PARTE III ANALISI DEI CIRCUITI

TOPOLOGIA DEI CIRCUITI

1. Il grafo di un circuito

Un circuito elettrico può essere sempre ricondotto all'interconnessione di r elementi bipolari, in quanto costituito da bipoli e da elementi a più porte (o da elementi multipolari riconducibili ai precedenti). Esso è dunque completamente determinato quando si conoscano le r correnti e le r tensioni di tali elementi, cioè 2r grandezze elettriche. Queste devono soddisfare al tempo stesso:

a) le relazioni costitutive degli elementi;
b) i vincoli topologici stabiliti dalle due leggi di Kirchhoff (equazioni algebriche lineari omogenee nelle correnti e nelle tensioni).

L'insieme delle r correnti può essere sempre suddiviso in due sottoinsiemi tali che, note le correnti del primo (sottoinsieme di correnti indipendenti), i vincoli topologici determinino[1] quelle del secondo (sottoinsieme delle correnti dipendenti). Analogo discorso vale per le tensioni, che si possono anch'esse suddividere in un sottoinsieme di tensioni indipendenti e in uno di tensioni dipendenti. Vi sono, generalmente, più modi di suddividere le correnti (oppure le tensioni) in due sottoinsiemi con queste proprietà.

L'individuazione di questi sottoinsiemi è importante anche perchè costituisce un passo obbligato verso la determinazione delle equazioni generali del circuito, che sono opportune combinazioni delle equazioni costitutive degli elementi e delle leggi di Kirchhoff delle correnti o delle tensioni. E qui notiamo che la suddivisione delle correnti (o delle tensioni) in sottoinsiemi indipendenti e dipendenti non dipende dalla natura degli elementi del circuito, ma solo da come essi sono collegati, cioè dalle proprietà topologiche del circuito (quelle che rimangono invariate sottoponendolo a deformazione).

Sotto questo punto di vista, le proprietà di un circuito che qui ci interessano sono completamente descritte dal **grafo** ad esso associato, che si ottiene sostituendo a ciascun elemento

[1] Particolarmente intuitivo è il caso delle correnti attraverso due bipoli collegati in serie: nota una di queste, l'altra è evidentemente determinata. Analogo discorso vale per le tensioni di due bipoli disposti in parallelo.

bipolare un segmento detto **ramo**. Questi segmenti, di solito, vengono orientati secondo il verso delle correnti che scorrono negli elementi, che si fissa arbitrariamente una volta per tutte. E in tale caso, se i versi delle correnti e i segni delle tensioni degli elementi del circuito sono stati scelti coordinati (cioè in modo che il loro prodotto rappresenti la potenza assorbita da ciascun elemento), anche i segni delle tensioni dei rami sono determinati.

I segmenti che rappresentano i bipoli si incontrano nei **nodi**, che sono i punti d'interconnessione fra i terminali degli elementi del circuito. Questi si possono distinguere in nodi semplici (posti all'unione fra due elementi) e in nodi **complessi** (posti all'unione fra tre o più elementi). Si usano i nodi complessi, anzichè quelli semplici, quando, ai fini dell'analisi, s'intende considerare come un ramo unico ciascun insieme di rami disposti in serie (collegati fra loro da nodi semplici), cioè come elemento unico l'insieme di più bipoli attraversati da una medesima corrente.

Un grafo può essere, a sua volta, **connesso** oppure **non connesso**, in quest'ultimo caso costituito da p parti separate che tuttavia si influenzano fra loro, per esempio attraverso l'azione di induttori accoppiati o di generatori controllati.

2. Tagli e maglie

Per applicare a un circuito la prima legge di Kirchhoff si utilizza una superficie chiusa che ne interseca alcuni elementi, attraverso la quale la somma delle correnti è nulla. A questa superficie (che è una linea chiusa se il circuito può essere disegnato su un piano[2]) corrisponde un insieme di rami del grafo che vengono tagliati da essa. Questo insieme prende il nome di **taglio**.

Per applicare a un circuito la seconda legge di Kirchhoff si utilizza una linea chiusa, lungo la quale la somma delle differenze di potenziale è nulla. Una linea di questo tipo prende il nome di **maglia** e comprende un insieme di rami del grafo ognuno dei quali ha un nodo in comune con i due rami adiacenti.

In generale, per un dato circuito, si potranno considerare più tagli, ottenuti con superfici chiuse diverse, e più maglie, ottenute con linee chiuse diverse.

3. Alberi e coalberi

Una importanza speciale hanno quei particolari insiemi di rami che collegano fra loro tutti i nodi del grafo, ma senza formare percorsi chiusi (cioè maglie). Un insieme di tale tipo prende il nome di **albero**. Nel caso di un grafo connesso, che abbia r rami ed n nodi, qualsiasi albero è

[2] Questo non è sempre possibile.

costituito da n-1 rami. Il primo ramo dell'albero, infatti, unisce due nodi. L'aggiunta del secondo, che ha un nodo in comune col primo, porta ad unirne tre. Ciascun ramo aggiuntivo collega un altro nodo ai precedenti, e così via fino all'ultimo ramo che collega l'ultimo nodo (cioè l'ennesimo) agli altri.

Dato un albero, i rami rimanenti del grafo ne costituiscono il **coalbero** corrispondente. Poichè qualunque albero comprende n-1 rami, un coalbero ne contiene r-(n-1), cioè r-n+1.

E' ora evidente che, dato un albero di un grafo, per creare una maglia basta aggiungere ad esso un altro ramo, appartenente al coalbero corrispondente. Tutte le maglie così ottenute prendono il nome di **maglie fondamentali** (associate all'albero considerato): il loro numero coincide evidentemente con quelle dei rami del coalbero, cioè ve ne sono:

$m = r - n + 1$

Notiamo che, dato un albero, ciascuna maglia fondamentale contiene un solo ramo del coalbero e che ciascun ramo del coalbero appare in una sola maglia fondamentale.

Se il circuito non è connesso (cioè vi sono più parti che si influenzano a vicenda, per esempio attraverso trasformatori) anche il grafo non è connesso ed è costituito allora da p parti separabili. In tal caso il numero delle diverse maglie fondamentali è:

$m = r - n + p$.

Chiamiamo ora **taglio** un insieme di t rami di un grafo, eliminando i quali il grafo resta separato in due parti (ma non così eliminando solo t-1 di essi). Per esempio, togliendo un ramo a un albero, i nodi del grafo restano suddivisi in due gruppi, non più connessi fra loro. Si può allora individuare un taglio costituito dal ramo che abbiamo tolto all'albero e da altri (uno o più) rami del corrispondente coalbero. Un taglio siffatto si chiama **taglio fondamentale** (associato all'albero considerato). Il numero di questi tagli è pari a quello dei rami dell'albero (che possiamo togliere, separatamente, uno per volta). Di tagli fondamentali, cioè, ve ne sono n-1.

Notiamo che, dato un albero, ciascun taglio fondamentale contiene un solo ramo dell'albero e che ciascun ramo dell'albero appare in un solo taglio fondamentale.

Consideriamo le tensioni dei rami di un albero: esse costituiscono un insieme di tensioni indipendenti. Infatti:

a) non esistono legami fra esse (perchè non vi sono maglie);
b) esse definiscono le tensioni di tutti gli n nodi del circuito, e quindi anche le differenze di potenziale (esprimibili come differenze fra le tensioni dei nodi) di tutti i rami, compresi

quelli del coalbero.

Consideriamo le correnti dei rami di un coalbero: esse costituiscono un insieme di correnti indipendenti. Infatti:

a) non esistono legami fra esse (perchè non esiste un taglio costituito solamente da rami del coalbero, dal momento che tutti i nodi del circuito sono collegati dai rami dell'albero);
b) tutte le correnti dei rami dell'albero sono esprimibili in termini di quelle dei rami del coalbero (come si deduce applicando la prima legge di Kirchhoff a ciascuno dei tagli fondamentali).

Riassumiamo brevemente quanto si è detto.
In un circuito rappresentato con un grafo connnesso che ha r rami ed n nodi, vi sono:

(1) $m = r - n + 1$

maglie indipendenti. Applicando la seconda legge di Kirchhoff si possono perciò scrivere m equazioni nelle tensioni degli elementi del circuito.

Nello stesso circuito vi sono:

(2) $t = n - 1$

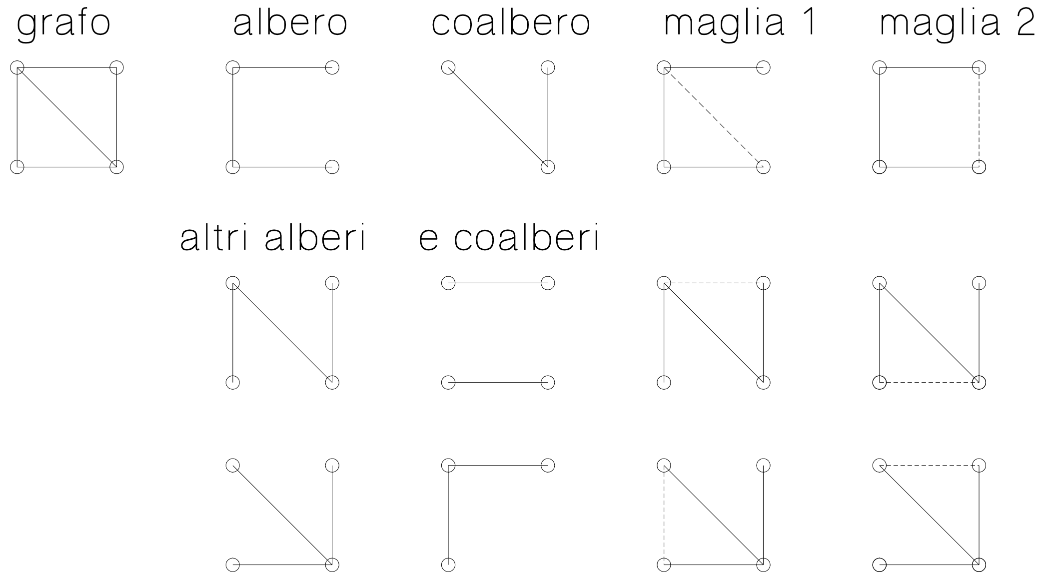
tagli indipendenti. Applicando la prima legge di Kirchhoff si possono perciò scrivere t equazioni nelle correnti degli elementi del circuito. Nel caso di circuiti costituiti da p parti separabili, le formule di sopra diventano le seguenti:

