

Teoremi delle reti

Linearità

Un sistema è lineare se soddisfa le proprietà di omogeneità e additività

Linearità=omogeneità+additività

Omogeneità: se l'ingresso viene moltiplicato per un fattore costante, l'uscita risulta moltiplicata per lo stesso fattore

$$f(ku)=kf(u)$$

Additività: la risposta alla somma di più ingressi è pari alla somma delle risposte agli ingressi applicati separatamente

$$f(u1+u2)=f(u1)+f(u2)$$

Da un punto di vista matematico, un sistema lineare è descritto da un sistema di equazioni differenziali lineari.

Linearità

Un circuito lineare è costituito da elementi lineari (e.g. resistori, condensatori e induttori, generatori dipendenti lineari) e da generatori indipendenti.

Gli ingressi di un circuito lineare sono rappresentati dai generatori indipendenti. Le uscite di un circuito lineare sono di solito le tensioni e le correnti.

Un circuito resistivo lineare (CRL) è costituito da resistori, generatori dipendenti lineari e generatori indipendenti. Un CRL è descritto da un sistema di equazioni lineari.

Per ottenere il sistema di equazioni lineari che descrive un CRL è sufficiente applicare le 2 leggi di Kirchhoff e la legge di Ohm.

Esistono metodi sistematici (analisi nodale e analisi agli anelli) per ricavare tale sistema di equazioni lineari.

Linearità

In alternativa, la risoluzione dei circuiti lineari può essere effettuata tramite l'ausilio di teoremi delle reti lineari che consentono di ridurre la complessità del circuito da analizzare.

Teoremi delle reti lineari:

- resistenze in serie;
- resistenze in parallelo;
- trasformazione stella-triangolo e viceversa;
- principio di sovrapposizione degli effetti;
- teorema di Thevenin;
- teorema di Norton;
- teorema di Millman.

Sovrapposizione degli effetti

Il principio di sovrapposizione degli effetti (PSE) afferma che l'effetto dovuto all'azione di più cause concomitanti è pari alla somma degli effetti che si ottengono quando ciascuna causa agisce da sola.

Il PSE coincide con la proprietà di additività, pertanto è valido per i sistemi lineari.

Il PSE per un circuito lineare: una tensione (o una corrente) in un circuito lineare è pari alla somma delle tensioni (o delle correnti) che si ottengono quando ciascuno dei generatori indipendenti agisce da solo.

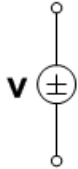
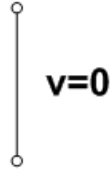

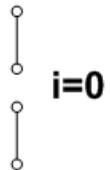
La sovrapposizione è basata sul concetto di linearità e quindi non può essere applicata al calcolo della potenza su un elemento (la potenza dipende dal quadrato della tensione o della corrente).

Sovrapposizione degli effetti

Applicazione del PSE

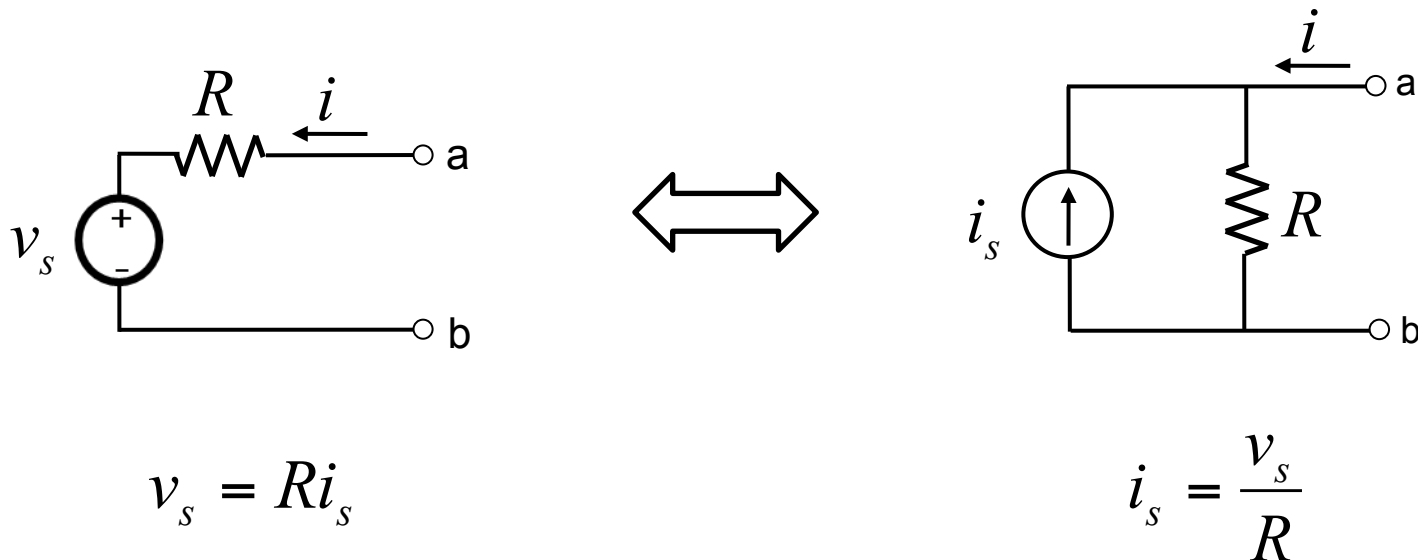
1. Spegner tutti i generatori indipendenti eccetto uno.
2. Calcolare il valore dell'uscita (tensione o corrente) dovuto al solo generatore funzionante.
3. Ripetere i passi precedenti per ciascuno degli altri generatori indipendenti.
4. Calcolare il contributo totale sommando algebricamente tutti i contributi dei generatori indipendenti.

