Elettrotecnica-A

Parte 2°

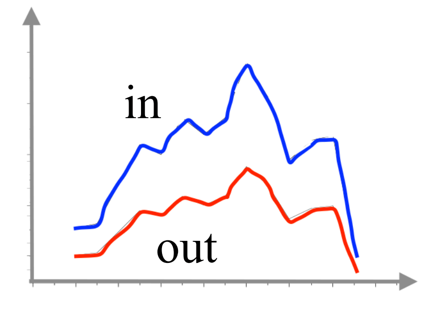
Analisi in Regime Permanente Sinusoidale

Prof. Pietro Burrascano

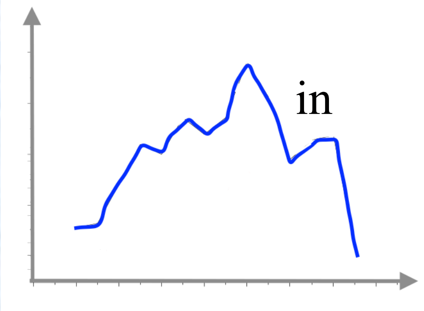
Polo Scientifico Didattico di Terni - University of Perugia

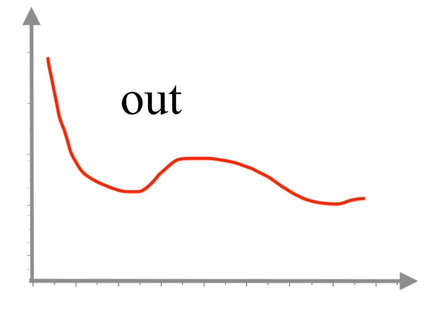
Perugia - Italy

- Sistemi LTI senza memoria: uscita proporzionale all'ingresso

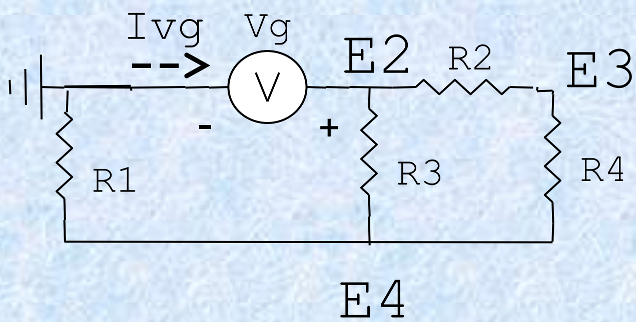


- Sistemi LTI con memoria: risposta NON proporzionale all'eccitazione





Sistemi LTI senza memoria: verifico con esempio che l'uscita è proporzionale all'ingresso



$$\begin{bmatrix} (G_2+G_3) & -G_2 & -G_3 \\ -G_2 & (G_2+G_4) & -G_4 \\ -G_3 & -G_4 & (G_1+G_3+G_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{vg} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

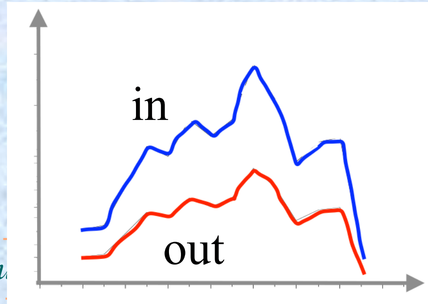
$E_2 = V_g$; $\quad G_2 = G_3 = G_4 = 1$; $\quad I_{vg}$ non di interesse

$$\begin{bmatrix} (G_2+G_3) & -G_2 & -G_3 \\ -1 & (1+1) & -1 \\ -1 & -1 & (1+1+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_g \\ E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{vg} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

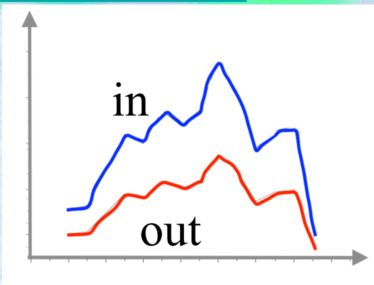
dalla seconda e terza equazione ho :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_3 \\ E_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_g \\ V_g \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} E_3 = \frac{4}{5} V_g \\ E_4 = \frac{3}{5} V_g \end{matrix}$$

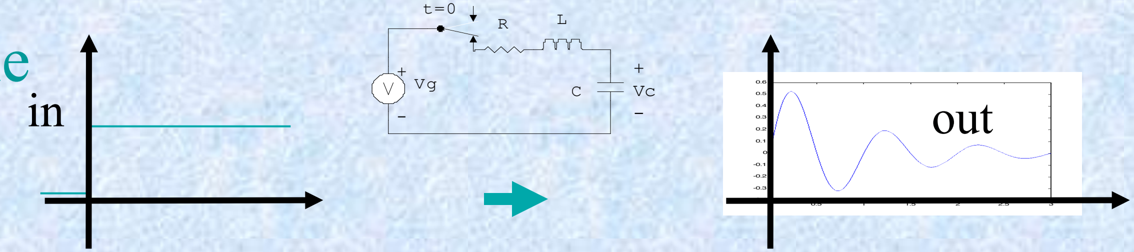
Qualunque sia l'andamento di Vg(t) l'andamento di ogni grandezza elettrica nel circuito senza memoria è proporzionale a Vg(t)



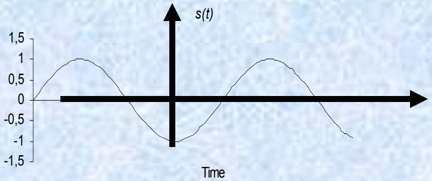
- Sistemi LTI senza memoria: uscita proporzionale a ingr

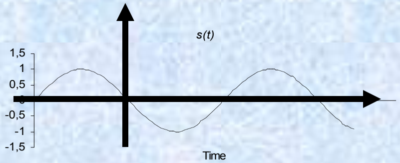


- Sistemi LTI con memoria: risposta NON proporzionale all' eccitazione



Se l' eccitazione al sistema LTI <u>con memoria</u> è sinusoidale anche qualunque risposta sarà sinusoidale con pari frequenza





- Ciascuna uscita sarà caratterizzata da un particolare valore di ampiezza e fase della sinusoide

VERIFICA TRAMITE ESEMPI

Obiettivo degli esempi:

- Verificare su esempi elementari che la risposta di un circuito LTI ad una eccitazione sinusoidale è anch'essa sinusoidale

Metodo:

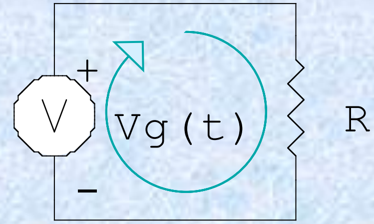
- Verifico ricavando tensione e corrente nel tempo ai capi di un resistore, un induttore ed un condensatore

ESEMPIO: il resistore

$$V_g(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$V_r(t) = V_g(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

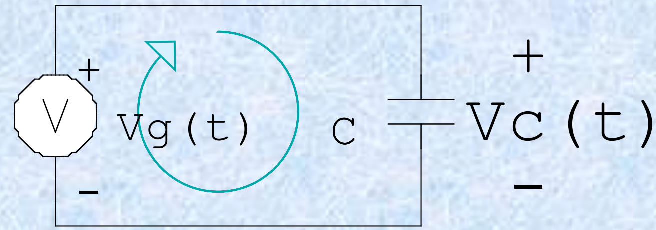
$$I_r(t) = \frac{V_r(t)}{R} = \frac{A}{R}\cos(\omega_0 t + \varphi)$$



La corrente $I_r(t)$ è sinusoidale con stessa pulsazione della tensione di eccitazione; ha ampiezza differente e stessa fase iniziale

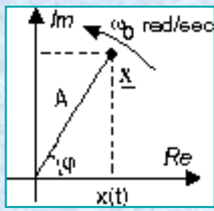
ESEMPIO: condensatore

$$V_g(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$



$$V_c(t) = V_g(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) =$$

$$= \frac{A}{2}\left[e^{j(\omega_0 t+\varphi)} + e^{-j(\omega_0 t+\varphi)}\right]$$



j: sfasamento di π/2

anticipo ritardo

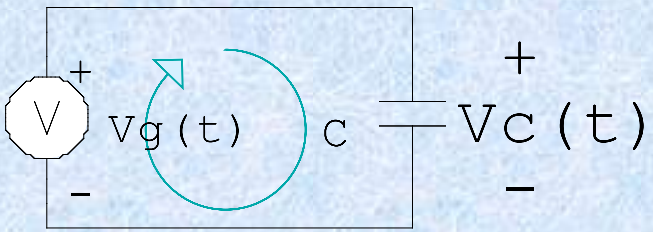
$$j = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$I_c(t) = C\frac{\partial V_c(t)}{\partial t} = C\left[\frac{A}{2}e^{j(\omega_0 t+\varphi)}j\omega_0 + \frac{A}{2}e^{-j(\omega_0 t+\varphi)}(-j\omega_0)\right] =$$

$$= \frac{A\omega_0 C}{2}\left[e^{j\left(\omega_0 t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)} + e^{-j\left(\omega_0 t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}\right] = A\omega_0 C\cos\left(\omega_0 t+\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$V_c(t) = V_g(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$I_c(t) = A\omega_0 C\cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

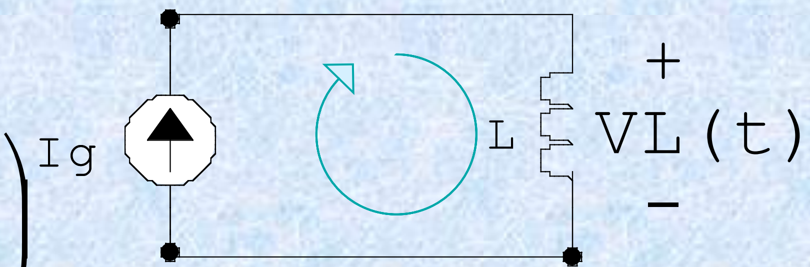


- La corrente $I_c(t)$ è sinusoidale con stessa pulsazione della tensione di eccitazione; ha ampiezza modificata di $\omega_0 C$ e fase iniziale aumentata di $\pi/2$

ESEMPIO: induttore

$$I_L(t) = I_g(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$V_L(t) = A\omega_0 L\cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$



- La tensione $V_L(t)$ è sinusoidale con stessa pulsazione della corrente di eccitazione; ha ampiezza modificata di $\omega_0 L$ e fase iniziale aumentata di $\pi/2$

