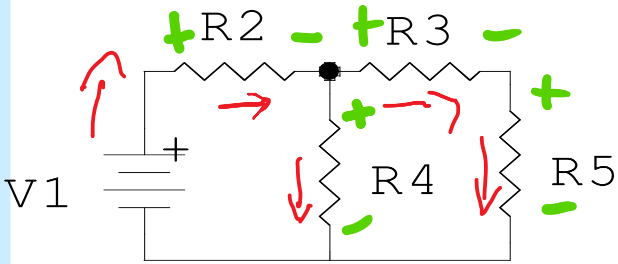
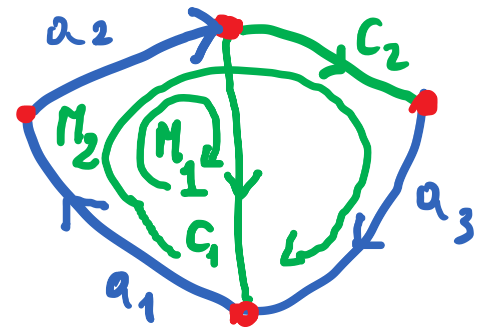
# Metodo delle maglie

- Metodo di analisi base maglie:
  - Scegliere un albero sul grafo orientato ed individuare le maglie fondamentali;
  - Scrivere l'equilibrio delle tensioni alle maglie fondamentali;
  - Rami "resistivi": nel sistema di equilibrio esprimere le tensioni di ramo in funzione delle correnti di ramo tramite relazioni costitutive;
  - Esprimere, nel sistema di equilibrio, le correnti dei rami dell'albero come combinazione delle correnti sui rami del coalbero (tramite equazioni ai tagli fondamentali). IL SISTEMA E' COMPATIBILE: incognite correnti sui rami del co-albero
  - Risolvere, ricavando le incognite (correnti sui rami del co-albero); calcolare poi le altre correnti (tramite eq tagli fondamentali) e le tensioni di ramo (tramite relaz costitutive)

# Metodo delle maglie




I° step: grafo, albero e coalbero e individuare le maglie fondamentali




II° step: Scrivere le equazioni delle maglie fondamentali

$M_1$ $$V_{a1} - V_{a2} = V_{c1}$$

$M_2$ $$V_{a1} - V_{a2} - V_{a3} = V_{c2}$$

III° step: Scrivere le equazioni costitutive

$$v_{a1} = +v_g;\ v_{a2} = R_2 i_{a2};$$

$$v_{a3} = R_5 i_{a3};\ v_{c1} = R_4 i_{c1};$$

$$v_{c2} = R_3 i_{c2}$$

IV° step: riscrivere le eq. di maglia in termini delle correnti di ramo

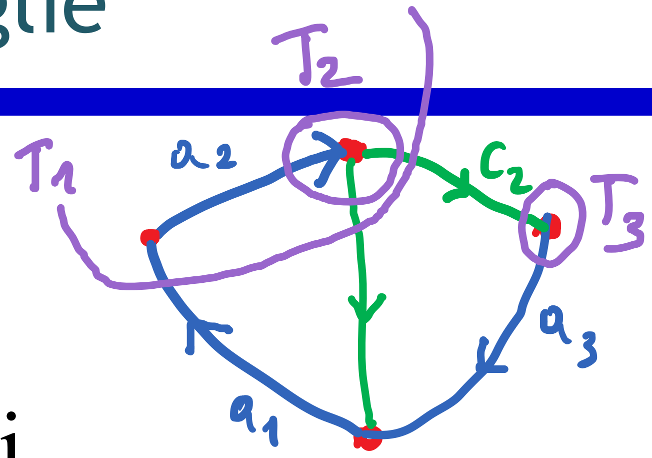
$$v_g - R_2 i_{a2} = R_4 i_{c1}$$

$$v_g - R_2 i_{a2} - R_5 i_{a3} = R_3 i_{c2}$$

2 equazioni per

4 incognite

# Metodo delle maglie




V° step: sostituire le correnti dell'albero come combinazioni delle correnti del coalbero (Ricorda $i_a$-$Ai_c$=0) scrivendo le equazioni dei tagli fondamentali

