Corso di Calcolo delle Probabilità e Statistica

Esercizi di calcolo combinatorio

Nota: Alcuni esercizi sono tradotti, più o meno fedelmente, dal libro *A first course in probability* di Sheldon Ross, quinta edizione, casa editrice Maxwell Macmillan.

Es.1 In quanti modi 7 buste numerate possono essere assegnate a 7 persone, se ognuna di esse riceve una busta?

Es.2 In quanti modi 7 buste numerate possono essere assegnate a 7 persone?

Es.3 In quanti modi 7 buste identiche possono essere assegnate a 7 persone?

Es.4 10 giocatori di tennis decidono di giocare un doppio.
a) Quante coppie distinte si possono formare?
b) Una volta formate le 5 coppie, quante distinte partite (coppia contro coppia) si possono giocare?

Es.5 Si consideri un mazzo di 40 carte (10 carte distinte per ciascuno dei quattro semi).
a) Quanti insiemi di 5 carte si possono avere?
b) Quanti insiemi di 5 carte possono avere 4 assi?
c) Quanti insiemi di 5 carte possono avere 4 carte di uguale valore?
d) Quanti insiemi di 5 carte possono avere 2 assi?
e) Quanti insiemi di 5 carte possono avere almeno 2 assi?
f) Quanti insiemi di 5 carte possono avere due coppie di carte di uguale valore, ma distinte fra loro?

Es.6 10 copie di un libro vengono distribuite in 5 scuole.
a) In quanti modi possono essere distribuiti i libri fra le scuole?
b) E se ad ogni scuola viene assegnato almeno un libro?

Es.7 Un'urna contiene 20 palline bianche e 10 palline nere.
a) Eseguendo 5 estrazioni senza reimbussolamento, in quanti casi si ottiene come esito dell'estrazione 3 palline bianche e 2 nere?
b) E se ad ogni estrazione segue il reimbussolamento?

Es.8 Si consideri un mazzo di 40 carte (10 carte distinte per ciascuno dei quattro semi). Alice, Bianca e Carlo estraggono dal mazzo rispettivamente 5, 4 e 3 carte.

a) Quante sono le possibili estrazioni in cui nessuno dei tre ha estratto coppe?

b) Quante sono le possibili estrazioni in cui Alice e Bianca non hanno estratto spade, mentre Carlo ne ha estratte esattamente 2?

c) Quante sono le possibili estrazioni in cui Alice e Bianca non hanno estratto spade, mentre Carlo ne ha estratte almeno 2?

d) Quante sono le possibili estrazioni in cui le carte di Alice e Bianca sono tutte carte di denari?

e) Quante sono le possibili estrazioni in cui Alice ha estratto 2 carte di denari e 2 carte di coppe?

Es.9 Si consideri un mazzo di 52 carte (13 carte distinte per ciascuno dei quattro semi). Vengono estratte 13 carte dal mazzo.

a) Quante sono le possibili estrazioni in cui le 13 carte hanno tutte valore diverso?

b) Quante sono le possibili estrazioni in cui le 13 carte sono tutte dello stesso seme?

c) Quante sono le possibili estrazioni in cui 8 delle 13 carte hanno lo stesso seme?

Es.10 La biglietteria di un teatro dispone di 100 biglietti numerati.

a) Scegliendone 4 a caso, quante sono le possibilità di avere estratto dei biglietti con numeri consecutivi?

b) E se si considera anche l'ordine con cui i biglietti vengono scelti?

Es.11 Una band composta da 4 ragazzi possiede 4 strumenti musicali.

a) Se ognuno di essi sà suonare ogni strumento, in quanti modi possono ripartirsi gli strumenti?

b) E se 2 dei suonatori sanno suonare solo 2 strumenti (gli stessi per entrambi)?

Es.12 Un bambino possiede dei mattoncini lego colorati: ne ha 6 rossi, 4 gialli, 1 verde e 1 blu. In quanti modi il bambino può riarrangiarli in colonna a formare una torre?

Es.13 In quanti modi le lettere delle parole seguenti possono essere riarrangiate per formare altre parole (non necessariamente con senso)?
a) PASTO;
b) PANINO;
c) PANNA;
d) ANNA.

