

Corso di Elettrotecnica

Esercitazione n°2

Linearità

Un sistema è lineare se soddisfa le proprietà di omogeneità e additività

Linearità=omogeneità+additività

Omogeneità: se l'ingresso viene moltiplicato per un fattore costante, l'uscita risulta moltiplicata per lo stesso fattore

$$v=iR \quad \longrightarrow \quad kiR=kv$$

Additività: la risposta alla somme di più ingressi è pari alla somma delle risposte agli ingressi applicati separatamente

Se abbiamo

$$v_1 = i_1 R$$

$$v_2 = i_2 R$$

Applicando $i_1 + i_2$ otteniamo:

$$v = (i_1 + i_2)R = i_1 R + i_2 R = v_1 + v_2$$

Da un punto di vista matematico, un sistema lineare è descritto da un sistema di equazioni differenziali lineari.

Linearità

Un circuito lineare è costituito da elementi lineari (resistori, condensatori e induttori, generatori dipendenti lineari) e da generatori indipendenti.

Gli ingressi di un circuito lineare sono rappresentati dai generatori indipendenti. Le uscite di un circuito lineare sono di solito le tensioni e le correnti.

Per ottenere il sistema di equazioni lineari che descrive un Circuito Resistivo Lineare (composto solo da generatori e resistori) è sufficiente applicare le 2 leggi di Kirchhoff e la legge di Ohm.

Esistono teoremi delle reti lineari che consentono di ridurre la complessità del circuito da analizzare.

- resistenze in serie;
- resistenze in parallelo;
- principio di sovrapposizione degli effetti;
- teorema di Thevenin;
- teorema di Norton;
- teorema di Millman.

Sovrapposizione degli effetti

Il principio di sovrapposizione degli effetti (PSE) afferma che l'effetto dovuto all'azione di più cause concomitanti è pari alla somma degli effetti che si ottengono quando ciascuna causa agisce da sola.

Il PSE per un circuito lineare: una tensione (o una corrente) in un circuito lineare è pari alla somma algebrica delle tensioni (o delle correnti) che si ottengono quando ciascuno dei generatori indipendenti agisce da solo.

Sovrapposizione degli effetti

Il PSE non può essere usato per calcolare direttamente la potenza su un elemento!
(La potenza non è una funzione lineare di tensioni e correnti)

Se su un resistore abbiamo una corrente i_1 dovuta all'azione di un generatore e una corrente i_2 dovuta all'azione di un altro generatore, non possiamo calcolare le singole potenze e poi sommarle, perché:

$$\begin{aligned} p_1 &= Ri_1^2 \\ p_2 &= Ri_2^2 \end{aligned}$$

Ma la potenza effettiva sul resistore sarà

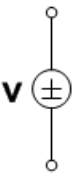
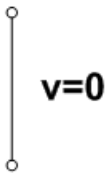

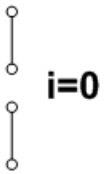
$$p = R(i_1 + i_2)^2 \neq p_1 + p_2$$

Possiamo quindi calcolare la corrente (o la tensione) TOTALE sul resistore e poi usarla per calcolare la potenza

Sovrapposizione degli effetti

Applicazione del PSE

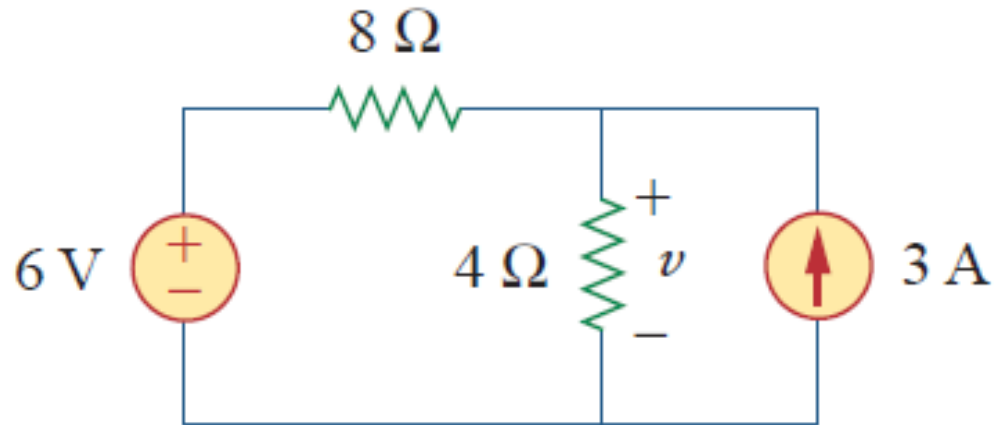
1. Spegner tutti i generatori indipendenti eccetto uno.
2. Calcolare il valore dell'uscita (tensione o corrente) dovuto al solo generatore funzionante.
3. Ripetere i passi precedenti per ciascuno degli altri generatori indipendenti.
4. Calcolare il contributo totale sommando algebricamente tutti i contributi dei generatori indipendenti (fare attenzione ai versi).

