



Ricerca Operativa

1

Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplesso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio



Seconda Parte



Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di complementarietà

Coppia primale-duale: approfondimenti

Metodo del semplice duale

Interpretazione dei problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione delle variabili duali all'ottimo

Programmazione Lineare Intera

Metodo di Branch & Bound

Algoritmi dei piani di taglio

Introduzione alla Teoria della dualità

Di fondamentale importanza per lo studio di un problema di Programmazione Lineare (PL) è la conoscenza della **teoria della dualità**.

Principali impieghi:

- ✓ sviluppo di metodi in alcuni casi più efficienti di quelli visti nella prima parte del corso;
- ✓ analisi di post-ottimalità.

Punto fondamentale: a partire da un problema (P) di PL, si può costruire un altro problema (D) di PL, detto **duale**. Le soluzioni dei due problemi sono strettamente legate.



Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di complementarietà

Coppia primale-duale: approfondimenti

Metodo del semplice duale

Interpretazione dei problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione delle variabili duali all'ottimo

Programmazione Lineare Intera

Metodo di Branch & Bound

Algoritmi dei piani di taglio

Teoria della dualità: formulazioni

Il problema (P) iniziale è spesso indicato come **primale** (per distinguerlo dal corrispondente duale).

Definizione

Sia dato un problema (P) di PL in forma standard

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & c^T x \\ \text{s.v.} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0_n \end{array} \quad (\text{primale})$$

con

$$x \in R^n, \quad c \in R^n, \quad b \in R^m, \quad A \in R^{m \times n}$$



Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di complementarietà

Coppia primale-duale: approfondimenti

Metodo del simplesso duale

Interpretazione dei problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione delle variabili duali all'ottimo

Programmazione Lineare Intera

Metodo di Branch & Bound

Algoritmi dei piani di taglio

Teoria della dualità: formulazioni

Si può definire il seguente problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & b^T w \\ \text{s.v.} & A^T w \leq c \end{array} \quad (\text{duale})$$

dove $b^T w$ è la nuova funzione obiettivo e $w = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_m]^T$ è il vettore delle **variabili duali**.

- ☛ la struttura dati dei due problemi è uguale (si continua a lavorare con gli stessi input A, b, c)



Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di complementarietà

Coppia primale-duale: approfondimenti

Metodo del semplice duale

Interpretazione dei problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione delle variabili duali all'ottimo

Programmazione Lineare Intera

Metodo di Branch & Bound

Algoritmi dei piani di taglio

Teoria della dualità: formulazioni

Osservazioni:

- ✓ il problema primale ha n variabili e m vincoli, il corrispondente duale ha m variabili e n vincoli. In particolare, esiste una corrispondenza biunivoca tra la j -esima variabile del primale e il j -esimo vincolo del duale e tra l' i -esima variabile del duale e l' i -esimo vincolo del primale;
- ✓ la matrice dei coefficienti tecnologici del problema duale è la trasposta della matrice dei coefficienti tecnologici del problema primale;
- ✓ il vettore dei coefficienti della funzione obiettivo del duale è il vettore dei termini noti nei vincoli del primale e viceversa.



Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di complementarietà

Coppia primale-duale: approfondimenti

Metodo del simplesso duale

Interpretazione dei problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione delle variabili duali all'ottimo

Programmazione Lineare Intera

Metodo di Branch & Bound

Algoritmi dei piani di taglio

Teoria della dualità: formulazioni

Si consideri un problema (P) di PL con vincoli di disuguaglianza

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & c^T x \\ \text{s.v.} & \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0_n \end{array} \quad (\text{primale})$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Trasformazione del problema in forma standard:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & c^T x + 0_m^T s \\ \text{s.v.} & \\ & Ax - Is = b \\ & x \geq 0_n, s \geq 0_m \end{array}$$

con $s \in \mathbb{R}^m$, $I \in \mathbb{R}^{m \times m}$.



Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di complementarietà

Coppia primale-duale: approfondimenti

Metodo del simplesso duale

Interpretazione dei problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione delle variabili duali all'ottimo

Programmazione Lineare Intera

Metodo di Branch & Bound

Algoritmi dei piani di taglio

Teoria della dualità: formulazioni

Il problema può essere scritto in maniera equivalente come

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & [c^T \ 0_m^T] \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} \\ \text{s.v.} & \\ & [A \ -I] \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} = b \\ & x \geq 0_n, \ s \geq 0_m \end{array}$$

Il duale corrispondente a questo problema si ottiene introducendo il vettore delle variabili duali $w \in R^m$ (secondo la definizione precedente).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Teoria della dualità: formulazioni

Problema duale corrispondente:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & b^T w \\ \text{s.v.} & [A \quad -I]^T w \leq \begin{bmatrix} c \\ 0_m \end{bmatrix} \end{array}$$

Il problema duale può essere scritto in maniera equivalente come

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & b^T w \\ \text{s.v.} & A^T w \leq c \\ & w \geq 0_m \end{array}$$

(duale)



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Teoria della dualità: formulazioni

Con ragionamenti analoghi, si perviene al seguente risultato:

dato il problema di PL

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & c^T x \\ \text{s.v.} & \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0_n \end{array}$$

(primale)

si ottiene

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & b^T w \\ \text{s.v.} & \\ & A^T w \leq c \\ & w \leq 0_m \end{array}$$

(duale)



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Teoria della dualità: formulazioni

Osservazione:

- ✓ A vincoli di disuguaglianza nel primale corrispondono variabili vincolate in segno nel duale.

Si consideri ora un problema di PL con alcune variabili decisionali libere in segno:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & c_x^T x + c_y^T y \\ \text{s.v.} & A_x x + A_y y = b \\ & x \geq 0_n \end{array} \quad (\text{primale})$$

con $x \in \mathbb{R}^n$, $c_x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^q$, $c_y \in \mathbb{R}^q$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A_x \in \mathbb{R}^{m \times n}$,
 $A_y \in \mathbb{R}^{m \times q}$.



Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Teoria della dualità: formulazioni

La trasformazione in forma standard conduce al seguente problema:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & [c_x^T \quad c_y^T \quad -c_y^T] \begin{bmatrix} x \\ y^+ \\ y^- \end{bmatrix} \\ \text{s.v.} \quad & \\ & [A_x \quad A_y \quad -A_y] \begin{bmatrix} x \\ y^+ \\ y^- \end{bmatrix} = b \\ & x \geq 0_n, \quad y^+ \geq 0_q, \quad y^- \geq 0_q \end{aligned}$$

Il corrispondente duale si ottiene introducendo il vettore delle variabili duali $w \in R^m$ (secondo la definizione precedente).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Teoria della dualità: formulazioni

Problema duale corrispondente:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & b^T w \\ \text{s.v.} & \\ & [A_x \quad A_y \quad -A_y]^T w \leq \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ -c_y \end{bmatrix} \end{array}$$

Il problema duale può essere riscritto come

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & b^T w \\ \text{s.v.} & \\ & \left. \begin{array}{l} A_x^T w \leq c_x \\ A_y^T w \leq c_y \\ A_y^T w \geq c_y \end{array} \right\} A_y^T w = c_y \end{array} \quad (\text{duale})$$



Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di complementarietà

Coppia primale-duale: approfondimenti

Metodo del semplice duale

Interpretazione dei problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione delle variabili duali all'ottimo

Programmazione Lineare Intera

Metodo di Branch & Bound

Algoritmi dei piani di taglio

Teoria della dualità: formulazioni

Osservazione:

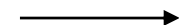
- ✓ A variabili libere in segno nel primale corrispondono vincoli di uguaglianza nel duale.

Infine si consideri il seguente problema di PL di massimizzazione:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & c^T x \\ \text{s.v.} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0_n \end{array} \quad (\text{primale})$$

con $x \in R^n$, $c \in R^n$, $b \in R^m$, $A \in R^{m \times n}$.

Trasformando il problema in forma standard si ottiene





Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di complementarietà

Coppia primale-duale: approfondimenti

Metodo del simplesso duale

Interpretazione dei problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione delle variabili duali all'ottimo

Programmazione Lineare Intera

Metodo di Branch & Bound

Algoritmi dei piani di taglio

Teoria della dualità: formulazioni

$$\begin{aligned} (-) \quad & \text{Min } -c^T x \\ & \text{s.v.} \\ & Ax = b \\ & x \geq 0_n \end{aligned}$$

Il duale corrispondente a questo problema si ottiene introducendo il vettore delle variabili duali $\lambda \in R^m$ (secondo la definizione precedente).

$$\begin{aligned} (-) \quad & \text{Max } b^T \lambda \\ & \text{s.v.} \\ & A^T \lambda \leq -c \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \text{Min } -b^T \lambda \\ & \text{s.v.} \\ & A^T \lambda \leq -c \end{aligned}$$



Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di complementarietà

Coppia primale-duale: approfondimenti

Metodo del simplesso duale

Interpretazione dei problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione delle variabili duali all'ottimo

Programmazione Lineare Intera

Metodo di Branch & Bound

Algoritmi dei piani di taglio

Teoria della dualità: formulazioni

Il duale può essere trasformato nel seguente problema equivalente

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & b^T w \\ \text{s.v.} & A^T w \geq c \end{array} \quad (\text{duale})$$

ponendo $w = -\lambda$ ($w \in R^m$ rappresenta il vettore delle variabili duali per l'ultima formulazione).

Osservazione:

- ✓ Se il problema primale è di minimizzazione, il corrispondente duale è di massimizzazione e viceversa.



Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di complementarietà

Coppia primale-duale: approfondimenti

Metodo del semplice duale

Interpretazione dei problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione delle variabili duali all'ottimo

Programmazione Lineare Intera

Metodo di Branch & Bound

Algoritmi dei piani di taglio

Teoria della dualità: formulazioni

Le regole generali per la costruzione del problema duale a partire da un generico problema di PL sono sintetizzate nella tabella seguente:

Primale (Duale min	→ ← Duale Primale) max
Vincoli \geq	Variabile non negativa
Vincoli $=$	Variabile libera in segno
Vincoli \leq	Variabile non positiva
Variabile non negativa	Vincoli \leq
Variabile libera in segno	Vincoli $=$
Variabile non positiva	Vincoli \geq



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Teoria della dualità: formulazioni

Esempio 1

Determinare il duale del seguente problema di PL:

$$\text{Max } 4x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

s.v.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 8$$

$$2x_1 \quad \quad -x_3 \leq 7$$

$$3x_1 + 4x_2 \quad -x_3 \leq 5$$

$$\quad \quad x_2 \quad +x_3 \leq 6$$

$$\quad \quad x_2 \quad \quad \geq 0$$

(primale)



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Teoria della dualità: formulazioni

Sol.

$$\text{Min } 8w_1 + 7w_2 + 5w_3 + 6w_4$$

s.v.

$$w_1 + 2w_2 + 3w_3 = 4$$

$$2w_1 + 4w_3 + w_4 \geq 3 \quad (\text{duale})$$

$$3w_1 - w_2 - w_3 + w_4 = 2$$

$$w_1, w_2, w_3, w_4 \geq 0$$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Teoria della dualità: formulazioni

Esempio 2

Determinare il duale del seguente problema di PL:

$$\text{Min} \quad 0,4x_1 + 0,5x_2$$

$$\text{s.v.} \quad 0,3x_1 + 0,1x_2 \leq 2,7$$

$$0,5x_1 + 0,5x_2 = 6$$

$$0,6x_1 + 0,4x_2 \geq 6$$

$$x_1, \quad x_2 \geq 0$$

(*primale*)