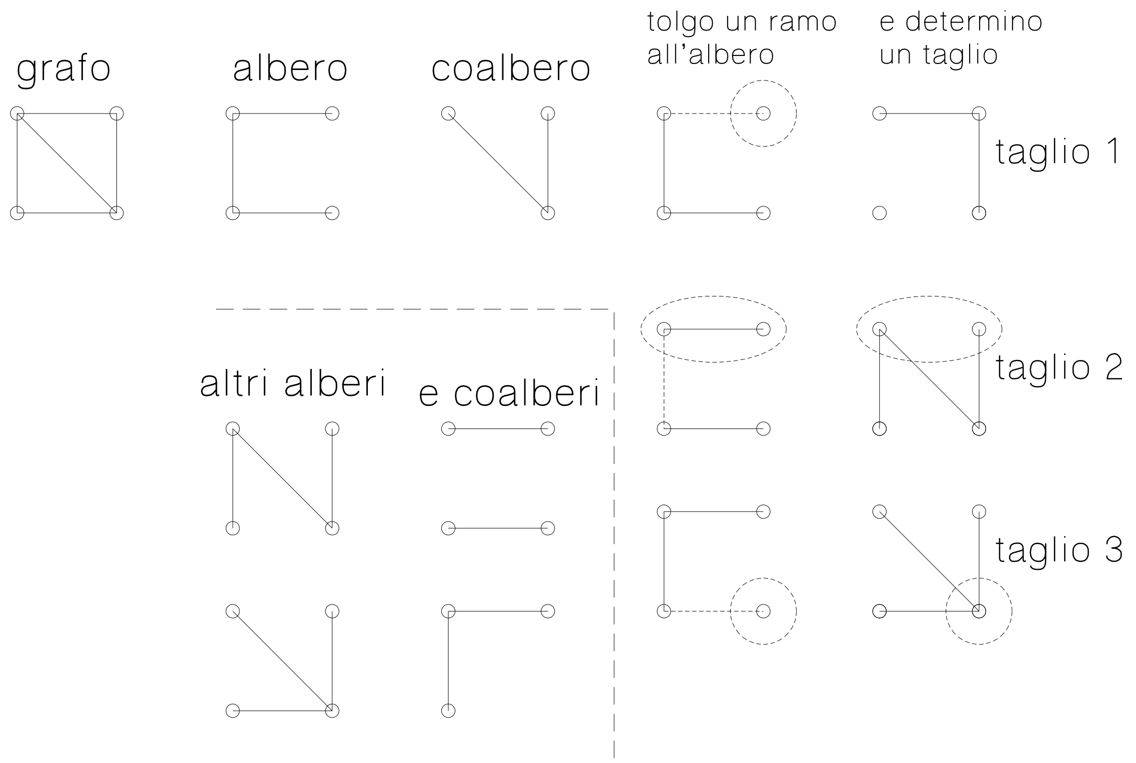
(3) $m = r - n + p$

(4) $t = n - p$

Per analizzare un circuito elettrico, si può scegliere, indifferentemente, l'uno o l'altro sistema di equazioni. Tale scelta, che di solito è dettata da motivi di convenienza pratica (in particolare mirando a minimizzare il numero di equazioni), conduce all'uno o all'altro dei due metodi di analisi (maglie e nodi) che esamineremo in quanto segue.

circuito con r=5 n=4 m=2 t=3





METODI DI ANALISI: MAGLIE E NODI

4. Il metodo delle maglie

Nell'analisi su base maglie si impiegano le equazioni che derivano dall'equilibrio delle tensioni in ciascuna delle maglie di uno fra i possibili insiemi di maglie indipendenti del circuito. Il numero di queste equazioni è m, dato dalla (1) (o dalla (3)). Ciascuna di esse, se k è il generico elemento inserito nella maglia considerata, ha la forma:

$$\sum_k v_k(t) = 0 \qquad (5)$$

Per scrivere tali equazioni, si associa a ciascuna maglia una corrente, detta appunto **corrente di maglia**, e se ne sceglie il verso arbitrariamente. Le correnti che scorrono in ciascuno degli elementi del circuito si esprimono poi in termini delle correnti di maglia. La corrente di un elemento che appartenga a una sola maglia sarà uguale alla corrente di tale maglia (presa con segno positivo se il verso della corrente di maglia coincide con quello assegnato alla corrente dell'elemento considerato, negativo nel caso opposto). La corrente di un elemento che appartenga a più maglie sarà espressa come somma algebrica delle correnti delle maglie a cui esso appartiene (con lo stesso criterio di prima per quanto riguarda i segni).

Notiamo che se il circuito comprende dei generatori di corrente il numero delle equazioni (5) si riduce da m a:

$$M = m - g_i = r - n + p - g_i \qquad (6)$$

dove g_i è il numero di generatori di corrente presenti nel circuito. Ciascuno di essi, infatti, introduce una corrente di intensità nota, sicchè la corrente della maglia in cui il generatore è inserito è nota a sua volta (oppure, nel caso di generatori controllati, è esprimibile in termini di correnti di altre maglie). Questo si ottiene peraltro solo se si ha l'avvertenza di scegliere l'albero in modo che ciascun generatore di corrente sia inserito in un ramo del coalbero corrispondente[3] (solo così la corrente di ciascun generatore coincide con una determinata corrente di maglia).

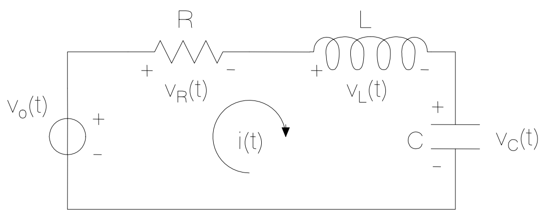
[3] Questo è sempre possibile con l'unica eccezione, di interesse pratico trascurabile, dei circuiti in cui vi sia un taglio anomalo costituito da soli generatori di corrente. In questo caso notiamo che: a) il taglio anomalo deve comunque verificare la prima legge di Kirchhoff; b) la soluzione del problema è indeterminata, ma solo per quanto riguarda le tensioni fra i due gruppi di nodi nei quali il taglio suddivide il circuito.

In ciascuna delle equazioni (5), si scriveranno al primo membro le tensioni degli eventuali generatori di tensione indipendenti (inseriti nella maglia corrispondente), al secondo membro le tensioni degli altri elementi della maglia, espresse, come si detto, in termini delle varie correnti di maglia. Nella equazione corrispondente a una maglia figurerà pertanto una sommatoria delle correnti delle varie maglie (più precisamente, di quelle che con essa hanno elementi in comune o che determinano la tensione degli eventuali generatori controllati in essa inseriti), a ciascuna delle quali viene applicato un opportuno operatore integrodifferenziale.

Per ottenere la soluzione completa del circuito, occorre precisare le condizioni iniziali all'istante (per esempio $t = 0$) a cui ha inizio l'analisi: le tensioni ai terminali dei condensatori e le correnti che scorrono negli induttori, cioè le grandezze che definiscono lo stato del circuito. Le tensioni dei condensatori (all'istante iniziale) vengono rappresentate portandole al primo membro: esse, assieme ai contributi dei generatori di tensione eventualmente inseriti nella maglia, costituiscono l'**eccitazione generalizzata** di maglia. Le correnti iniziali degli induttori vanno specificate a parte: il loro numero, peraltro, è sempre minore o uguale di quello (M) delle equazioni, anche se il numero degli induttori è maggiore di M. Si capisce, infatti, che non è possibile specificare indipendentemente le correnti di due induttori disposti in serie.

Esempio 1. Rete con una maglia

Consideriamo la rete costituita da una maglia comprendente un generatore di tensione indipendente e i tre elementi passivi ideali fondamentali, e scegliamo il verso della corrente di maglia i(t) come indicato nella figura. Se $v_R(t)$, $v_L(t)$ e $v_C(t)$ sono le tensioni ai terminali dei tre elementi passivi e se $v_o(t)$ è la tensione impressa dal generatore, scriveremo, applicando la (5):



$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) - v_o(t) = 0$

dove i segni sono stati determinati in base ai criteri di concordanza (fra corrente di maglia e correnti degli elementi) esposti prima. Introducendo nella precedente le relazioni costitutive degli elementi abbiamo:

$$\left\{R + L\frac{d}{dt} + \frac{1}{C}\int dt\right\} i(t) - v_o(t) = 0$$

dove appare l'operatore $\{z'(t)\} = \{R + Ld/dt + 1/C \int dt\}$

Poichè di solito ha interesse analizzare il circuito a partire da un istante iniziale, che qui scegliamo al tempo t = 0, trasformiamo l'integrale indefinito in uno definito, fra 0 e t, scrivendo:

$$\left\{R+L\frac{d}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t d\tau\right\}i(t)+v_C(0)-v_o(t)=0$$

Introducendo l'eccitazione generalizzata di maglia, somma algebrica della tensione del generatore e della tensione iniziale del condensatore,

$v(t) = v_o(t) - v_C(0)$

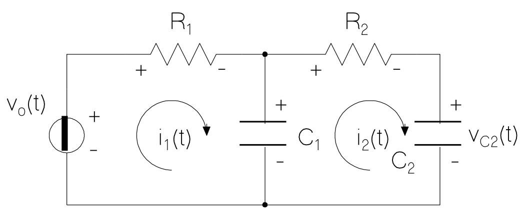
e l'operatore integrodifferenziale $z(t)=\left\{R+L\frac{d}{dt}+\frac{1}{C}\int_0^t d\tau\right\}$

scriviamo infine l'equazione della maglia nella forma standard:

$v(t) = \{z(t)\}\ i(t)$

Questa può essere risolta solo se si completa la specificazione delle variabili di stato (che qui sono due) all'istante iniziale, cioè assegnando un valore determinato alla corrente $i_L(0)$ che scorre nell'induttore a t = 0.