Spegnimento dei generatori		
	acceso	spento
generatore di tensione		
generatore di corrente		

Sovrapposizione degli effetti

Esercizio

Dato il circuito sottostante usare il PSE per trovare v



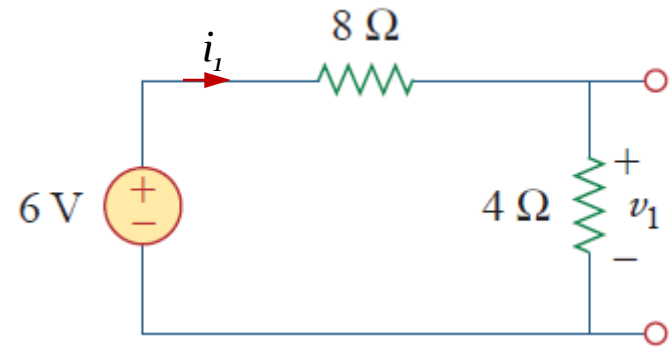
Sovrapposizione degli effetti

Soluzione

Spegniamo il generatore di corrente

$$12i_1 - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_1 = 0.5 \text{ A}$$

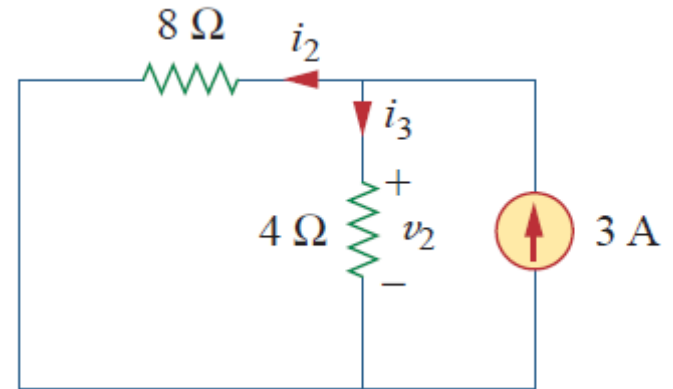
$$v_1 = 4i_1 = 2 \text{ V}$$



Spegniamo il generatore di tensione

$$i_3 = \frac{8}{4 + 8}(3) = 2 \text{ A}$$

$$v_2 = 4i_3 = 8 \text{ V}$$

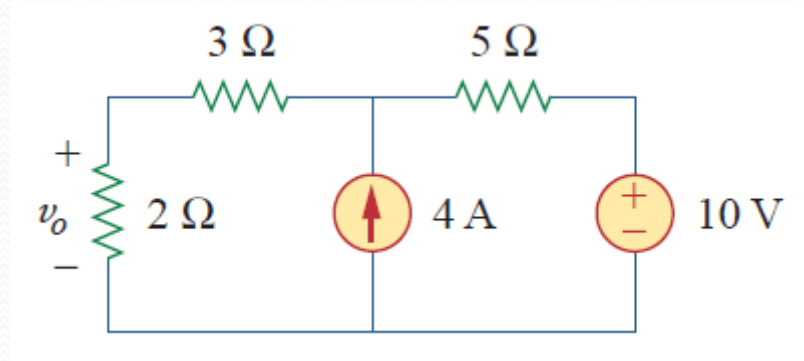


