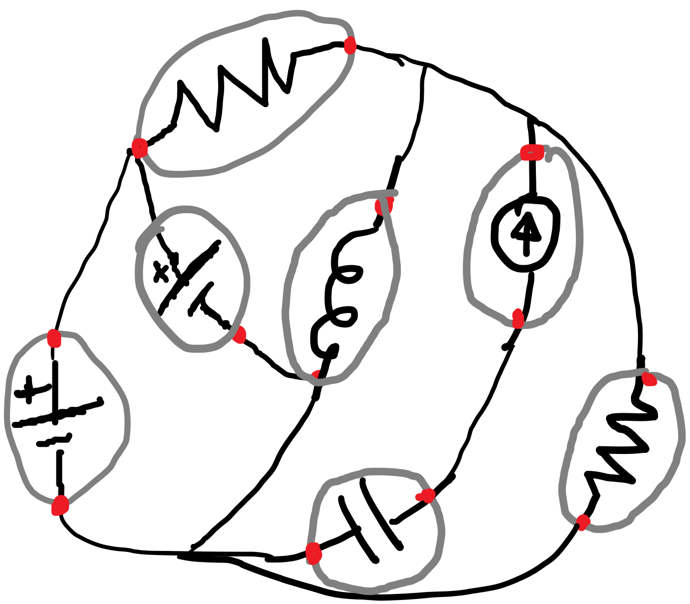
Introduzione alla Teoria dei Circuiti: elementi di topologia dei circuiti

Corso di Elettrotecnica
CdL Ing. Elettronica-Informatica
A.A. 2017-2018

Prof. Marco Ricci

Modello circuitale: Vincoli topologici



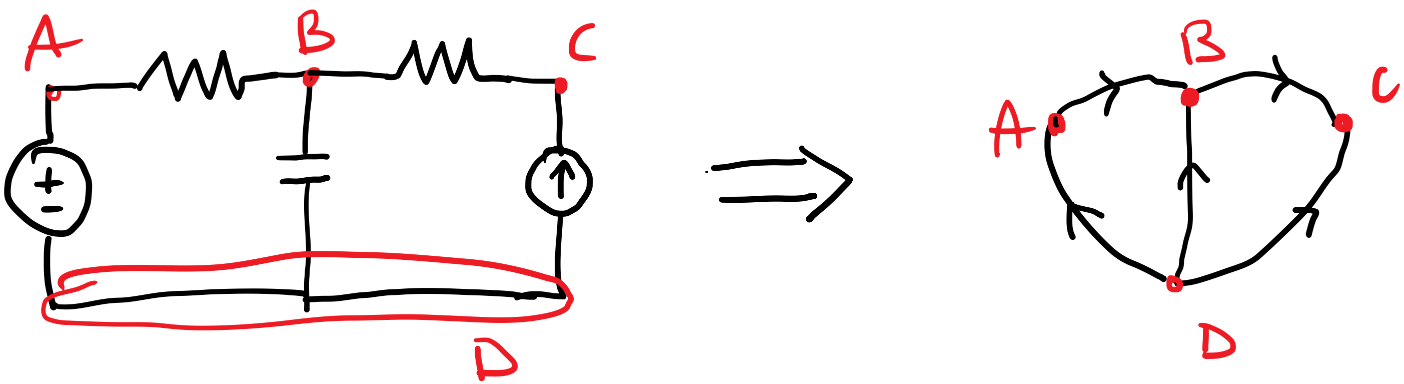
- Le tensioni variano solo ai capi dei componenti, le correnti solo dove si incontrano più “rami” del circuito;
- Ogni componente ha una caratteristica tensione-corrente univoca;
- i componenti sono considerati privi di dimensioni
- i collegamenti sono considerati conduttori perfetti (conducibilità infinita)→ niente caduta di potenziale lungo i conduttori né dissipazione di energia;
- nello spazio che circonda i componenti non ci sono cariche, il campo elettrico è conservativo, il campo magnetico è nullo

Topologia dei circuiti

Lo schema di un circuito è la rappresentazione astratta di un circuito fisico.

La disposizione degli elementi di un circuito nello schema può non avere relazione con la loro disposizione fisica (le dimensioni non contano).

Possiamo modificare e deformare lo schema di un circuito a piacere purché la disposizione delle connessioni tra i vari elementi rimanga la stessa

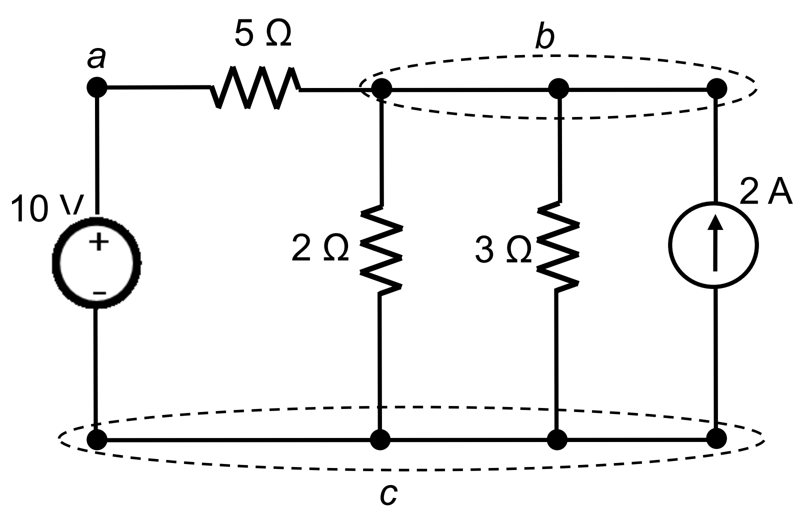


Topologia dei circuiti

Un **ramo** rappresenta un singolo elemento attivo o passivo, quale ad esempio un generatore di tensione o un resistore.

Un **nodo** è il punto di connessione di due o più rami.

Una **maglia** è un qualunque percorso chiuso in un circuito.

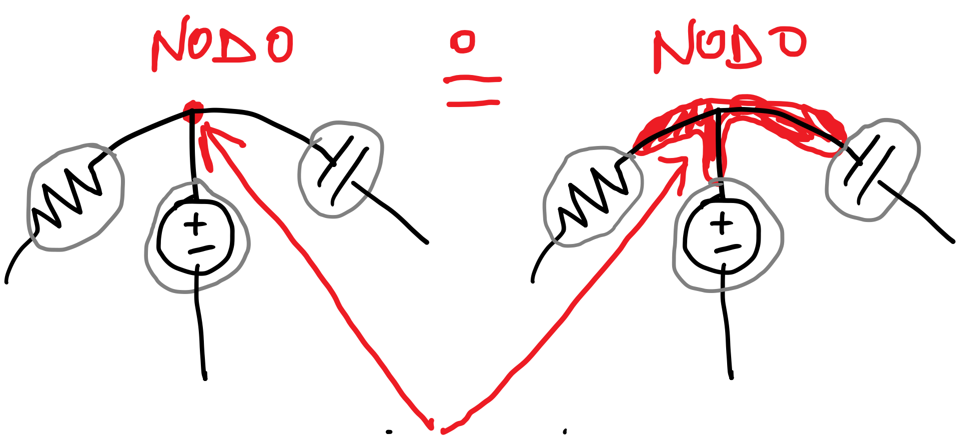


Topologia dei circuiti

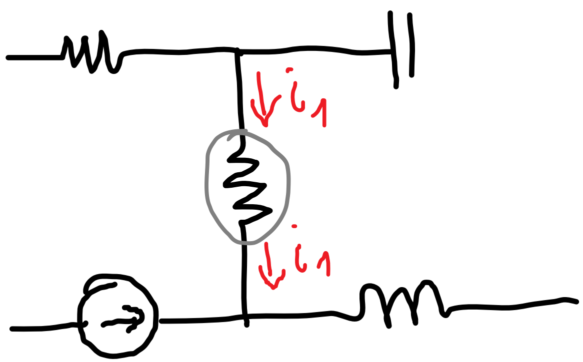
Un nodo è un punto equipotenziale.

Tutti i collegamenti attaccati al nodo stanno allo stesso potenziale del nodo (ricorda: tensione e corrente variano solo all'interno degli elementi che sono inaccessibili in quanto privi di dimensioni)

Un ramo è invece un tratto caratterizzato dall'essere attraversato in ogni suo punto dalla stessa corrente



Tutti i tratti di collegamenti attaccati ad un nodo sono equipotenziali

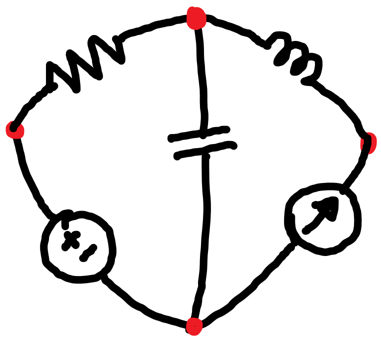


La corrente che entra in un elemento è uguale a quella che esce

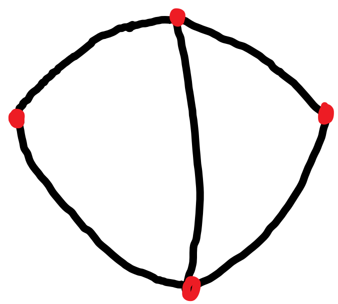
Topologia dei circuiti

Dato che la topologia di un circuito non dipende dal tipo di elementi ma solo dale loro connessioni reciproche, è utile introdurre il concetto di grafo, ovvero lo schema dei rami del circuito senza riportare gli elementi

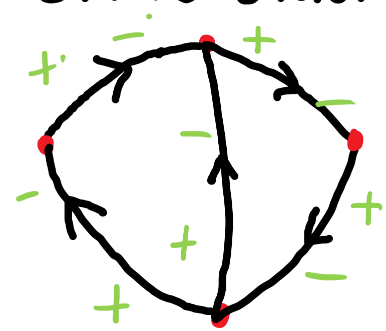
CIRCUITO



GRAFO



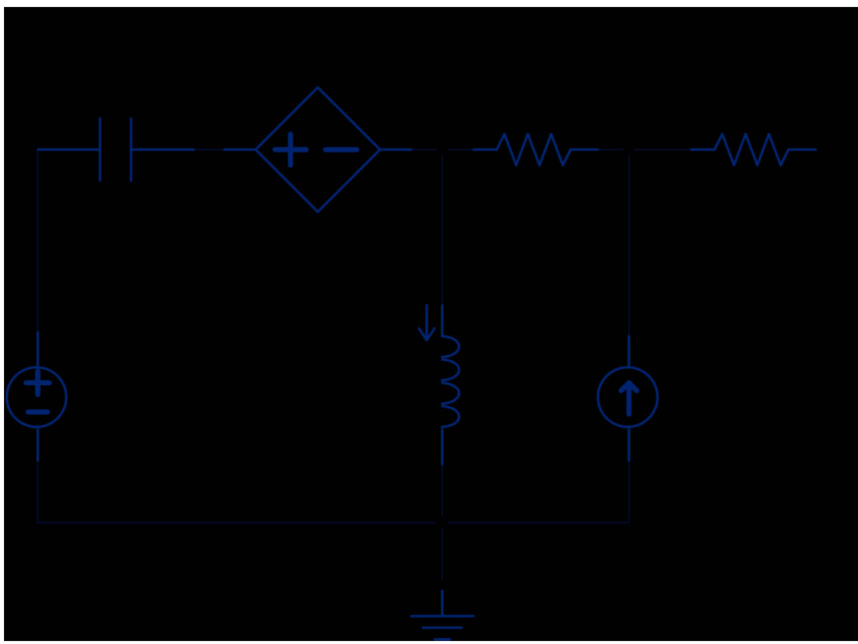
GRAFO ORIENTATO



Un grafo orientate è un grafo su cui si assegnano i versi delle correnti (e delle tensioni in accordo con la convenzione degli utilizzatori)