Spegnimento dei generatori

	acceso	spento
generatore di tensione		
generatore di corrente		

Trasformazione di generatori

Una trasformazione di generatori è l'operazione di sostituzione di un generatore di tensione v_s in serie a un resistore R con un generatore di corrente i_s in parallelo a un resistore R , o viceversa.



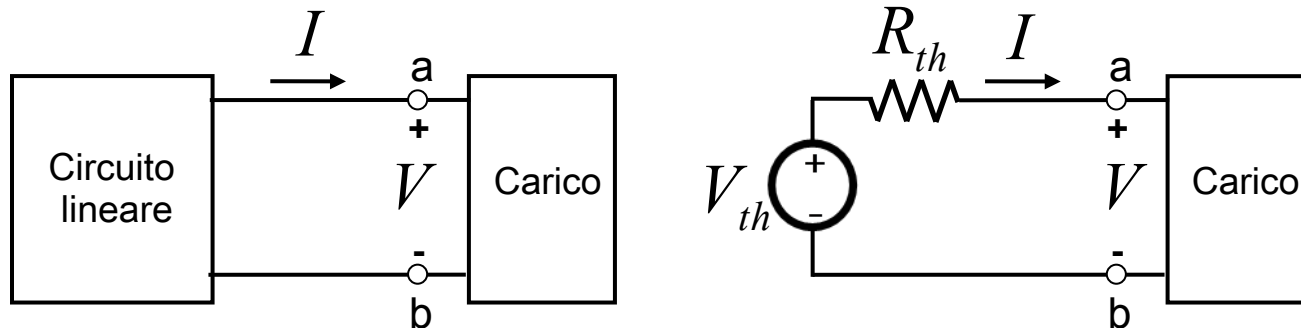
I due bipoli risultano equivalenti in quanto hanno la stessa relazione i-v

$$v_{ab} = v_s + Ri = Ri_s + Ri$$

La trasformazione si applica anche ai generatori dipendenti ma non si applica ai generatori ideali di tensione e corrente.

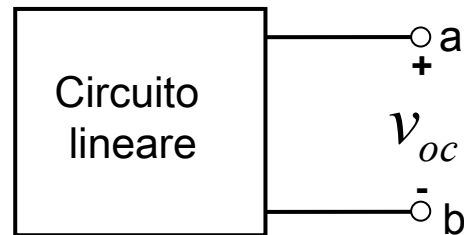
Teorema di Thevenin

Il teorema di Thevenin afferma che un circuito lineare con due terminali può essere sostituito con un circuito equivalente formato da un generatore di tensione V_{th} in serie con un resistore R_{th} , in cui V_{th} è la tensione a vuoto ai terminali e R_{th} è la resistenza di ingresso, o equivalente, vista agli stessi terminali, quando i generatori indipendenti sono spenti.



