ESERCITAZIONE VII

STEFANO LAURETI

SVOLGIMENTO

$$\sin(\omega t \pm 180°) = -\sin \omega t$$
$$\cos(\omega t \pm 180°) = -\cos \omega t$$
$$\sin(\omega t \pm 90°) = \pm \cos \omega t$$
$$\cos(\omega t \pm 90°) = \mp \sin \omega t$$

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$$

V_m = Ampiezza della sinusoide

ω = frequenza angolare (rad/s)

$(\omega t + \phi)$ = argomento della sinusoide

ϕ = fase della sinusoide

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ = periodo (Tempo impiegato per compiere un ciclo)

$f = \frac{1}{T}$ = frequenza = $\frac{n° \text{ cicli}}{s}$ $\Rightarrow 2\pi f = \omega$

ESERCIZIO

CALCOLARE SFASAMENTO TRA

$$v_1 = -10\cos(\omega t + 50°) \quad e \quad v_2 = 12\sin(\omega t - 10°)$$

RICORDANDO CHE:

$$\sin(\omega t \pm 180°) = -\sin\omega t$$

$$\cos(\omega t \pm 180°) = -\cos\omega t$$

$$\sin(\omega t \pm 90°) = \pm\cos\omega t$$

$$\cos(\omega t \pm 90°) = \mp\sin\omega t$$

$$v_1 = 10\cos(\omega t + 50° - 180°) = 10\cos(\omega t - 130°)$$

$$v_2 = 12\sin(\omega t - 10° - 90°) = 12\cos(\omega t - 100°)$$

$$\Delta\phi = \phi_{v_1} - \phi_{v_2} = 30° \Rightarrow v_2$$ IN ANTICIPO DI 30° RISPETTO A v_1

NUMERI COMPLESSI

$$j = \sqrt{-1}$$

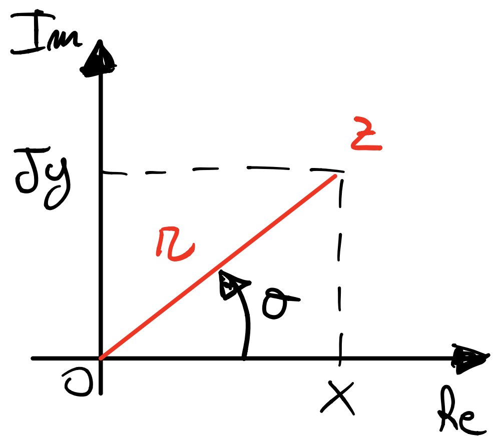
FORMA CARTESIANA O RETTANGOLARE

$$\underset{\text{NUMERO COMPLESSO}}{z} = x + jy \qquad x = \underbrace{Re(z)}_{\text{PARTE REALE}} \qquad y = \underbrace{Im(z)}_{\text{PARTE IMMAGINARIA}}$$

FORMA POLARE

$$z = |z| \angle \theta = r \angle \theta$$

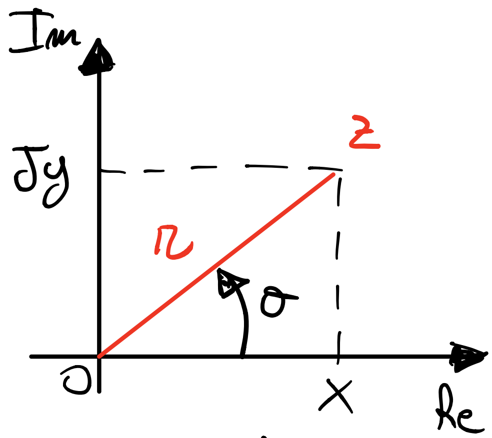
$$\underset{\text{MODULO}}{r} = \sqrt{x^2 + y^2} \; ; \quad \underset{\text{ARGOMENTO O FASE}}{\theta} = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$



CONVERSIONE DA CARTESIANA A POLARE (REGOLA PER LA FASE)

se $x<0$ II° quadrante $\theta = 180 + \tan^{-1} \frac{y}{x}$	se $x>0$ I° quadrante $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$
se $x<0$ III° quadrante $\theta = 180 + \tan^{-1} \frac{y}{x}$	se $x>0$ IV quadrante $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$

