinaisons linéaires :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{np} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{np} \end{pmatrix}$$

où pour chaque (i, j) A_{ij} et B_{ij} sont de même dimension, dans $\mathcal{M}_{n_i p_i}(\mathbb{K})$.
Alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :

$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} + \mu B_{11} & \cdots & \lambda A_{1p} + \mu B_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{n1} + \mu B_{n1} & \cdots & \lambda A_{np} + \mu B_{np} \end{pmatrix}$$

Remarque. *Ainsi, lorsque les blocs sont compatibles, les combinaisons linéaires se font bloc par bloc.*

Multiplications de matrices par blocs. Soit A et B deux matrices par blocs de dimensions compatibles pour la multiplication :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{np} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{p1} & \cdots & B_{pq} \end{pmatrix}$$

où pour chaque (i, j, k), $A_{ik} \in \mathcal{M}_{n_i p_k}(\mathbb{K})$ et $B_{kj} \in \mathcal{M}_{p_k q_j}$. Alors le produit AB s'écrit par blocs :

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nq} \end{pmatrix}$$

où $C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}$, pour tout i, j.

Remarque. *Il importe, avant d'envisager un produit par blocs, de bien vérifier la compatibilité pour le produit des dimensions des différents blocs.*

Corollaire. Le produit de deux matrices diagonales par blocs (resp. triangulaires supérieures par blocs) est une matrice diagonale par blocs (resp. triangulaire supérieure par blocs).

2 Matrice comme représentation d'un vecteur, d'une famille de vecteurs

Définition. Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout $x \in E$, on note $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}$. On appelle **matrice de x relativement à la base $\mathcal{B}$** la matrice :

$$X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$$

Remarque. *$\mathcal{B}$ étant fixée, l'application $x \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ est un isomorphisme entre E et $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.*

Remarque. *L'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un isomorphisme entre $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$.*

Définition. Avec les même notations, où $\mathcal{B}$ est fixée, on considère $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ une famille de p vecteurs. Pour $j \in \{1, \dots, p\}$, on note $(x_{1j}, \dots, x_{nj}) \in \mathbb{K}^n$ les coordonnées de x_j dans $\mathcal{B}$. On appelle **matrice de $(x_1, \dots, x_p)$ relativement à la base $\mathcal{B}$** la matrice :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p) = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$$

Proposition. Avec les même notations, où $\mathcal{B}$ est fixée, on considère $(f_1, \dots, f_n) \in E^p$ une famille de n vecteurs. Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, on note $(a_{1j}, \dots, a_{nj}) \in \mathbb{K}^n$ les coordonnées de x_j dans $\mathcal{B}$. La matrice de $(f_1, \dots, f_n)$ relativement à la base $\mathcal{B}$ est la matrice :

$$P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ est une base de E si et seulement si P est inversible.
Dans ce cas, P est la **matrice de passage** de l'« ancienne » base $\mathcal{B}$ à la « nouvelle » base $\mathcal{B}'$.

Remarque. *Dans une matrice de passage, on exprime en colonne les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base en fonction des vecteurs de l'ancienne base.*

3 Matrice comme représentation d'application linéaire

3.1 Matrice d'application linéaire

Définition. Soit E, F deux espaces de dimensions finies p et n respectivement, munies des bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** :

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$$

où, pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, $(a_{1j}, \dots, a_{nj})$ est le n-uplet des coordonnées de $u(e_j)$ relativement à la base $\mathcal{C}$.

Remarque. *Dans une matrice d'application linéaire, on exprime en colonne les coordonnées des vecteurs $u(e_j)$ en fonction des vecteurs f_i.*

Théorème.

Avec les mêmes notations, où $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des bases fixées de E et F respectivement :

$$\begin{array}{rrcl} \phi : & \mathcal{L}(E, F) & \to & \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \\ & u & \mapsto & \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C}) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels

Théorème.

Avec les mêmes notations, où $\mathcal{B}$ est une base fixée de E :

$$\begin{array}{rrcl} \phi : & \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{M}_{n}(\mathbb{K}) \\ & u & \mapsto & \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) \end{array}$$

est un isomorphisme d'algèbres, qui induit un isomorphisme de groupes entre $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ et $(\mathrm{GL}n(\mathbb{K}), \times)$.