Teorema di Thevenin

Calcolo di V_{th}

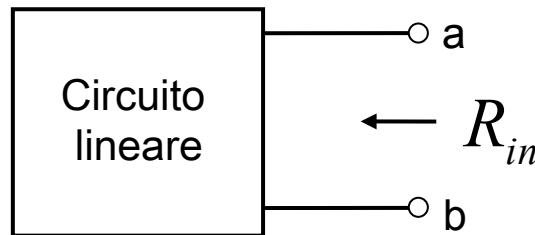


V_{th} coincide con la tensione a vuoto del circuito (circuito aperto ai terminali ab):
 $V_{th} = v_{oc}$

Teorema di Thevenin

Calcolo di R_{th}

Caso 1: il circuito non include generatori dipendenti

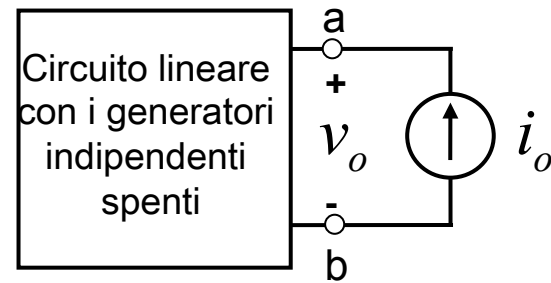
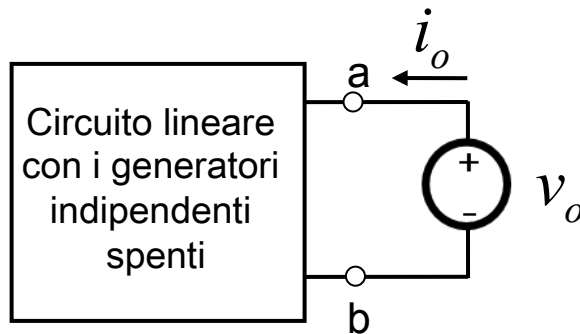


R_{th} coincide con la resistenza R_{in} vista ai terminali ab dopo aver spento tutti i generatori: $R_{th}=R_{in}$

Teorema di Thevenin

Calcolo di R_{th}

Caso 2: il circuito include generatori dipendenti

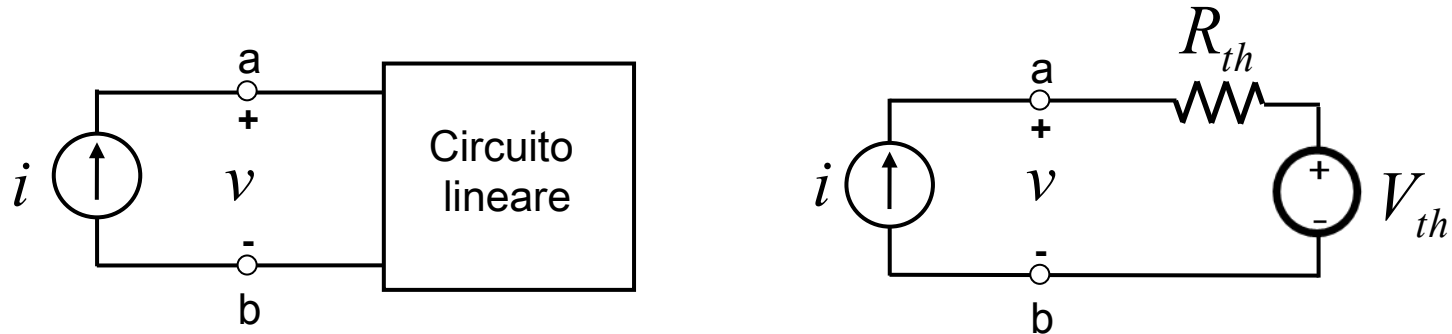


$$R_{th} = \frac{v_o}{i_o}$$

R_{th} coincide con il rapporto tensione/corrente ai terminali ab (convenzione dei generatori per il generatore di prova)

È indifferente usare un generatore di prova di tensione o di corrente

Dimostrazione del teorema di Thevenin



Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti al circuito lineare

$$v = \sum_i A_i V_i + \sum_j B_j I_j + C i$$

con V_i generatori indipendenti di tensione, I_j generatori indipendenti di corrente