FORMA POLARE



$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$z = x + Jy \quad (x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$ FORMA CARTESIANA

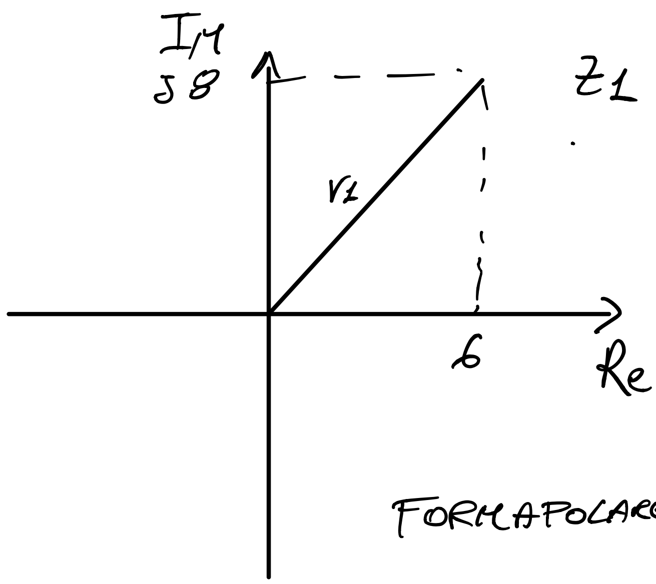
$z = r\angle\theta \quad \left(r = \sqrt{x^2+y^2},\ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$ FORMA POLARE

$z = re^{J\theta} \quad \left(r = \sqrt{x^2+y^2},\ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$ FORMA ESPONENZIALE

ESERCIZIO

ESPRIMERE $z_1 = 6 + J8$; $z_2 = 6 - J8$; $z_3 = -6 + J8$; $z_4 = -6 - J8$;

IN FORMA POLARE ED ESPONENZIALE



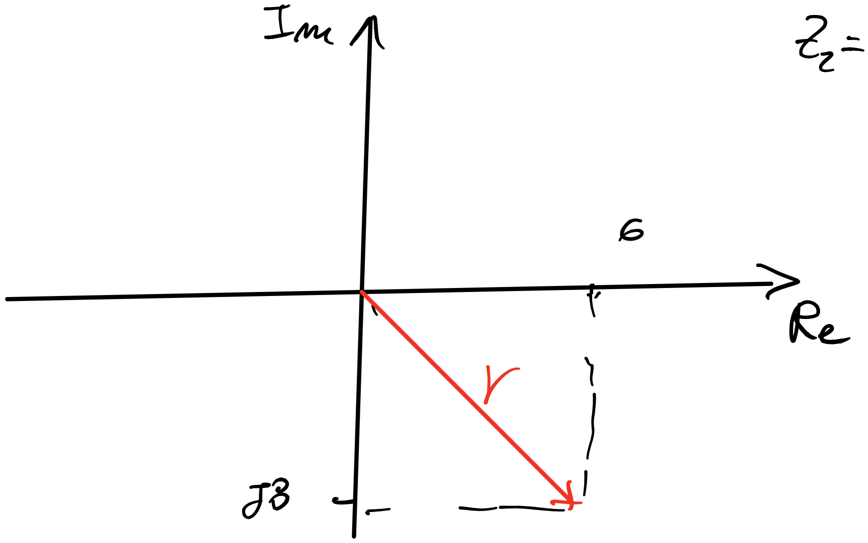
$r_1 = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{8}{6}\right) = 53.13°$

FORMA POLARE => $10\angle 53.13°$

FORMA ESPONENZIALE $10e^{J53.13°}$

$z_2 = 6 - j8$



$r = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-8}{6}\right) = -53{,}13^\circ$

FORMA POLARE

$10 \angle -53.13^\circ$

FORMA ESPONENZIALE

$10 e^{-j53.13}$

$z_3 = -6 + 8j$ (II° QUADRANTE)

$r = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$\theta = 180^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{8}{-6}\right) = 126.87$

