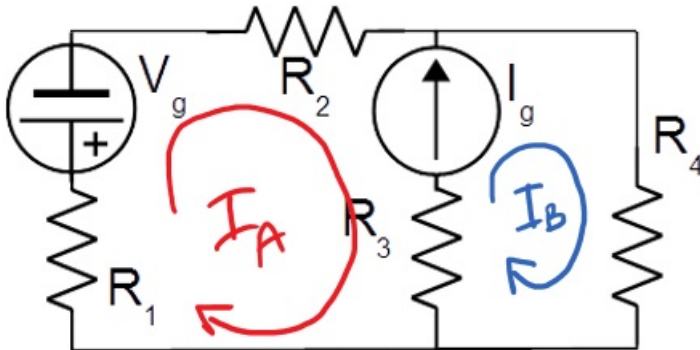


Soluzioni Prova Scritta Elettrotecnica del 29 Gennaio 2018 - Compito A

Esercizio n° 1

```
[ reset(); assume(kn, Type::PosInt);; assume(kc, Type::PosInt);;
```



Dato il circuito infigura, determinare: (1) la potenza assorbita dai resistori, (2) la potenza generata dal

generatore ideale di tensione V_g e dal generatore ideale di corrente I_g .

Verificate poi il bilancio energetico.

DATI

$V_g = k_N [V]$, $I_g = 2 [A]$, $R_1 = 4 [\Omega]$,

$R_2 = 3 [\Omega]$, $R_3 = k_C [\Omega]$, $R_4 = 5 [\Omega]$

Parametri del circuito (generatori e resistenze)

```
[ Vg:=kn; Ig:=2.; R1:=4.; R2:=3.; R3:=kc.; R4:=5.;
  G1:=1/R1;;G2:=1/R2;;G3:=1/R3;;G4:=1/R4;
```

```
kn
```

```
1/5
```

Utilizzo il metodo degli anelli con I_B , I_B correnti di anelli

I_A e I_B non sono indipendenti essendoci il generatore di corrente $I_g = I_B - I_A$ --> posso scrivere l'eq. del superanello coincidente con la maglia esterna e poi sostituire I_B in funzione di I_A ($I_B = I_A + I_g$) o viceversa:

$V_g + I_A R_2 + I_B R_4 + I_A R_1 = 0 \rightarrow V_g + I_A R_2 + (I_A + I_g) R_4 + I_A R_1 = 0 \rightarrow I_A (R_1 + R_2 + R_4) = -V_g - I_g R_4$

```
[ IA:=- (Vg+Ig*R4) / (R1+R2+R4) ;
  IB:=Ig+IA;
  float(IA); float(IB)
```

```
-kn/12-5/6
```

```
7/6-kn/12
```

```
-0.08333333333 kn - 0.8333333333
```

```
1.166666667 - 0.08333333333 kn
```

Trovate le correnti di anello posso calcolare tutte le potenze dei resistori come $I^2 R$

```
[ PR1:=(IA^2*R1); float(PR1)
```

```
4*(kn/12+5/6)^2
```

$$4.0 (0.08333333333 \text{ kn} + 0.8333333333)^2$$

$$\text{PR2} := (\text{IA})^2 * \text{R2}; \text{float}(\text{PR2})$$

$$3 \left(\frac{\text{kn}}{12} + \frac{5}{6} \right)^2$$

$$3.0 (0.08333333333 \text{ kn} + 0.8333333333)^2$$

$$\text{PR3} := (\text{Ig})^2 * \text{R3}; \text{float}(\text{PR3})$$

$$4 \text{ kc}$$

$$4.0 \text{ kc}$$

$$\text{PR4} := (\text{IB})^2 * \text{R4}; \text{float}(\text{PR4})$$

$$5 \left(\frac{\text{kn}}{12} - \frac{7}{6} \right)^2$$

$$5.0 (0.08333333333 \text{ kn} - 1.166666667)^2$$

Calcolo la potenza totale assorbita dalle resistenze

$$\text{Ptot} := \text{float}(\text{expand}(\text{PR1} + \text{PR2} + \text{PR3} + \text{PR4}))$$

$$0.08333333333 \text{ kn}^2 + 4.0 \text{ kc} + 11.66666667$$

Calcolo ora le potenze erogate dai generatori (NOTA: va utilizzata la convenzione dei generatori per i versi).

Per calcolare la potenza del generatore di corrente mi devo prima calcolare la tensione ai suoi capi attraverso

l'applicazione della KVL ad una maglia contenente il generatore, ad esempio l'anello B.

In questo caso $V_{ig} = V_{R3} + V_{R4}$ dove le tensioni delle resistenze sono prese secondo il verso di I_g

$$V_{ig} := \text{IB} * \text{R4} + I_g * \text{R3}; \text{float}(V_{ig})$$

$$2 \text{ kc} - \frac{5 \text{ kn}}{12} + \frac{35}{6}$$

$$2.0 \text{ kc} - 0.4166666667 \text{ kn} + 5.833333333$$

$$P_{ig} := (V_{ig} * I_g)$$

$$4 \text{ kc} - \frac{5 \text{ kn}}{6} + \frac{35}{3}$$

Per calcolare la potenza generata dal generatore di tensione devo invece ricavare I_{Vg} dalle correnti di anello.

In questo caso $I_{Vg} = -I_A$ (conv. generatori)

$$I_{Vg} := -I_A;$$

$$\frac{\text{kn}}{12} + \frac{5}{6}$$

$$P_{Vg} := \text{float}(V_{g} * I_{Vg})$$

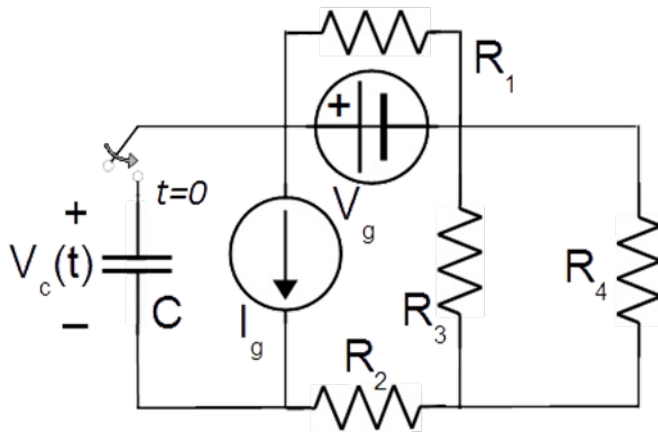
$$\text{kn} (0.08333333333 \text{ kn} + 0.8333333333)$$

Calcolo la potenza totale generata da I_g e V_g che deve essere uguale a quella assorbita dai resistori

$$\text{PtotGen} := \text{float}(\text{float}(\text{expand}(P_{Vg} + P_{ig})))$$

$$0.08333333333 \text{ kn}^2 + 4.0 \text{ kc} + 11.66666667$$

Esercizio n° 2



Nel circuito in figura l'interruttore è stato aperto per molto tempo. All'istante $t=0$, l'interruttore viene chiuso.

Determinare $v_C(t)$ per $t > 0$, sapendo che all'istante $t=0$ in cui viene connesso il condensatore C la tensione $v_C(t)$ vale $v_C(t=0^-) = 10[V]$

Rappresentarne poi su un grafico l'andamento temporale.