L'effetto dei generatori indipendenti interni alla rete coincide con la tensione a vuoto

$$\sum_i A_i V_i + \sum_j B_j I_j = v|_{i=0}$$

pertanto coincide con la tensione di Thevenin

$$\sum_i A_i V_i + \sum_j B_j I_j = V_{th}$$

Dimostrazione del teorema di Thevenin

Il parametro C si ottiene calcolando la resistenza vista tra i due terminali, quando i generatori indipendenti sono spenti

$$C = \left. \frac{v}{i} \right|_{V_i=0, I_j=0}$$

pertanto coincide con la resistenza di Thevenin

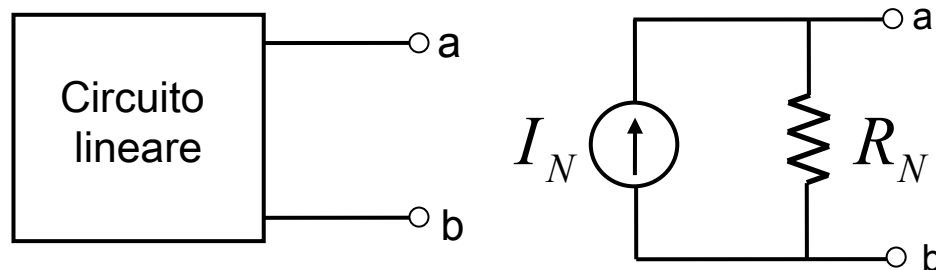
$$C = R_{th}$$

Il circuito lineare con due terminali risulta equivalente al bipolo di Thevenin in quanto presentano la stessa relazione i - v

$$v = V_{th} + R_{th}i$$

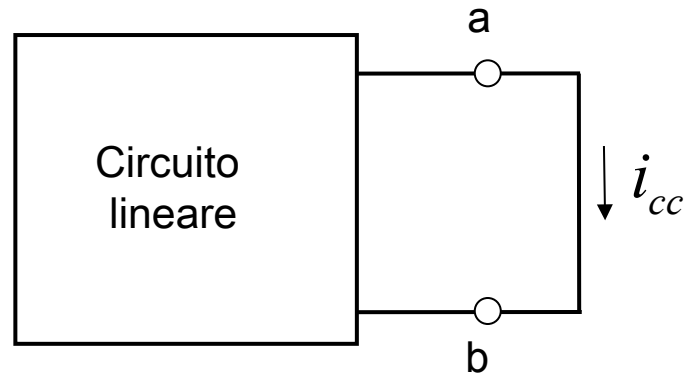
Teorema di Norton

Il teorema di Norton afferma che un circuito lineare con due terminali può essere sostituito da un circuito equivalente formato da un generatore di corrente I_N in parallelo a un resistore R_N , in cui la corrente I_N è la corrente di corto circuito ai terminali e R_N è la resistenza equivalente ai terminali, quando i generatori indipendenti sono spenti.



Teorema di Norton

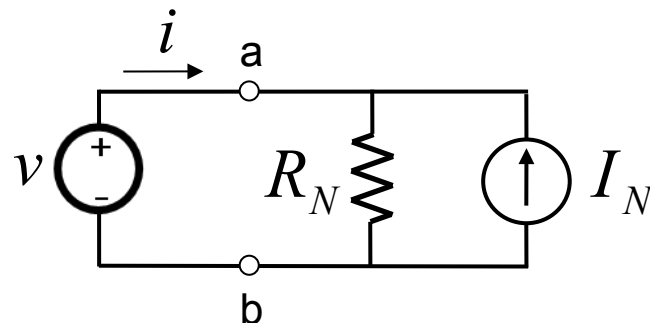
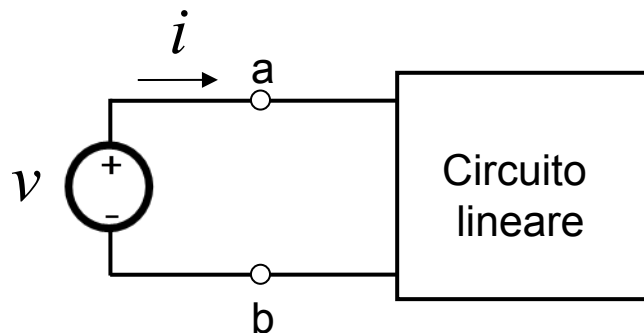
Calcolo di I_N e R_N