Esempio 2. Rete con due maglie



Consideriamo la rete mostrata nella figura, comprendente 4 nodi e 5 rami e nessun generatore di corrente; le variabili di stato sono due. Applicando la (6) si conclude che il numero di maglie indipendenti è M = 2, come è d'altronde evidente esaminando la figura. Scegliamo le due maglie, fra i vari modi possibili, come è mostrato nella figura stessa, indicandone le correnti con $i_1(t)$ e $i_2(t)$. (Abbiamo r = 5, n = 4, m = 2, t = 3, N = 2).

Applicando la (5) scriviamo le due equazioni:

$$-v_o(t) + v_{R1}(t) + v_{C1}(t) = 0 \qquad ; \qquad -v_{C1}(t) + v_{R2}(t) + v_{C2}(t) = 0$$

Procedendo come nell'esempio precedente, determiniamo le eccitazioni generalizzate delle due maglie:

$$v_1(t) = v_o(t) - v_{C1}(0) \qquad ; \qquad v_2(t) = v_{C1}(0) - v_{C2}(0)$$

Introducendo nelle due equazioni precedenti le relazioni costitutive degli elementi, individuiamo gli operatori di maglia:

$$z_{11}(t) = \left\{ R_1 + \frac{1}{C_1}\int_0^t d\tau \right\} \qquad ; \qquad z_{22}(t) = \left\{ R_2 + \frac{1}{C_1}\int_0^t d\tau + \frac{1}{C_2}\int_0^t d\tau \right\}$$

e gli operatori mutui: $$\{z_{12}(t)\} = \left\{ -\frac{1}{C_1}\int_0^t d\tau \right\} \qquad ; \qquad \{z_{21}(t)\} = \left\{ -\frac{1}{C_1}\int_0^t d\tau \right\}$$

In ciascuno dei primi figurano tutti e soli gli operatori degli elementi della maglia corrispondente; in ciascuno dei secondi gli operatori degli elementi in comune (in questo caso soltanto C_1) fra le due maglie. Il segno negativo di $\{z_{12}(t)\}$ deriva dal fatto che la corrente che scorre nell'elemento comune, espressa in termini delle correnti di maglia è: $i_{C1}(t) = i_1(t) - i_2(t)$. Gli operatori mutui, qui, sono uguali fra loro, esprimendo così la reciprocità del circuito considerato (che deriva dall'assenza in esso di elementi non reciproci).

Possiamo ora scrivere le equazioni delle maglie nella seguente forma standard:

$v_1(t) = \{z_{11}(t)\}\, i_1(t) + \{z_{12}(t)\}\, i_2(t)$
$v_2(t) = \{z_{21}(t)\}\, i_1(t) + \{z_{22}(t)\}\, i_2(t)$

Queste possono essere risolte senza necessità di ulteriori specificazioni, dal momento che i valori al tempo $t = 0$ delle uniche due variabili di stato (le tensioni dei due condensatori) sono già stati considerati nell'eccitazione generalizzata.

Caso generale

Generalizziamo i risultati illustrati nei due esempi precedenti, considerando il caso di una rete con m maglie indipendenti, rappresentata da M equazioni.

Scegliamo, innanzitutto, un determinato insieme di maglie indipendenti (e qui conviene di solito procedere in modo da minimizzare il numero dei termini che figureranno nelle equazioni[4]) e assegnamo i versi di percorrenza delle M correnti di maglia $i_h(t)$. Per quanto detto prima, conviene scegliere le maglie in modo che in ciascuno degli eventuali generatori di corrente scorra una sola corrente di maglia (delle m-M), che risulterà quindi determinata. Si può anche, in alternativa,

[4] Quando abbia particolare interesse determinare la tensione di uno specifico elemento (per esempio, quella che costituisce la tensione d'uscita del circuito), converrà scegliere le maglie in modo che tale elemento sia attraversato da una sola corrente di maglia.

trasformare i generatori di corrente in generatori di tensione usando il metodo discusso nella parte II.

A ciascuna maglia applichiamo la seconda legge di Kirchhoff, sostituendo poi la tensione di ciascun elemento con quella ottenuta dalla corrispondente relazione costitutiva, espressa in termini delle correnti di maglia che attraversano l'elemento (o che comunque ne influenzano la tensione). In ciascuna delle equazioni così ottenute portiamo quindi al primo membro la corrispondente eccitazione generalizzata $v_k(t)$, costituita dalla somma algebrica delle tensioni $v_{oki}(t)$ dei generatori di tensione indipendenti e delle tensioni iniziali $v_{Ckj}(0)$ dei condensatori inseriti nella maglia (anche qui i segni sono stabiliti in relazione alla concordanza fra il verso della corrente della maglia e quello della corrente di ciascun elemento considerato):

(7) $$v_k(t) = \Sigma\, v_{oki}(t) + \Sigma\, v_{Ckj}(0)$$

Le M equazioni della rete, poste nella forma standard, sono dunque le seguenti:

(8) $$v_k(t) = \Sigma_h \{z_{kh}(t)\}\, i_h(t) \qquad \text{per } k = 1, 2, ..., M$$

Ad esse vanno poi associate le condizioni iniziali relative alle correnti che scorrono negli eventuali induttori delle maglie al tempo t = 0, il cui numero è compreso fra 0 ed M. In molti casi semplici le equazioni precedenti possono essere scritte direttamente, sempre a partire dalle (5), individuando prima le eccitazioni generalizzate e poi gli operatori $\{z_{kh}(t)\}$ nel modo seguente. Per ciascuna maglia il corrispondente operatore è:

(9) $$\{z_{kk}(t)\} = \left\{ R_k + L_k \frac{d}{dt} + \frac{1}{C_k}\int_0^t d\tau \right\}$$

dove R_k rappresenta la somma di tutte le resistenze, L_k la somma di tutte le induttanze, C_k l'inverso della somma degli inversi di tutte le capacità degli elementi inseriti nella maglia k.

Per ciascuna coppia k,h di maglie tali che la seconda influenzi la prima (cioè abbiano almeno un elemento in comune oppure nella prima vi sia un generatore di tensione controllato dalla corrente che scorre nella seconda) l'operatore mutuo è:

(10) $$\{z_{kh}(t)\} = \left\{ R_{kh} + L_{kh} \frac{d}{dt} + \frac{1}{C_{kh}}\int_0^t d\tau \right\} + \{z'_{kh}(t)\}$$

dove le grandezze R_{kh}, L_{kh}, C_{kh} rappresentano la resistenza totale, l'induttanza totale (compreso il contributo delle eventuali mutue induzioni M_{kh}) e la capacità totale (quest'ultima determinata come prima) degli elementi in comune fra le due maglie, e dove l'operatore $\{z'_{kh}(t)\}$, se presente, rappresenta l'effetto della corrente $i_h(t)$ su un generatore di tensione controllato inserito nella maglia k. Il segno delle grandezze R_{kh}, L_{kh}, C_{kh} è positivo se le due correnti di maglia sono concordi negli elementi in comune, altrimenti è negativo.

Si noti che i termini $\{z'_{kh}(t)\}$ sono assenti nei circuiti costituiti esclusivamente da resistori, condensatori, induttori (compresi gli induttori accoppiati e i trasformatori ideali) e generatori indipendenti, sicchè la reciprocità si manifesta con l'uguaglianza

(11) $$\{z_{kh}(t)\} = \{z_{hk}(t)\}$$

5. Analisi in regime sinusoidale permanente

La risposta sinusoidale permanente di un circuito, determinata da generatori indipendenti di tensione e corrente sinusoidale a una specifica frequenza, si ottiene impiegando il metodo simbolico e procedendo in modo simile a quanto detto sopra. Ora le tensioni che compaiono nelle equazioni dell'equilibrio delle maglie sono le tensioni simboliche degli elementi, che vanno poi sostituite con le corrispondenti equazioni costitutive in regime sinusoidale, espresse in termini delle correnti simboliche delle maglie. Le M equazioni della rete nelle grandezze simboliche V_k e I_h assumeranno quindi la forma seguente:

(12) $$V_k = \Sigma_h Z_{kh}(j\omega)\, I_h$$

dove nelle eccitazioni di maglia figurano solo i generatori di tensione indipendenti (perchè qui le condizioni iniziali non interessano) e il significato delle impedenze $Z_{kh}(j\omega)$ dovrebbe essere ovvio.

Esempio 1. Torniamo a considerare il circuito dell'Esempio 2 precedente, analizzandolo in regime permanente sinusoidale per determinarne la funzione di trasferimento $H(j\omega)=V_{C2}/V_o$. Le equazioni in forma simbolica, ottenute da quelle ricavate nell'Esempio 2 a pag. 8, sono:

$$V_o = \left(R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\right) I_1 - \frac{I_2}{j\omega C_1} \qquad ; \qquad 0 = -\frac{I_1}{j\omega C_1} + \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}\right) I_2$$

con determinante

$$D = \left(R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\right)\left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2}\right) - \left(\frac{1}{j\omega C_1}\right)^2$$

Applicando il metodo di Cramer si ottiene: $I_2 = \frac{V_o}{j\omega C_1}\frac{1}{D}$

Dal momento che $V_{C2} = I_2 / (j\omega C_2)$, si ottiene infine

$$H(j\omega) = \frac{V_{C2}}{V_o} = \frac{1}{1 + j\omega\left(R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2\right) - \omega^2 R_1C_1R_2C_2}$$

Esaminando l'andamento di $|H(j\omega)|$ in funzione della frequenza si conclude che questo circuito realizza un filtro passabasso. Si ha in particolare $H(j0)=1$, mentre per ω che tende all'infinito $|H(j\omega)|$ tende a zero come $1/\omega^2$, $\underline{/H}(j\omega)$ tende a $-\pi$.

