Metodi di analisi per circuiti analogici lineari

Corso di Elettrotecnica
CdL Ing. Elettronica-Informatica
A.A. 2017-2018

Prof. Marco Ricci

Metodi di analisi

Dato un circuito di R rami, il suo comportamento è completamente determinato una volta note tutte le 2R grandezze elettriche 2R: R tensioni ed R correnti di ramo.

Il problema fondamentale della analisi dei circuiti è come determinare queste grandezze sfruttando

- le conoscenze sugli elementi del circuito (relazioni costitutive) e
- le conoscenze su come sono connessi (relazioni topologiche)

I problemi principali sono 2:

- se considero tutte le 2R incognite simultaneamente arrivo a scrivere sistemi risolutivi non risolvibili a mano anche per circuiti semplici (Tableau equation)
- Le relazioni topologiche che si possono scrivere sono sovrabbondanti (data l'omogeneità della KCL e della KVL ogni loro combinazione da vita ad un'altra relazione valida)

Metodi di analisi

In generale (circuiti LTI lineari tempo invarianti) è richiesta l'individuazione di 2R equazioni linearmente indipendenti.

Si pongono i seguenti 3 quesiti:

I. quali equazioni scrivere?

II. come garantire la lineare indipendenza delle equazioni?

III. è possibile ridurre la complessità del sistema risolvente da ordine 2R e risolverlo «a blocchi»? (ovvero diagonalizzare il sistema risolutivo)

$\Downarrow$

Sviluppo dei metodi di analisi

Metodi di analisi

Cosa sono:

- Procedure sistematiche (Algoritmi) per la soluzione di circuiti elettrici
- Metodi per ridurre la complessità dei sistemi risolutivi
- Strategie per individuare in maniera visiva il sistema di equazioni indipendenti di numero minimo necessarie alla soluzione del sistema

Limitiamo inizialmente lo studio a reti senza memoria (resistive) in cui il rapporto tra corrente e tensione è sempre algebrico → sistemi risolutivi algebrici

Metodi di analisi

In presenza di elementi con memoria (capacità, induttori, detti anche elementi reattivi), le relazioni tra tensione e corrente sono in generale descritte da relazioni integro-differenziali e i sistemi risolutivi saranno sistemi di equazioni integro-differenziali e quindi riconducibili ad un sistema di equazioni differenziali.

La soluzione di questi sistemi nel caso più generale (elementi con memoria con eccitazioni arbitrarie) richiede strumenti matematici avanzati quali la trasformata di Laplace.

In alcuni casi, come per lo studio dei circuiti a regime sinusoidale in cui tutte le eccitazioni sono sinusoidali, i sistemi possono essere ricondotti a sistemi algebrici con coefficienti in generale rappresentati da numeri complessi

$\Downarrow$

metodo dei fasori

Metodi di analisi

Quesito I: quali equazioni scrivere ?

Ci sono due tipi di relazioni che legano tra loro le incognite del sistema, ovvero le tensioni e correnti dei rami:

1) R equazioni dalle relazioni costitutive degli elementi → 1 rel. Costitutiva per ogni ramo.
2) Altre R relazioni si ottengono dalle relazioni topologiche espresse tramite le leggi di Kirchhoff

Metodi di analisi

Quesito II: come assicurare l'indipendenza lineare delle equazioni ?

1) Le R equazioni costitutive degli elementi (sono indipendenti tra loro essendo «locali»)
2) Altre R relazioni si ottengono dalle relazioni topologiche espresse tramite le leggi di Kirchhoff.

NOTA: Per un dato circuito posso scrivere molte eq. di Kirchhoff (essendo omogenee possono essere combinate tra loro per dare altre equazioni), inoltre possiamo scrivere equazioni basate su la KCL e su la KVL.

Come individuarne solo R indipendenti? E come ripartirle tra KCL e KVL?

Metodi di analisi

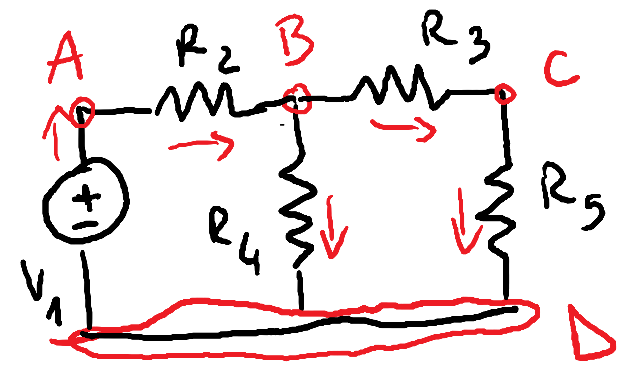
Quesito II: lineare indipendenza?

Esempio:

Equilibrio correnti nodi A,B,C,D

Legge di Kirchhoff:

$$
\begin{aligned}
A &: i_1 - i_2 = 0 \\
B &: i_2 - i_3 - i_4 = 0 \\
C &: i_3 - i_5 = 0 \\
D &: -i_1 + i_4 + i_5 = 0
\end{aligned}
$$



Se si scrivono le precedenti relazioni in forma matriciale

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

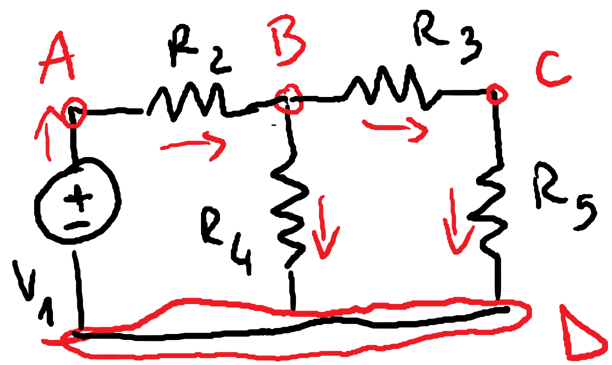
le equazioni sono **linearmente dipendenti**.

Necessità individuazione metodi sistematici

Metodi di analisi

Quesito III: complessità sistema risolvente

Ricerca insiemi minimi di tensioni o di correnti indipendenti da cui derivare le altre tramite le leggi Di Kirchhoff