Sol.

$$\text{Max} \quad 2,7w_1 + 6w_2 + 6w_3$$

s.v.

$$0,3w_1 + 0,5w_2 + 0,6w_3 \leq 0,4$$

$$0,1w_1 + 0,5w_2 + 0,4w_3 \leq 0,5$$

$$w_1 \leq 0, \quad w_3 \geq 0$$

(*duale: D₁*)



Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di complementarietà

Coppia primale-duale: approfondimenti

Metodo del semplice duale

Interpretazione dei problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione delle variabili duali all'ottimo

Programmazione Lineare Intera

Metodo di Branch & Bound

Algoritmi dei piani di taglio

Teoria della dualità: formulazioni

D_1 presenta variabili libere in segno, variabili non negative e variabili non positive.

Dalla tabella precedente si deduce che variabili duali non negative corrispondono a:

- ✓ vincoli di “ \geq ” in un problema (primale) di minimizzazione;
- ✓ vincoli di “ \leq ” in un problema (primale) di massimizzazione.

Nella formulazione (primale) precedente, rimpiazzando il vincolo $0,3x_1 + 0,1x_2 \leq 2,7$ con $-0,3x_1 - 0,1x_2 \geq -2,7$, si ottiene un problema duale equivalente a D_1 con variabili libere in segno o non negative.



Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di complementarietà

Coppia primale-duale: approfondimenti

Metodo del semplice duale

Interpretazione dei problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione delle variabili duali all'ottimo

Programmazione Lineare Intera

Metodo di Branch & Bound

Algoritmi dei piani di taglio

Teoria della dualità: formulazioni

$$\text{Max } -2,7w_1 + 6w_2 + 6w_3$$

s.v.

$$-0,3w_1 + 0,5w_2 + 0,6w_3 \leq 0,4 \quad (\text{duale: } D_2)$$

$$-0,1w_1 + 0,5w_2 + 0,4w_3 \leq 0,5$$

$$w_1 \geq 0, \quad w_3 \geq 0$$

Si poteva ottenere D_2 direttamente da D_1 (trasformazione di una variabile non positiva in una variabile non negativa).

Il problema duale è un problema di PL → esistono formulazioni equivalenti.



Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di complementarietà

Coppia primale-duale: approfondimenti

Metodo del semplice duale

Interpretazione dei problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione delle variabili duali all'ottimo

Programmazione Lineare Intera

Metodo di Branch & Bound

Algoritmi dei piani di taglio

Teoria della dualità: teoremi

Teorema 1

Il duale del duale di un problema di PL è equivalente al problema di PL stesso.

Esempio

$$\begin{array}{lll} \text{Min} & 4x_1 + 6x_2 + 18x_3 \\ \text{s.v.} & & \\ & x_1 + & x_3 \geq 3 \\ & & x_2 + 2x_3 \geq 5 \\ & x_1, & x_2, & x_3 \geq 0 \end{array}$$

(primale)



$$\begin{array}{lll} \text{Max} & 3w_1 + 5w_2 \\ \text{s.v.} & & \\ & w_1 & \leq 4 \\ & & w_2 \leq 6 \\ & w_1 + 2w_2 & \leq 18 \\ & w_1, & w_2 \geq 0 \end{array}$$

(duale)



Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di complementarietà

Coppia primale-duale: approfondimenti

Metodo del semplice duale

Interpretazione dei problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione delle variabili duali all'ottimo

Programmazione Lineare Intera

Metodo di Branch & Bound

Algoritmi dei piani di taglio

Teoria della dualità: teoremi

$$\text{Max } 3w_1 + 5w_2$$

s.v.

$$w_1 \leq 4$$

$$w_2 \leq 6$$

$$w_1 + 2w_2 \leq 18$$

$$w_1, w_2 \geq 0$$

(duale)



$$\text{Min } 4x_1 + 6x_2 + 18x_3$$

s.v.

$$x_1 + x_3 \geq 3$$

$$x_2 + 2x_3 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(duale del duale)

Parlando di problemi di programmazione lineare e dei rispettivi duali, pertanto, si è autorizzati a usare il termine di coppia primale-duale senza distinzione fra problemi.



Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Teoria della dualità: teoremi

Per fissare meglio le idee, i successivi teoremi, pur avendo validità generale, saranno presentati con riferimento a una specifica coppia di problemi:

Primale: problema di PL in forma standard (minimo)

Duale: duale del problema in forma standard (massimo)

Teorema 2 (*dualità debole*)

Sia x una soluzione ammissibile del primale e sia w una soluzione ammissibile del corrispondente duale. Il valore di funzione obiettivo del duale associato a w è sempre minore o uguale del valore di funzione obiettivo del primale associato a x , cioè

$$b^T w \leq c^T x.$$



Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di complementarietà

Coppia primale-duale: approfondimenti

Metodo del semplice duale

Interpretazione dei problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione delle variabili duali all'ottimo

Programmazione Lineare Intera

Metodo di Branch & Bound

Algoritmi dei piani di taglio

Teoria della dualità: teoremi

Dimostrazione

Poiché x è una soluzione ammissibile del primale si ha: $Ax=b$ e $x \geq 0_n$. Allo stesso modo, poiché w è una soluzione ammissibile del duale si ha $A^T w \leq c \rightarrow w^T A \leq c^T$. Moltiplicando ambo i membri della disequazione per x si ha: $w^T Ax \leq c^T x \rightarrow w^T b \leq c^T x$. Da questa relazione discende che $b^T w \leq c^T x$ ($w^T b$ e $c^T x$ sono scalari).