Topologia dei circuiti

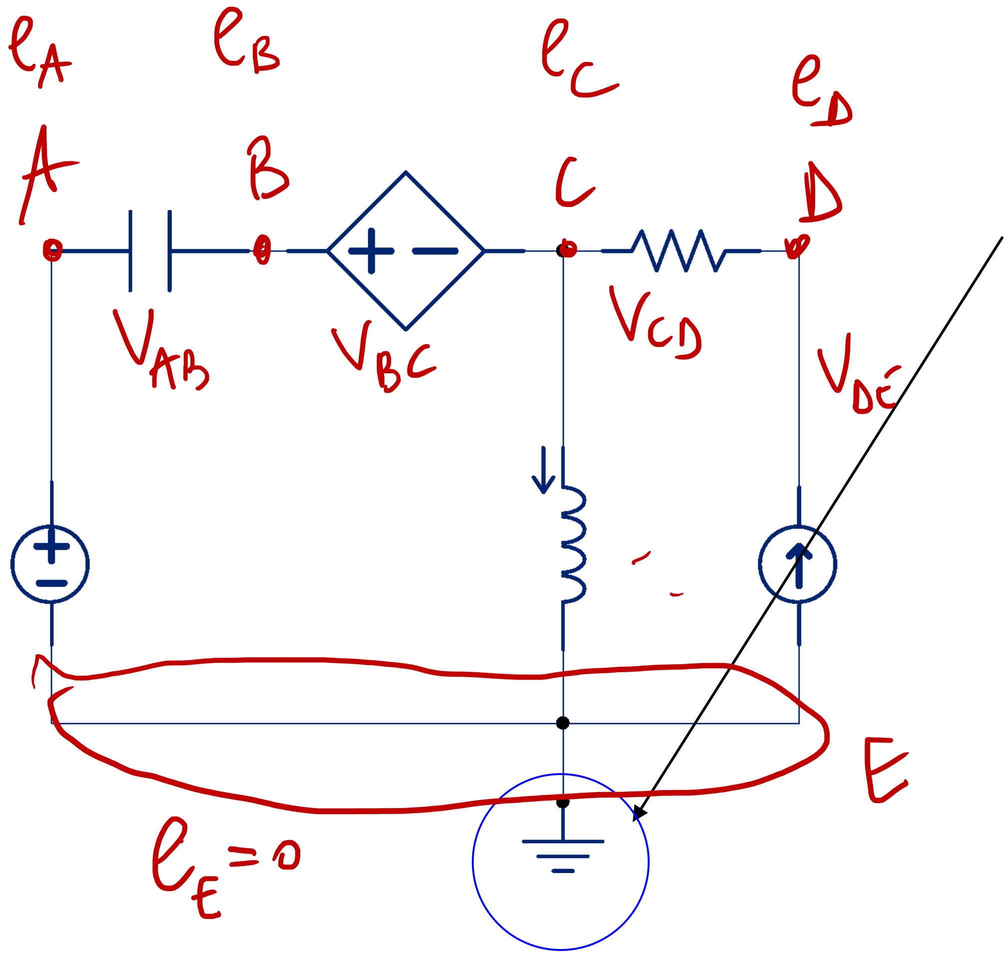
Solo elementi che appartengono ad una maglia, ovvero solo gli elementi in cui scorre della corrente, contribuiscono alla funzionalità del circuito.



Questo elemento può essere rimosso senza influenzare ciò che accade nel resto del circuito, ovvero senza modificare la tensione ai capi degli altri elementi ne la corrente che vi scorre attraverso

Topologia dei circuiti

Esempio: Schema di un circuito:

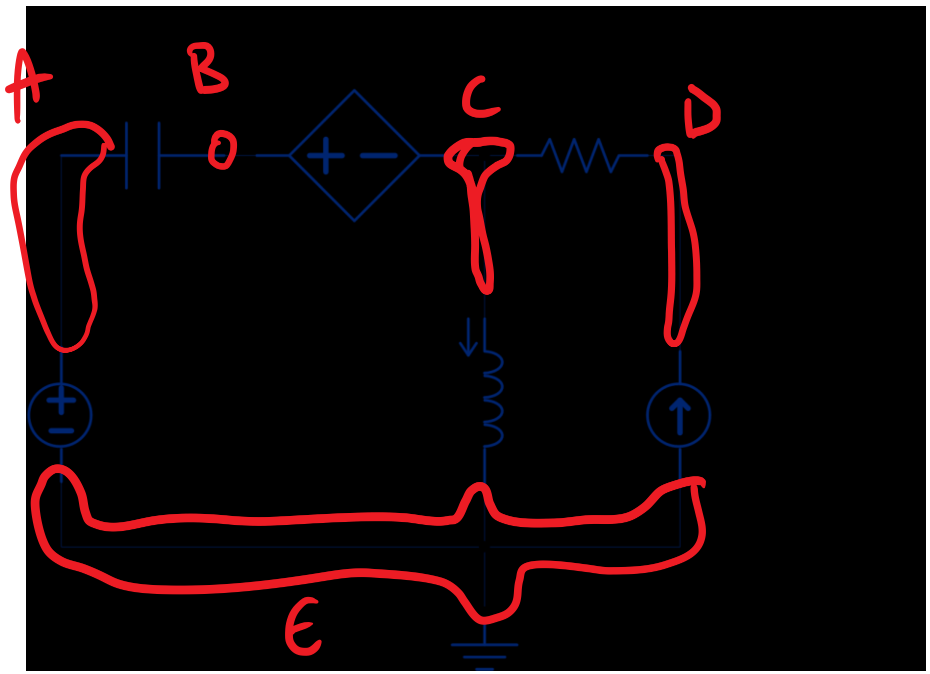


"***Ground***": di solito si usa assumere un punto (nodo) come riferimento per tutti gli altri per esprimere le differenze di potenziale tra diversi punti del circuito.

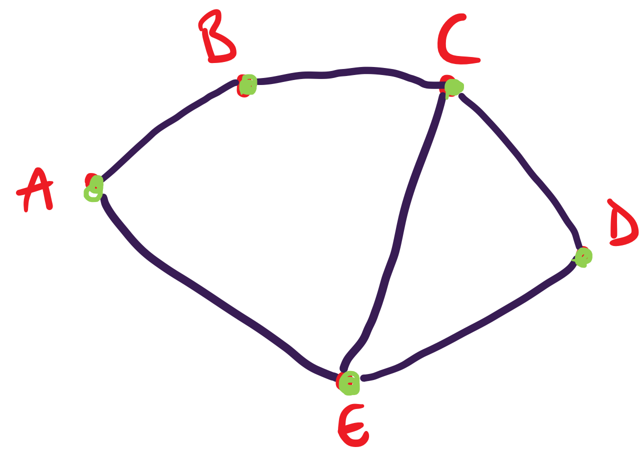
Al nodo di riferimento viene assegnato un potenziale nullo. *(NOTA: le forze dipendono dalla derivate del potenziale → l'aggiunta di una costante non cambia le forze in gioco)*

Topologia dei circuiti

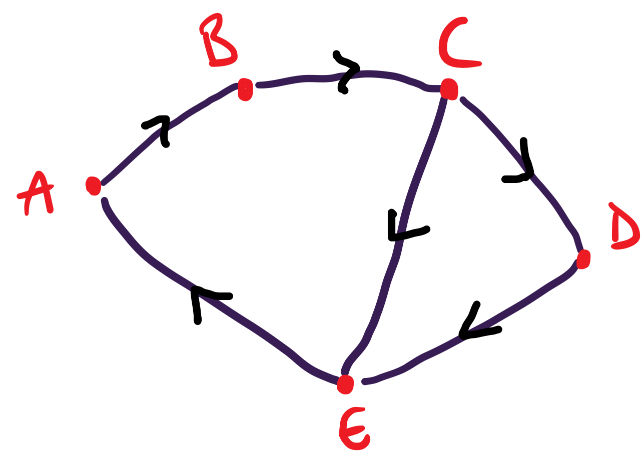
Esempio: Schema di un circuito:



GRAFO



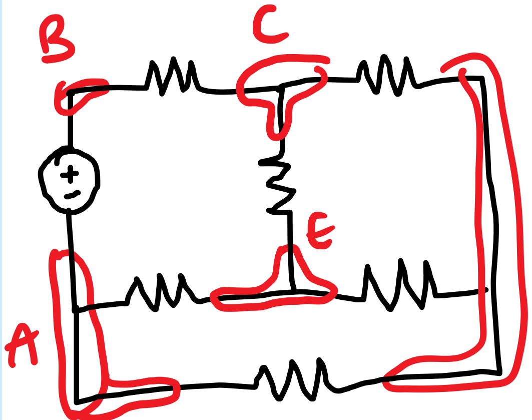
GRAFO ORIENTATO



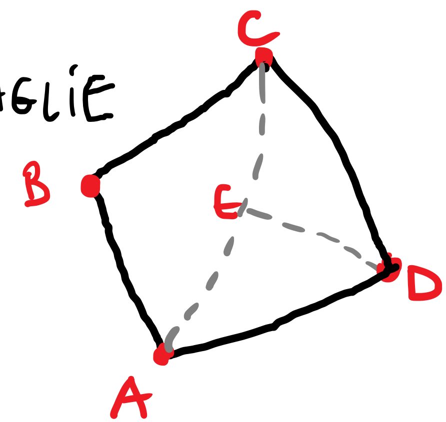
Topologia dei circuiti

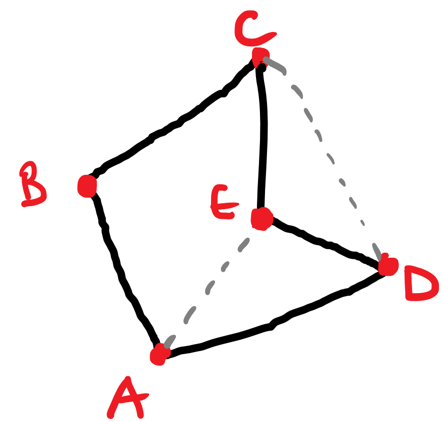
Una maglia è qualsiasi percorso chiuso all’interno di un circuito in cui nessun nodo è percorso più di una volta.

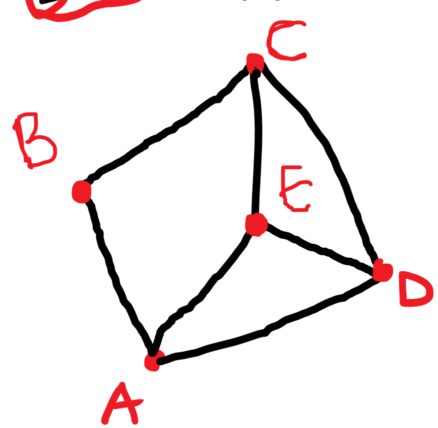
Un anello è un particolare tipo di maglia tale che non contiene al suo interno altre maglie (si dice anche “maglia ad area minima”)



ES. MAGLIE







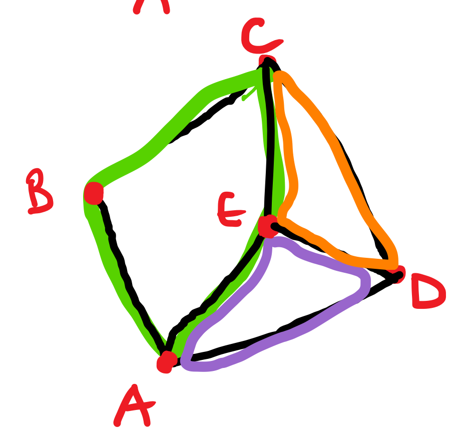
ES. ANELLI:

CI SONO 3 ANELLI

A-B-C-E

C-D-E

A-E-D



Topologia dei circuiti

Se si conoscono tutti i potenziali dei nodi rispetto al potenziale del nodo preso come riferimento, allora tutte le grandezze elettriche del circuito possono essere determinate.

