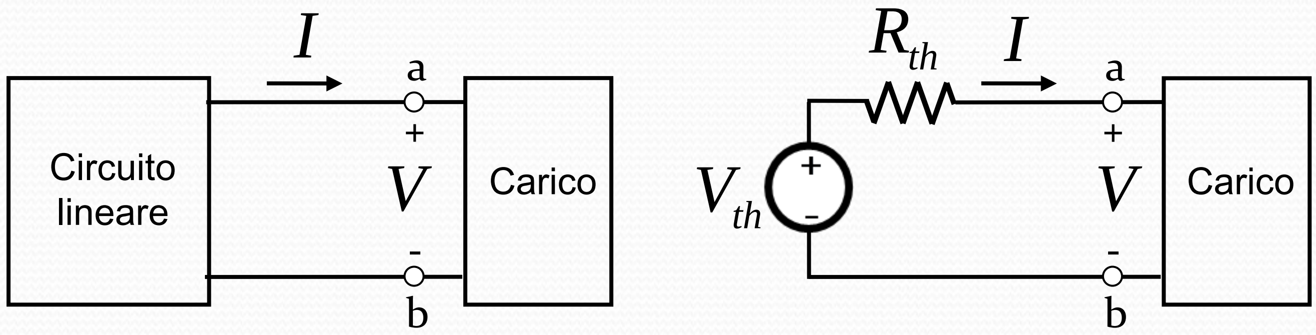
Corso di Elettrotecnica

Esercitazione n° 3

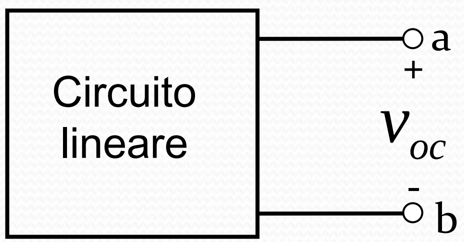
Teorema di Thevenin

Il **teorema di Thevenin** afferma che un circuito lineare con due terminali può essere sostituito con un circuito equivalente formato da un generatore di tensione V_{th} in serie con un resistore R_{th}, in cui V_{th} è la tensione a vuoto ai terminali e R_{th} è la resistenza di ingresso, o equivalente, vista agli stessi terminali, quando i generatori indipendenti sono spenti.



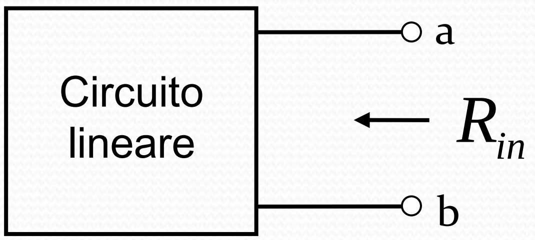
Teorema di Thevenin

Calcolo di V_{th}



V_{th} coincide con la tensione a vuoto del circuito (circuito aperto ai terminali ab): V_{th} =v_{oc}

Calcolo di R_{th}



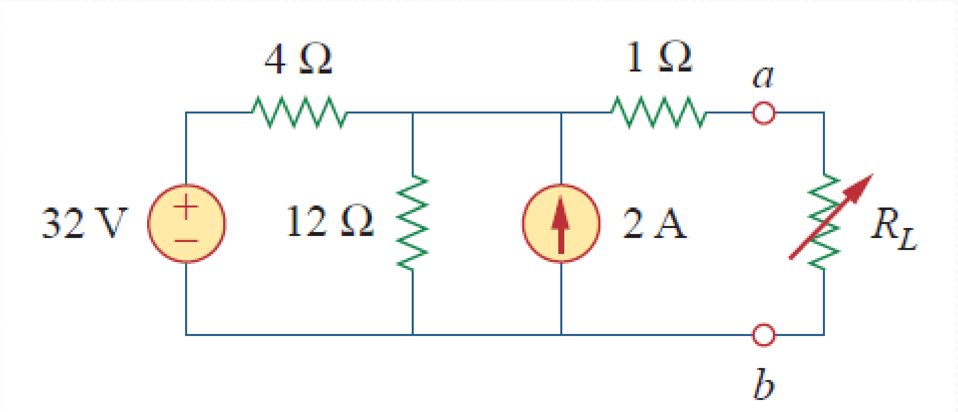
R_{th} coincide con la resistenza R_{in} vista ai terminali ab dopo aver spento tutti i generatori: R_{th}=R_{in}

Teorema di Thevenin

Esercizio

Determinare l'equivalente alla Thevenin del circuito in figura ai terminali ab.

Quindi calcolare la potenza sul resistore R_L per valori di resistenza $R_L = 6, 16, 36\Omega$

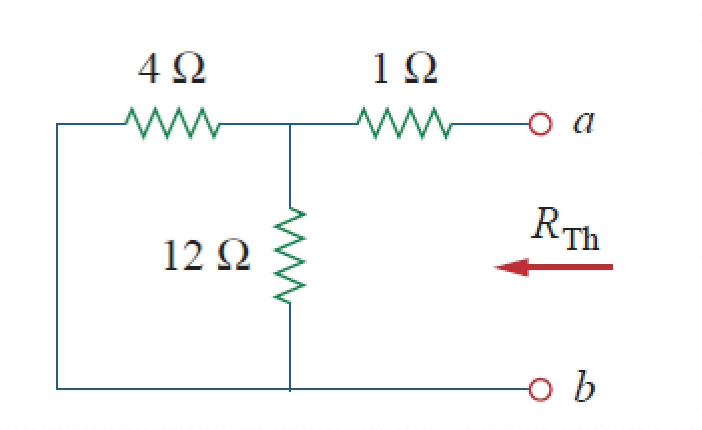


Teorema di Thevenin

Soluzione

Calcolo di R_{Th}

Spegniamo i generatori (cortocircuitiamo quello di tensione e apriamo quello di corrente).

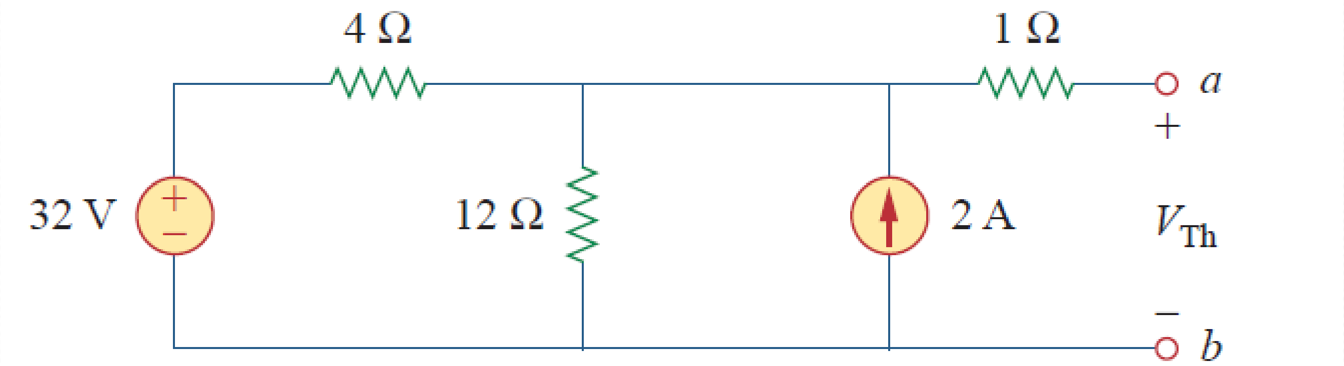


$$R_{Th} = 4 \parallel 12 + 1 = \frac{4 \times 12}{16} + 1 = 4\ \Omega$$

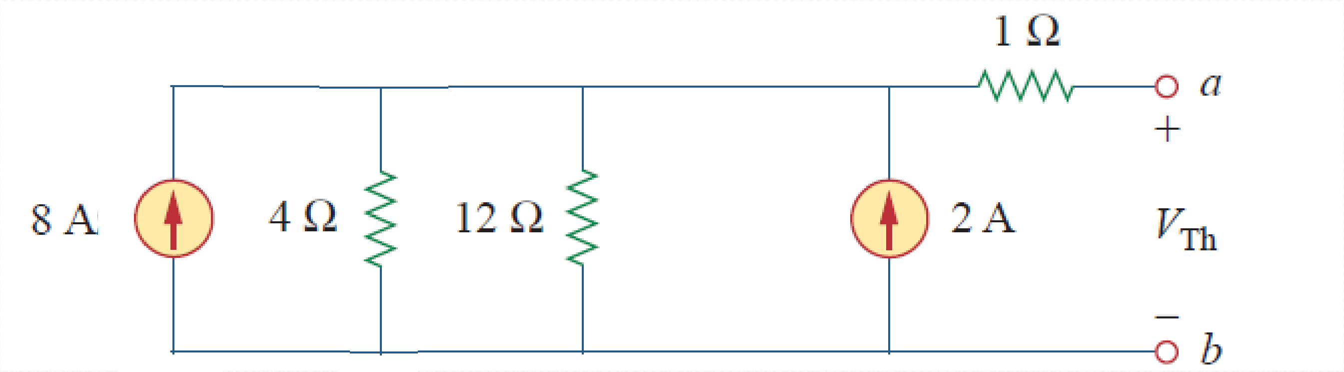
Teorema di Thevenin

Soluzione (continua)

Calcolo di V_{Th}



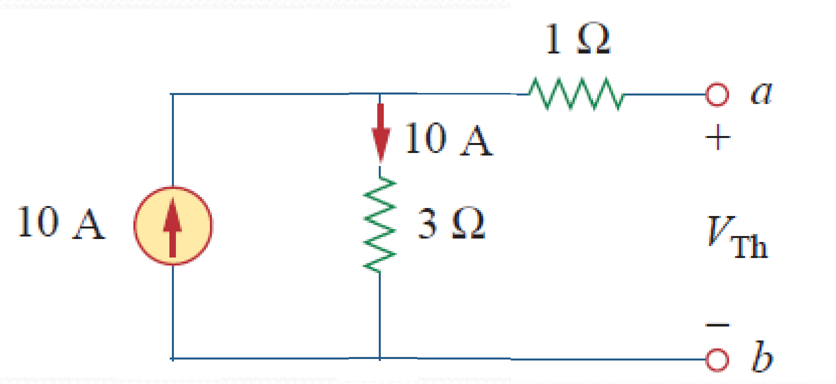
Possiamo trasformare il generatore di tensione in uno di corrente



Teorema di Thevenin

Soluzione (continua)

Sommiamo i generatori di corrente in parallelo e troviamo la resistenza equivalente del parallelo tra 4 e 12



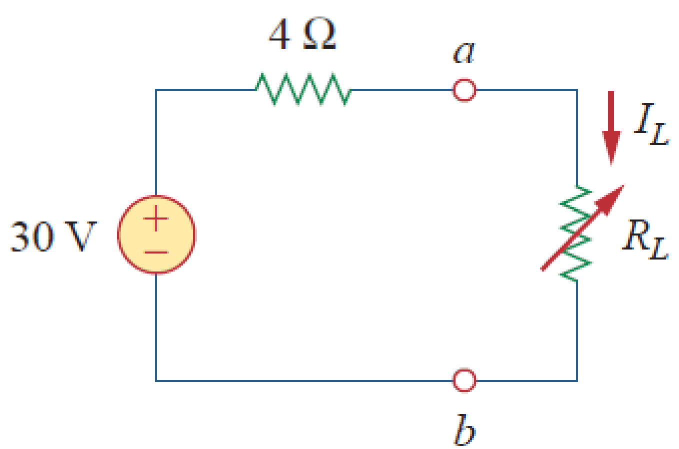
Sulla resistenza da 1Ω non scorre corrente, quindi non c'è caduta di tensione

$$V_{Th} = 3\Omega \cdot 10A = 30V$$

Teorema di Thevenin

Soluzione (continua)

