Esercitazione VI -30 Aprile

giovedì 29 aprile 2021 16:45

Sinusoidi

Una **sinusoide** è un segnale che ha la forma della funzione seno o coseno.

Una corrente (tensione) sinusoidale è anche detta corrente (tensione) alternata (o **ac** dall'inglese *alternate current*, che si contrappone a dc *direct current*).

Grazie all'analisi di **Fourier**, qualunque segnale variabile nel tempo può essere scomposto in una somma di contributi sinusoidali (serie di Fourier o integrale di Fourier).

Sinusoidi

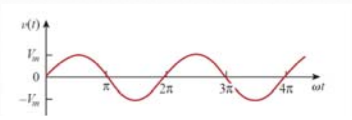
$$v(t) = V_m \sin(\underbrace{\omega t + \phi}) \quad [V]$$

V_m ampiezza della sinusoide

ω frequenza angolare o pulsazione (rad/s)

$(\omega t + \phi)$ argomento della sinusoide

ϕ fase della sinusoide



$\omega = [Rad] \cdot [s^{-1}]$

$\omega = f$

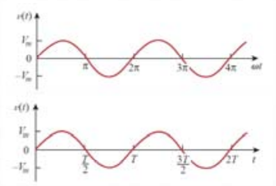
$\omega = \boxed{2\pi f}$

Sinusoidi

Il periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ è il tempo impiegato per compiere un ciclo

La frequenza $f = \frac{1}{T}$ è il numero di cicli per secondo e si misura in Hertz (1Hz=$\frac{1}{s}$).

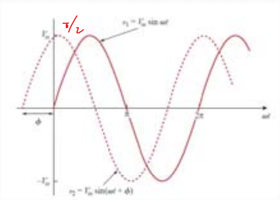
$\frac{\omega}{2\pi}$



Sinusoidi

$v_1(t) = V_m \sin\omega t$ e $v_2(t) = V_m \sin(\omega t + \phi)$ $\neq 0$

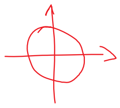
Se $\phi \neq 0$ si dice che le due sinusoidi sono *sfasate*, altrimenti si dice che sono *in fase*



Sinusoidi

Usando le identità trigonometriche possiamo trasformare seni in coseni e viceversa

$$\sin(\omega t \pm 180^\circ) = -\sin\omega t$$
$$\cos(\omega t \pm 180^\circ) = -\cos\omega t$$
$$\sin(\omega t \pm 90^\circ) = \pm\cos\omega t$$
$$\cos(\omega t \pm 90^\circ) = \mp\sin\omega t$$



Sinusoidi

Esercizio

Determinare ampiezza, fase, pulsazione, periodo e frequenza delle seguenti sinusoidi

a) $v(t) = 12\cos(50t + 10^\circ)$ $\omega = 50$ rad/s

b) $v(t) = 5\sin(4\pi t - 60^\circ)$ 4π rad/s

Soluzione

a) Ampiezza $V_m = 12V$
   Fase $\phi = 10^\circ$
   Pulsazione $\omega = 50\ rad/s$
   Periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}1257\ s$
   Frequenza $f = \frac{1}{T} = 7{,}958$ Hz

a) Ampiezza $V_m = 5V$
   Fase $\phi = -60^\circ$
   Pulsazione $\omega = 4\pi\ rad/s = 12{,}57\ rad/s$
   Periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}5\ s$
   Frequenza $f = \frac{1}{T} = 2$ Hz

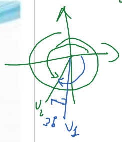
$$\sin(\omega t \pm 180^\circ) = -\sin\omega t$$
$$\cos(\omega t \pm 180^\circ) = -\cos\omega t$$
$$\sin(\omega t \pm 90^\circ) = \pm\cos\omega t$$
$$\cos(\omega t \pm 90^\circ) = \mp\sin\omega t$$