$$\mathrm{i}_{a1} = \mathrm{i}_{c1} + \mathrm{i}_{c2}; \mathrm{i}_{a2} = \mathrm{i}_{c1} + \mathrm{i}_{c2}; \mathrm{i}_{a3} = \mathrm{i}_{c2}$$

$$R_4 \mathrm{i}_{c1} + R_2(\mathrm{i}_{c1} + \mathrm{i}_{c2}) = \mathrm{v}_g$$

$$R_3 \mathrm{i}_{c2} + R_2(\mathrm{i}_{c1} + \mathrm{i}_{c2}) + R_5 \mathrm{i}_{c2} = \mathrm{v}_g$$

SISTEMA COMPATIBILE: 2 equazioni per 2 incognite ($i_2$, $i_3$)

- Il sistema risolvente cui si è pervenuti può interpretarsi come se esistessero delle correnti di maglia –circolanti nelle maglie fondamentali, di valore coincidente con le corrispondenti correnti dei rami del co-albero- ;
- Questa interpretazione consente un modo agevole di pervenire direttamente al sistema risolvente finale

# Metodi di analisi

- Metodo analisi base maglie –scrittura diretta sistema risolvente-:
  - Scegliere un albero sul grafo orientato, individuare le maglie fondamentali ed associarvi le corrispondenti correnti di maglia;
  - Scrivere il sistema di equilibrio delle tensioni alle maglie fondamentali –una equazione per ciascuna maglia fondam.-
    - Il termine k,k della matrice dei coefficienti è pari alla somma delle resistenze dei rami resistivi presenti sulla k-esima maglia fondamentale;
    - Il termine k,i della matrice dei coefficienti è pari alla somma delle resistenze dei rami resistivi comuni alle maglie k-esima ed i-esima; il segno di ciascun addendo è positivo se le correnti di maglia percorrono il ramo comune con versi concordi o discordi;
    - Il termine k-esimo del vettore dei termini noti è pari alla somma delle tensioni impresse dai generatori di tensione presenti nella maglia k-esima: ciascun addendo ha segno + o – a seconda che la corrente di maglia sia o meno uscente dal morsetto positivo del generatore.
  - Risolto il sistema ho le correnti di maglia –dei rami del co-albero -

# Metodo degli anelli

E’ possibile semplificare ulteriormente il metodo delle maglie cosi come fatto con il metodo dei nodi a partire dal metodo dei tagli?

Ovvero non dover scegliere un albero (step I) e non dover sostituire le correnti dell’albero con combinazioni di quelle del co-albero (step V)?

$\Downarrow$

Per circuiti planari ottengo dei vantaggi se scelgo come correnti incognite le correnti fittizie degli anelli invece che le più generali correnti del co-albero.

METODO DEGLI ANELLI

# Metodo degli anelli

## VANTAGGI

✓Gli anelli sono univocamente identificati → non ho bisogno di scegliere albero e co-albero e di individuare maglie e tagli fondamentali

✓Posso scrivere le tensioni dei rami resistivi direttamente tramite le correnti di anello cosi da ottenere un sistema di R-N+1 equazioni in R-N+1 correnti indipendenti senza dover esprimere le correnti dell'albero tramite quelle del co-albero (i.e. senza scrivere le KCL dei tagli fondamentali)

✓Su ogni ramo si sovrappongono al massimo 2 sole correnti di anello e sempre in versi opposti → facilita la scrittura del sistema

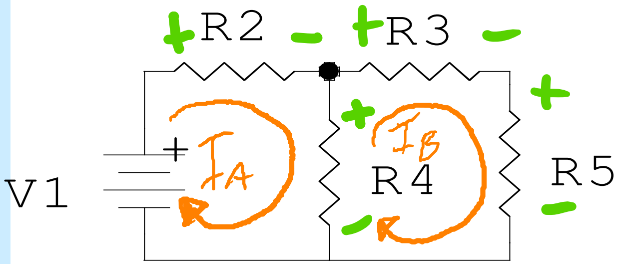
## NOTA BENE

Non sempre posso scegliere un albero in modo tale che le correnti del co-albero coincidano con quelle di anello

È possibile dimostrare però che un grafo planare connesso con *R rami* e *N* nodi ha [*R-N+1*] anelli distinti, tanti quanti i rami del co-albero.