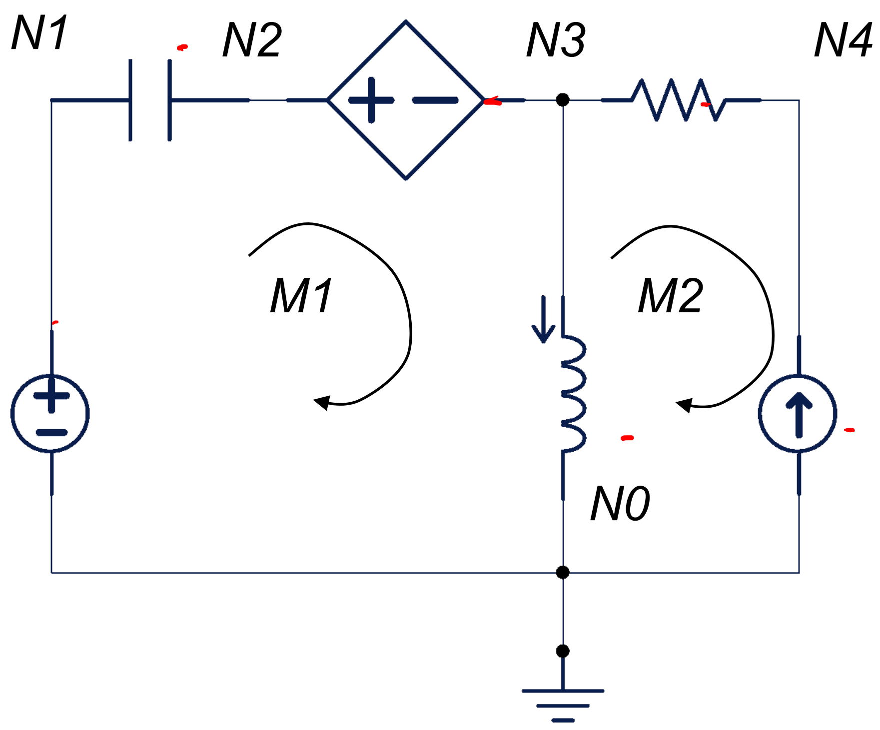
Lo stesso vale se conosciamo tutte le correnti degli anelli.

$$\Downarrow$$

Potenziale dei nodi e correnti di anello sono due insieme di variabili indipendenti. Dai loro valori, tutti gli altri possono essere determinati.

Come trovare i valori delle variabili indipendenti è lo scopo dei Metodi di Analisi dei Circuiti

Topologia dei circuiti



- In questo esempio ci sono 5 nodi e 2 anelli
- Oltre ai 2 anelli possiamo disegnare un’altra maglia che passa esternamente ai due anelli

Leggi di Kirchhoff: KCL e KVL

Le leggi di delle correnti (Kirchhoff's Current Law - KCL) e delle tensioni (Kirchhoff's Voltage Law - KVL) sono le leggi fondamentali per l'analisi dei circuiti a partire dalla topologia degli stessi.

- la KCL è alla base del Metodo dei nodi, in cui le incognite da trovare sono le tensioni dei nodi del circuito.
- la KVL è alla base del Metodo degli anelli, in cui le incognite da trovare sono le correnti di anello.

Legge di Kirchhoff delle correnti (KCL)

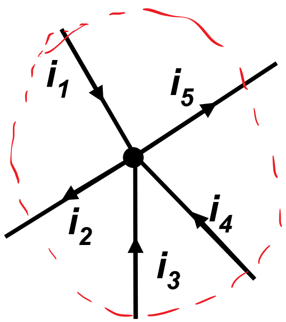
Dalla legge di conservazione della carica deriva la **prima legge di Kirchhoff**

La **legge di Kirchhoff delle correnti (KCL)** stabilisce che la somma algebrica delle correnti che entrano in un nodo (o in una superficie chiusa) è zero.

$$\sum_{n=1}^{N} \pm i_n = 0$$

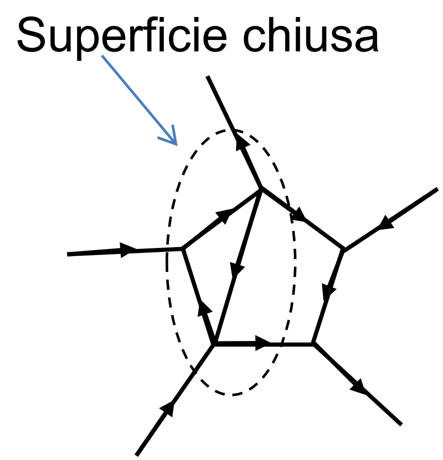
N: rami connessi al nodo

i_n: n-esima corrente che entra o esce dal nodo



$$i_1 - i_2 + i_3 + i_4 - i_5 = 0$$

$$\Rightarrow i_1 + i_3 + i_4 = i_2 + i_5$$



Somma delle correnti entranti = Somma delle correnti uscenti

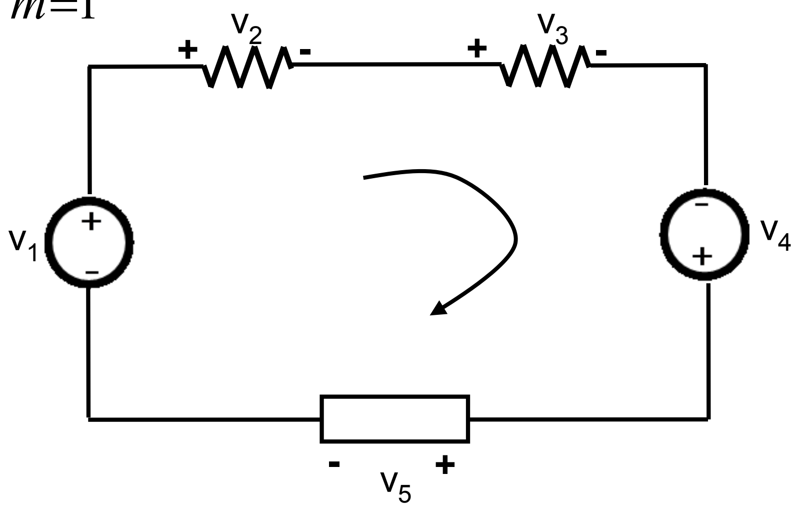
Legge di Kirchhoff delle tensioni (KVL)

Dal principio di conservazione dell'energia deriva la **seconda legge di Kirchhoff**

La **legge di Kirchhoff delle tensioni (KVL)** stabilisce che la somma algebrica delle tensioni lungo un percorso chiuso (o maglia) è zero.

$$\sum_{m=1}^{M} v_m = 0$$

M: numero di tensioni (o rami) nella maglia
v_m: m-esima tensione



$$-v_1 + v_2 + v_3 - v_4 + v_5 = 0$$

$$\Rightarrow v_1 + v_4 = v_2 + v_3 + v_5$$

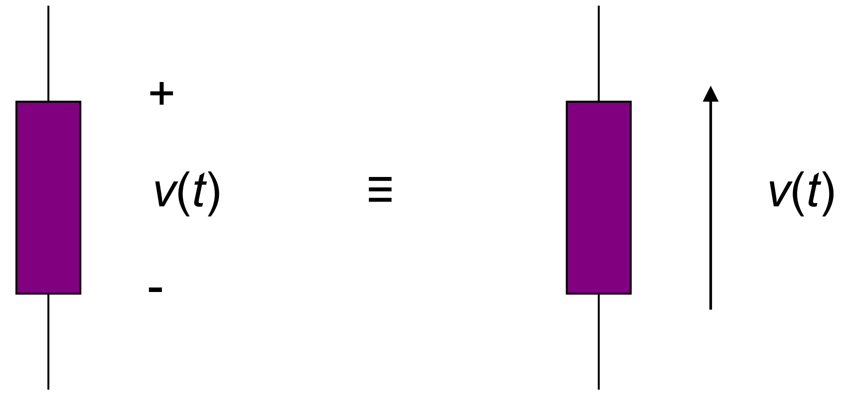
Somma delle cadute di tensione = Somma degli aumenti di tensione.

KCL e KVL

Applicazione della KVL:

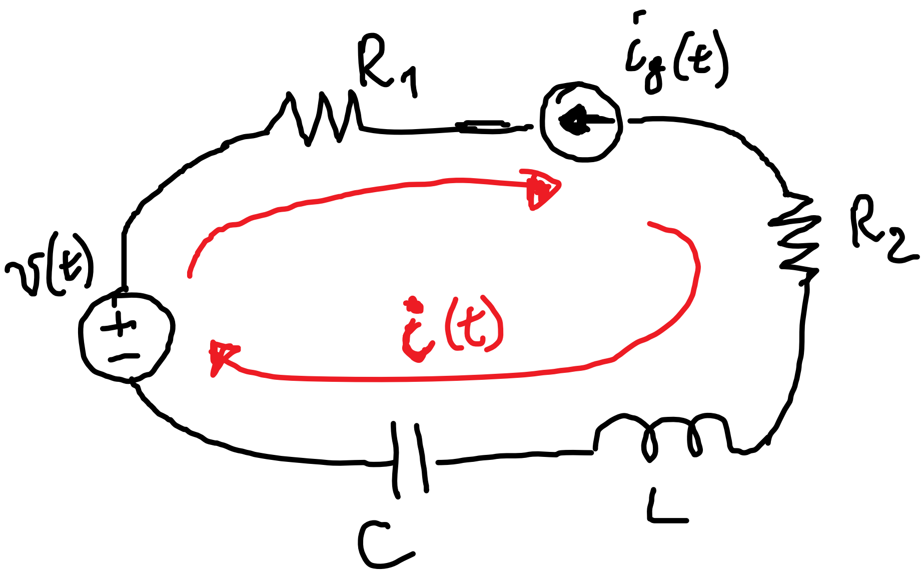
Seguendo il verso prescelto di percorrenza di una maglia, una tensione (d.d.p) si prende positiva se si entra dal segno “+”, si prende negative se si entra nel “-”

In alcuni testi si usano delle frecce per rappresentare la d.d.p; la freccia parte dal “-” e punta al “+”.