DATI

$V_g = 50 [V]$, $I_g = k_N [A]$, $R_1 = 10 [\Omega]$, $R_2 = k_C [\Omega]$, $R_3 = 10 [\Omega]$, $R_4 = 20 [\Omega]$, $C = 0.1 [\text{microF}]$

```
Vg:=50;; Ig:=kn;; R1:=10;; R2:=kc;; R3:=10;; R4:=20;;
C:=1e-7;V0:=10;
```

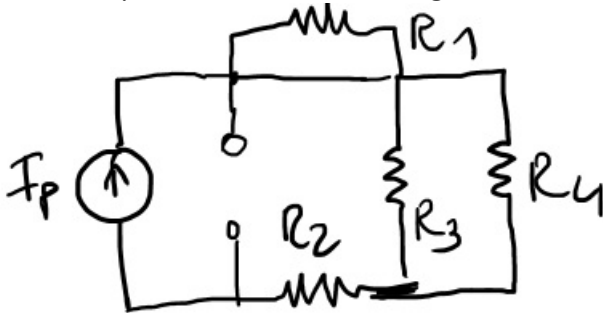
```
0.0000001
```

```
10
```

Devo trovare il circuito equivalente di Thevenin visto ai capi del condensatore C.

Prima calcolo la resistenza di Thevenin.

Disattivo i generatori, sostituisco la capacità con un generatore di corrente di prova I_p ed analizzo come si ripartisce la corrente del generatore:



R_1 è in parallelo con un corto circuito e quindi trascurabile, R_4 e R_3 sono in parallelo, e la resistenza equivalente risultante

è in serie con R_2 .

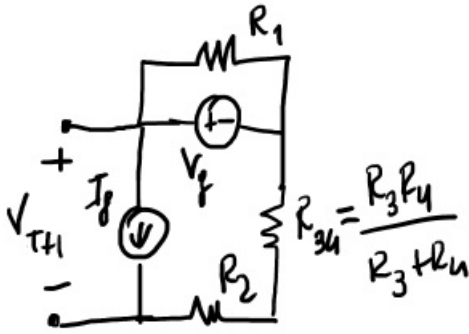
La resistenza equivalente di Thevenin è pertanto $R_{th} = (R_3 * R_4) / (R_3 + R_4) + R_2$

```
RTh:=R2+ (R4*R3) / (R3+R4) ;
float (RTh)
```

```
kc + 20
3
```

```
kc + 6.666666667
```

Calcolo poi la tensione di Thevenin ovvero la tensione a vuoto ai capi della capacità.



Sostituisco R3 e R4 con la loro resistenza equivalente $R_{34}=20/3$.

V_{th} coincide a meno del segno con la tensione sul generatore di corrente: $V_{th}=-V_g$.

Per trovare V_{th} applico la KVL all'anello contenente I_g e ottengo:

$$V_{th}=V_g-I_g(R_2+R_{34})$$

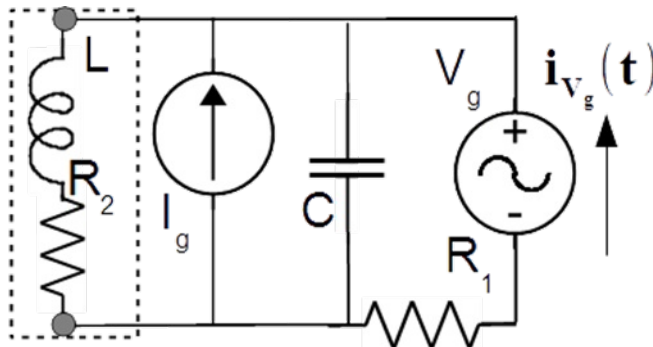
$$V_{th}:=V_g-I_g*(R_2+(R_3*R_4)/(R_3+R_4));$$

$$50 - k_n \left(k_c + \frac{20}{3} \right)$$

$$\tau:=R_{Th}*C$$

$$0.0000001 k_c + 0.0000006666666667$$

Esercizio n° 3



Il circuito infigura si trova in regime permanente sinusoidale.

Determinare:(1) la potenza complessa e la potenza istantanea del bipolo rappresentato dal rettangolo tratteggiato e

costituito dalla resistenza R_2 e dall'induttore L e rappresentare l'andamento temporale della potenza istantanea;

(2) la potenza complessa e il fattore di potenza del generatore di tensione V_g e (3) la corrente $i_{V_g}(t)$ che scorre nel generatore di tensione.

DATI:

$$V_g = -k_n \cos(\omega t) [V], \quad I_g = k_c \cos(\omega t + \pi/2) [A], \quad R_1 = 3 [\Omega], \quad R_2 = 2 [\Omega], \quad C = 100 [\mu F], \quad L = 0.2 [mH], \quad \omega = 5000 [\text{rad/s}]$$

Calcolo fasori e Impedenze:

$$\text{assume}(k_n, \text{Type}::\text{PosInt}); \text{assume}(k_c, \text{Type}::\text{PosInt});$$

$$V_g := -k_n; I_g := k_c * I;$$

$$Z_{R1} := 3; \quad Z_{R2} := 2; \quad L := 0.0002; \quad C := 0.0001; \quad \omega := 5000;$$

$$Z_L := I * \omega * L; \quad Z_C := -I / (\omega * C);$$

$$Z_{bip} := Z_L + Z_{R2}$$

$$-k_n$$

$$k_c i$$

$$3$$

2
0.0002
0.0001
5000
1.0 i
-2.0 i
2.0 + 1.0 i

Applico il teorema di Millman per trovare la differenza di potenziale ai capi del bipolo:

$$V_m = V_{bip} = (V_g / R_1 + I_g) / ((1/R_1) + (1/Z_c) + (1/(Z_{bip})))$$

```
Vm := (Vg/ZR1 + Ig) / ((1/R1) + (1/ZC) + (1/(Zbip))) ;  
kc (0.8823529412 + 1.470588235 i) + kn (-0.4901960784 + 0.2941176471 i)
```

Calcolo le potenze complesse.

Per il bipolo R2-L utilizzo la formula $S = 1/2 |I_{bip}|^2 \times Z$

poi ricavo la potenza istantanea con la formula.

$$P_{ist}(t) = P_{Attiva} + P_{Attiva} \cos(2\omega t + 2 \cdot \text{Arg}(I_{bip})) - P_{Reattiva} \sin(2\omega t + 2 \cdot \text{Arg}(I_{bip}))$$

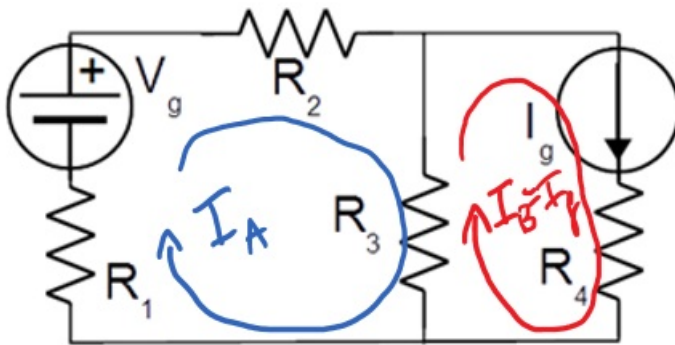
I_{bip} la trovo come $I_{bip} = V_{bip} / Z_{bip}$

```
Ibip := Vm/Zbip ;  
kc (0.6470588235 + 0.4117647059 i) + kn (-0.137254902 + 0.2156862745 i)  
  
S_R2_L := (1/2 * abs(Ibip)^2 * (Zbip)) ;  
p_R2_L := Re(S_R2_L) + Re(S_R2_L) * cos(2*w*t + 2*arg(Ibip)) - Im(S_R2_L) * sin(2*w*t)  
Error: Recursive definition [See ?MAXDEPTH]
```