Esercizio. Il circuito considerato sopra è costituito da due filtri RC passabasso collegati in cascata, ciascuno dei quali, preso separatamente, ha risposta in frequenza: $H_i(j\omega) = 1/(1+j\omega R_iC_i)$.
Spiegare perchè $H(j\omega) \neq H_1(j\omega)\, H_2(j\omega)$, dove $H(j\omega)$ è la risposta in frequenza trovata nell'esempio precedente. Individuare sotto quali condizioni per i valori dei parametri si ha $H(j\omega) \approx H_1(j\omega)\, H_2(j\omega)$.

Esempio 2. Uso dei grafi di flusso

Il circuito cosiderato sopra può essere rappresentato con un grafo di flusso, da cui si può ricavare direttamente la funzione di trasferimento $H(j\omega)$. Per costruire il grafo assegnamo un nodo a ciascuna delle variabili in gioco: un nodo sorgente all'ingresso V_o, un nodo pozzo all'uscita V_{C2} e due nodi intermedi alle correnti di maglia I_1 e I_2. Per stabilire i rami che collegano questi nodi, e per assegnare ad essi le trasferenze corrispondenti, scriviamo le equazioni del circuito nella forma seguente

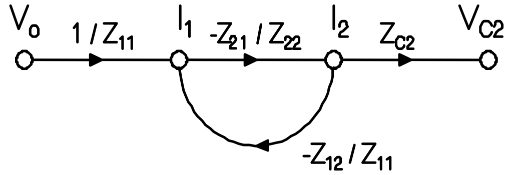
$Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 = V_o$; $\quad Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 = 0$; $\quad V_{C2} = Z_{C2}I_2$

Ricaviamo l'incognita I_1 dalla prima equazione, l'incognita I_2 dalla seconda:

$I_1 = V_o/Z_{11} - I_2\, Z_{12}/Z_{11}$; $\quad I_2 = - I_1\, Z_{21}/Z_{22}$

Si ottiene così il grafo mostrato nella figura, da cui si ricava, applicando le regole esposte nella I parte del corso:

$$V_{C2} = V_o \frac{-Z_{21}/Z_{22}}{1 - Z_{12}Z_{21}/Z_{11}\,Z_{22}} Z_{C2} = \frac{-Z_{21}Z_{C2}V_o}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}$$



Sostituendo nella precedente le espressioni delle impedenze:

$$Z_{11} = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} \quad ; \quad Z_{12} = Z_{21} = -\frac{I_2}{j\omega C_1} \quad ; \quad Z_{22} = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2} \quad ; \quad Z_C = \frac{I_1}{j\omega C_2}$$

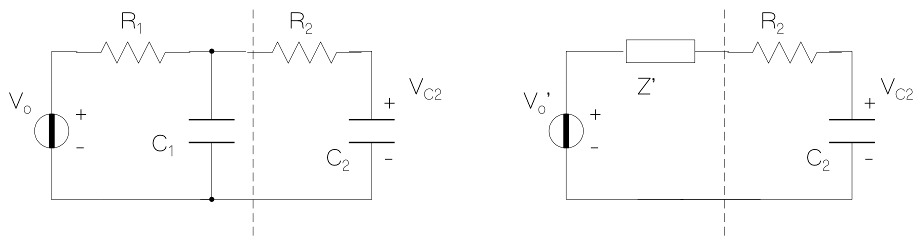
si ottiene infine il risultato già trovato nell'Esempio 1 precedente.

Esempio 3. Impiego del teorema di Helmholtz-Thévenin

Lo stesso circuito può essere analizzato e risolto mediante il teorema di Helmholtz-Thévenin, che consente di trasformarlo in un circuito a una sola maglia. Tagliamo il circuito a valle del condensatore C_1 e determiniamo la tensione a vuoto V_o' e l'impedenza Z' del generatore equivalente di Helmholtz-Thévenin del circuito a monte del taglio:

$$V_o' = \frac{V_o}{1 + j\omega R_1 C_1} \qquad ; \qquad Z'(j\omega) = \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C_1}$$

Applicando questo generatore alla parte del circuito che si trova a valle si ha:



$$V_{C2} = V_o' \frac{1/j\omega C_2}{Z' + R_2 + 1/j\omega C_2}$$

Sostituendo nella precedente le espressioni di V_o' e Z' si riottiene infine quanto già trovato nell'Esempio 1.

Esercizio. Risolvere il circuito considerato negli esempi precedenti con il seguente metodo. Assumendo nota la tensione V_{C2}, in tal caso sarà nota anche la corrente che attraversa C_2 e quindi si potrà calcolare V_{C1}. Ma allora ....

6. Il metodo dei nodi

In una rete (connessa) con n nodi, tutte le tensioni (e quindi tutte le correnti) sono determinate quando si conoscono i valori delle tensioni di n-1 nodi, rispetto a uno preso come riferimento. Possiamo dire pertanto che in tale rete vi sono n-1 **coppie di nodi indipendenti**[5]. Se la

[5] A ciascuna di queste coppie di nodi corrisponde un taglio particolare: quello che isola il nodo "caldo" da tutti gli altri (in ciascuna delle parti separabili del circuito). Ma questi tagli non si possono ottenere col metodo descritto precedentemente: occorre modificare prima l'albero del circuito, introducendovi dei rami fittizi in modo che tutte le coppie di nodi esistenti vengano ad essere collegate fra loro (questi rami corrisponderanno, per esempio, ad elementi di circuito fittizi, di resistenza infinita). Anche questi tagli particolari, naturalmente, sono in numero di n-1 o n-p.

rete contiene p parti separabili, il numero di coppie di nodi indipendenti è evidentemente n-p.

Nell'analisi su base nodi si impiegano le equazioni che derivano dall'equilibrio delle correnti nel nodo "caldo" di ciascuna coppia di nodi indipendenti. Il numero di esse è t, dato dalla (4). Ciascuna di queste equazioni ha la forma:

(13) $$\Sigma_k i_k(t) = 0$$

dove k indica il generico elemento collegato al nodo considerato.

Per scrivere tali equazioni si sceglie un nodo del circuito come riferimento[6] (o nodo di massa) e poi si associa a ciascuno degli altri nodi una tensione, detta tensione di nodo, che rappresenta la differenza di potenziale tra il nodo considerato e quello di riferimento. Le correnti $i_k(t)$ che figurano nella (13) vengono quindi espresse, introducendo le relazioni costitutive degli elementi, in termini delle tensioni nodali, che vengono a rappresentare le incognite del sistema di equazioni del circuito.

Se il circuito contiene dei generatori di tensione, questi determinano le tensioni fra le coppie di nodi fra cui essi sono collegati, riducendo così il numero delle coppie di nodi effettivamente indipendenti e il numero delle corrispondenti equazioni. Queste sono pertanto, in un circuito con p parti separabili:

(14) $$N = t - g_v = n - g_v - p$$

dove g_v è il numero dei generatori di tensione presenti nel circuito.

Ciascuna di queste equazioni rappresenta, ripetiamo, l'applicazione della prima legge di Kirchhoff (equilibrio delle correnti) a un nodo del circuito (con esclusione di quello, o quelli, preso come riferimento e di quelli le cui tensioni sono determinate, rispetto ad altri nodi, dalla presenza di generatori di tensione), che viene separato da tutti gli altri mediante un taglio opportuno.

In ciascuna delle N equazioni (14) si scrivono al primo membro le correnti degli eventuali generatori di corrente indipendenti collegati al nodo che stiamo considerando, al secondo membro le correnti che scorrono in tutti gli altri elementi collegati a tale nodo, espresse in termini delle N tensioni nodali. Nell'equazione corrispondente a un dato nodo, pertanto, figurerà un sommatoria delle tensioni dei vari nodi (più precisamente, di quelli che hanno un elemento che li unisce al nodo considerato o che determinano la corrente di eventuali generatori controllati collegati a tale nodo), a

[6] Uno per ciascuna delle p parti separabili del circuito.

ciascuna delle quali viene applicato un opportuno operatore integrodifferenziale.

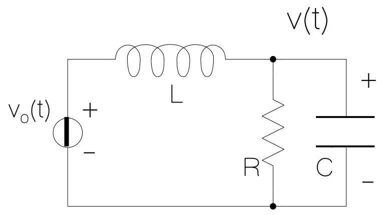
Anche qui, per ottenere la soluzione completa del circuito occorre precisare le condizioni iniziali all'istante a cui ha inizio l'analisi: le tensioni ai terminali dei condensatori e le correnti che scorrono negli induttori, cioè le grandezze che definiscono lo stato del circuito. Questa volta le correnti negli induttori (all'istante iniziale) vengono rappresentate portandole al primo membro: esse, assieme ai contributi dei generatori di corrente indipendenti inseriti nel nodo, costituiscono l'eccitazione generalizzata (di corrente) del nodo considerato. Le tensioni iniziali dei condensatori, invece, si rappresentano specificandole a parte. Il loro numero è minore o uguale a quello (N) delle equazioni.

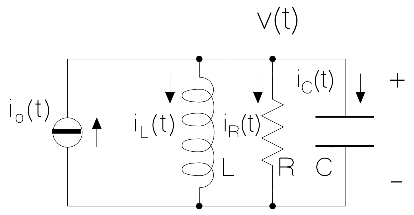
Esempio 1. Rete con una coppia di nodi indipendenti

La rete mostrata in figura ha n = 3 ed r = 4, e si ha pertanto t = 2. Si ha d'altra parte N = 1 dalla (14) dal momento che la rete comprende un generatore di tensione. La rete in esame può essere trasformata direttamente in una con n = 2 applicando al generatore di tensione la trasformazione illustrata nella parte II del corso, cioè ponendo

$$i_o(t) = \left\{ L\frac{d}{dt} \right\}^{-1} v_o(t) = \left\{ \frac{1}{L}\int dt \right\} v_o(t)$$

Assumiamo i versi indicati in figura per le correnti e le tensioni degli elementi. Applicando la (13) al nodo "caldo" si ottiene:





$$i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) - i_o(t) = 0$$

dove i segni sono stati determinati in base ai criteri di concordanza (fra tensione di nodo e tensioni degli elementi) esposti prima. Introducendo nella precedente le relazioni costitutive degli elementi abbiamo:

$$\left\{ \frac{1}{R} + C\frac{d}{dt} + \frac{1}{L}\int dt \right\} v(t) - i_o(t) = 0$$

dove v(t) è la tensione incognita e dove appare l'operatore $\left\{ y'(t) \right\} = \left\{ \frac{1}{R} + C\frac{d}{dt} + \frac{1}{L}\int dt \right\}$.

