Teoremi delle reti

Linearità

Un sistema è lineare se soddisfa le proprietà di omogeneità e additività

Linearità=omogeneità+additività

Omogeneità: se l'ingresso x(t) viene moltiplicato per un fattore costante, l'uscita y(t) risulta moltiplicata per lo stesso fattore

$$L\{x(t)\} = y(t);$$
$$L\{kx(t)\} = ky(t);$$

Additività: la risposta alla somme di più ingressi è pari alla somma delle risposte agli ingressi applicati separatamente

$$L\{x_1(t)\} = y_1(t); L\{x_2(t)\} = y_2(t);$$
$$L\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t);$$

Un sistema lineare è descritto da un sistema di equazioni differenziali lineari. Un circuito costituito da elementi lineari (e.g. resistori, condensatori e induttori, generatori dipendenti lineari) e da generatori indipendenti è lineare perché le relazioni costitutive dei singoli elementi sono operatori lineari ($v(t) = Ri(t); v(t) = {}^{1}/_{C} \int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\,\tau, v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$) e i sistemi risolutivi sono o sistemi algebrici o sistemi di equazioni differenziali con soli termini lineari

Linearità

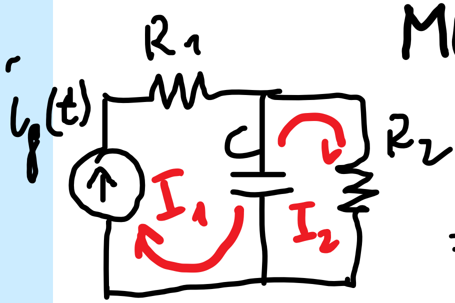
L'analisi di un circuito resistivo ha un sistema risolutivo algebrico del tipo:

$$\left[\hat{R}_{J,K}\right]\begin{bmatrix}I_1\\I_2\\\vdots\\I_N\end{bmatrix}=\left[\alpha\vec{V}^J_{gen}+\beta(\vec{RI}^J_{gen})\right]$$

$$\left[\hat{G}_{J,K}\right]\begin{bmatrix}e_1\\\vdots\\e_N\end{bmatrix}=\left[\alpha\vec{I}^J_{gen}+\beta(\vec{GV}^J_{gen})\right]$$

$\Rightarrow$ la linearità è evidente

L'analisi di un circuito con memoria ha un sistema risolutivo integro differenziale con solo termini lineari



METODO DEGLI ANELLI: KVL 1 $I_1(t)=i_g(t)$

KVC 2 $I_2(t)R_2+V_C(t)=0$ $\quad V_C=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}[I_2(\tau)-I_1(\tau)]\,d\tau$

$$\Rightarrow I_2(t)R_2+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}I_2(\tau)\,d\tau=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i_g(\tau)\,d\tau\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{I}_2(t)R_2+\frac{I_2(t)}{C}=\frac{i_g(t)}{C}\Rightarrow$$ SISTEMA LINEARE

Sovrapposizione degli effetti

Il principio di sovrapposizione degli effetti (PSE) afferma che l'effetto dovuto all'azione di più cause concomitanti è pari alla somma degli effetti che si ottengono quando ciascuna causa agisce da sola.

Il PSE coincide con la proprietà di additività, pertanto è valido per i sistemi lineari.

Il PSE per un circuito lineare: una tensione (o una corrente) in un circuito lineare è pari alla somma delle tensioni (o delle correnti) che si ottengono quando ciascuno dei generatori indipendenti agisce da solo.

La sovrapposizione è basata sul concetto di linearità e quindi non può essere applicata al calcolo della potenza su un elemento (la potenza dipende dal quadrato della tensione o della corrente).

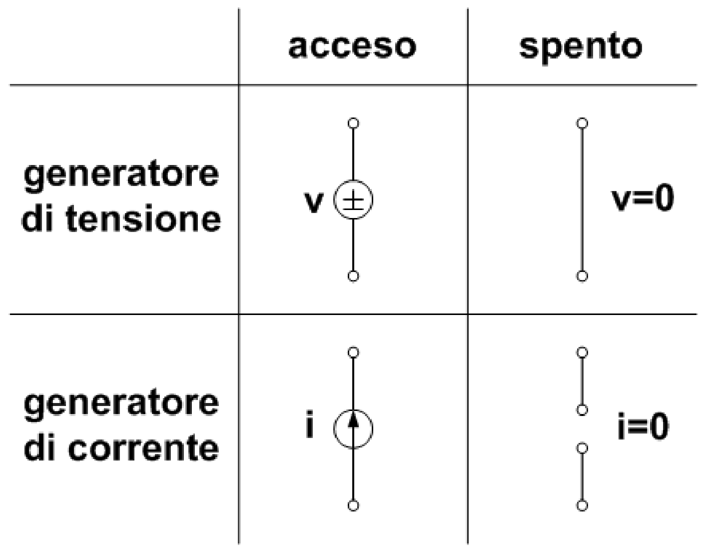
Il PSE può essere usato in alternativa/concomitanza con i metodi di analisi per diminuire la complessità dei sistemi risolutivi degli stessi, soprattutto quando la soluzione del circuito con un singolo generatore alla volta è immediata

Sovrapposizione degli effetti

Applicazione del PSE

1. Spegnere tutti i generatori indipendenti eccetto uno.
2. Calcolare il valore dell'uscita (tensione o corrente) dovuto al solo generatore funzionante.
3. Ripetere i passi precedenti per ciascuno degli altri generatori indipendenti.
4. Calcolare il contributo totale sommando algebricamente tutti i contributi dei generatori indipendenti.