Esempio

tensioni dei rami 1,4,5

$$v_2 = v_1 - v_4$$
$$v_3 = v_4 - v_5$$

Ricavo le altre tensioni

correnti dei rami 2,3

$$i_1 = i_2$$
$$i_4 = i_2 - i_3$$
$$i_5 = i_3$$

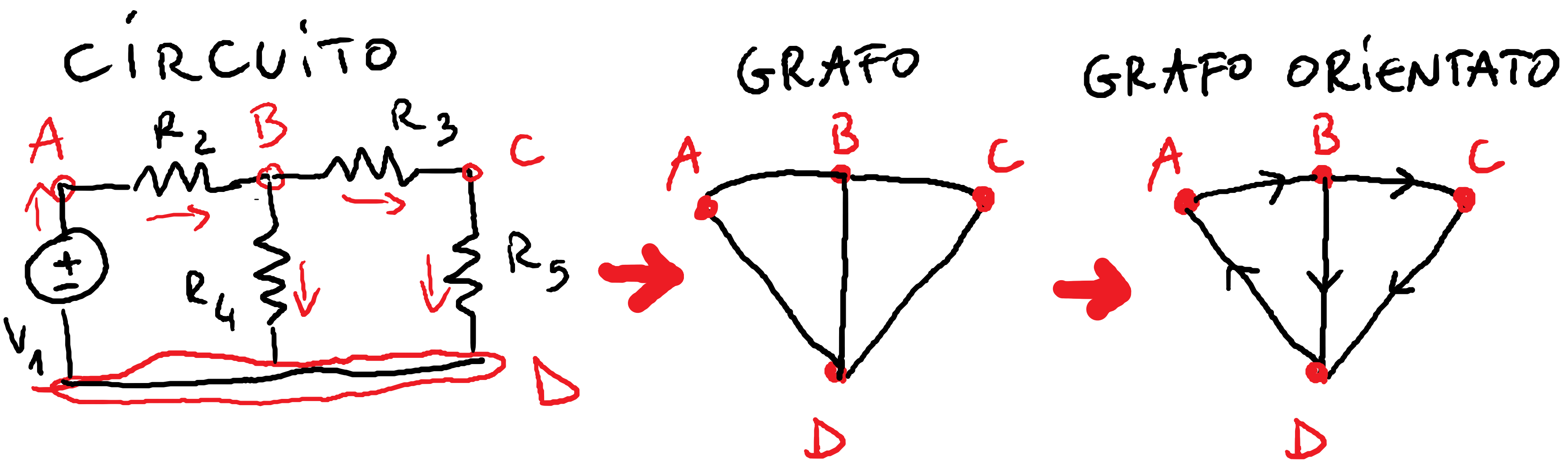
Ricavo le altre correnti

Metodi di analisi

Per determinare gli insiemi **minimi** di tensioni e correnti **linearmente indipendenti** si sfruttano proprietà topologiche. Dato che le leggi di Kirchhoff non dipendono dalla natura degli elementi sui rami, la scelta di un insieme di tensioni o di correnti indipendenti non dipende dalla tipologia di elementi del circuito, né dalla tipologia di segnali di eccitazione, ma solo dalla loro connessioni

⇓

Astraiamo i concetti di GRAFO e di GRAFO orientato

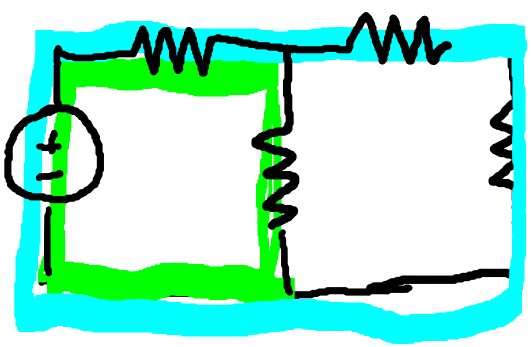


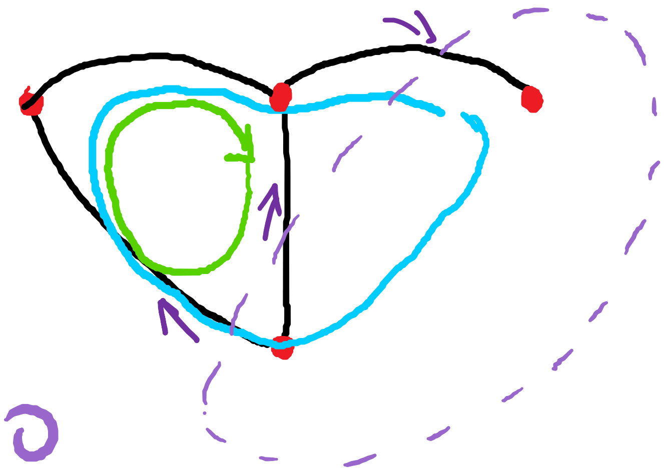
Metodi di analisi

Elementi del Grafo di un circuito

KVL
- **Maglia:** insieme di rami che formano un percorso chiuso tale che non percorre mai un ramo 2 volte.
- **Anello:** maglia che non contiene all'interno altre maglie

KCL
- **Taglio:** una superficie finita chiusa che taglia un insieme i rami (una sola volta ogni ramo).





- MAGLIA
- ANELLO
- TAGLIO

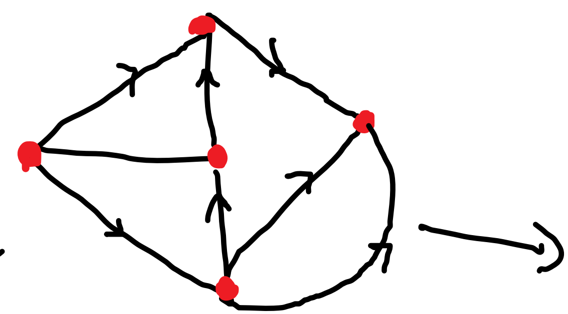
Metodi di analisi

Elementi del Grafo di un circuito

Albero: insieme connesso di rami che tocca tutti i nodi del grafo una sola volta senza formare percorsi chiusi (N nodi $\Rightarrow$ N-1 rami albero)

Co-albero: insieme di tutti i rami del circuito non compresi nell'albero (R-N+1 rami del co-albero)

GRAFO ORIENTATO

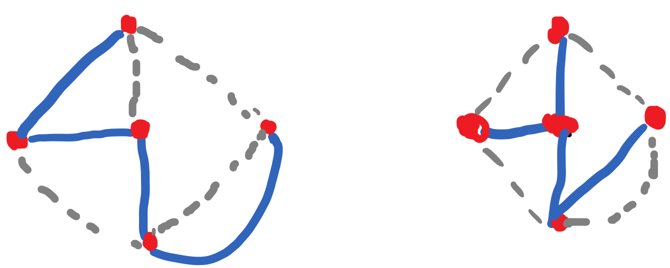


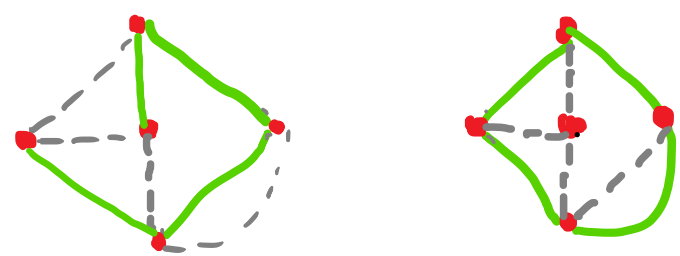
CO-ALBERO

— RAMI CO-ALBERO

ALBERO

— RAMI ALBERO





Metodi di analisi

Proprietà di albero e co-albero

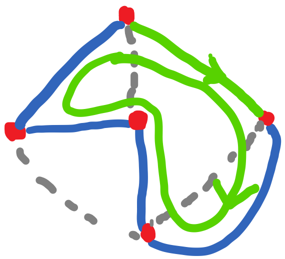
Enunciato 1: Le tensioni dei rami dell'albero $\{v_{aj}\}$ costituiscono un insieme indipendente di tensioni. Tramite combinazioni lineari delle tensioni dei rami dell'albero posso esprimere le tensioni dei rami del co-albero

Dimostrazione: Dato che l'albero non forma percorsi chiusi, non posso scrivere una KVL che contenga solo rami dell'albero ⇒

Non posso esprimere la tensione di un qualsiasi ramo dell'albero come combinazione degli altri rami dell'albero ⇒ i rami dell'albero formano un insieme di tensioni indipendenti