FORMA POLARE

$10 \angle 126.87^\circ$

FORMA ESPONENZIALE

$10 e^{j126.87^\circ}$

$z_4 = -6 - 8j$ (III quadrante)

$r = 10$

$\theta = 180^\circ + \tan^{-1}\left(\frac{-8}{-6}\right) = 233.13^\circ$

$10 \angle 233.13^\circ$

$10 e^{j233.13^\circ}$

ESERCIZIO: ESPRIMERE I SEGUENTI NUMERI COMPLESSI DA FORMA POLARE O ESPONENZIALE IN FORMA CARTESIANA

$$12 \angle -60^\circ = 12\cos(-60^\circ) + J\,12\sin(-60^\circ) = 12 \cdot 0.5 - J\,12 \cdot 0.86 = 6 - J\,10.32$$

$$-50 \angle 285^\circ = -50\cos(285^\circ) - 50\,J\sin(285^\circ) = -12.94 + J\,48.30$$

$$8e^{J10} = 8\cos(10^\circ) + J\,8\sin(10^\circ) = 7.88 + J\,1.39$$

$$20e^{-J\pi/3} = 20\cos(-\pi/3) + J\,20\sin(-\pi/3) = 10 - J\,17.32$$

OPERAZIONI CON I NUMERI COMPLESSI

$$\frac{1}{J} = -J; \quad \text{se } z_1 = x_1 + Jy_1 \text{ e } z_2 = x_2 + Jy_2;$$

COMPLESSO CONIUGATO

$$z^* = x - Jy = r \angle -\theta = re^{-J\theta}$$

SOMMA

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + J(y_1 + y_2)$$

DIFFERENZA

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + J(y_1 - y_2)$$

PRODOTTO

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \angle \theta_1 + \theta_2$$

RAPPORTO

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle \theta_1 - \theta_2$$

FASORE ⇒ è un numero complesso che rappresenta l'ampiezza e la fase di una sinusoide

IDENTITÀ DI EULERO

$$e^{\pm j\phi} = \cos\phi \pm j\sin\phi,$$ QUINDI

$$\cos\phi = Re\left(e^{j\phi}\right)$$

$$\sin\phi = I_m\left(e^{j\phi}\right)$$

SI PUÒ QUINDI SCRIVERE:

$$v(t) = V_m\cos(\omega t + \phi) = Re\left(V_m e^{j(\omega t+\phi)}\right) = Re\left(V_m e^{j\phi}\cdot e^{j\omega t}\right)$$

FUNZIONE DEL TEMPO

$$v(t) = Re\left(\mathbf{V} e^{j\omega t}\right)$$

FASORE

$$\mathbf{V} = V_m e^{j\phi} = V_m \angle\phi$$

QUINDI

$$\underbrace{v(t) = V_m\cos(\omega t+\phi)}_{\text{DOMINIO DEL TEMPO}} \iff \underbrace{\mathbf{V} = V_m\angle\phi = V_m e^{j\phi}}_{\text{DOMINIO DEI FASORI}}$$

NOTA BENE:

1) $v(t)$ è la rappresentazione istantanea (o nel dominio del tempo), mentre $\mathbf{V}$ è la rappresentazione in frequenza (o nel dominio dei fasori)
2) $v(t)$ dipende dal tempo; $\mathbf{V}$ non dipende dal tempo.
3) $v(t)$ è sempre reale senza termini complessi, mentre $\mathbf{V}$ è generalmente un numero complesso

TRASFORMAZIONE DAL DOMINIO DEL TEMPO AL DOMINIO DEI FASORI, E VICEVERSA

DOMINIO DEL TEMPO		DOMINIO DEI FASORI
$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$	$\Longleftrightarrow$	$\mathbf{V} = V_m \angle \phi$

TRASFORMAZIONE

$V_m \cos(\omega t + \phi)$	$V_m \angle \phi$
$I_m \cos(\omega t + \theta)$	$I_m \angle \theta$
$V_m \sin(\omega t + \phi)$	$V_m \angle \phi$
$I_m \sin(\omega t + \theta)$	$I_m \angle \theta$

