ANALISI NODALE

Questa dispensa presenta un metodo alternativo a quello presentato nel libro *Circuiti Elettrici di C.K. Alexander, M.N.O.Sadiku - seconda edizione - traduzione a cura del Prof. P.Gubian* nel capitolo 3 paragrafo 3 per l'applicazione della Analisi Nodale per i circuiti che presentano generatori di tensione.

—Prof. Paolo Gubian - Ing. Giuseppe VOGLINO

1.1 Assenza di generatori di tensione ideali

L'analisi nodale, detta altresì *metodo dei potenziali*, è un procedimento sistematico per analizzare i circuiti che, utilizzando le tensioni di nodo come incognite al posto delle tensioni dei singoli elementi circuitali, permette di ridurre il numero di equazioni simultanee da risolvere.

L'obiettivo dell'analisi nodale è, allora, la determinazione delle tensioni di nodo.

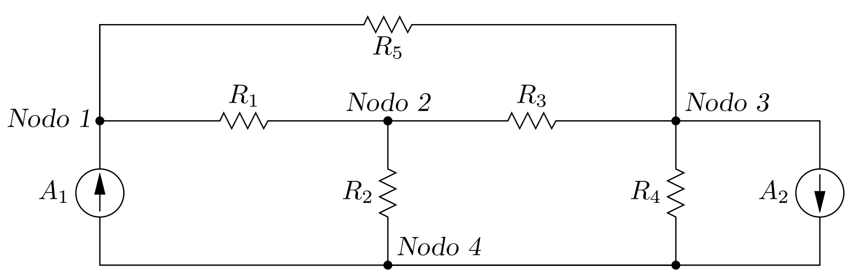

Figura 1.1: Circuito della lezione del 02 maggio 2005.

In pratica, dato un circuito con n nodi, l'analisi nodale consiste di 6 passi:

Procedura per determinare le tensioni di nodo:

1. Scegliere un nodo come nodo di riferimento.
2. Assegnare la tensioni $e_1, e_2, \ldots, e_{(n-1)}$ ai rimanenti $n-1$ nodi.

   Le tensioni $e_1, e_2, \ldots, e_{(n-1)}$ sono misurate rispetto al nodo di riferimento.

3. Assegnare una orientazione per i rami del circuito in esame di modo che si possa definire se le correnti siano entranti o uscenti dai rispettivi nodi.
4. Applicare la KCL a ciascuno dei rimanenti $n-1$ nodi, tranne a quello scelto come nodo di riferimento.
5. Applicare la legge di Ohm per esprimere le correnti di ramo in termini delle tensioni di nodo.
6. Risolvere le equazioni ottenute così da calcolare appunto le tensioni di nodo.

Come esempio si faccia riferimento al circuito di fig. 1.1.

PASSO **1** Si scelga il **Nodo 4** come **nodo di riferimento**; il circuito di fig. 1.1 si ridisegna come:

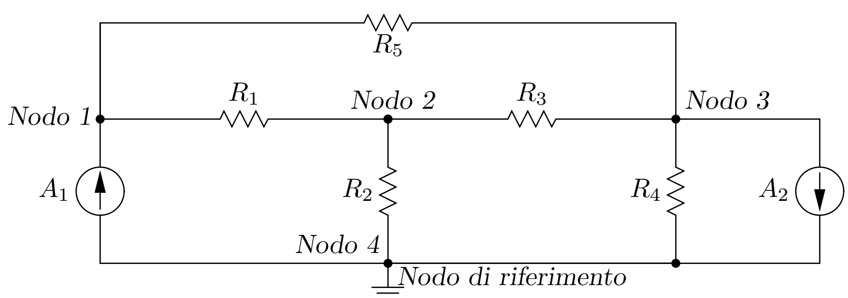

Figura 1.2: Circuito di fig. 1.1 ridisegnato per effetto del **Passo 1**.

PASSO **2** Si assegnino le tensioni di nodo[1] $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ e $\mathbf{e_3}$, che rappresentano le incognite, ai rimanenti 3 nodi; per maggior chiarezza nel circuito di fig. 1.3 si sono evidenziate le tensioni di nodo (le tensioni di nodo hanno la polarità positiva sui nodi e negativa sull'**unico** nodo di riferimento).

[1]Si sono volute evidenziare le tensioni di nodo $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_{(n-1)}}$ usando il carattere **grassetto**.

