Elettrotecnica-A

Parte 3°

Potenza in Regime Permanente Sinusoidale e Sistemi trifase

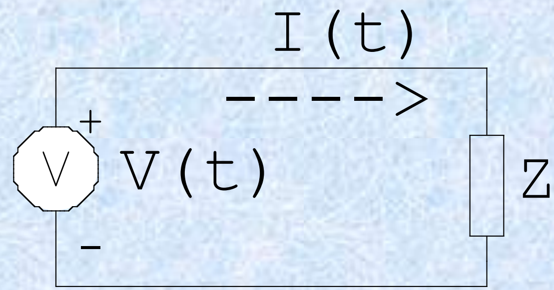
Prof. Pietro Burrascano

Polo Scientifico Didattico di Terni - University of Perugia

Perugia - Italy

Potenza in regime sinusoidale

- Potenza istantanea ceduta ad un bipolo:



$$p(t) = \frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = I(t)\,V(t)$$

- **SE** v(t) ed i(t) hanno andamenti generici, p(t) avrà andamento conseguente

- **SE** invece l'andamento delle grandezze elettriche è sinusoidale **ALLORA** sarà noto il tipo di andamento della potenza istantanea.

DEFINIAMO GRANDEZZE MEDIE CHE CARATTERIZZANO ENERGETICAMENTE I DIVERSI ASPETTI DELLO SCAMBIO

- Esprimiamo gli andamenti NEL TEMPO v(t) ed i(t) in termini di fasori:

$$v(t)=\frac{1}{2}\left[\overline{V}e^{j\omega_0 t}+\overline{V}^* e^{-j\omega_0 t}\right];\quad i(t)=\frac{1}{2}\left[\overline{I}e^{j\omega_0 t}+\overline{I}^* e^{-j\omega_0 t}\right]$$

- Si ha quindi per la POTENZA ISTANTANEA in funzione dei fasori:

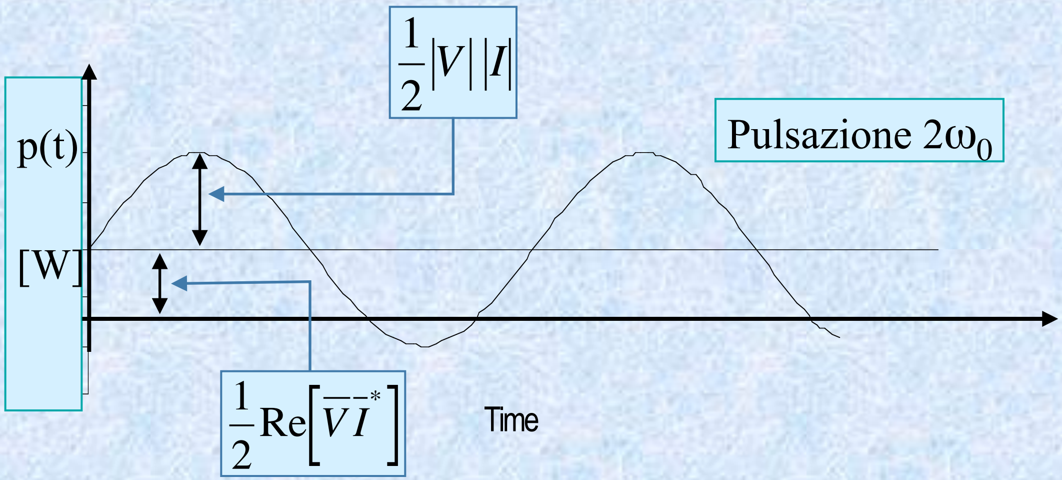
$$p(t)=v(t)i(t)=\left(\frac{1}{2}\left[\overline{V}e^{j\omega_0 t}+\overline{V}^* e^{-j\omega_0 t}\right]\right)\left(\frac{1}{2}\left[\overline{I}e^{j\omega_0 t}+\overline{I}^* e^{-j\omega_0 t}\right]\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\overline{V}\,\overline{I}^*+\overline{V}^*\overline{I}\right]+\frac{1}{4}\left[\overline{V}\,\overline{I}e^{j2\omega_0 t}+\overline{V}^*\overline{I}^* e^{-j2\omega_0 t}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\overline{V}\,\overline{I}^*\right]+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\overline{V}\,\overline{I}e^{j2\omega_0 t}\right]$$

$$p(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\overline{V}\,\overline{I}^{*}\right] + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\overline{V}\,\overline{I}e^{j2\omega_0 t}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\overline{V}\,\overline{I}^{*}\right] + \frac{1}{2}|V|\,|I|\cos\left(2\omega_0 t + \varphi_v + \varphi_i\right)$$

Costante | Variabile: sinusoide di pulsazione $2\omega_0$

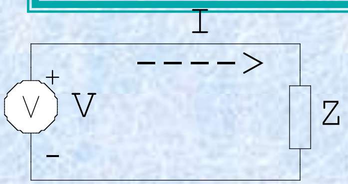


La parte costante di p(t) è la potenza ceduta IN MEDIA dal generatore al carico

Media su un intervallo infinito o su un numero intero di semiperiodi delle grandezze elettriche a pulsazione ω_0