Resistenze in serie

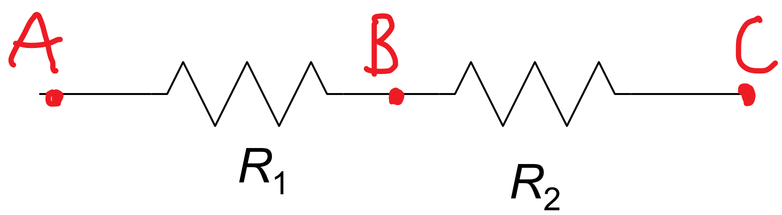
In un circuito avente una sola maglia, la maglia è anche un anello. In tutti gli elementi del circuito fluisce la STESSA CORRENTE – gli elementi sono detti essere in SERIE.



$$i(t) = i_g(t) =$$
$$= i_v(t) = i_{R_1} = i_{R_2}$$
$$= i_C = i_L$$

Resistenze in serie

⇒ Due elementi sono in serie quando sono attraversati dalla stessa corrente

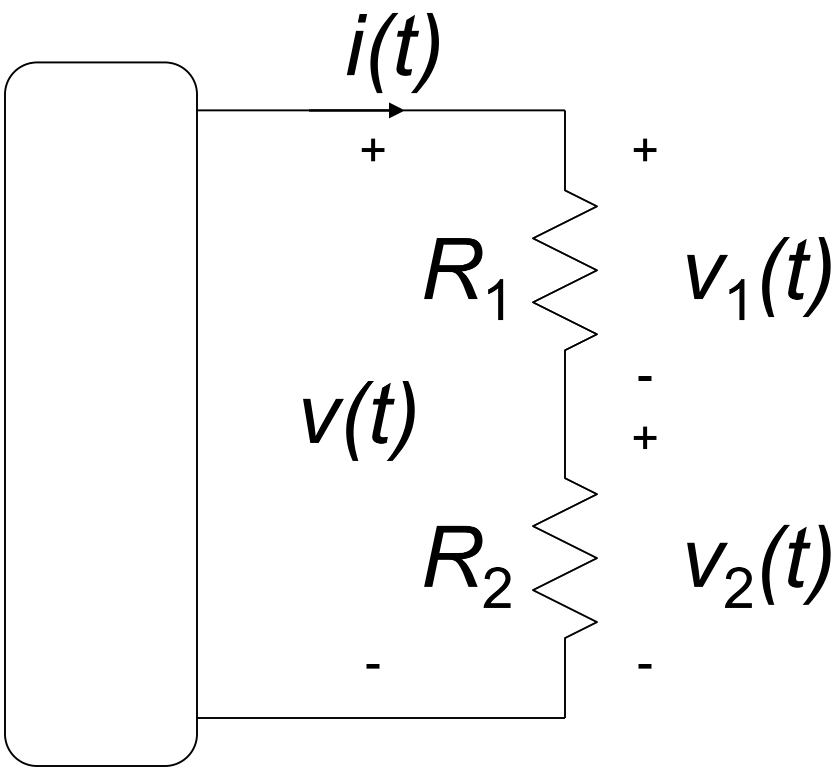


Serie

TOPOLOGIA: Due elementi sono in serie quando condividono un nodo in maniera esclusiva, nessun altro element è connesso al nodo comune

Resistenze in serie

Consideriamo due resistenze in serie con una tensione *v(t)* applicata ai loro capi:



Partitore di tensione:

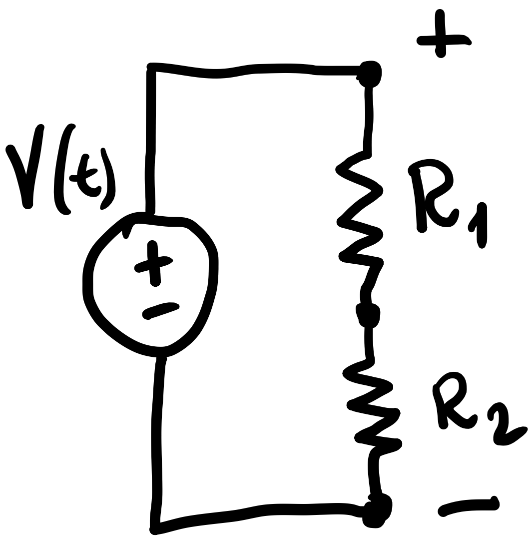
$$v_1(t) = v(t)\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$v_2(t) = v(t)\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

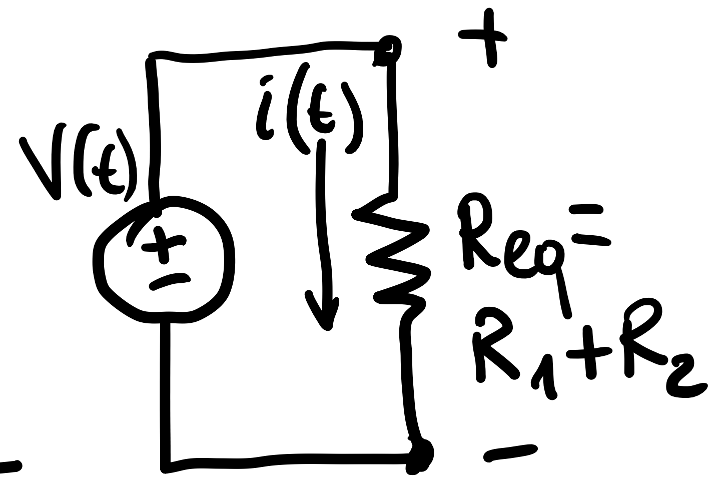
Resistenze in serie

La relazione tensione-corrente ai capi delle due resistenze non cambia se sostituiamo le due resistenze in serie con una singola RESISTENZA EQUIVALENTE di valore

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

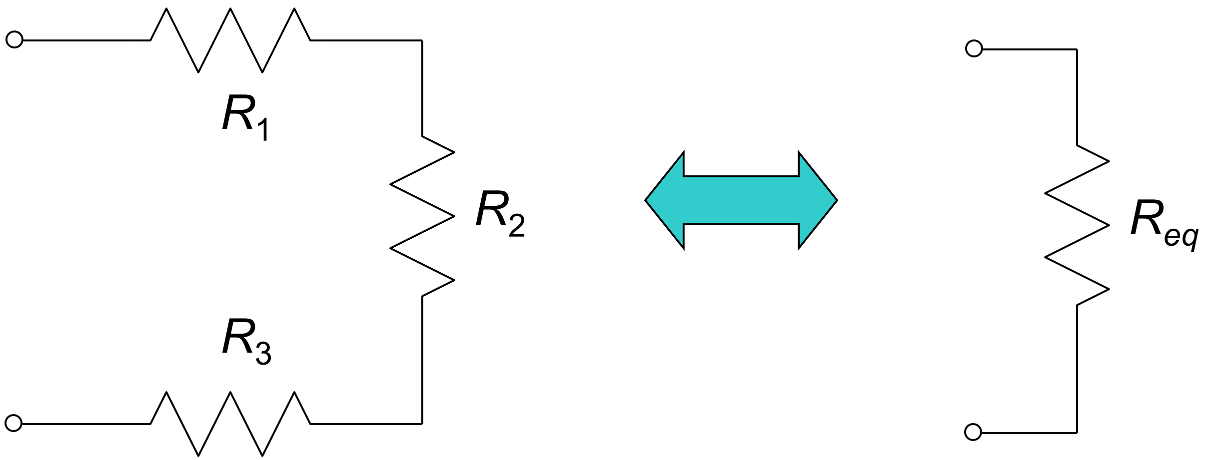


$$i(t) = \frac{V(t)}{R_1+R_2} = \frac{V(t)}{R_{eq}}$$



Resistenze in serie

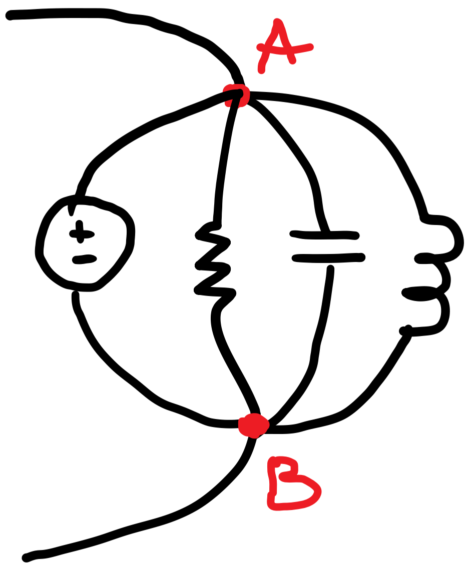
Per N resistori in serie, la RESISTENZA EQUIVALENTE ha un valore dato da:



$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_N$$

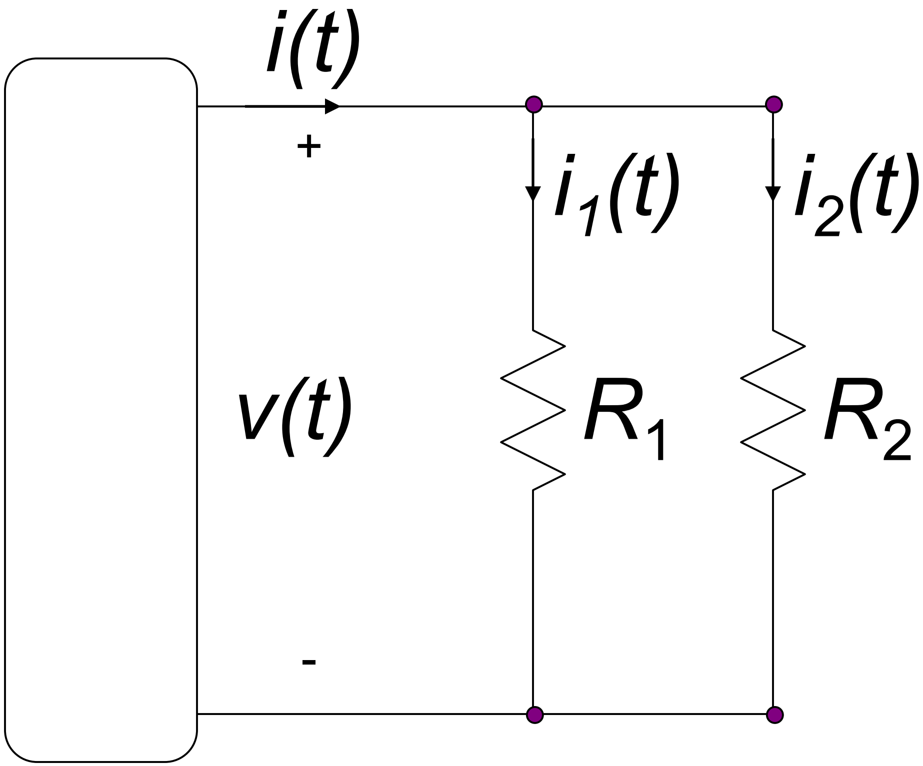
Resistenze in parallelo

Quando i due terminali di due o più bipoli sono connessi alla stessa coppia di nodi, tutti i bipoli vedono la stessa differenza di potenziale ai capi e gli elementi sono detti essere in PARALLELO



Resistenze in parallelo

Consideriamo due resistenze in PARALLELO con una tensione $v(t)$ ai loro capi:



Partitore di corrente

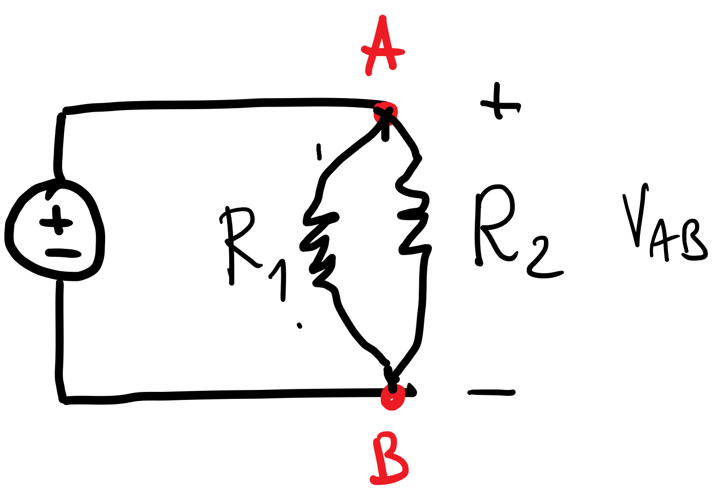
$$i_1(t) = i(t)\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