Es.14 a) In quanti modi 3 ragazzi e 3 ragazze possono disporsi per ordine su di una panchina?
b) In quanti modi se ragazzi e ragazze sono tutti vicini fra loro ?
c) In quanti modi se solo i ragazzi siedono tutti vicini fra loro?
d) In quanti modi se non vi sono persone dello stesso sesso sedute a fianco?

Es.15 a)In quanti modi 8 persone possono sedersi per ordine su di una panchina?
b) In quanti modi se le persone A e B vogliono sedersi vicine?
c) In quanti modi se vi sono 4 uomini e 4 donne e non vi sono persone dello stesso sesso sedute a fianco?
d) In quanti modi se vi sono 5 uomini tutti seduti vicini?
e) In quanti modi se vi sono 4 coppie sposate, e ciascuna coppia è seduta assieme?

Es.16 Si dispone di 3 libri di letteratura, 2 libri di informatica ed 1 libro di matematica.
a) In quanti modi possono essere ordinati i libri su di uno scaffale?
b) In quanti modi se i libri di letteratura e quelli di matematica sono tutti vicini fra loro?
c) In quanti modi se i libri di letteratura sono tutti vicini?

Es.17 Uno studente ha deciso di vendere 2 libri fra i 6 di matematica, 7 di scienze, 4 di economia che possiede. Quante sono le scelte possibili se
a) i libri devono trattare lo stesso argomento;
b) i libri devono trattare argomenti diversi.

Es. 18 Da un gruppo di 8 donne e 6 uomini deve essere scelta una commissione formata da 3 donne e 3 uomini.

a) Quante diverse commissioni si possono formare?

b) E se 2 degli uomini rifiutano di lavorare insieme?

c) E se 2 delle donne rifiutano di lavorare insieme?

d) E se 1 uomo e 1 donna rifiutano di lavorare insieme?

Es.19 Se 12 persone sono divise a formare 3 commissioni, rispettivamente di 3, 4 e 5 persone, quante sono le possibili divisioni?

Es.20 a) In quanti modi 8 professori possono essere assegnati a 4 distinte scuole?

b) E se ad ogni scuola viene assegnato almeno 1 professore?

c) E se ad ogni scuola vengono assegnati 2 professori?

Es.21 Vi sono 20000 euro da investire su 4 possibili titoli azionari.

Ogni investimento deve essere un multiplo di 1000 euro, ma c'è un investimento minimo che dipende dal titolo azionario. Gli investimenti minimi sono rispettivamente di 4, 3, 2 e 2 migliaia di euro. Quante differenti strategie di investimento sono possibili se

a) si vuole investire su ciascuno dei 4 titoli azionari;

b) si vuole investire su almeno 3 dei 4 titoli azionari.

Soluzioni

Si ricordano le seguenti notazioni:

Coefficiente binomiale: $\binom{N}{R} := \frac{N!}{(N-R)!R!}$

Coefficiente multinomiale: $\binom{N}{R_1;R_2;\ldots;R_k} := \frac{N!}{R_1!R_2!\cdots R_k!}$

Es. 1: $7!$ (permutazioni). **Es. 2:** 7^7 (disposizioni).

Es. 3: $\binom{13}{7}$(disposizioni semplici). **Es. 4:** a)$\binom{10}{2} = 45$; b)$\binom{5}{2} = 10$