L'insieme di tutti gli anelli di un grafo planare ha la stessa proprietà di completezza di un insieme di maglie fondamentali, cioè qualsiasi altra maglia del grafo planare può essere ottenuta dall'unione di due o più anelli, dove l'unione è realizzata eliminando i rami in comune.
Questo assicura la lineare indipendenza delle KVL sugli anelli

# Metodo degli anelli




I° step: scrivere le KVL per gli anelli

A $\quad V_{R2} + V_{R4} = V_1$

B $\quad V_{R3} + V_{R5} - V_{R4} = 0$

II° step: Scrivere le tensioni dei rami resistivi in funzione delle correnti di anello

A $\quad I_A R_2 + (I_A - I_B) R_4 = V_1 \Rightarrow I_A (R_2 + R_4) - I_B R_4 = V_1$

B $\quad I_B R_3 + I_B R_5 + (I_B - I_A) R_4 = 0 \Rightarrow -I_A R_4 + I_B (R_3 + R_4 + R_5) = 0$

III° step: risolvere il sistema

$$\begin{bmatrix} R_2 + R_4 & -R_4 \\ -R_4 & R_3 + R_4 + R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Delta_R = R_2R_3 + R_2R_4 + R_2R_5 + R_3R_4$$

$$I_A = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & -R_4 \\ 0 & R_3 + R_4 + R_5 \end{vmatrix}}{\Delta_R} \quad ; \quad I_B = \frac{\begin{vmatrix} R_2 + R_4 & V_1 \\ -R_4 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_R}$$

# Metodo degli anelli

- Metodo analisi base anelli –<u>scrittura diretta sistema risolvente</u>-:
  - Individuare gli anelli ed associarvi le corrispondenti correnti di anello, tutte che girano in verso orario per convenzione;
  - Scrivere il sistema delle KVL agli anelli –una equazione per ciascuno anello considerando le correnti di anello circolanti esclusivamente nel rispettivo anello
    - Il termine k,k della matrice dei coefficienti è pari alla somma delle resistenze dei rami resistivi presenti sul k-esimo anello;
    - Il termine k,i della matrice dei coefficienti è nullo o pari all’opposto della della resistenza comune all’anello k-esimo ed i-esimo;
    - Il termine k-esimo del vettore dei termini noti è pari alla somma delle tensioni impresse dai generatori di tensione presenti nell’anello k-esimo: ciascun addendo ha segno + o – a seconda che la corrente di anello sia o meno uscente dal morsetto positivo del generatore.
  - Risolto il sistema ho le correnti di anello da cui posso ricavarmi tutte le altre grandezze elettriche

# Metodo degli anelli con generatori di corrente

## Cosa succede se è presente uno o più generatori di corrente?

- Il generatore di corrente vincola la corrente su un ramo $\Rightarrow$ il generatore vincola una sola corrente di anello o al massimo due correnti di anello tra di loro $\Rightarrow$ riduce il numero di correnti incognite

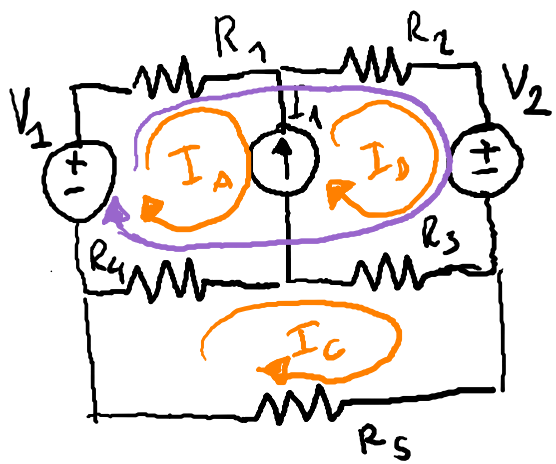
$\Rightarrow$ riduce il numero di KVL da scrivere per formare il sistema risolutivo

- Allo stesso tempo la tensione ai capi dei generatori di corrente è determinata dal resto del circuito