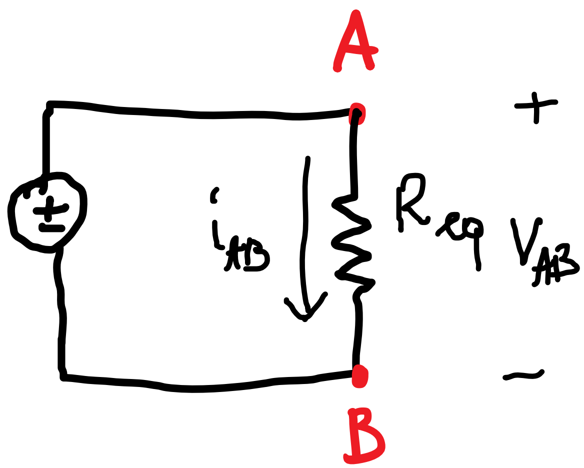
$$i_2(t) = i(t)\frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Resistenze in parallelo

La relazione tensione-corrente ai capi delle due resistenze non cambia se sostituiamo le due resistenze in parallelo con una singola RESISTENZA EQUIVALENTE di valore

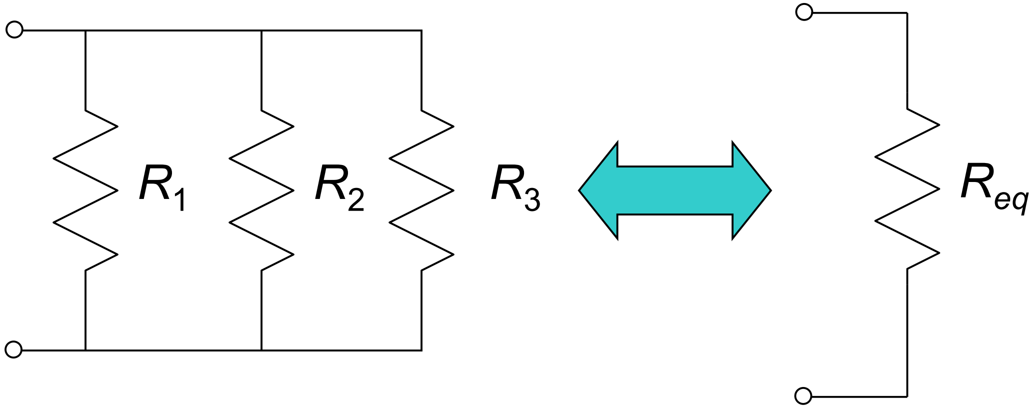
$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \qquad \frac{\min(R_1, R_2)}{2} \leq R_{eq} < \min(R_1, R_2)$$





Resistors in Parallel

Per N resistori in parallelo, la RESISTENZA EQUIVALENTE ha un valore dato da:



$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_N}}$$

Resistenze in parallelo

Se noi utilizziamo la conduttanza invece della resistenza otteniamo:

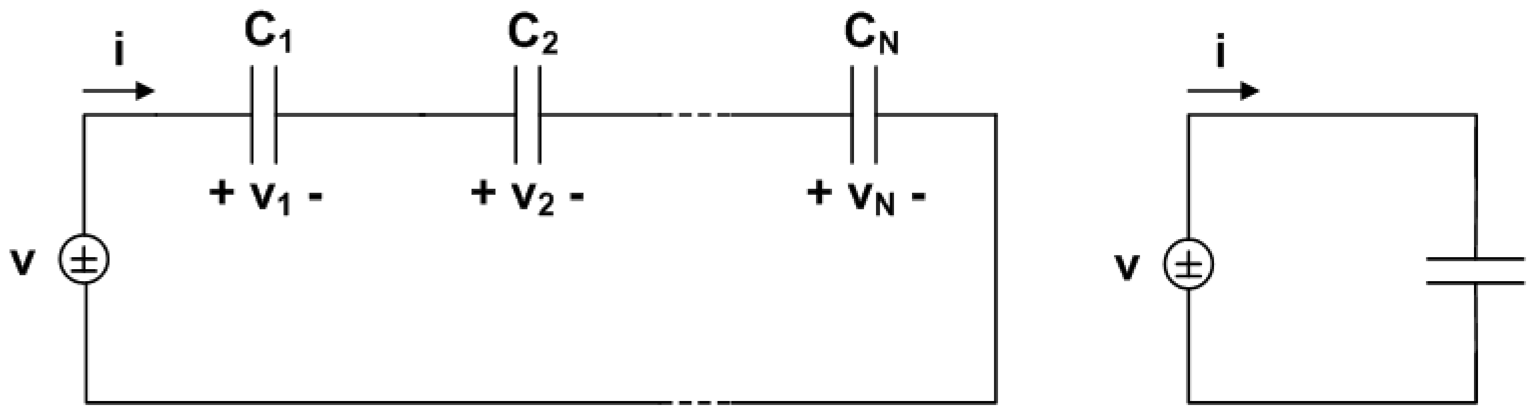
$$R_{eq} = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \cdots + \dfrac{1}{R_N}}$$

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_N$$

In serie si sommano le resistenze, in parallel si sommano le conduttanze, questo è un esempio della dualità dei circuiti

Condensatori in serie

La capacità equivalente di N condensatori collegati in serie è pari al reciproco della somma dei reciproci delle singole capacità.



$$v = v_1 + v_2 + \ldots + v_N$$

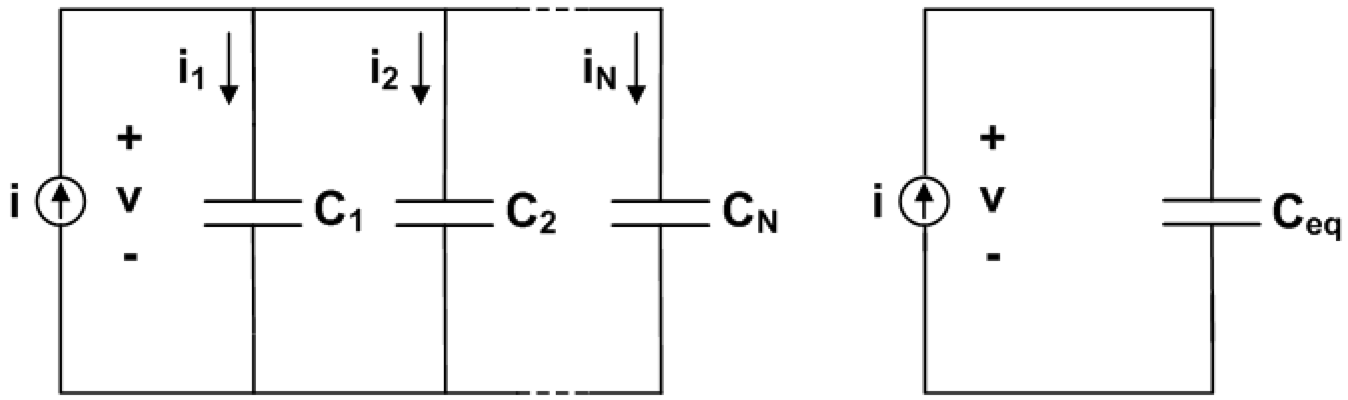
$$v = \frac{1}{C_1}\int_{t_0}^{t} i(t)dt + v_1(t_0) + \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} i(t)dt + v_2(t_0) + \cdots + \frac{1}{C_N}\int_{t_0}^{t} i(t)dt + v_N(t_0) =$$

$$= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N}\right)\int_{t_0}^{t} i(t)dt + v_1(t_0) + v_2(t_0) + \cdots + v_N(t_0) = \frac{1}{C_{eq}}\int_{t_0}^{t} i(t)dt + v(t_0)$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_N}}$$

Condensatori in parallelo

La capacità equivalente di N condensatori collegati in parallelo è pari alla somma delle singole capacità.



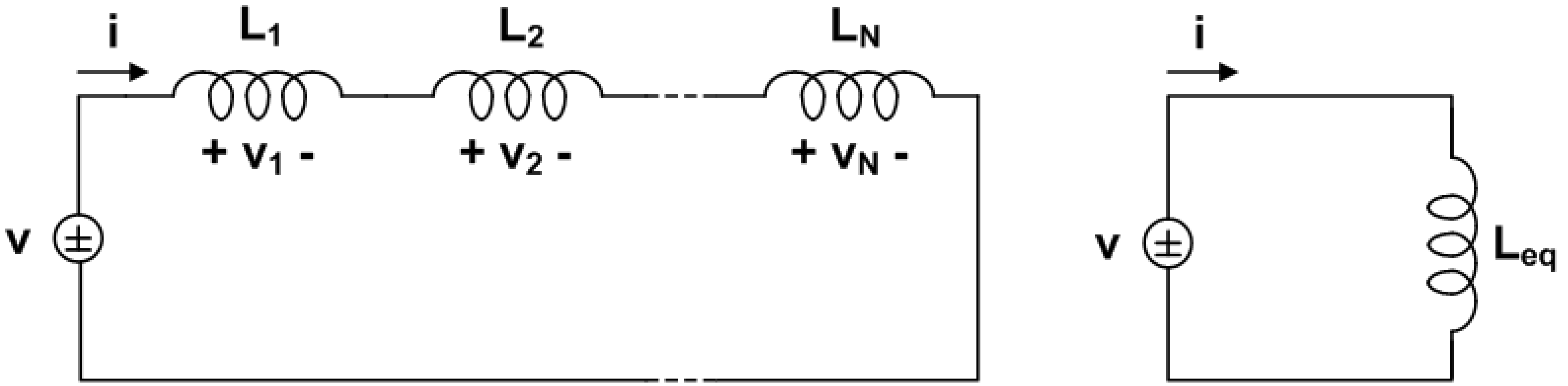
$$i = i_1 + i_2 + \ldots + i_N$$

$$i = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + \ldots + C_N \frac{dv}{dt} = C_{eq} \frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots + C_N}$$

Induttori in serie

L'induttanza equivalente di N induttori collegati in serie è pari alla somma delle singole induttanze.



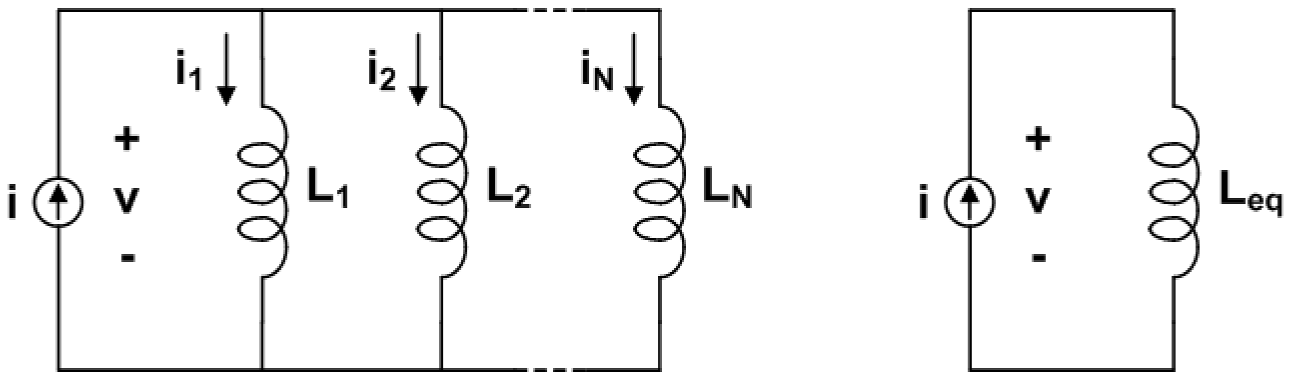
$$v = v_1 + v_2 + \dots v_N$$

$$v = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \dots + L_N \frac{di}{dt} = L_{eq} \frac{di}{dt}$$

$$\boxed{L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_N}$$

Induttori in parallelo

L'induttanza equivalente di N induttori collegati in parallelo è pari al reciproco della somma dei reciproci delle singole induttanze.