$$v = v_1 + v_2 = 2 + 8 = 10 \text{ V}$$

Sovrapposizione degli effetti

Esercizio

Dato il circuito sottostante usare il PSE per trovare V_o



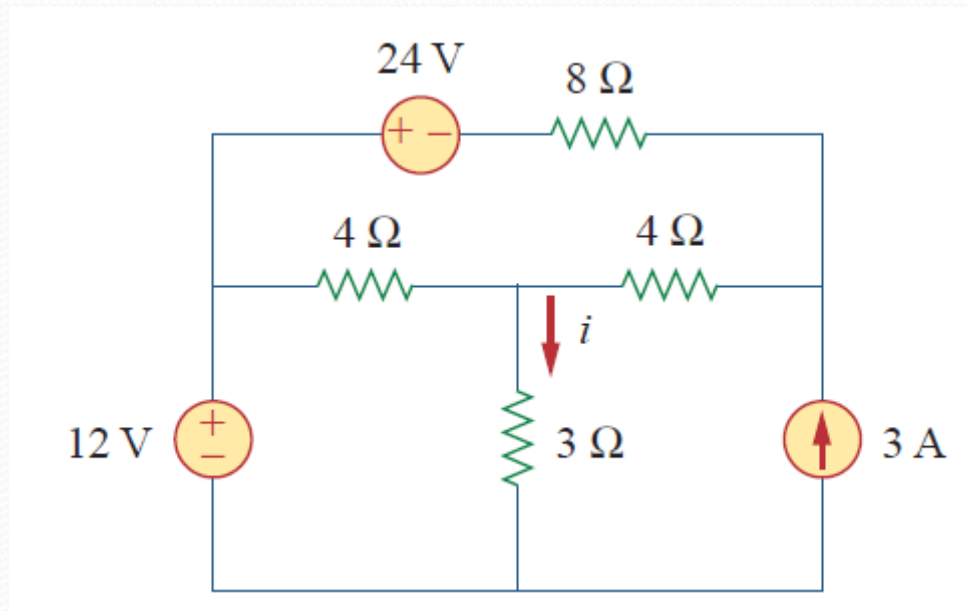
Soluzione

$V_o = 6\text{ V}$

Sovrapposizione degli effetti

Esercizio

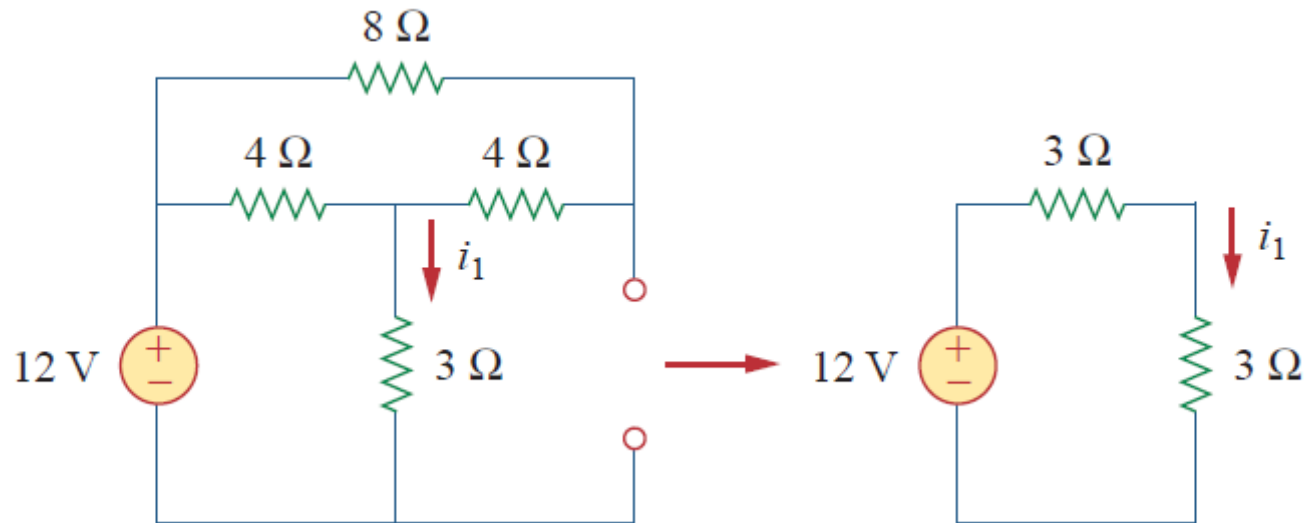
Dato il circuito sottostante usare il PSE per trovare i



Sovrapposizione degli effetti

Soluzione

Spegniamo il generatore di corrente e quello di tensione da 24V



$$(8\Omega + 4\Omega) || 4\Omega = 3\Omega$$

$$i_1 = \frac{12}{6} = 2 \text{ A}$$

Sovrapposizione degli effetti

Soluzione (continua)