I_N coincide con la corrente di corto circuito del circuito: $I_N = i_{cc}$

R_N coincide con la resistenza di Thevenin del circuito: $R_N = R_{th}$

Dimostrazione del teorema di Norton



Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti al circuito lineare

$$i = \sum_i A_i V_i + \sum_j B_j I_j + C v$$

con V_i generatori indipendenti di tensione, I_j generatori indipendenti di corrente

L'effetto dei generatori indipendenti interni alla rete coincide con la corrente di corto circuito

$$\sum_i A_i V_i + \sum_j B_j I_j = i|_{v=0}$$

pertanto coincide con la corrente di Norton cambiata di segno

$$\sum_i A_i V_i + \sum_j B_j I_j = -I_N$$

Dimostrazione del teorema di Norton

Il parametro C si ottiene calcolando la conduttanza vista tra i due terminali, quando i generatori indipendenti sono spenti

$$C = \left. \frac{i}{v} \right|_{V_i=0, I_j=0}$$

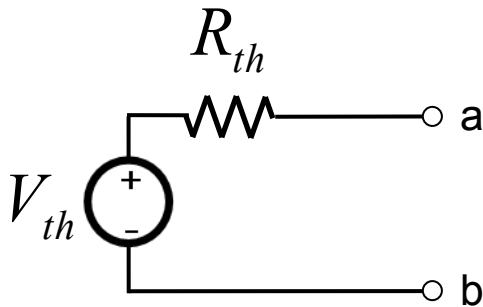
pertanto coincide con l'inverso della resistenza di Norton

$$C = \frac{1}{R_N}$$

Il circuito lineare con due terminali risulta equivalente al bipolo di Norton in quanto presentano la stessa relazione i - v

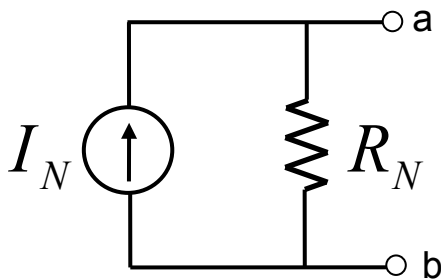
$$i = -I_N + \frac{v}{R_N}$$

Relazione tra Thevenin e Norton



$$R_{th} = R_N$$

$$V_{th} = R_N I_N$$



$$R_N = R_{th}$$

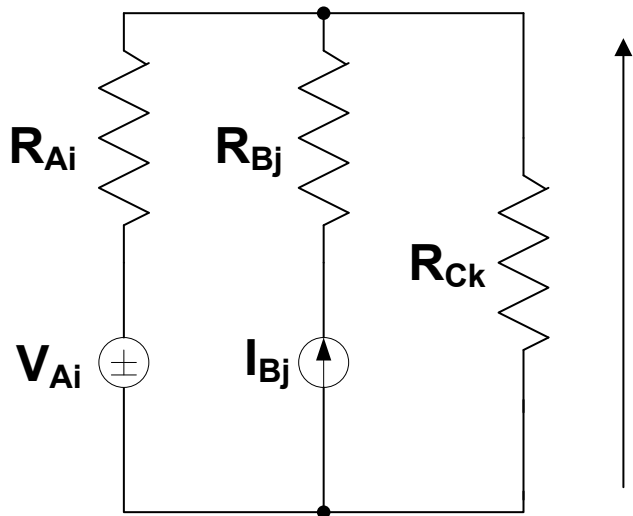
$$I_N = \frac{V_{th}}{R_{th}}$$

Teorema di Millman

Il teorema di Millman afferma che la tensione ai capi di un parallelo di:

- generatori di tensione V_{Ai} con in serie resistenze R_{Ai} ,
- generatori di corrente I_{Bj} con eventualmente in serie resistenze R_{Bj} ,
- resistenze R_{Ck} ,

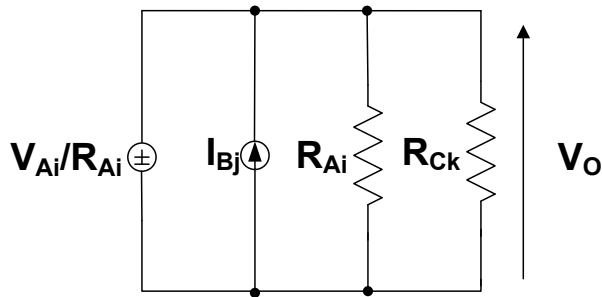
è data dal prodotto di una corrente I_o per una resistenza R_o , dove I_o è la somma delle correnti V_{Ai}/R_{Ai} e I_{Bj} e R_o è il parallelo delle resistenze R_{Ai} e R_{Ck} .