Se invece aggiungo un qualsiasi ramo del co-albero si forma una maglia (Maglia fondamentale) che contiene il ramo del co-albero e solo rami dell'albero ⇒ posso scrivere una KVL che lega la tensione del ramo del co-albero alle tensioni dei rami dell'albero ⇒ posso esprimere la tensione del ramo del co-albero v_{ck} come combinazione di rami dell'albero compresi nella maglia

$v_{ck} + \sum_{aj} A_{kj} A v_{aj} = 0 \Rightarrow v_{ck} = \sum_{aj} -A_{kj} v_{aj}$



Proprietà di albero e co-albero

Enunciato 2: Le correnti dei rami del co-albero $\{\mathbf{i}_{ck}\}$ costituiscono un insieme indipendente di correnti. Tramite combinazioni lineari delle $\{\mathbf{i}_{ck}\}$ posso esprimere le correnti dei rami dell' albero

Dimostrazione: Dato che l'albero tocca tutti i nodi, non posso scrivere una KCL che contenga solo rami dell'albero, ovvero non posso tracciare una superficie chiusa (un taglio) che tagli solo rami del co-albero senza passare 2 volte per uno stesso ramo$\Rightarrow$

Non posso esprimere la corrente di un qualsiasi ramo del co-albero come combinazione delle correnti degli altri rami del co-albero $\Rightarrow$

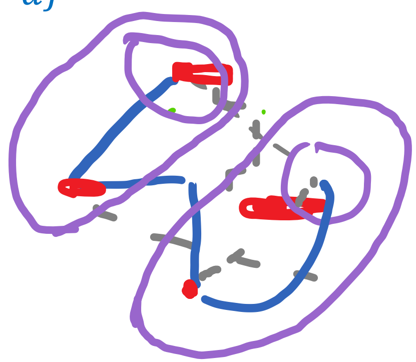
i rami del co-albero formano un insieme di correnti indipendenti

E' sempre invece possibile disegnare una superficie chiusa che tagli solo un ramo dell'albero e rami del co-albero (Taglio fondamentale) $\Rightarrow$ posso scrivere una KCL che lega la corrente del ramo dell'albero i_{aj} alle correnti del co-albero

$\Rightarrow$ posso esprimere la corrente del ramo dell'albero $\mathbf{i}_{aj}$ come combinazione di rami del co-albero compresi nel taglio

$$i_{aj} + \sum_{ck} B_{jk} i_{ck} = 0 \Rightarrow i_{aj} = \sum_{ck} -B_{jk} i_{ck}$$

— TAGLI



Metodi di analisi

Quante incognite e quante equazioni?

N-1 tensioni $\{v_{aj}\}$ dei rami dell'albero indipendenti	$\Rightarrow$	N-1 tagli fondamentali N-1 KCL
+		+
R-N+1 correnti $\{i_{ck}\}$ del co-albero indipendenti	$\Rightarrow$	R-N+1 maglie fondamentali R-N+1 KCL
=		=
R incognite indipendenti		R eq. Kirchhoff

Grazie alla topologia ho individuato R grandezze indipendenti e R equazioni di Kirchhoff $\Rightarrow$ se le R equazioni sono indipendenti posso risolvere il circuito

$\Downarrow$

Le equazioni sono linearmente indipendenti (segue dimostrazione)

Metodi di analisi

Indipendenza delle equazioni

1 Taglio fondamentale

per ogni ramo albero

$\Downarrow$

RAMO 1

RAMO 2

RAMO N-1

$$\begin{cases} i_{a1} + \sum_{ck} (\pm) i_{ck} = 0 \\ i_{a2} + \sum_{ck} (\pm) i_{ck} = 0 \\ \vdots \\ i_{a(N-1)} + \sum_{ck} (\pm) i_{ck} = 0 \end{cases}$$

in ciascuna equazione compare una CORRENTE RAMO ALBERO non presente nelle altre equazioni $\Rightarrow$

le equazioni sono linearmente indipendenti

METODO BASE TAGLI

(in presenza di gen. corrente)

1 Maglia fondamentale

Pe-r ogni ramo co-albero

$\Downarrow$

RAMO 1

RAMO 2

RAMO R-N+1

$$\begin{cases} v_{c1} + \sum_{aj} (\pm) v_{aj} = 0 \\ v_{c2} + \sum_{aj} (\pm) v_{aj} = 0 \\ \vdots \\ v_{c(R-N+1)} + \sum_{aj} (\pm) v_{aj} = 0 \end{cases}$$

in ciascuna equazione compare una TENSIONE RAMO CO-ALBERO non presente nelle altre equazioni $\Rightarrow$

le equazioni sono linearmente indipendenti

METODO BASE MAGLIE

(in presenza di gen. tensione)

Metodi di analisi

Indipendenza delle equazioni

Le equazioni precedenti si possono riscrivere in forma matriciale nella seguente maniera, dove si evidenzia che:

I. Le correnti dell'albero possono essere scritte come combinazioni di quelle del co-albero

II. Le tensioni del co-albero possono essere scritte come combinazioni di quelle dell'albero

$$\begin{bmatrix} i_{a_1} \\ i_{a_2} \\ \vdots \\ i_{a_{N-1}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{c_1} \\ i_{c_2} \\ \vdots \\ i_{c_{R-N+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} V_{c_1} \\ V_{c_2} \\ \vdots \\ V_{c_{R-N+1}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & \\ & B & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{A_1} \\ V_{A_2} \\ \vdots \\ V_{a_{N-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si dimostra che le due matrici A e B sono collegate, in particolare si ha:

$$[B] = -[A]^T$$

$$\dim(A) = (N-1) \times (R-N+1)$$

$$\dim(B) = (R-N+1) \times (N-1)$$

Metodi di analisi

Riassumendo

- Abbiamo trovato 2R equazioni linearmente indipendenti nelle 2R incognite. Queste equazioni sono suddivise in 3 blocchi tra di loro indipendenti → relazioni costitutive, tagli fondamentali e maglie fondamentali

$$\begin{bmatrix} v_{a_J} \\ v_{c_K} \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} i_{a_J} \\ i_{c_K} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C \\ O \\ S \\ T \end{bmatrix}; \quad [i_{a_J}] = -[A][i_{c_K}]; \quad [v_{c_K}] = -[B][v_{a_J}]$$

- Invece di risolvere un sistema 2R equazioni, possiamo risolvere un sistema più piccolo andando a sostituire le relazioni di sopra «un blocco alla volta »
- A seconda se partiamo dai tagli fondamentali o dalle maglie fondamentali avremo due classi di algoritmi distinti, uno che ci permette di trovare le tensioni indipendenti da cui ricavare tutte le altre grandezze, l'altro che ci permette di trovare le correnti indipendenti da cui ricavare tutte le altre grandezze

TAGLI FONDAMENTALI ⇔ TENSIONI ALBERO (⇔ METODO DEI NODI)

MAGLIE FOND. ⇔ CORRENTI COALBERO(⇔ METODO DEGLI ANELLI)

Metodi di analisi

ALGORITMI RISOLUTIVI

1. individuare un albero sul grafo orientato

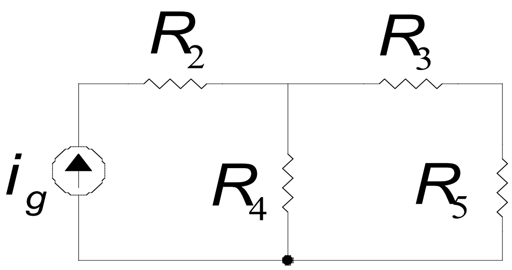
2. scrivere le equazioni dei tagli fondamentali
3. sostituire le correnti con le tensioni tramite le relazioni costitutive del tipo $i=Gv+i_0$ (ovvero in presenza di soli generatori di corrente)
4. sostituire le tensioni del coalbero come combinazione delle tensioni dell'albero tramite le maglie fondamentali
5. risolvere il sistema avente come incognite le N-1 $\{v_{aj}\}$ tensioni dell'abero