Spegnimento dei generatori



Tempo invarianza, memoria e causalità

Un sistema è tempo invariante quando la relazione causa-effetto non varia nel tempo, ovvero siano x(t) l'ingresso del sistema e y(t) l'uscita del sistema, per un sistema tempo invariante abbiamo:

$$L\{x(t)\} = y(t);$$
$$L\{x(t-t_0)\} = y(t-t_0);$$

Un sistema è con memoria quando l'uscita ad un generico istante t dipende non solo dall'ingresso all'istante t ma anche ad istanti precedenti o successivi

$$ES\colon\ y(t) = arctg\big(x(t)\big); senza\ \ memoria$$
$$y(t) = x(-t); con\ memoria$$
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\,; con\ memoria$$

Tempo invarianza, memoria e causalità

Un sistema con memoria è causale quando l'uscita dipende solo dall'ingresso a quell'istante di tempo o a istanti precedenti

$$ES\colon y(t) = x(-t);\, non\ causale$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\, ;\, causale$$

Teoremi delle reti lineari

Quando non interessa conoscere tutte le grandezze all'interno di un circuito, la risoluzione dei circuiti lineari può essere effettuata tramite l'ausilio di teoremi delle reti lineari che consentono di ridurre la complessità del circuito da analizzare. Cosi come

Teoremi delle reti lineari:

- resistenze in serie;
- resistenze in parallelo;
- trasformazione stella-triangolo e viceversa;
- teorema di Thevenin;
- teorema di Norton;
- teorema di Millman;
- Equivalenza dei generatori reali

Teorema di sostituzione ed equazione di porta

Prima di dimostrare i teoremi delle reti lineari è utile presentare il concetto di equazione di porta e il teorema di sostituzione

EQUAZIONE DI PORTA

Consideriamo una parte di circuito accessibile da una porta composta dai terminali A-B. La tensione $v_{AB}(t)$ e la corrente $i_{AB}(t)$ sono vincolati a soddisfare una relazione del tipo

$$f(v_{AB}(t), i_{AB}(t)) = effetto\ dei\ generatori$$

Per circuiti resistivi lineari in particolare si hanno 2 casi:

Assenza di generatori $\alpha v_{AB}(t) + \beta i_{AB}(t) = 0$ da cui si ricava

$$v_{AB}(t) = R_{AB} i_{AB}(t) \text{ o } iAB(t) = G_{AB} v_{AB}(t)$$

(Resistenza/conduttanza di porta)

Presenza di generatori $\alpha v_{AB}(t) + \beta i_{AB}(t) = cost$

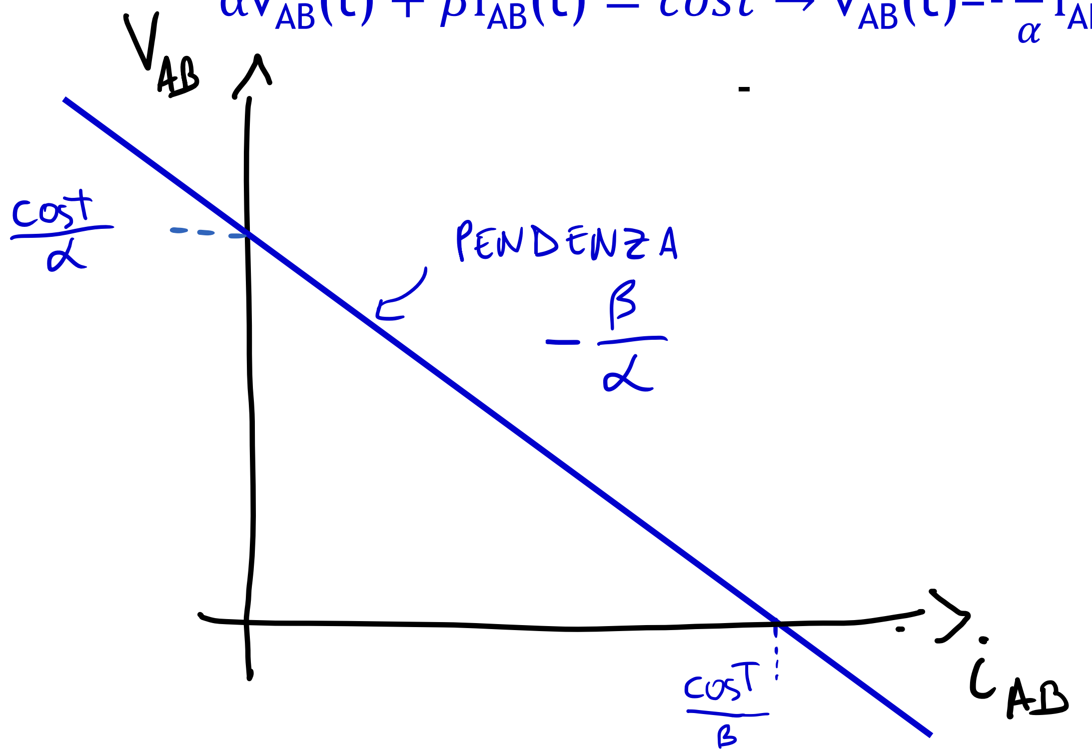
Teorema di sostituzione ed equazione di porta