POTENZA ATTIVA

POTENZA ATTIVA



$$Pa = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\overline{V}\,\overline{I}^{*}\right] \qquad [Watt]$$

Per un bipolo di imped. Z i fasori di V ed I sono direttamente legati

$$\overline{Z} = Ze^{j\phi_z} = \frac{\overline{V}}{\overline{I}} = \frac{Ve^{j\phi_v}}{Ie^{j\phi_i}} = \frac{V}{I}e^{j(\phi_v-\phi_i)} = \frac{V}{I}e^{j\phi_z}$$

$$Pa = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\overline{V}\,\overline{I}^{*}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[Ve^{j\phi_v}Ie^{-j\phi_i}\right] = \frac{1}{2}VI\cos\left(\phi_v-\phi_i\right) = \frac{1}{2}VI\cos\Phi$$

$$\Phi = \left(\phi_v-\phi_i\right) = \phi_Z \qquad \cos(\Phi): \textit{fattore di potenza}$$

possiamo esprimere Pa in funzione dell’impedenza Z del bipolo:

$$Pa = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\overline{V}\,\overline{I}^{*}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\overline{V}\,\frac{\overline{V}^{*}}{\overline{Z}^{*}}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\overline{V}\,\overline{V}^{*}\,\overline{Y}^{*}\right] = \frac{1}{2}|V|^2\,\mathrm{Re}\left[\overline{Y}^{*}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\overline{Z}\,\overline{I}\,\overline{I}^{*}\right] = \frac{1}{2}|I|^2\,\mathrm{Re}\left[\overline{Z}\right]$$

Valore efficace

Pa ceduta al carico R da una grandezza periodica:

$$\textbf{se } i(t) = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi_i) = |I| \cos(\omega_0 t + \varphi_i) \textbf{ e se } \overline{Z} = R + jI$$

$$Pa = \frac{1}{2}|I|^2 \operatorname{Re}\left[\overline{Z}\right] = \frac{1}{2}|I|^2 R \qquad = \frac{1}{2} I_m^2 R$$

Una corrente costante Icost **cederebbe** allo stesso carico R una potenza pari alla Pa ceduta dalla grandezza periodica **SE**:

$$P_{\cos t} = I_{\cos t}^2 R \hat{=} \frac{1}{2} I_m^2 R = P_a \qquad \text{cioè SE:}$$

$$I_{\cos t}^2 \hat{=} I_{eff}^2 = \frac{1}{2} I_m^2 \quad ; \quad I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{2} I_m^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_m = \frac{|I|}{\sqrt{2}}$$

>>>

>> segue valore efficace

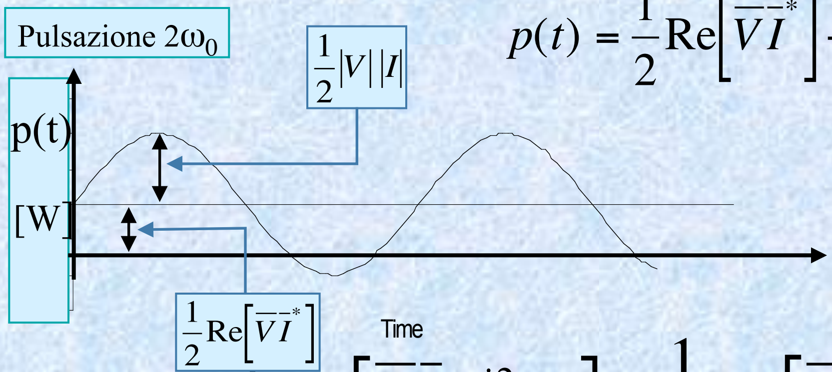
- Nel caso generale di corrente periodica NON sinusoidale vale:

$$P_{\cos t} = P_{media} \quad \text{da cui} \quad I_{eff}^2 R = \frac{R}{T}\int_0^T i(t)^2\,dt \quad \text{cioè} \quad I_{eff} = \left(\frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2\,dt\right)^{1/2}$$

POTENZA ATTIVA IN FUNZIONE DELLE GRANDEZZE EFFICACI

$$Pa = \frac{1}{2} VI\cos(\Phi) = V_{eff} I_{eff}\cos(\Phi)$$

CARATTERIZZAZIONE DELLA PARTE VARIABILE DELLA p(t)



$$p(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\bar{V}\bar{I}^*\right] + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\bar{V}\bar{I}e^{j2\omega_0 t}\right] = \underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\bar{V}\bar{I}^*\right]}_{\text{Costante}} + \underbrace{\frac{1}{2}|V||I|\cos(2\omega_0 t + \varphi_v + \varphi_i)}_{\text{Variabile: sinusoide di pulsazione } 2\omega_0}$$

$$p_v(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\bar{V}\bar{I}e^{j2\omega_0 t}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\bar{V}\bar{I}e^{-j2\varphi_i}e^{j(2\omega_0 t + 2\varphi_i)}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\bar{V}\bar{I}^* e^{j(2\omega_0 t + 2\varphi_i)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\left(\mathrm{Re}\left[\bar{V}\bar{I}^*\right] + j\,\mathrm{Im}\left[\bar{V}\bar{I}^*\right]\right)\left(\cos(2\omega_0 t + 2\varphi_i) + j\sin(2\omega_0 t + 2\varphi_i)\right)\right] =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\bar{V}\bar{I}^*\right]\cos(2\omega_0 t + 2\varphi_i)}_{1} - \underbrace{\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\bar{V}\bar{I}^*\right]\sin(2\omega_0 t + 2\varphi_i)}_{2}$$