$V_1 = -10\cos(\omega t + 50^\circ) \xrightarrow{} \cos$

$V_1 = -10\cos(\omega t + 50^\circ + 180^\circ) = 10\cos(\omega t + 230^\circ)$

$V_2 = 12\sin(\omega t - 10^\circ) = 12\sin(\omega t - 10^\circ - 90^\circ)$

$= 12\cos(\omega t - 100^\circ)$



Sinusoidi

Esercizio

Calcolare lo sfasamento tra le sinusoidi

$v_1 = -10\cos(\omega t + 50^\circ)$ e $v_2 = 12\sin(\omega t - 10^\circ)$

Soluzione

Dobbiamo ricondurre le sinusoidi nella stessa forma per poterle confrontare.

Riportiamo quella in coseno con ampiezza positiva.

$v_1 = -10\cos(\omega t + 50^\circ) = 10\cos(\omega t + 50^\circ - 180^\circ) = 10\cos(\omega t - 130^\circ)$

Trasformiamo quella in seno in coseno

$v_2 = 12\sin(\omega t - 10^\circ) = 12\cos(\omega t - 10^\circ - 90^\circ) = 12\cos(\omega t - 100^\circ)$

Si nota che lo sfasamento tra le due sinusoidi è di 30°, con v_2 in anticipo su v_1.

Numeri complessi

$j = \sqrt{-1}$ $\rightarrow$ $j^2 = -1$

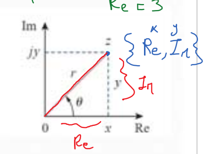
Forma cartesiana o rettangolare

$\boxed{z = x + jy}$ x, y $z = 3 + 4j$

$Re = 3$ $Im = 4$

$x = \mathrm{Re}(z)$ $y = \mathrm{Im}(z)$

(parte reale) (parte immaginaria)



$12\angle 65^\circ$

Forma polare

$\boxed{z = |z|\angle\theta = r\angle\theta}$

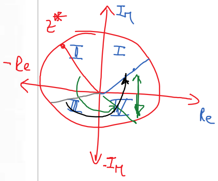
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

(modulo) (argomento o fase)

Numeri complessi

Conversione da cartesiana a polare (regole per la fase)

$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$	Se x>0	1° quadrante
$\theta = 180^\circ + \tan^{-1}\frac{y}{x}$	Se x<0	2° quadrante
$\theta = 180^\circ + \tan^{-1}\frac{y}{x}$	Se x<0	3° quadrante
$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$	Se x>0	4° quadrante



$z = 3 + j4$

$z^* = -3 + j4$

Numeri complessi

$r = \sqrt{Re^2 + Im^2}$ $\quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{Im}{Re}\right)$

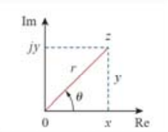
Forma esponenziale

$j = \sqrt{-1}$

$\boxed{z = re^{j\theta}}$ $\quad z = re^{j\theta}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2},$ (modulo) $\quad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ (argomento)

$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$

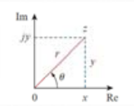


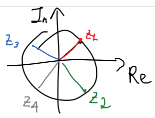
Numeri complessi

$z = x + jy, \quad (x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$ Forma cartesiana

$z = r\angle\theta, \quad \left(r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$ Forma polare

$z = re^{j\theta}, \quad \left(r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$ Forma esponenziale





FORMA CARTESIANA → FORMA POLARE → FORMA ESPONENZIALE

$R\angle\theta$

$re^{j\theta}$

Numeri complessi

Esercizio

Esprimere i seguenti numeri complessi in forma polare e esponenziale

(a) $z_1 = 6 + j8$, (b) $z_2 = 6 - j8$, (c) $z_3 = -6 + j8$, (d) $z_4 = -6 - j8$

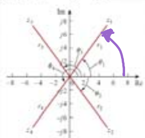
Soluzione

a) Per z_1=6+j8 (1° quadrante)

$r_1 = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10, \qquad \theta_1 = \tan^{-1}\frac{8}{6} = 53.13°$