Per calcolare la potenza complessa, il fattore di potenza e la corrente del generatore di tensione V_g , calcolo prima il fasore della corrente I_{Vg} .

```
IVg := - (Vm - Vg) / R1  
kc (-0.08823529412 - 0.1470588235 i) + kn (-0.05098039216 - 0.02941176471 i)  
  
S_Vg := 1/2 * Vg * conjugate(IVg) ;  
kn (kc (0.08823529412 - 0.1470588235 i) + kn (0.05098039216 - 0.02941176471 i))  
2  
  
PHI := Re(S_Vg) / abs(S_Vg)  
0.08823529412 kc + 0.05098039216 kn  
|kc (0.08823529412 - 0.1470588235 i) + kn (0.05098039216 - 0.02941176471 i)|  
  
iVg(t) := abs(IVg) * cos(w*t + Arg(IVg))  
cos(5000 t + Arg(Ivg)) |kc (0.08823529412 + 0.1470588235 i) + kn (0.05098039216 + 0.02941176471 i)
```

Soluzioni Prova Scritta Elettrotecnica del 29 Gennaio 2018 - Compito B
Esercizio n° 1



Dato il circuito infigura, determinare: (1) la potenza assorbita dai resistori, (2) la potenza generata dal

generatore ideale di tensione V_g e dal generatore ideale di corrente I_g .

Verificate poi il bilancio energetico.

DATI

$V_g = k_C [V]$, $I_g = 3 [A]$, $R_1 = 5 [\Omega]$,

$R_2 = 2 [\Omega]$, $R_3 = k_N [\Omega]$, $R_4 = 4 [\Omega]$

Parametri del circuito (generatori e resistenze)

$V_g := k_C$; $I_g := 3$; $R_1 := 5$; $R_2 := 2$; $R_3 := k_N$; $R_4 := 4$;

$G_1 := 1/R_1$; $G_2 := 1/R_2$; $G_3 := 1/R_3$; $G_4 := 1/R_4$;

k_C

$\frac{1}{4}$

Utilizzo il metodo degli anelli con IB, IB correnti di anelli

IB coincide con la corrente del generatore di corrente $I_g = I_B \rightarrow$ devo determinare solo IA

$-V_g + I_A R_2 + (I_A - I_g) R_3 + I_A R_1 = 0 \rightarrow I_A (R_1 + R_2 + R_3) = V_g + I_g R_3$

$I_A := (V_g + I_g R_3) / (R_1 + R_2 + R_3)$;

$I_B := I_g$;

$\text{float}(I_A)$

$\frac{k_C + 3 k_N}{k_N + 7}$

3

$\frac{k_C + 3.0 k_N}{k_N + 7.0}$

Trovate le correnti di anello posso calcolare tutte le potenze dei resistori come $I^2 R$

$PR_1 := (I_A^2 R_1)$; $\text{float}(PR_1)$

$\frac{5 (k_C + 3 k_N)^2}{(k_N + 7)^2}$

$\frac{5.0 (k_C + 3.0 k_N)^2}{(k_N + 7.0)^2}$

$PR_2 := (I_A^2 R_2)$; $\text{float}(PR_2)$

$\frac{2 (k_C + 3 k_N)^2}{(k_N + 7)^2}$

$\frac{2.0 (k_C + 3.0 k_N)^2}{(k_N + 7.0)^2}$

$$PR3 := (IA - Ig)^2 * R3; \text{float}(PR3)$$

$$kn \left(\frac{kc + 3 \text{ kn}}{kn + 7} - 3 \right)^2$$

$$kn \left(\frac{kc + 3.0 \text{ kn}}{kn + 7.0} - 3.0 \right)^2$$

$$PR4 := (Ig)^2 * R4; \text{float}(PR4)$$

$$36$$

$$36.0$$

Calcolo la potenza totale assorbita dalle resistenze

$$Ptot := \text{float}(\text{expand}(PR1 + PR2 + PR3 + PR4))$$

$$9.0 \text{ kn} + \frac{7.0 \text{ kc}^2}{\sigma_1} + \frac{63.0 \text{ kn}^2}{\sigma_1} + \frac{9.0 \text{ kn}^3}{\sigma_1} - \frac{18.0 \text{ kn}^2}{kn + 7.0} + \frac{42.0 \text{ kc kn}}{\sigma_1} + \frac{6.0 \text{ kc kn}^2}{\sigma_1} + \frac{\text{kc}^2 \text{ kn}}{\sigma_1} - \frac{6.0 \text{ kc kn}}{kn + 7.0} + 36.0$$

where

$$\sigma_1 = kn^2 + 14.0 \text{ kn} + 49.0$$

Calcolo ora le potenze erogate dai generatori (NOTA: va utilizzata la convenzione dei generatori per i versi).

Per calcolare la potenza del generatore di corrente mi devo prima calcolare la tensione ai suoi capi attraverso

l'applicazione della KVL ad una maglia contenente il generatore, ad esempio l'anello B.

In questo caso $Vig = VR3 + VR4$ dove le tensioni delle resistenze sono prese secondo il verso di Ig

$$Vig := Ig * R4 + (Ig - IA) * R3; \text{float}(Vig)$$

$$12 - kn \left(\frac{kc + 3 \text{ kn}}{kn + 7} - 3 \right)$$

$$12.0 - 1.0 \text{ kn} \left(\frac{kc + 3.0 \text{ kn}}{kn + 7.0} - 3.0 \right)$$

$$PIg := (Vig * (Ig))$$

$$36 - 3 \text{ kn} \left(\frac{kc + 3 \text{ kn}}{kn + 7} - 3 \right)$$

Per calcolare la potenza generata dal generatore di tensione devo invece ricavare I_{Vg} dalle correnti di anello.

In questo caso $I_{Vg} = -IA$ (conv. generatori)

$$IVg := IA;$$

$$\frac{kc + 3 \text{ kn}}{kn + 7}$$

$$PVg := \text{float}(Vg * IVg)$$

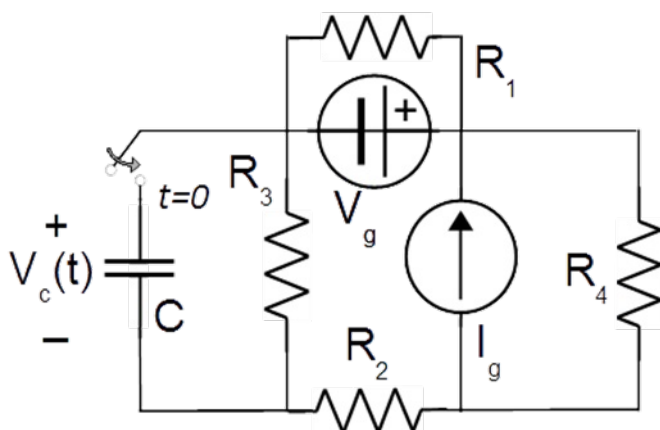
$$\frac{kc (kc + 3.0 \text{ kn})}{kn + 7.0}$$

Calcolo la potenza totale generata da Ig e Vg che deve essere uguale a quella assorbita dai resistori

$$PtotGen := \text{float}(\text{float}(\text{expand}(PVg + PIG)))$$

$$9.0 \text{ kn} + \frac{\text{kc}^2}{kn + 7.0} - \frac{9.0 \text{ kn}^2}{kn + 7.0} + 36.0$$

Esercizio n° 2



Nel circuito in figura l'interruttore è stato aperto per molto tempo. All'istante $t=0$, l'interruttore viene chiuso.

Determinare $v_C(t)$ per $t > 0$, sapendo che all'istante $t=0$ in cui viene connesso il condensatore C la tensione $v_C(t)$ vale $v_C(t=0^-) = 20[V]$

Rappresentarne poi su un grafico l'andamento temporale.