Equivalente alla Thevenin



$$I_L = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L} = \frac{30}{4 + R_L}$$

Per $R_L = 6$,

$$I_L = \frac{30}{10} = 3\ \text{A}$$

$$P_{RL} = R_L I_L^2 = 54W$$

Per $R_L = 16$,

$$I_L = \frac{30}{20} = 1.5\ \text{A}$$

$$P_{RL} = R_L I_L^2 = 36W$$

Per $R_L = 36$,

$$I_L = \frac{30}{40} = 0.75\ \text{A}$$

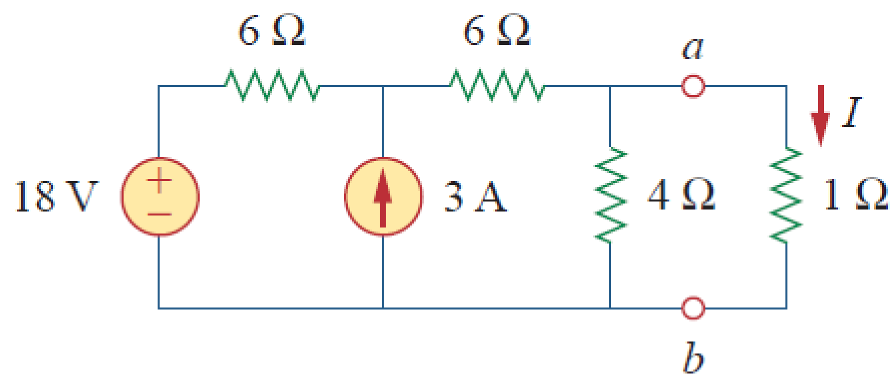
$$P_{RL} = R_L I_L^2 = 20.25W$$

Teorema di Thevenin

Esercizio

Determinare l’equivalente alla Thevenin del circuito in figura ai terminali *ab*.

Quindi calcolare I



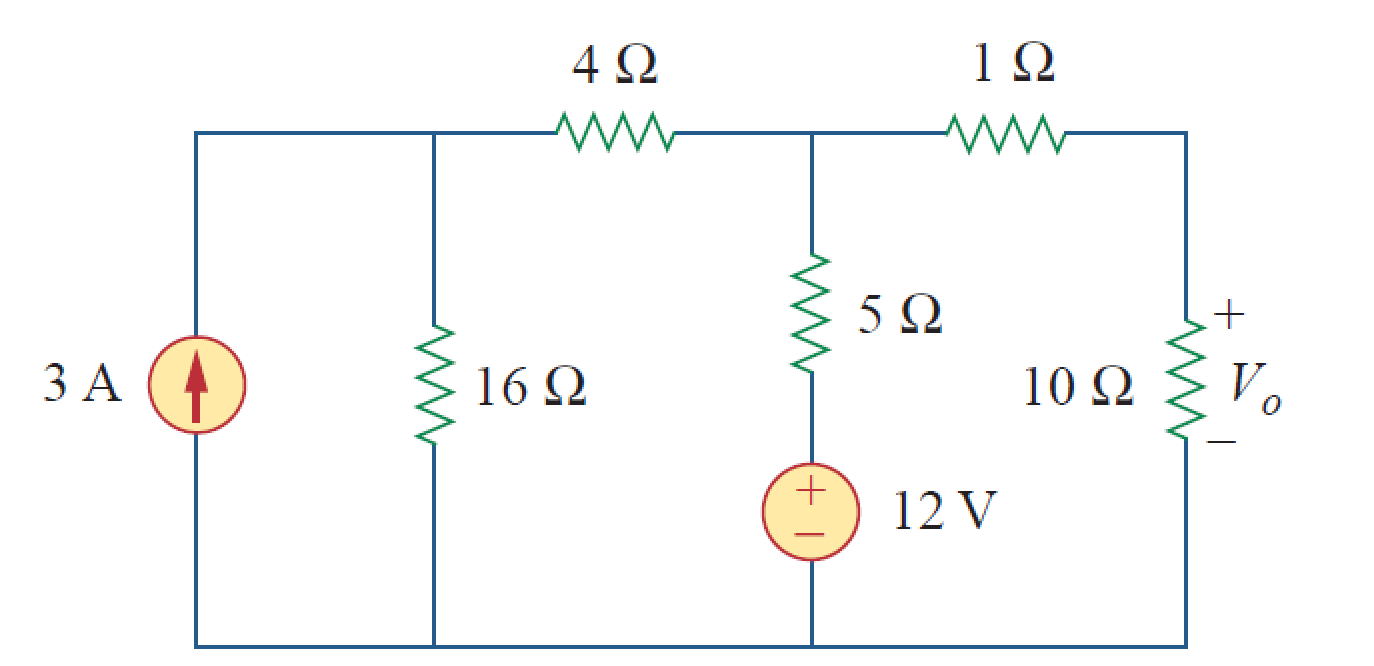
Soluzione

$$V_{Th} = 9\text{ V},\ R_{Th} = 3\ \Omega,\ I = 2.25\text{ A}.$$

Teorema di Thevenin

Esercizio

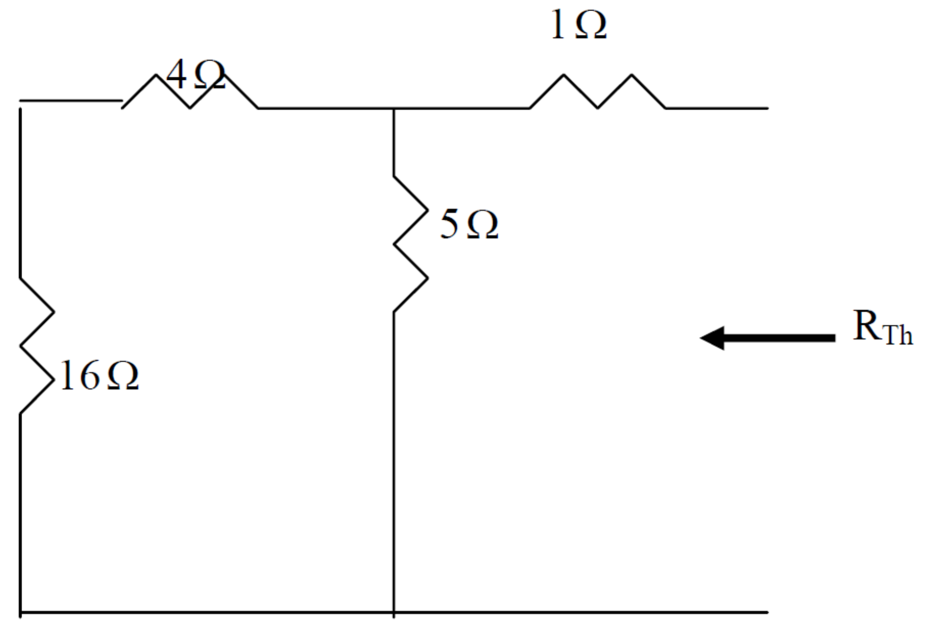
Usando il teorema di Thevenin determinare Vo.



Teorema di Thevenin

Soluzione

Per trovare R_{TH} spegniamo tutti i generatori

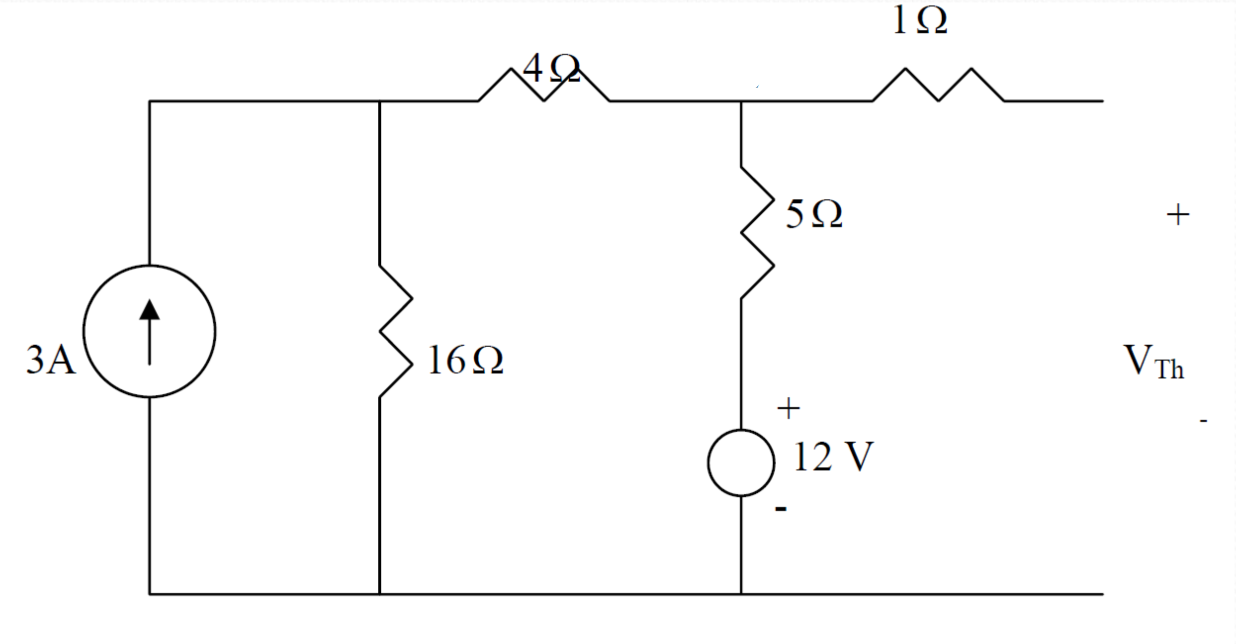


$$R_{Th} = 1 + 5//(4+16) = 1 + 4 = 5\Omega$$

Teorema di Thevenin

Soluzione

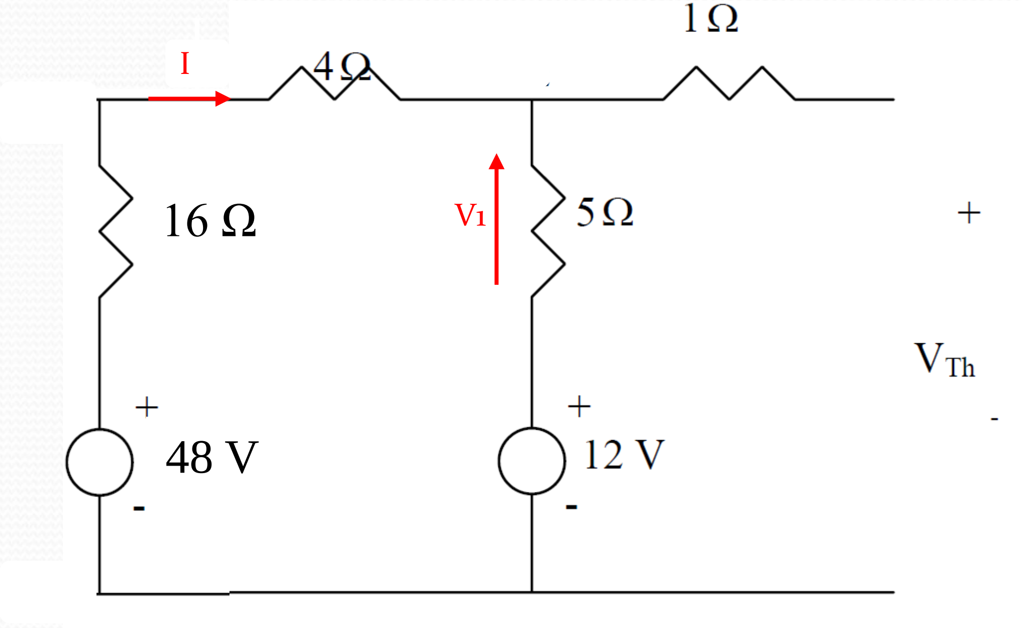
Per trovare V_{TH} consideriamo il circuito in figura