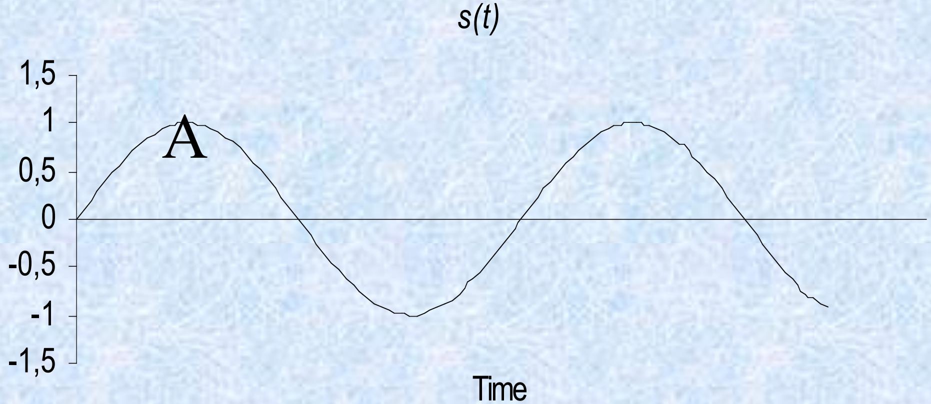
Se l'eccitazione al sistema LTI è sinusoidale qualunque altra grandezza elettrica nel circuito sarà sinusoidale (stessa frequenza)

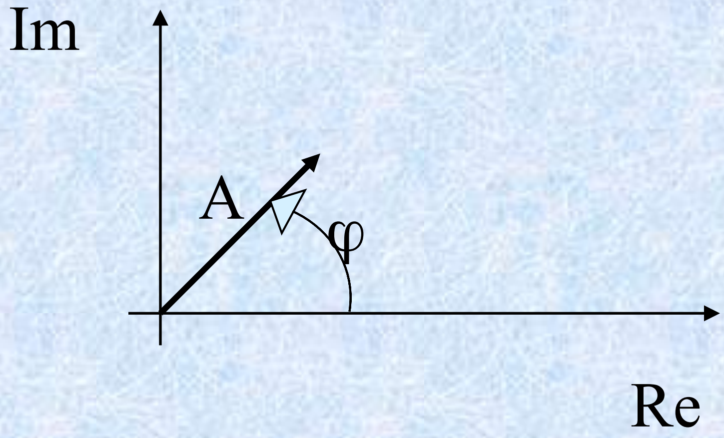
- Sono noti gli **andamenti** di tutte le grandezze in gioco
- Per risolvere il circuito **devo solamente ricavare ampiezza e fase** di ciascuna grandezza elettrica

METODO DEI FASORI

Il concetto di Fasore

- Corrispondenza biunivoca fra sinusoidi DELLA STESSA FREQUENZA e punti del piano complesso.
- FASORE associato ad una sinusoide è il numero complesso per cui:
  - >Ampiezza e Fase del numero complesso coincidono con
  - >Ampiezza e Fase Iniziale della sinusoide





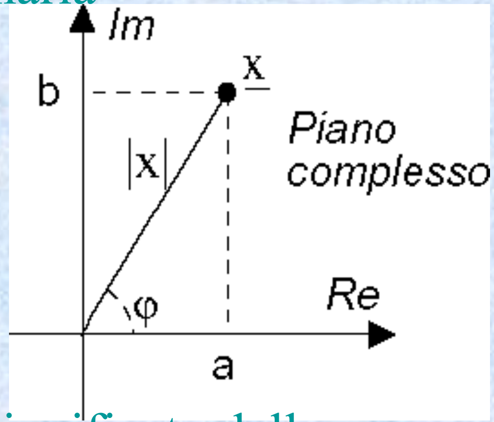
$$s(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad Ae^{j\varphi}$$

Andamento nel tempo | Corrispondente fasore

Numeri complessi: un richiamo

- Numero complesso $\overline{x}$ è costituito da una coppia di reali a e b che ne rappresentano, rispettivamente, parte reale ed immaginaria

$$\overline{x} = a + jb \qquad \overline{x} = |x| e^{j\varphi}$$



- Un numero complesso è rappresentabile in un piano cartesiano (piano complesso)
- La rappresentazione sul piano complesso chiarisce il significato della espressione alternativa del numero complesso in termini di Modulo e Fase, utile perché consente di esprimere facilmente il calcolo del prodotto fra numeri complessi o la potenza di un complesso

$$\overline{x_3} = \overline{x_1} * \overline{x_2} = |x_1| e^{j\varphi_1} * |x_2| e^{j\varphi_2} = |x_1||x_2| e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$|x_3| = |x_1||x_2| \quad ; \quad \varphi_3 = (\varphi_1 + \varphi_2)$$

Numeri complessi: un richiamo <segue>

$da\ \bar{x} = a + jb$ ottengo per modulo e fase: $|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $Arg[x] = \tan^{-1}\left(\mathrm{Im}/\mathrm{Re}\right)$

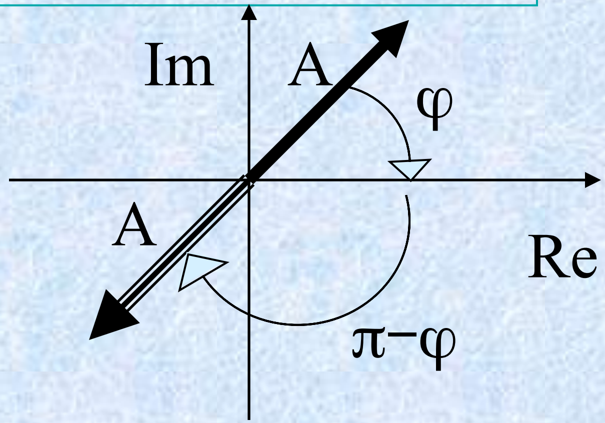
$$\bar{x} = \sqrt{a^2 + b^2}\, e^{j\tan^{-1}\left(\mathrm{Im}/\mathrm{Re}\right)}$$

$da\ \bar{x} = Me^{j\varphi}$ ottengo per Re ed Im: $a = M\cos(\varphi); b = M\sin(\varphi)$

$$\bar{x} = \underline{M\cos(\varphi)} + j\underline{M\sin(\varphi)}$$

NOTA

- Ambiguità dell'ArcoTangente



Numeri complessi: un richiamo <segue>

- Esponenziale complesso: numero complesso espresso come

$$e^{s} = e^{\alpha \pm j\beta} = e^{\alpha} e^{\pm j\beta} = e^{\alpha}\left[\cos(\beta) \pm j\sin(\beta)\right]$$

- Nel caso particolare in cui $\alpha=0$ (esponenziale complesso di modulo unitario)

$$e^{s} = e^{\pm j\beta} = \left[\cos(\beta) \pm j\sin(\beta)\right]$$

- Da queste si ricavano le relazioni di Eulero, che esprimono le funzioni trigonometriche in funzione degli esponenziali complessi di modulo unitario

$$\cos(\beta) = \frac{e^{j\beta} + e^{-j\beta}}{2} \quad ; \quad \sin(\beta) = \frac{e^{j\beta} - e^{-j\beta}}{2j}$$

- FASORE associato ad una sinusoide è il numero complesso in cui: Ampiezza e Fase del numero complesso coincidono con Ampiezza e Fase Iniziale della sinusoide

FASORI: ESEMPI

Ricavare i fasori associati alle seguenti grandezze

$$a(t) = 10\sin(100t)$$

$$b(t) = 5\cos(50t)$$

$$c(t) = -100\sin(3t + \frac{\pi}{4})$$

$$a(t) = 10\sin(100t) =$$

$$= 10\cos(100t - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \overline{A} = 10e^{-j\frac{\pi}{2}} = (0 - j10)$$

$$b(t) = 5\cos(50t) \Rightarrow \overline{B} = 5e^{j0} = 5$$

$$c(t) = -100\sin(3t + \frac{\pi}{4})$$

$$-1 = e^{-j\pi} \Rightarrow c(t) = e^{-j\pi}100\cos(3t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-j\pi}100e^{-j\frac{\pi}{4}} = 100e^{j\frac{3\pi}{4}} = (-70{,}7 + j70{,}7)$$

FASORI: ESEMPI

Ricavare gli andamenti nel tempo rappresentati dai fasori seguenti

$$\mathrm{A} = 10$$

$$\mathrm{B} = j10$$

$$\mathrm{C} = -j10$$

$$\mathrm{D} = 10 + j10$$

$$\mathrm{E} = 10 - j5$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{10} \Rightarrow 10e^{j0} \Rightarrow a(t) = 10\cos(\omega_0 t)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{j10} = 0 + j10 = 10e^{j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow b(t) = 10\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\mathbf{C} = -\mathbf{j10} = 0 - j10 = 10e^{-j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow c(t) = 10\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{10} + \mathbf{j10} = 10\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} \Rightarrow d(t) = 10\sqrt{2}\cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{4})$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{10} - \mathbf{j5} = \sqrt{125}e^{j\tan^{-1}\left(\frac{-5}{10}\right)} = 11{,}18e^{-j0{,}46} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e(t) = 11{,}18\cos(\omega_0 t - 0{,}46)$$

Il concetto di Fasore <segue>

- Fissata la pulsazione ω_0, la conoscenza del fasore equivale in tutto a quella della corrispondente sinusoide; infatti dalla corrispondenza:

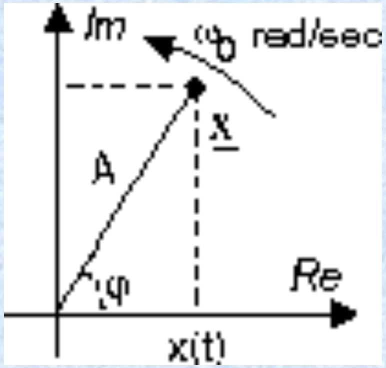
$$s(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad \Rightarrow \qquad \bar{s} = Ae^{j\varphi}$$

si ha:

$$\mathrm{Re}\left[\bar{s}\, e^{j\omega_0 t}\right] = \mathrm{Re}\left[Ae^{j\varphi}\, e^{j\omega_0 t}\right] = A\,\mathrm{Re}\left[e^{j(\omega_0 t+\varphi)}\right] =$$

$$= A\,\mathrm{Re}\left[\cos(\omega_0 t + \varphi) + j\sin(\omega_0 t + \varphi)\right] = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

- Nel piano complesso il termine $\bar{s}\, e^{j\omega_0}$ equivale ad un vettore che ruota a velocità angolare ω_0 partendo dalla posizione definita da A e ϕ.
- La sua parte reale Re[ ] ne rappresenta -graficamente- la proiezione sull'asse reale.