2 ADDENDI DI $p_v(t)$ LEGATI A 2 CAUSE DI VARIABILITA' DI p(t)

$$p_v(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\overline{V}\,\overline{I}^*\right]\cos\left(2\omega_0 t + 2\varphi_i\right) - \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\overline{V}\,\overline{I}^*\right]\sin\left(2\omega_0 t + 2\varphi_i\right)$$

- Variabilità di p(t) per:
  - Andamento sinusoidale delle grandezze elettriche
  - Presenza di elementi immagazzinatori di energia

In assenza di elementi reattivi (Φ=0) il secondo addendo è nullo

$$Im\left[\overline{V}\,\overline{I}^*\right]\Big|_{\Phi=0} = Im\left[|V|\,|I|\left(\cos\Phi + j\sin\Phi\right)\right]\Big|_{\Phi=0} = 0$$

Associamo al secondo addendo la misura della variabilità di p(t) legata alla presenza di elementi reattivi

L'ampiezza del secondo addendo come misura della parte variabile: POTENZA REATTIVA

$$P_R = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\overline{V}\,\overline{I}^*\right] \qquad [VAR]$$

$$= \frac{1}{2}|V||I|\sin(\varphi_v - \varphi_i) = \frac{1}{2}|V||I|\sin\Phi = V_{eff} I_{eff} \sin\Phi$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\left(\overline{Z}\,\overline{I}\right)\overline{I}^*\right] = \frac{1}{2}|I|^2 \mathrm{Im}\left[\overline{Z}\right] = \left|I_{eff}\right|^2 \mathrm{Im}\left[\overline{Z}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\overline{V}\left(\overline{V}^*\,\overline{Y}^*\right)\right] = \frac{1}{2}|V|^2 \mathrm{Im}\left[\overline{Y}^*\right] = \frac{1}{2}|V|^2 \mathrm{Im}\left[\mathrm{Re}\left[\overline{Y}\right] - j\,\mathrm{Im}\left[\overline{Y}\right]\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}|V|^2 \mathrm{Im}\left[\overline{Y}\right] = -\left|V_{eff}\right|^2 \mathrm{Im}\left[\overline{Y}\right]$$

- Misura scambi energetici con elementi immagazzinatori

- Potenza attiva e reattiva parti reale ed immaginaria di una stessa quantità: POTENZA COMPLESSA

$$P_A = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\overline{V}\,\overline{I}^{*}\right]; \quad P_R = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\overline{V}\,\overline{I}^{*}\right]$$

$$P_c = \frac{1}{2}\overline{V}\,\overline{I}^{*} \quad [voltampere]$$

- Modulo della potenza complessa: POTENZA APPARENTE

$$P_{APP} = \frac{1}{2}\left|\overline{V}\,\overline{I}^{*}\right| \quad [voltampere]$$

Conservazione della potenza e bilancio energetico

E' nulla la somma delle potenze complesse assorbite da tutti i rami

$$\sum_{i=1}^{N_{RAMI}} P_{Ci} = 0$$

DIM

ricordando che $\left[\overline{I_A}\right] = -[A]\left[\overline{I_C}\right]; \quad \left[\overline{V_C}\right] = -[B]\left[\overline{V_A}\right] = [A]^t\left[\overline{V_A}\right]$

$$2\sum_{i=1}^{N_{RAMI}} P_{Ci} = \left[\overline{V}\right]^t\left[\overline{I^*}\right] = \left[\overline{V_A}\right]^t\left[\overline{I_A^*}\right] + \left[\overline{V_C}\right]^t\left[\overline{I_C^*}\right] = \left[\overline{V_A}\right]^t\left(-[A]\left[\overline{I_C^*}\right]\right) - \left(\left[\overline{V_A}\right][B]\right)^t\left[\overline{I_C^*}\right] =$$

$$= -\left[\overline{V_A}\right]^t[A]\left[\overline{I_C^*}\right] + \left[\overline{V_A}\right]^t[A]\left[\overline{I_C^*}\right] = 0$$

- seguono:
  - Conservazione della potenza attiva

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N_{RAMI}} P_{Ai} = 0}$$

infatti $\sum_{i=1}^{N_{RAMI}} P_{Ai} = \sum_{i=1}^{N_{RAMI}} \mathrm{Re}\left[P_{Ci}\right] = \mathrm{Re}\left[\sum_{i=1}^{N_{RAMI}} P_{Ci}\right] = 0$

  - Conservazione della potenza reattiva

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N_{RAMI}} P_{Ri} = 0}$$

infatti $\sum_{i=1}^{N_{RAMI}} P_{Ri} = \sum_{i=1}^{N_{RAMI}} \mathrm{Im}\left[P_{Ci}\right] = \mathrm{Im}\left[\sum_{i=1}^{N_{RAMI}} P_{Ci}\right] = 0$