$$V_o = R_o I_o = \frac{\sum_i \frac{V_{Ai}}{R_{Ai}} + \sum_j I_{Bj}}{\sum_i \frac{1}{R_{Ai}} + \sum_k \frac{1}{R_{Ck}}}$$

Dimostrazione del teorema di Millman

Trasformando i generatori di tensione V_{Ai} con in serie i resistori R_{Ai} in generatori di corrente V_{Ai}/R_{Ai} con in parallelo i resistori R_{Ai} ed eliminando le resistenze R_{Bj} in serie ai generatori di corrente I_{Bj} , si ottiene il circuito equivalente

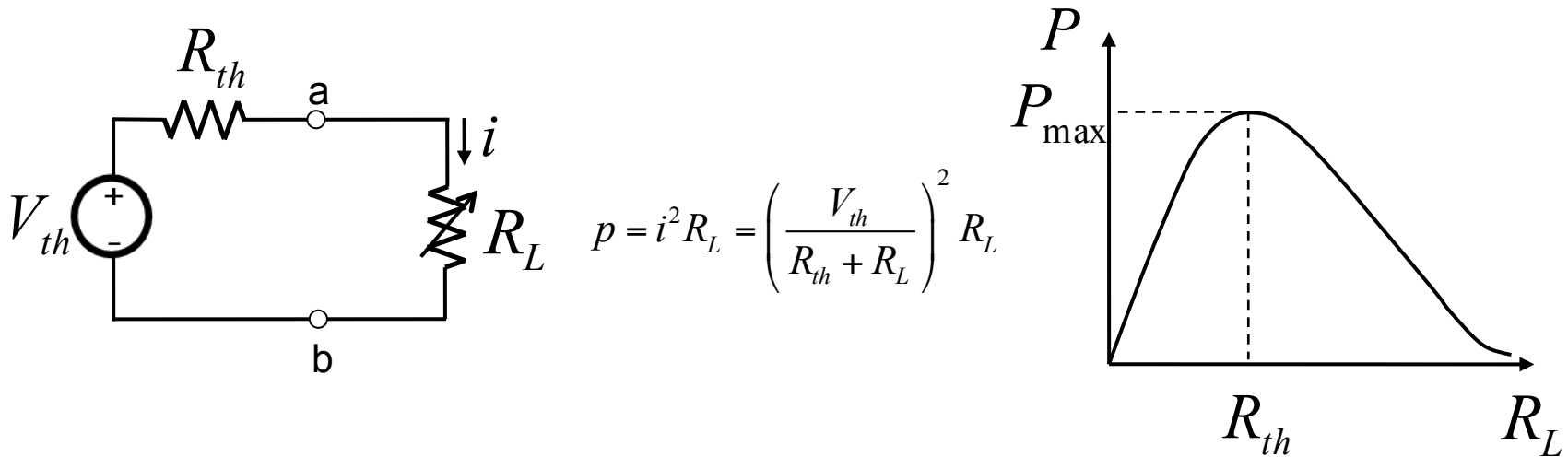


La tensione ai capi del parallelo si ottiene semplicemente moltiplicando la somma delle correnti dei generatori di corrente per il parallelo delle resistenze

$$V_O = \frac{\sum_i \frac{V_{Ai}}{R_{Ai}} + \sum_j I_{Bj}}{\sum_i \frac{1}{R_{Ai}} + \sum_k \frac{1}{R_{Ck}}}$$

Massimo trasferimento di potenza

Si ha la massima potenza trasferita al carico quando la resistenza di carico è uguale alla resistenza di Thevenin vista dal carico ($R_L = R_{th}$).



$$\frac{dp}{dR_L} = V_{th}^2 \left[\frac{(R_{th} + R_L)^2 - 2R_L(R_{th} + R_L)}{(R_{th} + R_L)^4} \right] = V_{th}^2 \left[\frac{(R_{th} + R_L - 2R_L)}{(R_{th} + R_L)^3} \right] = 0$$

$$R_L = R_{th}$$

$$p_{max} = \frac{V_{th}^2}{4R_{th}}$$