Teorema di Thevenin

Soluzione (continua)

Possiamo trasformare il generatore di corrente in uno di tensione e scrivere KVL per la maglia (sul resistore da 1Ω non c'è corrente, quindi non c'è caduta di tensione)



$$I = \frac{48V - 12V}{16\Omega + 4\Omega + 5\Omega} = 1{,}44A$$

$$V_1 = 5\Omega \cdot I = 7{,}2V$$

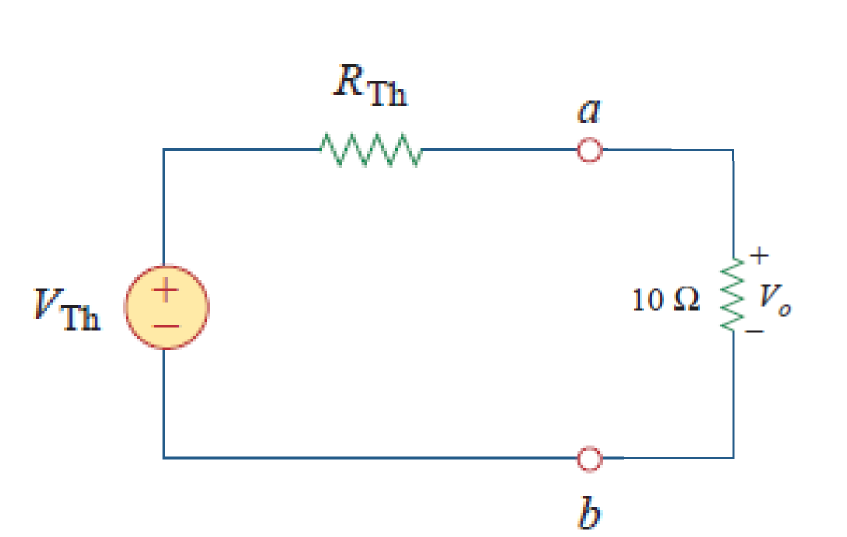
$$V_{Th} = V_1 + 12V = 19{,}2V$$

Teorema di Thevenin

Soluzione (continua)

Il circuito equivalente alla Thevenin ai terminali *ab* è quello in figura.

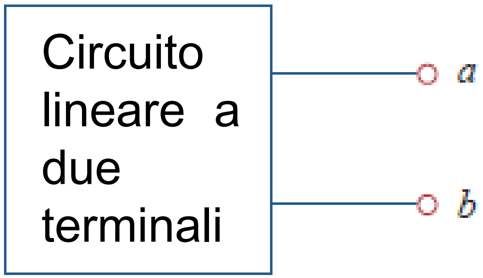
Per trovare Vo possiamo usare un partitore di tensione.



$$V_o = \frac{10\Omega}{10\Omega + R_{Th}} V_{Th} = \frac{10\Omega}{10\Omega + 5\Omega}\, 19{,}2V = 12{,}8V$$

Relazioni tra Thevenin e Norton

$$I_N = \frac{V_{\mathrm{Th}}}{R_{\mathrm{Th}}}$$



$$V_{\mathrm{Th}} = v_{oc}$$

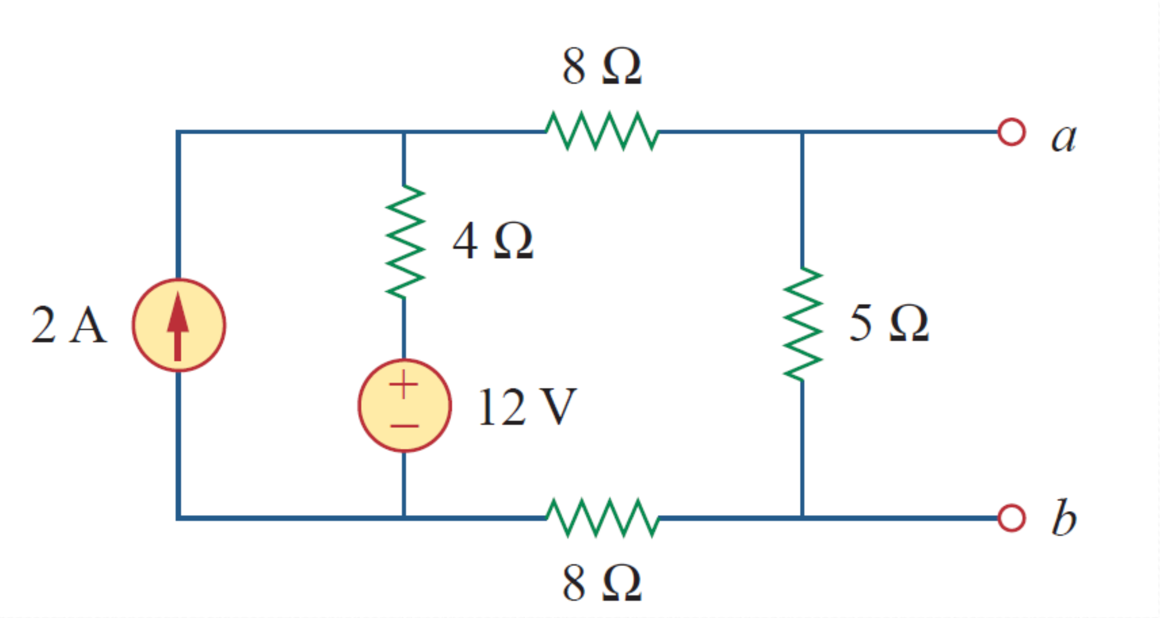
$$I_N = i_{sc}$$

$$R_{\mathrm{Th}} = \frac{v_{oc}}{i_{sc}} = R_N$$

Teorema di Norton

Esercizio

Determinare l’equivalente alla Norton del circuito in figura ai terminali *ab*.

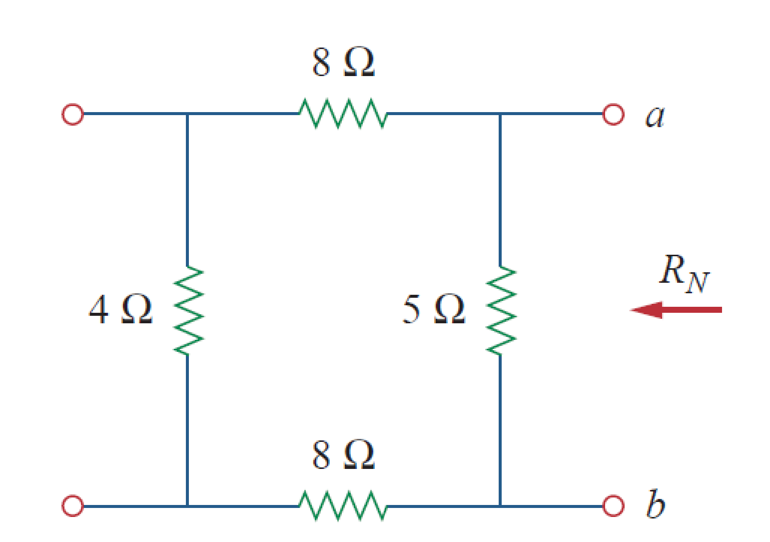


Teorema di Norton

Soluzione

Calcolo di R_N

Spegniamo i generatori (cortocircuitiamo quello di tensione e apriamo quello di corrente).

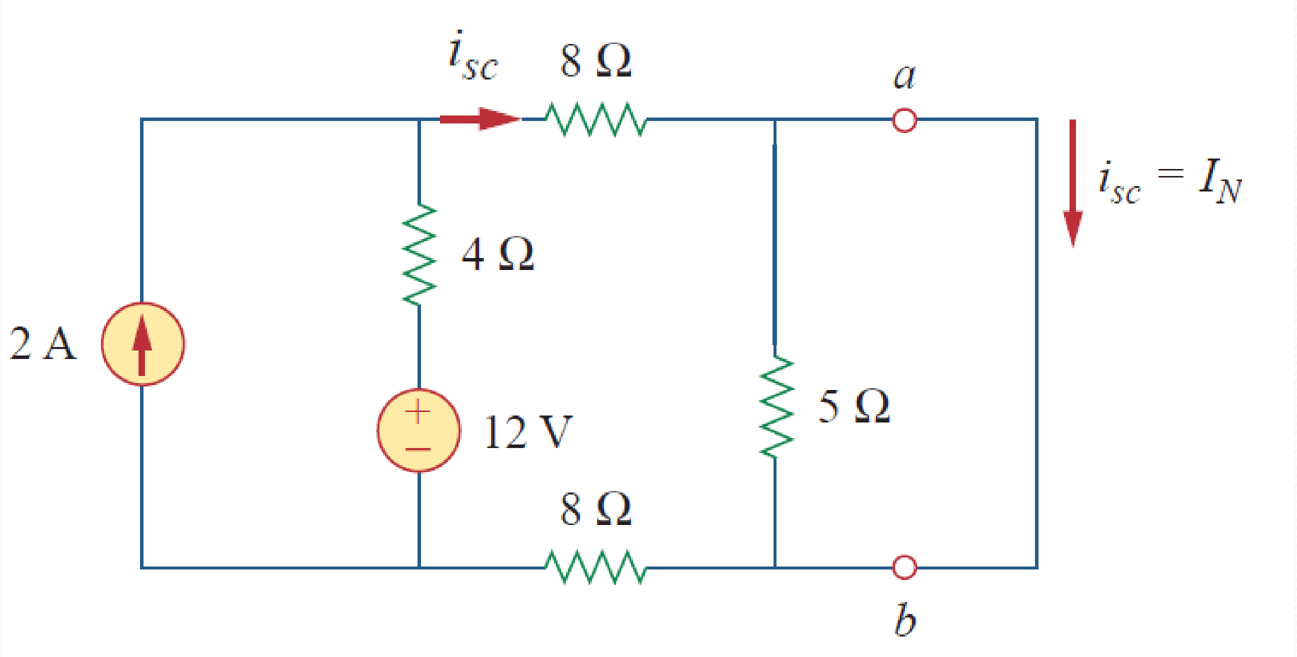


$$R_N = 5 \,\|\, (8 + 4 + 8) = 5 \,\|\, 20 = \frac{20 \times 5}{25} = 4\ \Omega$$

Teorema di Norton

Soluzione (continua)

Calcolo di I_N

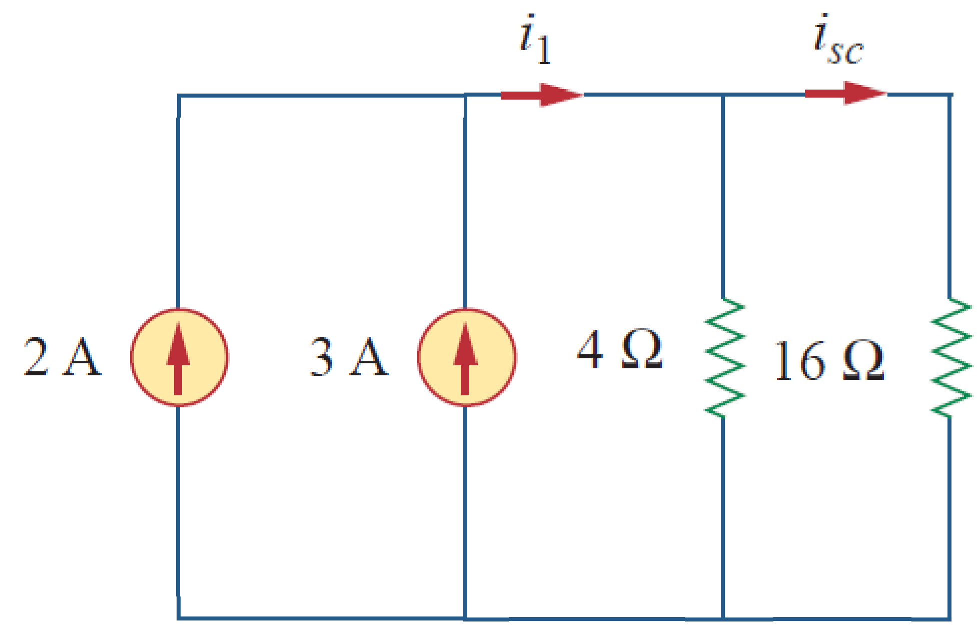


Teorema di Norton

Soluzione (continua)

Il resistore da 5Ω è cortocircuitato, quindi non vi scorre corrente attraverso.