Forma polare $10\angle 53.13°$

Forma esponenziale $10e^{j53.13°}$



b) Per z_2=6-j8 (4° quadrante)

$r_2 = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10,$

$\theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{-8}{6}\right) = -53,13° = \boxed{306,87°}$

Forma polare $10\angle 306.87°$

Forma esponenziale $10e^{j306.87°}$

Numeri complessi

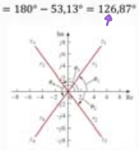
Soluzione

c) Per z3=-6+j8 (2° quadrante)

$r_3 = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10,$ $\quad \theta_3 = 180° + \tan^{-1}\left(\frac{8}{-6}\right) = 180° - 53{,}13° = 126{,}87°$

Forma polare $\quad 10\angle 126.87°$

Forma esponenziale $\quad 10e^{j126.87°}$



d) Per z4=-6-j8 (3° quadrante)

$r_4 = \sqrt{(-6)^2 + (-8)^2} = 10,$ $\quad \theta_4 = 180° + \tan^{-1}\left(\frac{-8}{-6}\right) = 180° + 53{,}13° = 233{,}13°$

Forma polare $\quad 10\angle 233.13°$

Forma esponenziale $\quad 10e^{j233.13°}$

(a) $12\angle{-60°} \rightarrow x + jy \nearrow 12\sin(-60°)$ $= 6 + j\,10.39$

$\downarrow 12\cos(-60°)$

Numeri complessi

Esercizio

Esprimere i seguenti numeri complessi in forma cartesiana

(a) $12\angle{-60°}$, (b) $-50\angle 285°$, (c) $8e^{j10°}$, (d) $20e^{-j\pi/3}$

rad → grad

Soluzione

a) $12\angle{-60°} = 12\cos(-60°) + j12\sin(-60°) = 6 - j10.39$

$-\frac{\cancel{\pi}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{180}\ 60}{\cancel{\pi}}$

b) $-50\angle 285° = -50\cos 285° - j50\sin 285° = -12.94 + j48.3$

$-60°$

$8\angle 10°$

c) $8e^{j10°} = 8\cos 10° + j8\sin 10° = 7.878 + j1.389$

d) $20e^{-j\pi/3} = 20\cos(-\pi/3) + j20\sin(-\pi/3) = 10 - j17.32$

Numeri complessi

Operazioni con i numeri complessi

$\frac{1}{j} = -j$

Se $z_1 = x_1 + jy_1$ e $z_2 = x_2 + jy_2$

$z_1^* = x_1 - jy_1$

$z^* = x - jy = r\angle{-\theta} = re^{-j\theta}$	Complesso Coniugato
$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$	Somma
$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$	Differenza
$z_1 z_2 = r_1 r_2 \angle{\theta_1 + \theta_2}$	Prodotto
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle{\theta_1 - \theta_2}$	Rapporto

$\frac{1}{j} = -j \Rightarrow \frac{j}{j} \cdot \frac{1}{j} = \frac{j}{-1}$

$\frac{1}{j} = -j$

$3 + j4 = z$

$3 - j4 = z^*$

$(3 + j4) \cdot (3 - j4) = 9 \cancel{-12j} \cancel{+12j} + 16$

$= 9 + 16 = r^2$

$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Fasori

Un **fasore** è un numero complesso che rappresenta l'ampiezza e la fase di una sinusoide.

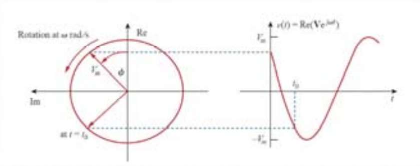
Per l'identità di Eulero $e^{\pm j\phi} = \cos\phi \pm j\sin\phi$

Quindi
$\cos\phi = \mathrm{Re}(e^{j\phi})$
$\sin\phi = \mathrm{Im}(e^{j\phi})$

E possiamo scrivere $v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) = \mathrm{Re}(V_m e^{j(\omega t + \phi)}) = \mathrm{Re}(V_m e^{j\phi} e^{j\omega t})$