L'EQUAZIONE DI PORTA individua una curva nel piano i-v dove giacciono i valori delle grandezze di porta che non possono assumere tutti i punti dello spazio bidimensionale

Per circuiti resistivi lineari questa curva è una retta, chiamata retta di carico

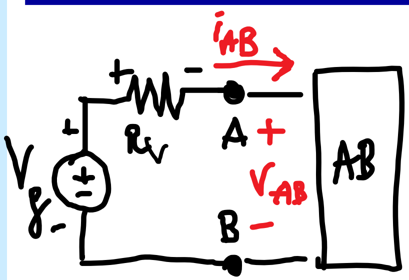
$$\alpha v_{AB}(t) + \beta i_{AB}(t) = cost \rightarrow v_{AB}(t) = -\frac{\beta}{\alpha} i_{AB}(t) + \frac{cost}{\alpha}$$

-



Teorema di sostituzione ed equazione di porta

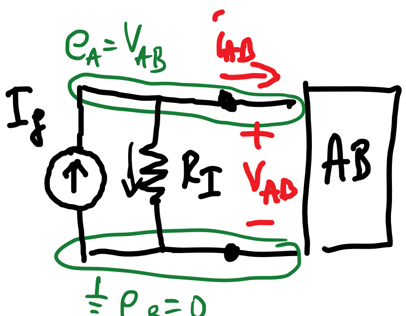
EQUAZIONE DI PORTA: ESEMPI



KVL: $V_{R_g} + V_{AB} = V_g$

$\Rightarrow V_{AB} + R_V i_{AB} = V_g$

$\alpha = 1,\ \beta = R_V,\ \text{cost} = V_g$



KCL: $i_{R_I} + i_{AB} = i_g$

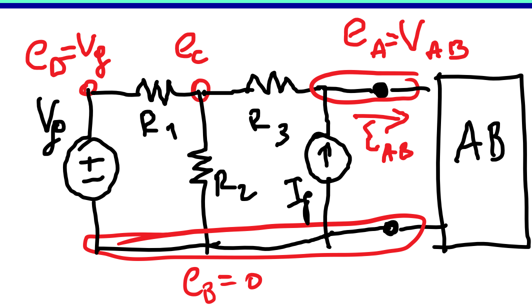
$\Rightarrow \frac{V_{AB}}{R_I} + i_{AB} = i_g$

$\alpha = \frac{1}{R_I},\ \beta = 1,\ \text{cost} = i_g$

Per Rv=Ri e Vg=IgRv
(equivalenza dei generatori)
le due rette di carico coincidono

$\Downarrow$

i due circuiti sono equivalenti
alla porta AB



KCL e_C: $e_C G_2 + (e_C - V_{AB}) G_3 + (e_C - V_g) G_1 = 0$

KCL e_A: $i_{AB} + (V_{AB} - e_C) G_3 = i_g$

DALLA 2ª EQ RICAVO:

$e_C = [i_{AB} - i_g + V_{AB} G_3]/G_3$

SOSTITUISCO NELLA Iª EQ E OTTENGO L'EQ DI PORTA

$e_C(G_2+G_3+G_1) - V_{AB} G_3 = V_g G_1$

$[i_{AB} - i_g]\frac{(G_1+G_2+G_3)}{G_3} + V_{AB}(G_1+G_2) = V_g G_1$

$V_{AB}(G_1+G_2) + i_{AB} \frac{(G_1+G_2+G_3)}{G_3} = \underbrace{V_g G_1 + i_g \frac{(G_1+G_2+G_3)}{G_3}}_{\text{COST}}$

