

# Logica per la Programmazione

## Corso di Laurea in INFORMATICA

a.a. 2016/17

Andrea Corradini e Francesca Levi

Dipartimento di Informatica

E-mail: [andrea@di.unipi.it](mailto:andrea@di.unipi.it), [francesca.levi@unipi.it](mailto:francesca.levi@unipi.it)

# La Logica

- ▶ La logica è la disciplina che studia le condizioni di correttezza del ragionamento

*“Occorre dire, anzitutto, quale oggetto riguardi ed a quale disciplina spetti la presente indagine, che essa cioè riguarda la dimostrazione e spetta alla scienza dimostrativa: in seguito, bisogna precisare cosa sia la premessa, cosa sia il termine, cosa sia il sillogismo...”* Aristotele

- ▶ Esempio di *sillogismo*
  - ▶ Tutti gli uomini sono mortali
  - ▶ Socrate è un uomo
  - ▶ Socrate è mortale

## La Logica (cont.)

Non tutti i sillogismi sono validi:

- ▶ Tutti gli animali sono mortali
  - ▶ Pippo è mortale
  - ▶ Pippo è un animale
- 
- ▶ Tutti gli dei sono immortali
  - ▶ Gli uomini non sono dei
  - ▶ Gli uomini sono mortali

# Dalla Logica alla Matematica

- ▶ Nella seconda metà del XIX vengono sviluppate notazioni matematiche (algebriche) per trattare le operazioni della logica (George Boole, Augustus de Morgan, ...)
- ▶ Questo ha consentito di applicare la logica ai fondamenti della matematica, arrivando a interessanti controversie fondazionali (studiate negli anni 1900-25)
- ▶ In matematica, la logica è usata, tra l'altro, per
  - ▶ esprimere asserti in modo non ambiguo  
Esempio: *tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi*

$$(\forall n. n \in \mathbb{N} \wedge \text{pari}(n) \wedge n > 2 \Rightarrow \sim \text{primo}(n))$$

- ▶ chiarire e formalizzare il concetto di dimostrazione

# Logica Matematica e Informatica

- ▶ La logica matematica ha profondi legami con l'informatica:
  - ▶ l'informatica ha dato nuovo impulso allo studio della LM
  - ▶ la LM è parte integrante dei fondamenti teorici dell'informatica
- ▶ Usi della Logica Matematica in Informatica:
  - ▶ formalizzazione di requisiti
  - ▶ dimostrazione di proprietà di programmi (es: logica di Hoare)
  - ▶ fondamenti di programmazione dichiarativa (PROLOG)
  - ▶ rappresentazione della conoscenza (Intelligenza Artificiale)
  - ▶ fondamenti di strumenti di analisi e di verifica di sistemi
    - ▶ Model checking
    - ▶ Theorem proving

# Contenuti del Corso

- ▶ Introduzione (già fatta!)
- ▶ Calcolo Proposizionale
  - ▶ Connettivi logici e loro proprietà
  - ▶ Tautologie, tecniche di dimostrazione
- ▶ Logica del Primo Ordine
  - ▶ Sintassi e semantica
  - ▶ Leggi e regole di inferenza per i quantificatori
  - ▶ Esempi da teoria degli insiemi e dominio dei naturali
- ▶ Quantificatori funzionali
  - ▶ min, max, cardinalità, sommatoria: leggi e dimostrazioni
- ~~▶ Triple di Hoare~~  
~~[http://it.wikipedia.org/wiki/Tony\\_Hoare](http://it.wikipedia.org/wiki/Tony_Hoare)~~
  - ~~▶ Un semplice linguaggio imperativo, semantica operativa~~
  - ~~▶ Verifica di proprietà di semplici programmi~~

# Un Problema di Deduzione Logica [da un test di ingresso]

- ▶ Tre amici, Antonio, Bruno e Corrado, sono incerti se andare al cinema. Si sa che:
  - ▶ Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio;
  - ▶ Condizione necessaria affinché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno.
- ▶ Il giorno successivo possiamo affermare con certezza che:
  1. Se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno
  2. Nessuno dei tre amici è andato al cinema
  3. Se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado
  4. Se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno
- ▶ *Come si formalizza? Come si può usare una dimostrazione per rispondere alla domanda?*