$\Rightarrow$ le tensioni dei generatori di corrente sono incognite aggiuntive

- il numero di incognite da risolvere rimane pertanto invariato ma in genere posso prima determinare le correnti di anello incognite (sistema risolutivo di dimensioni ridotte) e successivamente determinare le tensioni dei generatori di corrente utilizzando le KVL non scritte in precedenza.
- se è presente un solo generatore di corrente e coincide o si può far coincidere con una corrente di anello a meno del verso, scriveremo direttamente le equazioni dei restanti anelli, altrimenti è conveniente scrivere l'equazione del «superanello» che si ottiene dalla fusione degli anelli che condividono il generatore in cui eliminiamo il ramo del generatore → in questo caso bisogna però considerare entrambe le correnti di anello iniziali che circolano in parti diverse del superanello

# Metodo dei superanelli




$$I_1 = I_B - I_A \Rightarrow I_B = I_A + I_1$$

$I_1$ vincola $I_A$ e $I_B$ => si può scrivere

IL SISTEMA RISOLUTIVO SCRIVENDO LE KVL ALL'ANELLO C E AL SUPERANELLO FORMATO DALLA FUSIONE DEI 2 ANELLI A+B

A+B : $I_A R_1 + I_B R_2 + (I_B - I_C) R_3 + (I_A - I_C) R_4 = V_1 - V_2$ CON $I_B = I_A + I_1$

C : $(I_C - I_A) R_4 + (I_C - I_B) R_3 + I_C R_5 = 0$

$\Rightarrow$ A+B : $I_A (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) - I_C (R_3 + R_4) = V_1 - V_2 - I_1 (R_2 + R_3)$

C : $I_C (R_3 + R_4 + R_5) - I_A (R_3 + R_4) = I_1 R_3$

In questo modo si determinano prima due correnti di anello indipendenti, poi le altre incognite. La tensione ai capi del generatore di corrente si trova facendo il bilancio delle tensioni su uno dei due anelli A o B

# Teorema di Telleghen

Correnti rami ALB a partire da quelle del COALB

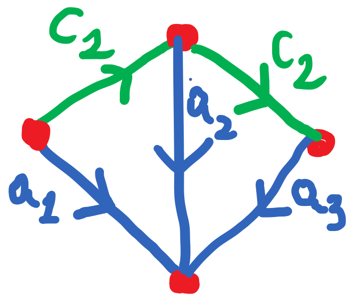
Equilibrio correnti ai tagli fondamentali

$$I_{A1} + I_{C1} = 0$$

$$I_{A2} - I_{C1} + I_{C2} = 0$$

$$I_{A3} - I_{C2} = 0$$

$$\begin{bmatrix} I_{A1} \\ I_{A2} \\ I_{A3} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{[A]} \begin{bmatrix} I_{C1} \\ I_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$




Tensioni sui rami COALB a partire da quelle dell' ALB

Equilibrio tensioni alle maglie fondamentali

$$V_{C1} - V_{A1} + V_{A2} = 0$$

$$V_{C2} - V_{A2} + V_{A3} = 0$$

$$\begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{[B]} \begin{bmatrix} V_{A1} \\ V_{A2} \\ V_{A3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[B] = -[A]^t$$

# Teorema di Telleghen

- Ordiniamo i vettori di tensioni e correnti, distinguendo quelle di albero e coalbero

$$[I] = \begin{bmatrix} I_A \\ I_C \end{bmatrix}; \quad [V] = \begin{bmatrix} V_A \\ V_C \end{bmatrix}$$

$$[I_A] + [A][I_C] = [0]; \quad [V_C] + [B][V_A] = [0]$$

- Effettuiamo il prodotto scalare fra tali vettori

$$[I]^t [V] = [I_A]^t [V_A] + [I_C]^t [V_C] = \left(-[I_C]^t [A]^t\right)[V_A] - [I_C]^t \left([B][V_A]\right) =$$

$$= [I_C]^t [B][V_A] - [I_C]^t [B][V_A] = 0$$

**Sono ortogonali**
**i vettori delle tensioni di ramo e delle relative correnti**