Il concetto di Fasore <segue>

- In modo equivalente, sempre fissata la pulsazione ω_0, dalla conoscenza del fasore possiamo ottenere la corrispondente sinusoide secondo la:

$$s(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \Rightarrow \quad \bar{s} = Ae^{j\varphi}$$

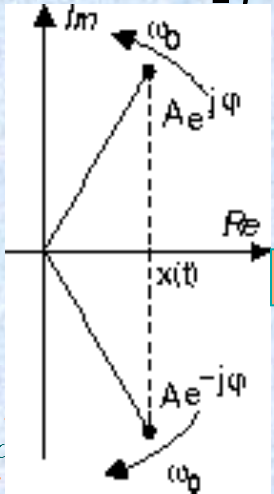
$$\frac{1}{2}\left[\bar{s}\,e^{j\omega_0 t} + \overline{s^*}\,e^{-j\omega_0 t}\right] = \frac{1}{2}\left[Ae^{j\varphi}\;e^{j\omega_0 t} + Ae^{-j\varphi}\;e^{-j\omega_0 t}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[Ae^{j\varphi}\;e^{j\omega_0 t} + Ae^{-j\varphi}\;e^{-j\omega_0 t}\right] = \frac{A}{2}\left[e^{j(\omega_0 t+\varphi)} + e^{-j(\omega_0 t+\varphi)}\right] =$$

$$= \frac{A}{2}\left\{\left[\cos(\omega_0 t + \varphi) + j\sin(\omega_0 t + \varphi)\right] + \left[\cos(\omega_0 t + \varphi) - j\sin(\omega_0 t + \varphi)\right]\right\} =$$

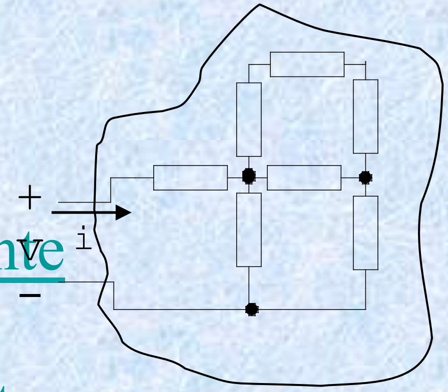
$$= A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

- Nel piano complesso il termine $\left[\bar{s}\,e^{j\omega_0 t} + \overline{s^*}\,e^{-j\omega_0 t}\right]$ equivale a due vettori che ruotano a velocità angolare. $\pm\omega_0$ partendo dalla posizione definita da $A\,e^{\pm j\varphi}$



Il concetto di impedenza

- L'effetto di un bipolo è di vincolare fra loro v(t) ed i(t)



Caso di regime permanente sinusoidale

- IMPEDENZA: rapporto fra i **fasori** di tensione e corrente

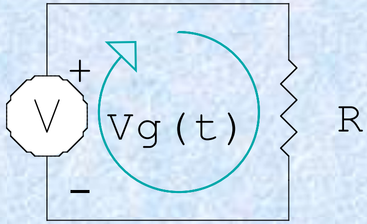
Caso semplice di bipoli costituiti da un singolo componente:

Resistore

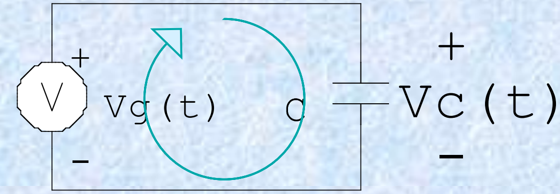
$$V_r(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \overline{V_r} = Ae^{j\varphi}$$

$$I_r(t) = \frac{V_r(t)}{R} = \frac{A}{R}\cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \overline{I_r} = \frac{A}{R}e^{j\varphi}$$

$$Z_r = \frac{\overline{V_r}}{\overline{I_r}} = \frac{Ae^{j\varphi}}{\frac{A}{R}e^{j\varphi}} = R$$



Condensatore

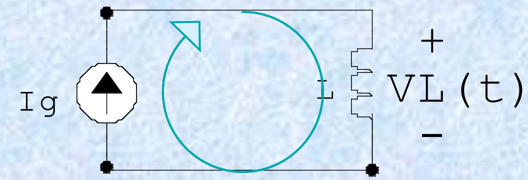


$$V_c(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \overline{V_c} = Ae^{j\varphi}$$

$$I_c(t) = A\omega_0 C\cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \overline{I_c} = A\omega_0 Ce^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$Z_c = \frac{\overline{V_c}}{\overline{I_c}} = \frac{Ae^{j\varphi}}{A\omega_0 Ce^{j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}} = \frac{1}{\omega_0 Ce^{j\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{j\omega_0 C}$$

Induttore



$$I_L(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) \Rightarrow \overline{I_L} = Ae^{j\phi}$$

$$V_L(t) = A\omega_0 L\cos\left(\omega_0 t + \phi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \overline{V_L} = A\omega_0 L e^{j\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$Z_L = \frac{\overline{V_L}}{\overline{I_L}} = \frac{A\omega_0 L e^{j\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)}}{Ae^{j\phi}} = \omega_0 L \underline{e^{j\frac{\pi}{2}}} = j\omega_0 L$$

ANALISI NEL DOMINIO DEI FASORI

- Il valore di impedenza di un bipolo caratterizza il rapporto che esso instaura fra i fasori di tensione e corrente che lo riguardano; possono quindi definirsi RELAZIONI COSTITUTIVE nel dominio dei fasori;
- Le relazioni costitutive, se descritte tramite fasori, sono ALGEBRICHE anche nel caso di elementi con memoria.

$$\overline{V_R} = Z_R * \overline{I_R} = R * \overline{I_R}$$

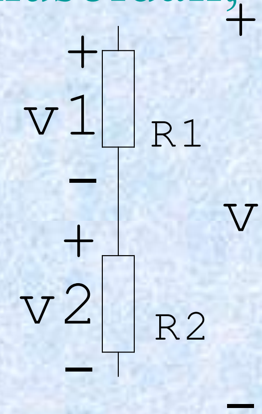
$$\overline{V_C} = Z_C * \overline{I_C} = \frac{1}{j\omega_0 C} * \overline{I_C}$$

$$\overline{V_L} = Z_L * \overline{I_L} = j\omega_0 L * \overline{I_L}$$

Le relazioni di Kirchhoff possono scriversi fra fasori

Per verificare questa affermazione confronto:

- Il fasore della somma (nel tempo) di due tensioni sinusoidali;
- La somma dei fasori delle stesse due tensioni



$$\mathrm{v}_1(\mathrm{t}) = 10\cos(\omega_0 t) \quad ; \mathrm{v}_2(\mathrm{t}) = 10\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

- somma nel tempo

$$\mathrm{v}(\mathrm{t}) = \mathrm{v}_1(\mathrm{t}) + \mathrm{v}_2(\mathrm{t}) = 10\cos(\omega_0 t) + 10\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) =$$

>>>

- somma nel tempo

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) =$$

$$= \frac{10}{2}\left[\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) + \left(e^{j\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-j\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)}\right)\right]$$

$$= \frac{10}{2}\left[e^{j\omega_0 t}\left(1 + e^{j\frac{\pi}{4}}\right) + e^{-j\omega_0 t}\left(1 + e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)\right] =$$

$$= \frac{10}{2}\left[e^{j\omega_0 t} 1{,}847 e^{j0{,}392} + e^{-j\omega_0 t} 1{,}847 e^{-j0{,}392}\right] =$$

$$= \frac{18{,}47}{2}\left[e^{j(\omega_0 t + 0{,}392)} + e^{-j(\omega_0 t + 0{,}392)}\right] =$$

$$= 18{,}47 \cos(\omega_0 t + 0{,}392)$$

- somma dei fasori

$$\overline{V}_1 = 10 \,; \quad \overline{V}_2 = 10e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$\overline{V} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 = 10 + 10e^{j\frac{\pi}{4}} = 10 + \left[7{,}07 + j7{,}07\right] =$$

$$= 17{,}07 + j7{,}07 = 18{,}47e^{j0{,}3926}$$

cui corrisponde, nel tempo

$$v(t) = 18{,}47\cos\left(\omega_0 t + 0{,}3926\right)$$

Il <u>fasore della somma nel tempo</u> di due tensioni sinusoidali <u>corrisponde</u> alla <u>somma dei fasori</u> delle stesse due tensioni

Il fasore della somma nel tempo di due tensioni sinusoidali corrisponde alla somma dei fasori delle stesse due tensioni

Analoga verifica si effettua per la somma di correnti

Le leggi di Kirchhoff sono applicabili DIRETTAMENTE nel dominio dei fasori

Nel dominio dei fasori sono:

- valide le relazioni costitutive degli elementi ed
- applicabili le leggi di Kirchhoff

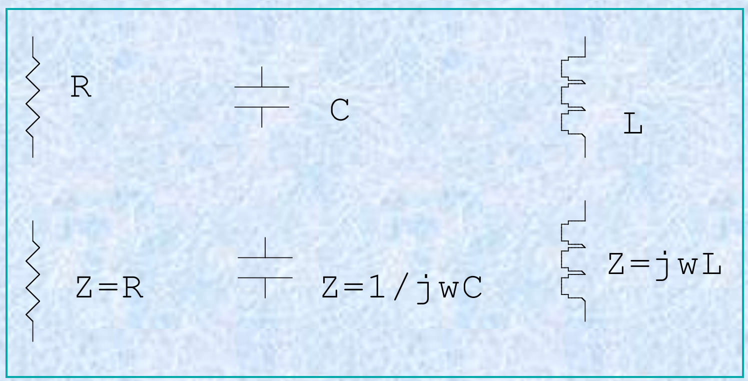
Può quindi definirsi un

CIRCUITO SIMBOLICO

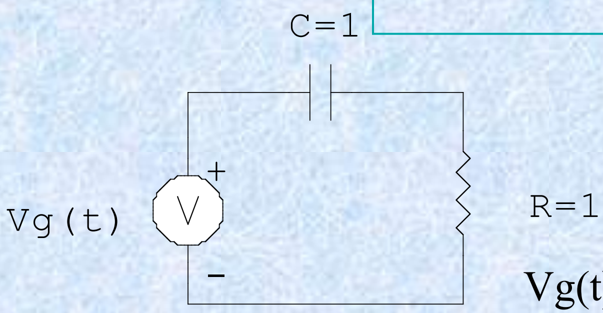
- corrispondente al circuito nel tempo
- con stesso GRAFO del circuito nel tempo
- caratterizzato da fasori di tensione e corrente
- con componenti definiti dalla propria impedenza

tempo

fasori

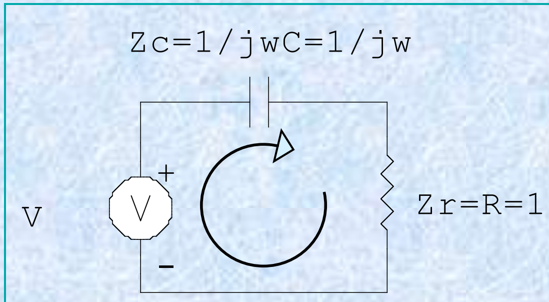


ESEMPIO



Vg(t)=2 sin(2t)