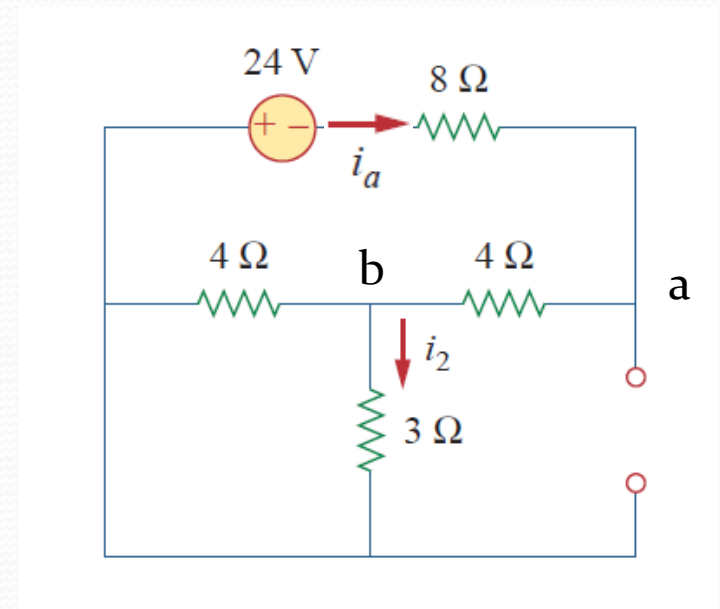
Spegniamo il generatore di corrente e quello di tensione da 12V

$$4\Omega || 3\Omega = 1,71\Omega$$

$$i_a = \frac{-24V}{8\Omega + 4\Omega + 1,71\Omega} = -1,75A$$

Partitore di corrente nodo b

$$i_2 = \frac{4\Omega}{4\Omega + 3\Omega} i_a = -1A$$



Sovrapposizione degli effetti

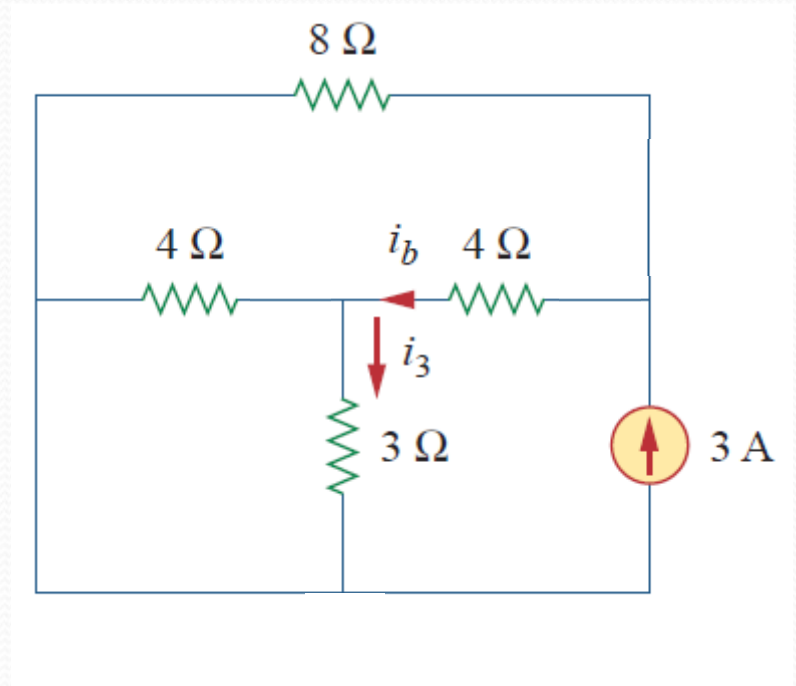
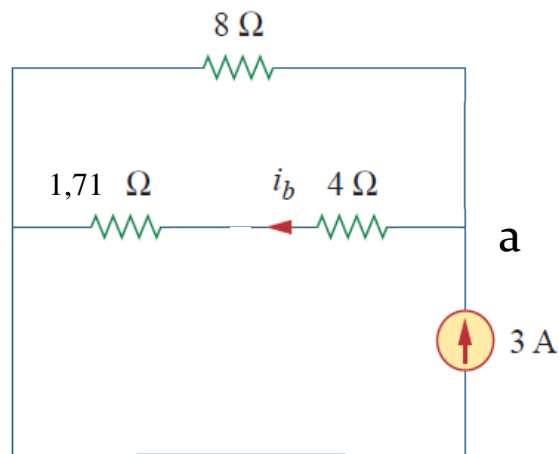
Soluzione (continua)