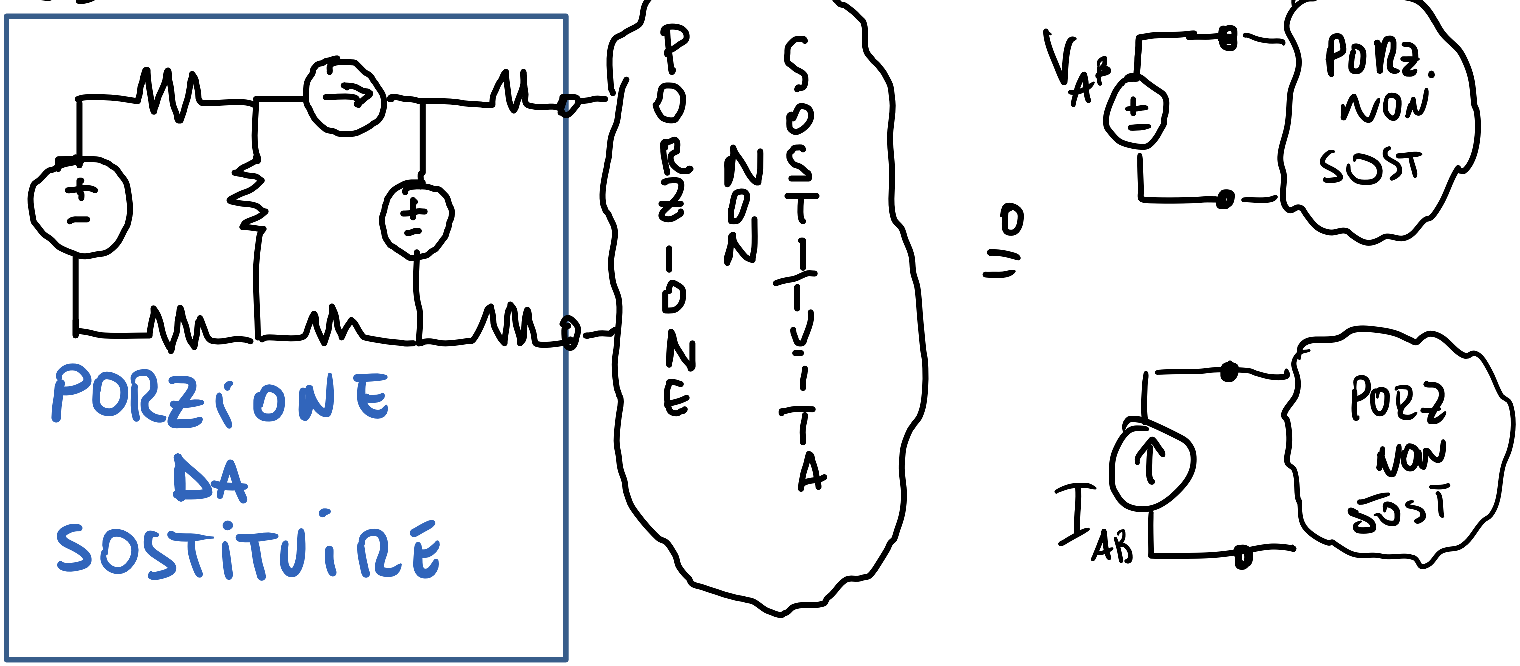
$\alpha = (G_1+G_2),\ \beta = \frac{(G_1+G_2+G_3)}{G_3},$

Teorema di sostituzione ed equazione di porta

TEOREMA DI SOSTITUZIONE

Una parte di circuito accessibile da una porta composta dai terminali A-B può essere sostituita da un generatore di tensione che assicura la tensione di porta o da un generatore di corrente che imprime la corrente di porta senza alterare le grandezze elettriche nella parte del circuito esterna alla porta

ES



Teorema di sostituzione ed equazione di porta

TEOREMA DI SOSTITUZIONE: DIMOSTRAZIONE

Le grandezze di porta $v_{AB}(t)$ e $i_{AB}(t)$ sono vincolate dalla Equazione di porta. Se fisso il valore di una delle due grandezze alla porta, automaticamente l'altra è vincolata.

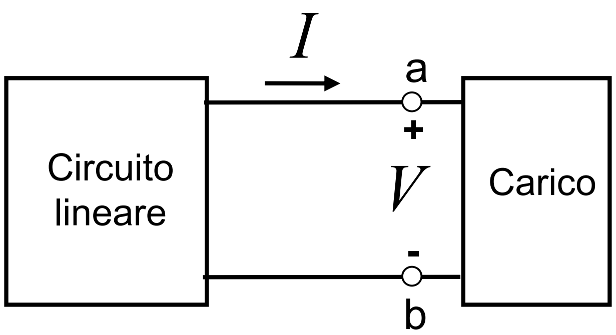
TEOREMA DI SOSTITUZIONE: NOTE

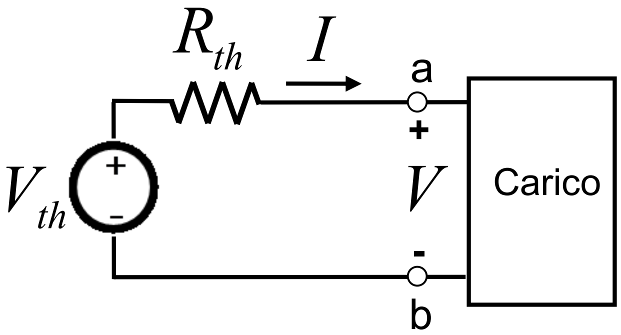
L'equazione di porta dipende da come è fatto il circuito sia internamente che esternamente alla porta $\Rightarrow$ cambia se cambio i componenti o anche solo i valori dei componenti esterni alla porta $\Rightarrow$ il Teorema di sostituzione sostanzialmente necessità di sapere in anticipo quanto varrà una delle due grandezze di porta per poter essere applicato $\Rightarrow$ limitata applicabilità