DATI

$V_g = 100 [V]$, $I_g = k_N [A]$, $R_1 = 20 [\Omega]$, $R_2 = k_C [\Omega]$, $R_3 = 20 [\Omega]$, $R_4 = 10 [\Omega]$, $C = 0.2 [\text{microF}]$

$V_g := 100;$ $I_g := kn;$ $R_1 := 20;$ $R_2 := kc;$ $R_3 := 20;$ $R_4 := 10;$

$C := 2e-7;$ $V_0 := 20;$

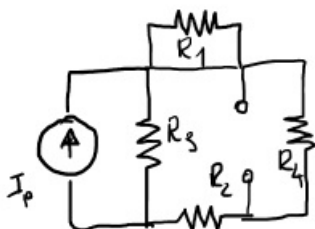
0.0000002

20

Devo trovare il circuito equivalente di Thevenin visto ai capi del condensatore C.

Prima calcolo la resistenza di Thevenin.

Disattivo i generatori, sostituisco la capacità con un generatore di corrente di prova I_p ed analizzo come si ripartisce la corrente del generatore:



R_1 è in parallelo con un corto circuito e quindi trascurabile, R_2 e R_4 sono in serie, e la resistenza equivalente risultante è in parallelo con R_3 .

La resistenza equivalente di Thevenin è pertanto $R_{th} = (R_3 * (R_2 + R_4)) / (R_2 + R_3 + R_4)$

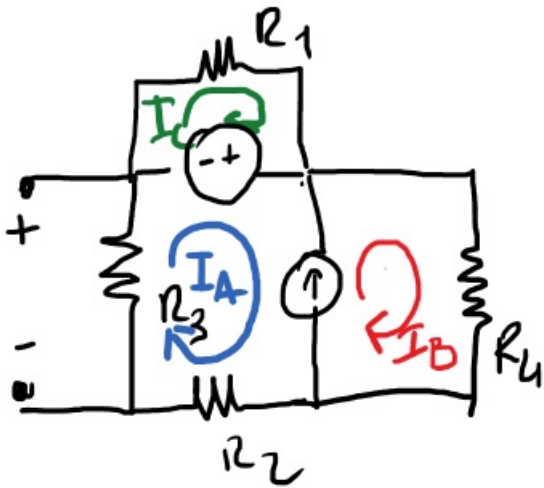
$R_{Th} := (R_3 * (R_4 + R_2)) / (R_2 + R_3 + R_4);$

float (RTh)

$\frac{20 \text{ kc} + 200}{\text{kc} + 30}$

$\frac{20.0 \text{ kc} + 200.0}{\text{kc} + 30.0}$

Calcolo poi la tensione di Thevenin ovvero la tensione a vuoto ai capi della capacità.



Se utilizzo il metodo degli anelli, con le correnti in figura ho: $V_{th} = -I_A \cdot R_3$.

Per trovare V_{th} devo quindi trovare I_A . Vedo che I_A e I_B non sono indipendenti, a causa del vincolo imposto dal generatore di corrente per cui $I_g = I_B - I_A \rightarrow I_B = I_A + I_g$

Scrivo quindi l'equazione del superanello A_B e sostituisco I_B con $I_A + I_g$

$$-V_g + I_B \cdot R_4 + I_A \cdot (R_2 + R_3) = 0 \rightarrow I_A (R_2 + R_3 + R_4) = V_g - I_g \cdot R_4$$

```
IA := (Vg - Ig * R4) / (R2 + R3 + R4);
Vth := -IA * R3;
float(Vth)
```

$$= \frac{10 \text{ kn} - 100}{\text{kc} + 30}$$

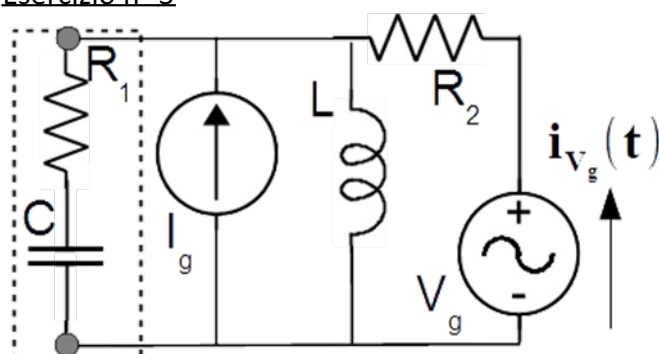
$$= \frac{20 (10 \text{ kn} - 100)}{\text{kc} + 30}$$

$$= \frac{20.0 (10.0 \text{ kn} - 100.0)}{\text{kc} + 30.0}$$

```
tau := RTh * C
```

$$= \frac{0.0000002 (20 \text{ kc} + 200)}{\text{kc} + 30}$$

Esercizio n° 3



Il circuito in figura si trova in regime permanente sinusoidale.

Determinare: (1) la potenza complessa e la potenza istantanea del bipolo rappresentato dal rettangolo tratteggiato e

costituito dalla resistenza R_1 e dal condensatore C e rappresentare l'andamento temporale della potenza istantanea;

(2) la potenza complessa e il fattore di potenza del generatore di tensione V_g e (3) la corrente $i_{V_g}(t)$ che scorre nel generatore di tensione.

DATI:

$$V_g = k_C \cos(\omega t - \pi/2) \text{ [V]}, \quad I_g = -k_N \cos(\omega t) \text{ [A]}, \quad R_1 = 3 \text{ } [\Omega], \quad R_2 = 2 \text{ } [\Omega], \quad C = 250 \text{ } [\mu\text{F}], \quad L = 0.5 \text{ } [\text{mH}],$$

$$\omega=4000 \text{ [rad/s]}$$

Calcolo fasori e Impedenze:

```
Vg:=-I*kc; Ig:=-kn;
ZR1:=3; ZR2:=2; L:=0.0005; C:=0.00025; w:=4000;
ZL:=I*w*L; ZC:=-I/(w*C);
Zbip:=ZC+ZR1
```

$$-kc \, i$$

$$-kn$$

$$3$$

$$2$$

$$0.0005$$

$$0.00025$$

$$4000$$

$$2.0 \, i$$

$$-1.0 \, i$$

$$3.0 - 1.0 \, i$$

Applico il teorema di Millman per trovare la differenza di potenziale ai capi del bipolo:

$$V_m = V_{bip} = (V_g/R_2 + I_g) / ((1/R_2) + (1/Z_L) + (1/(Z_{bip})))$$

$$V_m := (V_g/ZR2 + I_g) / ((1/ZR2) + (1/ZL) + (1/(Zbip)))$$

$$-\frac{kn + \frac{kc \, i}{2}}{\frac{1}{kc} + 0.3 - 0.4 \, i}$$

Calcolo le potenze complesse.