Anche qui, volendo analizzare il circuito a partire da un istante iniziale (al tempo t = 0), trasformiamo l'integrale indefinito in uno definito, fra 0 e t, scrivendo:

$$\left\{\frac{1}{R}+C\frac{d}{dt}+\frac{1}{L}\int_0^t d\tau\right\}v(t)+i_L(0)-i_o(t)=0$$

Introducendo l'eccitazione generalizzata di nodo, somma algebrica della corrente del generatore e della corrente iniziale dell'induttore,

$$i(t) = i_o(t) - i_L(0)$$

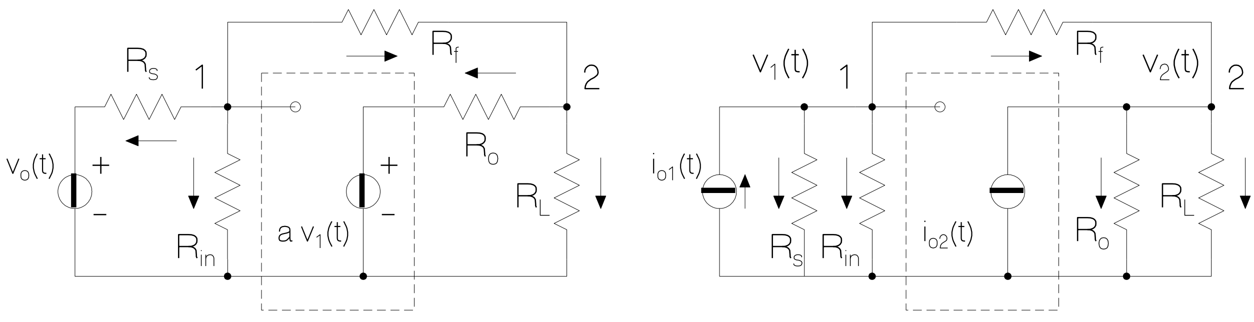
e l'operatore integrodifferenziale $\{y(t)\}=\left\{\frac{1}{R}+C\frac{d}{dt}+\frac{1}{L}\int_0^t d\tau\right\}$

scriviamo infine l'equazione nodale nella forma standard:

$i(t) = \{y(t)\}\ v(t)$

Questa può essere risolta solo se si completa la specificazione delle variabili di stato (che in questo caso sono due) all'istante iniziale, cioè assegnando un valore determinato alla tensione $v_C(0)$ del condensatore a t = 0.

Esempio 2. Rete con due coppie di nodi indipendenti



Consideriamo la rete statica nella figura a sinistra, che costituisce un modello per piccoli segnali di un circuito amplificatore impiegante un dispositivo attivo. Quest'ultimo è rappresentato da un generatore controllato al quale sono stati aggiunti altri elementi per tener conto della resistenza d'ingresso (R_{in}) e di quella d'uscita (R_o) del dispositivo.

La rete comprende 6 elementi bipolari e un elemento a due porte, con 5 nodi e 7 rami. Dato che la rete comprende due generatori di tensione, le coppie di nodi effettivamente indipendenti sono 2, come si conclude in base alla (14).

Trasformiamo i generatori di tensione in generatori di corrente e scegliamo i due nodi come mostrato nella figura a destra, indicandone le tensioni con $v_1(t)$ e $v_2(t)$. Applicando la (13) scriviamo le due equazioni del circuito:

$$i_{Rs}(t) + i_{Rin}(t) + i_{Rf}(t) - i_{o1}(t) = 0$$
$$-i_{Rf}(t) + i_{Ro}(t) + i_{RL}(t) - i_{o2}(t) = 0$$

dove: $i_{o1}(t) = v_o(t)/R_s$; $i_{o2}(t) = v_1(t)\, a/R_o$.

Procedendo come nell'esempio precedente, determiniamo le eccitazioni generalizzate dei due nodi (questa volta non abbiamo variabili di stato da considerare):

$$i_1(t) = i_{o1}(t) \qquad ; \qquad i_2(t) = 0$$

Introducendo nelle equazioni del circuito le relazioni costitutive degli elementi otteniamo le equazioni nodali.

$$\left(\frac{1}{R_s}+\frac{1}{R_{in}}+\frac{1}{R_f}\right)v_1(t)-\frac{v_2(t)}{R_f}-i_{o1}(t)=0$$
$$\left(-\frac{1}{R_f}-\frac{a}{R_o}\right)v_1(t)+\left(\frac{1}{R_o}+\frac{1}{R_f}+\frac{1}{R_L}\right)v_2(t)=0$$

In queste individuiamo gli operatori di nodo, che questa volta sono di natura algebrica:

$$\{y_{11}\}=\left\{\frac{1}{R_s}+\frac{1}{R_{in}}+\frac{1}{R_f}\right\} \qquad ; \qquad \{y_{22}\}=\left\{\frac{1}{R_o}+\frac{1}{R_f}+\frac{1}{R_L}\right\}$$

e mutui:

$$\{y_{12}\}=\left\{-\frac{1}{R_f}\right\} \qquad ; \qquad \{y_{21}\}=\left\{-\frac{1}{R_f}-\frac{a}{R_o}\right\}$$

In ciascuno dei primi figurano gli operatori degli elementi collegati al nodo corrispondente; in ciascuno dei secondi, gli operatori che rappresentano come la tensione di un nodo influenza l'equilibrio delle correnti nell'altro nodo (fra questi vi è l'operatore dell'elemento R_f collegato fra i due nodi e quello relativo al generatore controllato). Gli operatori mutui, qui, non sono uguali fra loro, esprimendo così la non reciprocità del circuito considerato, che deriva dalla presenza in esso di un elemento non reciproco (il generatore controllato).

Possiamo infine scrivere le equazioni dei nodi nella forma standard:

$$i_1(t) = \{y_{11}(t)\}\, v_1(t) + \{y_{12}(t)\}\, v_2(t)$$
$$i_2(t) = \{y_{21}(t)\}\, v_1(t) + \{y_{22}(t)\}\, v_2(t)$$

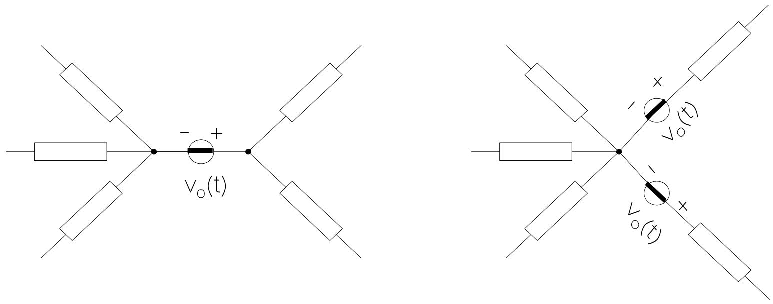
Queste possono essere risolte senza necessità di ulteriori specificazioni, dal momento che si tratta di un circuito statico.

Esercizio. Calcolare la risposta ingresso-uscita del circuito, cioè il rapporto $v_2(t)/v_o(t)$. Individuare per quali scelte dei parametri questa coincide approssimativamente con la risposta di un amplificatore operazionale invertente ($\approx -R_f/R_s$).

Caso generale

Generalizziamo i risultati illustrati nei due esempi precedenti, considerando il caso di una rete con n coppie di nodi indipendenti, rappresentata da N equazioni.

Se la rete comprende generatori di tensione, questi verranno trasformati in generatori di corrente usando il metodo discusso nella parte II. Il procedimento è immediato se il generatore è disposto in serie a un solo elemento (cioè se almeno uno dei due nodi fra cui esso si trova è un nodo semplice); altrimenti occorre prima modificare la rete eliminando il generatore e sostituendolo con tanti generatori identici disposti in serie a tutti gli elementi collegati a uno dei due nodi fra cui esso era disposto, come è mostrato nella figura.



Si può anche analizzare la rete senza trasformare i generatori di tensione in generatori di corrente. In tal caso gli N nodi per cui si scriveranno le N equazioni del circuito, allo scopo di determinarne le tensioni, comprenderanno uno solo dei due nodi delle coppie di nodi fra le quali è collegato un generatore di tensione (le tensioni dei t-N nodi restanti sono determinate dalla conoscenza delle tensioni dei generatori e di quelle degli altri N nodi).

A ciascun nodo applichiamo la prima legge di Kirchhoff, sostituendo poi la corrente di ciascun elemento con quella ottenuta dalla corrispondente relazione costitutiva, espressa in termini delle tensioni dei nodi fra cui l'elemento è collegato (o che comunque ne influenzano la corrente). In ciascuna delle equazioni così ottenute portiamo quindi al primo membro la corrispondente eccitazione generalizzata $i_k(t)$, costituita dalla somma algebrica delle correnti $i_{oki}(t)$ dei generatori di corrente indipendenti e delle correnti iniziali $i_{Lkj}(0)$ degli induttori collegati al nodo:

(15) $$i_k(t) = \Sigma\, i_{oki}(t) + \Sigma\, i_{Lkj}(0)$$

Le N equazioni della rete, poste nella forma standard, sono dunque le seguenti:

(16) $$i_k(t) = \sum_{h=1}^{N} \{y_{kh}(t)\} v_h(t) \qquad \text{per } k = 1, 2, ..., N$$

Ad esse vanno poi associate le condizioni iniziali relative alle tensioni degli eventuali condensatori.