□

Generalizzando, data una coppia primale-duale, il valore di funzione obiettivo associato a ogni soluzione ammissibile del problema di massimo costituisce un limite inferiore per il valore di funzione obiettivo associato a ogni soluzione ammissibile del problema di minimo.



Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplesso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Teoria della dualità: teoremi

Teorema 3 (*dualità forte*)

Se il problema primale ammette una soluzione ottima x^* , allora anche il duale ammette una soluzione ottima w^* e il valore di funzione obiettivo associato alle due soluzioni coincide: $b^T w^* = c^T x^*$.

Dimostrazione

... *omissis* ...

Teorema 4

Se il problema primale è illimitato, il corrispondente duale è privo di soluzioni ammissibili.



Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplesso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Teoria della dualità: teoremi

Dimostrazione

Se il problema primale è illimitato, esiste una successione di soluzioni ammissibili x_1, x_2, \dots tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c^T x_k = -\infty .$$

Se il duale ammettesse una soluzione ammissibile w , la grandezza $b^T w$ costituirebbe un limite inferiore per il valore di funzione obiettivo associato a qualsiasi soluzione ammissibile del primale. Si arriverebbe, pertanto, a una relazione priva di senso: $b^T w \leq -\infty$.

□



Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Teoria della dualità: teoremi

Nelle relazioni presentate non si è ancora fatto riferimento al seguente caso: il problema **primale** è **inammissibile**.

In queste circostanze, sicuramente il problema duale non ammette una soluzione ottima. Tuttavia sono possibili due situazioni alternative:

- ✓ il duale è illimitato,
- ✓ il duale è inammissibile.



Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di complementarietà

Coppia primale-duale: approfondimenti

Metodo del simplesso duale

Interpretazione dei problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione delle variabili duali all'ottimo

Programmazione Lineare Intera

Metodo di Branch & Bound

Algoritmi dei piani di taglio

Teoria della dualità: teoremi

Esempio 1

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x_1 \\ \text{s.v.} & \\ & x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 + x_3 + x_4 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

(primale)



$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 2w_1 + w_2 \\ \text{s.v.} & \\ & w_1 + w_2 \leq 1 \\ & -w_1 \leq 0 \\ & w_1 + w_2 \leq 0 \\ & w_2 \leq 0 \end{array}$$

(duale)

Il problema primale risulta inammissibile. La verifica di questa affermazione potrebbe essere fatta applicando la prima fase del metodo delle due fasi.



Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Teoria della dualità: teoremi

Tuttavia si può vedere molto più semplicemente che il primale è equivalente al seguente problema

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x_1 \\ \text{s.v.} & \\ & x_1 + x_3 \geq 2 \\ & x_1 + x_3 \leq 1 \\ & x_1, x_3 \geq 0 \end{array}$$

dove ci sono due vincoli non compatibili fra loro.

Il duale è invece un problema illimitato. E' possibile verificare direttamente questa affermazione, data la semplicità del duale.



Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di complementarietà

Coppia primale-duale: approfondimenti

Metodo del semplice duale

Interpretazione dei problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione delle variabili duali all'ottimo

Programmazione Lineare Intera

Metodo di Branch & Bound

Algoritmi dei piani di taglio

Teoria della dualità: teoremi

Ad esempio, scegliendo $w_1=K$ e $w_2=-K$ (con $K \geq 0$) si ottengono soluzioni ammissibili con valore di funzione obiettivo pari a K (e K può essere scelto grande a piacere).

Esempio 2

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.v.} & \\ & x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 - x_2 - x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

(primale)



$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 2w_1 + 3w_2 \\ \text{s.v.} & \\ & w_1 + w_2 \leq 1 \\ & -w_1 - w_2 \leq -2 \\ & w_1 \leq 0 \\ & -w_2 \leq 0 \end{array}$$

(duale)



Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Teoria della dualità: teoremi

Il problema primale risulta inammissibile. Come prima, si può vedere molto semplicemente che il primale è equivalente al seguente problema

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.v.} & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 - x_2 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

dove ci sono due vincoli non compatibili fra loro.

Anche il duale è un problema inammissibile. Il primo vincolo $w_1 + w_2 \leq 1$ è infatti incompatibile con il secondo $-w_1 - w_2 \leq -2 \rightarrow w_1 + w_2 \geq 2$.



Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Teoria della dualità: teoremi

Notazione: Data la matrice $A \in R^{m \times n}$, si indicherà con a_i , l' i -esima riga di A ($i=1, \dots, m$) e con A_j la j -esima colonna di A ($j=1, \dots, n$).

Il problema di PL in forma standard e il corrispondente duale possono essere riscritti come:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & c^T x \\ \text{s.v.} & \\ & a_i x = b_i, \quad i=1, \dots, m \\ & x \geq 0_n \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & b^T w \\ \text{s.v.} & \\ & w^T A_j \leq c_j, \quad j=1, \dots, n \end{array}$$



Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Teoria della dualità: teoremi

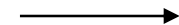
Teorema 5 (*scarti complementari*)

Due soluzioni x e w ammissibili rispettivamente per il primale in forma standard e per il corrispondente duale sono ottimali se e solo se:

$$(c_j - w^T A_j)x_j = 0 \quad \forall \quad j=1, \dots, n.$$

Teorema 6 (*scarti complementari per problemi non standard*)

Si consideri il seguente problema (non in forma standard) e il corrispondente duale





Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di complementarietà

Coppia primale-duale: approfondimenti

Metodo del simplesso duale

Interpretazione dei problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione delle variabili duali all'ottimo

Programmazione Lineare Intera

Metodo di Branch & Bound

Algoritmi dei piani di taglio

Teoria della dualità: teoremi

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & c^T x \\ \text{s.v.} & \\ a_i x \geq b_i, & i=1, \dots, m \\ & x \geq 0_n \end{array}$$