  - NON VALE INVECE la conservazione della potenza apparente *(operazione modulo NON LINEARE)*

$$\sum_{i=1}^{N_{RAMI}} P_{App\,i} = \sum_{i=1}^{N_{RAMI}} \left|P_{Ci}\right| \neq \left|\sum_{i=1}^{N_{RAMI}} P_{Ci}\right|$$

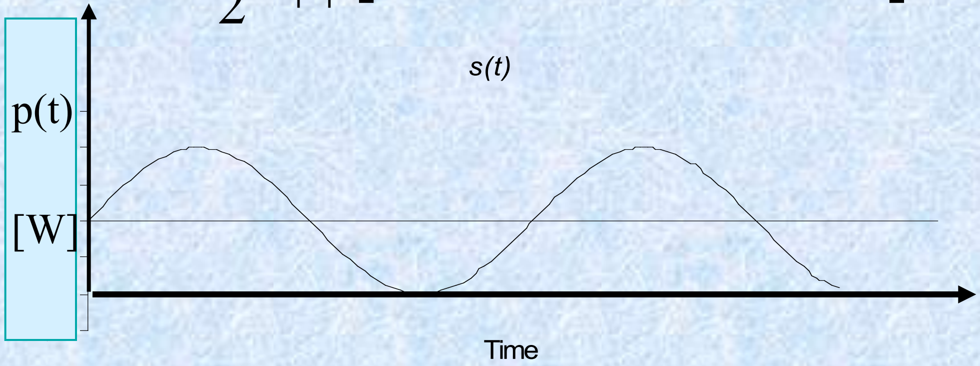
Bilancio energetico

RESISTORE

- Applichiamo le relazioni trovate al caso di alcuni elementi: resistore, condensatore induttore

$$p(t)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\overline{V}\,\overline{I}^{*}\right]+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\overline{V}\,\overline{I}e^{j2\omega_0 t}\right]=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\overline{V}\,\overline{I}^{*}\right]+\frac{1}{2}|V|\,|I|\cos(2\omega_0 t+\varphi_v+\varphi_i)=$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[Z]\left|\overline{I}\right|^2+\frac{1}{2}R|I|\,|I|\cos(2\omega_0 t+\varphi_v+\varphi_i)=\frac{1}{2}R\left|\overline{I}\right|^2\left[1+\cos(2\omega_0 t+\varphi_v+\varphi_i)\right]$$



$$P_{Ci}=\frac{1}{2}\overline{V}\,\overline{I}^{*}=\frac{1}{2}R\overline{I}\,\overline{I}^{*}=\frac{1}{2}R\left|\overline{I}\right|^2$$

POTENZA COMPLESSA PURAMENTE REALE
POTENZA REATTIVA E' NULLA
POTENZA COMPLESSA COINCIDE CON LA POTENZA ATTIVA

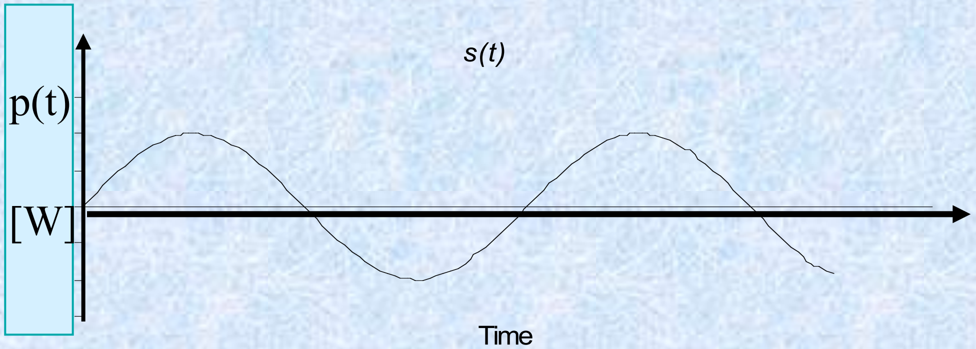
Bilancio energetico

INDUTTORE

$$p(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\overline{V}\,\overline{I}^{*}\right] + \frac{1}{2}|V|\,|I|\cos(2\omega_0 t + \varphi_v + \varphi_i) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[j\omega_0 L\overline{I}\,\overline{I}^{*}\right] + \frac{1}{2}\omega_0 L\left|\overline{I}\right|\left|\overline{I}\right|\cos\left(2\omega_0 t + \left(\varphi_i + \pi/2\right) + \varphi_i\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\omega_0 L\left|\overline{I}\right|^2 \cos\left(2\omega_0 t + 2\varphi_i + \pi/2\right)$$



$$P_{Ci} = \frac{1}{2}\overline{V}\,\overline{I}^{*} = j\frac{1}{2}\omega_0 L\overline{I}\,\overline{I}^{*} = j\frac{1}{2}\omega_0 L\left|\overline{I}\right|^2$$