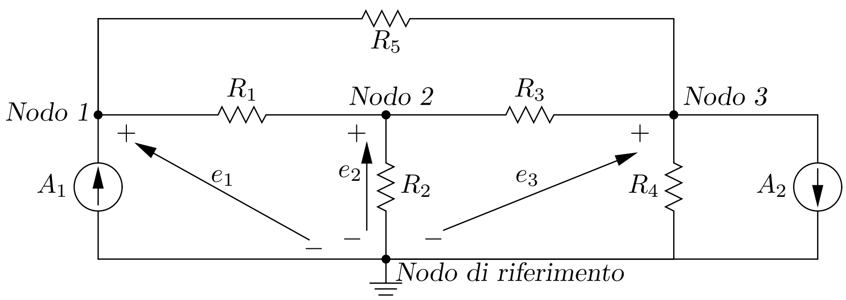

Figura 1.3: Circuito di fig. 1.1 ridisegnato per effetto del **Passo 2**.

PASSO 3 L'assegnazione per i segni positivi delle correnti sia quella della figura seguente:

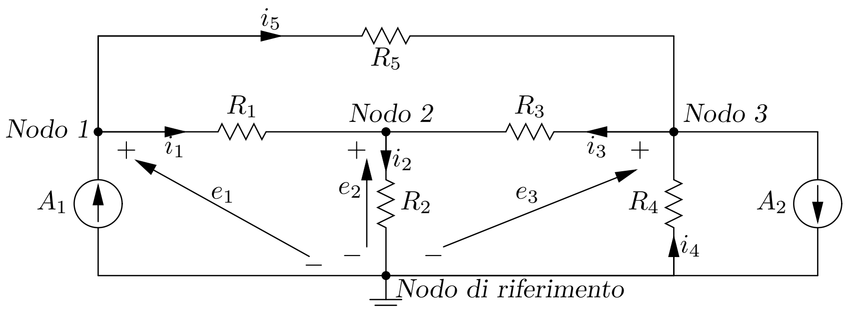

Figura 1.4: Circuito di fig. 1.1 ridisegnato per effetto del **Passo 3**.

PASSO 4 Si applichi la KCL ai tre nodi,ossia al 'Nodo 1', al 'Nodo 2' e al 'Nodo 3'; le equazioni sono le seguenti:

$$\begin{aligned} &\text{Nodo 1} \qquad i_1 + i_5 = A_1 \\ &\text{Nodo 2} \qquad -i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ &\text{Nodo 3} \qquad i_3 - i_5 - i_4 = -A_2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

PASSO 5 Si applichi la legge di Ohm per poter esprimere le correnti i_1,

i_2 e i_3 di ramo in funzione delle tensioni di nodo. La eq. 1.1 si riscrive come:

$$
\begin{aligned}
&\text{Nodo 1} \qquad \frac{\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}}{R_1}+\frac{\mathbf{e_1}-\mathbf{e_3}}{R_5} = A_1\\
&\text{Nodo 2} \qquad \frac{\mathbf{e_2}-\mathbf{e_1}}{R_1}+\frac{\mathbf{e_2}}{R_2}-\frac{\mathbf{e_3}-\mathbf{e_2}}{R_3} = 0\\
&\text{Nodo 3} \qquad \frac{\mathbf{e_3}-\mathbf{e_2}}{R_3}-\frac{\mathbf{e_1}-\mathbf{e_3}}{R_5}-\frac{-\mathbf{e_3}}{R_4} = -A_2
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

PASSO **6** Si lascia al lettore la risoluzione del sistema di 3 equazioni in 3 incognite.

1.2 Presenza di generatori di tensione ideali

Si consideri come la formulazione dell'analisi nodale venga influenzata dalla presenza di generatori di tensione.

Caso 1

Il generatore di tensione risulta collegato tra un nodo qualsiasi ed il nodo di riferimento.

Se il generatore di tensione è collegato tra un nodo qualsiasi e il nodo di riferimento, la tensione del nodo non di riferimento è semplicemente uguale alla tensione imposta del generatore di tensione ideale.