(primale)



$$\begin{array}{ll} \text{Max} & b^T w \\ \text{s.v.} & \\ w^T A_j \leq c_j, & j=1, \dots, n \\ & w \geq 0_m \end{array}$$

(duale)

Due soluzioni x e w ammissibili rispettivamente per il primale e per il duale sono ottimali se e solo valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} (c_j - w^T A_j) x_j &= 0 \quad \forall \quad j=1, \dots, n \\ w_i (a_i x - b_i) &= 0 \quad \forall \quad i=1, \dots, m \end{aligned}$$



Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Teoria della dualità: teoremi

Teorema 5: Dimostrazione

Necessità: Se x e w sono ottime (rispettivamente per il primale e per il duale), per il teorema di dualità forte si ha $c^T x = b^T w \rightarrow c^T x - w^T b = 0 \rightarrow c^T x - w^T b + w^T A x - w^T A x = 0 \rightarrow (c^T - w^T A)x + w^T (A x - b) = 0$. Poiché x è ammissibile per il primale ($A x = b$) si ha $(c^T - w^T A)x = 0$.

Le componenti del vettore riga $c^T - w^T A$ sono non negative (w è ammissibile per il duale; pertanto $A^T w \leq c \rightarrow w^T A \leq c^T$). Anche le componenti del vettore colonna x sono non negative (x è ammissibile per il primale).



Introduzione alla teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Teoria della dualità: teoremi

Pertanto, per avere $(c^T - w^T A)x = 0$ deve essere
 $(c_j - w^T A_j)x_j = 0 \quad \forall j=1, \dots, n.$

Sufficienza: Si può fare lo stesso ragionamento a ritroso. A partire dalla relazione $(c_j - w^T A_j)x_j = 0 \quad \forall j=1, \dots, n$ si arriva a dire che x e w sono ottime (rispettivamente per il primale e per il duale).

□

Teorema 6: Dimostrazione

La dimostrazione è simile alla precedente e viene lasciata come esercizio.



Introduzione alla
teoria della dualità

**Relazioni di
complementarietà**

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Relazioni di complementarietà

Le **relazioni di complementarietà** appena trovate hanno una valenza più generale. Questo aspetto, nonché l'utilità delle relazioni, saranno chiariti meglio mediante esempi numerici.

Esempio 1

$$\text{Min } 3x_1 - 2x_2 + 4x_3$$

s.v.

$$x_1 + x_2 \leq 5 \quad (\text{primale})$$

$$-3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2$$

$$x_1 \geq -1$$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_2 \geq 0$$



Introduzione alla
teoria della dualità

**Relazioni di
complementarietà**

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Relazioni di complementarietà

Sapendo che il valore ottimale della variabile duale w_4^* è diverso da 0, quanto vale all'ottimo la variabile decisionale x_1^* ?

Il problema può essere riscritto nel seguente modo:

$$\text{Min } 3x_1 - 2x_2 + 4x_3$$

s.v.

$$-x_1 - x_2 \geq -5$$

$$-3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2$$

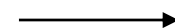
$$x_1 \geq -1$$

$$-x_1 \geq -1$$

$$x_2 \geq 0$$

(primale)

Il corrispondente duale è





Introduzione alla
teoria della dualità

**Relazioni di
complementarietà**

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Relazioni di complementarietà

$$\text{Max } -5w_1 - 2w_2 - w_3 - w_4$$

S.V.

$$-w_1 - 3w_2 + w_3 - w_4 = 3$$

$$-w_1 + 2w_2 \leq -2 \quad (\text{duale})$$

$$-w_2 = 4$$

$$w_1, w_3, w_4 \geq 0$$

Una relazione di complementarietà è sicuramente la seguente: $w_4(-x_1+1)=0$.

Poiché $w_4^* \neq 0$, deve valere l'equazione $-x_1^*+1=0$. Si deduce che $x_1^*=1$.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Relazioni di complementarietà

Esempio 2

$$\text{Max } 4x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 2x_4$$

s.v.

$$-2x_1 + 6x_2 - 2x_3 - x_4 \leq -12$$

$$-x_1 + 9x_2 + 12x_3 - 2x_4 \leq 24$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 32$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

(primale)

Per tale problema di PL è nota la seguente soluzione ottima: $x^* = [72/5 \ 0 \ 16/5 \ 0]^T$, con valore di funzione obiettivo pari a $368/5$. Formulare il problema duale e determinare la soluzione ottima w^* utilizzando le sole relazioni di complementarietà.



Introduzione alla
teoria della dualità

**Relazioni di
complementarietà**

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Relazioni di complementarietà

Il duale è formulabile nel seguente modo:

$$\text{Min } -12w_1 + 24w_2 + 32w_3$$

s.v.

$$-2w_1 - w_2 + 2w_3 \geq 4$$

$$6w_1 + 9w_2 + 3w_3 \geq -8$$

$$-2w_1 + 12w_2 + w_3 \geq 5$$

$$-w_1 - 2w_2 + 4w_3 \geq 2$$

$$w_1, w_2, w_3 \geq 0$$

(duale)

Relazioni di complementarietà:

$$w_1(-12 + 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + x_4) = 0$$

$$w_2(24 + x_1 - 9x_2 - 12x_3 + 2x_4) = 0$$

$$w_3(32 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 4x_4) = 0$$



Introduzione alla
teoria della dualità

**Relazioni di
complementarietà**

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Relazioni di complementarietà

$$x_1(-2w_1 - w_2 + 2w_3 - 4) = 0$$

$$x_2(6w_1 + 9w_2 + 3w_3 + 8) = 0$$

$$x_3(-2w_1 + 12w_2 + w_3 - 5) = 0$$

$$x_4(-w_1 - 2w_2 + 4w_3 - 2) = 0$$

Poiché $x_1^* \neq 0$, $x_3^* \neq 0$ e $-12 + 2x_1^* - 6x_2^* + 2x_3^* + x_4^* \neq 0$, la soluzione ottima del duale si ricava risolvendo il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} -2w_1 - w_2 + 2w_3 = 4 \\ -2w_1 + 12w_2 + w_3 = 5 \\ w_1 = 0 \end{cases}$$

$w^* = [0 \quad 6/25 \quad 53/25]^T$ con valore di funzione obiettivo pari a $368/5$.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Relazioni di complementarietà

Esempio 3

$$\text{Min } 2x_1 + x_2$$

s.v.