2. scrivere le equazioni delle maglie fondamentali
3. sostituire le tensioni con le correnti tramite le relazioni costitutive $v=Ri+v_0$ (ovvero in presenza di soli generatori di tensione)
4. sostituire le correnti dell'albero come combinazione delle correnti del co-albero tramite i tagli fondamentali
5. risolvere il sistema avente come incognite le R-N+1 $\{i_{ck}\}$ correnti del co-abero

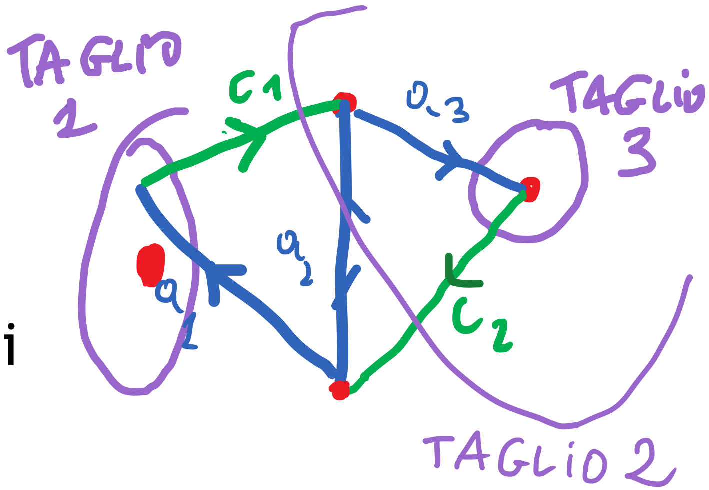
Metodi di analisi

Metodo dei tagli fondamentali
(con soli generatori di corrente)

Metodo dei tagli fondamentali



I° step: definisco il grafo e l'albero: 3 tagli fondamentali



II° step: scrivo le KCL per ogni taglio

KCL 1 : $-i_{a_1} + i_{c_1} = 0$

KCL 2 : $-i_{a_2} - i_{c_1} + i_{c_2} = 0$

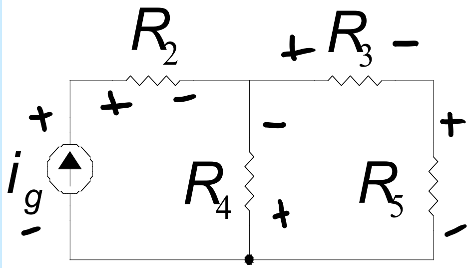
KCL 3 : $-i_{a_3} + i_{c_2} = 0$

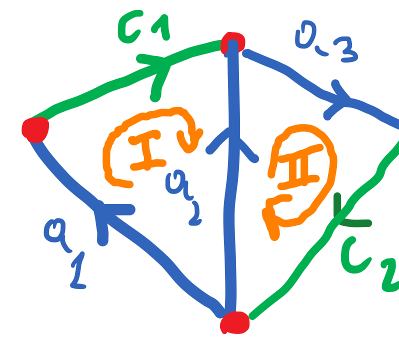
$$\begin{bmatrix} i_{a_1} \\ i_{a_2} \\ i_{a_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ +1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{c_1} \\ i_{c_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

III° step: esprimo le correnti tramite le relazioni costitutive

$i_{a_1} = i_g$; $i_{a_2} = V_{R_4} \cdot G_4$; $i_{a_3} = V_{R_3} \cdot G_3$; $i_{c_1} = V_{R_2} \cdot G_2$; $i_{c_2} = V_{R_5} \cdot G_5$

Metodo dei tagli fondamentali





$$\left.\begin{aligned} & V_{R_2} \cdot G_2 = i_g \\ & -V_{R_4} G_4 - V_{R_2} G_2 + V_{R_5} G_5 = 0 \\ & -V_{R_3} G_3 + V_{R_5} G_5 = 0 \end{aligned}\right\}$$

3 eq LINEARMENTE INDIPENDENTI

IV° step: esprimo le tensioni del coalbero tramite quelle dell'albero

KVL I $\quad V_{R_2} - V_{R_4} - V_{I_g} = 0 \Rightarrow V_{R_2} = V_{I_g} + V_{R_4}$

KVL II $\quad V_{R_5} + V_{R_4} + V_{R_3} = 0 \Rightarrow V_{R_5} = -V_{R_4} - V_{R_3}$

SISTEMA RISOLUTIVO $\hat{G}\vec{v} = \vec{i}$

$$\left.\begin{aligned} & (V_{I_g} + V_{R_4}) G_2 = i_g \\ & -V_{R_4} G_4 - (V_{I_g} + V_{R_4}) G_2 - (V_{R_4} + V_{R_3}) G_5 = 0 \\ & -V_{R_3} G_3 - (V_{R_4} + V_{R_3}) G_5 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} G_2 & G_2 & 0 \\ -G_2 & -(G_2+G_4+G_5) & -G_5 \\ 0 & -G_5 & -(G_3+G_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{I_g} \\ V_{R_4} \\ V_{R_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Metodo dei tagli fondamentali

Con il metodo dei tagli arrivo a scrivere un sistema risolutivo del tipo:

$$\left[\ \hat{G}\ \right]\begin{bmatrix} V_{a_1} \\ V_{a_2} \\ \vdots \\ V_{a_{N-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{I} \\ GEN. \end{bmatrix}$$

Le incognite sono le tensioni dei rami dell'albero e i termini noti sono le correnti dei generatori e la matrice dei coefficienti ha le dimensioni di una conduttanza per assicurare la omogeneità dimensionale.
Questo metodo vale per qualsiasi tipo di circuito lineare, anche non planare

DOMANDE:

1. è possibile semplificare il metodo e renderlo ancora più rapido?
2. è possibile analizzare anche circuiti con generatori di tensione?