I due resistori da 8Ω sono in serie. Possiamo trasformare il generatore di tensione con in serie la resistenza da 4Ω in un generatore di corrente.



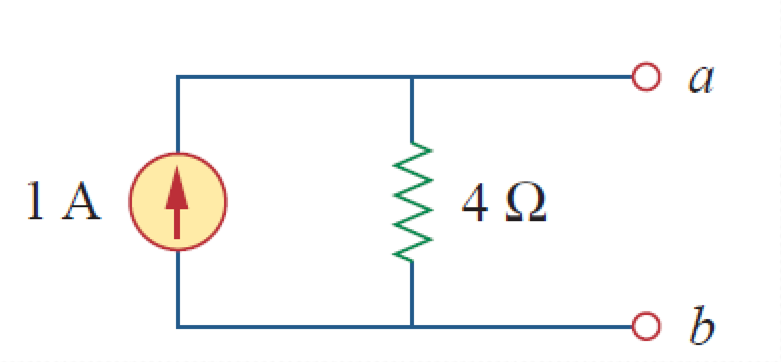
Teorema di Norton

Soluzione (continua)

Per trovare i_{sc} basta usare un partitore di corrente

$$i_{sc} = \frac{4\Omega}{4\Omega + 16\Omega} i_1 = \frac{4\Omega}{4\Omega + 16\Omega}\, 5A = 1A$$

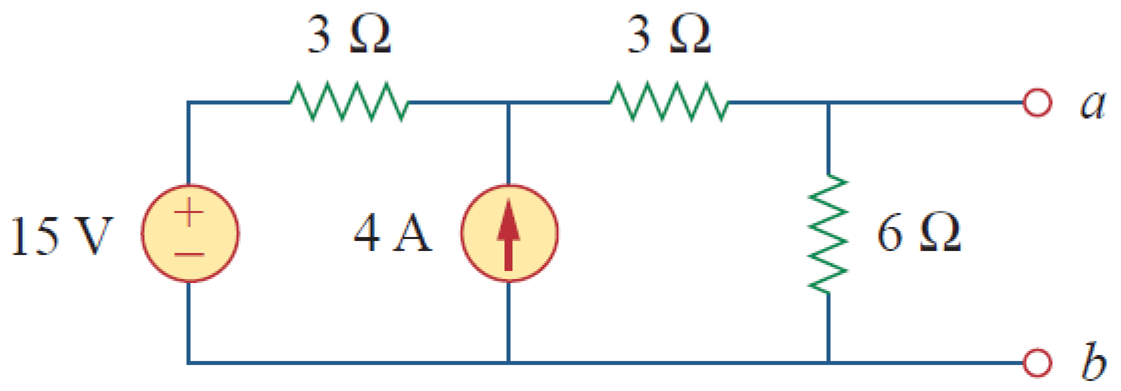
Equivalente alla Norton



Teorema di Norton

Esercizio

Determinare l’equivalente alla Norton del circuito in figura ai terminali ab.



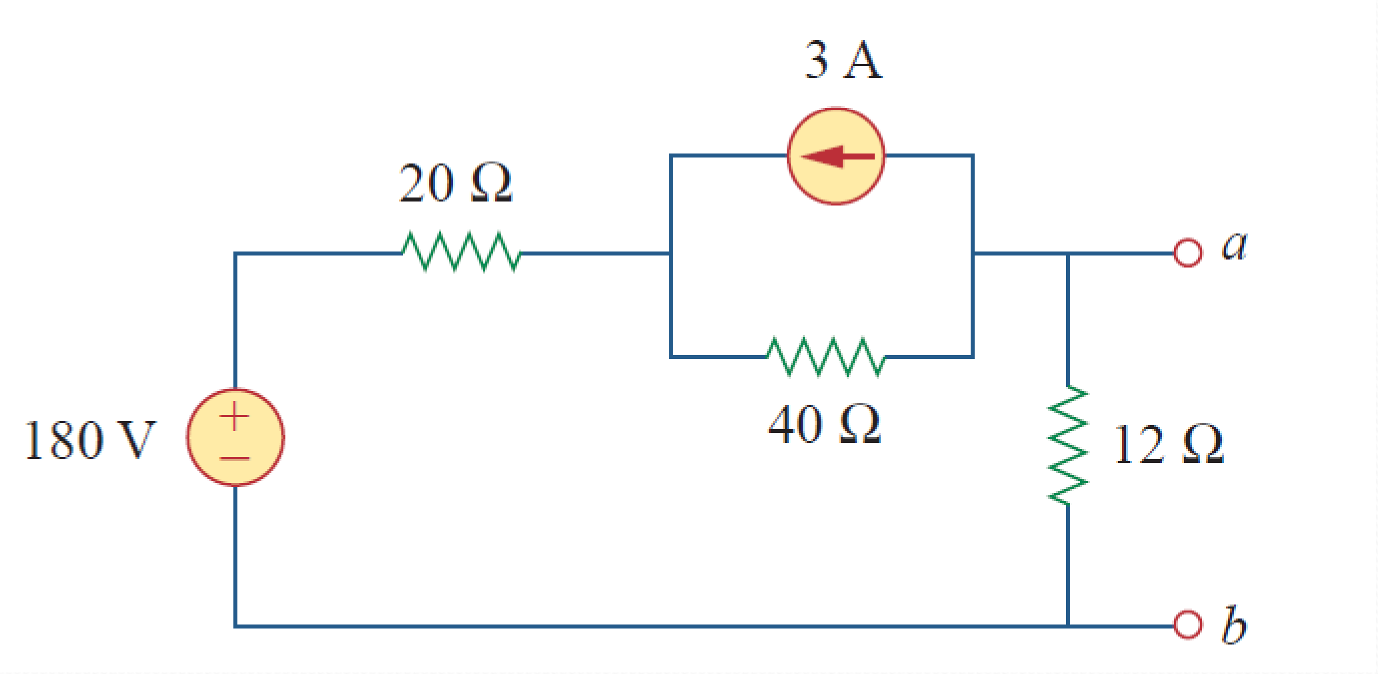
Soluzione

$$R_N = 3\ \Omega,\ I_N = 4.5\ \text{A}.$$

Teorema di Norton

Esercizio

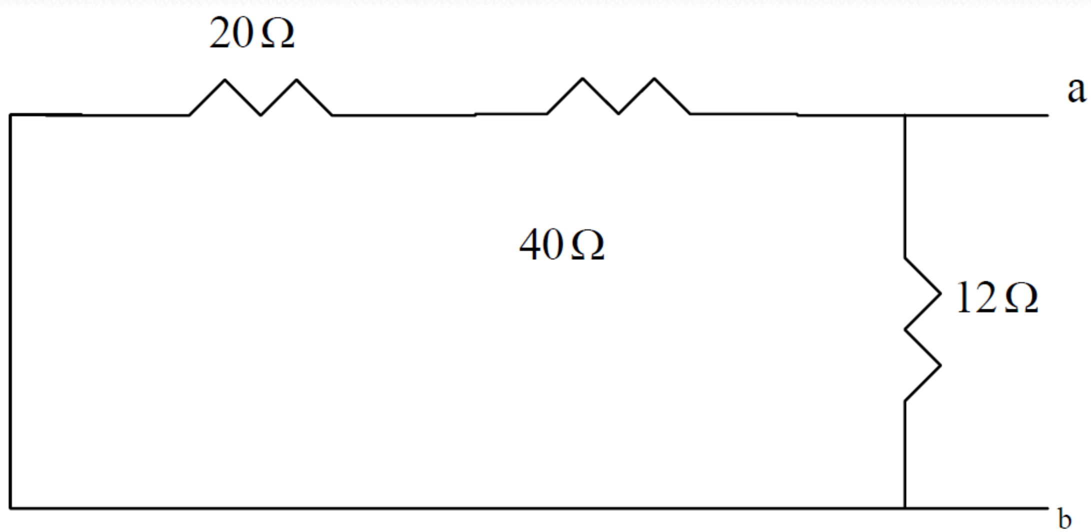
Determinare l’equivalente alla Norton del circuito in figura ai terminali ab.



Teorema di Norton

Soluzione

Per trovare R_N spegniamo tutti i generatori



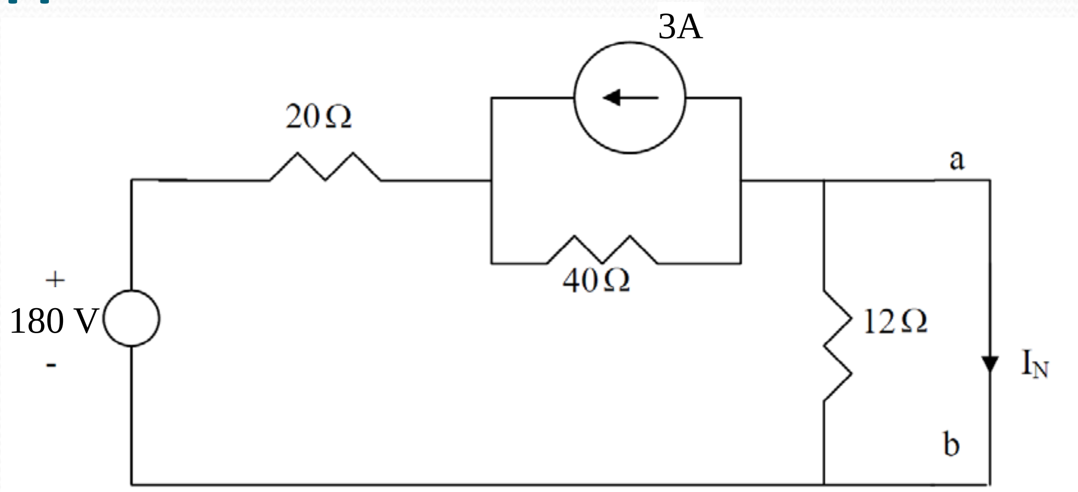
$$R_N = 12 // (20 + 40) = \underline{10\Omega}$$

Teorema di Norton

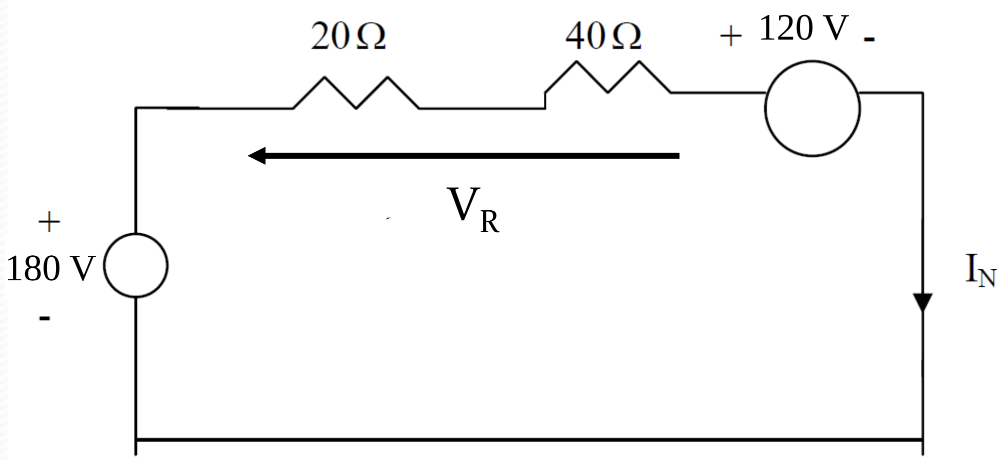
Soluzione (continua)

I_N può essere trovato dal circuito a destra.