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1 \quad (\text{primale})$$

$$x_1 - x_2 \geq -1$$

$$2x_1 - 3x_2 \geq -6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Per tale problema di PL è nota la seguente soluzione ottima: $x^* = [0 \ 1 \ 0]^T$, con valore di funzione obiettivo pari a 1. Formulare il problema duale e determinare la soluzione ottima w^* utilizzando le sole relazioni di complementarietà.



Introduzione alla
teoria della dualità

**Relazioni di
complementarietà**

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Relazioni di complementarietà

Il duale è formulabile nel seguente modo.

$$\text{Max } w_1 - w_2 - 6w_3$$

s.v.

$$w_1 + w_2 + 2w_3 \leq 2$$

$$w_1 - w_2 - 3w_3 \leq 1$$

$$-w_1 \leq 0$$

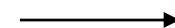
$$w_2, w_3 \geq 0$$

(duale)

Considerando che:

✓ $x_1^* = x_3^* = 0$

✓ il primo vincolo del primale è di uguaglianza
ci si può limitare a scrivere solo le seguenti relazioni
di complementarietà





Introduzione alla
teoria della dualità

**Relazioni di
complementarietà**

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Relazioni di complementarietà

$$w_2(x_1 - x_2 + 1) = 0$$

$$w_3(2x_1 - 3x_2 + 6) = 0$$

$$x_2(1 - w_1 + w_2 + 3w_3) = 0$$

Poiché $x_2^* \neq 0$ e $2x_1^* - 3x_2^* + 6 \neq 0$, ma $x_1^* - x_2^* + 1 = 0$, la soluzione ottima del duale si ottiene risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} w_3 = 0 \\ 1 - w_1 + w_2 + 3w_3 = 0 \end{cases}$$

$$1 - w_1 + w_2 + 3w_3 = 0 \rightarrow 1 - w_1 + w_2 = 0 \rightarrow w_1 = 1 + w_2$$

Ponendo $w_2 = k$ si ottiene $[1+k \ k \ 0]^T$.



Introduzione alla
teoria della dualità

**Relazioni di
complementarietà**

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Relazioni di complementarietà

Il parametro k non può essere scelto del tutto arbitrariamente. La scelta deve infatti salvaguardare l'ammissibilità della soluzione (tutti i vincoli del duale devono essere rispettati).

$$1^\circ \text{ vincolo: } 1+k+k \leq 2 \rightarrow k \leq 1/2$$

$$3^\circ \text{ vincolo: } -1-k \leq 0 \rightarrow k \geq -1$$

$$\text{vincolo di non negatività: } w_2 \geq 0 \rightarrow k \geq 0$$

In definitiva, il duale ha infinite soluzioni ottime del tipo $w^* = [1+k \ k \ 0]^T$ con $0 \leq k \leq 1/2$.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Relazioni di complementarietà

Esempio 4

Sia data la seguente coppia primale-duale:

$$\text{Max } -x_1 \quad -3x_3$$

s.v.

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = -1$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 2$$

$$x_2, x_3 \geq 0$$

(*primale*)

$$\text{Min } -w_1 + 2w_2$$

s.v.

$$w_1 + w_2 = -1$$

$$-2w_1 + 3w_2 \geq 0$$

$$w_1 \geq -3$$

$$w_2 \geq 0$$

(*duale*)



Introduzione alla
teoria della dualità

**Relazioni di
complementarietà**

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Relazioni di complementarietà

E' nota la seguente soluzione ottima del problema duale: $w^* = [-1 \ 0]^T$ (valore di funzione obiettivo: 1). Determinare la soluzione ottima del primale utilizzando le sole relazioni di complementarietà.

Con riferimento ai vincoli di disuguaglianza del duale (secondo e terzo), si possono scrivere le seguenti relazioni:

$$x_2(-2w_1 + 3w_2) = 0,$$

$$x_3(w_1 + 3) = 0.$$



Introduzione alla
teoria della dualità

**Relazioni di
complementarietà**

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Relazioni di complementarietà

Poiché $-2w_1 + 3w_2 \neq 0$ e $w_1 + 3 \neq 0$ si ha $x_2^* = 0$ e $x_3^* = 0$.

La soluzione ottima $[x_1^* \ x_2^* \ x_3^*]$ sicuramente deve soddisfare il vincolo di uguaglianza del primale:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 .$$

Segue che $x_1^* = -1$.

Alla soluzione ottima del primale $[-1 \ 0 \ 0]^T$ è naturalmente associato un valore di funzione obiettivo pari a 1.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Relazioni di complementarietà

Esempio 5

$$\text{Min } 4x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 5x_4$$

s.v.

$$-6x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 3x_4 \geq -2$$

$$7x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 4x_4 \geq 3$$

$$3x_1 - 2x_2 - x_3 + 6x_4 = 5$$

$$x_1, \quad x_3 \geq 0$$

(primale)

Per tale problema di PL è nota la seguente soluzione ottima: $x^* = [0 \ 3/2 \ 0 \ 4/3]^T$, con valore di funzione obiettivo pari a $-23/6$. Formulare il problema duale e determinare la soluzione ottima w^* utilizzando le sole relazioni di complementarietà.