$\Downarrow$

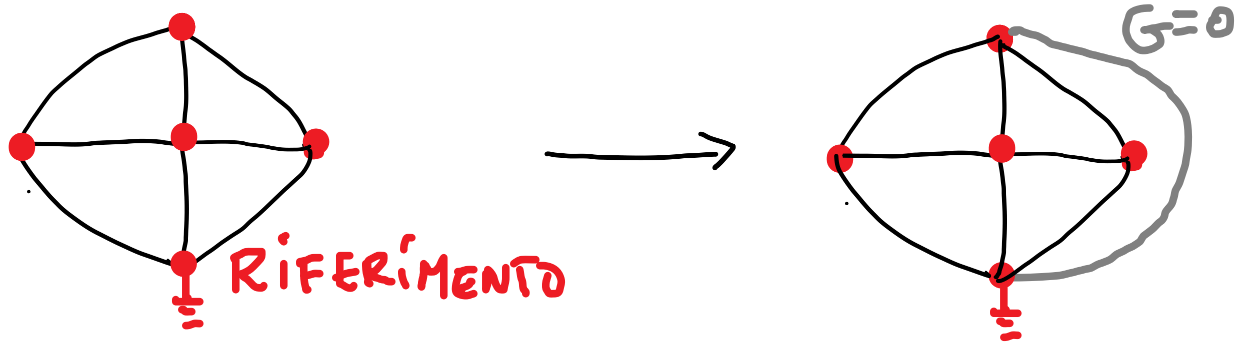
Metodo dei nodi

Metodo dei nodi

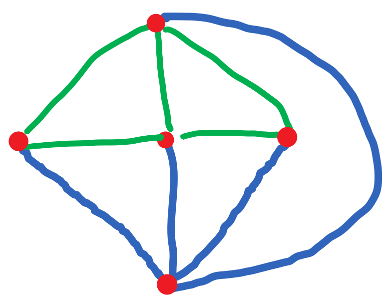
1. il metodo dei nodi è un caso particolare del metodo dei tagli quando invece delle tensioni dei rami dell'albero prendiamo come incognite i potenziali dei nodi del circuito espressi rispetto ad un nodo di riferimento assunto a potenziale nullo
2. i due metodi coincidono per una particolare scelta dell'albero
3. Il metodo dei nodi conduce ad un algoritmo risolutivo più semplice rispetto a quello del metodo dei tagli e ad un sistema risolutivo «scrivibile a vista»

Metodo dei nodi

Scelto un nodo di riferimento, se aggiungo nel grafo dei rami fittizi a conduttanza nulla (ovvero dei circuiti aperti), le grandezze all'interno del circuito non vengono alterate.

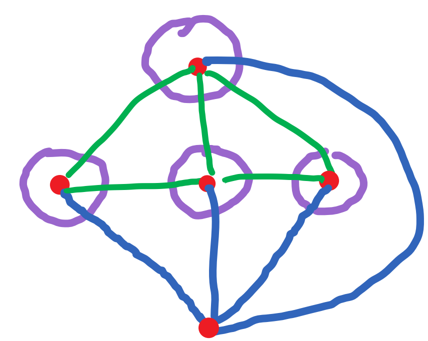


A questo punto posso scegliere l'albero come l'insieme dei rami che connettono il nodo di riferimento con tutti gli altri nodi



Data l'ipotesi di campo conservativo, le tensioni dei rami dell'albero coincidono con i potenziali dei nodi rispetto al nodo di riferimento

Inoltre i tagli fondamentali diventano delle linee chiuse che circondano tutti i nodi escluso quello di riferimento



Metodo dei nodi

ALGORITMO METODO DEI NODI

1. scegliere un nodo come riferimento

2. prendere come variabili ausiliarie (incognite) i potenziali degli altri nodi rispetto al riferimento

3. scrivere gli equilibri di corrente a tutti i nodi tranne quello di riferimento (somma delle correnti uscenti per convenzione)

4. utilizzare le relazioni costitutive, esprimendo le correnti dei rami resistivi in funzione dei potenziali di nodo ESPRESSI RISPETTO AL POTENZIALE DEL NODO DI RIFERIMENTO e delle resistenze dei rami.

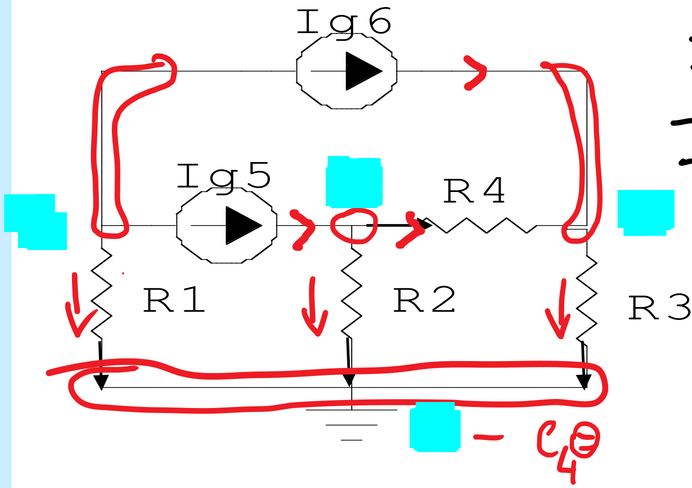
5. Risolvere il sistema risultante con ingognite i potenziali dei nodi (escluso il riferimento)

Metodo dei nodi

VANTAGGI DEL METODO DEI NODI

1. Definizione dell'albero implicita
2. Le KCL sono semplicemente le eq. di bilancio ai nodi, quindi di immediata individuazione (per convenzione si prende la somma delle correnti uscenti)
3. Non c'è bisogno di scrivere le tensioni del co-albero come combinazione di quelle dell'albero, sono naturalmente espresse come differenze tra i potenziali dei rispettivi nodi
4. La presenza di generatori di tensione semplifica la soluzione del circuito
5. Applicabile a qualsiasi tipo di circuito

Metodo dei nodi



I° STEP : FISSO IL RIFERIMENTO ⇒ $e_4=0$

II° STEP : SCRIVO LE KCL AGLI ALTRI NODI {1,2,3}

KCL NODO 1 $\quad i_1+i_5+i_6=0$

KCL NODO 2 $\quad i_2+i_4-i_5=0$

KCL NODO 3 $\quad i_3-i_4-i_6=0$

III° step: scrivo le correnti tramite i potenziali dei nodi usando le relazioni costitutive del tipo i=Gv+i_0 (solo gen. corrente)

$$\begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & (G_2+G_4) & -G_4 \\ 0 & -G_4 & (G_3+G_4) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{g_5}-I_{g_6} \\ I_{g_5} \\ I_{g_6} \end{bmatrix}$$

IV° step: risolvo il sistema ottenuto

Metodo dei nodi

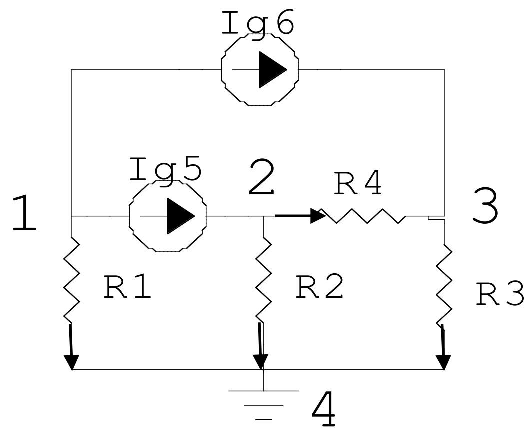
Osserviamo che, nella matrice dei coefficienti:

- il termine k,k = $\sum$ conduttanza rami resistivi convergenti al nodo k;
- Il termine k,i= $-\sum$ conduttanze rami resistivi che connettono **direttamente** i nodi k ed i $\Rightarrow$ matrice simmetrica (se ho preso sempre le correnti uscenti)

mentre nel vettore termini noti:

- il termine k = $\square$ correnti entranti nel nodo k impresse da generatori.

$$\begin{bmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & (G_2+G_4) & -G_4 \\ 0 & -G_4 & (G_3+G_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{g_5} - I_{g_6} \\ I_{g_5} \\ I_{g_6} \end{bmatrix}$$



Metodo dei nodi con generatori di tensione

Cosa succede se è presente uno o più generatori di tensione?