Proposition. Avec les mêmes notations, et en notant $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(y)$, et $M = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C})$, on a :

$$y = u(x) \iff Y = MX$$

3.2 Théorème du rang matriciel

Définition. Le rang d'une matrice A, c'est la dimension de $\mathrm{Im}\, A$, c'est-à-dire le rang de la famille de ses colonnes.

Proposition. Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\mathrm{rg}(A) + \dim \mathrm{Ker}\, A = p \qquad \text{(le nombre de colonnes de } A)$$

Théorème.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\mathrm{rg}(A) + \dim \mathrm{Ker}\, A = n$$

3.3 Retour sur la matrice de passage

Proposition. Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. Alors :

$$P = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})$$

Corollaire. L'inverse de P est la matrice de passage « dans l'autre sens » :

$$\text{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')^{-1} = \text{Pass}(\mathcal{B}' \to \mathcal{B})$$

4 Formules de changement de base

Remarque. *Toutes les formules de changement de base doivent être connues sous la forme « expression dans l'ancienne base » en fonction de l'« expression dans la nouvelle base ».*

4.1 Changement de base pour un vecteur

Théorème.

Soit E un espace vectoriel muni des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On note $P = \text{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$.
Soit $x \in E$ un vecteur. On note $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x)$. Alors :

$$X = PX'$$

4.2 Changement de base pour un endomorphisme

Théorème.

Soit E un espace vectoriel muni des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On note $P = \text{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. On note $A = \text{Mat}(u, \mathcal{B})$ $A' = \text{Mat}(u, \mathcal{B}')$. Alors :

$$A = PA'P^{-1}$$

4.3 Changement de base pour une application linéaire

Proposition. Soit E un espace vectoriel muni des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On note $P = \text{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{B}')$.
Soit F un espace vectoriel muni des bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. On note $Q = \text{Pass}(\mathcal{C} \to \mathcal{C}')$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. On note $A = \text{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C})$ $A' = \text{Mat}(u, \mathcal{B}', \mathcal{C}')$. Alors :

$$A = QA'P^{-1}$$

5 Matrices semblables

Définition. Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** si et seulement s'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A = PBP^{-1}$$

Théorème.

Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, c'est-à-dire :

$$\exists E \text{ espace vectoriel }, \exists u \in \mathcal{L}(E),\ \exists \mathcal{B}, \mathcal{B}' \text{ bases de } E \text{ t.q. } A = \text{Mat}(u, \mathcal{B}) \text{ et } B = \text{Mat}(u, \mathcal{B}')$$

6 Trace d'une matrice

Définition. La **trace d'une matrice carrée** est la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Proposition.

- tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Pour A, B telles que AB et BA sont carrées :

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

Corollaire. Deux matrices semblables ont la même trace.

Définition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **trace de** u la trace de toute matrice représentant u.

Proposition. tr est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$ vérifiant, pour tout $u, v \in \mathcal{L}(E)$:

$$\mathrm{tr}(u \circ v) = \mathrm{tr}(v \circ u)$$

Proposition. La trace d'un projecteur est égale à son rang.

7 Sous-espaces stables

7.1 Sous-espaces stables par un endomorphisme

Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que F **est stable par** u si et seulement si $\forall x \in F,\ u(x) \in F$.

Remarque. *On peut écrire $u(F) \subset F$, en utilisant la notion d'image directe d'un ensemble par une application. L'intérêt de cette notion vient surtout du fait que l'on peut alors donner la définition suivante :*

Définition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. On peut définir :

$$u_F : \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$$

qui en un endomorphisme de F, appelé **endomorphisme induit**.

Remarque. *Ce n'est pas exactement la restriction de u à F, puisque le but aussi est réduit à F.*

Proposition. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E stables par u, alors $F + G$ et $F \cap G$ sont aussi stables par u.

Théorème.

Soit u et v deux endomorphismes de E qui commutent. Alors $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ sont stables par v.