PROPRIETÀ DEI FASORI

FUNZIONE NEL TEMPO	FASORE	
$v_1(t) = V_{m_1} \cos(\omega t + \varphi_1)$ $v_2(t) = V_{m_2} \cos(\omega t + \varphi_2)$ $v(t) = a_1 \cdot v_1(t) + a_2 \cdot v_2(t)$ a_1 e a_2 costanti reali	$\mathbf{V}_1 = V_{m_1} e^{j\varphi_1}$ $\mathbf{V}_2 = V_{m_2} e^{j\varphi_2}$ $\mathbf{V} = a_1 \cdot \mathbf{V}_1 + a_2 \mathbf{V}_2$	LINEARITÀ
$v_1(t) = V_{m_1} \cos(\omega t + \varphi_1)$ $v(t) = \dfrac{dv_1(t)}{dt}$	$\mathbf{V}_1 = V_{m_1} e^{j\varphi_1}$ $\mathbf{V} = j\omega \mathbf{V}_1$	DERIVAZIONE
$v_1(t) = V_{m_1} \cos(\omega t + \varphi_1)$ $v(t) = \int v_1(t)\, dt$	$\mathbf{V}_1 = V_{m_1} e^{j\varphi_1}$ $\mathbf{V} = \dfrac{\mathbf{V}_1}{j\omega}$	INTEGRAZIONE

ESERCIZIO

TRASFORMARE LE SEGUENTI SINUSOIDI IN FASORI

(a) $i(t) = 6\cos(50t - 40^\circ) A$

$$\mathbf{I} = 6\angle -40^\circ\ A$$

(b) $v(t) = -4\sin(30t + 50^\circ) V$

RICORDANDO CHE $-\sin A = \cos(A + 90)$

$$v = -4\sin(30t + 50^\circ + 90^\circ) = +4\cos(30t + 140^\circ) V$$

$$\mathbf{V} = 4\angle 140^\circ\ V$$

c) $v(t) = 7\cos(2t + 40^\circ) V$

$$\mathbf{V} = 7\angle 40^\circ\ [V]$$

d) $i(t) = -4\sin(10t + 10^\circ) A \Rightarrow +4\cos(10t + 100^\circ)$

$$\mathbf{I} = 4\angle 100^\circ = 4e^{j100}\ [A]$$

ESERCIZIO

TRASFORMARE I SEGUENTI FASORI IN SINUSOIDI

a) $\mathbf{I} = -3 + j4 \ [A]$

$r = \sqrt{-3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = 5$ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{-3}\right) + 180° = 126.87°$

$i(t) = 5\cos(\omega t + 126.87°)\ [A]$

b) $\mathbf{V} = j8 e^{-j20°} \ [V]$ ricordiamo che $j = 1\angle 90°$

$\mathbf{V} = j8\angle -20° = 1\angle 90° \cdot 8\angle -20° = 8\angle 90° - 20° = 8\angle 70°$

$v(t) = 8\cos(\omega t + 70°)\ [V]$

c) $\mathbf{V} = -10\angle 30° \ [V]$

$v(t) = -10\cos(\omega t + 30°) = 10\cos(\omega t + 30° + 180°) = 10\cos(\omega t + 210°)$

$v(t) = 10\cos(\omega t + 210°)\ [V]$

d) $\mathbf{I} = j(5 - j12)\ [A] = 12 + j5 = 13 e^{j22.62}$

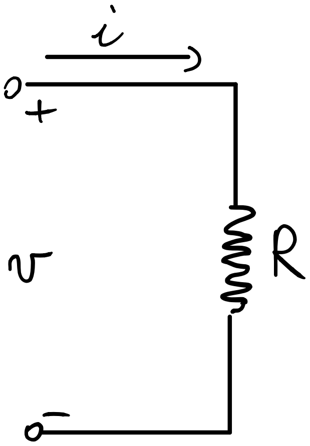
$r = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$; $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) = 22.62°$