POTENZA COMPLESSA PURAMENTE IMMAGINARIA
POTENZA ATTIVA E' NULLA
POTENZA COMPLESSA COINCIDE CON LA POTENZA REATTIVA

Bilancio energetico

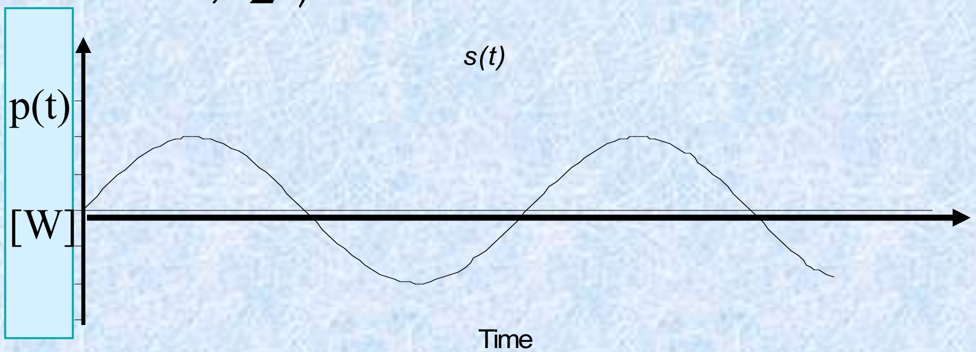
CONDENSATORE

$$p(t) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\overline{V}\,\overline{I}^{*}\right] + \frac{1}{2}|V|\,|I|\cos\left(2\omega_0 t + \varphi_v + \varphi_i\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\overline{V}\left(j\omega_0 C\overline{V}\right)^{*}\right] + \frac{1}{2}\left|\overline{V}\right|\left(\omega_0 C\left|\overline{V}\right|\right)\cos\left(2\omega_0 t + \varphi_v + \left(\varphi_v + \pi/2\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[-j\omega_0 C\left|\overline{V}\right|^2\right] + \frac{1}{2}\omega_0 C\left|\overline{V}\right|^2\cos\left(2\omega_0 t + 2\varphi_v + \pi/2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\omega_0 C\left|\overline{V}\right|^2\cos\left(2\omega_0 t + 2\varphi_v + \pi/2\right)$$



$$P_{Ci} = \frac{1}{2}\overline{V}\,\overline{I}^{*} = j\frac{1}{2}\omega_0 C\overline{V}\,\overline{V}^{*} = -j\frac{1}{2}\omega_0 C\left|\overline{V}\right|^2$$

POTENZA COMPLESSA PURAMENTE IMMAGINARIA E NEGATIVA
POTENZA ATTIVA E' NULLA
POTENZA COMPLESSA COINCIDE CON LA POTENZA REATTIVA

Bilancio energetico

- Dal teorema della conservazione della potenza complessa, scindendo i contributi di potenza complessa dovuti ai diversi tipi di elementi *(hip: solo i generatori erogano Pc→ seguono i segni positivi o negativi degli addendi)*:

$$\sum_{i=1}^{N_{RAMI}} P_{Ci} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N_{GEN}} P_{C\,gen_i}}_{\text{generatori}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{N_R} P_{C\,R_i}}_{\text{resistori}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{N_L} P_{C\,L_i}}_{\text{induttori}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{N_C} P_{C\,C_i}}_{\text{condensatori}} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N_{GEN}} P_{C\,gen_i} = \sum_{i=1}^{N_R} P_{C\,R_i} + \sum_{i=1}^{N_L} P_{C\,L_i} + \sum_{i=1}^{N_C} P_{C\,C_i} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N_R} \frac{1}{2}\left(\left|\overline{V}_i\right|^2 \Big/ R_i\right) + \sum_{i=1}^{N_L} j\frac{1}{2}\omega_0 L_i \left|\overline{I}_i\right|^2 + \sum_{i=1}^{N_C}\left(-j\frac{1}{2}\omega_0 C_i \left|\overline{V}_i\right|^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_R}\left(\left|\overline{V}_i\right|^2 \Big/ R_i\right) + \frac{j\omega_0}{2}\left(\sum_{i=1}^{N_L} L_i \left|\overline{I}_i\right|^2 - \sum_{i=1}^{N_C} C_i \left|\overline{V}_i\right|^2\right)$$

Bilancio energetico

$$\sum_{i=1}^{N_{GEN}} P_{C\,gen_i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_R}\left({\left|\overline{V}_i\right|^2}\Big/{R_i} \right) + \frac{j\omega_0}{2}\left(\sum_{i=1}^{N_L} L_i\left|\overline{I}_i\right|^2 - \sum_{i=1}^{N_C} C_i\left|\overline{V}_i\right|^2 \right)$$

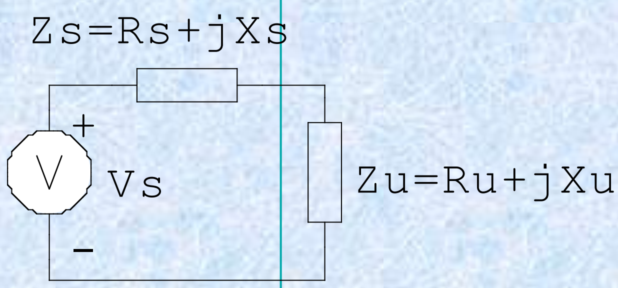
- Scindendo la parte reale e la immaginaria: in un circuito in regime permanente sinusoidale
  - Σ potenze attive EROGATE dai generatori uguaglia Σ potenze attive ASSORBITE dai resistori
  - Σ potenze reattive SCAMBIATE dai generatori uguaglia Σ algebrica potenze reattive SCAMBIATE da condensatori ed induttori