Funzione del tempo	Fasore
$\boxed{v(t) = \mathrm{Re}(\mathbf{V} e^{j\omega t})}$	$\mathbf{V} = V_m e^{j\phi} = V_m \angle{\phi}$

Fasori



Fasori

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{V} = V_m \underline{/\phi}$$

Dominio del tempo — Dominio dei Fasori

1) $v(t)$ è la rappresentazione istantanea (o nel dominio del tempo), mentre **V** è la rappresentazione in frequenza (o nel dominio dei fasori)

2) $v(t)$ dipende dal tempo, mentre **V** no.

3) $v(t)$ è sempre reale senza termini complessi, mentre **V** è generalmente un numero complesso.

Fasori

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{V} = V_m \angle \phi$$

Dominio del tempo — Dominio dei Fasori

Trasformazione

$V_m \cos(\omega t + \phi)$	$V_m \angle \phi$
$I_m \cos(\omega t + \theta)$	$I_m \angle \theta$
$V_m \sin(\omega t + \phi)$	$V_m \angle \phi$
$I_m \sin(\omega t + \theta)$	$I_m \angle \theta$

Fasori

Proprietà dei Fasori

Funzione	Fasore	
$v_1(t) = V_{m1}\cos(\omega t + \varphi_1)$ $v_2(t) = V_{m2}\cos(\omega t + \varphi_2)$ $v(t) = a_1 \cdot v_1(t) + a_2 \cdot v_2(t)$ a_1 *e* a_2 *costanti reali*	$\mathbf{V}_1 = V_{m1}e^{j\varphi_1}$ $\mathbf{V}_2 = V_{m2}e^{j\varphi_2}$ $\mathbf{V} = a_1 \cdot \mathbf{V}_1 + a_2 \cdot \mathbf{V}_2$	Linearità

Funzione	Fasore	
$v_1(t) = V_{m1}\cos(\omega t + \varphi_1)$ $v(t) = \frac{dv_1(t)}{dt}$	$\mathbf{V}_1 = V_{m1}e^{j\varphi_1}$ $\mathbf{V} = j\omega \mathbf{V}_1$	Derivazione

Funzione	Fasore	
$v_1(t) = V_{m1}\cos(\omega t + \varphi_1)$ $v(t) = \int v_1(t)dt$	$\mathbf{V}_1 = V_{m1}e^{j\varphi_1}$ $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{V}_1}{j\omega}$	Integrazione

Fasori

Esercizio
Trasformare le seguenti sinusoidi in fasori

(a) $i = 6\cos(50t - 40°)$ A
(b) $v = -4\sin(30t + 50°)$ V

Soluzione

a) $\mathbf{I} = 6\angle -40°$ A

b) $-\sin A = \cos(A + 90°)$ quindi

$$v = -4\sin(30t + 50°) = 4\cos(30t + 50° + 90°) = 4\cos(30t + 140°) \text{ V}$$

$\mathbf{V} = 4\angle 140°$ V

Fasori

Esercizio
Trasformare le seguenti sinusoidi in fasori

(a) $v = 7\cos(2t + 40°)$ V
(b) $i = -4\sin(10t + 10°)$ A

Soluzione

a) $\mathbf{V} = 7\angle 40°$ V

b) $-\sin A = \cos(A + 90°)$ quindi

$$i = -4\sin(10t + 10°) \text{ A} = 4\cos(10t + 10° + 90°)$$

$\mathbf{I} = 4\angle 100°$ A

Fasori

Esercizio

Trasformare i seguenti fasori in sinusoidi

(a) $\mathbf{I} = -3 + j4$ A

(b) $\mathbf{V} = j8e^{-j20°}$ V

Soluzione

a) $\mathbf{I} = -3 + j4 = 5\angle 126.87°$

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{4}{-3}\right) + 180° = 126{,}87°$$