$i(t) = 13\cos(\omega t + 22.62°)$

FASORI = RELAZIONI TRA TENSIONE E CORRENTE PER GLI ELEMENTI CIRCUITALI

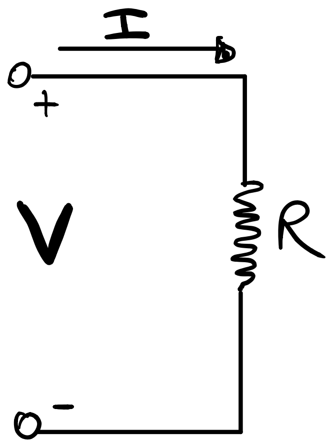
RESISTORE

TEMPO

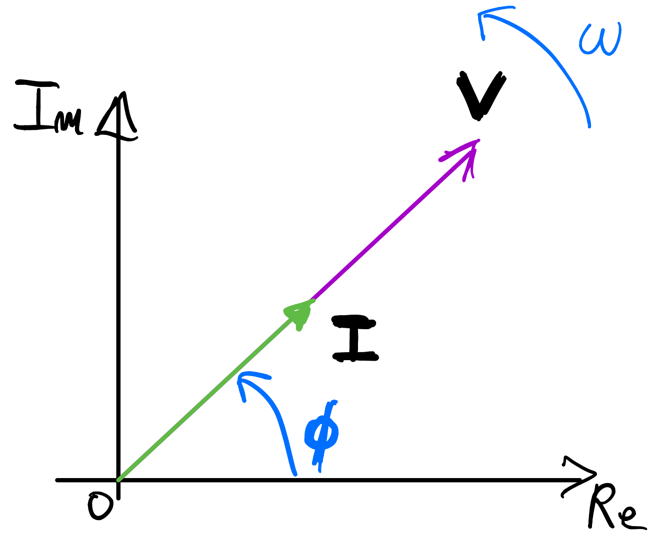


$v = iR$

FASORE

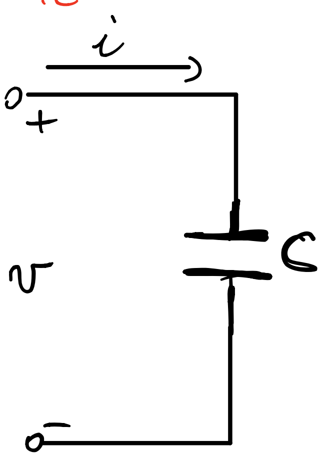


$\mathbf{V} = \mathbf{I}R$



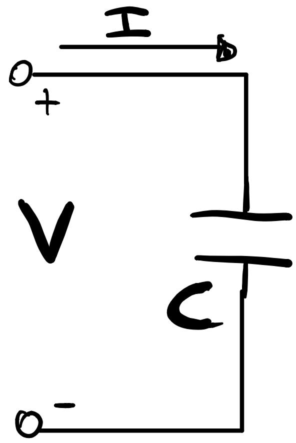
CONDENSATORE

TEMPO

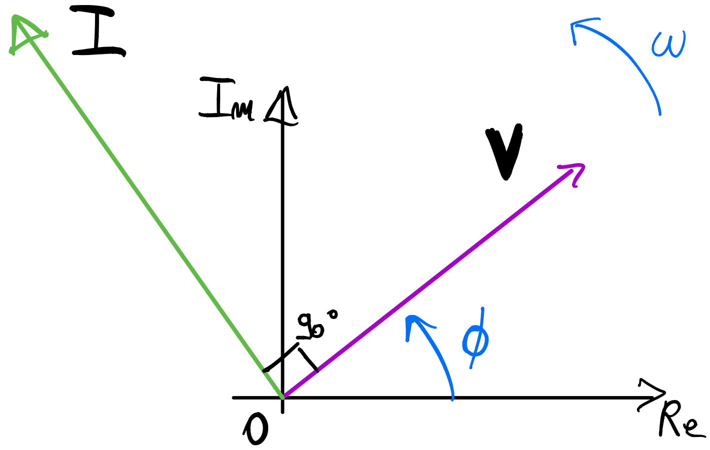


$i = C\dfrac{dv}{dt}$

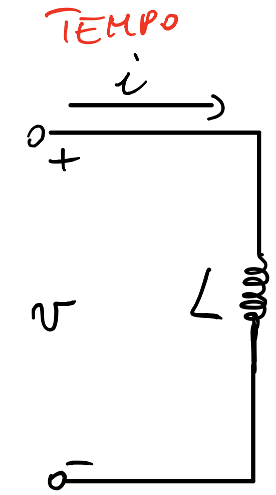
FASORE



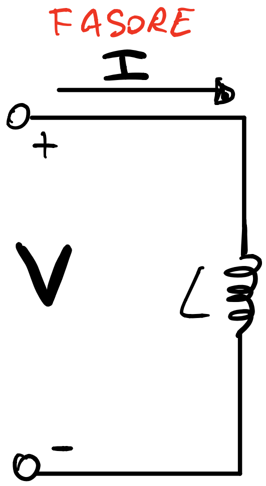
$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V}$



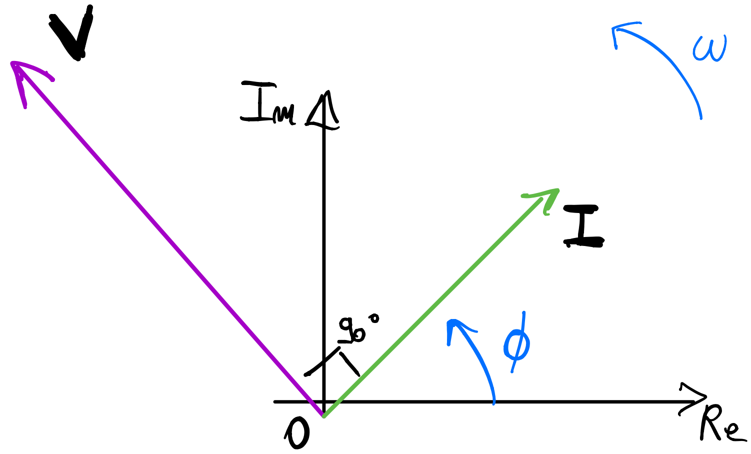
INDUTTORE



$$v = L\frac{di}{dt}$$



$$V = j\omega L I$$



SOMMARIO DELLE RELAZIONI CORRENTE-TENSIONE		
ELEMENTO	DOMINIO DEL TEMPO	DOMINIO DELLA FREQUENZA
RESISTORE (R)	$v = R \cdot I$	$V = RI$
INDUTTORE (L)	$v = L\frac{di}{dt}$	$V = j\omega L I$
CONDENSATORE (C)	$i = C\frac{dv}{dt}$	$I = j\omega C V$

Esercizio