Spegniamo i generatori di tensione e lasciamo solo quello di corrente

$$4\Omega || 3\Omega = 1,71\Omega$$

Partitore di corrente al nodo a

$$i_b = \frac{8\Omega}{8\Omega + 4\Omega + 1,71\Omega} 3A = 1,75A$$

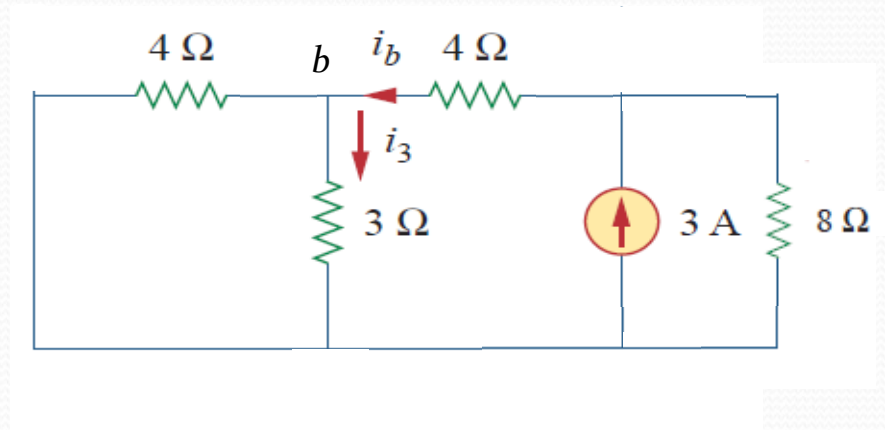


Sovrapposizione degli effetti

Soluzione (continua)

Il circuito può essere ridisegnato come in figura a destra.

Possiamo usare un partitore di corrente per ricavare i_3 al nodo b



Partitore di corrente nodo b

$$i_3 = \frac{4\Omega}{4\Omega + 3\Omega} i_b = 1A$$

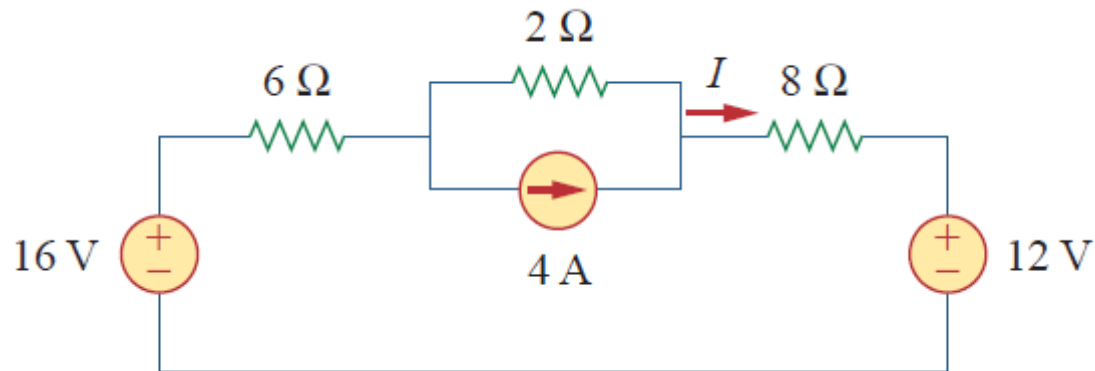
Sommiamo tutte e tre le componenti dovute all'azione di ogni singolo generatore per ottenere la corrente totale sulla resistenza da 3Ω

$$i = i_1 + i_2 + i_3 = 2 - 1 + 1 = 2A$$

Sovrapposizione degli effetti

Esercizio

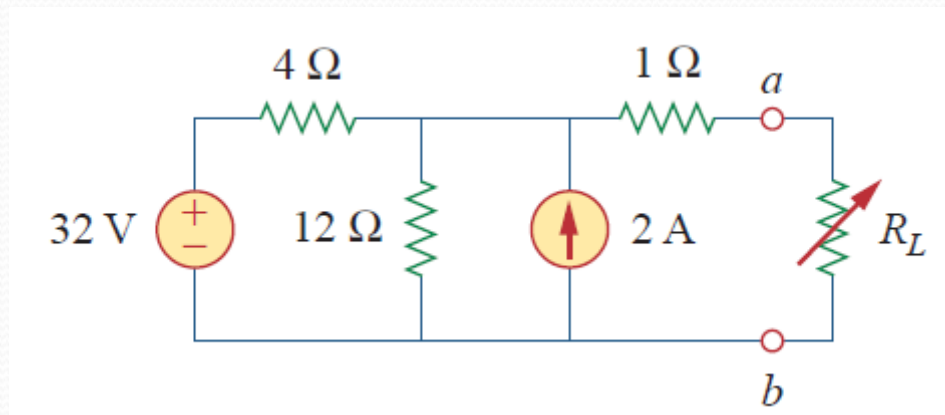
Dato il circuito sottostante usare il PSE per trovare I