Si consideri il circuito di fig. 1.1 in cui un generatore indipendente di tensione E_1 prende il posto del generatore di corrente A_2; il circuito è riportato nella figura 1.5. La difficoltà risiede nella impossibilità di poter conoscere la corrente

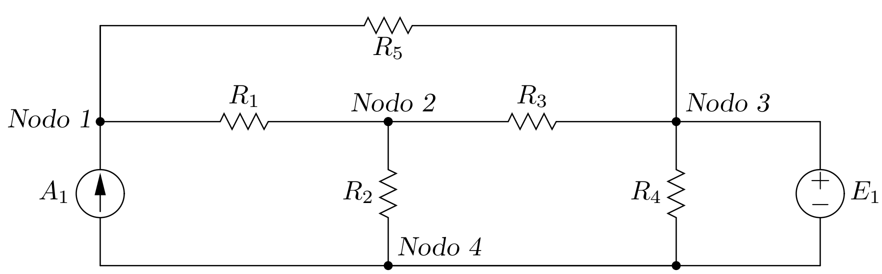

Figura 1.5: Circuito per il **CASO 1** - lezione del 02 maggio 2005.

nel generatore indipendente di tensione in termini della tensione presente ai suoi terminali. Ossia, la corrente dentro il generatore E_1 è essa stessa una incognita. A tale proposito, per il circuito di figura 1.5, l'analisi nodale può essere sempre affrontata seguendo i passi descritti nel paragrafo precedente (1.1).

Riconoscendo che i nodi presenti nel circuito di fig. 1.5 sono i medesimi e che il nodo 4 viene ad essere scelto ancora come nodo di riferimento, i passi 1 e 2 rimagono invariati; per il **Passo 3**, si indichi con i_x la corrente dentro il generatore indipendente di tensione E_1 (vedi fig. 1.6).

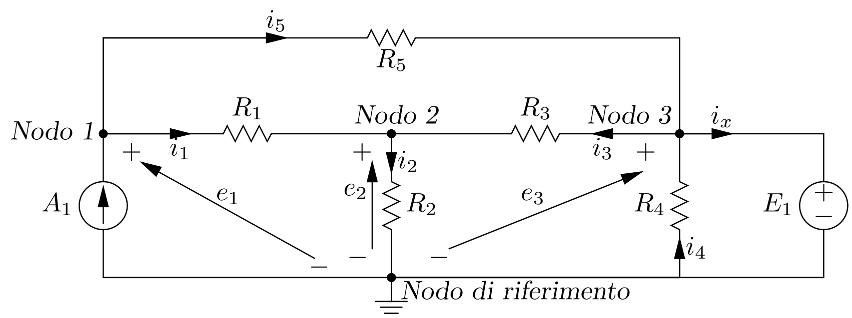

Figura 1.6: Circuito di fig. 1.5 ridisegnato per effetto dei **Passi 1, 2 e 3**.

Le equazioni per la KCL sono quindi:

$$
\begin{aligned}
&\text{Nodo 1} \qquad i_1 + i_5 = A_1 \\
&\text{Nodo 2} \qquad -i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\
&\text{Nodo 3} \qquad i_3 - i_5 - i_4 + i_x = 0
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

e, per il **Passo 4** della procedura riportata al paragrafo precedente (1.1), queste in funzione dei potenziali ai nodi, diventano:

$$
\begin{aligned}
&\text{Nodo 1} \qquad \frac{\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}}{R_1} + \frac{\mathbf{e_1} - \mathbf{e_3}}{R_5} = A_1 \\
&\text{Nodo 2} \qquad -\frac{\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}}{R_1} + \frac{\mathbf{e_2}}{R_2} - \frac{\mathbf{e_3} - \mathbf{e_2}}{R_3} = 0 \\
&\text{Nodo 3} \qquad \frac{\mathbf{e_3} - \mathbf{e_2}}{R_3} - \frac{\mathbf{e_1} - \mathbf{e_3}}{R_5} - \frac{-\mathbf{e_3}}{R_4} + i_x = 0
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Si evince dalle eq. 1.4 che in realtà ora il sistema è composto da 3 equazioni con 4 incognite.

Tuttavia, da una semplice ispezione del circuito di fig. 1.6 si nota che in realtà la tensione al nodo 3 è nota e uguale a quella del generatore E_1, ossia:

$$\mathbf{e_3} = E_1 \tag{1.5}$$

L'eq. 1.4 mostra che le incognite sono $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_1}$ e i_x; ma la i_x compare solo nella terza equazione della 1.4. Allora, se non si conta la terza equazione ma solo le prime due con la condizione 1.5, alla fine si hanno 2 equazioni con due incognite (in cui $\mathbf{e_3} = E_1$).