Abbiamo una tensione $v(t) = 12\cos(60t + 45°)$ applicata ad un induttore da $0.1\,[H]$. Determinare la corrente nell'induttore in regime stazionario.

⇒ SVOLGIMENTO

PER UN INDUTTORE $\mathbf{V} = j\omega L\,\mathbf{I}$; $\omega = 60\left[\frac{rad}{s}\right]$ $\mathbf{V} = 12\angle 45°\,[V]$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{j\omega L} = \frac{12\angle 45°}{j\,60 \times 0.1} = \frac{\overset{2}{\cancel{12}}\angle 45°}{1\angle 90 \cdot \cancel{6}} = 2\angle 45° - 90°$$

$$= 2\angle -45°\ [A]$$

PASSIAMO AL DOMINIO DEL TEMPO

$$i(t) = 2\cos(60t - 45°)\,[A]$$

Esercizio

$v(t) = 10\cos(100t + 30°)$ APPLICATA SU UN CONDENSATORE DA $50\mu F = 50 \cdot 10^{-6}\,[F]$. $\mathbf{I} = ?$

$$\underbrace{\mathbf{I} = j\omega C\,\mathbf{V}}_{\text{PER IL CONDENSATORE}}, \quad \omega = 100\left[\frac{rad}{s}\right] \qquad \mathbf{V} = 10\angle 30°$$

$$\mathbf{I} = 1\angle 90° \cdot 50 \cdot 10^{-6} \cdot 10\angle 30° \cdot 100 = 0.05\angle 120°\ [A]$$