In molti casi semplici le equazioni precedenti possono essere scritte direttamente, sempre a partire dalle (13), individuando prima le eccitazioni generalizzate e poi gli operatori $\{y_{hk}(t)\}$ nel modo seguente. Per ciascun nodo il corrispondente operatore è:

(17) $$\{y_{kk}(t)\} = \left\{ \frac{1}{R_k} + C_k \frac{d}{dt} + \frac{1}{L_k} \int_0^t d\tau \right\}$$

dove R_k rappresenta l'inverso della somma degli inversi di tutte le resistenze, L_k l'inverso della somma degli inversi di tutte le induttanze, C_k la somma di tutte le capacità degli elementi collegati al nodo k.

Per ciascuna coppia k,h di nodi tali che il secondo influenzi il primo (cioè abbiano almeno un elemento collegato fra essi oppure nel primo vi sia un generatore di corrente controllato dalla tensione del secondo nodo) l'operatore mutuo è:

(18) $$\{y_{kh}(t)\} = \left\{ \frac{1}{R_{kh}} + C_{kh} \frac{d}{dt} + \frac{1}{L_{kh}} \int_0^t d\tau \right\} + \{y'_{kh}(t)\}$$

dove le grandezze R_{kh}, L_{kh}, C_{kh} rappresentano la resistenza totale, l'induttanza totale (compreso il contributo delle eventuali mutue induzioni) e la capacità totale degli elementi collegati fra i due nodi, e dove l'operatore $\{y'_{kh}(t)\}$, se presente, rappresenta l'effetto della tensione $v_h(t)$ del nodo h su un generatore di corrente controllato agente sul nodo k.

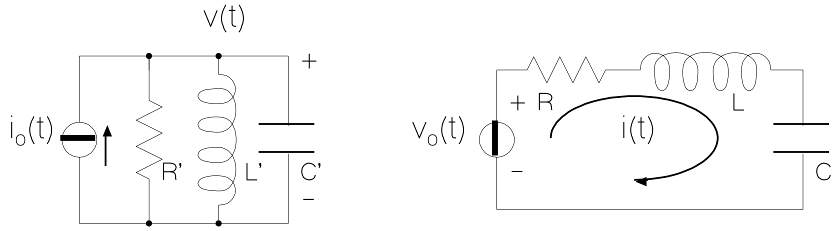
Si noti che nei circuiti costituiti esclusivamente da resistori, condensatori, induttori (compresi gli induttori accoppiati e i trasformatori ideali) e generatori indipendenti i termini $\{y'_{kh}(t)\}$ sono assenti, sicchè la reciprocità si manifesta con l'uguaglianza

(19) $$\{y_{kh}(t)\} = \{y_{hk}(t)\}$$

DUALITA' E ANALOGIE

7. Dualità e circuiti duali

Esaminando le forme standard delle equazioni (8) ottenute applicando il metodo delle maglie e delle equazioni (16) ottenute applicando il metodo dei nodi si osserva che esse, dal punto di vista formale, sono del tutto analoghe. Questa analogia può essere osservata a un livello più dettagliato, quando si considerino, per esempio, i due circuiti, RLC serie e RLC parallelo, mostrati nella figura. Questi sono descritti, rispettivamente, dalle seguenti equazioni (una ricavata su base nodi, l'altra su base maglie),



$$i_o(t) = \left\{ \frac{1}{R'} + C'\frac{d}{dt} + \frac{1}{L'}\int dt \right\} v(t) \qquad ; \qquad v_o(t) = \left\{ R + L\frac{d}{dt} + \frac{1}{C}\int dt \right\} i(t)$$

che hanno esattamente la medesima struttura e che vengono addirittura a coincidere se i valori numerici dei coefficienti soddisfano le uguaglianze: R' = 1/R, L' = C, C' = L. Evidentemente, poi, se $i_o(t) = v_o(t)$ le due soluzioni sono identiche a loro volta.

In generale si dicono **duali** due circuiti che siano rappresentati dalle stesse equazioni, l'uno su base nodi, l'altro su base maglie. Fra due reti duali si può costruire la tabella di corrispondenza qui a fianco.

maglia indipendente	**coppia di nodi indipendente**
corrente di maglia	tensione di nodo
generatore di tensione	generatore di corrente
generatore di corrente	generatore di tensione
elementi in serie	elementi in parallelo
resistenza R	resistenza R'=1/R
induttanza L	capacità C'=L
capacità C	induttanza L'=C

Data una rete, si può costruirne la rete duale corrispondente con il seguente procedimento[7]:

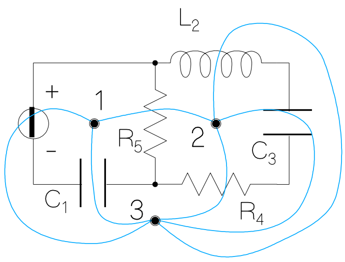
a) al centro di ciascuna maglia della rete originaria si dispone un nodo della rete duale; il nodo di riferimento si dispone all'esterno;
b) ciascun nodo si collega al nodo di riferimento con tutti e soli gli elementi duali degli

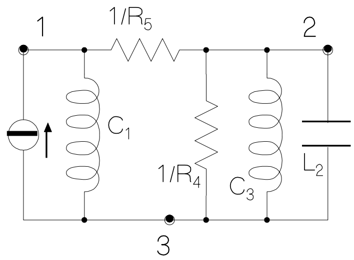
[7] Questo non è sempre possibile, ma soltanto per le reti dette **planari**, che sono quelle che si possono disegnare sul piano senza che due rami s'incrocino (cioè che non hanno elementi comuni a tre o più maglie).

elementi della maglia corrispondente, che non siano comuni ad altre maglie;

c) ciascuna coppia di nodi interni alle maglie si collega con tutti e soli gli elementi duali degli elementi comuni alle due maglie dove si trovano tali nodi.

Un caso particolare è quello delle reti dette **autoduali**, per le quali la rete duale coincide con la rete originaria, che è dunque la duale di se stessa.





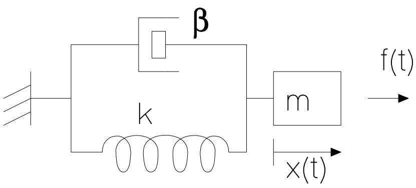
8. Il metodo delle analogie

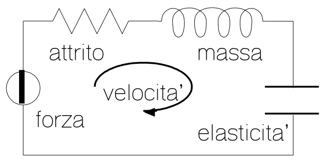
Il discorso precedente può essere esteso a considerare le analogie fra sistemi di diversa natura fisica che siano governati dalle medesime equazioni (più precisamente, da equazioni aventi la stessa struttura formale), secondo un criterio introdotto nell'Ottocento da James Clerk Maxwell, che trova oggi utile impiego nei campi più vari della fisica e delle sue applicazioni.

Riconosciamo, innanzitutto l'analogia fra il comportamento di un oscillatore elettrico[8] (circuito risonante RLC serie) e di un oscillatore meccanico (*oscillatore armonico smorzato*), che sono descritti rispettivamente dalle seguenti equazioni:

$$\left\{L\frac{d}{dt}+R+\frac{1}{C}\int dt\right\}i(t)=v(t) \qquad ; \qquad \left\{m\frac{d}{dt}+\beta+k\int dt\right\}u(t)=f(t)$$

Confrontando fra loro queste equazioni, si osserva che la massa m corrisponde all'induttanza L, l'attrito β alla resistenza elettrica R, la costante elastica k all'inverso della capacità C, la forza f(t) applicata all'oscillatore meccanico alla tensione v(t) applicata al circuito elettrico, la velocità u(t)=dx(t)/dt (dove x(t) è lo spostamento) all'intensità della corrente elettrica i(t).





Questa analogia elettromeccanica consente di analizzare un sistema meccanico a costanti concentrate in termini di un corrispondente **circuito elettrico equivalente**, potendo allora applicare vantaggiosamente tutto l'insieme delle metodologie note a tale proposito. Nel caso dell'oscillatore armonico, il circuito equivalente coincide evidentemente con quello del circuito RLC serie.

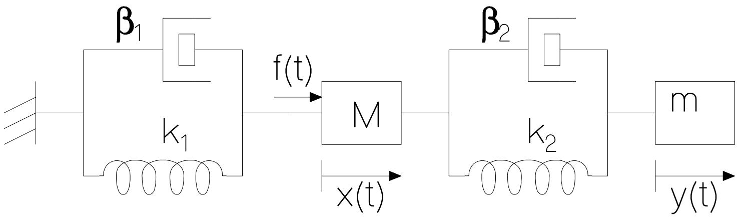
[8] Notiamo che di solito in elettronica il termine *oscillatore* non è usato per designare i circuiti risonanti ma solo i circuiti attivi in grado di generare oscillazioni.

Questa analogia stabilisce le corrispondenze elencate nella tabella seguente.

segnali		parametri	
forza	tensione	induttanza	massa
velocità	corrente elettrica	attrito	resistenza elettrica
spostamento	carica elettrica	capacità elettrica	elasticità

Notiamo che si può stabilire anche una seconda analogia elettromeccanica, duale della precedente, ottenuta mediante le corrispondenze fra le grandezze meccaniche e le grandezze elettriche duali di quelle della tabella.

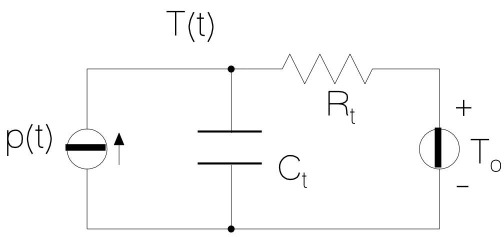
Esercizio. Determinare le equazioni differenziali del sistema meccanico descritto nella figura, costituito da due oscillatori meccanici accoppiati, nell'ipotesi che una forza esterna f(t) sia applicata alla massa M. Ricavare e disegnare il circuito elettrico equivalente.



Il metodo delle analogie è usato anche per studiare i sistemi termici in termini di circuiti elettrici equivalenti. Anche in questo caso, naturalmente, si tratta di sistemi termici schematizzati in termini di elementi concentrati e quindi descritti da equazioni differenziali ordinarie (intese come approssimazione delle equazioni alle derivate parziali che descrivono il trasferimento del calore per conduzione). In questo caso l'analogia usata più spesso è descritta dalla tabella seguente, dove si nota l'assenza di elementi induttivi, in accordo con la forma delle equazioni che descrivono i fenomeni termici.