Per il bipolo R1-C utilizzo la formula $S = 1/2 |I_{bip}|^2 \times Z$

poi ricavo la potenza istantanea con la formula.

$$P_{ist}(t) = P_{Attiva} + P_{Attiva} \cos(2\omega t + 2 \cdot \text{Arg}(I_{bip})) - P_{Reattiva} \sin(2\omega t + 2 \cdot \text{Arg}(I_{bip}))$$

I_{bip} la trovo come $I_{bip} = V_{bip}/Z_{bip}$

```
Ibip:=Vm/Zbip;
S_R1_C:=1/2*abs(Ibip)^2*(Zbip);
p_R1_C:=Re(S_R1_C)+Re(S_R1_C)*cos(2*w*t+2*arg(Ibip))-Im(S_R1_C)*sin(2*w*t
```

$$\frac{(kn + \frac{kc \, i}{2})(-0.3 - 0.1 \, i)}{\frac{1}{kc} + 0.3 - 0.4 \, i}$$

$$\frac{|kn + \frac{kc \, i}{2}|^2 (0.15 - 0.05 \, i)}{|\frac{1}{kc} + 0.3 - 0.4 \, i|^2}$$

$$\frac{0.15 |kn + \frac{kc \, i}{2}|^2}{\sigma_2} + \frac{0.15 \cos(\sigma_1) |kn + \frac{kc \, i}{2}|^2}{\sigma_2} + \frac{0.05 \sin(\sigma_1) |kn + \frac{kc \, i}{2}|^2}{\sigma_2}$$

where

$$\sigma_1 = 8000 \, t + 2 \arg \left(\frac{(kn + \frac{kc \, i}{2})(-0.3 - 0.1 \, i)}{\frac{1}{kc} + 0.3 - 0.4 \, i} \right)$$

$$\sigma_2 = |\frac{1}{kc} + 0.3 - 0.4 \, i|^2$$

Per calcolare la potenza complessa, il fattore di potenza e la corrente del generatore di tensione V_g , calcolo prima il fasore della corrente I_{Vg} .

$$I_{Vg} := - (V_m - V_g) / R_2$$

$$- \frac{kc \, i - \frac{kn + \frac{kc \, i}{2}}{\frac{1}{kc} + 0.3 - 0.4 \, i}}{kc}$$

$$S_{Vg} := 1/2 * V_g * \text{conjugate}(I_{Vg}) ;$$

$$\frac{kc}{2} + \frac{(-kn + \frac{kc \, i}{2}) \, i}{(\frac{1}{kc} + 0.3 + 0.4 \, i) \, 2}$$

$$\text{PHI} := \text{Re}(S_{Vg}) / \text{abs}(S_{Vg})$$

$$\frac{\frac{kc}{2} + \Re\left(\frac{(-kn + \frac{kc \, i}{2}) \, i}{(\frac{1}{kc} + 0.3 + 0.4 \, i) \, 2}\right)}{\left|\frac{kc}{2} + \frac{(-kn + \frac{kc \, i}{2}) \, i}{(\frac{1}{kc} + 0.3 + 0.4 \, i) \, 2}\right|}$$

$$i_{Vg}(t) := \text{abs}(I_{Vg}) * \cos(w * t + \text{Arg}(I_{Vg}))$$

$$\frac{\cos(4000 \, t + \text{Arg}(I_{Vg})) \left| kc \, i - \frac{kn + \frac{kc \, i}{2}}{\frac{1}{kc} + 0.3 - 0.4 \, i} \right|}{kc}$$

ESEMPIO NUMERICO CON $kn=6$ e $kc=7$

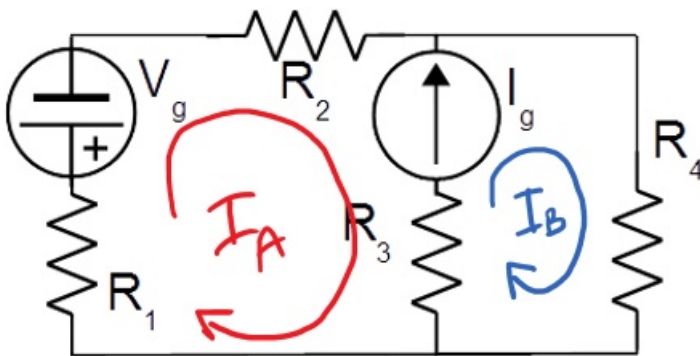
Soluzioni Prova Scritta Elettrotecnica del 29 Gennaio 2018 - Compito A

Esercizio n° 1

```
reset(); assume(kn, Type::PosInt); assume(kc, Type::PosInt);
kn:=6; kc:=7;
```

6

7



Dato il circuito infigura, determinare: (1) la potenza assorbita dai resistori, (2) la potenza generata dal

generatore ideale di tensione V_g e dal generatore ideale di corrente I_g .

Verificate poi il bilancio energetico.

DATI

$V_g = k_n [V]$, $I_g = 2 [A]$, $R_1 = 4 [\Omega]$,

$R_2 = 3 [\Omega]$, $R_3 = k_c [\Omega]$, $R_4 = 5 [\Omega]$

Parametri del circuito (generatori e resistenze)

```
Vg:=kn; Ig:=2; R1:=4; R2:=3; R3:=kc; R4:=5;
```

```
G1:=1/R1; G2:=1/R2; G3:=1/R3; G4:=1/R4;
```

6

$\frac{1}{5}$

Utilizzo il metodo degli anelli con I_B , I_B correnti di anelli

I_A e I_B non sono indipendenti essendoci il generatore di corrente $I_g = I_B - I_A$ --> posso scrivere l'eq. del superanello coincidente con la maglia esterna e poi sostituire I_B in funzione di I_A ($I_B = I_A + I_g$) o viceversa:

$V_g + I_A R_2 + I_B R_4 + I_A R_1 = 0 \rightarrow V_g + I_A R_2 + (I_A + I_g) R_4 + I_A R_1 = 0 \rightarrow I_A (R_1 + R_2 + R_4) = -V_g - I_g R_4$

```
IA:=- (Vg+Ig*R4) / (R1+R2+R4) ;
```

```
IB:=Ig+IA;
```

```
float (IA); float (IB)
```

$-\frac{4}{3}$

$\frac{2}{3}$

-1.333333333

0.666666667

Trovate le correnti di anello posso calcolare tutte le potenze dei resistori come $I^2 R$

```
PR1 := (IA^2*R1); float (PR1)
```

$$\frac{64}{9}$$

7.11111111

```
PR2 := (IA)^2*R2; float (PR2)
```

$$\frac{16}{3}$$

5.33333333

```
PR3 := (Ig)^2*R3; float (PR3)
```

28

28.0

```
PR4 := (IB)^2*R4; float (PR4)
```

$$\frac{20}{9}$$

2.22222222

Calcolo la potenza totale assorbita dalle resistenze

```
Ptot := float (expand (PR1+PR2+PR3+PR4) )
```

42.66666667

Calcolo ora le potenze erogate dai generatori (NOTA: va utilizzata la convenzione dei generatori per i versi).

Per calcolare la potenza del generatore di corrente mi devo prima calcolare la tensione ai suoi capi attraverso

l'applicazione della KVL ad una maglia contenente il generatore, ad esempio l'anello B.

In questo caso $V_{ig} = V_{R3} + V_{R4}$ dove le tensioni delle resistenze sono prese secondo il verso di I_g

```
Vig := IB*R4 + Ig*R3; float (Vig)
```

$$\frac{52}{3}$$

17.33333333

```
PIg := (Vig*(Ig) )
```

$$\frac{104}{3}$$

Per calcolare la potenza generata dal generatore di tensione devo invece ricavare I_{Vg} dalle correnti di anello.