Corollaire. Soit u et v deux endomorphismes de E qui commutent. Alors pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Ker}(u-\lambda \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}(u-\lambda \mathrm{Id})$ sont stables par v.

7.2 Stabilité et matrices par blocs

Proposition. Soit E un espace vectoriel de dimension n, F un sous-espace vectoriel de dimension p. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de E adaptée à F. Soit enfin $u \in \mathcal{L}(E)$. On a la caractérisation suivante :
F est stable par u si et seulement si la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est la matrice de l'endormophisme induit u_F.

Proposition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Les F_i sont tous stables par u si et seulement si la matrice de u dans une base $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ adaptée à la somme directe est diagonale par blocs :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

où $A_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$ est la matrice de l'endomorphisme induit u_{F_i}.

Corollaire. Soit E un espace de dimension finie n, de base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme laissant stable les n droites vectorielles $F_i = \mathrm{Vect}(e_i)$. Alors, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où chaque $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

8 Annexes

8.1 Rappel : opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes

Définition. Les opérations élémentaires sur les lignes sont :

- $L_i \leftrightarrow L_j$
- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $i \neq j$

On définit les mêmes opérations sur les colonnes.

On peut interpréter ces opérations élémentaires en termes de produits matriciels.

Calcul préliminaire. On considère $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$.

- Que vaut AE_{ij}, où $E_{ij} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est une matrice élémentaire ?
- Que vaut $E_{ij}A$, où $E_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice élémentaire ?

Proposition. On considère

$$P_{i,j} = \mathrm{I}_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$$

que l'on appelle **matrice de permutation**, même si on devrait plutôt l'appeller matrice de transposition.
Alors $P_{i,j} \times A$ est la matrice A où l'on a échangé les lignes L_i et L_j.
D'autre part $P_{i,j}^2 = I_n$ donc $P_{i,j}$ est inversible.

Proposition. On considère

$$D_{i,\lambda} = \mathrm{I}_n + (\lambda - 1)E_{ii}$$

que l'on appelle **matrice de dilatation**.
Alors $D_{i,\lambda} \times A$ est la matrice A où la ligne i a été multipliée par λ.
D'autre part $D_{i,\lambda} D_{i,\frac{1}{\lambda}} = I_n$ donc $D_{i,\lambda}$ est inversible.

Proposition. On considère

$$T_{i,j,\lambda} = \mathrm{I}_n + \lambda E_{ij}$$

que l'on appelle **matrice de transvection**.
Alors $T_{i,j,\lambda} \times A$ est la matrice A où l'on a effectué $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
D'autre part $T_{i,j,\lambda} T_{i,j,-\lambda} = I_n$ donc $T_{i,j,\lambda}$ est inversible.

Remarque. *On dispose des résultats analogues quant aux opérations sur les colonnes, en multipliant à droite par les matrices $P_{i,j}$, $D_{i,\lambda}$ et $T_{i,j,\lambda}$.*

Proposition.

- Les opérations élémentaires sur les colonnes ne changent pas l'image d'une matrice.
- Les opérations élémentaires sur les lignes ne changent pas le noyau d'une matrice.

Remarque. *On se souvient que les opérations élémentaires sur les lignes permettent de résoudre les systèmes linéaires par la méthode du pivot de Gauss, de montrer l'inversibilité et calculer l'inverse d'une matrice carrée par la méthode de Gauss-Jordan.*

8.2 Rappel : rang

Définition.

- Si u est une application linéaire, son **rang** est, quand elle est finie, la dimension de son image :

$$\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}\, u)$$

- Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs, son **rang** est, dans elle est finie, la dimension de l'espace qu'elle engendre :

$$\mathrm{rg}\left((x_i)_{i\in I}\right) = \dim\left(\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}\right)$$

- Si $A = \begin{pmatrix} C_1 \mid \cdots \mid C_p \end{pmatrix}$ est une matrice, dont les colonnes sont notées C_j, sont rang est la dimension de son image, c'est-à-dire de l'espace engendré par ses colonnes :

$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}\, A) = \dim\left(\mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p)\right)$$

Proposition. Si P et Q sont des matrices inversibles, alors :

$$\mathrm{rg}(PAQ) = \mathrm{rg}(A)$$

Théorème.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement s'il existe deux matrices inversibles (et donc carrées) $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $V \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que :

$$A = U J_r V$$

où J_r est définie par blocs :

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$$

Corollaire. Une matrice et sa transposée ont le même rang.