Determinare $V_r(t)$ tramite metodo dei fasori



circuito simbolic

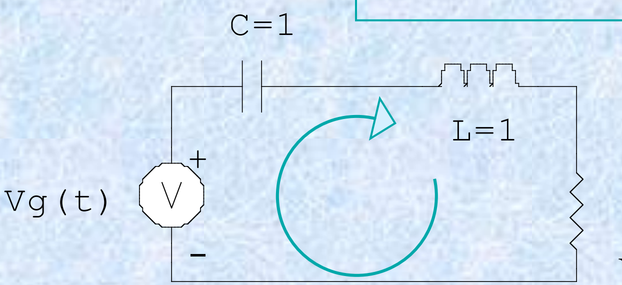
$$\omega_0 = 2; \frac{1}{j\omega_0 C} = \frac{1}{j2}; \quad V_g = 2e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad \Rightarrow$$

$$\overline{\mathrm{v}}_g = (Z_C + Z_R) I_m = \left(\frac{1}{j\omega C} + R\right) I_m \Rightarrow I_m = \frac{1}{\left(\frac{1}{j\omega C} + R\right)} \overline{\mathrm{v}}_g$$

$$\overline{\mathrm{v}}_R = R I_m = \frac{R}{\left(\frac{1}{j\omega C} + R\right)} \overline{\mathrm{v}}_g = \frac{1}{1 + \frac{1}{j2}} 2e^{-j\frac{\pi}{2}} = \ldots = 1{,}7889 e^{-j1{,}107}$$

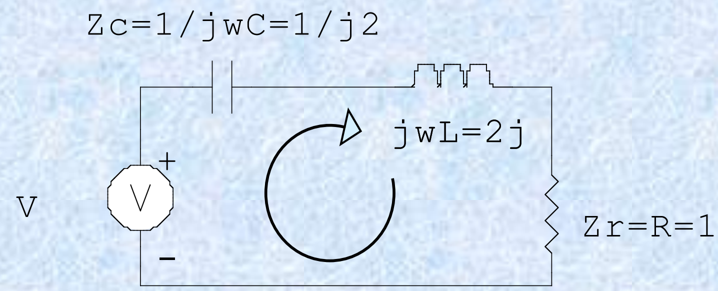
$$\boxed{\mathrm{v}_r(t) = 1{,}7889 \cos(2t - 1{,}107)}$$

ESEMPIO



Vg(t)= cos (2t)

Determinare la i(t) di maglia tramite metodo dei fasori



circuito simbolico

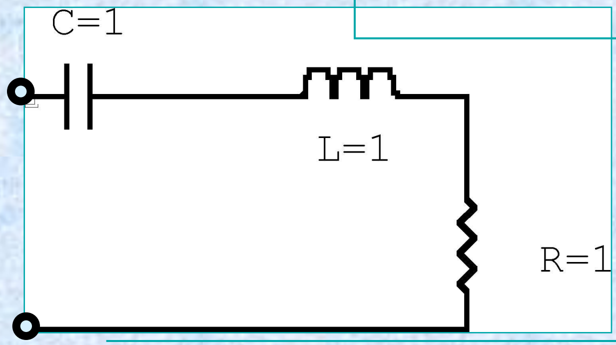
$$\omega_0 = 2; V_g = 1; Z_r = 1; Z_l = 2j; Z_c = \frac{1}{j\omega_0 C} = \frac{1}{j2};$$

$$\overline{\mathrm{v}}_{\mathrm{g}} = (Z_C + Z_L + Z_R) I_m = \left(\frac{1}{j\omega C} + j\omega L + R \right) I_m \Rightarrow$$

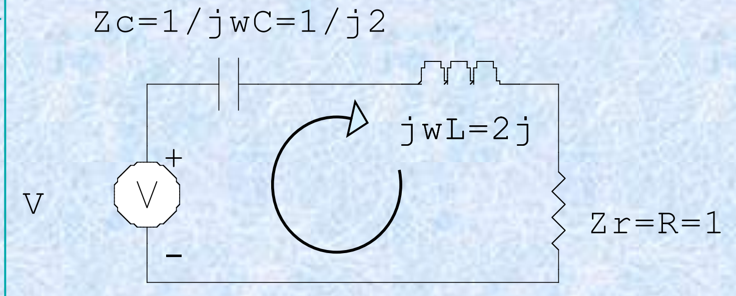
$$\Rightarrow I_m = \frac{1}{\left(\frac{1}{j\omega C} + j\omega L + R \right)} \overline{\mathrm{v}}_{\mathrm{g}} = \frac{1}{1 + j2 - j0{,}5} = \frac{1}{1 + j1{,}5} = 0{,}554 e^{-j0{,}983}$$

$$\boxed{\mathrm{i}(t) = 0{,}554 \cos(2t - 0{,}983)}$$

ESEMPIO



Calcolare l' impedenza offerta, per $\omega_0=2$, dalla serie dei tre elementi in figura

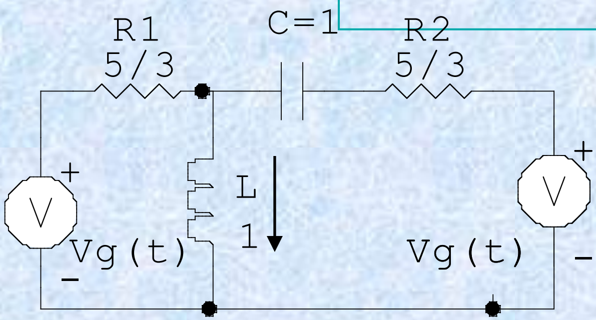


Per calcolare V/I impongo una delle due grandezze, per $\omega_0=2$, e calcolo l' altra. Impongo la tensione Vg(t)= cos (2t) tramite un generatore, ed utilizzando i risultati dell' esercizio precedente ho: $\overline{I_m} = 0{,}554e^{-j0{,}983}$

SEGUE QUINDI PER L' IMPEDENZA

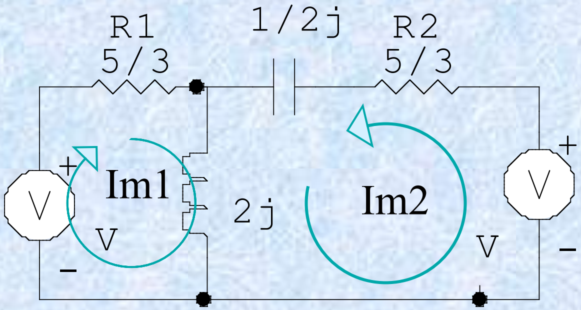
$$\overline{Z} = \frac{\overline{V_m}}{\overline{I_m}} = \frac{1}{0{,}554e^{-j0{,}983}} = 1{,}805e^{+j0{,}983}$$

ESEMPIO



Determinare $i_L(t)$ tramite metodo dei fasori

Vg(t)=(2/3)cos (2t-π/3)



$$\begin{bmatrix} \left(\frac{5}{3}+2j\right) & 2j \\ 2j & \left(\frac{5}{3}+2j+\frac{1}{2j}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{Im1} \\ \mathrm{Im2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Vg \\ Vg \end{bmatrix}$$

Risolvendo il sistema base maglie

$$\mathrm{Im1} = -0{,}1153 - j0{,}1205 = 0{,}166e^{-j2{,}33}$$

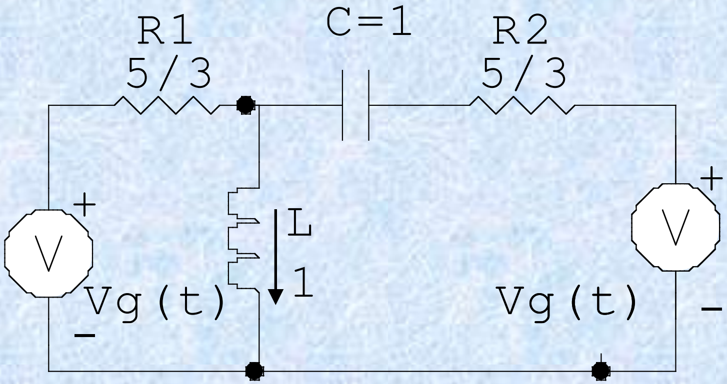
$$\mathrm{Im2} = -7{,}269*10^{-2} - j0{,}14 = 0{,}157e^{-j2{,}05}$$

$$\mathrm{I_L} = \mathrm{Im1} + \mathrm{Im2} = -0{,}188 - j0{,}263 = 0{,}323e^{-j2{,}1918}$$

Da cui, nel tempo

$$\mathrm{i_L}(t) = 0{,}323\cos(2t - 2{,}1918)$$

ESERCIZIO IN AULA



$V_g(t)=(2/3)\cos(2t-\pi/3)$

Determinare, per il circuito dell'esercizio precedente, ancora la $i_L(t)$ tramite metodo dei fasori

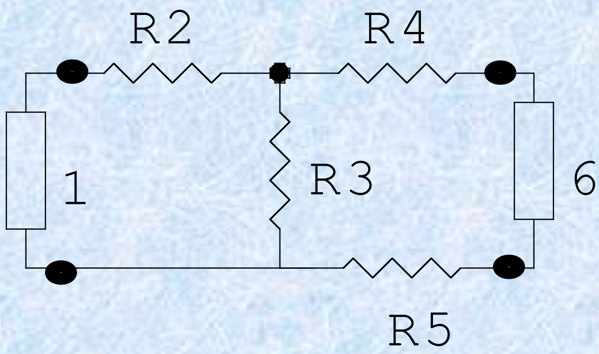
SCRIVENDO IL SISTEMA SU BASE NODI

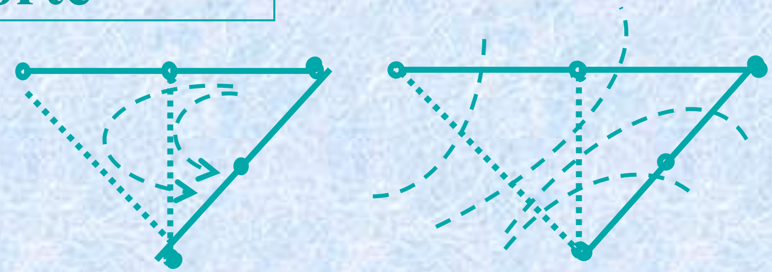
Scegliere accuratamente il nodo di riferimento; confrontare la complessità di risoluzione fra questa impostazione e quella base maglie

RAPPRESENTAZIONI ESTERNE

- Non sempre è di interesse conoscere TUTTE le grandezze elettriche di un circuito: rappresentazione alla/e porte
- Lo stato elettrico di una porta è caratterizzato completamente dalla conoscenza di due grandezze elettriche *(tipicamente tensione e corrente)*
- Un circuito accessibile tramite N porte instaura una relazione fra le sue 2N grandezze di porta.
- Se il circuito è lineare e permanente, esso instaura un legame rappresentato da N equazioni lineari ed omogenee a coefficienti costanti

ESEMPIO: caso 2 porte





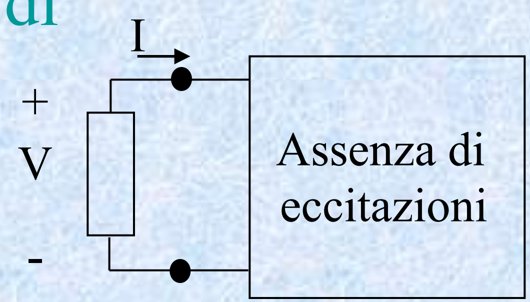
- R=6 rami=> 12 grandezze elettriche incognite;
- 10 equazioni a legare tali 12 grandezze
  - 6-2= 4 relazioni costitutive *(N=2 porte => bipoli 1 e 6 INDETERMINATI)*.
  - 6 equazioni topologiche (2 maglie e 4 tagli fondamentali)