$i(t) = 5\cos(\omega t + 126.87°)$ A

b) $j = 1\angle 90°$ quindi

$$\mathbf{V} = j8\angle -20° = (1\angle 90°)(8\angle -20°) = 8\angle 90° - 20° = 8\angle 70° \text{ V}$$

$v(t) = 8\cos(\omega t + 70°)$ V

Fasori

Esercizio

Trasformare i seguenti fasori in sinusoidi

(a) $\mathbf{V} = -10\angle 30°$ V

(b) $\mathbf{I} = j(5 - j12)$ A

Soluzione

a) $v(t) = -10\cos(\omega t + 30°) = 10\cos(\omega t + 180° + 30°) = 10\cos(\omega t + 210°)$

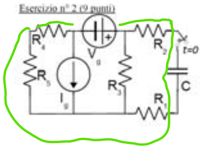
b) $I = j(5 - j12) = 12 + j5 = 13e^{j22{,}62°}$

$$r = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{5}{12}\right) = 22{,}62°$$

$i(t) = 13\cos(\omega t + 22{,}62°)$

Esercizio n° 2 (9 punti)

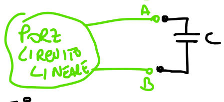


Nel circuito in figura l'interruttore è stato aperto per molto tempo. All'istante t=0, l'interruttore viene chiuso. Determinare $v_C(t)$ per $t > 0$, sapendo che all'istante t=0 in cui viene connesso il condensatore C la tensione $v_C(t)$ vale $v_C(t=0) = 5$ [V]. Rappresentarne poi su un grafico l'andamento temporale.

DATI 2 [A] 2 [Ω]

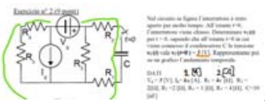
$V_g = 5$ [V], $I_g =$ ~~4~~ [A], $R_1 =$ ~~4~~ [Ω], $R_2 = 2$ [Ω], $R_3 = 2$ [Ω], $R_4 = 1$ [Ω], $R_5 = 4$ [Ω], C=10 [nF]

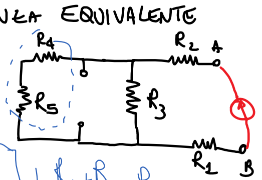
ESAME SETTEMBRE 2017



$$V_C(t) = V_{TH} + (V_0 - V_{TH})e^{-\frac{t}{\tau}}$$

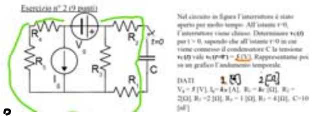
I° STEP → CALCOLO RESISTENZA EQUIVALENTE





$$\underbrace{\left[(R_4 + R_5) \| R_3\right]}_{R_{eq}^*} + R_2 + R_1 = R_{AB} = R_{TH}$$

$$\frac{5 \cdot 2}{5+2} \Rightarrow \frac{10}{7} + \frac{14}{7} + \frac{14}{7} = \frac{38}{7} = R_{TH}$$

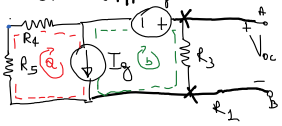


SUPER ANELLO

$I_g = i_a - i_b$

$\boxed{i_a = I_g + i_b}$

II° STEP V_{TH}



$V_{oc} = V_{TH} = V_{R_3}$

(A+b) $i_a(R_4) - V_g + i_b(R_3) + i_a \cdot R_5 = 0$

$(I_g + i_b)(R_4 + R_5) + i_b \cdot R_3 = V_g \Rightarrow i_b(R_4 + R_5 + R_3) = V_g - I_g(R_4 + R_5)$

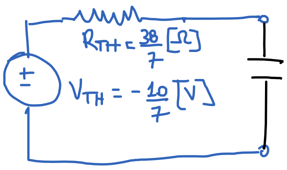
$i_b = \dfrac{V_g - I_g(R_4+R_5)}{R_4 + R_5 + R_3}$

$R_3 = 2\Omega \quad R_4 = 1\Omega \quad V_g = 5V$

$I_g = 2A \quad R_5 = 4\Omega$

$i_b = \dfrac{5 - 10}{7} = -\dfrac{5}{7}$ [A]