MA il Teorema di sostituzione vale anche per circuiti non-lineari

Teorema di Thevenin

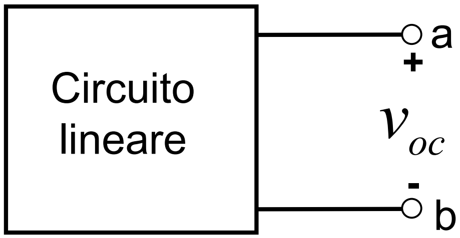
Il **teorema di Thevenin** afferma che un circuito lineare con due terminali può essere sostituito con un circuito equivalente formato da un generatore di tensione V_{th} in serie con un resistore R_{th}, in cui V_{th} è la tensione a vuoto ai terminali e R_{th} è la resistenza di ingresso, o equivalente, vista agli stessi terminali, quando i generatori indipendenti sono spenti.





Teorema di Thevenin

Calcolo di V_{th}

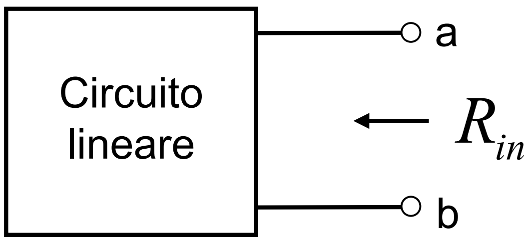


V_{th} coincide con la tensione a vuoto del circuito (circuito aperto ai terminali ab):
$V_{th} = v_{oc}$

Teorema di Thevenin

Calcolo di R_{th}

Caso 1: il circuito non include generatori dipendenti

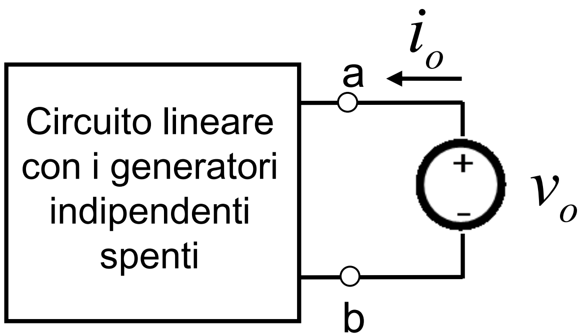


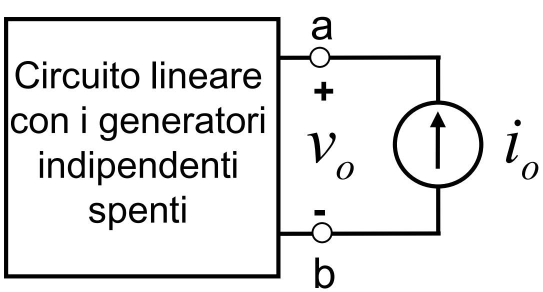
R_{th} coincide con la resistenza R_{in} vista ai terminali ab dopo aver spento tutti i generatori: $R_{th}=R_{in}$

Teorema di Thevenin

Calcolo di R_{th}

Caso 2: il circuito include generatori dipendenti



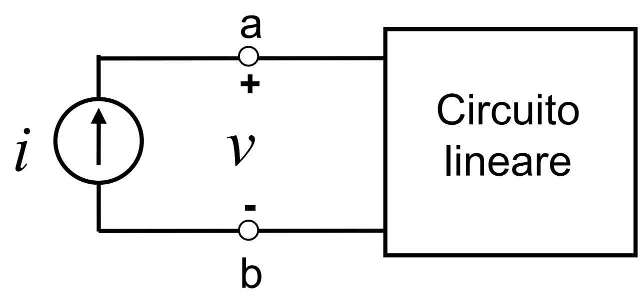


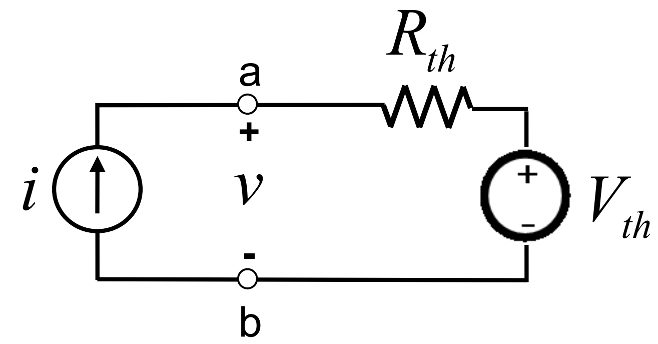
$$R_{th} = \frac{v_0}{i_0}$$

R_{th} coincide con il rapporto tensione/corrente ai terminali ab (convenzione dei generatori per il generatore di prova)

È indifferente usare un generatore di prova di tensione o di corrente

Dimostrazione del teorema di Thevenin





Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti al circuito lineare

$$v = \sum_i A_i V_i + \sum_j B_j I_j + Ci$$

con V_i generatori indipendenti di tensione, I_j generatori indipendenti di corrente