Première preuve, vectorielle. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à A. On cherche une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^p$ et une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{K}^n$ telles que :

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = J_r$$

On considère G supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$ dans $\mathbb{K}^p$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$ adaptée à :

$$\mathbb{K}^p = G \oplus \mathrm{Ker}\, u$$

c'est-à-dire que $\mathcal{B} = (\underbrace{e_1, \dots, e_r}_{\text{base de } G}, \underbrace{e_{r+1}, \dots, e_p}_{\text{base de } \mathrm{Ker}\, u})$. Alors le théorème du rang, dans sa version « géométrique », indique que $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $\mathrm{Im}\, u$, donc en particulier une famille libre, que l'on peut compléter en une base de $\mathbb{K}^n$:

$$\mathcal{C} = (u(e_1), \dots, u(e_r), f_{r+1}, \dots, f_n)$$

On a alors $\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = J_r$, et donc le résultat par la formule de changement de base. ☐

Seconde preuve, matricielle. L'interprétation des opérations élémentaires en termes de produits à droite ou à gauche par des matrices inversibles montre qu'il suffit de trouver une suite de telles opérations qui fasse passer de la matrice A à la matrice J_r.
Si $A = (0)$, c'est J_0.
Sinon, en permutant deux lignes et/ou deux colonnes, on trouve une matrice $P_1 A Q_1$ dont le coefficient α_{11} est non nul. En multipliant à gauche (ou à droite si on préfère) par $D_1\left(\frac{1}{\alpha_{11}}\right)$, on obtient une matrice $P_2 A Q_2$ dont le coefficient en haut à gauche vaut 1.
En multipliant à gauche par les matrices $T_{i,1,\lambda_i}$ pour annuler les autres coefficients de la première colonnes (c'est le pivot de Gauss), puis à droite par les matrices T_{1,j,μ_j}, on trouve une matrice $P_3 A Q_3$ de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

Il reste à travailler sur le bloc de taille réduite, et donc à mettre en place une récurrence. ☐

Théorème.

Le rang d'une matrice A est la dimension maximale d'une matrice carrée inversible extraite de A.
Plus précisément, pour $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$: $\text{rg}(A) = r$ si seulement s'il existe $I \subset \{1, \ldots, n\}$ et $J \subset \{1, \ldots, p\}$ avec $\text{Card}(I) = \text{Card}(J) = r$ et $(a_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ inversible ; et toutes les matrices carrées extraites de taille $> r$ ne sont pas inversibles.

Preuve.

- Soit $A = \Big(C_1 \mid \cdots \mid C_p\Big) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ de rang r. Montrons qu'on peut en extraire une matrice inversible de taille $r \times r$.
$$\text{rg}(C_1, \ldots, C_p) = r$$
donc par le théorème de la base extraite, il existe $J \subset \{1, \ldots, p\}$ telle que $(C_j)_{j \in J}$ soit une base de $\text{Vect}(C_1, \ldots, C_p)$, et $\text{Card}(J) = r$.
La matrice $A_1 = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ j \in J}}$, obtenue en ne conservant que les r colonnes de A, est de rang r. On note $A_1 = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$. La famille des lignes, $(L_1, \ldots, L_n)$, est de rang r. On peut donc en extraire $(L_i)_{i \in I}$ une base de $\text{Vect}(L_1, \ldots, L_n)$, avec $\text{Card}(I) = r$.
La matrice $A_2 = (a_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ convient.
- Montrons maintenant qu'on ne peut pas extraire de A de matrice inversible de taille $m \times m$, où $m > r$. On considère $B = (a_{ij})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$, avec $\text{Card}(I) = \text{Card}(J) = m > r$.
Comme $m > r$, la famille $(C_j)_{j \in J}$ est liée, donc il existe des scalaires λ_j non tous nuls tels que $\sum_{j \in J} \lambda_j C_j = 0$.
C'est donc que :
$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \ \sum_{j \in J} \lambda_j a_{ij} = 0$$
et donc, en particulier :
$$\forall i \in I, \ \sum_{j \in J} \lambda_j a_{ij} = 0$$
ce qui exprime que la famille des colonnes de B est liée. C'est donc que la matrice B n'est pas inversible.