## Il Calcolo Proposizionale

- ▶ È il nucleo di (quasi) tutte le logiche. Limitato potere espressivo, ma sufficiente per introdurre il concetto di dimostrazione.
- ▶ Una proposizione è un enunciato dichiarativo (per esempio una frase in linguaggio naturale) che “afferma qualcosa” e per il quale si può dire:

### Principio del terzo escluso:

che è vero oppure è falso (non ci sono altre possibilità)

### Principio di non contraddittorietà:

che non è al tempo stesso sia vero che falso.

*“dichiarativi sono non già tutti i discorsi, ma quelli in cui sussiste una enunciazione vera oppure falsa” Aristotele*



## Esempi di Proposizioni “Atomiche”

1. Roma è la capitale d'Italia
2. La Francia è uno stato del continente asiatico
3.  $1+1 = 2$
4.  $2+2 = 3$

# Esempi di Non Proposizioni

1. Che ora è?
2. Leggete queste note con attenzione
3.  $x+1 = 2$

# Connettivi Logici

Connettivo	Forma simbolica	Operazione corrispondente
<i>not</i>	$\neg p$	<i>negazione</i>
<i>and, e</i>	$p \wedge q$	<i>congiunzione</i>
<i>or, o</i>	$p \vee q$	<i>disgiunzione</i>
<i>se <math>p</math> allora <math>q</math></i>	$p \Rightarrow q$	<i>implicazione</i>
<i><math>p</math> se e solo se <math>q</math></i>	$p \equiv q$	<i>equivalenza</i>
<i><math>p</math> se <math>q</math></i>	$p \Leftarrow q$	<i>conseguenza</i>

# Sintassi delle Proposizioni (Grammatica)

$$\begin{aligned}
 \textit{Prop} & ::= \\
 & \quad \textit{Prop} \equiv \textit{Prop} \mid \textit{Prop} \wedge \textit{Prop} \mid \textit{Prop} \vee \textit{Prop} \mid \\
 & \quad \textit{Prop} \Rightarrow \textit{Prop} \mid \textit{Prop} \Leftarrow \textit{Prop} \\
 & \quad \textit{Atom} \mid \neg \textit{Atom} \\
 \textit{Atom} & ::= \\
 & \quad \mathbf{T} \mid \mathbf{F} \mid \textit{Ide} \mid (\textit{Prop}) \\
 \textit{Ide} & ::= \\
 & \quad p \mid q \mid \dots \mid P \mid Q \mid \dots
 \end{aligned}$$

# Semantica (significato) delle Proposizioni

Tabelle di verità dei connettivi logici:

$P$	$Q$	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \equiv Q$	$P \Leftarrow Q$
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	F	F
F	F	T	F	F	T	T	T

Si osservi in particolare il valore di verità di un'implicazione (o di una conseguenza)

# Calcolo Proposizionale per formalizzare Enunciati: Esempio

- ▶ Tre amici, Antonio, Bruno e Corrado, sono incerti se andare al cinema.
  - ▶ Introduciamo tre proposizioni:
    - ▶  $A \equiv$  "Antonio va al cinema"
    - ▶  $B \equiv$  "Bruno va al cinema"
    - ▶  $C \equiv$  "Corrado va al cinema"
- ▶ Si sa che:
  - ▶ Se Corrado va al cinema, allora ci va anche Antonio;
    - ▶  $C \Rightarrow A$
- ▶ Condizione necessaria affinché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno.
  - ▶  $A \Rightarrow B$