Cortocircuitiamo i terminali *ab*



Trasformiamo il generatore di corrente in tensione e applichiamo KVL



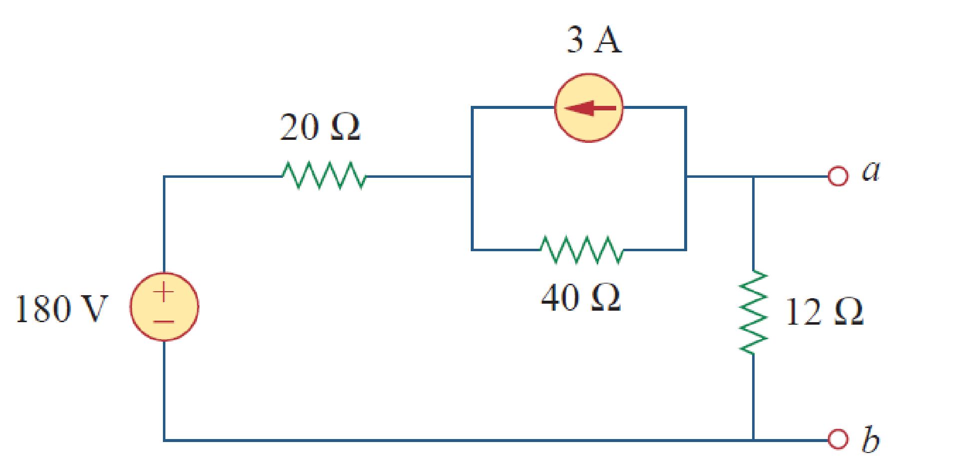
$$180V - V_R - 120V = 0$$

$$180V - 60\Omega \cdot I_N - 120V = 0$$

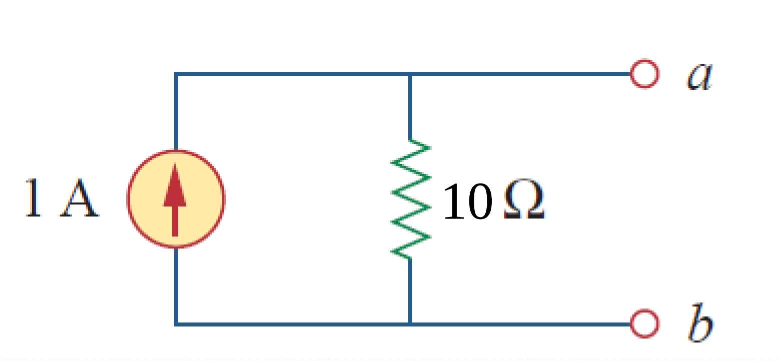
$$I_N = \frac{60V}{60\Omega} = 1A$$

Teorema di Norton

Soluzione (continua)
Circuito di partenza



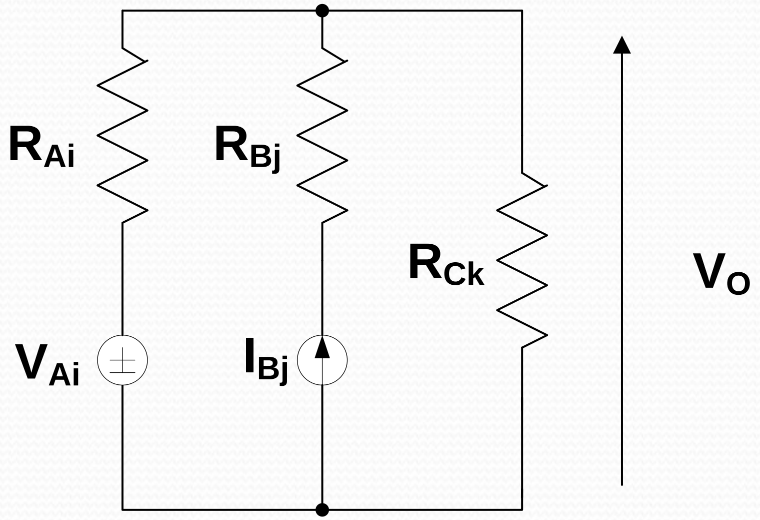
Equivalente alla Norton



Teorema di Millman

Il **teorema di Millman** afferma che la tensione ai capi di un parallelo di:
- generatori di tensione V_{Ai} con in serie resistenze R_{Ai},
- generatori di corrente I_{Bj} con eventualmente in serie resistenze R_{Bj},
- resistenze R_{Ck},
è data definita come:

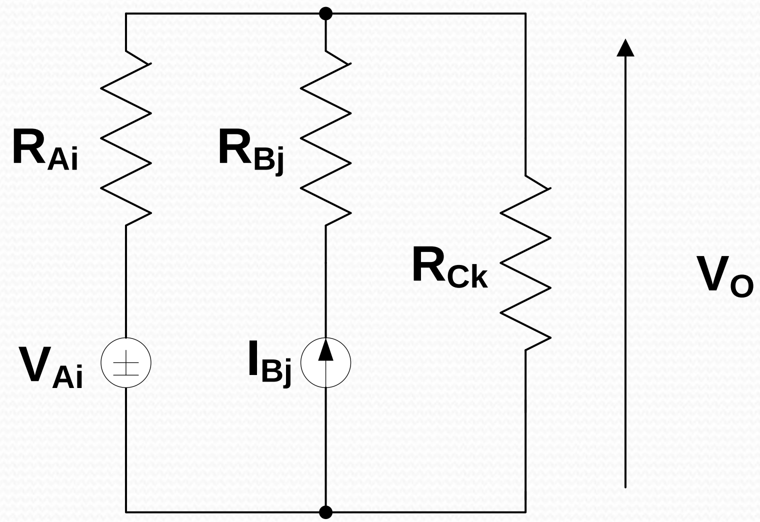
$$V_O = R_O I_O = \frac{\sum_i \frac{V_{Ai}}{R_{Ai}} + \sum_j I_{Bj}}{\sum_i \frac{1}{R_{Ai}} + \sum_k \frac{1}{R_{Ck}}}$$



Il teorema di Millman NON si può usare su rami che hanno solo un generatore ideale di tensione (senza resistenza in serie).

Teorema di Millman

Il teorema di Millman può essere usato <u>solo</u> in circuiti che contengono rami in parallelo e solo un generatore e una resistenza per ramo (o che possono essere ridotti ad una forma equivalente a questa).

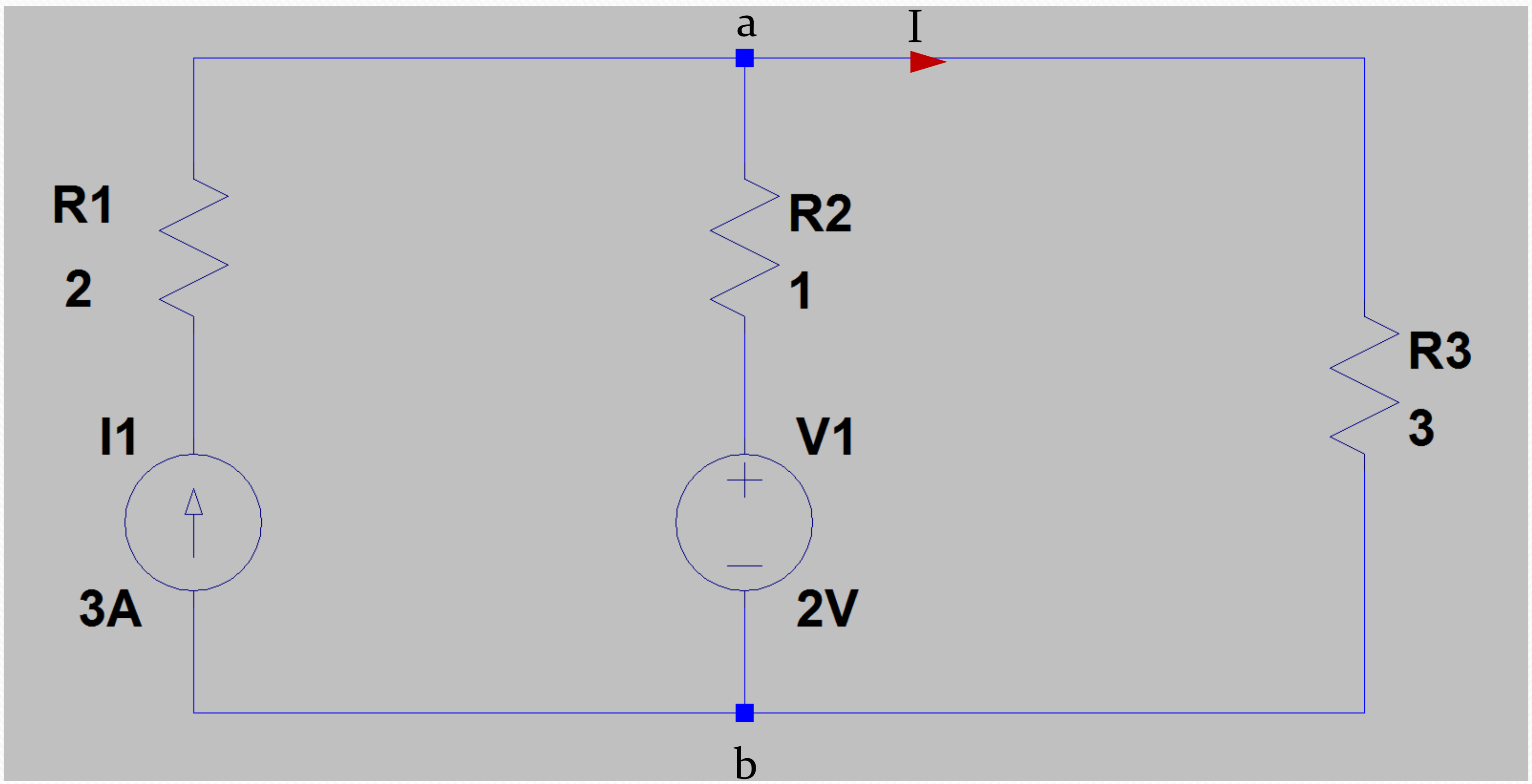


Il teorema di Millman NON si può usare su rami che hanno <u>solo un generatore ideale</u> di tensione (senza resistenza in serie).