Soluzione

$$I = 0,75 \text{ A}$$

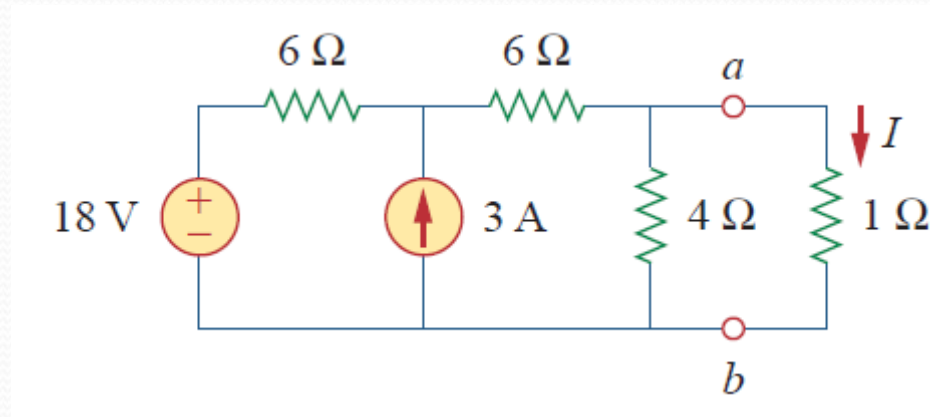
Sovrapposizione degli effetti



Sovrapposizione

Esercizio

Determinare I con PSE



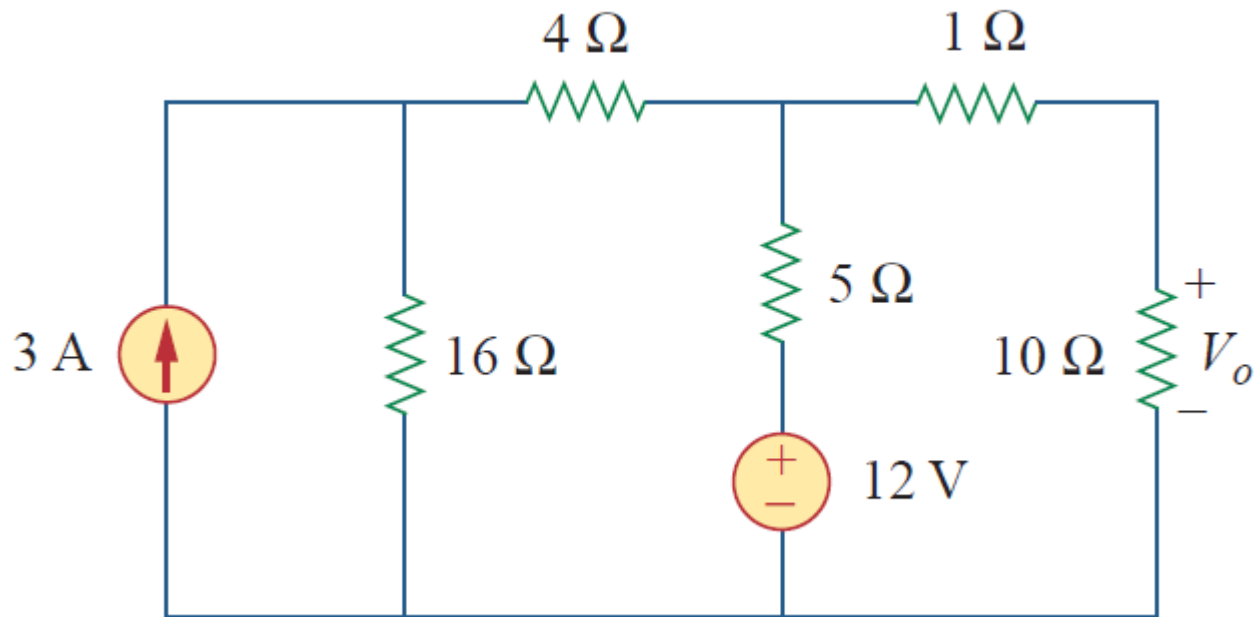
Soluzione

$$I = 2.25 \text{ A.}$$

Sovrapposizione

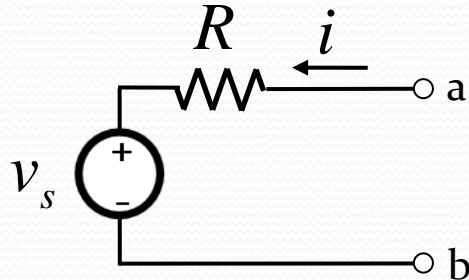
Esercizio

Determinare V_0 con PSE

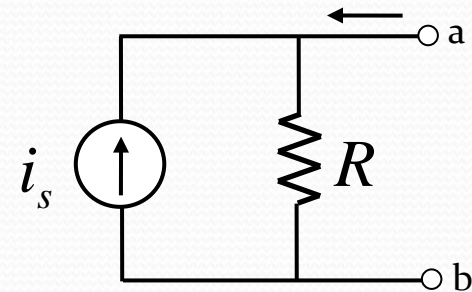
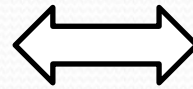