# Calcolo Proposizionale per formalizzare Enunciati: Esempio (cont.)

- ▶ Il giorno successivo possiamo affermare con certezza che:
  - ▶ Se Corrado è andato al cinema, allora ci è andato anche Bruno
    - ▶  $C \Rightarrow B$
  - ▶ Nessuno dei tre amici è andato al cinema
    - ▶  $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$
  - ▶ Se Bruno è andato al cinema, allora ci è andato anche Corrado
    - ▶  $B \Rightarrow C$
  - ▶ Se Corrado non è andato al cinema, allora non ci è andato nemmeno Bruno
    - ▶  $\neg C \Rightarrow \neg B$
- ▶ Per rispondere alla domanda, dobbiamo capire quale di queste quattro proposizioni è *conseguenza logica* delle proposizioni precedenti

# Formalizzazione di Enunciati: Esempi

- Piove e fa molto freddo

$P \equiv$  “piove”,  $R \equiv$  “fa freddo”

$$[P \wedge R]$$

- Fa freddo, ma non piove

$$[R \wedge \neg P]$$

- Se ci sono nuvole e non c'è vento, allora piove

$N \equiv$  “ci sono nuvole”,  $V \equiv$  “c'è vento”

$$[(N \wedge \neg V) \Rightarrow P]$$

- Piove solo se ci sono nuvole e non c'è vento

$$[P \Rightarrow (N \wedge \neg V)]$$

- Nevica, ma non fa freddo se ci si copre

$Ne \equiv$  “nevica”,  $C \equiv$  “ci si copre”

$$[Ne \wedge (\neg R \Leftarrow C)]$$

- Se ci si copre, allora fa freddo o nevica

$$[C \Rightarrow (R \vee Ne)]$$



# Formalizzazione di Implicazioni in Linguaggio Naturale

Scrivere la proposizione rappresentata da ognuna delle seguenti frasi in italiano:

- ▶ Se P allora Q  $[P \Rightarrow Q]$
- ▶ P è una conseguenza di Q  $[Q \Rightarrow P]$
- ▶ P è condizione necessaria e sufficiente per Q  $[P \equiv Q]$
- ▶ P è condizione necessaria per Q  $[Q \Rightarrow P]$
- ▶ P è condizione sufficiente per Q  $[P \Rightarrow Q]$
- ▶ P vale solo se vale Q  $[P \Rightarrow Q]$
- ▶ P vale se vale Q  $[Q \Rightarrow P]$
- ▶ P vale se e solo se vale Q  $[P \equiv Q]$
- ▶ Condizione necessaria affinché Antonio vada al cinema è che ci vada Bruno  $[A \Rightarrow B]$

# Tautologie e Contraddizioni

- ▶ Una **tautologia** è una formula del calcolo proposizionale che vale **T** per qualunque valore **T/F** assegnato alle variabili proposizionali
  - ▶ Esempio:  $P \vee \neg P$  (vedi tabella di verità)
- ▶ Una **contraddizione** è una formula che vale **F** per qualunque valore **T/F** assegnato alle variabili proposizionali
- ▶ Quindi **P** è una tautologia se e solo se  $\neg P$  è una contraddizione

# Implicazioni e Equivalenze Tautologiche

- Diciamo che

*$p$  implica tautologicamente  $q$*

se e solo se

$p \Rightarrow q$  è una tautologia

*$p$  è tautologicamente equivalente a  $q$*

se e solo se

$p \equiv q$  è una tautologia

- Praticamente tutti i problemi nel Calcolo Proposizionale si riducono a dimostrare che una proposizione è una tautologia.
- Come si può dimostrare?

# Dimostrazione di Tautologie

- ▶ Per dimostrare che  $p$  è una tautologia possiamo
  - ▶ Usare le tabelle di verità
    - ▶ Del tutto meccanico, richiede di considerare  $2^n$  casi, dove  $n$  è il numero di variabili proposizionali in  $p$
- ▶ Cercare di costruire una dimostrazione
  - ▶ Usando delle leggi (tautologie già dimostrate)
  - ▶ Usando opportune regole di *inferenza*
  - ▶ Si possono impostare vari tipi di dimostrazione
- ▶ Mostrare che non è una tautologia
  - ▶ individuando valori delle variabili proposizionali che rendono falsa  $p$