$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_N$$

$$i = \frac{1}{L_1}\int_{t_0}^{t} v(t)dt + i_1(t_0) + \frac{1}{L_2}\int_{t_0}^{t} v(t)dt + i_2(t_0) + \cdots + \frac{1}{L_N}\int_{t_0}^{t} v(t)dt + i_N(t_0) =$$

$$= \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_N}\right)\int_{t_0}^{t} v(t)dt + i_1(t_0) + i_2(t_0) + \cdots + i_N(t_0) = \frac{1}{L_{eq}}\int_{t_0}^{t} v(t)dt + i(t_0)$$

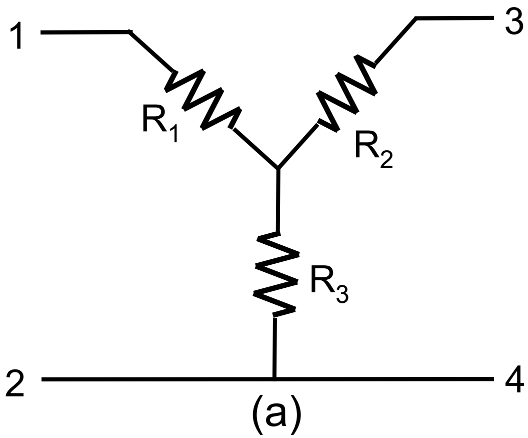
$$\boxed{\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_N}}$$

Riepilogo connessioni serie e parallelo

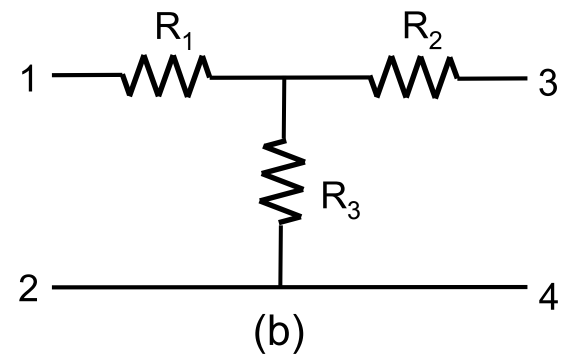
	SERIE	PARALLELO
RESISTORI	$R_{eq} = R_1 + R_2 + \ldots + R_N$	$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_N}$
CONDENSATORI	$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_N}$	$C_{eq} = C_1 + C_2 + \ldots + C_N$
INDUTTORI	$L_{eq} = L_1 + L_2 + \ldots + L_N$	$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_N}$

Trasformazioni stella-triangolo

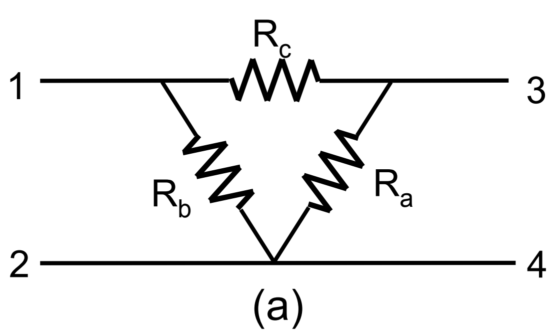
STELLA



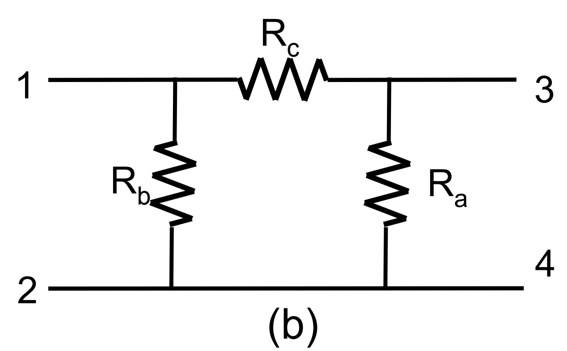
T



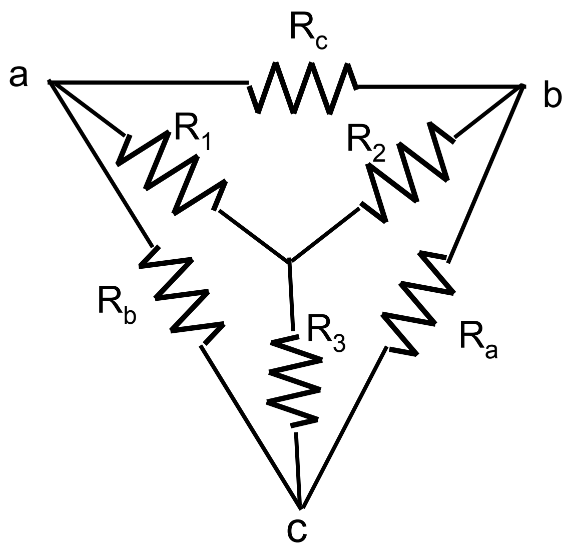
TRIANGOLO



π



Trasformazioni stella-triangolo



$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_2 = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_a = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}$$

$$R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}$$

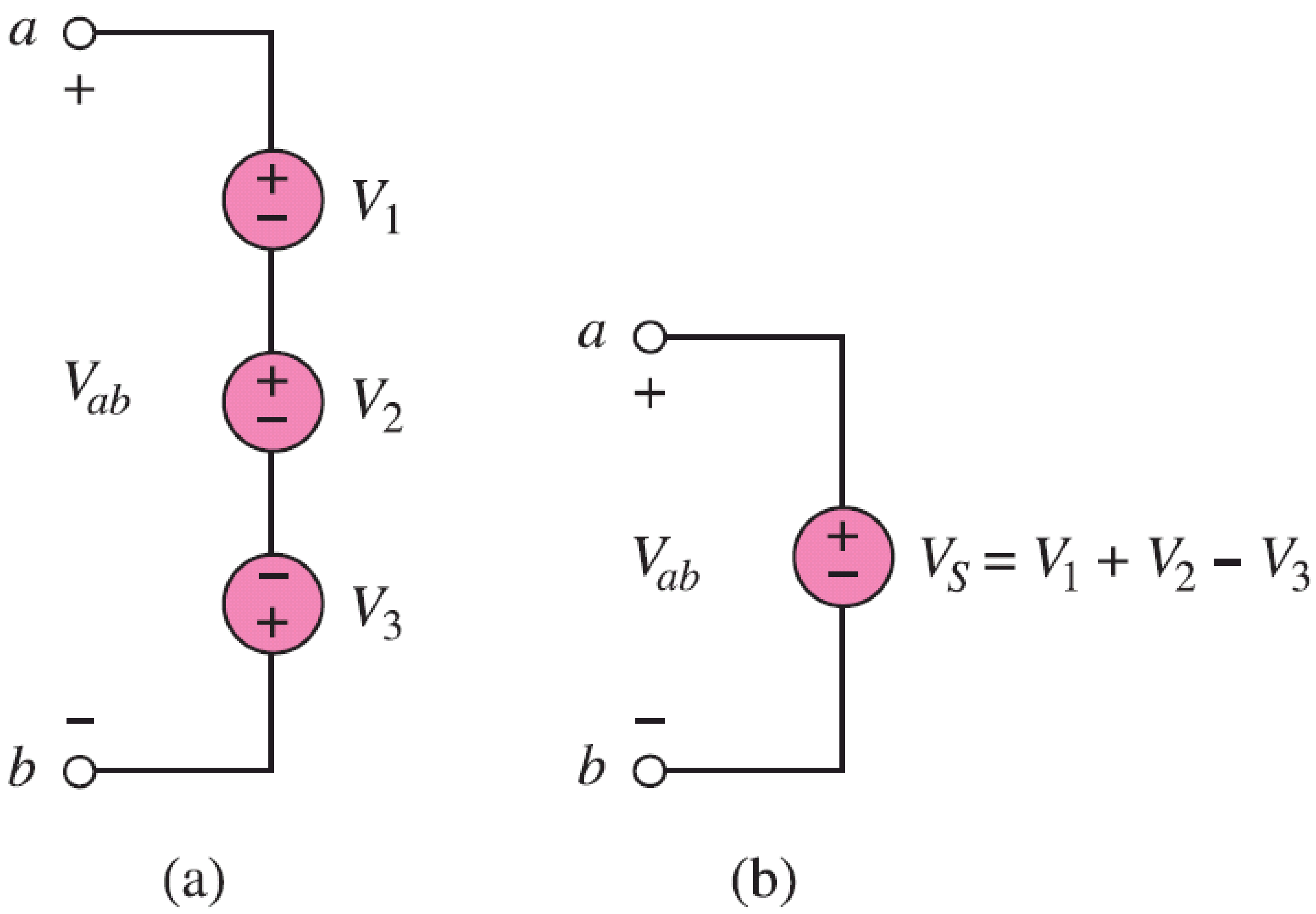
$$R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}$$

Ciascun resistore della rete a **stella** è il prodotto dei resistori nei due rami adiacenti delle rete a triangolo, diviso per la somma dei tre resistori del triangolo.

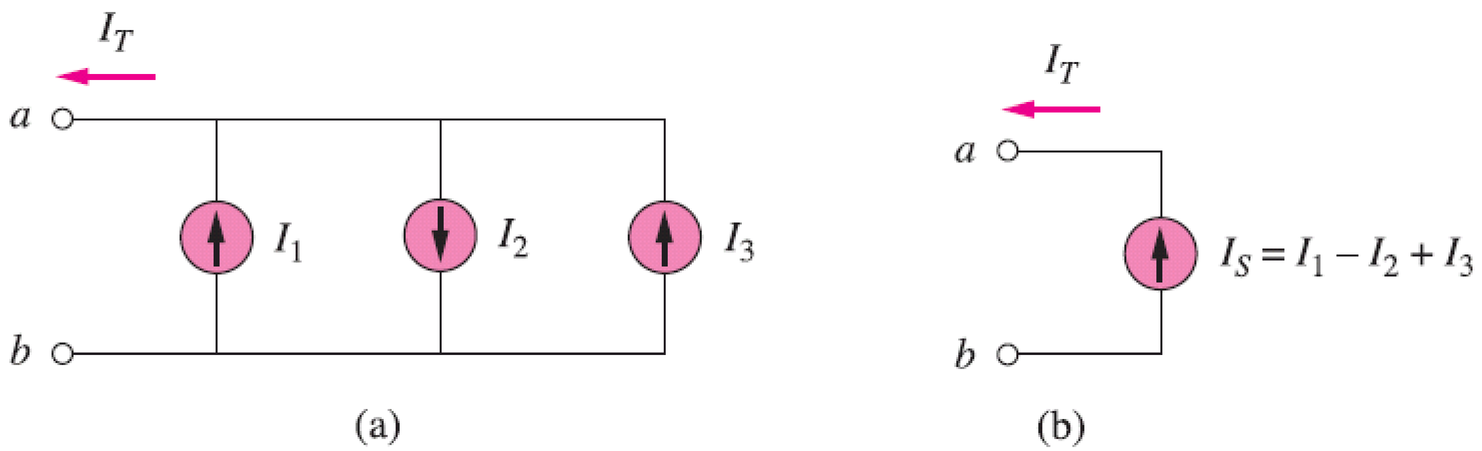
Ciascun resistore della rete a **triangolo** è pari alla somma di tutti i prodotti dei resistori della stella presi a due a due, divisa per il resistore ad esso opposto nella stella.