L'effetto dei generatori indipendenti interni alla rete coincide con la tensione a vuoto

$$\sum_i A_i V_i + \sum_j B_j I_j = v\big|_{i=0}$$

pertanto coincide con la tensione di Thevenin

$$\sum_i A_i V_i + \sum_j B_j I_j = V_{th}$$

Dimostrazione del teorema di Thevenin

Il parametro C si ottiene calcolando la resistenza vista tra i due terminali, quando i generatori indipendenti sono spenti

$$C = \left.\frac{v}{i}\right|_{V_i=0, I_j=0}$$

pertanto coincide con la resistenza di Thevenin

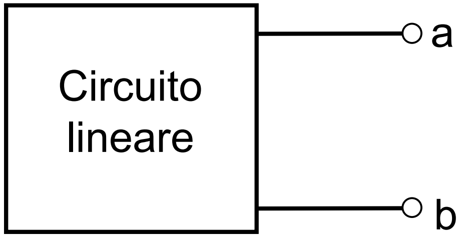
$$C = R_{th}$$

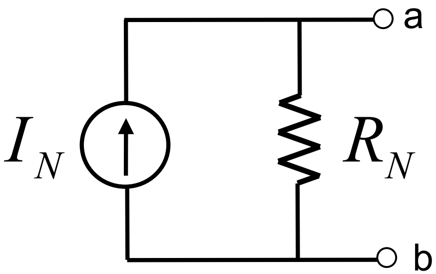
Il circuito lineare con due terminali risulta equivalente al bipolo di Thevenin in quanto presentano la stessa relazione i-v

$$v = V_{th} + R_{th} i$$

Teorema di Norton

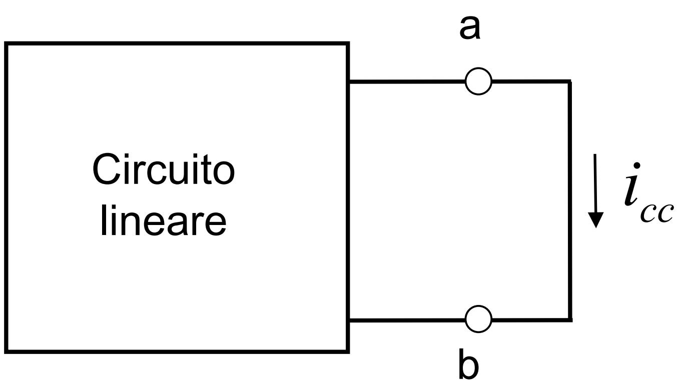
Il **teorema di Norton** afferma che un circuito lineare con due terminali può essere sostituito da un circuito equivalente formato da un generatore di corrente I_N in parallelo a un resistore R_N, in cui la corrente I_N è la corrente di corto circuito ai terminali e R_N è la resistenza equivalente ai terminali, quando i generatori indipendenti sono spenti.





Teorema di Norton

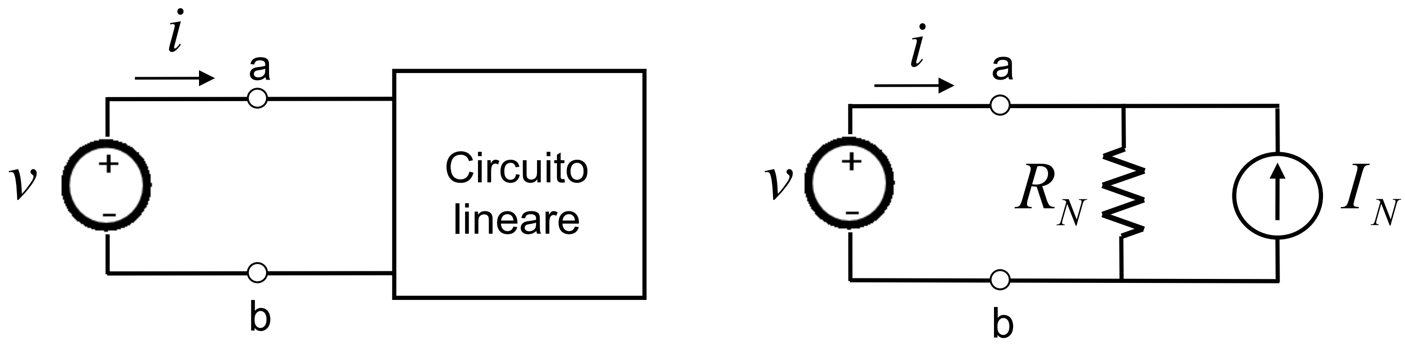
Calcolo di I_N e R_N



I_N coincide con la corrente di corto circuito del circuito: $I_N = i_{cc}$

R_N coincide con la resistenza di Thevenin del circuito: $R_N = R_{th}$

Dimostrazione del teorema di Norton



Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti al circuito lineare

$$i = \sum_i A_i V_i + \sum_j B_j I_j + Cv$$

con V_i generatori indipendenti di tensione, I_j generatori indipendenti di corrente