Trasformazione di generatori

Una **trasformazione di generatori** è l'operazione di sostituzione di un generatore di tensione v_s in serie a un resistore R con un generatore di corrente i_s in parallelo a un resistore R , o viceversa.



$$v_s = Ri_s$$



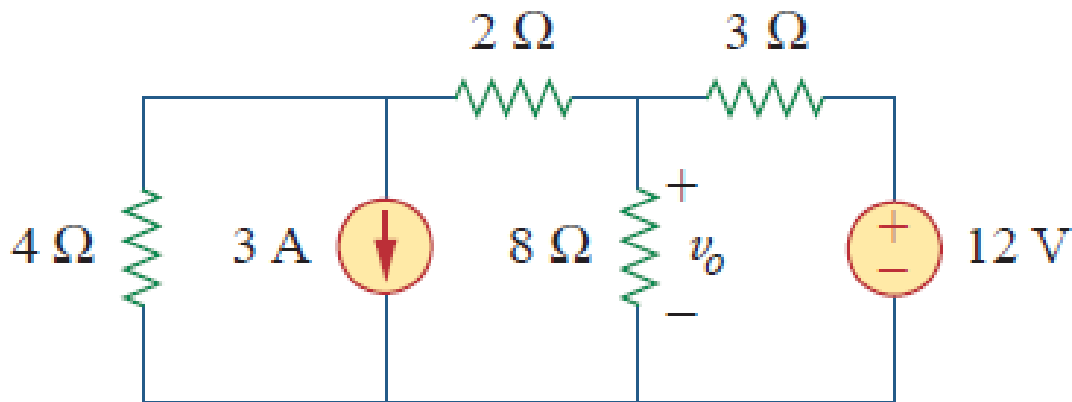
$$i_s = \frac{v_s}{R}$$

La trasformazione si applica anche ai generatori dipendenti ma
NON SI APPLICA AI GENERATORI IDEALI DI TENSIONE E CORRENTE
(cioè solo al generatore senza resistenza)