Eliminando le 8 grandezze elettriche interne rimangono 2 equazioni nelle quattro grandezze di porta

- Caratterizzazione di circuito accessibile ad una porta (bipolo). Possibili 2 casi:
  - Assenza di eccitazioni interne
    - impedenza; ammettenza
  - Presenza di eccitazioni interne
    - metodi di estrazione dei generatori: teoremi di sostituzione, Thevenin, Norton

Assenza di eccitazioni interne

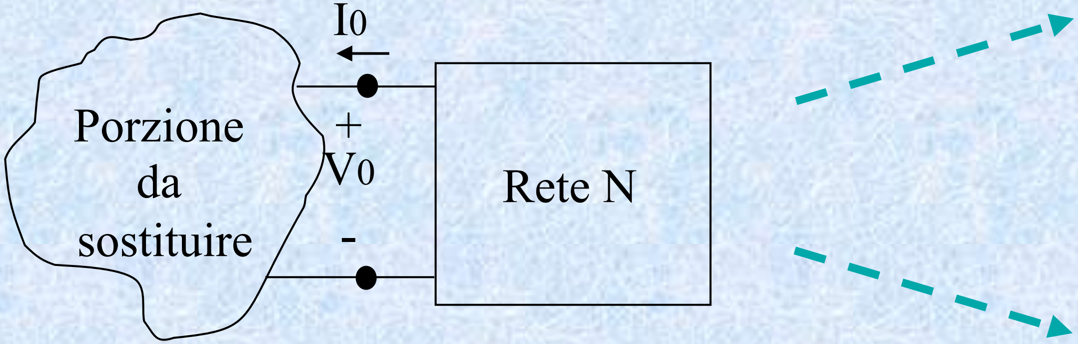
- 1 equazione omogenea nelle due grandezze di porta $V_{PORTA} - Z\, I_{PORTA} = 0$

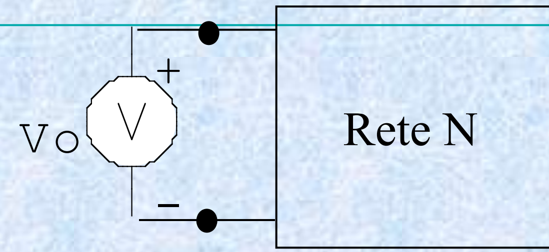


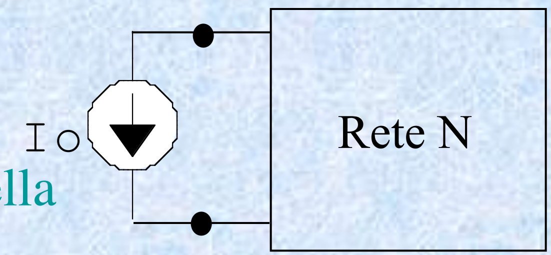
- Bipolo caratterizzato esternamente dai noti rapporti $\dfrac{\overline{V_{PORTA}}}{\overline{I_{PORTA}}} = \overline{Z}\,; \quad \dfrac{\overline{I_{PORTA}}}{\overline{V_{PORTA}}} = \overline{Y}$

Teorema di sostituzione

In una rete qualsiasi *(eventualmente contenente eccitazioni)*, una sua porzione, accessibile da una porta, può sostituirsi con un generatore indipendente (tensione o corrente) che imprime la corrispondente grandezza elettrica di porta. *La scelta del generatore è usualmente indifferente, tranne quando la rete "N" NON SOSTITUITA appare come un generatore.*

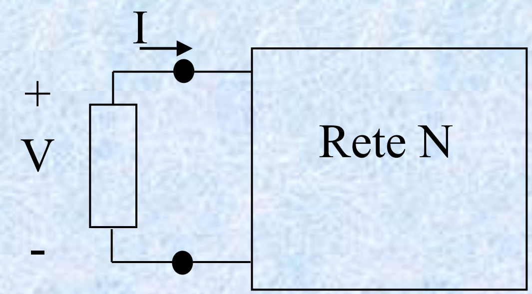






- La sostituzione ha validità limitata all'effetto della porzione sostituita sulla rete N;
- La sostituzione ha validità limitata al particolare circuito complessivo;

Dimostrazione

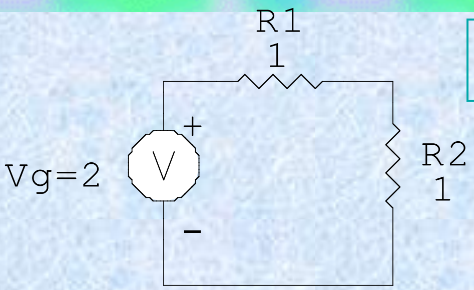


- Sostituiamo con un bipolo generico;
- La rete complessiva risultante consta di:
  - R rami (dei quali uno indeterminato)
  - 2R variabili;
  - R equazioni topologiche;
  - R-1 relazioni costitutive

- Eliminando le 2(R-1) grandezze interne alla rete N rimane l'eq. NON omogenea:

$$\alpha V_{BIPOLO} + \beta\, I_{BIPOLO} = \begin{pmatrix} \textit{effetto dei} \\ \textit{Generatori} \end{pmatrix}$$

- Se vincolo la V_{BIPOLO} o la I_{BIPOLO} tramite generatore, il rispetto della relazione sopra vincola al rispetto anche dell'altra grandezza.
- CASI PARTICOLARI: se N si presenta come generatore indipendente, per evitare indeterminazioni devo sostituire con un generatore dell'altro tipo.



ESEMPIO

Applicare il teorema di sostituzione alla serie Vg R1 e verificare l'equivalenza

$$\left.\overline{V_g} = \overline{V_{R1}} + \overline{V_{R2}}\right\} \textit{maglia fondamentale}$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{I_g} &= \overline{I_1} \\ \overline{I_2} &= \overline{I_1}\end{aligned}\right\} \textit{tagli fondamentali}$$

$$\left.\begin{aligned}\overline{V_{R1}} &= R\overline{I_1} \\ \overline{V_g} &= 2\end{aligned}\right\} \textit{relazioni costitutive}$$

$$\overline{V_{R2}} \quad \textit{INDETERMINATO}$$

- Sostituendo nella prima ed eliminando le grandezze interne Vg, Ig, i1, v1 ho:

$$\underbrace{2}_{V_g} = \underbrace{1\, I_{R_1}}_{V_{R_1}} + V_{R_2} = I_{R_2} + V_{R_2} = \underbrace{1\times I_{BIPOLO} + 1\times V_{BIPOLO}}_{\alpha\, V_{BIPOLO} + \beta\, I_{BIPOLO}}$$

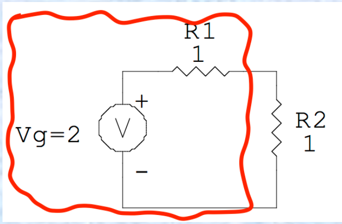
L'equazione $2 = 1\times I_{BIPOLO} + 1\times V_{BIPOLO}$ rappresenta il bipolo sostituito

- Posso risolvere il circuito imponendo il vincolo esterno $V_{R_2} = R_2 \times I_{R_2}$; trovo:

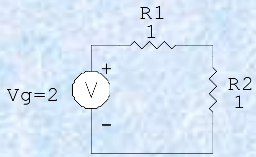
$$2 = I_{BIPOLO} + \underbrace{V_{BIPOLO}}_{V_{R_2} = R_2 \times I_{R_2}} = I_{R_2} + R_2 \times I_{R_2} = 2I_{R_2}$$

quindi

$$I_{R_2} = 1; \quad V_{R_2} = R_2 \times I_{R_2} = 1 \quad ;$$



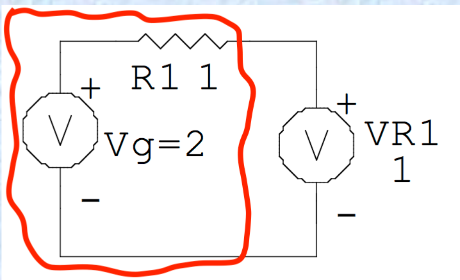
Il bipolo sostituito, se chiuso su R2, vede ai suoi capi $I_{R_2} = 1$; $V_{R_2} = 1$



Segue ESEMPIO

- VERIFICHE: sostituisco al posto di R2 una volta un generatore di corrente ed una un generatore di tensione che impongono il valore trovato ($I_{R_2} = 1 \quad ; \quad V_{R_2} = 1$)

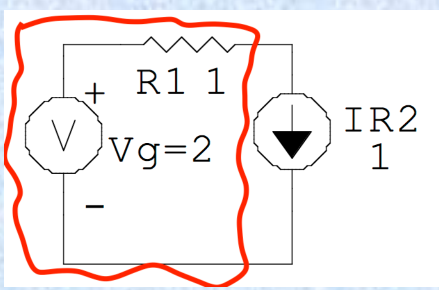
- VERIFICA: sostituzione 1



$$I = \frac{V_g - V_{R_2}}{1} = 1$$

stessa corrente

- VERIFICA: sostituzione 2

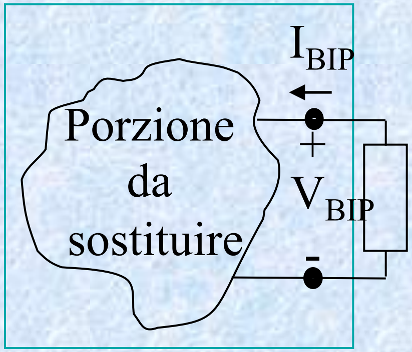


$$V_{R_1} = R_1 I_R = 1$$
$$V_{R_2} = V_g - V_{R_1} = 1$$

stessa tensione

Teoremi di Thevenin e Norton

- La rete generica appare all'esterno caratterizzata dall'equazione:



$$\frac{\alpha}{\begin{pmatrix} effetto\ dei \\ Generatori \end{pmatrix}} V_{BIPOLO} + \frac{\beta}{\begin{pmatrix} effetto\ dei \\ Generatori \end{pmatrix}} I_{BIPOLO} = 1$$