Introduzione alla
teoria della dualità

**Relazioni di
complementarietà**

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Relazioni di complementarietà

Il duale è formulabile nel seguente modo.

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & -2w_1 + 3w_2 + 5w_3 \\ \text{s.v.} & \end{array}$$

$$-6w_1 + 7w_2 + 3w_3 \leq 4$$

$$-4w_1 + 5w_2 - 2w_3 = -7$$

$$-6w_1 + 5w_2 - w_3 \leq 4$$

$$3w_1 + 4w_2 + 6w_3 = 5$$

$$w_1, w_2 \geq 0$$

(duale)

La soluzione ottima $[w_1^* \ w_2^* \ w_3^*]$ sicuramente deve soddisfare i vincoli di uguaglianza del duale:

$$-7 + 4w_1 - 5w_2 + 2w_3 = 0$$

$$5 - 3w_1 - 4w_2 - 6w_3 = 0$$



Introduzione alla
teoria della dualità

**Relazioni di
complementarietà**

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Relazioni di complementarietà

Inoltre, con riferimento ai vincoli di disuguaglianza del primale, si possono scrivere le seguenti relazioni:

$$w_1(-6x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 3x_4 + 2) = 0$$

$$w_2(7x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 3) = 0$$

Poiché $-6x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 3x_4 + 2 = 0$ e $7x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 4x_4 - 3 \neq 0$, solo la seconda relazione contribuisce alla definizione della soluzione ottima del duale stabilendo che $w_2^* = 0$. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} w_2 = 0 \\ -7 + 4w_1 - 5w_2 + 2w_3 = 0 \\ 5 - 3w_1 - 4w_2 - 6w_3 = 0 \end{cases}$$





Introduzione alla
teoria della dualità

**Relazioni di
complementarietà**

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Relazioni di complementarietà

si ottiene $w^* = [16/9 \ 0 \ -1/18]^T$. A questa soluzione è naturalmente associato un valore di funzione obiettivo pari a $-23/6$.

Riassumendo:

- ✓ a ogni vincolo j non soddisfatto all'uguaglianza dalla soluzione ottima del duale D corrisponde una componente x_j nulla nella soluzione ottima del primale P ;
- ✓ a ogni variabile j non nulla ($x_j > 0$) nella soluzione ottima del primale P corrisponde un vincolo del duale D (il j -esimo) soddisfatto all'uguaglianza dalla soluzione ottima di D ;



Introduzione alla
teoria della dualità

**Relazioni di
complementarietà**

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Relazioni di complementarietà

- ✓ a ogni vincolo i non soddisfatto all'uguaglianza dalla soluzione ottima del primale P corrisponde una componente w_i nulla nella soluzione ottima del duale D ;
- ✓ a ogni variabile i non nulla ($w_i > 0$) nella soluzione ottima del duale D corrisponde un vincolo del primale P (i -esimo) soddisfatto all'uguaglianza dalla soluzione ottima di P .



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

**Coppia
primale-duale:
approfondimenti**

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Ottimalità primale - Ammissibilità duale

Nella prima parte del corso si è visto che un problema in forma standard, individuato un insieme di indici di base B , può essere scritto come

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ A_B x_B + A_N x_N &= b \\ x_B &\geq 0_m, x_N \geq 0_{n-m} \end{aligned} \quad (P_S)$$

con $A_B \in R^{m \times m}$, $A_N \in R^{m \times (n-m)}$, $b \in R^m$, $c_B \in R^m$, $x_B \in R^m$, $c_N \in R^{n-m}$, $x_N \in R^{n-m}$.

Da questa formulazione si può ottenere un problema equivalente





Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

**Coppia
primale-duale:
approfondimenti**

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Ottimalità primale - Ammissibilità duale

$$\text{Min } z = c_B^T A_B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N) x_N$$

$$x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$$

$$x_B \geq 0_m, x_N \geq 0_{n-m}$$

Una soluzione $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_B^{-1} b \\ 0_{n-m} \end{bmatrix}$ è una soluzione

di base rispetto a B , ammissibile per il problema P_S .
A essa è associato un valore di funzione obiettivo
pari a $z = c_B^T A_B^{-1} b$.

☛ Se $(c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N) \geq 0_{n-m}^T$, questa soluzione è ottima.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

**Coppia
primale-duale:
approfondimenti**

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Ottimalità primale - Ammissibilità duale

Il duale corrispondente a P_s è:

$$\begin{aligned} \text{Max } \pi &= b^T w \\ [A_B \ A_N]^T w &\leq \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \end{bmatrix} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Max } \pi &= b^T w \\ A_B^T w &\leq c_B \\ A_N^T w &\leq c_N \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Max } \pi &= w^T b \\ w^T A_B &\leq c_B^T \\ w^T A_N &\leq c_N^T \end{aligned}$$

(D_s)



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

**Coppia
primale-duale:
approfondimenti**

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Ottimalità primale - Ammissibilità duale

Si definisce **soluzione complementare** di x il vettore $w^T = c_B^T A_B^{-1}$. Poiché tale vettore è m -dimensionale, esso rappresenta una soluzione del duale D_S (ammissibile oppure non ammissibile).