Trasformazione di generatori

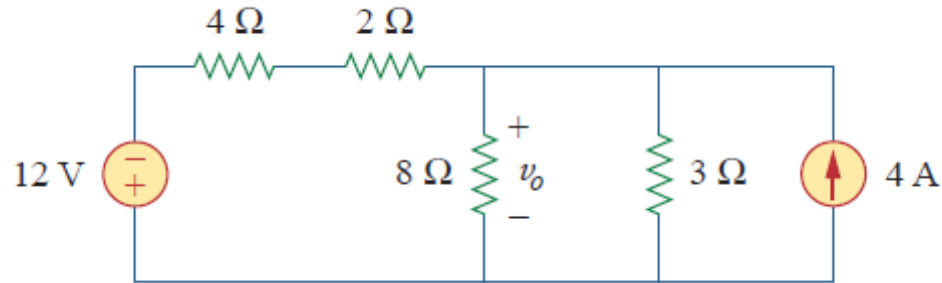
Esercizio

Usare la trasformazione dei generatori per trovare v_o nel circuito in figura



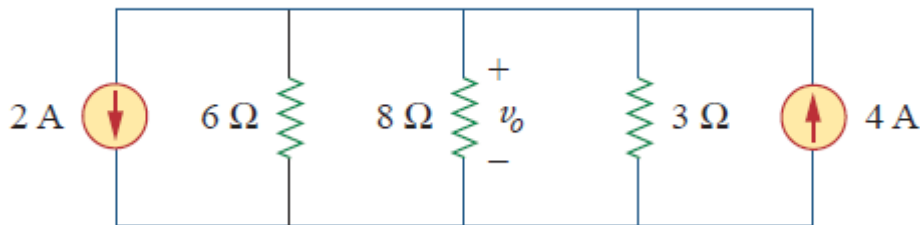
Trasformazione di generatori

Soluzione



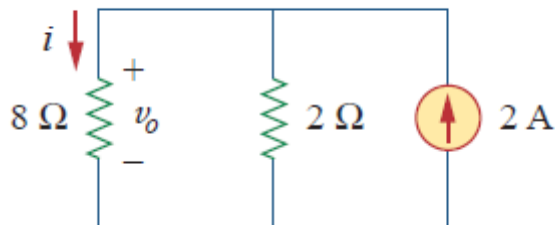
$$4\Omega + 2\Omega = 6\Omega$$

E poi ritrasformiamo il generatore di tensione in corrente



$$6\Omega || 3\Omega = 2\Omega$$

E sommiamo i generatori di corrente perché sono in parallelo



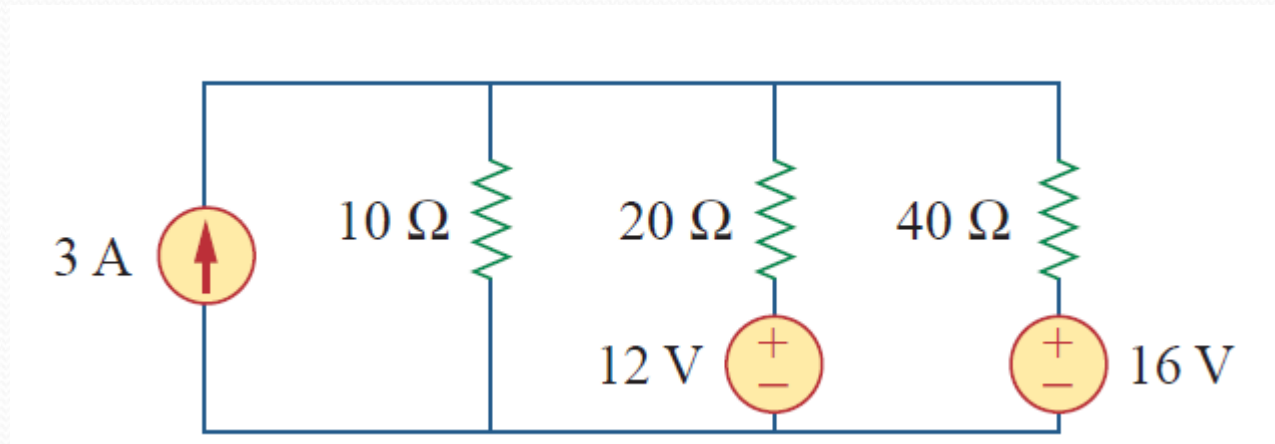
$$i = \frac{2}{2 + 8}(2) = 0.4 \text{ A}$$

$$v_o = 8i = 8(0.4) = 3.2 \text{ V}$$

Trasformazione di generatori

Esercizio

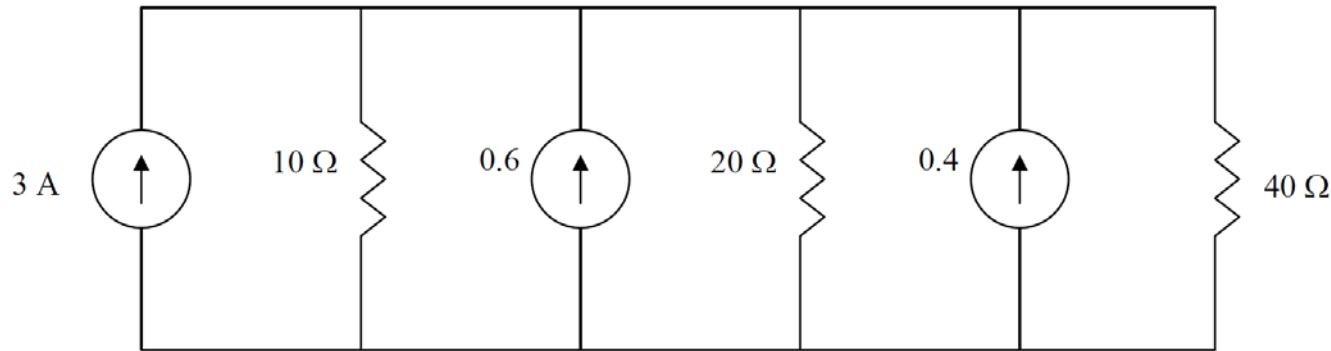
Usare la trasformazione dei generatori per ridurre il circuito in figura ad un solo generatore di tensione in serie ad una resistenza



Trasformazione di generatori

Soluzione

Convertiamo i generatori di tensione in corrente



Le resistenze sono in parallelo e possiamo trovarne l'equivalente. I generatori di corrente sono in parallelo e si possono sommare.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} = 0.1 + 0.05 + 0.025 = 0.175 \quad \longrightarrow \quad R_{eq} = 5.714 \, \Omega$$

$$I_{eq} = 3 + 0.6 + 0.4 = 4$$