- Il generatore di tensione vincola la differenza di potenziale tra due nodi $\Rightarrow$ riduce il numero di potenziali incogniti

$\Rightarrow$ riduce il numero di KCL da scrivere per formare il sistema risolutivo

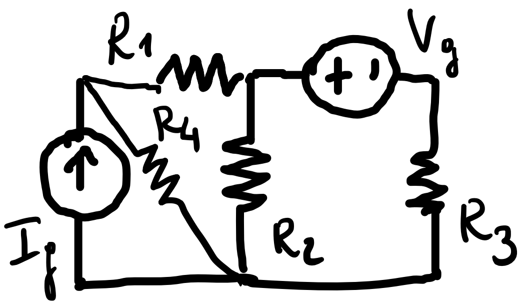
- Allo stesso tempo la corrente che scorre nei generatori di tensione è determinata dal resto del circuito

$\Rightarrow$ le correnti dei generatori sono incognite aggiuntive

- il numero di incognite da risolvere rimane pertanto invariato ma in genere posso prima determinare le tensioni dei nodi incognite (sistema risolutivo di dimensioni ridotte) e successivamente determinare le correnti dei generatori utilizzando le KCL non scritte in precedenza.
- se è presente un solo generatore di tensione, allora la scelta più conveniente per il nodo di riferimento è quella del «-» del generatore di tensione.
- se sono presenti più generatori, la scelta più conveniente è scegliere come riferimento il nodo a cui sono connessi più generatori di tensione.

Metodo dei nodi con generatori di tensione

Esempio metodo nodi con generatore di tensione



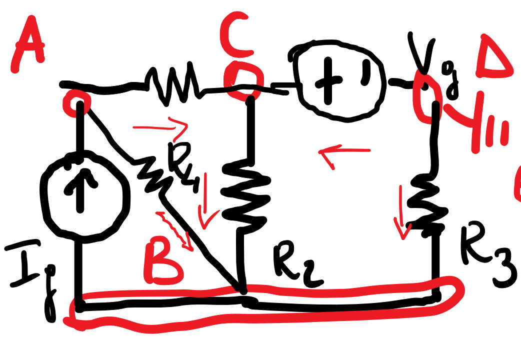
I step: fisso il nodo di riferimento coincidente con il «-» del generatore $\Rightarrow$ $e_D=0$, $e_C=V_g$

II step: scrivo le KLC per i potenziali incogniti dei nodi A e B (C è vincolato)

$R_1=1[\Omega]$, $R_2=2[\Omega]$, $R_3=3[\Omega]$

KCL A : $i_{R_1}+i_{R_4}-i_g=0$

KCL B : $-i_{R_2}-i_{R_3}-i_{R_4}+i_g=0$



$e_D=0\,[V]$

III step: scrivo le correnti dei rami resistivi in termini di potenziali e conduttanze

$i_{R_1}=(e_A-e_C)G_1=(e_A-V_g)G_1$; $i_{R_2}=(V_g-e_B)G_2$

$i_{R_3}=(e_D-e_B)G_3=-e_BG_3$; $i_{R_4}=(e_A-e_B)G_4$

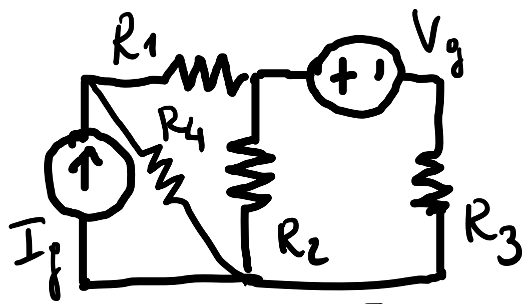
IV step: risolvo il sistema nelle incognite (e_A e e_B)

$$e_AG_1+(e_A-e_B)G_4=i_g+V_gG_1$$
$$e_BG_2+e_BG_3+(e_B-e_A)G_4=-i_g+V_gG_2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} G_1+G_4 & -G_4 \\ -G_4 & G_2+G_3+G_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_A \\ e_B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} i_g+V_gG_1 \\ -i_g+V_gG_2 \end{bmatrix}$$

Metodo dei nodi con generatori di tensione

Esempio metodo nodi con generatore di tensione



$V_g = 5[V]$, $I_g = 4[A]$

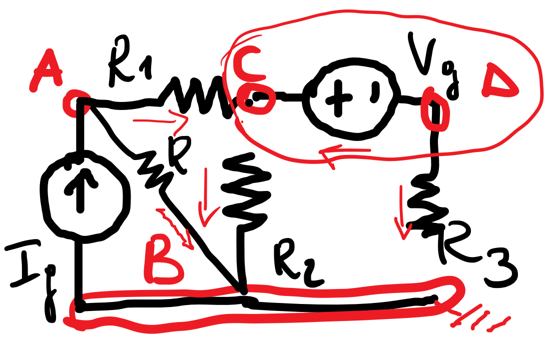
$R_1 = 1[\Omega]$, $R_2 = 2[\Omega]$, $R_3 = 3[\Omega]$

V step: trovo la corrente del generatore di tensione con la KCL al nodo vincolato (C)

KCL C : $i_{R_2} - i_{R_1} - i_{V_g} = 0 \Rightarrow i_{V_g} = i_{R_2} - i_{R_1} \Rightarrow$

$i_{V_g} = (V_g - e_A)G_2 - (e_A - V_g)G_1$

NOTA: avessimo preso un riferimento diverso (ex. B), il procedimento sarebbe stato lo stesso ma avremmo dovuto inserire da subito l'incognita corrente del generatore di tensione



$e_B = 0$ $\quad e_C = e_D + V_g$

KCL A : $i_{R_1} + i_{R_4} - i_g = 0$

KCL D : $i_{R_3} + i_{V_g} = 0 \Rightarrow i_{V_g}$ incognito

$\Downarrow$

aggiungo KCL C : $i_{R_2} - i_{R_1} - i_{V_g} = 0 \Rightarrow i_{V_g} = i_{R_2} - i_{R_1}$

KCL A : $i_{R_1} + i_{R_4} = i_g$

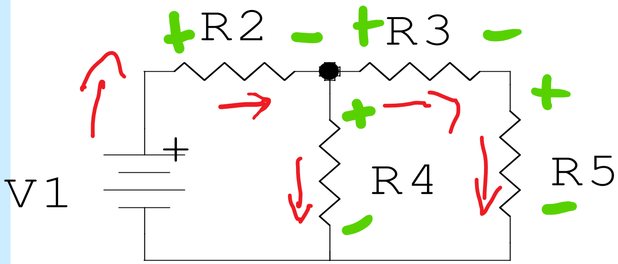
KCL D-C : $i_{R_3} + i_{R_2} - i_{R_1} = 0$

NOTA: la 2° eq. è la KCL di una linea che circonda i nodi C e D, detta «supernodo»

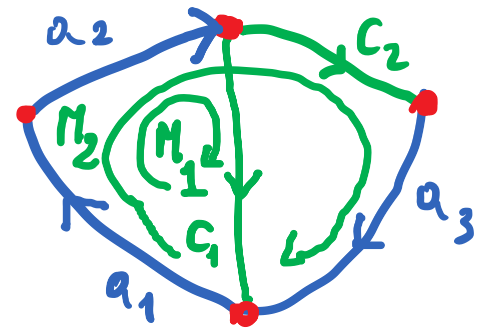
Metodo delle maglie

- Metodo di analisi base maglie:
  - Scegliere un albero sul grafo orientato ed individuare le maglie fondamentali;
  - Scrivere l'equilibrio delle tensioni alle maglie fondamentali;
  - Rami "resistivi": nel sistema di equilibrio esprimere le tensioni di ramo in funzione delle correnti di ramo tramite relazioni costitutive;
  - Esprimere, nel sistema di equilibrio, le correnti dei rami dell'albero come combinazione delle correnti sui rami del coalbero (tramite equazioni ai tagli fondamentali). IL SISTEMA E' COMPATIBILE: incognite correnti sui rami del co-albero
  - Risolvere, ricavando le incognite (correnti sui rami del co-albero); calcolare poi le altre correnti (tramite eq tagli fondamentali) e le tensioni di ramo (tramite relaz costitutive)