$$\mathrm{cost}_1\, V_{BIPOLO} + \mathrm{cost}_2\, I_{BIPOLO} = 1$$

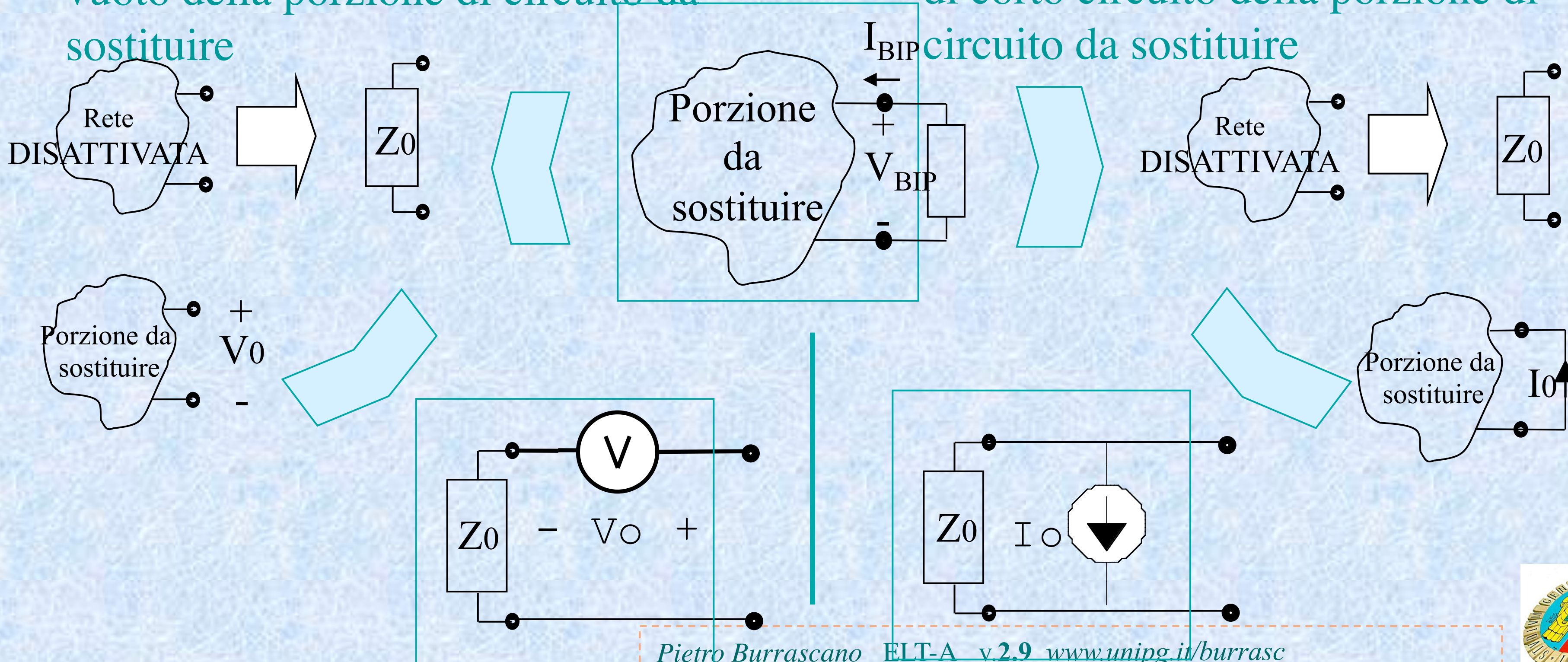
LA RETE GENERICA PUO' ESSERE RAPPRESENTATA TRAMITE **DUE** COSTANTI OPPORTUNE

Teorema di Thevenin | Teorema di Norton

- Una rete accessibile da una porta è equivalente, esternamente alla porta, alla rete stessa in cui siano state DISATTIVATE LE ECCITAZIONI, con

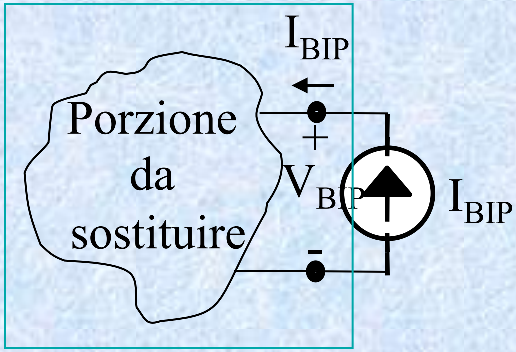
- In SERIE alla porta un GENERATORE DI TENSIONE, che imprima un valore pari alla tensione a vuoto della porzione di circuito da sostituire

- In PARALLELO alla porta un GENERATORE DI CORRENTE, che imprima un valore pari alla corrente di corto circuito della porzione di circuito da sostituire



Dimostrazione: teorema di Thevenin

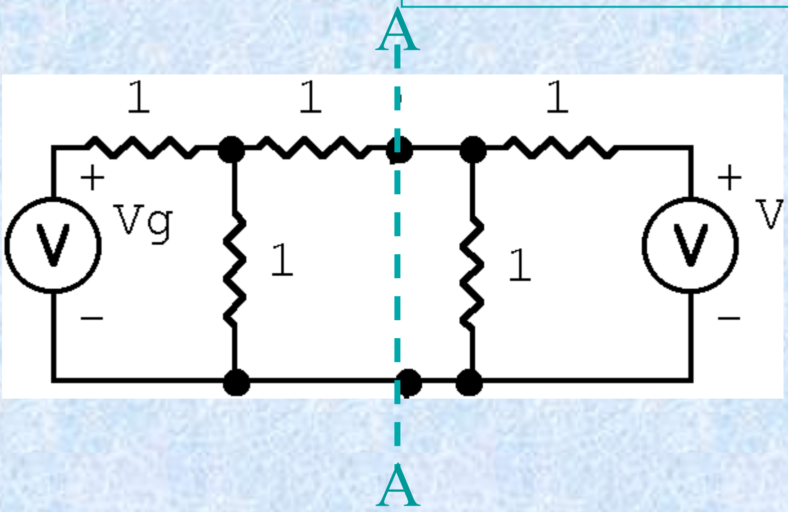
- Tramite teorema di sostituzione e principio di sovrapposizione degli effetti



- Sostituisco al bipolo di chiusura un generatore che vincola la corrente ad I_{BIP}: *effettuo la verifica di equivalenza su V_{BIP}*
- Suddivido le eccitazioni in interne ed esterne *(generatore di corrente)* alla rete da sostituire
  - $V_{BIP}^{(I)}$: presenza di sole cause interne; disattivo I_{BIP}. TENSIONE A VUOTO
  - $V_{BIP}^{(II)}$: presenza di sole cause esterne; è attivo solo I_{BIP}. TENSIONE SULLA RETE DISATTIVATA

- Sovrapposizione degli effetti: tensione totale $V_{BIP}^{(TOT)}=V_{BIP}^{(I)}+V_{BIP}^{(II)}$
  CIRCUITALMENTE: serie di due elementi: generatore e bipolo di impedenza Z_o

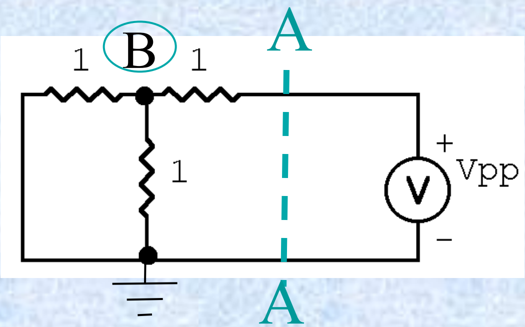
ESEMPIO



Applicare il teorema di Thevenin alla porzione di circuito a sinistra della sezione AA, ed il Teorema di Norton a quella a destra. Verificare l'equivalenza elettrica fra il circuito iniziale e quello finale ottenuto.

$V_g(t)=V(t)=1$

Thevenin Calcolo l'impedenza equivalente alla porta DISATTIVANDO la porzione dei circuito e vincolando la tensione alla porta tramite generatore pilota Vpp, calcolando la corrente che ne consegue



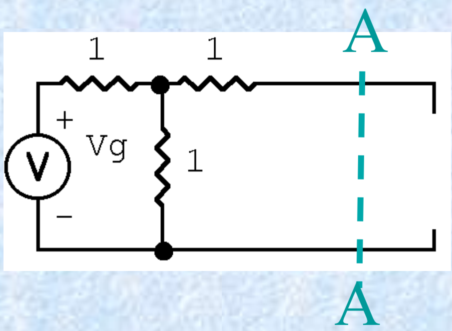
$$E_B\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}\right)-1V_{pp}=0;\ E_B=\frac{V_{pp}}{3};$$

$$I_{pp}=\frac{V_{pp}-E_B}{1}=\frac{2}{3}V_{pp}\Rightarrow Z_{Th}=\frac{V_{pp}}{I_{pp}}=\frac{V_{pp}}{\frac{2}{3}V_{pp}}=\frac{3}{2}$$

>>>

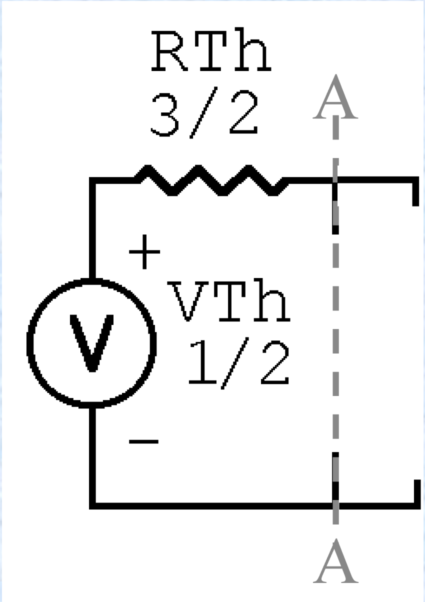
Segue ESEMPIO

Calcolo la tensione equivalente alla porta APRENDO il carico del circuito alla porta



$$V_{Th} = \frac{1}{2}$$

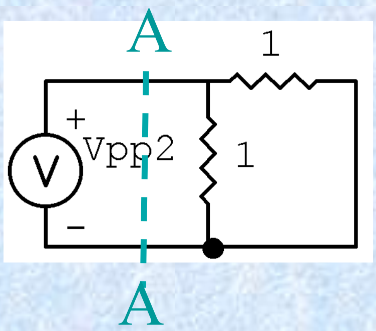
In conclusione il circuito equivalente secondo Thevenin risulta essere



>>>

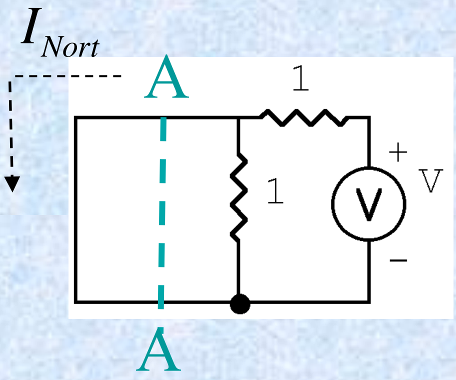
Segue ESEMPIO

Norton



$$Z_{Nort} = \frac{1}{2}$$

Calcolo l' <u>impedenza equivalente</u> alla porta DISATTIVANDO la porzione dei circuito e vincolando la tensione alla porta tramite generatore pilota Vpp2, e calcolando la corrente che ne consegue



Calcolo la <u>corrente equivalente</u> CORTOCIRCUITANDO il carico alla porta.