$$R_Y = \frac{R_\Delta}{3} \rightarrow R_\Delta = 3 R_Y$$

Generatori di tensione in serie



Generatori di corrente in parallelo

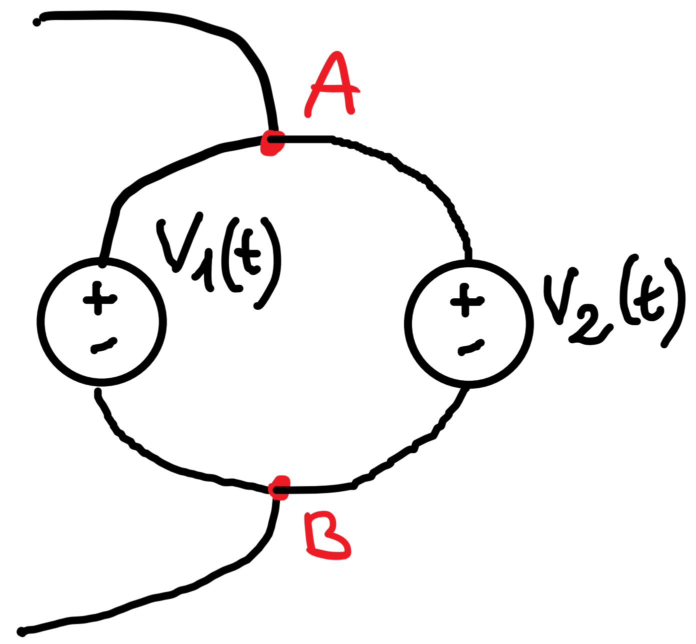


Generatori reali

INCONGRUENZE LEGATE AI MODELLI IDEALI

Se $\mathrm{V}_1(\mathrm{t}) \neq \mathrm{V}_2(\mathrm{t})$

Pretenderei che agli stessi nodi si abbiano contemporaneamente due ddp differenti



Se $\mathrm{V}_1(\mathrm{t}) = \mathrm{V}_2(\mathrm{t})$

L'equilibrio alla maglia

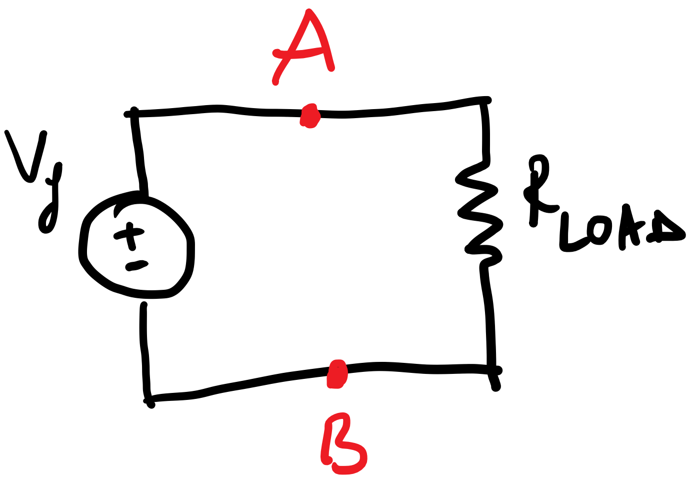
$$\mathrm{V}_1(\mathrm{t}) - \mathrm{V}_2(\mathrm{t}) = 0$$

non consente di calcolare la corrente che scorre (infinite soluzioni).

Generatori reali

INCONGRUENZE LEGATE AI MODELLI IDEALI

Un generatore ideale può erogare una potenza infinita



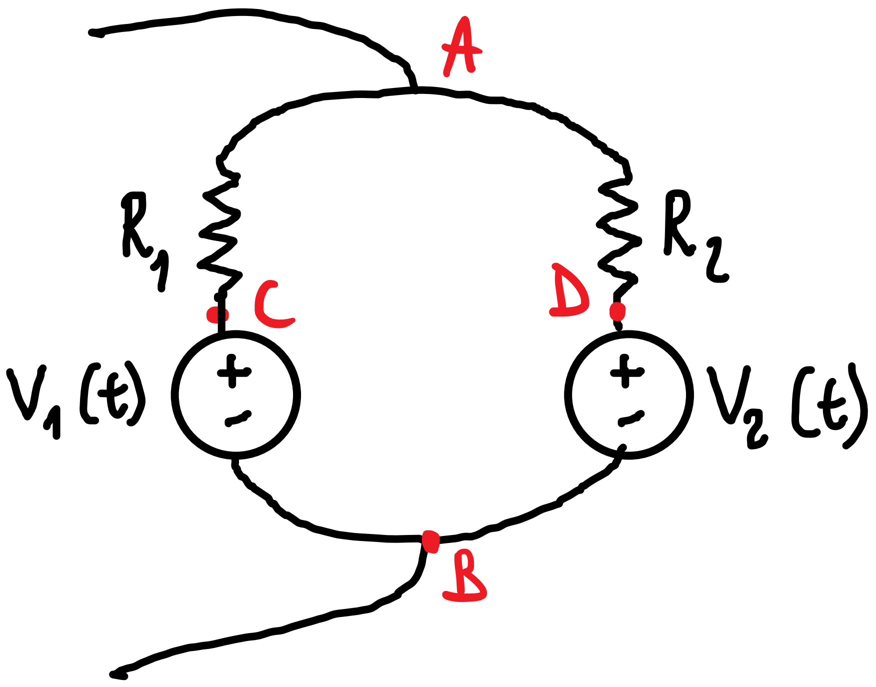
$$V_{R_{LOAD}} = V_g$$

$$P_{R_{LOAD}} = \frac{V_g^2}{R_{LOAD}}$$

SE $R_{LOAD} \rightarrow 0 \Rightarrow P_{R_{LOAD}} \rightarrow +\infty$

Generatori reali

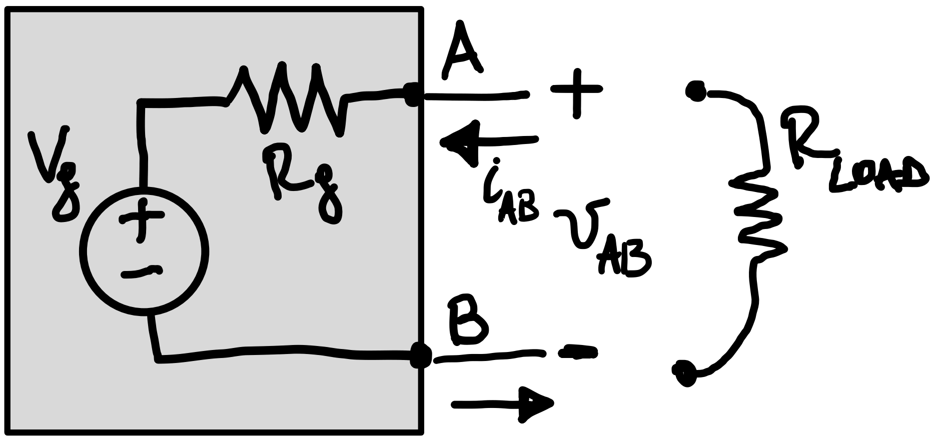
Occorre introdurre un modello più accurato, combinando più elementi ideali (serie di un generatore di tensione e di un resistore).



Questo modello più accurato consente di evitare le incongruenze e le limitazioni evidenziate.

Generatori reali

NOTA BENE: Un generatore reale di tensione non può mai erogare potenza infinita, un generatore reale ha sempre una resistenza interna che limita la corrente erogabile



Se chiudiamo un generatore reale di tensione su un carico resistivo otteniamo un partitore di tensione

Questo modello più accurato consente di evitare le incongruenze e le limitazioni evidenziate.

Generatori reali

INCONGRUENZE LEGATE AI MODELLI IDEALI

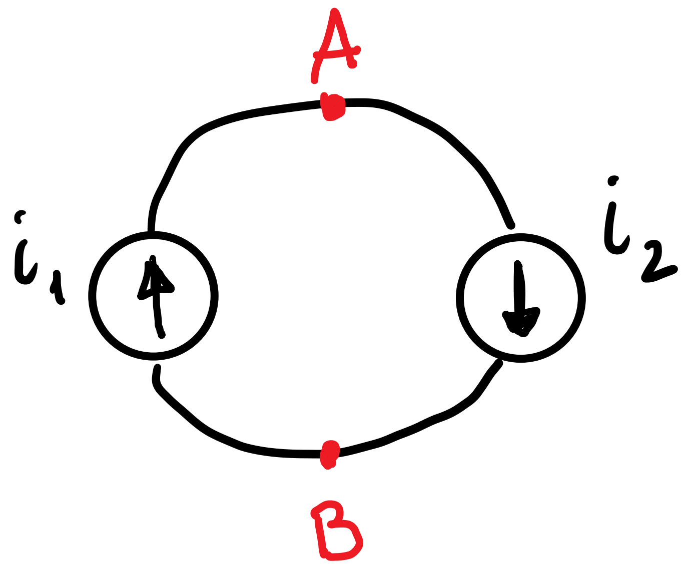
Se $\mathbf{i}_1(t) \neq \mathbf{i}_2(t)$

Pretenderei che sulla stessa

Maglia si abbiano

contemporaneamente

due correnti differenti



Se $\mathbf{i}_1(t) = \mathbf{i}_2(t)$

La KLC ai nodi A o B

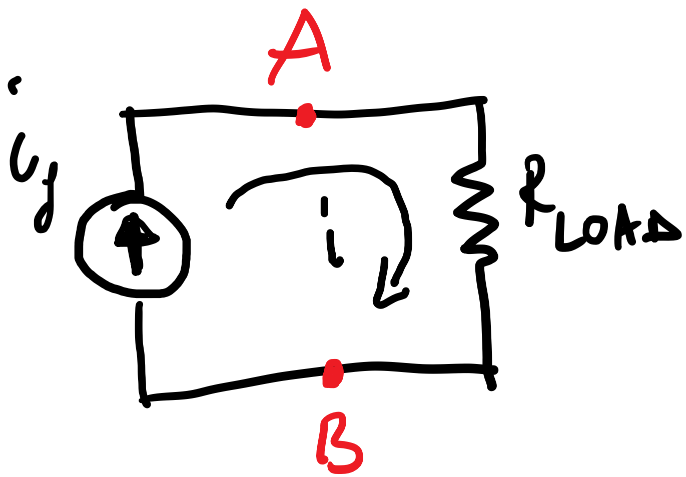
$$\mathbf{i}_1(t) - \mathbf{i}_2(t) = 0$$

non consente di calcolare la tensione ai capi dei generatori (infinite soluzioni).