In questo caso $I_{Vg} = -I_A$ (conv. generatori)

```
IVg := -IA;
```

$$\frac{4}{3}$$

```
PVg := float (Vg*IVg)
```

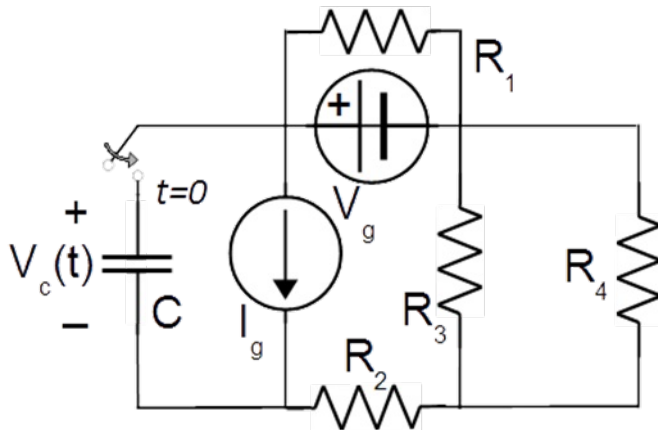
8.0

Calcolo la potenza totale generata da I_g e V_g che deve essere uguale a quella assorbita dai resistori

```
PtotGen := float (float (expand (PVg+PIg) ) )
```

42.66666667

Esercizio n° 2



Nel circuito in figura l'interruttore è stato aperto per molto tempo. All'istante $t=0$, l'interruttore viene chiuso.

Determinare $v_C(t)$ per $t > 0$, sapendo che all'istante $t=0$ in cui viene connesso il condensatore C la tensione $v_C(t)$ vale $v_C(t=0^-) = 10[V]$

Rappresentarne poi su un grafico l'andamento temporale.

DATI

$V_g = 50 [V]$, $I_g = k_N [A]$, $R_1 = 10 [\Omega]$, $R_2 = k_C [\Omega]$, $R_3 = 10 [\Omega]$, $R_4 = 20 [\Omega]$, $C = 0.1 [\mu F]$

$V_g := 50;$ $I_g := k_N;$ $R_1 := 10;$ $R_2 := k_C;$ $R_3 := 10;$ $R_4 := 20;$

$C := 1e-7;$ $V_0 := 10;$

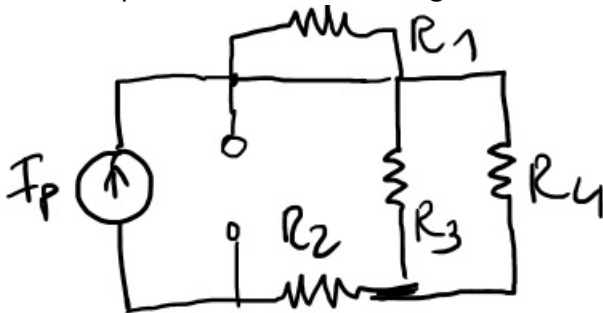
0.0000001

10

Devo trovare il circuito equivalente di Thevenin visto ai capi del condensatore C.

Prima calcolo la resistenza di Thevenin.

Disattivo i generatori, sostituisco la capacità con un generatore di corrente di prova I_p ed analizzo come si ripartisce la corrente del generatore:



R_1 è in parallelo con un corto circuito e quindi trascurabile, R_4 e R_3 sono in parallelo, e la resistenza equivalente risultante è in serie con R_2 .

La resistenza equivalente di Thevenin è pertanto $R_{th} = (R_3 * R_4) / (R_3 + R_4) + R_2$

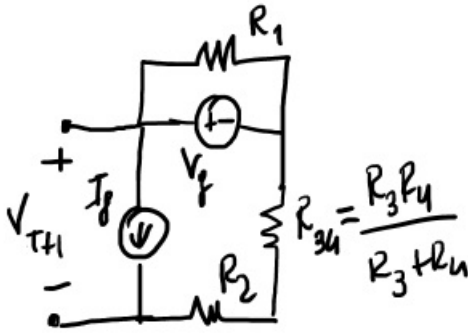
$R_{Th} := R_2 + (R_4 * R_3) / (R_3 + R_4);$

float (RTh)

$\frac{41}{3}$

13.66666667

Calcolo poi la tensione di Thevenin ovvero la tensione a vuoto ai capi della capacità.



Sostituisco R3 e R4 con la loro resistenza equivalente $R_{34}=20/3$.

V_{th} coincide a meno del segno con la tensione sul generatore di corrente: $V_{th}=-V_f$.

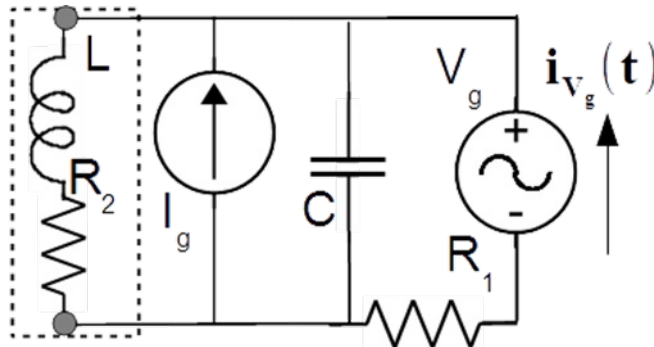
Per trovare V_{th} applico la KVL all'anello contenente I_g e ottengo:

$$V_{th}=V_g-I_g(R_2+R_{34})$$

```
Vth:=Vg-Ig*(R2+(R3*R4)/(R3+R4));
-32
```

```
tau:=RTh*C
0.000001366666667
```

Esercizio n°3



Il circuito infigura si trova in regime permanente sinusoidale.

Determinare:(1) la potenza complessa e la potenza istantanea delbipolo rappresentato dal rettangolo tratteggiato e

costituito dalla resistenza R2 e dall'induttore L e rappresentare l'andamento temporale della potenza istantanea;

(2) la potenza complessa e il fattore di potenza del generatore di tensione V_g e (3) la corrente $i_{V_g}(t)$ che scorre nel generatore di tensione.

DATI:

$$V_g = -k_N \cos(\omega t) [V], \quad I_g = k_C \cos(\omega t + \pi/2) [A], \quad R_1 = 3 [\Omega], \quad R_2 = 2 [\Omega], \quad C = 100 [\mu F], \quad L = 0.2 [mH], \quad \omega = 5000 [\text{rad/s}]$$

Calcolo fasori e Impedenze:

```
assume(kn, Type::PosInt):: assume(kc, Type::PosInt)::
Vg:=-kn;Ig:=kc*I;
ZR1:=3; ZR2:=2; L:=0.0002;C:=0.0001;w:=5000;
ZL:=I*w*L;ZC:=-I/(w*C);
Zbip:=ZL+ZR2
-6
7i
3
```

2
0.0002
0.0001
5000
1.0 i
-2.0 i
2.0 + 1.0 i

Applico il teorema di Millman per trovare la differenza di potenziale ai capi del bipolo:

$$V_m = V_{bip} = (V_g / R_1 + I_g) / ((1/R_1) + (1/Z_c) + (1/Z_{bip}))$$

$$V_m := (V_g / Z_{R1} + I_g) / ((1/R_1) + (1/Z_C) + (1/Z_{bip}));$$

$$3.235294118 + 12.05882353 i$$

Calcolo le potenze complesse.

