421.1

Soit p un réel avec $p > 1$. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on définit :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

On souhaite montrer que cela définit une norme sur $\mathbb{K}^n$.

(a) Vérifier les axiomes des normes, sauf l'inégalité triangulaire.

On considère $q > 1$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

(b) Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$:

$$ab \leqslant \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

On définit comme ci-dessus $\|y\|_q$ pour $y \in \mathbb{K}^n$.

(c) Établir :

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q$$

Cette inégalité s'appelle l'inégalité de Hölder.

(d) En écrivant :

$$(|x_i| + |y_i|)^p = |x_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1} + |y_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1}$$

en déduire :

$$\|x + y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

Cette inégalité s'appelle l'inégalité de Minkowski.