□

8.3 Annexe : matrices équivalentes

Définition. Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont **équivalentes** si et seulement s'il existe deux matrices inversibles U, V telles que :
$$B = UAV$$

Remarque. $U \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, $V \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$.

Proposition. La relation « est équivalente » est une relation d'équivalence.

Théorème.

Deux matrices de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

8.4 Annexe : un bloc comme matrice d'une application linéaire composée

Étude. Soit E un espace vectoriel de dimension n, F un sous-espace vectoriel de dimension p. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base de E adaptée à F. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Sa matrice relativement à $\mathcal{B}$ est :
$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix}$$
où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Notant $G = \text{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$, on a $E = F \oplus G$. On considère p le projecteur sur F de direction G. Alors F est stable par $p \circ u$, et A est la matrice de l'endomorhpisme induit $(p \circ u)_{|F}$.

Exercices et résultats classiques à connaître

Raisonner par analyse-synthèse

22.1

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant $u^2 = 0$ et $u \neq 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Des matrices semblables dans $\mathbb{C}$ le sont dans $\mathbb{R}$

22.2

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose A et B semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Matrice à diagonale strictement dominante

22.3

Soit $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

Montrer que A est inversible.

Matrices de rang 1

22.4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

(a) Montrer qu'il existe $X, Y \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$ non nulles telles que $A = XY^\top$.

(b) En déduire l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2 = \lambda A$, et vérifier que $\lambda = \mathrm{tr}(A)$.

Exercices du CCINP

22.5 59.1

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
On pose : $\forall\, P \in E,\ f\,(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif

   (b) en utilisant une matrice de f.

22.6 69.1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ où a est un réel.

1. Déterminer le rang de A.

Exercices

22.7

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On appelle $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.
On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $e_1 = (1, 1, 0)$, $e_2 = (-1, 1, 1)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$.

(a) Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Écrire la matrice de f dans cette base.

(c) Sans calcul, déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Im} f$.

22.8

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On pose $e'_1 = e_2 + e_3$, $e'_2 = e_1 - e_2 + e_3$, $e'_3 = e_1 - e_2$.

(a) Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E.

(b) Former la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.

(c) Exprimer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. Calculer P^{-1}.

(d) Donner la relation liant les trois matrices A, D et P.

(e) En déduire une expression de A^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

22.9

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On appelle $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.

(a) Déterminer le noyau et l'image de f.

(b) Vérifier que ces espaces sont supplémentaires, et exprimer la matrice de f dans une base adaptée.

(c) Décrire géométriquement l'application f.

22.10

(a) Déterminer le noyau et l'image de :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A est :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

22.11

(a) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des espaces supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(b) Préciser leurs dimensions.

22.12

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Petits problèmes d'entrainement

22.13 ✍

Soit $A = (a_{ij})_{0 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice, dont les lignes et les colonnes sont indexées à partir de 0, et dont le coefficient est :

$$a_{ij} = \binom{j}{i}$$

On note $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ l'endomorphisme dont A est la matrice dans la base canonique.

(a) Exprimer simplement $\varphi(P)$ pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

(b) Montrer que A est inversible, et calculer A^{-1}.

22.14 ✍

Montrer que :

$$\mathrm{Vect}\{AB - BA,\ A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$$

est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

22.15

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que f peut être représenté par la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) En déduire une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$.

(c) Exprimer en fonction de n le terme général des trois suites définies par :

$$x_0 = 1,\ y_0 = 0,\ z_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1} = y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n - y_n \end{cases}$$

22.16

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation :

$$X + X^\top = \mathrm{tr}(X) A$$

d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.