Per il bipolo R2-L utilizzo la formula $S = 1/2 |I_{bip}|^2 \times Z$

poi ricavo la potenza istantanea con la formula.

$$P_{ist}(t) = P_{Attiva} + P_{Attiva} \cos(2\omega t + 2 \cdot \text{Arg}(I_{bip})) - P_{Reattiva} \sin(2\omega t + 2 \cdot \text{Arg}(I_{bip}))$$

I_{bip} la trovo come $I_{bip} = V_{bip} / Z_{bip}$

$$I_{bip} := V_m / Z_{bip};$$

$$3.705882353 + 4.176470588 i$$

$$S_{R2_L} := (1/2 \cdot \text{abs}(I_{bip})^2 \cdot (Z_{bip}));$$

$$p_{R2_L} := \text{Re}(S_{R2_L}) + \text{Re}(S_{R2_L}) \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t + 2 \cdot \text{arg}(I_{bip})) - \text{Im}(S_{R2_L}) \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t + 2 \cdot \text{arg}(I_{bip}));$$

$$31.17647059 + 15.58823529 i$$

$$31.17647059 \cos(10000 t + 1.690057753) - 15.58823529 \sin(10000 t + 1.690057753) + 31.17647059$$

Per calcolare la potenza complessa, il fattore di potenza e la corrente del generatore di tensione V_g , calcolo prima il fasore della corrente I_{Vg} .

$$I_{Vg} := -(V_m - V_g) / R_1$$

$$-0.9235294118 - 1.205882353 i$$

$$S_{Vg} := 1/2 \cdot V_g \cdot \text{conjugate}(I_{Vg});$$

$$2.770588235 - 3.617647059 i$$

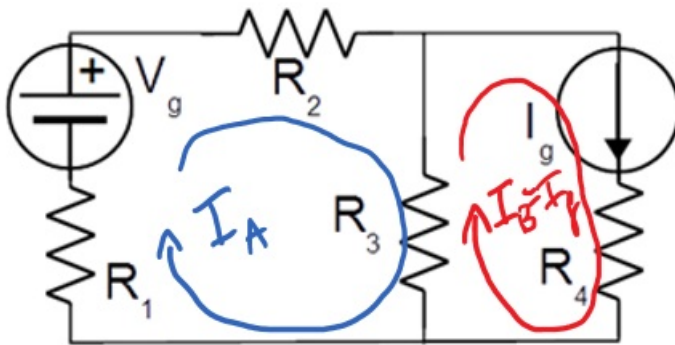
$$\text{PHI} := \text{Re}(S_{Vg}) / \text{abs}(S_{Vg})$$

$$0.6080249449$$

$$i_{Vg}(t) := \text{abs}(I_{Vg}) \cdot \cos(\omega \cdot t + \text{Arg}(I_{Vg}))$$

$$1.518900531 \cos(5000 t + \text{Arg}(I_{Vg}))$$

Soluzioni Prova Scritta Elettrotecnica del 29 Gennaio 2018 - Compito B
Esercizio n° 1



Dato il circuito infigura, determinare: (1) la potenza assorbita dai resistori, (2) la potenza generata dal

generatore ideale di tensione V_g e dal generatore ideale di corrente I_g .

Verificate poi il bilancio energetico.

DATI

$V_g = k_C [V]$, $I_g = 3 [A]$, $R_1 = 5 [\Omega]$,

$R_2 = 2 [\Omega]$, $R_3 = k_N [\Omega]$, $R_4 = 4 [\Omega]$

Parametri del circuito (generatori e resistenze)

$V_g := k_C$; $I_g := 3$; $R_1 := 5$; $R_2 := 2$; $R_3 := k_N$; $R_4 := 4$;

$G_1 := 1/R_1$; $G_2 := 1/R_2$; $G_3 := 1/R_3$; $G_4 := 1/R_4$;

7

$\frac{1}{4}$

Utilizzo il metodo degli anelli con I_B , I_B correnti di anelli

I_B coincide con la corrente del generatore di corrente $I_g = I_B$ --> devo determinare solo I_A

$-V_g + I_A R_2 + (I_A - I_g) R_3 + I_A R_1 = 0 \rightarrow I_A (R_1 + R_2 + R_3) = +V_g + I_g R_3$

$I_A := (V_g + I_g R_3) / (R_1 + R_2 + R_3)$;

$I_B := I_g$;

`float (I_A)`

$\frac{25}{13}$

3

1.923076923

Trovate le correnti di anello posso calcolare tutte le potenze dei resistori come $I^2 R$

$PR_1 := (I_A^2 R_1)$; `float (PR1)`

$\frac{3125}{169}$

18.49112426

$PR_2 := (I_A)^2 R_2$; `float (PR2)`

$\frac{1250}{169}$

7.396449704

$PR_3 := (I_A - I_g)^2 R_3$; `float (PR3)`

$\frac{1176}{169}$

6.958579882

```
PR4:=(Ig)^2*R4; float(PR4)
```

36

36.0

Calcolo la potenza totale assorbita dalle resistenze

```
Ptot:=float(expand(PR1+PR2+PR3+PR4))
```

68.84615385

Calcolo ora le potenze erogate dai generatori (NOTA: va utilizzata la convenzione dei generatori per i versi).

Per calcolare la potenza del generatore di corrente mi devo prima calcolare la tensione ai suoi capi attraverso

l'applicazione della KVL ad una maglia contenente il generatore, ad esempio l'anello B.

In questo caso $V_g = V_{R3} + V_{R4}$ dove le tensioni delle resistenze sono prese secondo il verso di I_g

```
Vig:=Ig*R4+(Ig-IA)*R3; float(Vig)
```

$\frac{240}{13}$

18.46153846

```
PIg:=(Vig*(Ig))
```

$\frac{720}{13}$

Per calcolare la potenza generata dal generatore di tensione devo invece ricavare I_{Vg} dalle correnti di anello.

In questo caso $I_{Vg} = -I_A$ (conv. generatori)

```
IVg:=IA;
```

$\frac{25}{13}$

```
PVg:=float(Vg*IVg)
```

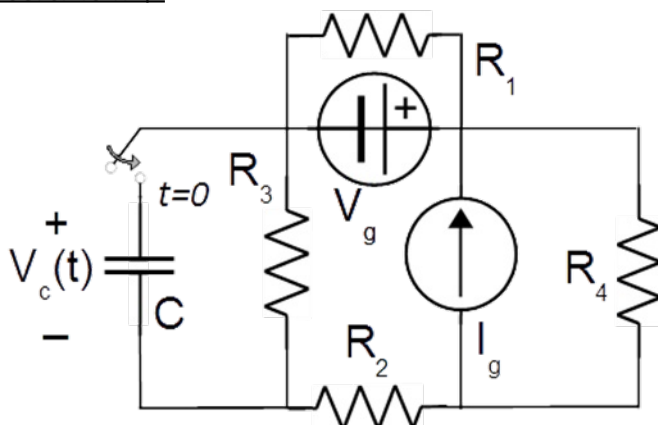
13.46153846

Calcolo la potenza totale generata da I_g e V_g che deve essere uguale a quella assorbita dai resistori

```
PtotGen:=float(float(expand(PVg+PIg)))
```

68.84615385

Esercizio n° 2



Nel circuito in figura l'interruttore è stato aperto per molto tempo. All'istante $t=0$, l'interruttore viene chiuso.

Determinare $v_C(t)$ per $t > 0$, sapendo che all'istante $t=0$ in cui viene connesso il condensatore C la tensione $v_C(t)$ vale $v_C(t=0^-) = 20[V]$

Rappresentarne poi su un grafico l'andamento temporale.

DATI

$V_g = 100 [V]$, $I_g = k_N [A]$, $R_1 = 20 [\Omega]$, $R_2 = k_C [\Omega]$, $R_3 = 20 [\Omega]$, $R_4 = 10 [\Omega]$, $C = 0.2 [\mu F]$

```
Vg:=100;; Ig:=kn;; R1:=20;; R2:=kc;; R3:=20;; R4:=10;;
C:=2e-7;V0:=20;
```

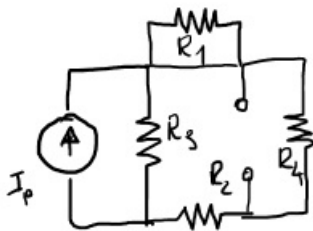
```
0.0000002
```

```
20
```

Devo trovare il circuito equivalente di Thevenin visto ai capi del condensatore C.