Generatori reali

INCONGRUENZE LEGATE AI MODELLI IDEALI

Un generatore ideale può erogare una potenza infinita



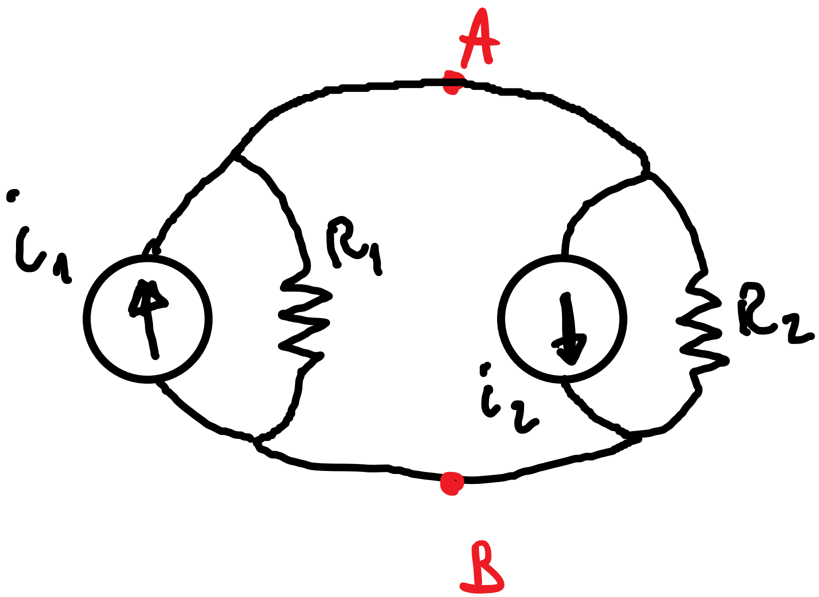
$$i_{R_{LOAD}} = i_g$$

$$P_{R_{LOAD}} = (i_g)^2 \cdot R_{LOAD}$$

se $R_{LOAD} \to +\infty \Rightarrow P_{R_{LOAD}} \to +\infty$

Generatori reali

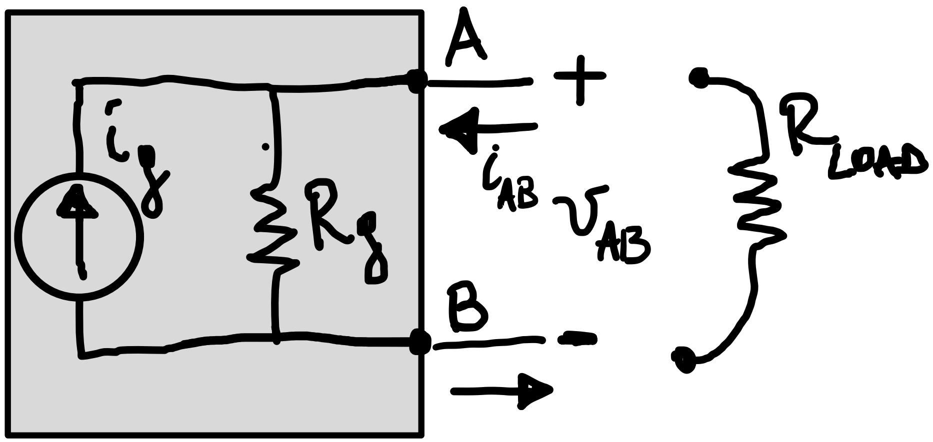
Occorre introdurre un modello più accurato, combinando più elementi ideali (parallelo di un generatore di corrente e di un resistore).



Questo modello più accurato consente di evitare le incongruenze e le limitazioni evidenziate.

Generatori reali

NOTA BENE: Un generatore reale di corrente non può mai erogare potenza infinita, un generatore reale ha sempre una resistenza interna che limita la tensione ai morsetti

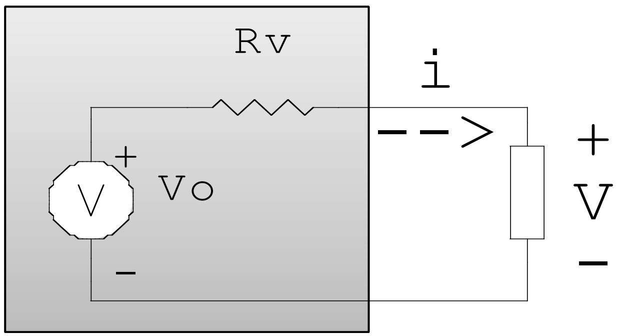


Se chiudiamo un generatore reale di corrente su un carico resistivo otteniamo un partitore di tensione

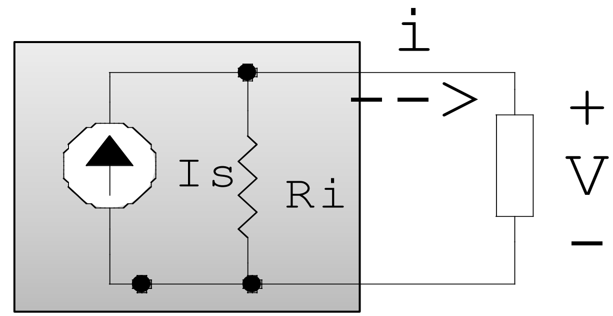
Questo modello più accurato consente di evitare le incongruenze e le limitazioni evidenziate.

Generatori reali

Equivalenza **esterna** dei generatori reali



$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_0 - R_V i$$



$$i = i_0 - \frac{1}{R_i} v$$

I due generatori possono essere sostituiti tra loro in maniera equivalente.

Dalla equazione di equilibrio delle correnti al generatore di corrente ho:

$$\boxed{i + \frac{v}{R_i} - I_S = 0 \Rightarrow I_S - i = \frac{v}{R_i}}$$

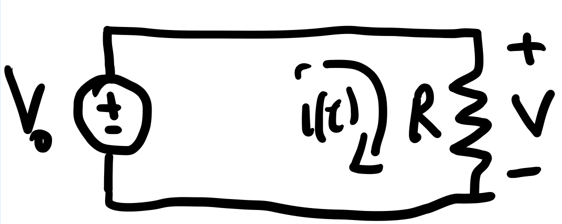
equivalente a quella del generatore di tensione se

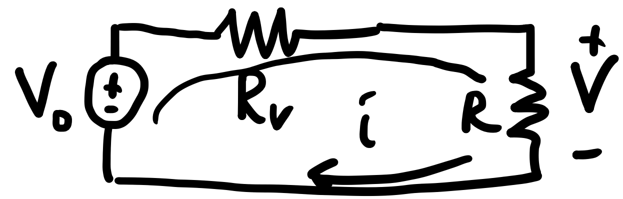
$V_0 = R_I I_S$ ed $R_v = R_i$

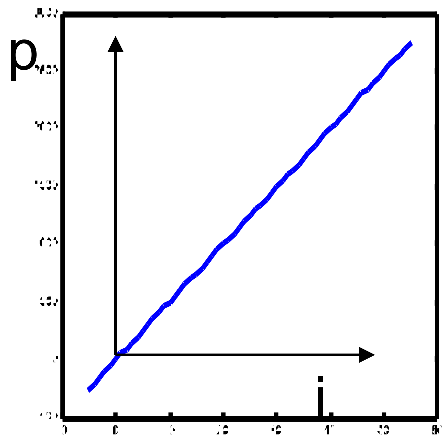
Generatori reali

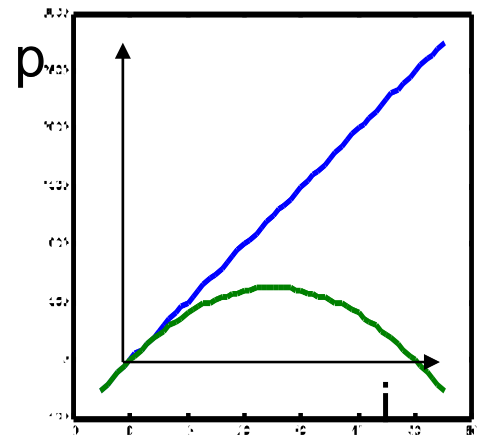
Confronto tra modelli del generatore reale

Confrontiamo il generatore ideale di tensione con il modello del generatore reale di tensione tramite la potenza erogata sul carico esterno









$$P = v \cdot i = v_0 \cdot i$$

dove $i = V_0/R$ (carico resistivo)

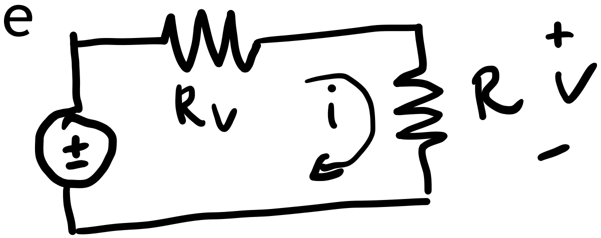
segue $\lim\limits_{\substack{i \to \infty \\ R=0}} (P) = \infty$

$$P = v \cdot i = (v_0 - R_v i) \cdot i = v_0 i - R_v i^2$$

dove $i = V_0 / (R_v + R)$ (carico resistivo)

Generatori reali

La massima corrente che il generatore reale può far circolare si ha per la chiusura in corto circuito



$$i_{MAX} = i_{CC} = \frac{V_0}{R_v}$$

a cui corrisponde una potenza erogata al carico R nulla ()

$$p_{icc} = v_0 \cdot \frac{v_0}{R_v} - R_v \left(\frac{v_0}{R_v} \right)^2 = 0$$

La potenza massima su R si ha per $i = \frac{i_{cc}}{2}$ e vale $P_m = \frac{v_0^2}{4R_v}$

Per R_v=0 la potenza cresce indefinitamente al crescere di i (generatore ideale).

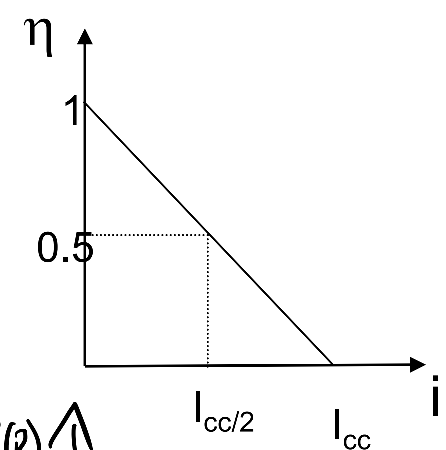
LA LIMITAZIONE NELLA MASSIMA POTENZA EROGABILE E' LEGATA ALLA PRESENZA DI Rv

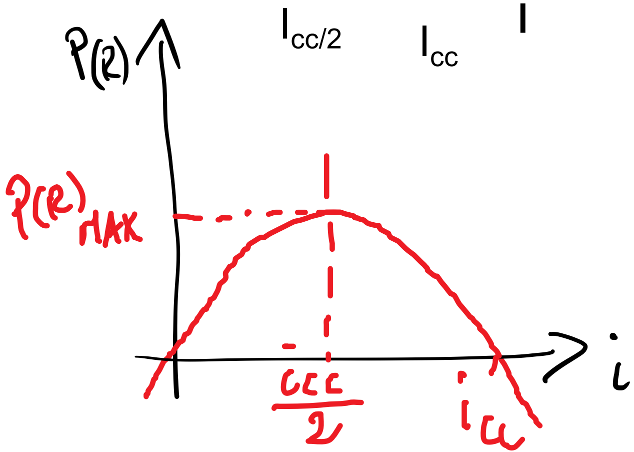
Generatori reali

Rendimento

$$\eta = \frac{\text{potenza assorbita dal carico}}{\text{Potenza erogata dal generatore ideale}}$$

$$\eta = \frac{p}{p_0} = \frac{V \cdot I}{V_0 \cdot I} = \frac{(V_0 - V_R) \cdot I}{V_0 \cdot I} = 1 - \frac{V_R \cdot I}{V_0 \cdot I} = 1 - \frac{R \cdot I}{V_0}$$





- Elevato rendimento (trasporto di energia)
- Massima potenza trasferita (trasmissione segnali)