L'effetto dei generatori indipendenti interni alla rete coincide con la corrente di corto circuito

$$\sum_i A_i V_i + \sum_j B_j I_j = i\big|_{v=0}$$

pertanto coincide con la corrente di Norton cambiata di segno

$$\sum_i A_i V_i + \sum_j B_j I_j = -I_N$$

Dimostrazione del teorema di Norton

Il parametro C si ottiene calcolando la conduttanza vista tra i due terminali, quando i generatori indipendenti sono spenti

$$C = \left.\frac{i}{v}\right|_{V_i=0, I_j=0}$$

pertanto coincide con l'inverso della resistenza di Norton

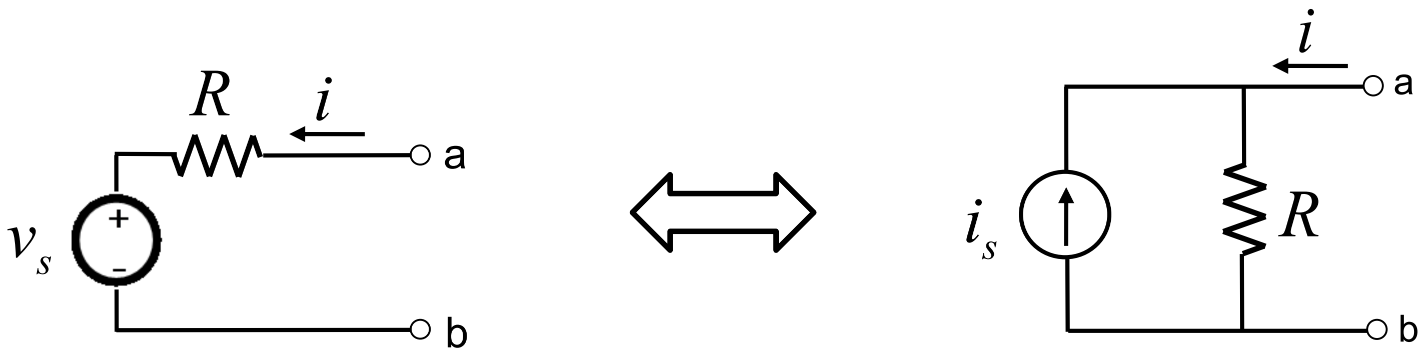
$$C = \frac{1}{R_N}$$

Il circuito lineare con due terminali risulta equivalente al bipolo di Norton in quanto presentano la stessa relazione i-v

$$i = -I_N + \frac{v}{R_N}$$

Trasformazione di generatori

Una **trasformazione di generatori** è l'operazione di sostituzione di un generatore di tensione v_s in serie a un resistore R con un generatore di corrente i_s in parallelo a un resistore R, o viceversa.



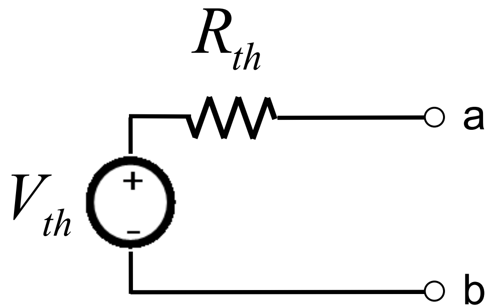
$$v_s = R i_s \qquad\qquad i_s = \frac{v_s}{R}$$

I due bipoli risultano equivalenti in quanto hanno la stessa relazione i-v

$$v_{ab} = v_s + Ri = Ri_s + Ri$$

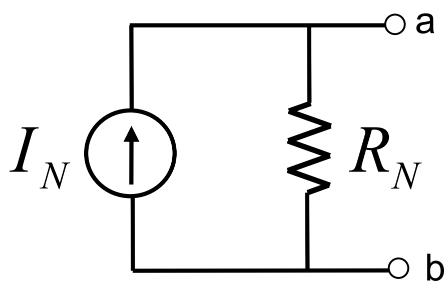
La trasformazione si applica anche ai generatori dipendenti ma non si applica ai generatori ideali di tensione e corrente.

Relazione tra Thevenin e Norton



$$R_{th} = R_N$$

$$V_{th} = R_N I_N$$



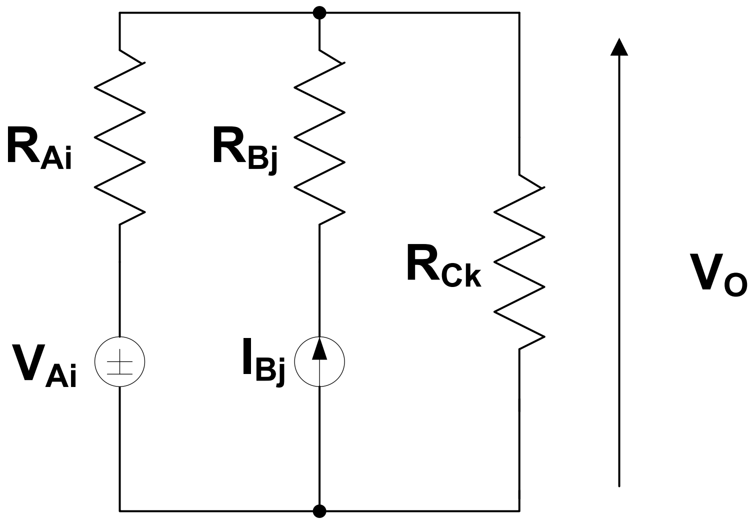
$$R_N = R_{th}$$

$$I_N = \frac{V_{th}}{R_{th}}$$

Teorema di Millman

Il **teorema di Millman** afferma che la tensione ai capi di un parallelo di:
- generatori di tensione V_{Ai} con in serie resistenze R_{Ai},
- generatori di corrente I_{Bj} con eventualmente in serie resistenze R_{Bj},
- resistenze R_{Ck},