TRASFERIMENTO DI ENERGIA VERSO BIPOLI E RIFASAMENTO

TRASFERIMENTO DI ENERGIA VERSO BIPOLI

- Due situazioni sostanzialmente differenti:
  - Trasmissione di segnali: *trasmissioni radio; cavi sottomarini*
    - Obiettivo: massimizzare la potenza attiva sul carico
  - Trasmissione di energia elettrica: *linee di trasmissione*
    - Obiettivo: massimizzare il rendimento di trasmissione *(minimizzare le perdite)*

Teorema del Massimo trasferimento di potenza attiva



- Dati Vs e Zs determinare il valore di Zu che massimizza la potenza attiva ceduta al carico

$$P_{ATT\ carico} = \frac{1}{2}\left|\overline{I}\right|^2 \mathrm{Re}\left[\overline{Z}_U\right] = \frac{1}{2}\left|\overline{I}\right|^2 R_U =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\overline{V}_S\right|^2 \frac{R_U}{\left(R_U + R_S\right)^2 + \left(X_U + X_S\right)^2}$$

$$\underset{R_U;X_U}{Max}\left(P_{ATT\ carico}\right) \Rightarrow \underset{R_U;X_U}{Min}\left(F = \frac{\left(R_U + R_S\right)^2 + \left(X_U + X_S\right)^2}{R_U}\right)$$

- Si ottiene, uguagliando a zero entrambe le derivate $\left.\frac{\partial F}{\partial R_U}\right|_{X_U = \cos t} ; \left.\frac{\partial F}{\partial X_U}\right|_{R_U = \cos t}$

$$\boxed{R_S = R_U \ ; \quad X_S = -X_U}$$

- Il valore della massima potenza attiva erogabile, detto POTENZA DISPONIBILE, è una caratteristica del generatore:

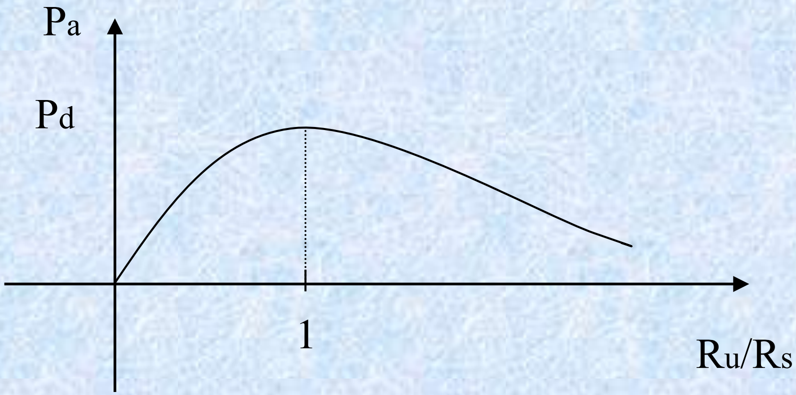
$$P_d = Max\left(P_{ATT\ carico}\right) = P_{ATT\ carico}\Big|_{\substack{R_S = R_U \\ X_S = -X_U}} = \frac{|V_S|^2}{2}\frac{R_S}{(2R_S)^2 + 0} = \frac{|V_S|^2}{8R_S}$$

- osservazioni:
  - La condizione trovata (Zu=Zs*) fa si che, all'adattamento, il generatore <u>ideale</u> vede un carico puramente resistivo;
  - Nel caso Zu sia puramente resistivo (Xu=0), si trova per la max Pa erogabile in tale situazione

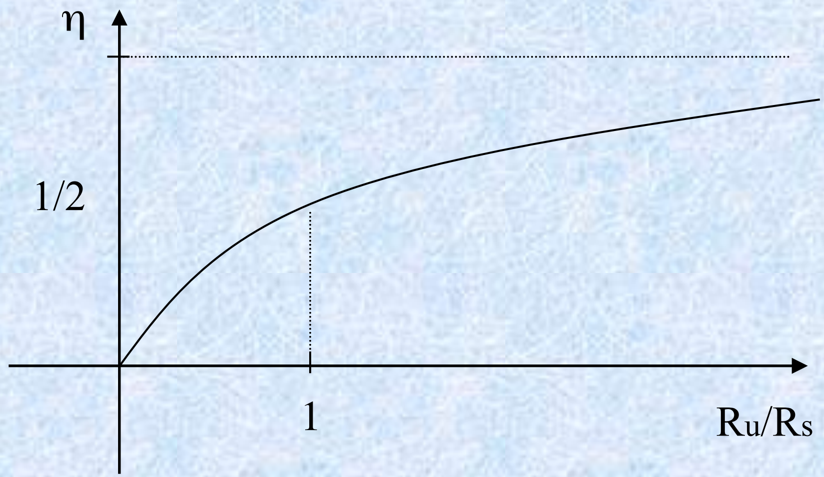
$$R_U = \sqrt{R_S^2 + X_S^2} = |Z_S|$$

Potenza attiva sul carico e Rendimento

$$P_A\Big|_{X_U=-X_S} = \frac{|V_S|^2}{2}\frac{R_U}{(R_U+R_S)^2} = \frac{|V_S|^2}{2R_S}\frac{R_U/R_S}{\left(1+R_U/R_S\right)^2}$$



$$\eta\Big|_{X_U=-X_S} = \frac{\frac{1}{2}|I|^2 R_U}{\frac{1}{2}|I|^2(R_U+R_S)} = \frac{R_U}{(R_U+R_S)} = \frac{R_U/R_S}{\left(1+R_U/R_S\right)}$$