$V_{TH} = V_{R_3} = i_b \cdot R_3 = -\dfrac{10}{7}$ [V]



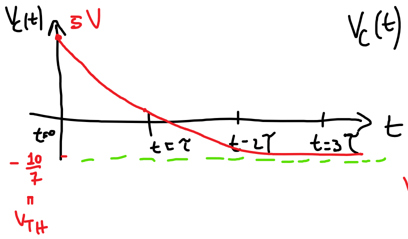
$V_C(t) = V_{TH} + (\underset{5[V]}{V_0} - V_{TH})\, e^{-t/\tau}$

$\tau = R_{TH} \cdot C$

per $t \to \infty$

$V_C(t) = -\dfrac{10}{7} + \left(5 + \dfrac{10}{7}\right) e^{-t/\tau}$

a $t = 0 \Rightarrow 5$ [V]



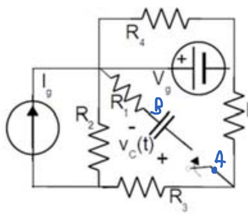
a $t = t^* = 1\tau$

$V_C(t) = -\dfrac{10}{7} + \left(5 + \dfrac{10}{7}\right) \cdot \dfrac{1}{2.71}$

$V_C(t) \simeq 0.94$ [V]

---

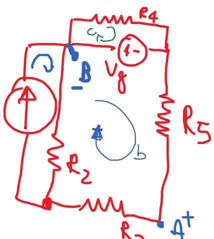
6 LUGLIO 2017



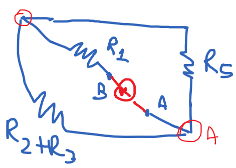
Nel circuito in figura l'interruttore è stato aperto per molto tempo. All'istante t=0, l'interruttore viene chiuso. Determinare **vc(*t*)** per t > 0, sapendo che all'istante t=0 in cui viene connesso il condensatore C la tensione **vc(*t*)** vale **vc(*t*=0⁻) = 5** [V]. Rappresentarne poi su un grafico l'andamento temporale.

DATI

$V_g = kv$ [V], $I_g = 2$ [A], $R_1 = 1[\Omega]$, $R_2 = 4[\Omega]$, $R_3 = 2$ [Ω], $R_4 = 2$ [Ω], $R_5 = kc$ [Ω], C=20 [nF]



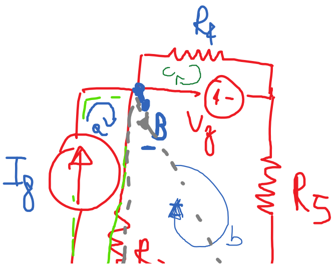
R_{TH}



$R_2 + R_3$ SERIE

$[R_5 \,||\, (R_2 + R_3)] + R_1 = R_{TH}$

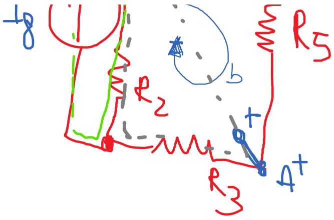
SERIE



$i_a = I_g$

(b) $+V_g + i_b \cdot R_5 + i_b R_3 + (i_b - I_g) R_2 = 0$

(c) $-V_g + i_c \cdot R_4 = 0 \Rightarrow i_c = \dfrac{V_g}{R_4}$



(c) $-V_g + i_c \cdot R_4 = 0 \Rightarrow i_c = \dfrac{V_g}{R_4}$

$$i_b = \frac{-V_g + I_g \cdot R_2}{R_5 + R_3 + R_2} \Rightarrow i_b$$

$$-V_{TH} + i_b \cdot R_3 + (i_b - i_c) R_2 = 0 \Rightarrow V_{TH} = i_b (R_3 + R_2) - i_c R_2$$

$$V_C(t) = V_{TH} + (V_0 - V_{TH}) e^{-t/\tau}$$