NEL TEMPO

$$i(t) = 5 \cdot 10^{-2}\cos(100t + 120°)\,[A]$$

CONCETTO D'IMPEDENZA

IMPEDENZA = RAPPORTO TRA FASORE TENSIONE $\mathbf{V}$ e FASORE CORRENTE $\mathbf{I}$

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} \quad \text{OPPURE} \quad \mathbf{V} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}$$

$$Z = \frac{V}{I} = R + jX$$

PER INDUTTORE $X > 0$

PER CONDENSATORE $X < 0$

$R = \mathrm{Re}\{z\}$ = RESISTENZA

$X = \mathrm{Im}\{z\}$ = REATTANZA

$$Z = R + jX = |z| \angle \theta$$

$$|z| = \sqrt{R^2 + X^2} \; ; \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{X}{R}\right)$$

$$R = |Z| \cos\theta \qquad X = |z| \sin\theta$$

L'AMMETTENZA Y È IL RECIPROCO DELL'IMPEDENZA E SI MISURA IN SIEMENS (S)

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{I}{V} = G + jB$$

$$\underbrace{G = Re\{Y\}}_{\text{CONDUTTANZA}}$$

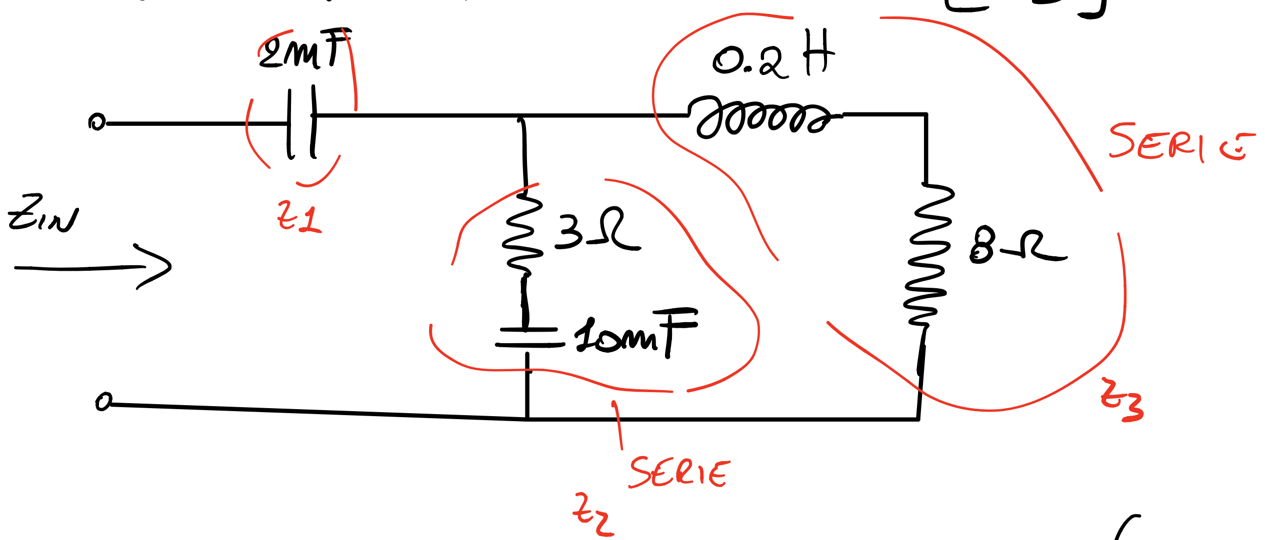
$$\underbrace{B = Im\{Y\}}_{\text{SUSCETTANZA}}$$

$$|Y| = \sqrt{G^2 + B^2} = \frac{1}{|Z|}$$

$$\theta_Y = \tan^{-1}\left(\frac{B}{G}\right) = -\theta_Z$$

ESERCIZIO

DETERMINARE $R_{EQUIVALENTE}$. ASSUMERE $\omega = 50 \left[\frac{RAD}{S}\right]$



$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j50 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = -10j \ \Omega$$