Rifasamento

- Ricordiamo che per la potenza attiva si hanno le espressioni:

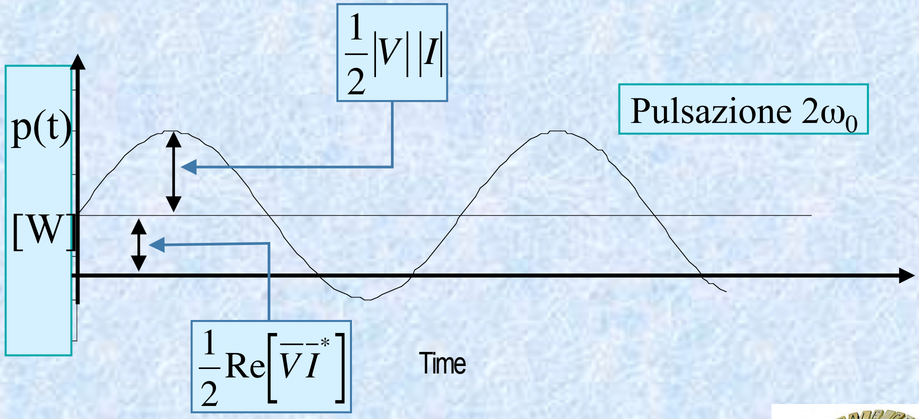
$$Pa = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\overline{V}\,\overline{I}^{*}\right] = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[Ve^{j\varphi_v} Ie^{-j\varphi_i}\right] = \frac{1}{2}VI\,\mathrm{Re}\left[e^{j\varphi_v} e^{-j\varphi_i}\right] = \frac{1}{2}VI\,\mathrm{Re}\left[e^{j\varphi_v - j\varphi_i}\right]$$

$$= \frac{1}{2}VI\,\mathrm{Re}\left[e^{j\Phi}\right] = \frac{1}{2}VI\,\mathrm{Re}\left[\cos\Phi + j\sin\Phi\right] = \frac{1}{2}VI\cos\Phi$$

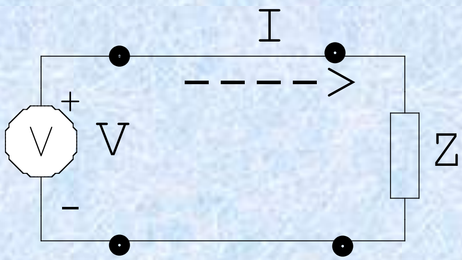
- Analogamente per la potenza reattiva:

$$P_R = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[\overline{V}\,\overline{I}^{*}\right] = \frac{1}{2}VI\,\mathrm{Im}\left[\cos\Phi + j\sin\Phi\right] = \frac{1}{2}VI\sin\Phi$$

- La P_R misura lo scambio NON UTILE fra generatore e carico; in presenza di linea dissipativa, a tale scambio sono associate PERDITE



- Il valore di P_R legato al valore dello sfasamento Φ, a sua volta legato all'impedenza offerta dal carico:

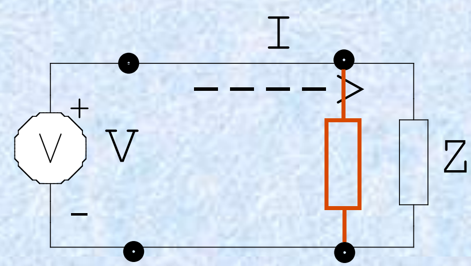


$$\overline{V} = Ve^{j\varphi_v} = \overline{Z}\,\overline{I} = Ze^{j\varphi_z} Ie^{j\varphi_i}$$

$$Ze^{j\varphi_z} = \frac{Ve^{j\varphi_v}}{Ie^{j\varphi_i}} = \frac{V}{I}e^{j\varphi_v-\varphi_i} = \frac{V}{I}e^{j\Phi}$$

PER MINIMIZZARE LE PERDITE SULLA LINEA MINIMIZZARE P_R: IL CARICO DEVE ESSERE MODIFICATO PER APPARIRE RESISTIVO ALLA LINEA

- Aggiunta di un elemento *(reattivo: non dissipativo)* a modificare l'impedenza offerta
- *Lo scambio energetico non utile avviene fra carico e bipolo di rifasamento, senza coinvolgere la linea.*