Es. 5: a)$\binom{40}{5}$; b)36. Queste sono le possibili scelte di una carta da un mazzo in cui i 4 assi siano già stati estratti. c) $10 \cdot 36$. Il 10 corrisponde alla scelta dei possibili valori assunti dalle 4 carte con uguale valore. Il 36 corrisponde alla scelta della quinta carta (come in b)). d) $\binom{4}{2}\binom{36}{3}$. Ovvero, le possibili scelte di 2 assi sui 4 che sono nel mazzo, per le possibili scelte di 3 carte sulle 36 del mazzo che non sono assi. e) $\binom{4}{2}\binom{36}{3}+\binom{4}{3}\binom{36}{2}+\binom{4}{4}\binom{36}{1}$, oppure $\binom{40}{4}-\binom{36}{5}-\binom{4}{1}\binom{36}{4}$ (si procede analogamente al punto d)). f) $\binom{10}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot 32$. Il termine $\binom{10}{2}$ corrisponde alla scelta dei 2 possibili valori assunti dalle 2 coppie di carte. Per ciasun valore scelto, vi sono poi $\binom{4}{2}$ modi per scegliere una coppia di carte dalle 4 di valore fissato. Il 32 corrisponde alla scelta della quinta carta, fra quelle con valori diversi dalle prime 2 coppie. **Es. 6:** a)$\binom{14}{10}$. Per ogni libro da assegnare, si sceglie una scuola tra le 5. Poichè le copie sono identiche, non siamo interessati dell'ordine. Abbiamo quindi la scelta di 10 oggetti su 5, con ripetizione e senza ordine. b)$\binom{9}{5}$. Rimangono solo 5 libri da assegnare e si procede come in a). **Es. 7:** a)$\binom{20}{3}\binom{10}{2}$. b)$\binom{22}{3}\binom{11}{2}$ **Es. 8:** a)$\binom{30}{5}\binom{25}{4}\binom{21}{3}=\frac{30!}{5!4!3!(18)!}$. E' il coefficiente multinomiale, anche indicato come $\binom{30}{5;4;3;18}$, sulle 30 carte che rimangono una volta escluse le 10 carte di coppe. b)$\binom{30}{5;4;1;20}\binom{10}{2}$. Si pensa al mazzo come diviso in due mazzi più piccoli: un mazzo ha 30 carte che *non sono spade*, l'altro mazzo ha 10 carte che *sono spade*. Sul mazzo da 30 vengono scelte 5, 4 e 1 carte da persone distinte, e sul mazzo da 10 vengono scelte 2 carte da una persona. c)$\binom{30}{5;4;21}\binom{31}{3}-\binom{30}{5;4;3;18}-\binom{30}{5;4;2;19}\binom{10}{1}$. d)$\binom{10}{5;4;1}\binom{31}{3}$. e)$\binom{10}{2}\binom{10}{2}\binom{20}{1}\binom{35}{4;3;28}$. **Es. 9:** a) 4^{13}. Infatti, per ciascun valore da 1 a 13, si deve scegliere una delle 4 carte di valore fissato ma di seme diverso. b) 4. Corrispondenti alla scelta del seme. c) $4\binom{13}{8}\binom{39}{5}$. Il 4 corrisponde alla scelta del seme, $\binom{13}{8}$ alla scelta di 8 carte sulle 13 di seme fissato, $\binom{39}{5}$ alla scelta di 5 carte tra le 39 di seme diverso da quello fissato. **Es. 10:** a) 97. Questo è il numero di modi con cui il primo di 4 valori consecutivi, tra 1 e 100, può essere scelto. Per ogni fissato $k\in\{1,2,\ldots,97\}$, risulta infatti determinata la quadrupla di valori consecutivi $(k,k+1,k+2,k+3)$. b) $97\cdot 4!$. Dal punto a), è sufficiente moltiplicare per i possibili ordinamenti di 4 elementi. **Es. 11:** a) $4!$ b)$2!\cdot 2!$ **Es. 12:** $\frac{12!}{6!\cdot 4!}$. Poichè i mattoncini di uguale colore non possono essere identificati (ovvero l'ordine in cui sono disposti non conta) il numero dei possibili ordinamenti dei 12 mattoncini totali (12!) devo essere diviso per il numero degli ordinamenti di ciascun gruppo di mattoncini di uguale colore. **Es. 13:** a) 5! b) $\frac{6!}{2!}$. Si ragiona come nell'Es. 12. c) $\frac{5!}{2!\cdot 2!}$ d) $\frac{4!}{2!\cdot 2!}$ **Es. 14:** a) 6! b) $2\cdot 3!\cdot 3!$. Il 2 corrisponde al numero di modi di ordinare 2 elementi, ovvero i gruppi di ragazzi e ragazze (a destra o a sinistra nella panchina). Ciascuno gruppo, composto da 3 persone, può poi essere ordinato in 3! modi distinti. c) $4! \cdot 3!$. Il 4! è il modo di ordinare 4 elementi, dati dalle 3 ragazze e dal gruppo di ragazzi considerato come un'unità. Il gruppo di ragazzi può poi essere ordinato in 3! modi distinti. d) $2 \cdot 3! \cdot 3!