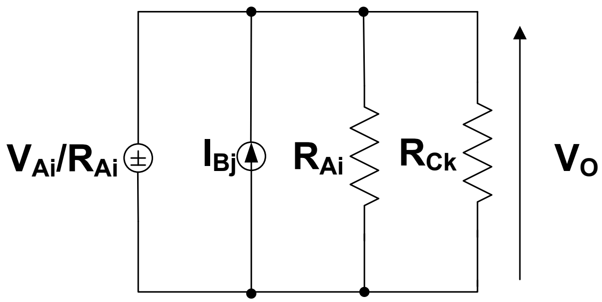
è data dal prodotto di una corrente I_o per una resistenza R_o, dove I_o è la somma delle correnti V_{Ai}/R_{Ai} e I_{Bj} e R_o è il parallelo delle resistenze R_{Ai} e R_{Ck}.



$$V_O = R_O I_O = \frac{\sum_i \frac{V_{Ai}}{R_{Ai}} + \sum_j I_{Bj}}{\sum_i \frac{1}{R_{Ai}} + \sum_k \frac{1}{R_{Ck}}}$$

Dimostrazione del teorema di Millman

Trasformando i generatori di tensione V_{Ai} con in serie i resistori R_{Ai} in generatori di corrente V_{Ai}/R_{Ai} con in parallelo i resistori R_{Ai} ed eliminando le resistenze R_{Bj} in serie ai generatori di corrente I_{Bj}, si ottiene il circuito equivalente

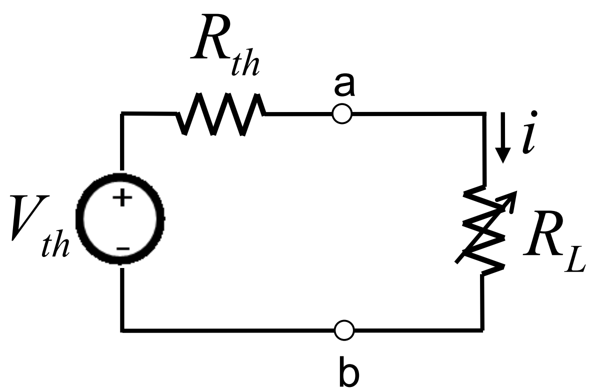


La tensione ai capi del parallelo si ottiene semplicemente moltiplicando la somma delle correnti dei generatori di corrente per il parallelo delle resistenze

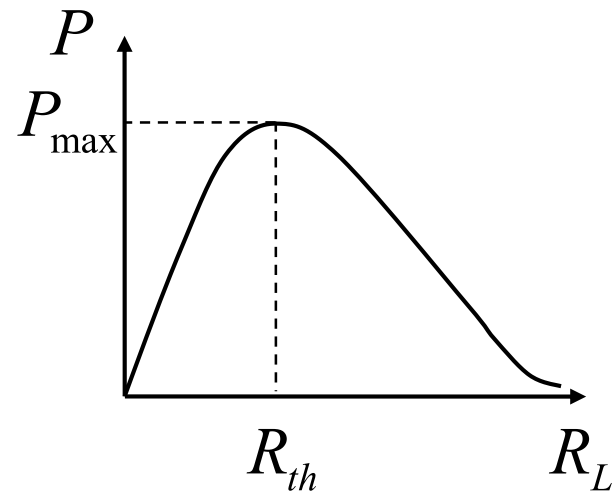
$$V_O = \frac{\sum_i \frac{V_{Ai}}{R_{Ai}} + \sum_j I_{Bj}}{\sum_i \frac{1}{R_{Ai}} + \sum_k \frac{1}{R_{Ck}}}$$

Massimo trasferimento di potenza

Si ha la massima potenza trasferita al carico quando la resistenza di carico è uguale alla resistenza di Thevenin vista dal carico ($R_L = R_{th}$).



$$p = i^2 R_L = \left(\frac{V_{th}}{R_{th} + R_L} \right)^2 R_L$$



$$\frac{dp}{dR_L} = V_{th}^2 \left[\frac{\left(R_{th} + R_L\right)^2 - 2R_L\left(R_{th} + R_L\right)}{\left(R_{th} + R_L\right)^4} \right] = V_{th}^2 \left[\frac{\left(R_{th} + R_L - 2R_L\right)}{\left(R_{th} + R_L\right)^3} \right] = 0$$

$$\boxed{R_L = R_{th}} \qquad \boxed{p_{\max} = \frac{V_{th}^{\;2}}{4R_{th}}}$$