Metodo delle maglie



I° step: grafo, albero e coalbero e individuare le maglie fondamentali



II° step: Scrivere le equazioni delle maglie fondamentali

M_1 $$V_{a1} - V_{a2} = V_{c1}$$

M_2 $$V_{a1} - V_{a2} - V_{a3} = V_{c2}$$

III° step: Scrivere le equazioni costitutive

$$v_{a1} = +v_g;\ v_{a2} = R_2 i_{a2};$$

$$v_{a3} = R_5 i_{a3};\ v_{c1} = R_4 i_{c1};$$

$$v_{c2} = R_3 i_{c2}$$

IV° step: riscrivere le eq. di maglia in termini delle correnti di ramo

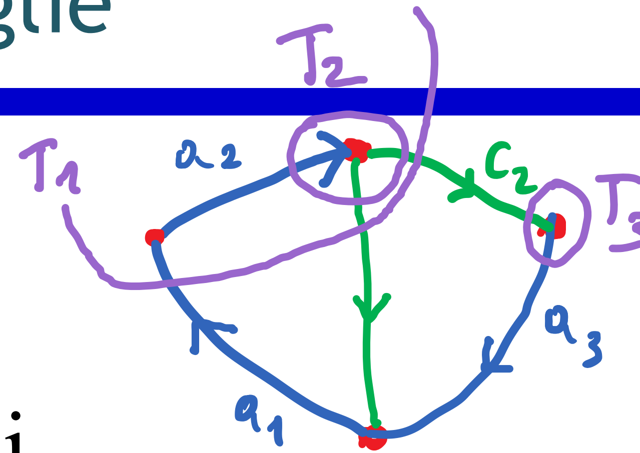
$$v_g - R_2 i_{a2} = R_4 i_{c1}$$

$$v_g - R_2 i_{a2} - R_5 i_{a3} = R_3 i_{c2}$$

2 equazioni per

4 incognite

Metodo delle maglie



V° step: sostituire le correnti dell'albero come combinazioni delle correnti del coalbero (Ricorda $i_a - Ai_c = 0$) scrivendo le equazioni dei tagli fondamentali

$$\mathrm{i}_{a1} = \mathrm{i}_{c1} + \mathrm{i}_{c2}; \mathrm{i}_{a2} = \mathrm{i}_{c1} + \mathrm{i}_{c2}; \mathrm{i}_{a3} = \mathrm{i}_{c2}$$

$$R_4 \mathrm{i}_{c1} + R_2(\mathrm{i}_{c1} + \mathrm{i}_{c2}) = \mathrm{v}_g$$

$$R_3 \mathrm{i}_{c2} + R_2(\mathrm{i}_{c1} + \mathrm{i}_{c2}) + R_5 \mathrm{i}_{c2} = \mathrm{v}_g$$

SISTEMA COMPATIBILE: 2 equazioni per 2 incognite (i_2, i_3)

- Il sistema risolvente cui si è pervenuti può interpretarsi come se esistessero delle correnti di maglia –circolanti nelle maglie fondamentali, di valore coincidente con le corrispondenti correnti dei rami del co-albero- ;
- Questa interpretazione consente un modo agevole di pervenire direttamente al sistema risolvente finale

Metodi di analisi

- Metodo analisi base maglie –<u>scrittura diretta sistema risolvente</u>-:
  - Scegliere un albero sul grafo orientato, individuare le maglie fondamentali ed associarvi le corrispondenti correnti di maglia;
  - Scrivere il sistema di equilibrio delle tensioni alle maglie fondamentali –una equazione per ciascuna maglia fondam.-
    - Il termine k,k della matrice dei coefficienti è pari alla somma delle resistenze dei rami resistivi presenti sulla k-esima maglia fondamentale;
    - Il termine k,i della matrice dei coefficienti è pari alla somma delle resistenze dei rami resistivi comuni alle maglie k-esima ed i-esima; il segno di ciascun addendo è positivo se le correnti di maglia percorrono il ramo comune con versi concordi o discordi;
    - Il termine k-esimo del vettore dei termini noti è pari alla somma delle tensioni impresse dai generatori di tensione presenti nella maglia k-esima: ciascun addendo ha segno + o – a seconda che la corrente di maglia sia o meno uscente dal morsetto positivo del generatore.
  - Risolto il sistema ho le correnti di maglia –dei rami del co-albero -

Metodo degli anelli

E’ possibile semplificare ulteriormente il metodo delle maglie cosi come fatto con il metodo dei nodi a partire dal metodo dei tagli?

Ovvero non dover scegliere un albero (step I) e non dover sostituire le correnti dell’albero con combinazioni di quelle del co-albero (step V)?

$\Downarrow$

Per circuiti planari ottengo dei vantaggi se scelgo come correnti incognite le correnti fittizie degli anelli invece che le più generali correnti del co-albero.

METODO DEGLI ANELLI

Metodo degli anelli

VANTAGGI

✓Gli anelli sono univocamente identificati → non ho bisogno di scegliere albero e co-albero e di individuare maglie e tagli fondamentali

✓Posso scrivere le tensioni dei rami resistivi direttamente tramite le correnti di anello cosi da ottenere un sistema di R-N+1 equazioni in R-N+1 correnti indipendenti senza dover esprimere le correnti dell'albero tramite quelle del co-albero (i.e. senza scrivere le KCL dei tagli fondamentali)

✓Su ogni ramo si sovrappongono al massimo 2 sole correnti di anello e sempre in versi opposti → facilita la scrittura del sistema

NOTA BENE

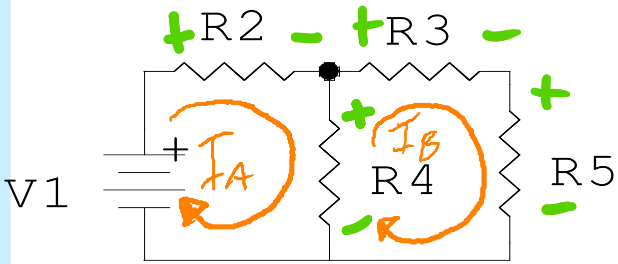
Non sempre posso scegliere un albero in modo tale che le correnti del co-albero coincidano con quelle di anello

È possibile dimostrare però che un grafo planare connesso con *R rami* e *N* nodi ha [*R-N+1*] anelli distinti, tanti quanti i rami del co-albero.

L'insieme di tutti gli anelli di un grafo planare ha la stessa proprietà di completezza di un insieme di maglie fondamentali, cioè qualsiasi altra maglia del grafo planare può essere ottenuta dall'unione di due o più anelli, dove l'unione è realizzata eliminando i rami in comune.