$. Scelto l' ordinamento in ciascun dei gruppi di ragazzi e ragazze (3! possibilità per entrambi) e stabilito a quale dei 2 gruppi appartiene il primo della panchina, l'ordine è fissato. **Es. 15:** a) 8! b) $2 \cdot 7!$. Come nell'esercizio precedente, le due persone sedute vicine vengono considerate come un'unità. Quindi 7! è il numero di modi per ordinare 7 elementi, e 2 è il numero di modi per ordinare fra loro le 2 persone A e B. c) $2 \cdot 4! \cdot 4!$. Come nell'Es.14 b). d) $4!5!$. Come in a). e)$2^4 \cdot 4!$. **Es. 16:** a) $6!$ b) $2 \cdot 3! \cdot 3!$ c) $4! \cdot 3!$ **Es. 17:** a) $\binom{17}{2}$ b) $6 \cdot 7 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 4$. **Es. 18:** a) $\binom{8}{3}\binom{6}{3}$. b) $\binom{8}{3}\left(\binom{4}{3} + 2\binom{4}{2}\right)$. Le scelte di 3 donne su 8 rimangono invariate (ovvero pari a $\binom{8}{3}$). Le commissioni di uomini si possono formare o scegliendo 3 uomini tra i $4 = 6 - 2$ che non hanno restrizioni, oppure scegliendo uno dei due uomini che non vogliono lavorare insieme (2 modi), e quindi scegliendo i rimanenti 2 fra i 4 restanti e possibili. c) $\binom{6}{3} \cdot \left(\binom{6}{3} + 2\binom{6}{2}\right)$. Analogamente a b). d) $\binom{7}{3} \cdot \binom{5}{3} + \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{3} + \binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2}$. Il primo termine conta il numero di commissioni in cui l'uomo (diciamo U) e la donna (diciamo D), che non vogliono lavorare insieme, sono esclusi. Il secondo termine conta le commissioni in cui c'è D ma non U; questo corrisponde a scegliere 2 donne su 7, e 3 uomini su 5. Il terzo termine conta le commissioni in cui c'è U ma non D; questo corrisponde a scegliere 3 donne su 7, e 2 uomini su 5. **Es. 19:** $\binom{12}{3;4;5}$ **Es. 20:** a) 4^8 b)$4^8 - 4 \cdot 3^8 - \binom{4}{2}2^8 - 4$. Alle scelte totali possibili (4^8) vengono sotratti i seguenti casi: i) ad una scuola non viene assegnato nessun professore: $\binom{4}{1} = 4$ conta i modi con cui una scuola è scelta tra le 4, e 3^8 conta i modi con cui gli 8 professori possono essere assegnati alle rimanenti 3 scuole; ii) a 2 scuole non viene assegnato nessun professore: $\binom{4}{2}$ conta i modi con cui 2 scuole sono scelte tra le 4, e 2^8 conta i modi con cui gli 8 professori possono essere assegnati alle rimanenti 2 scuole; iii)a 3 scuole non viene assegnato nessun professore: $\binom{4}{3} = 4$ conta i modi con cui 3 scuole sono scelte tra le 4, e gli 8 professori vengono tutti assegnati alla scuola rimanente (un solo modo, pari a 1^8). c) $\binom{8}{2;2;2;2}$ **Es. 21:** a)$\binom{12}{9}$. Infatti, se si investe in ognuno dei titoli, 11 migliaia di euro sono impegnati per il minimo investimento (globale). I rimanenti 9 migliaia di euro sono quindi distribuiti, con unità da 1 migliaio, sui 4 titoli. Questo equivale alla scelta di 9 elementi su 4, con ripetizione e senza ordine. b) $\binom{12}{9} + \binom{15}{13} + \binom{14}{12} + \binom{13}{11} + \binom{13}{11}$. Il primo termine è lo stesso del punto a), mentre gli altri 4 si ottengono escludendo di volta in volta uno dei 4 titoli. Se si esclude il primo, il minimo investimento (globale) è di 7 migliaia di euro, quindi ne rimangono 13 da distribuire tra 3 titoli. Questo si fa, analogamente al punto a), in $\binom{15}{13}$ modi. Se si esclude il secondo, il minimo investimento (globale) è di 8 migliaia di euro, quindi ne rimangono 12 da distribuire tra 3 titoli. Questo si fa in in $\binom{14}{12}$ modi. Se si esclude il terzo (o ugualmente il quarto), il minimo investimento (globale) è di 9 migliaia di euro, quindi ne rimangono 11 da distribuire tra 3 titoli. Questo si fa in in $\binom{13}{11}$ modi.