Teorema di Millman

Esercizio

Applicando il Teorema di Millman al circuito in figura, determinare I su R_3



Teorema di Millman

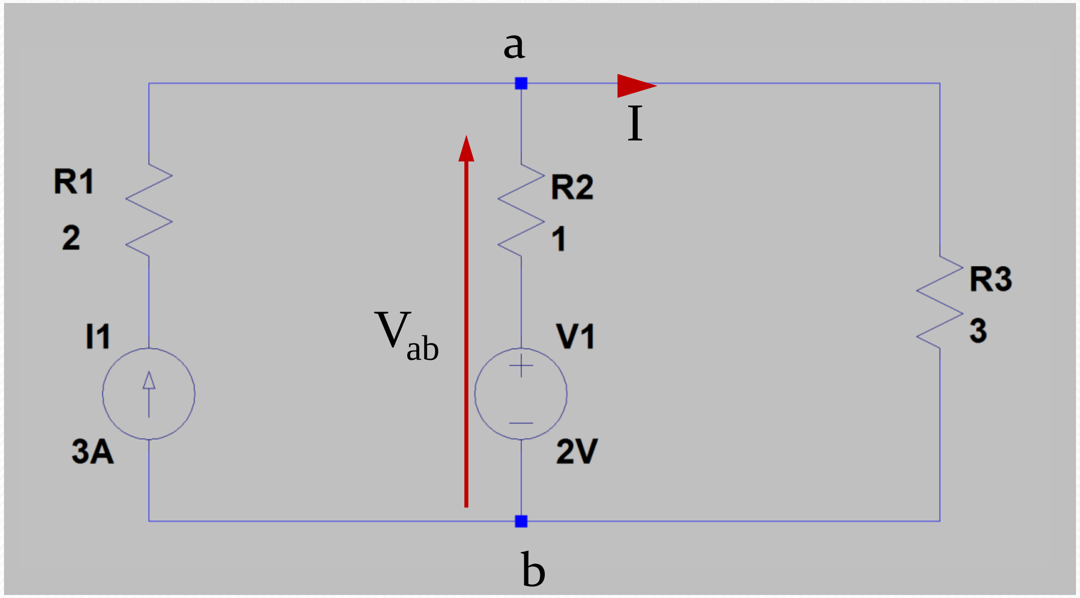
Soluzione

Applichiamo il teorema di Millman tra i nodi *a* e *b*

$$V_{ab} = \frac{I_1 + \frac{V_1}{R_2}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{3A + \frac{2V}{1\Omega}}{\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{3\Omega}} = \frac{15}{4}V = 3.75V$$

Con la legge di Ohm possiamo trovare I

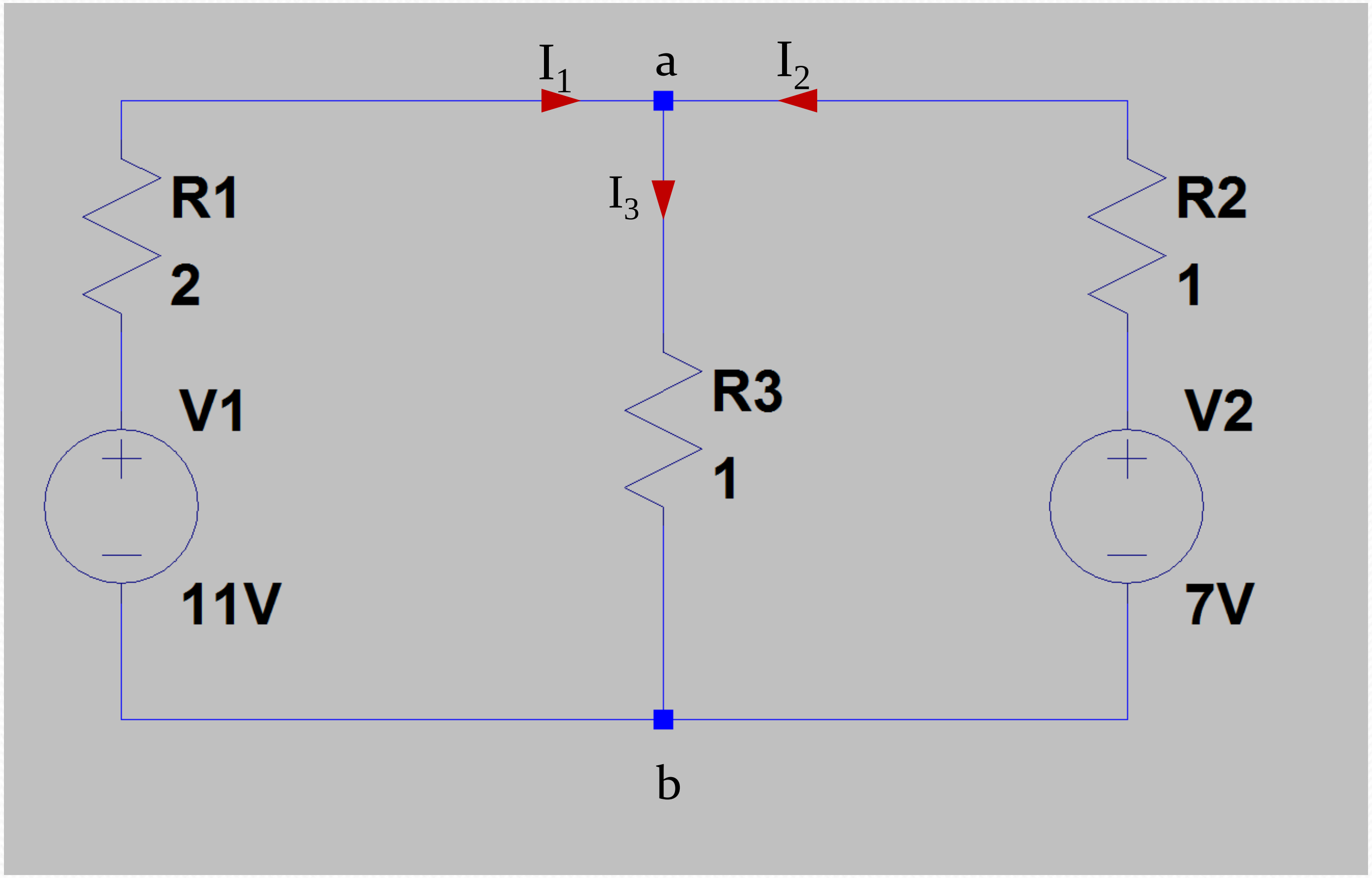
$$I_3 = \frac{V_{ab}}{R_3} = \frac{3.75V}{3\Omega} = 1.25A$$



Teorema di Millman

Esercizio

Applicando il Teorema di Millman al circuito in figura, determinare I1, I2 e I3.



Teorema di Millman

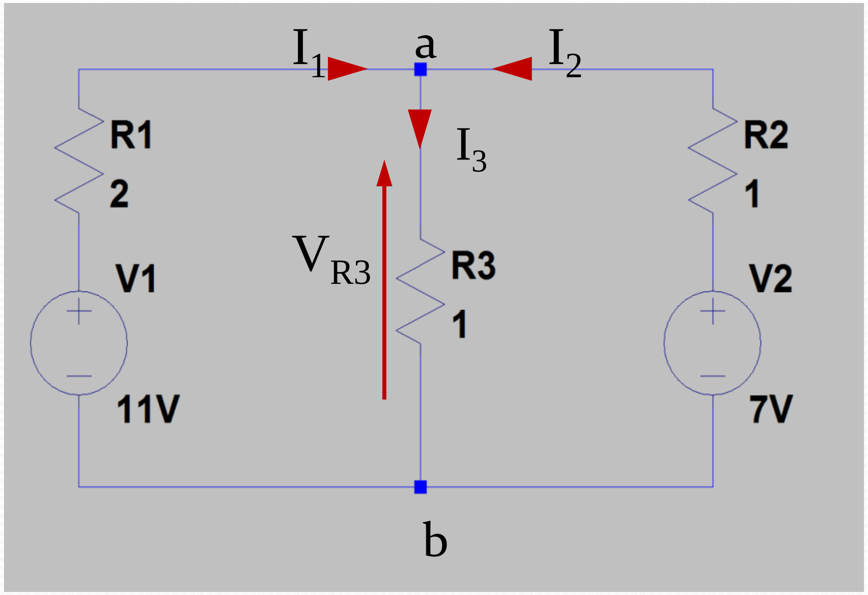
Soluzione

Applichiamo il teorema di Millman tra i nodi *a* e *b*

$$V_{ab} = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = 6.82V$$

Con la legge di Ohm possiamo trovare I_3

$$I_3 = \frac{V_{R3}}{R_3} = \frac{V_{ab}}{R_3} = 6.82A$$



Teorema di Millman

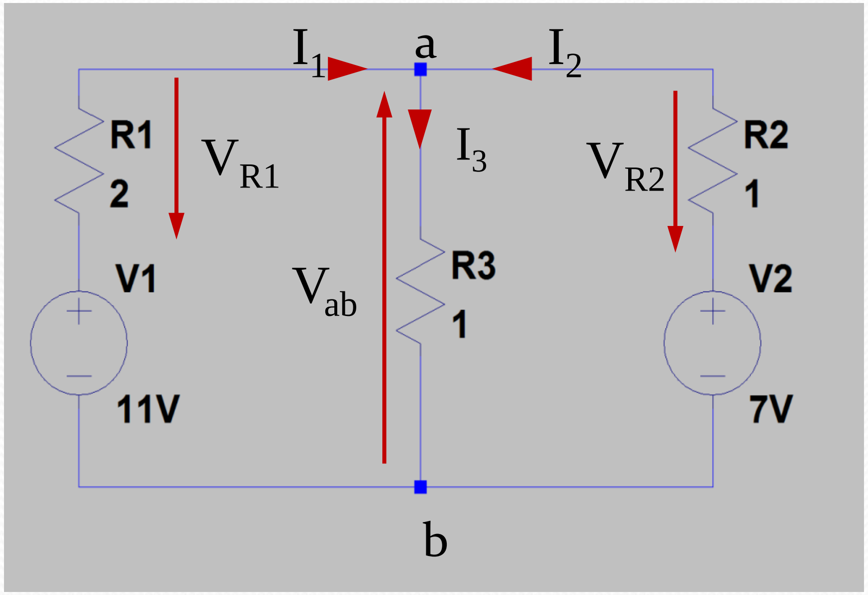
Soluzione (continua)