Questo assicura la lineare indipendenza delle KVL sugli anelli

Metodo degli anelli



I° step: scrivere le KVL per gli anelli

A $$V_{R2} + V_{R4} = V_1$$

B $$V_{R3} + V_{R5} - V_{R4} = 0$$

II° step: Scrivere le tensioni dei rami resistivi in funzione delle correnti di anello

A $$I_A R_2 + (I_A - I_B) R_4 = V_1 \Rightarrow I_A (R_2 + R_4) - I_B R_4 = V_1$$

B $$I_B R_3 + I_B R_5 + (I_B - I_A) R_4 = 0 \Rightarrow -I_A R_4 + I_B (R_3 + R_4 + R_5) = 0$$

III° step: risolvere il sistema

$$\begin{bmatrix} R_2 + R_4 & -R_4 \\ -R_4 & R_3 + R_4 + R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_R = R_2 R_3 + R_2 R_4 + R_2 R_5 + R_3 R_4$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} V_1 & -R_4 \\ 0 & R_3 + R_4 + R_5 \end{vmatrix}}{\Delta_R} \quad ; \quad I_B = \frac{\begin{vmatrix} R_2 + R_4 & V_1 \\ -R_4 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_R}$$

Metodo degli anelli

- Metodo analisi base anelli –<u>scrittura diretta sistema risolvente</u>-:
  - Individuare gli anelli ed associarvi le corrispondenti correnti di anello, tutte che girano in verso orario per convenzione;
  - Scrivere il sistema delle KVL agli anelli –una equazione per ciascuno anello considerando le correnti di anello circolanti esclusivamente nel rispettivo anello
    - Il termine k,k della matrice dei coefficienti è pari alla somma delle resistenze dei rami resistivi presenti sul k-esimo anello;
    - Il termine k,i della matrice dei coefficienti è nullo o pari all'opposto della della resistenza comune all'anello k-esimo ed i-esimo;
    - Il termine k-esimo del vettore dei termini noti è pari alla somma delle tensioni impresse dai generatori di tensione presenti nell'anello k-esimo: ciascun addendo ha segno + o – a seconda che la corrente di anello sia o meno uscente dal morsetto positivo del generatore.
  - Risolto il sistema ho le correnti di anello da cui posso ricavarmi tutte le altre grandezze elettriche

Metodo degli anelli con generatori di corrente

Cosa succede se è presente uno o più generatori di corrente?

- Il generatore di corrente vincola la corrente su un ramo $\Rightarrow$ il generatore vincola una sola corrente di anello o al massimo due correnti di anello tra di loro $\Rightarrow$ riduce il numero di correnti incognite

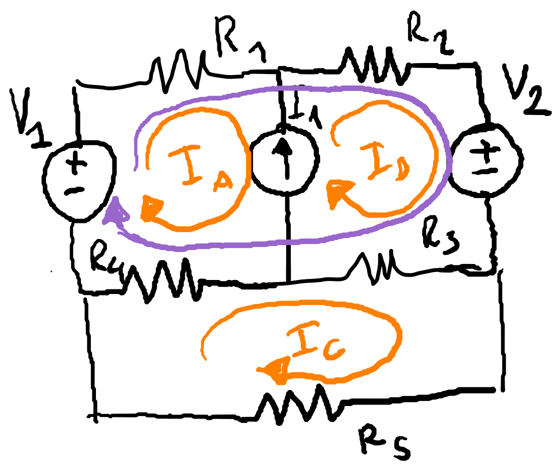
$\Rightarrow$ riduce il numero di KVL da scrivere per formare il sistema risolutivo

- Allo stesso tempo la tensione ai capi dei generatori di corrente è determinata dal resto del circuito

$\Rightarrow$ le tensioni dei generatori di corrente sono incognite aggiuntive

- il numero di incognite da risolvere rimane pertanto invariato ma in genere posso prima determinare le correnti di anello incognite (sistema risolutivo di dimensioni ridotte) e successivamente determinare le tensioni dei generatori di corrente utilizzando le KVL non scritte in precedenza.
- se è presente un solo generatore di corrente e coincide o si può far coincidere con una corrente di anello a meno del verso, scriveremo direttamente le equazioni dei restanti anelli, altrimenti è conveniente scrivere l'equazione del «superanello» che si ottiene dalla fusione degli anelli che condividono il generatore in cui eliminiamo il ramo del generatore → in questo caso bisogna però considerare entrambe le correnti di anello iniziali che circolano in parti diverse del superanello

Metodo dei superanelli



$I_1 = I_B - I_A \Rightarrow I_B = I_A + I_1$

I_1 vincola I_A e I_B ⇒ si può scrivere

IL SISTEMA RISOLUTIVO SCRIVENDO LE KVL ALL'ANELLO C E AL SUPERANELLO FORMATO DALLA FUSIONE DEI 2 ANELLI A+B

$A+B: \; I_A R_1 + I_B R_2 + (I_B - I_C) R_3 + (I_A - I_C) R_4 = V_1 - V_2$ CON $I_B = I_A + I_1$

$C: \; (I_C - I_A) R_4 + (I_C - I_B) R_3 + I_C R_5 = 0$

$$\Rightarrow A+B: \; I_A (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) - I_C (R_3 + R_4) = V_1 - V_2 - I_1 (R_2 + R_3)$$

$$C: \; I_C (R_3 + R_4 + R_5) - I_A (R_3 + R_4) = I_1 R_3$$

In questo modo si determinano prima due correnti di anello indipendenti, poi le altre incognite. La tensione ai capi del generatore di corrente si trova facendo il bilancio delle tensioni su uno dei due anelli A o B

Teorema di Telleghen

Correnti rami ALB a partire da quelle del COALB

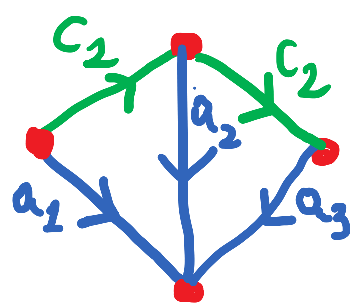
Equilibrio correnti ai tagli fondamentali

$$I_{A1} + I_{C1} = 0$$

$$I_{A2} - I_{C1} + I_{C2} = 0$$

$$I_{A3} - I_{C2} = 0$$

$$\begin{bmatrix} I_{A1} \\ I_{A2} \\ I_{A3} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{[A]} \begin{bmatrix} I_{C1} \\ I_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Tensioni sui rami COALB a partire da quelle dell' ALB

Equilibrio tensioni alle maglie fondamentali

$$V_{C1} - V_{A1} + V_{A2} = 0$$

$$V_{C2} - V_{A2} + V_{A3} = 0$$

$$\begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{[B]} \begin{bmatrix} V_{A1} \\ V_{A2} \\ V_{A3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[B] = -[A]^t$$

Teorema di Telleghen

- Ordiniamo i vettori di tensioni e correnti, distinguendo quelle di albero e coalbero

$$[I]=\begin{bmatrix} I_A \\ I_C \end{bmatrix}; \quad [V]=\begin{bmatrix} V_A \\ V_C \end{bmatrix}$$

$$[I_A]+[A][I_C]=[0]; \quad [V_C]+[B][V_A]=[0]$$

- Effettuiamo il prodotto scalare fra tali vettori

$$[I]^t[V]=[I_A]^t[V_A]+[I_C]^t[V_C]=\left(-[I_C]^t[A]^t\right)[V_A]-[I_C]^t\left([B][V_A]\right)=$$

$$=[I_C]^t[B][V_A]-[I_C]^t[B][V_A]=0$$

Sono ortogonali
i vettori delle tensioni di ramo e delle relative correnti