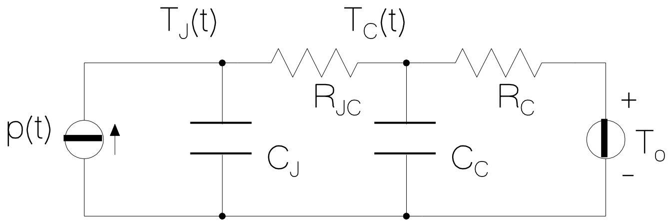
segnali		parametri	
temperatura	tensione	resistenza termica	resistenza elettrica
potenza termica dQ/dt	corrente elettrica	capacità termica	capacità elettrica
quantità di calore Q	carica elettrica		

Esempio 1. Si vuole determinare l'andamento temporale della temperatura T(t) di un ambiente di capacità termica C_t quando in esso si trova una sorgente di calore di potenza $p_t(t)$ ed è nota la resistenza termica totale R_t fra l'ambiente e l'esterno, che si trova a una temperatura fissa T_o. Utilizzando le corrispondenze della tabella, schematizziamo il sistema termico mediante il circuito elettrico equivalente mostrato a fianco, che è descritto dall'equazione differenziale:



$$C_t \frac{dT(t)}{dt} = p(t) + \frac{T_o}{R_t} - \frac{T(t)}{R_t}$$

Esempio 2. Vogliamo studiare l'andamento della temperatura T(t) nella regione attiva di un transistore conoscendo l'andamento temporale della potenza elettrica dissipata nel dispositivo p(t) ≈ v(t) i(t), la capacità termica C_J della giunzione, la resistenza termica R_{JC} fra la regione attiva e il contenitore del dispositivo, la capacità termica C_C del contenitore e la resistenza termica R_C fra il contenitore e l'ambiente esterno, che si suppone trovarsi alla temperatura fissa T_o.

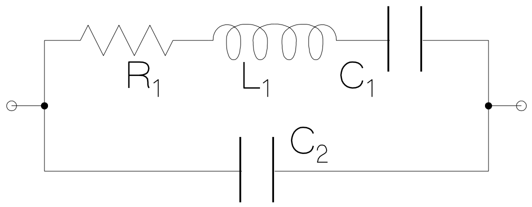


Questo circuito è usato in pratica per scegliere i parametri del sistema in modo che, anche nelle condizioni di funzionamento più gravose, la temperatura T_J della zona attiva del transistore non superi mai il valore oltre il quale il dispositivo si guasta, non assuma valori tali da provocare il cattivo funzionamento del circuito per effetto delle variazioni dei parametri che dipendono dalla temperatura (correnti di perdita, ecc.) e mantenga comunque valori sufficientemente bassi da non peggiorare l'affidabilità.

Il metodo delle analogie trova impieghi importanti anche nello studio dei sistemi elettromeccanici, che comprendono una parte costituita da elementi elettrici e una costituita da elementi meccanici, che sono accoppiate fra loro in modo in modo che si abbia trasferimento di energia, e quindi di segnali, fra una parte e l'altra. Questo è il caso, per esempio, dei trasduttori (microfoni, altoparlanti, sensori di vibrazioni, ecc.) dove l'accoppiamento elettromeccanico può derivare, a seconda dei casi, da forze elettrostatiche, forze elettrodinamiche, effetti piezoelettrici.

Un caso di interesse diretto in elettronica è quello dei **cristalli di quarzo**. Tali dispositivi sono degli oscillatori meccanici che vibrano a frequenze determinate dalla loro geometria e che presentano dissipazioni generalmente molto basse, costituendo così dei risonatori con valori molto alti del fattore di merito, vari ordini di grandezza maggiori di quelli ottenibili da un circuito elettrico risonante. Essi sono costituiti da una lastrina di quarzo, le cui facce vengono metallizzate e collegate ai due terminali del dispositivo. La parte meccanica e quella elettrica sono accoppiate fra loro grazie alla piezoelettricità del materiale.

Il circuito equivalente elettrico mostrato nella figura (che è valido nell'intorno di una determinata frequenza di oscillazione meccanica) comprende gli elementi R_1, L_1 e C_1, che rappresentano rispettivamente l'attrito, l'inerzia e l'elasticità dell'oscillatore meccanico, e l'elemento C_2 che rappresenta la capacità elettrostatica del dispositivo.



Studiando l'impedenza $Z(j\omega)$ del circuito in funzione della frequenza (e tenendo conto che in pratica $C_2 >> C_1$), si trova prima la risonanza (meccanica) dovuta al circuito serie $R_1L_1C_1$ (più precisamente, si tratta di una antirisonanza a cui corrisponde un minimo di $|Z|$) e poi la risonanza (a cui corrisponde un massimo di $|Z|$) del circuito complessivo, nella quale interviene la capacità C_2 (e qualsiasi altra capacità che si trovi in parallelo ai terminali del quarzo). Fra le due risonanze, quella che presenta la frequenza più stabile, perchè indipendente dalle capacità esterne, è quella puramente meccanica, che infatti viene utilizzata come frequenza di riferimento nell'impiego pratico dei cristalli di quarzo in numerose applicazioni.

Esercizio. Tracciare il grafico, in funzione della frequenza, del modulo dell'impedenza di un cristallo di quarzo con C_2=20pF, $C_1=C_2/10^3$, Q meccanico di 10^5 e risonanza serie $f_o=2^{15}$ Hz.

ANALISI DEI CIRCUITI STATICI E DINAMICI

9. Analisi dei circuiti statici

Consideriamo ora i circuiti statici (senza memoria), cioè quelli che sono costituiti esclusivamente da elementi statici. In questo caso si tratta di risolvere un sistema di N equazioni lineari algebriche a coefficienti reali in N incognite, ottenuto usando il metodo delle maglie o quello dei nodi.

Una importantissima proprietà della soluzione è la seguente: grazie alla linearità del problema, tutte le incognite del sistema, cioè le grandezze elettriche (tensioni e correnti), sono lineari nei termini noti, cioè nelle eccitazioni. Se, in particolare, vi è una sola eccitazione, tutte le grandezze elettriche sono direttamente proporzionali ad essa. E se questa varia nel tempo con una certa legge, tutte le grandezze elettriche della rete seguiranno la stessa legge temporale, qualunque sia la sua forma, con opportuni fattori di scala.

La soluzione analitica del sistema di equazioni è praticabile solo se N è relativamente piccolo, altrimenti si userà il calcolatore. In questo caso occorre attenzione ai problemi posti dalla rappresentazione nella macchina dei numeri che esprimono le grandezze in gioco: non soltanto i coefficienti delle equazioni, i termini noti e le incognite, ma anche le grandezze che intervengono come risultati intermedi dei calcoli. Si utilizza infatti, ricordiamo, una rappresentazione discreta che si avvale di un numero limitato di cifre, sicchè tutti i numeri vengono quantizzati, per *troncamento* o per *arrotondamento*.

Inoltre, anche usando una rappresentazione a virgola mobile (floating point), il calcolatore non può rappresentare numeri più piccoli di un dato valore nè più grandi di un altro: quando il risultato di una operazione di calcolo assume un valore al di fuori di questo intervallo, si ha un errore (di underflow o di overflow). Gli errori numerici introdotti dalla quantizzazione sono particolarmente insidiosi, perchè influenzano il risultato finale, a volte pesantemente, dato che essi si accumulano man mano che i calcoli procedono, senza però provocare l'interruzione dell'elaborazione. Qui ci limitiamo ad osservare che l'entità di questi errori cresce, in generale, al crescere del numero N delle equazioni, ma diventa particolarmente rilevante quando la matrice dei coefficienti è *mal condizionata* (cioè i suoi autovalori differiscono di parecchi ordini di grandezza).

La soluzione su calcolatore del sistema di equazioni viene eseguita spesso usando il metodo di eliminazione di Gauss. Questo procedimento si articola nelle due fasi seguenti:

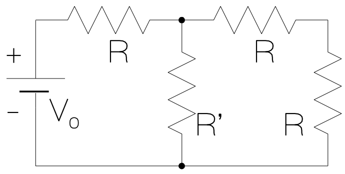
a) Dalla prima equazione si ricava la prima incognita, che viene sostituita nelle altre N-1: si ottiene così un sistema di N-1 equazioni in N-1 incognite. Dalla prima equazione del nuovo sistema (la seconda di quello iniziale) si ricava la seconda incognita, procedendo come prima. Si ripete poi il procedimento, fino all'ultima equazione del sistema.

b) Quest'ultima equazione viene risolta direttamente nell'unica incognita che vi appare. Tale incognita viene sostituita nella precedente equazione, per ottenere la penultima incognita, e così via.

Si nota che in questo procedimento può capitare che si debbano eseguire divisioni per termini molto piccoli, oppure differenze fra termini quasi uguali, tutte cause di errori numerici (dovuti alla natura discreta della rappresentazione, cioè al numero finito di cifre che il calcolatore utilizza per rappresentare i numeri). Per ridurne l'effetto sui risultati dei calcoli vi sono varie vie: fra cui utilizzare il calcolatore in precisione multipla (a spese del tempo di calcolo), e modificare l'ordine secondo il quale si risolvono le equazioni del sistema.

A questo proposito, si osserva che non è indifferente, ai fini della precisione dei risultati dei calcoli, la scelta delle maglie nell'analisi di un circuito. Per rendersene conto conviene svolgere l'esercizio seguente, dal quale si conclude che le scelte che hanno maggior senso fisico sono spesso preferibili rispetto ad altre.

Esercizio. Analizzare il circuito mostrato a fianco (con R=1 Ω, R'=1 GΩ, V_o= 1 volt) usando il metodo delle maglie, con scelte diverse delle due maglie indipendenti. Risolvere il sistema a) con il metodo di Cramer, b) numericamente con il metodo di Gauss.