Per trovare I_1 e I_2 usiamo la KVL sulle due maglie

$$V_1 - V_{R1} - V_{ab} = 0$$

$$V_1 - I_1 R_1 - V_{ab} = 0$$

$$I_1 = \frac{V_1 - V_{ab}}{R_1} = \frac{11V - 6.82V}{2\Omega} = 2.09A$$



$$V_2 - V_{R2} - V_{ab} = 0$$

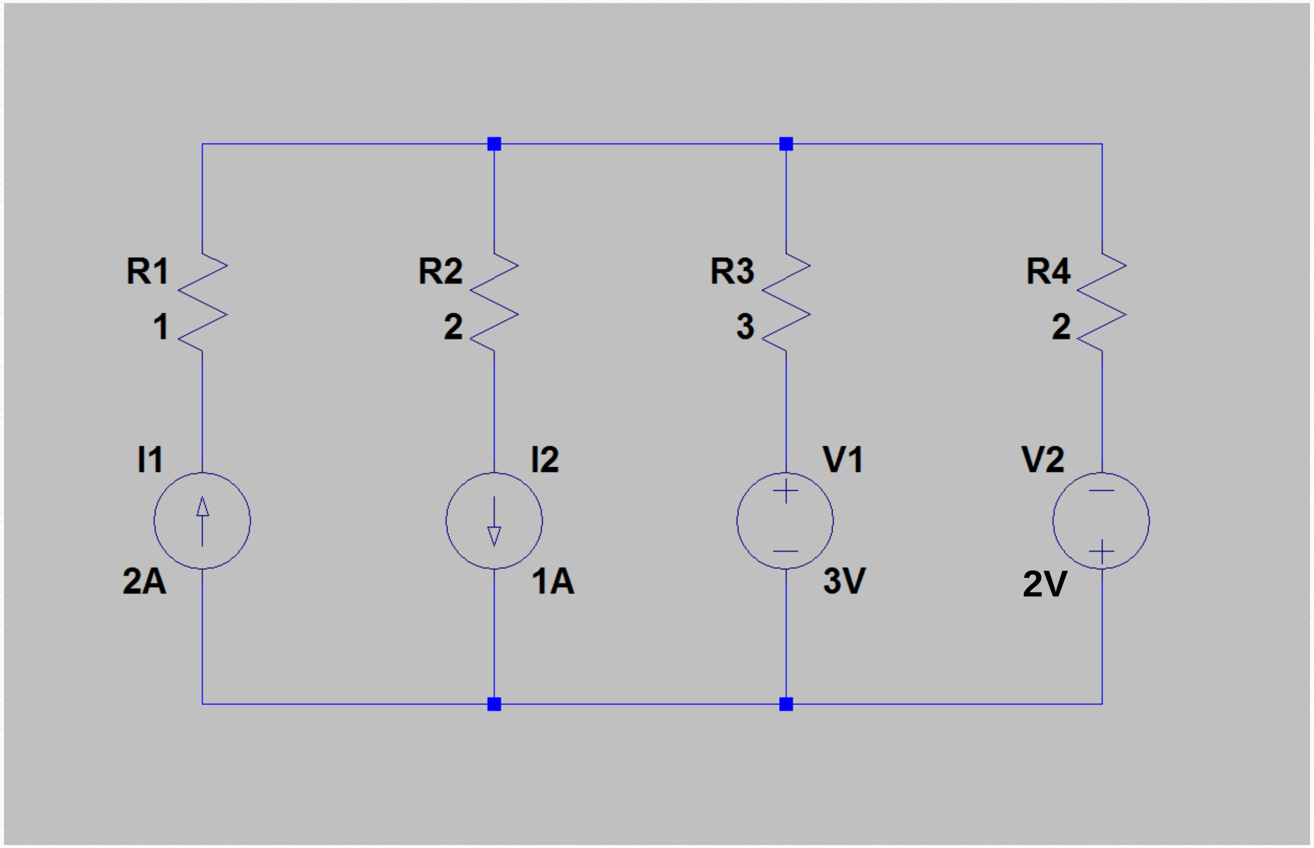
$$V_2 - I_2 R_2 - V_{ab} = 0$$

$$I_2 = \frac{V_2 - V_{ab}}{R_2} = \frac{7V - 6.82V}{1\Omega} = 0.18A$$

Teorema di Millman

Esercizio

Applicando il Teorema di Millman al circuito in figura, determinare la tensione su R3 e R4



Teorema di Millman

Soluzione

Applichiamo il teorema di Millman tra i nodi *a* e *b*

$$V_{ab} = \frac{I_1 - I_2 + \frac{V_1}{R_3} - \frac{V_2}{R_4}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = \frac{2A - 1A + \frac{3V}{3\Omega} - \frac{2V}{2\Omega}}{\frac{1}{3\Omega} + \frac{1}{2\Omega}} = \frac{6}{5}V = 1{,}2V$$

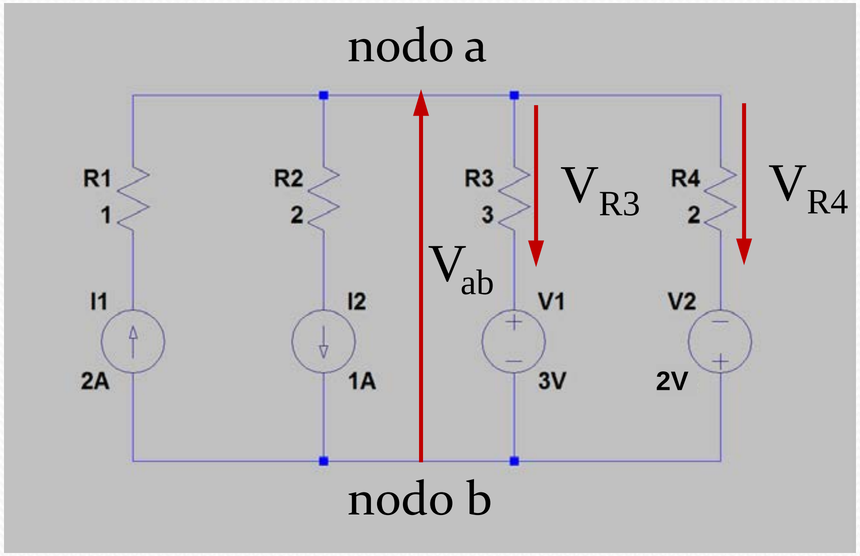
Con la KVL possiamo trovare V_{R3} e V_{R4}

$$V_{ab} + V_{R3} - V_1 = 0$$

$$V_{R3} = V_1 - V_{ab} = 3V - 1{,}2V = 1{,}8V$$

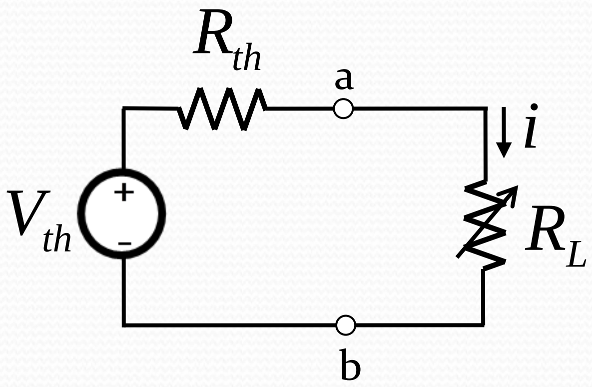
$$V_{ab} + V_{R4} + V_2 = 0$$

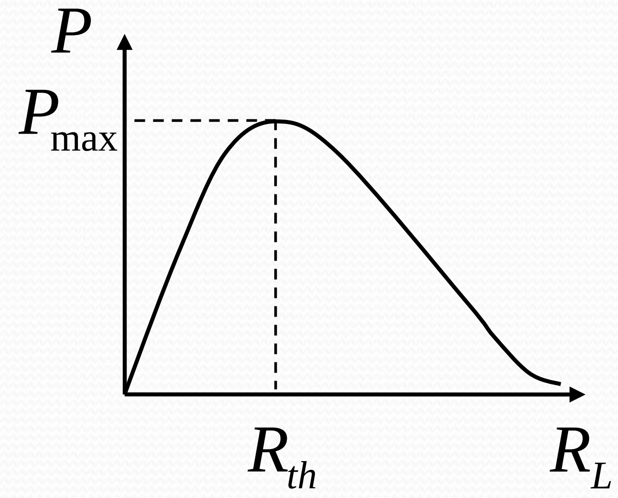
$$V_{R4} = -V_2 - V_{ab} = -2V - 1{,}2V = -3{,}2V$$



Massimo trasferimento di potenza

Si ha la massima potenza trasferita al carico quando la resistenza di carico R_L è uguale alla resistenza di Thevenin vista dal carico ($R_L = R_{th}$).





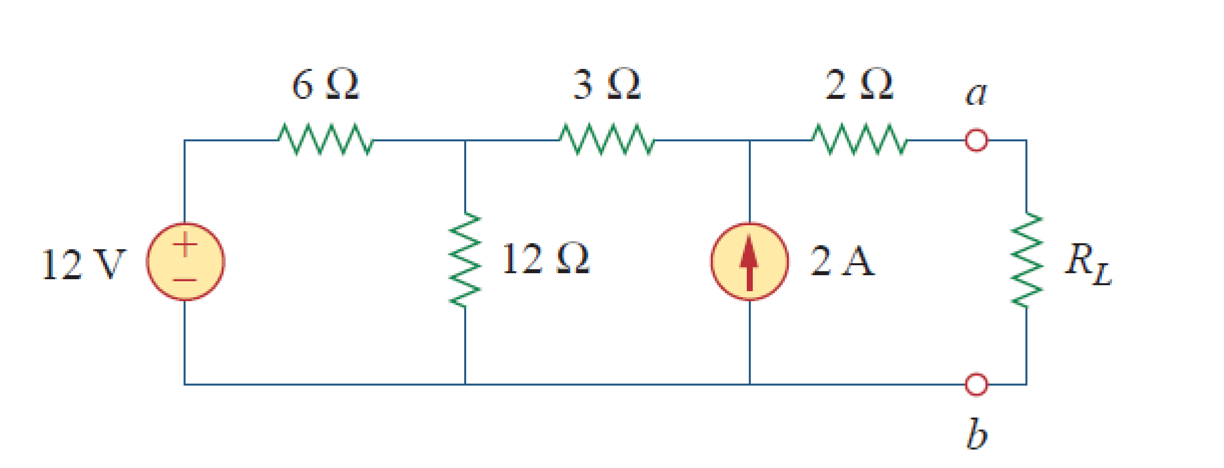
$$p = i^2 R_L = \left(\frac{V_{th}}{R_{th} + R_L} \right)^2 R_L$$

Se $\boxed{R_L = R_{th}}$ allora $\boxed{p_{max} = \dfrac{V_{th}^{\,2}}{4R_{th}}}$

Massimo trasferimento di potenza

Esercizio

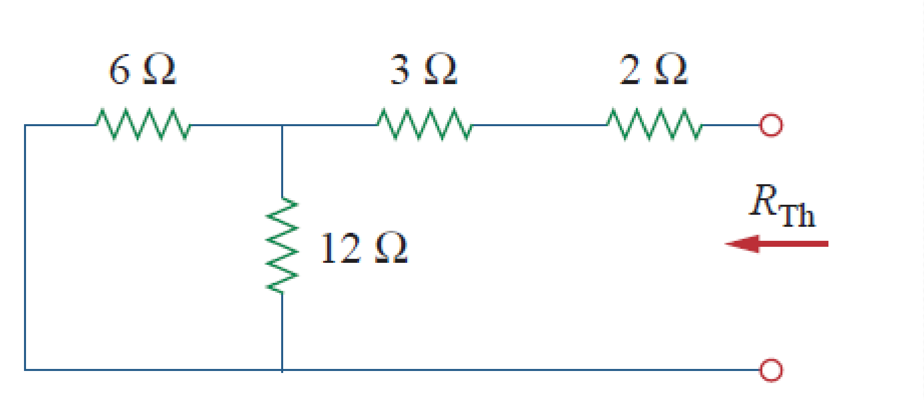
Determinare R_L tale da avere il massimo trasferimento di potenza nel circuito in figura