Prima calcolo la resistenza di Thevenin.

Disattivo i generatori, sostituisco la capacità con un generatore di corrente di prova I_p ed analizzo come si ripartisce la corrente del generatore:



R_1 è in parallelo con un corto circuito e quindi trascurabile, R_2 e R_4 sono in serie, e la resistenza equivalente risultante è in parallelo con R_3 .

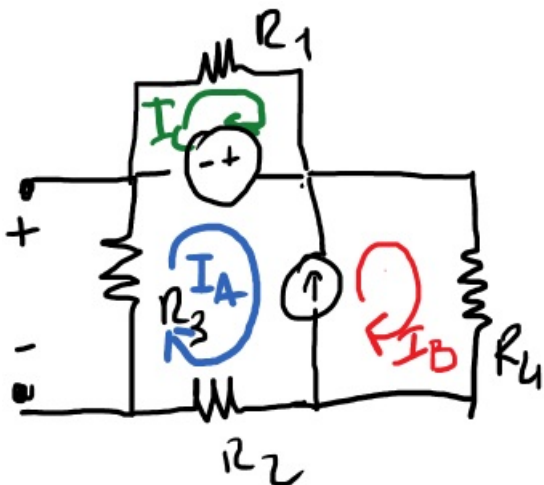
La resistenza equivalente di Thevenin è pertanto $R_{th} = (R_3 * (R_2 + R_4)) / (R_2 + R_3 + R_4)$

```
RTh := (R3 * (R4 + R2)) / (R2 + R3 + R4);
float (RTh)
```

```
340
37
```

```
9.189189189
```

Calcolo poi la tensione di Thevenin ovvero la tensione a vuoto ai capi della capacità.



Se utilizzo il metodo degli anelli, con le correnti in figura ho: $V_{th} = -I_A * R_3$.

Per trovare V_{th} devo quindi trovare I_A . Vedo che I_A e I_B non sono indipendenti, a causa del vincolo imposto dal generatore di corrente per cui $I_g = I_B - I_A \rightarrow I_B = I_A + I_g$

Scrivo quindi l'equazione del superanello A_B e sostituisco I_B con $I_A + I_g$

$$-V_g + I_B R_4 + I_A (R_2 + R_3) = 0 \rightarrow I_A (R_2 + R_3 + R_4) = V_g - I_g R_4$$

$$I_A := (V_g - I_g R_4) / (R_2 + R_3 + R_4);$$

$$V_{th} := -I_A R_3;$$

$$\text{float}(V_{th})$$

$$\frac{40}{37}$$

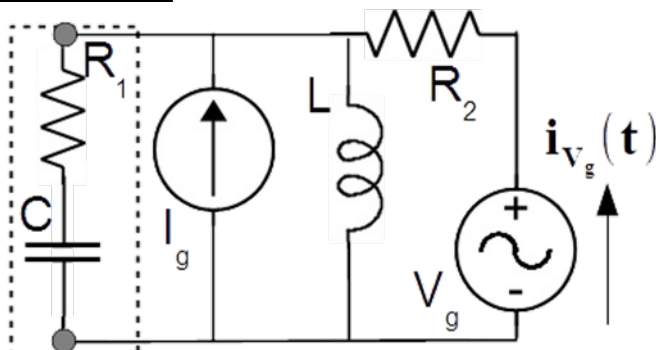
$$-\frac{800}{37}$$

$$-21.62162162$$

$$\tau := R_{Th} C$$

$$0.000001837837838$$

Esercizio n° 3



Il circuito in figura si trova in regime permanente sinusoidale.

Determinare: (1) la potenza complessa e la potenza istantanea del bipolo rappresentato dal rettangolo tratteggiato e

costituito dalla resistenza R_1 e dal condensatore C e rappresentare l'andamento temporale della potenza istantanea;

(2) la potenza complessa e il fattore di potenza del generatore di tensione V_g e (3) la corrente $i_{V_g}(t)$ che scorre nel generatore di tensione.

DATI:

$$V_g = k_C \cos(\omega t - \pi/2) \text{ [V]}, \quad I_g = -k_N \cos(\omega t) \text{ [A]}, \quad R_1 = 3 \text{ } [\Omega], \quad R_2 = 2 \text{ } [\Omega], \quad C = 250 \text{ } [\mu\text{F}], \quad L = 0.5 \text{ } [\text{mH}], \quad \omega = 4000 \text{ } [\text{rad/s}]$$

Calcolo fasori e Impedenze:

$$V_g := -I * k_C; I_g := -k_N;$$

$$Z_{R1} := 3; \quad Z_{R2} := 2; \quad L := 0.0005; \quad C := 0.00025; \quad \omega := 4000;$$

$$Z_L := I * \omega * L; \quad Z_C := -I / (\omega * C);$$

$$Z_{bip} := Z_C + Z_{R1}$$

$$-7i$$

$$-6$$

$$3$$

$$2$$

$$0.0005$$

$$0.00025$$

$$4000$$

$$2.0i$$

$$-1.0 i$$

$$3.0 - 1.0 i$$

Applico il teorema di Millman per trovare la differenza di potenziale ai capi del bipolo:

$$V_m = V_{bip} = (V_g / R_2 + I_g) / ((1/R_2) + (1/Z_L) + (1/Z_{bip}))$$

$$V_m := (V_g / Z_{R2} + I_g) / ((1/R_2) + (1/Z_L) + (1/Z_{bip}))$$

$$-3.53008596 - 11.09169054 i$$

Calcolo le potenze complesse.

Per il bipolo R1-C utilizzo la formula $S = 1/2 |I_{bip}|^2 \times Z$

poi ricavo la potenza istantanea con la formula.

$$P_{ist}(t) = P_{Attiva} + P_{Attiva} \cos(2\omega t + 2 \cdot \text{Arg}(I_{bip})) - P_{Reattiva} \sin(2\omega t + 2 \cdot \text{Arg}(I_{bip}))$$

I_{bip} la trovo come $I_{bip} = V_{bip} / Z_{bip}$

$$I_{bip} := V_m / Z_{bip};$$

$$S_{R1_C} := 1/2 \cdot \text{abs}(I_{bip})^2 \cdot (Z_{bip});$$

$$p_{R1_C} := \text{Re}(S_{R1_C}) + \text{Re}(S_{R1_C}) \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t + 2 \cdot \text{arg}(I_{bip})) - \text{Im}(S_{R1_C}) \cdot \sin(2 \cdot \omega \cdot t + 2 \cdot \text{arg}(I_{bip}));$$

$$0.05014326648 - 3.680515759 i$$

$$20.3230659 - 6.774355301 i$$

$$20.3230659 \cos(8000 t - 3.114346383) + 6.774355301 \sin(8000 t - 3.114346383) + 20.3230659$$

Per calcolare la potenza complessa, il fattore di potenza e la corrente del generatore di tensione V_g, calcolo prima il fasore della corrente I_{Vg}.

$$I_{Vg} := -(V_m - V_g) / R_2$$

$$0.5042979943 + 0.5845272206 i$$

$$S_{Vg} := 1/2 \cdot V_g \cdot \text{conjugate}(I_{Vg});$$

$$-2.045845272 - 1.76504298 i$$

$$\text{PHI} := \text{Re}(S_{Vg}) / \text{abs}(S_{Vg})$$

$$-0.7571567292$$

$$i_{Vg}(t) := \text{abs}(I_{Vg}) \cdot \cos(\omega \cdot t + \text{Arg}(I_{Vg}))$$

$$0.7720029396 \cos(4000 t + \text{Arg}(0.5042979943 + 0.5845272206 i))$$