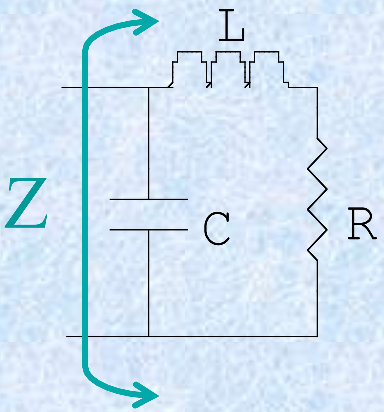


- Carico tipicamente induttivo: aggiunta di un condensatore di RIFASAMENTO *(in inglese power factor correction)*

$$\overline{Z} = \frac{1}{j\omega C + \dfrac{1}{j\omega L + R}} = \frac{j\omega L + R}{-\omega^2 LC + j\omega RC + 1} = \frac{\left(j\omega L + R\right)}{\left(1-\omega^2 LC\right) + j\omega RC} =$$

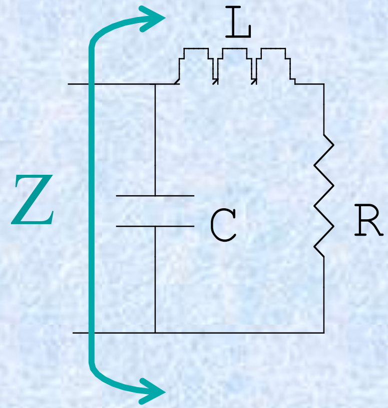
$$= \frac{\left(j\omega L + R\right)\left[\left(1-\omega^2 LC\right) - j\omega RC\right]}{\left(1-\omega^2 LC\right)^2 + \left(\omega RC\right)^2}$$

$$\mathrm{Im}\left[Z\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega L\left(1-\omega^2 LC\right) - \omega R^2 C = 0 \quad \Rightarrow \quad L - C\left(\omega^2 L^2 + R^2\right) = 0$$



$$\boxed{C = \frac{L}{\left(\omega^2 L^2 + R^2\right)}}$$

ESEMPIO

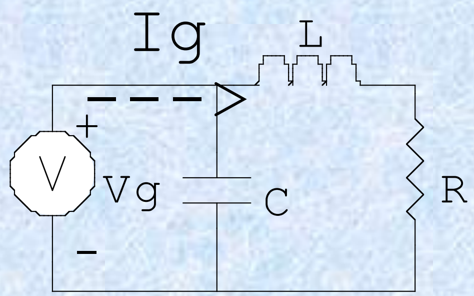


$$C = \frac{L}{\left(\omega^2 L^2 + R^2\right)}$$

$$\omega_0 = 2\pi 50\,[rad/s] \qquad L = 1\,[mH] = 10^{-3}\,[H]; \qquad R = 10\,[\Omega]$$

$$C = \frac{10^{-3}}{(2\pi 50)^2 \left(10^{-3}\right)^2 + (10)^2} = \frac{10^{-3}}{100{,}0986} = 10^{-5}\,[F] = 10\,[\mu F]$$

ESERCIZIO



- Calcolare la capacità C necessaria a rifasare il carico;
- Calcolare il fasore I_g, la P_A e la P_R sia a carico rifasato che in assenza di rifasamento.

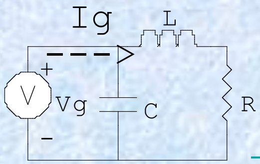
$$L = 0{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{[Henry]};\ R=5\text{[Ohm]};\ f= 50\ \text{[Hz]};\ \left|V_g\right| = 380\ \text{[V]}$$

Soluzione:

C rifasamento: $7{,}99874 \cdot 10^{-6}$ [Farad]

Carico rifasato Ig=75.988 exp- j3.14159; Pcomplessa=14437.7- j0.0286502

Carico in assenza di rifasamento Ig=75.994 exp j3.12903; Pcomplessa = 14437.7+ j181.43



Soluzione ESERCIZIO

L= 0,2*10^{-3} [Henry]; R=5[Ohm]; f= 50 [Hz]; $\left|V_g\right|$ = 380 [V]

$$\boxed{C = \frac{L}{\left(\omega^2 L^2 + R^2\right)} = \frac{0.0002}{\left((2\pi 50)^2 (0.0002)^2 + 5^2\right)} = 7.99874 \times 10^{-6} \left[F\right]}$$

Carico NON rifasato:

$$I_{RL} = \frac{V_g}{Z_{serie}} = \frac{380}{j\omega L + R} = \frac{380}{j2\pi 50 \times 0.2 + 5} = \cdots = 76.0 e^{-j0.01256} = 75.994 - j0,9545$$

$$P_c = \frac{1}{2} Vg\, I_{RL}^* \frac{1}{2} 380 \times 76.0 e^{+j0.01256} = 1440.e^{+j0.01256} = 14.438 + j181,36$$

Carico rifasato: la serie R L vede la stessa Vg, per cui vi scorre la stessa corrente; si aggiunge la corrente nel condensatore, che vale:

$$I_C = \frac{V_g}{Z_C} = 380\, j\omega C = \cdots = j0,9548$$

Avrò quindi nel generatore la corrente: $I_{Gen} = I_C + I_{RL} = \cdots = 75.994 + j0,0$

La potenza complessa sarà in questo caso:

$$P_{C\_Rif} = \frac{1}{2} V_g I_{g\_Rif}^* = \frac{1}{2} 380 \times 75.994 = 14.438,86 + j0,0$$