$$Z_3 = 8 + j50 \cdot 0.2 = (8 + 10j) \ \Omega$$

$$Z_2 = 3 + \frac{1}{j \cdot 1 \cdot 10^{-2} \cdot 50} = (3 - 2j) \ \Omega$$

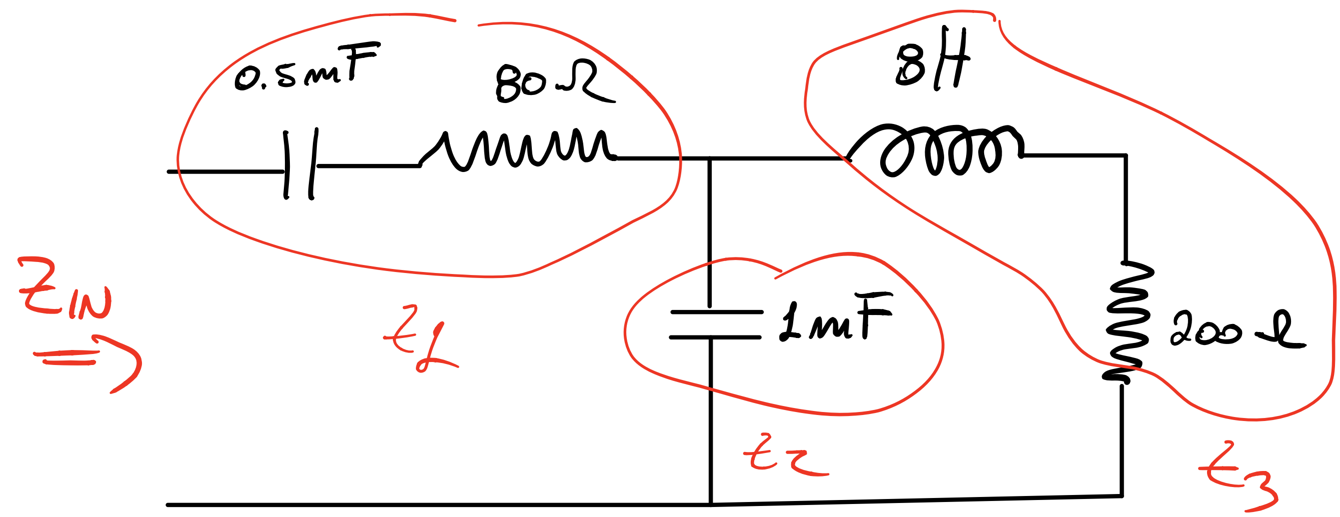
$$Z_{IN} = Z_1 + (Z_2 \parallel Z_3) = -10J + \left(\frac{(8+J10)\cdot(3-J2)}{(8+J10)+(3-J2)} \right) =$$

$$= -J10 + \left(\frac{(8+J10)\cdot(3-J2)}{11+J8} \right) = -J10 + \frac{(24-16J+30J+20)}{11+J8} =$$

$$= -J10 + \left(\frac{(44+14J)\cdot(11-J8)}{(11+J8)\cdot(11-J8)} \right) =$$

$$= -J10 + \frac{484 - J352 + 154J + 112}{11^2+8^2} = \frac{596-198J}{185} =$$

$$= -J10 + \frac{596}{185} - \frac{198J}{185} = 3.22 - J11.07 \, [\Omega]$$



$Z_{IN} = ?$ $\quad \omega = 10 \left[\frac{RAD}{S}\right]$

$$Z_1 = \frac{1}{JWC} + 80 = \frac{1}{J10 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 80 - J200\,[\Omega]$$

$$Z_2 = \frac{1}{JWC} = \frac{1}{J \cdot 10 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = -100J\,[\Omega]$$

$$Z_3 = 200 + J10 \cdot 8 = 200 + J80\,\Omega$$

$$Z_{IN} = Z_1 + \left(Z_2 \| Z_3\right) = 80 - J200 + \left(\frac{-100J \cdot (200+80J)}{200-20J}\right)$$

$$= 80 - J200 + \left(\frac{(-20.000J + 8000) \cdot (200+20J)}{(200-20J)(200+20J)}\right) =$$

$$= 80 - J200 + \frac{2 \cdot 10^6 - 3.84 \cdot 10^6}{200^2 + 20^2 = 40400} =$$

$$= 80 - J200 + 49.50 - 95J = 129.50 - 295J$$