> L'analisi nodale risulta, in questo caso, in un certo senso semplificata perchè si conosce a priori la tensione di un nodo.

Caso 2

> **Il generatore di tensione risulta collegato tra due nodi non di riferimento e non si può scegliere un altro nodo come riferimento in modo da ricadere nel Caso 1.**

A tale scopo si modifica il circuito di fig. 1.1, collegando un generatore indipendente di tensione E_1 tra il nodo 2 ed il nodo 3 e un altro generatore di tensione al posto del generatore di corrente A_1, così da ottenere il seguente:

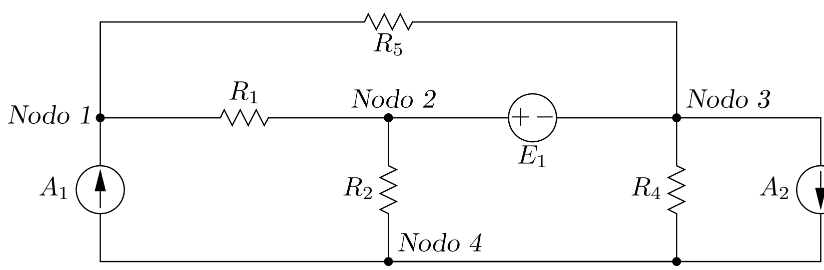

Figura 1.7: Circuito di esempio per il **CASO 2** - lezione del 02 maggio 2005.

Seguendo i passi descritti nella procedura di cui al paragrafo 1.1, si ottiene dopo i passi 1 e 2 e 3 il seguente circuito: Occorrerà riscrivere le equazioni ai 3 nodi. L'equazione al 'Nodo 1' è la medesima di quella scritta per il **Passo 4** del paragrafo precedente mentre nelle equazioni ai Nodi 2 e 3 occorrerà tenere

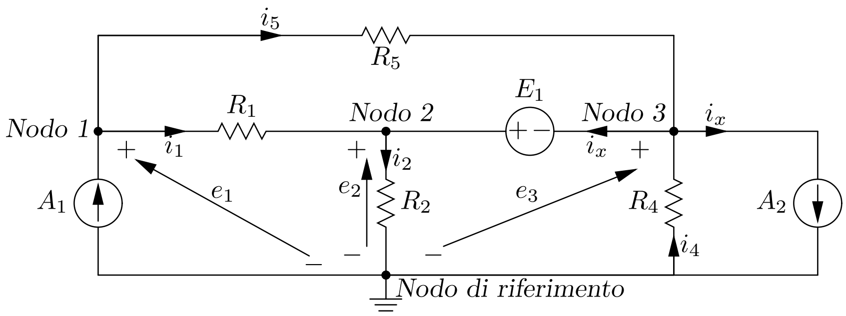

Figura 1.8: Circuito di fig. 1.7 ridisegnato per effetto dei **Passi 1, 2 e 3**.

conto della corrente i_x che scorre nel generatore indipendente di tensione E_1.

$$\begin{array}{ll} \text{Nodo 1} & \text{è la medesima} \\ \text{Nodo 2} & -i_1 + i_2 - i_x = 0 \\ \text{Nodo 3} & i_x - i_5 - i_4 = -A_2 \end{array} \tag{1.6}$$

Per il **Passo 5** della procedura presentata nel paragrafo precedente per il metodo di analisi nodale, le equazioni precedenti (eq, 1.6) si riscrivono come:

$$\begin{array}{ll} \text{Nodo 1} & \text{è la medesima} \\ \text{Nodo 2} & \dfrac{\mathbf{e_2 - e_1}}{R_1} + \dfrac{\mathbf{e_2}}{R_2} - i_x = 0 \\ \text{Nodo 3} & -i_x - \dfrac{\mathbf{e_1 - e_3}}{R_5} - \dfrac{\mathbf{-e_3}}{R_4} = -A_2 \end{array} \tag{1.7}$$

Il sistema di equazioni 1.7 presenta 3 equazioni e 4 incognite, per la presenza ulteriore di i_x: occorre trovare una quarta equazione. Si noti che la differenza di potenziale tra il nodo 2 ed il nodo 3 non è una incognita ma risulta fissata dal generatore indipendente di tensione E_1, ossia

$$\mathbf{e_2 - e_3} = E_1 \tag{1.8}$$

L'eq. 1.8 è la quarta equazione da affiancare al sistema 1.7.