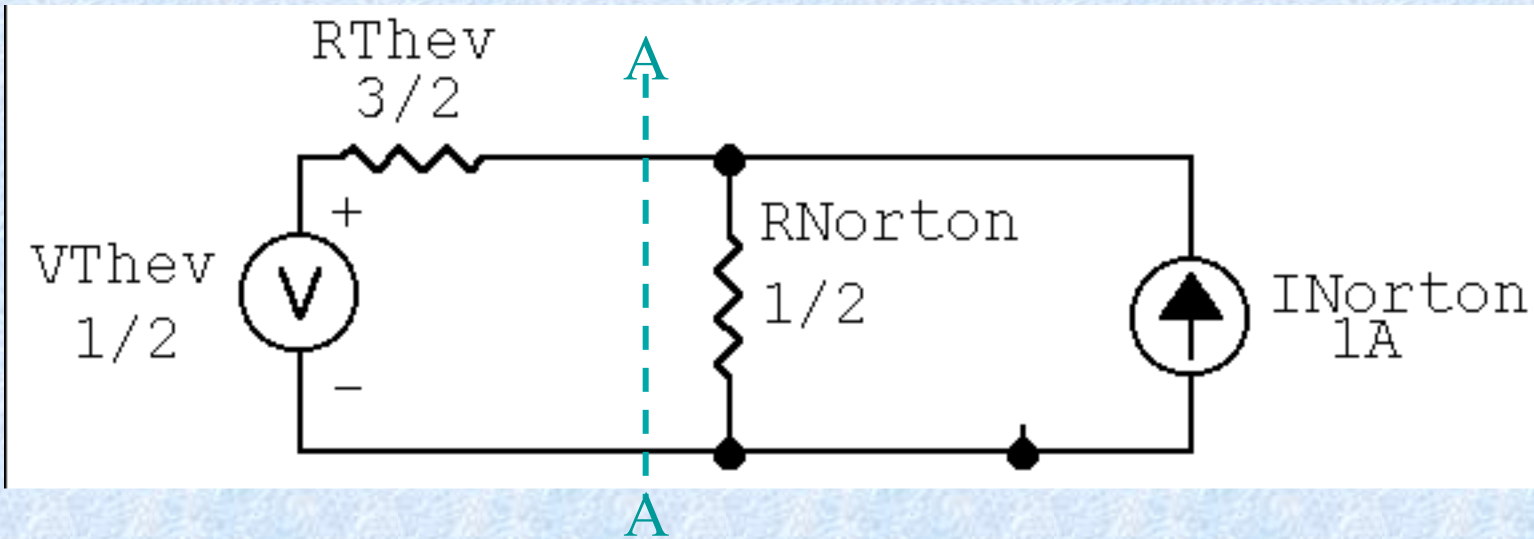
Essendo una delle due resistenze
non pecorsa da corrente (shuntata) a causa del corto circuito, si ha per la corrente equivalente

$$I_{Nort} = \frac{V}{R} = 1$$

>>>

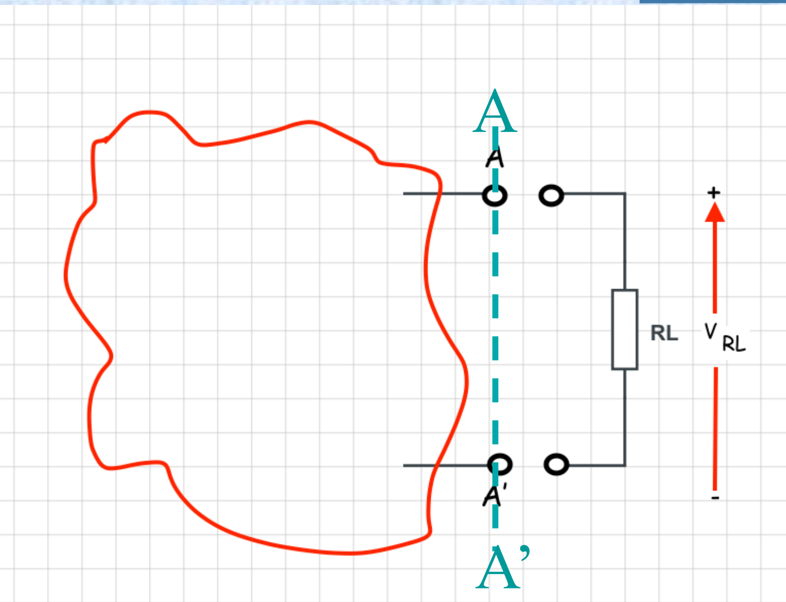
Segue ESEMPIO

Il circuito originario, tenendo conto di entrambe le sostituzioni, diventa così:



Per verificare l'equivalenza fra il circuito originario e quello ottenuto dopo le due sostituzioni, basta analizzare entrambi e calcolare nei due casi tensione e corrente che si instaurano alla sezione AA, unica porzione di circuito presente in entrambe le configurazioni: verificare che V_{AA} ed I_{AA} assumono lo stesso valore ci garantisce della equivalenza.

ESERCIZIO

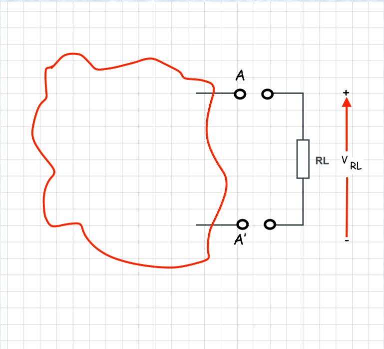


Il circuito di figura, opera in regime permanente sinusoidale a frequenza f0.
E' accessibile SOLO attraverso la coppia di morsetti A-A':

SE RL=RL'= 10 [ohm] misuro VRL'=3.11+j0.837
SE RL=RL''=100 [ohm] misuro VRL''=4.33+j2.5

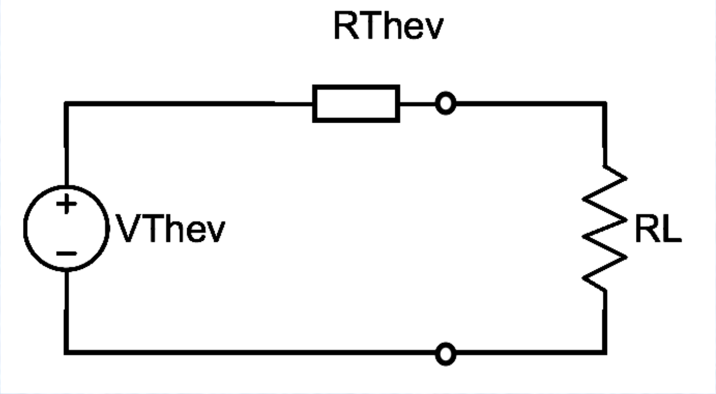
Calcolare il circuito equivalente di Thevenin (a freq. f0)

>>>



Soluzione ESERCIZIO

Il circuito che devo determinare è del tipo:



Regolato dalle equazioni

$$\begin{cases} V_{Th} + \left(Z_{Th} + R_L\right) I = 0 \\ I = {V_{R_L}}\big/{R_L} \end{cases}$$

Per i due valori di RL considerati posso scrivere:

$$\begin{cases} V_{Th} + \left(Z_{Th} + R_{L1}\right) {V_{R_{L1}}}\big/{R_{L1}} = 0 \\ V_{Th} + \left(Z_{Th} + R_{L2}\right) {V_{R_{L2}}}\big/{R_{L2}} = 0 \end{cases}$$

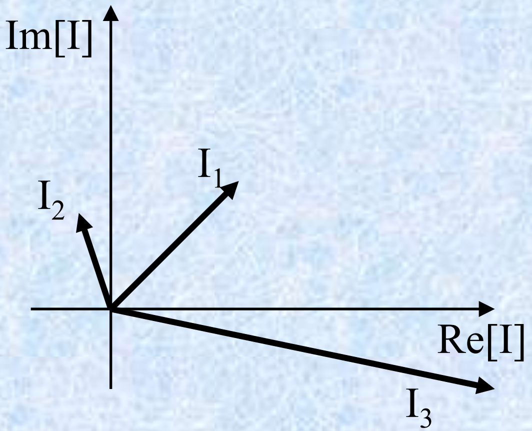
Sistema nel quale sono incognite V_{Th} e Z_{Th} , mentre sono noti R_L e V_{R_L} nei due casi.

Risolvendo ho:

$$\boxed{V_{Th} = \frac{R_{L2} - R_{L1}}{\left(\frac{R_{L2}}{V_{L2}} - \frac{R_{L1}}{V_{L1}}\right)} = 4.33 + j2.5 \qquad ; \qquad Z_{Th} = \left(\frac{V_{Th}}{V_{L1}} - 1\right) R_{L1} = 5.0 + j4.0}$$

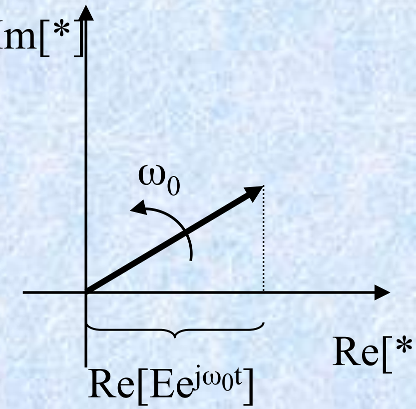
METODO GRAFICO DEI FASORI

❑Fasore ⟷ vettore: interpretazione grafica



- Costruiamo i piani di:
  - correnti;
  - tensioni;
- Possiamo sviluppare un metodo di analisi grafica dei circuiti in regime permanente sinusoidale interpretando graficamente anche:
  - Relazioni costitutive elementi
  - Leggi di Kirchhoff

Interpretazione grafica del passaggio E $\longrightarrow$ e(t)



Per passare dal Fasore "E" ad e(t) occorre inserire l'informazione sulla pulsazione, mancante nel fasore. Consideriamo a tal fine il prodotto fra fasore ed esponenziale complesso $e^{j\omega_0 t}$

$$\overline{E}\, e^{j\omega_0 t} = Ee^{j\varphi} e^{j\omega_0 t} = Ee^{j(\omega_0 t+\varphi)}$$

Il prodotto rappresenta, nel piano complesso, un vettore rotante a velocità angolare ω_0 di modulo |E| e fase iniziale (per t=0) pari a φ

Inoltre osserviamo che: $Ee^{j(\omega_0 t+\varphi)} = E\left[\cos(\omega_0 t+\varphi) + j\sin(\omega_0 t+\varphi)\right]$

$$e(t) = \mathrm{Re}\left[\overline{E}\, e^{j\omega_0 t}\right]$$

e(t)è la proiezione sull'asse reale del vettore rotante

❑ Interpretazione grafica del passaggio E ⟶ e(t)