Massimo trasferimento di potenza

Soluzione

Per trovare R_{TH} spegniamo tutti i generatori

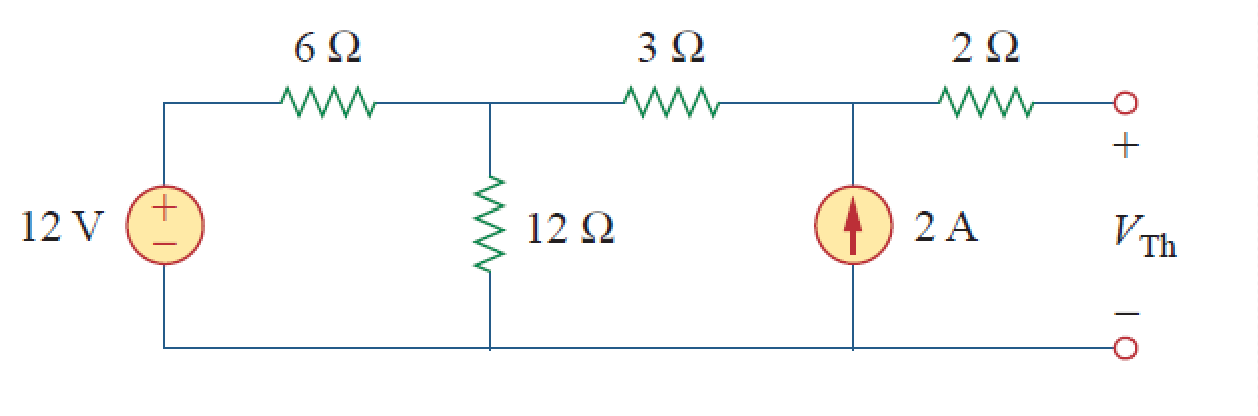


$$R_{Th} = 2 + 3 + 6 \| 12 = 5 + \frac{6 \times 12}{18} = 9\ \Omega$$

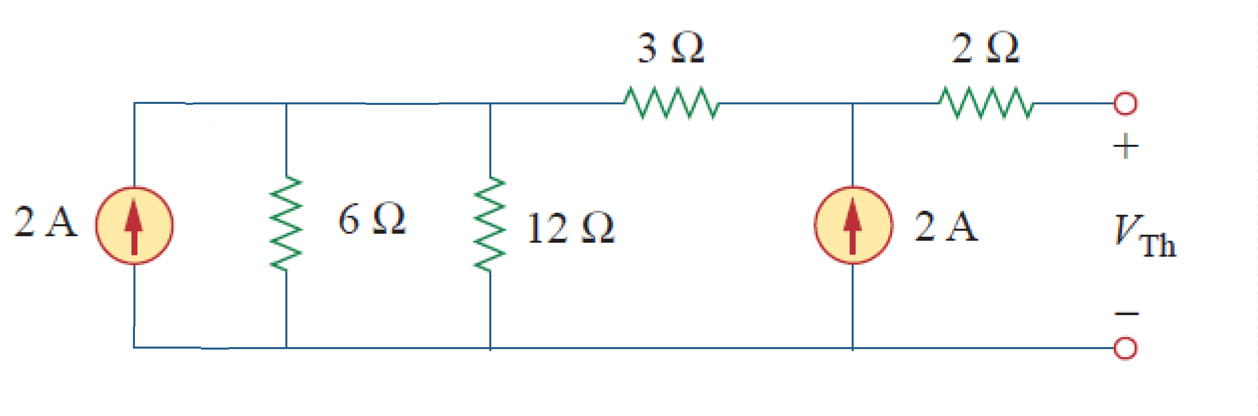
Massimo trasferimento di potenza

Soluzione (continua)

Per trovare V_{TH} stacchiamo il carico e troviamo la tensione a vuoto dal circuito in figura



Possiamo trasformare il generatore reale di tensione in uno di corrente

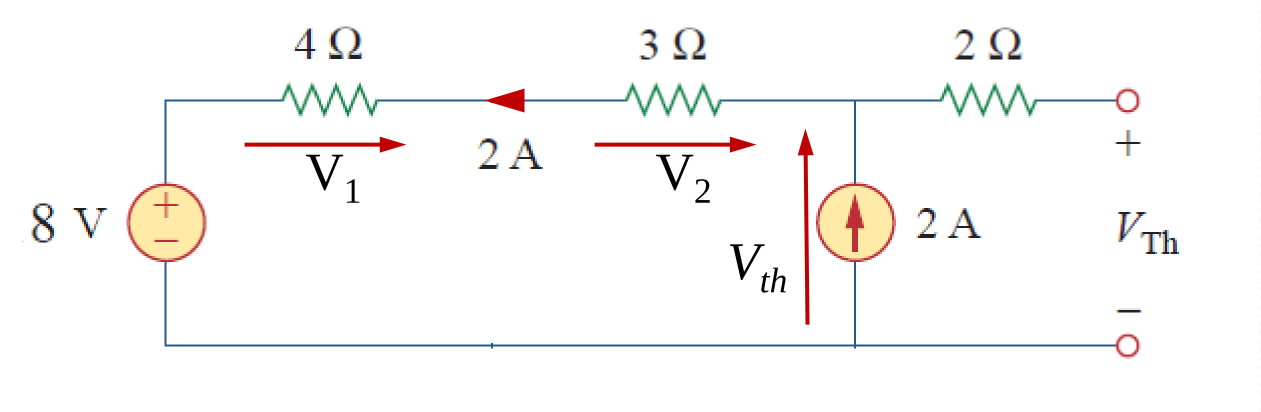


Massimo trasferimento di potenza

Soluzione (continua)

Facciamo il parallelo di resistenze e ritrasformiamo in un generatore di tensione

$6\Omega||12\Omega = 4\Omega$



La corrente che scorre nella maglia è forzata dal generatore di corrente, quindi 2A

Usiamo la KVL per trovare la caduta sul generatore di corrente, che corrisponde alla V_{th} perché sul resistore da 2Ω non c'è corrente e quindi non c'è caduta di tensione

$$8V + V_1 + V_2 - V_{th} = 0$$

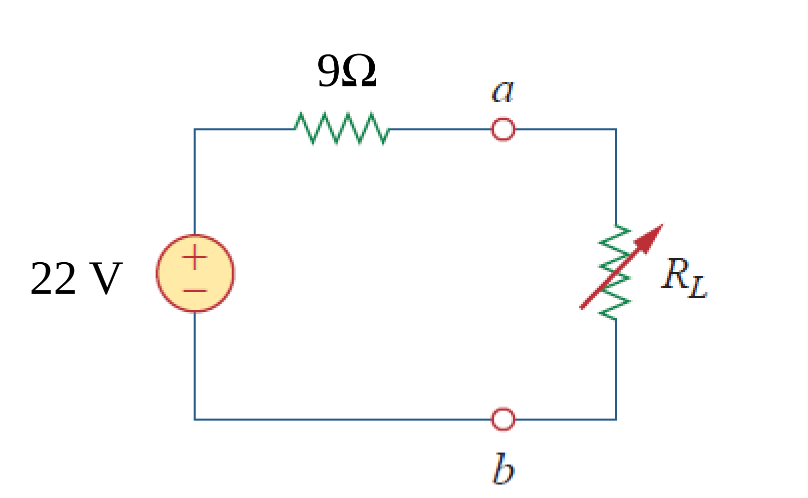
$$8V + 4\Omega \cdot 2A + 3\Omega \cdot 2A - V_{th} = 0$$

$$V_{th} = 22V$$

Massimo trasferimento di potenza

Soluzione (continua)

Il circuito equivalente alla Thevenin è quello in figura



Il massimo trasferimento di potenza si ha quando $R_L = R_{\mathrm{Th}} = 9\ \Omega$

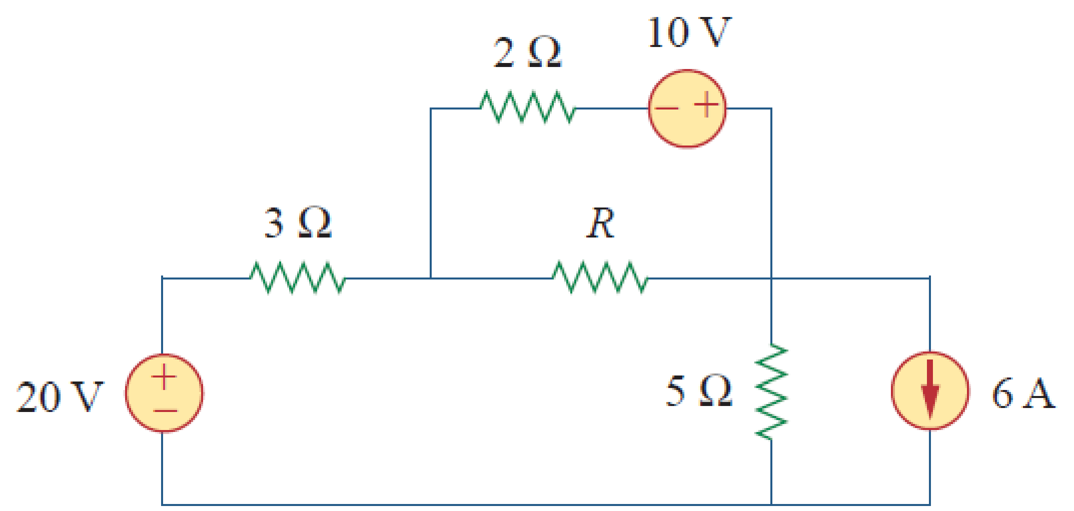
In questo caso la potenza trasferita al carico sarà

$$p_{\max} = \frac{V_{\mathrm{Th}}^2}{4R_L} = \frac{22^2}{4 \times 9} = 13.44\ \mathrm{W}$$

Massimo trasferimento di potenza

Esercizio

Determinare la massima potenza che può essere trasferita al resistore R nel circuito in figura

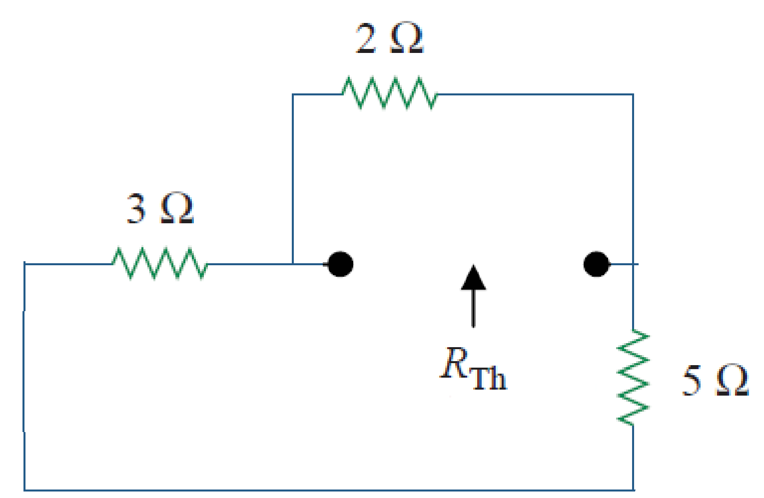


Massimo trasferimento di potenza

Soluzione

Troviamo l'equivalente alla Thevenin del circuito ai capi del resistore R

Per trovare R_{TH} spegniamo tutti i generatori



$$R_{Th} = 2 \| (3+5) = 2 \| 8 = \underline{\mathbf{1.6\ ohm}}$$

Massimo trasferimento di potenza

Soluzione

Possiamo trasformare il generatore reale di corrente in uno di tensione e scrivere la KVL per la maglia esterna

$$20V - V_1 - V_2 + 10V - V_3 + 30V = 0$$

$$20V - I \cdot 3\Omega - I \cdot 2\Omega + 10V - I \cdot 5\Omega + 30V = 0$$

$$I = \frac{60V}{10\Omega} = 6A$$

Per trovare V_{TH} possiamo usare la KVL

$$V_{Th} - V_2 + 10V = 0$$

$$V_{Th} - I \cdot 2\Omega + 10V = 0$$

$$V_{Th} - 6A \cdot 2\Omega + 10V = 0$$

$$V_{Th} = 2V$$