In quanto precede abbiamo sempre considerato il caso di circuiti lineari, cioè costituiti esclusivamente dagli elementi ideali discussi nella parte II. Ha spesso interesse, d'altra parte, l'analisi di circuiti comprendenti anche elementi nonlineari (diodi, transistori, ecc.), che non s'intendano linearizzare. Limitandosi al caso statico, questi elementi saranno rappresentati mediante opportuni modelli, espressi nella forma di relazioni algebriche nonlineari, polinomiali o trascendenti, nelle variabili elettriche. Qui, a differenza del caso lineare, sorge il problema dell'esistenza e dell'unicità della soluzione delle equazioni del circuito. Mentre è chiaro che il circuito fisico ammette sempre soluzione (una o più di una), non è affatto detto in generale che il modello (matematico) che si considera ammetta soluzione.

Nei problemi più semplici sono molto convenienti le tecniche di soluzione di tipo grafico, che esamineremo in seguito a proposito dei diodi. Nei casi più complicati la soluzione può essere ancora affidata al calcolatore (esistono vari programmi di soluzione di sistemi algebrici nonlineari), ma in tal caso converrà esplorare se vi sono più soluzioni possibili, variando opportunamente le condizioni d'innesco dei metodi numerici utilizzati.

10. Analisi dei circuiti dinamici

I circuiti comprendenti elementi dotati di memoria sono descritti da equazioni integrodifferenziali. Se si tratta di elementi lineari la linearità è valida anche in questo caso (la risposta a una combinazione lineare di eccitazioni è costituita dalla stessa combinazione lineare delle risposte a ciascuna delle eccitazioni applicate separatamente), ma ora, a differenza dei circuiti statici, le grandezze elettriche non sono più proporzionali all'eccitazione, a causa degli effetti di memoria.

I metodi di soluzione delle equazioni, ottenute con il metodo delle maglie o con quello dei nodi, sono i seguenti:

a) soluzione analitica diretta delle equazioni differenziali;
b) soluzione mediante la trasformata di Laplace;
c) soluzione mediante simulazione analogica diretta;
d) soluzione numerica delle equazioni differenziali.

Del metodo a), che è relativamente poco usato in pratica, è stato fatto qualche cenno nella parte I del corso, del metodo b) ci occuperemo nella parte IV, il metodo c) (calcolatori e simulatori analogici), sebbene di notevole interesse fisico, è usato oggi solo in casi estremamente particolari a fronte del diffuso impiego di programmi di simulazione numerica su calcolatore digitale, che rientrano nel metodo d), del quale ora diamo qualche cenno.

11. Soluzione numerica delle equazioni dei circuiti dinamici

Questo metodo presenta oggi particolare interesse grazie alla enorme capacità di calcolo che in questi anni i calcolatori digitali, dai calcolatori personali ai supercalcolatori, hanno messo a nostra disposizione. Tale metodo, in particolare, è alla base di tutti i programmi, da SPICE in poi, usati per l'analisi dei circuiti e dei sistemi analogici.

La soluzione numerica su calcolatore delle equazioni dei sistemi fisici rientra, più in generale, nella problematica della **simulazione dei sistemi**, cioè di una metodologia che negli ultimi decenni ha assunto una grandissima importanza concettuale oltre che pratica. Ricordiamo a questo proposito che molti ritengono oggi che la simulazione dei sistemi sia giunta addirittura a costituire una nuova, e autonoma, metodologia d'indagine fisica, che complementa il metodo deduttivo introdotto nell'antichità dai filosofi Greci e il metodo sperimentale introdotto nel Rinascimento da Galileo.

I metodi usati per risolvere numericamente (o, come si dice, per "integrare") le equazioni differenziali, sono trattati nei corsi di Analisi Numerica. Qui ci limiteremo a considerare brevemente un metodo che consiste nel trasformare le equazioni differenziali dei circuiti in corrispondenti equazioni alle differenze finite e poi nel risolvere quest'ultime con tecniche di tipo iterativo o ricorsivo. E osserviamo subito che nella rappresentazione dei circuiti mediante equazioni alle differenze le grandezze elettriche si considerano come definite solo a istanti discreti di tempo, equispaziati secondo un passo temporale T_c. Ciò significa, evidentemente, abbandonare la rappresentazione a tempo continuo per quella a tempo discreto.

La trasformazione delle equazioni consiste nell'approssimare le derivate mediante differenze finite su un intervallo T_c e nell'esprimere le grandezze incognite a un dato istante in termini di grandezze note allo stesso istante e di grandezze incognite agli istanti precedenti (che si suppongono già calcolate e quindi note anch'esse).

Illustriamo l'applicazione di questo metodo alla seguente equazione differenziale, che rappresenta un circuito RC passabasso:

(1) $v(t) = \tau\, dv_c/dt + v_c(t)$

dove v(t) è la tensione d'ingresso, τ = RC la costante di tempo del circuito, $v_c(t)$ la tensione del condensatore (che coincide con l'uscita del circuito). Sebbene vi siano vari modi per approssimare la derivata, useremo il seguente, detto algoritmo di Eulero all'indietro:

(2) $dv_c/dt \approx [v_c(t)-v_c(t-T_c)]/T_c$

Ponendo $a = T_c/(T_c+\tau)$, $b = \tau /(T_c+\tau)$ e sostituendo nella (1) si ha: $v_c(t) \approx av(t) + bv_c(t-T_c)$. La riscriviamo tenendo presente che nella rappresentazione a tempo discreto i valori che la variabile tempo può assumere sono solo quelli appartenenti alla sequenza $t = kT_c$, con k intero:

(3) $v_c(k) = av(k) + bv_c(k-1)$

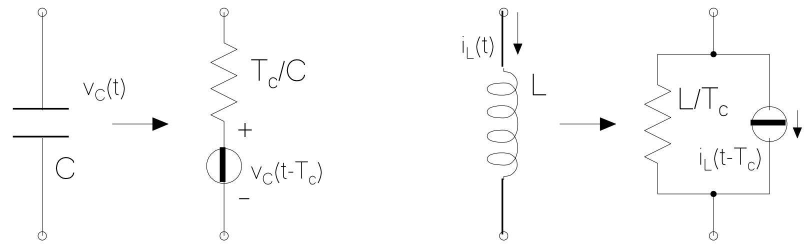
Si tratta di un'equazione alle differenze finite, dove abbiamo sostituito il segno di uguaglianza approssimata con quello di uguaglianza per indicare che essa rappresenta esattamente un determinato modello a tempo discreto del circuito RC, il quale costituisce una rappresentazione approssimata del circuito analogico considerato.

L'equazione (3) si presta bene al calcolo iterativo della risposta a un segnale di forma nota qualsiasi, a partire da un valore assegnato della condizione iniziale $v_c(0)$.

E' chiaro che i risultati di questa analisi sono approssimati, ma l'approssimazione è tanto migliore quanto minore si sceglie il valore di T_c (a spese, naturalmente, del tempo di calcolo). Si sceglierà, comunque, T_c piccolo rispetto sia alla costante di tempo τ del circuito (più in generale, rispetto alla più piccola fra le varie costanti di tempo) sia alla velocità di variazione dei segnali in gioco. Nel caso di segnali sinusoidali, per esempio, T_c dovrà essere assai minore del periodo del segnale.

Esercizio. Calcolare numericamente, utilizzando la (3), la risposta indiciale del modello discreto di un circuito RC passabasso con τ = 1 s: a) scegliendo T_c = 0.2 s; b) scegliendo T_c = 0.05 s. Confrontare i risultati ottenuti con quelli ricavati dall'analisi esatta del circuito.

Sulla base dell'algoritmo (2) considerato prima, si può rappresentare nel tempo discreto un condensatore mediante un opportuno circuito equivalente. Tale circuito, al tempo generico $t = kT_c$, è costituito da un resistore di resistenza T_c/C disposto in serie a un generatore ideale di tensione di valore $v_c(k-1)$ (che rappresenta la tensione all'istante discreto immediatamente precedente). Estendendo tale rappresentazione a un induttore, si conclude che il relativo circuito equivalente è costituito da un resistore di resistenza L/T_c, al quale è disposto in parallelo un generatore ideale di corrente di valore $i_L(k-1)$.



In generale, per applicare questo metodo al calcolo della risposta di un circuito, conviene scriverne le equazioni nella forma di un sistema di equazioni differenziali del primo ordine nelle variabili di stato, cioè in termini delle tensioni dei condensatori e delle correnti negli induttori.

Questo metodo di analisi, chiamato spesso **simulazione numerica**, è estremamente flessibile e presenta caratteristiche di generalità sotto diversi punti di vista. Esso, infatti, permette di trattare anche il caso di segnali d'ingresso non rappresentabili in forma analitica (espressi, per esempio, nella forma di una tabella di numeri e quindi anche il rumore, che d'altra parte è facilmente simulabile su calcolatore). Tale metodo, inoltre, permette di trattare anche i circuiti comprendenti elementi sia nonlineari che non stazionari. Si conclude che la simulazione numerica offre possibilità di indagine che vanno ben oltre le limitazioni dei metodi analitici tradizionali, che tipicamente permettono di affrontare l'analisi dei soli sistemi lineari e stazionari e soltanto per segnali d'ingresso esprimibili analiticamente.

Due osservazioni per concludere questo argomento. La prima per ricordare che la soluzione numerica delle equazioni differenziali dei circuiti, che passa attraverso la loro rappresentazione in termini di un modello a tempo discreto, è sempre approssimata: non esiste, infatti, un modello a tempo discreto che rappresenti esattamente un sistema a tempo continuo. La seconda, collegata alla precedente, è che il criterio di simulazione descritto sopra non è l'unico (e non soltanto per quanto riguarda l'algoritmo di approssimazione delle derivate). Si usano, infatti, anche vari altri criteri per individuare un'equazione alle differenze finite che approssimi l'equazione differenziale di un sistema a tempo continuo: si può, ad esempio, imporre che il modello a tempo discreto abbia la stessa risposta impulsiva del sistema agli istanti kT_c, oppure che esso abbia la stessa risposta in frequenza (quest'ultima condizione può essere verificata esattamente, ma soltanto se la risposta in frequenza del sistema a tempo continuo è nulla per $\omega > \pi/T_c$).