Esempio 1.2.1

Calcolare le tensioni di nodo nel circuito di figura 1.9

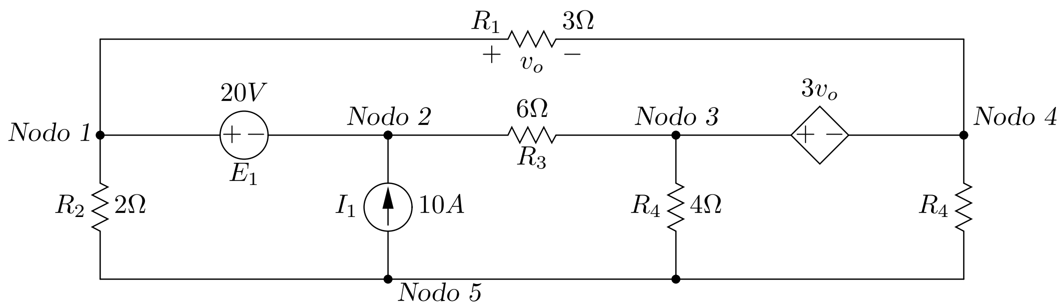

Figura 1.9: Circuito tratto dall'esempio 3.4 pag.71 del libro di testo.

Soluzione

Seguendo la procedura del paragrafo 1.1 come riferimento per l'applicazione dell'analisi nodale, si arriva al circuito di figura 1.10 dopo che siano stati eseguiti i seguenti passi:

$\boxed{\text{PASSO } \mathbf{1}}$ Si scelga il **Nodo 5** come **nodo di riferimento**.

$\boxed{\text{PASSO } \mathbf{2}}$ Si denotino con $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ e $\mathbf{e_4}$ le tensioni di nodo rispettivamente dei nodi 'Nodo 1', 'Nodo 2', 'Nodo 3' e 'Nodo 4' **riferite al nodo di riferimento**.

$\boxed{\text{PASSO } \mathbf{3}}$ Si scelgano le assegnazioni per i segni positivi delle correnti i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_x e i_y quelle della figura 1.10.

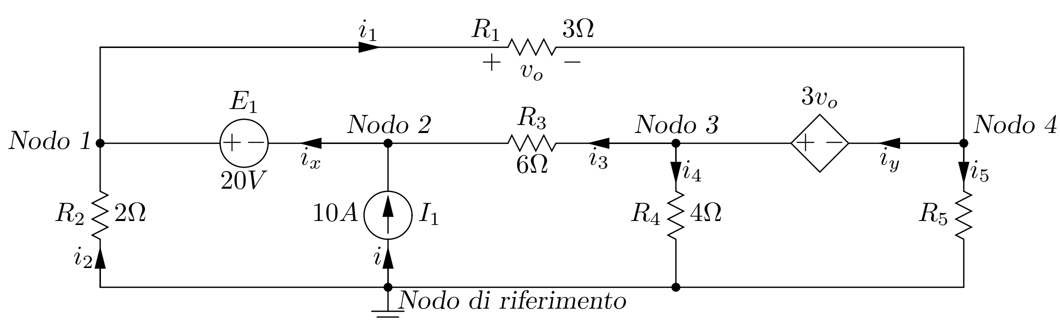

Figura 1.10: Circuito di fig. 1.9 ridisegnato per effetto dei **Passi 1, 2 e 3**.

Ottenuta la figura 1.10, il passo successivo, **Passo 4**, è l'applicazione della KCL ad ognuno dei 4 nodi :

$$
\begin{aligned}
&Nodo\,1 \qquad i_x \,=\, i_1 \,+\, i_2 \\
&Nodo\,2 \qquad i \,+\, i_3 \,=\, i_x \\
&Nodo\,3 \qquad i_y \,=\, i_4 \,+\, i_3 \\
&Nodo\,4 \qquad i_1 \,=\, i_5 \,+\, i_y \qquad \text{cioè} \qquad i_y \,=\, i_1 \,-\, i_5
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

e, **Passo 5**, la trasformazione della eq. 1.9 tramite la legge di Ohm in equazioni ove compaiono solo le tensioni, incognite, di nodo; ossia:

$$
\begin{aligned}
&Nodo\,1 \qquad i_x \,=\, \frac{\mathbf{e_1} - \mathbf{e_4}}{3} \,+\, \frac{\mathbf{e_1}}{2} \\
&Nodo\,2 \qquad i_x \,=\, 10 \,+\, \frac{\mathbf{e_3} - \mathbf{e_2}}{6} \\
&Nodo\,3 \qquad i_y \,=\, \frac{\mathbf{e_3}}{4} \,+\, \frac{\mathbf{e_3} - \mathbf{e_2}}{6} \\
&Nodo\,4 \qquad i_y \,=\, \frac{\mathbf{e_1} - \mathbf{e_4}}{3} \,-\, \frac{\mathbf{e_4}}{1}
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

ove si sono altresì usati i valori delle resistenze R_1, R_2, R_3, R_4 e R_5.
Il sistema 1.10 presenta solo 4 equazioni per 6 incognite; al solito, come precedentemente descritto per il Caso 2, una semplice ispezione del circuito porta a considerare che le differenze di potenziale (a) tra il 'Nodo 1' e il 'Nodo 2', (b) tra il 'Nodo 3' ed il 'Nodo 4' sono in realtà note e pari a:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} \,=\, 20V \\
&\mathbf{e_3} - \mathbf{e_4} \,=\, 3v_o = 3(\mathbf{e_1} - \mathbf{e_4})
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

che rappresentano, quindi, le altre 2 equazioni da aggiungere al sistema 1.10 per poterlo risolvere in modo tale da poter ricavare le tensioni di nodo.
Le quattro equazioni in 1.10 vanno riscritte nel modo seguente, per poter avere solo tensioni di nodo:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathbf{e_1}}{3} - \frac{\mathbf{e_4}}{3} + \frac{\mathbf{e_1}}{2} - 10 - \frac{\mathbf{e_3}}{6} - \frac{\mathbf{e_2}}{6} \,=\, 0 \\
&\frac{\mathbf{e_3}}{4} + \frac{\mathbf{e_3}}{6} - \frac{\mathbf{e_2}}{6} - \frac{\mathbf{e_1}}{3} + \frac{\mathbf{e_4}}{3} + \mathbf{e_4} = 0
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

Le eq. 1.12 e le eq. 1.11, con semplici passaggi, diventano:

$$\begin{aligned}
&5\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} - \mathbf{e_3} - 2\mathbf{e_4} \,=\, 60 \\
&-4\mathbf{e_1} - 2\mathbf{e_2} + 5\mathbf{e_3} + 16\mathbf{e_4} \,=\, 0 \\
&\mathbf{e_1} - \mathbf{e_2} \,=\, 20 \\
&3\mathbf{e_1} - \mathbf{e_3} - 2\mathbf{e_4} \,=\, 0
\end{aligned} \tag{1.13}$$

La soluzione del sistema di equazioni 1.13 la si ottiene facilmente tramite la regola di Cramer se il sistema 1.13 viene scritto in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 & 16 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e_1} \\ \mathbf{e_2} \\ \mathbf{e_3} \\ \mathbf{e_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La soluzione comporta il calcolo dei seguenti determinanti:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 & 16 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 16 & -2 \end{vmatrix} = 18,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 60 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 & 16 \\ 20 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & -2 \end{vmatrix} = 480,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 60 & -1 & -2 \\ -4 & 0 & 5 & 16 \\ 1 & 20 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 16 & -2 \end{vmatrix} = 120,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 60 & -2 \\ -4 & -2 & 0 & 16 \\ 1 & -1 & 20 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3120,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 60 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 20 \\ 3 & 0 & 16 & 0 \end{vmatrix} = -840,$$

che forniranno i valori per $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ e $\mathbf{e_4}$, ossia:

$$\mathbf{e_1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{480}{18} = 26.7 \text{ V},$$

$$\mathbf{e_2} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{120}{18} = 6.7 \text{ V},$$

$$\mathbf{e_3} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{3120}{18} = 173.3 \text{ V},$$

$$\mathbf{e_4} = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{-840}{18} = -46.7 \text{ V}$$

I valori ricavati per le tensioni di nodo $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ e $\mathbf{e_4}$ sono ovviamente identici a quelli ricavati, con un procedimento un pò più laborioso, a pagina 73 del libro di testo.