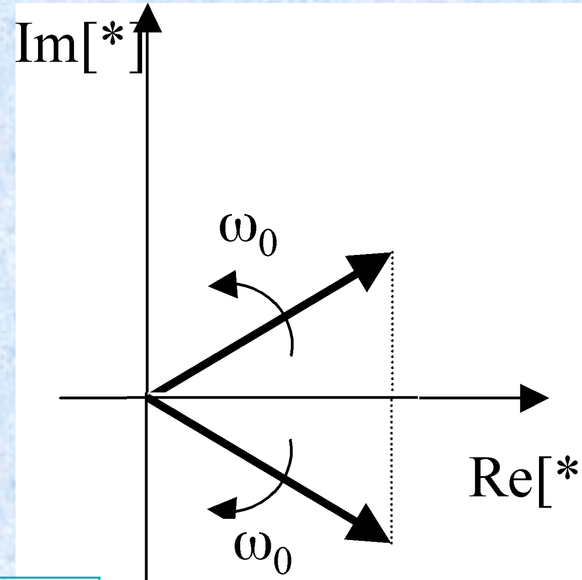
In alternativa, sempre partendo dal prodotto $\overline{E}\, e^{j\omega_0 t}$ osserviamo che:

$$\frac{1}{2}\left[\overline{E}\, e^{j\omega_0 t} + \overline{E}^* e^{-j\omega_0 t}\right] = \frac{1}{2}\left[E e^{j\varphi} e^{j\omega_0 t} + E e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 t}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[E e^{j(\omega_0 t+\varphi)} + E e^{-j(\omega_0 t+\varphi)}\right] =$$

$$= \frac{E}{2}\left[\left(\cos(\omega_0 t+\varphi) + j\sin(\omega_0 t+\varphi)\right) + \left(\cos(\omega_0 t+\varphi) - j\sin(\omega_0 t+\varphi)\right)\right] =$$

$$= \frac{E}{2}\left[2\cos(\omega_0 t+\varphi)\right] = E\cos(\omega_0 t+\varphi)$$



e(t): semisomma dei vettori rotanti complessi e coniugati associati al prodotto $\overline{E}\, e^{j\omega_0 t}$

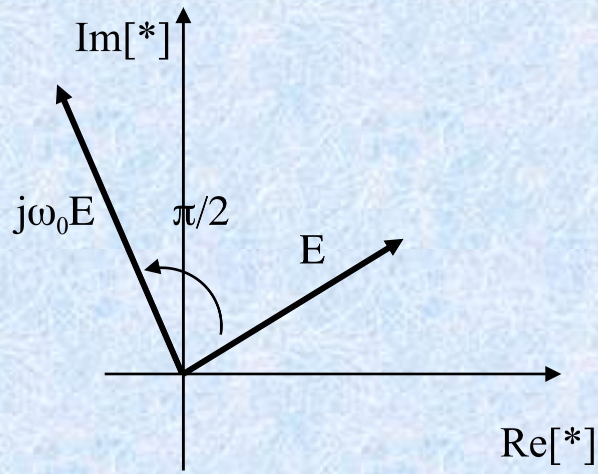
$$e(t) = \frac{1}{2}\left[\overline{E}\, e^{j\omega_0 t} + \overline{E}^* e^{-j\omega_0 t}\right]$$

Interpretazione grafica derivazione nel tempo

$$\frac{d\,e(t)}{d\,t}=\frac{d\left[\cos(\omega_0 t+\varphi)\right]}{d\,t}=\frac{d\left[\mathrm{Re}\left[\,\overline{E}\,e^{j\omega_0 t}\right]\right]}{d\,t}=$$

$$=\mathrm{Re}\left[\frac{d\left[\overline{E}\,e^{j\omega_0 t}\right]}{d\,t}\right]=\mathrm{Re}\left[j\omega_0\,\overline{E}\,e^{j\omega_0 t}\right]=$$

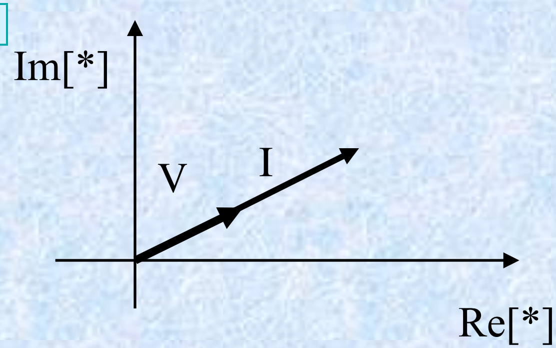
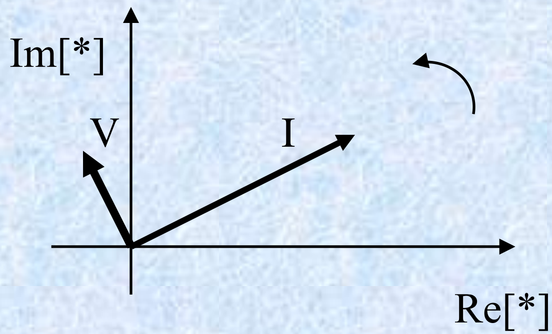
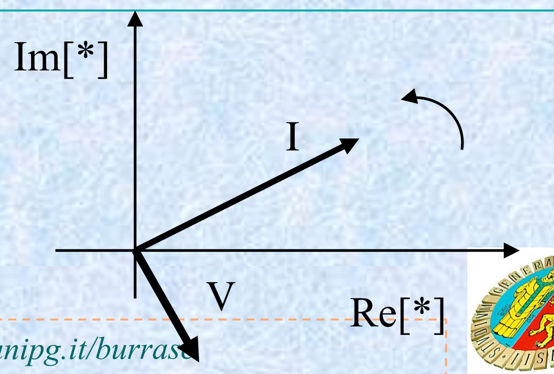
$$=\mathrm{Re}\left[e^{j\left(\pi/2\right)}\omega_0\,\overline{E}\,e^{j\omega_0 t}\right]=\mathrm{Re}\left[\left(\overline{\omega_0\,\overline{E}e^{j\left(\pi/2\right)}}\right)e^{j\omega_0 t}\right]=$$



Il fasore della derivata di e(t) ha, rispetto al fasore di partenza

- **Modulo moltiplicato per ω_0**
- **Fase aumentata di $\pi/2$**

Interpretazione grafica delle relazioni costitutive elementi

elemento	relazioni costitutive: tempo	relazioni costitutive: fasori	interpr. grafica
resistore	$v(t) = R\, i(t)$	$\bar{V} = R\, \bar{I}$	
induttore	$v(t) = L \dfrac{d\, i(t)}{d\, t}$	$\bar{V} = j\omega_0\, L\, \bar{I}$ V in anticipo di fase di π/2 rispetto ad I	
condensatore	$i(t) = C \dfrac{d\, v(t)}{d\, t}$	$\bar{I} = j\omega_0\, C\, \bar{V}$ V in ritardo di fase di π/2 rispetto ad I	

- Interpretazione grafica delle Leggi di Kirchhoff
  - Per l'operatore Re[*] vale la sovrapposizione degli effetti SE i coefficienti peso sono reali
  - Il passaggio fasore→tempo prevede operatore Re[*]

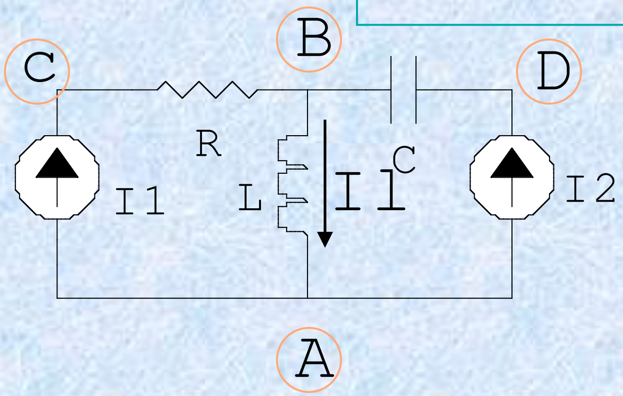
$$e(t) = \mathrm{Re}\left[\overline{E}\ e^{j\omega_0 t}\right]$$

IL FASORE DELLA SOMMA DI PIU' SINUSOIDI <u>ISOFREQUENZIALI</u> E' LA SOMMA DEI FASORI DELLE SINGOLE SINUSOIDI

  - Leggi di Kirchhoff: somme di tensioni-correnti sinusoidali <u>diventano</u> somme di vettori *(fasori dei singoli adddendi sinusoidali)*
  - Leggi di Kirchhoff: impongono somme nulle

I FASORI COINVOLTI DEVONO FORMARE UNA POLIGONALE CHIUSA

ESEMPIO



Determinare tensioni e correnti tramite metodo grafico dei fasori

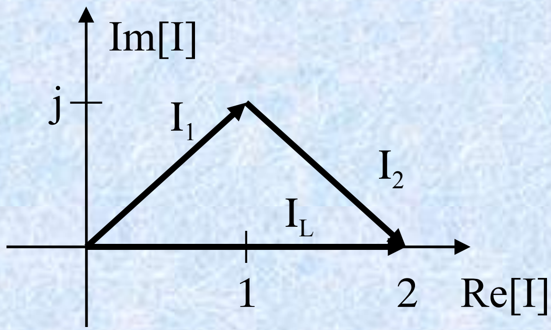
$$i_1(t) = \sqrt{2}\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right); \quad i_2(t) = \sqrt{2}\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right)$$

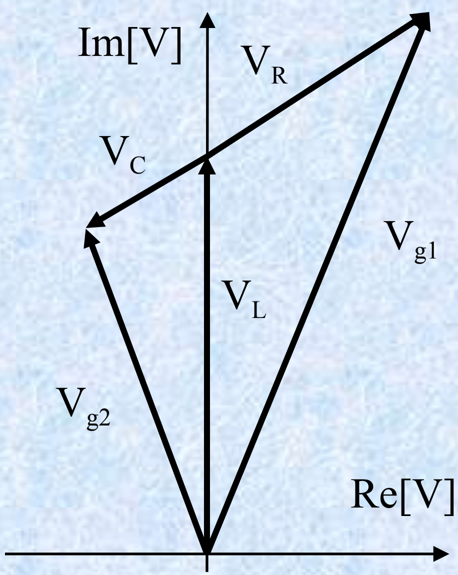
$$R = 1\,;\omega_0 L = 1\,;\omega_0 C = 2$$

$$\overline{I_1} = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}} = 1 + j\,; \quad \overline{I_2} = \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} = 1 - j$$

Equilibrio correnti al nodo B

$$I_1 + I_2 = I_L$$





$$\overline{V_L} = j\omega_0 L\overline{I_L} = j\,1\,\overline{I_L};$$

$$\overline{V_R} = R\overline{I_1} = 1(1 + j);$$

$$\overline{V_{g1}} = \overline{V_L} + \overline{V_R};$$

$$\overline{V_C} = \frac{\overline{I_2}}{j\omega_0 C} = \frac{\overline{I_2}}{j2} = \frac{-j}{2}\overline{I_2};$$

$$\overline{V_{g2}} = \overline{V_L} + \overline{V_C};$$