- ✓ Se x è ottima, allora $c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N \geq 0_{n-m}^T \rightarrow c_N^T - w^T A_N \geq 0_{n-m}^T \rightarrow w^T A_N \leq c_N^T$ (secondo gruppo di vincoli di D_S soddisfatto). Anche il primo gruppo di vincoli di D_S è soddisfatto perché si ha $c_B^T A_B^{-1} A_B \leq c_B^T \rightarrow c_B^T I \leq c_B^T \rightarrow c_B^T \leq c_B^T$ (sempre vera). La soluzione w è ammissibile per D_S e il valore di funzione obiettivo a essa associato è $\pi = c_B^T A_B^{-1} b$. Si noti che $\pi = z \rightarrow w$ è ottima per il duale (teorema di dualità forte).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

**Coppia
primale-duale:
approfondimenti**

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Ottimalità primale - Ammissibilità duale

- ✓ Se x non è ottima, allora esiste un indice j tale che $c_j - c_B^T A_B^{-1} A_j < 0 \rightarrow c_j - w^T A_j < 0$ (un vincolo del duale è sicuramente violato da $w \rightarrow$ la soluzione complementare non è ammissibile per il duale).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

**Coppia
primale-duale:
approfondimenti**

Metodo del
simpleso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Forme canoniche

$$\text{Min } z = c_B^T A_B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N) x_N$$

$$x_B + A_B^{-1} A_N x_N = A_B^{-1} b$$

$$x_B \geq 0_m, x_N \geq 0_{n-m}$$



0_m^T		$c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N = c_N^T - w^T A_N$	$-c_B^T A_B^{-1} b = -w^T b$
I		$A_B^{-1} A_N$	$A_B^{-1} b$

Diagram annotations:

- A vertical curly brace on the left of the first two rows is labeled m .
- A horizontal curly brace under the first column is labeled m .
- A horizontal curly brace under the second and third columns is labeled $n-m$.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

**Coppia
primale-duale:
approfondimenti**

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Forme canoniche

Ponendo $\bar{d} = c_B^T A_B^{-1} b$, $\bar{b} = A_B^{-1} b$, $\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$, $\bar{A}_N = A_B^{-1} A_N$, la tabella corrispondente a B può essere rappresentata nel seguente modo:

					\bar{c}_N^T					
0	...	0	...	0	\bar{c}_{m+1}	...	\bar{c}_k	...	\bar{c}_n	$-\bar{d}$
1					$\bar{a}_{1,m+1}$...	$\bar{a}_{1,k}$...	$\bar{a}_{1,n}$	\bar{b}_1
	\ddots				\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
		1			$\bar{a}_{h,m+1}$...	$\bar{a}_{h,k}$...	$\bar{a}_{h,n}$	\bar{b}_h
			\ddots		\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
				1	$\bar{a}_{m,m+1}$...	$\bar{a}_{m,k}$...	$\bar{a}_{m,n}$	\bar{b}_m
					\bar{A}_N					\bar{b}



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

**Coppia
primale-duale:
approfondimenti**

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Forme canoniche

- ✓ Se $\bar{b} \geq 0_m$ il tableau è in **forma canonica** →
 B e di conseguenza A_B sono ammissibili per il primale
 \Rightarrow la soluzione $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_B^{-1}b \\ 0_{n-m} \end{bmatrix}$ è ammissibile per il primale
- ✓ Se $\bar{c}_N \geq 0_{n-m}$, il tableau è in **forma canonica duale** →
 B e di conseguenza A_B sono ammissibili per il duale
 \Rightarrow la soluzione $w^T = c_B^T A_B^{-1}$ è ammissibile per il duale
- ✓ Se $\bar{b} \geq 0_m$ e $\bar{c}_N \geq 0_{n-m}$, B e di conseguenza A_B sono ammissibili (e ottime) sia per il primale che per il duale



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

**Coppia
primale-duale:
approfondimenti**

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Informazione duale nelle tabelle del semplice

Prima di vedere il metodo del semplice duale è utile capire come si possono ottenere delle informazioni sulle variabili duali direttamente dal tableau utilizzato nel metodo del semplice (standard).

Il modo di procedere descritto nel seguito è alternativo all'utilizzo delle relazioni di complementarietà.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

**Coppia
primale-duale:
approfondimenti**

Metodo del
simpleso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Informazione duale nelle tabelle del simpleso

La soluzione ottima del duale è prontamente disponibile al termine del metodo del simpleso se il problema di PL si presenta nella forma seguente ($b \geq 0_m$):

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= c_x^T x + c_y^T y \\ A_x x + I y &= b \\ x &\geq 0_{n-m}, y \geq 0_m \end{aligned}$$

La caratteristica di questo problema è quella di presentare una matrice di identità $m \times m$ come matrice dei coefficienti tecnologici di un gruppo di variabili decisionali (vettore y di dimensione m).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

**Coppia
primale-duale:
approfondimenti**

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Informazione duale nelle tabelle del simplexso

Sia B l'insieme degli indici di base ottimo.

Nella riga 0 del tableau ottimo si può leggere l'informazione:

$c_y^T - c_B^T A_B^{-1} I = \bar{c}_y^T \rightarrow$ vettore dei coefficienti di costo
ridotto associato a y

$$c_y^T - w^T = \bar{c}_y^T \rightarrow w^T = c_y^T - \bar{c}_y^T$$

Conseguentemente, per ogni componente y_j del vettore y si può scrivere: $w_j = c_{y_j} - \bar{c}_{y_j}$.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

**Coppia
primale-duale:
approfondimenti**

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Informazione duale nelle tabelle del simplexso

Esempio 1

Sia dato il seguente problema P_1 di PL:

$$\text{Min } 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4$$

s.v.

$$x_1 + x_3 - x_4 = 4$$

$$x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

		2	1	1	-1	0	0
$m=2$	{	1	0	1	-1	0	4
		0	1	2	-2	-1	2
		$m=2$					



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

**Coppia
primale-duale:
approfondimenti**

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Informazione duale nelle tabelle del simplexso

Occorre innanzitutto ripristinare la forma canonica. In particolare, per fare in modo che il coefficiente di costo associato a x_1 si annulli si può fare un'operazione di *pivot* sull'unico elemento diverso da zero presente nella colonna associata a x_1 (il riferimento è alla colonna comprendente i soli coefficienti tecnologici).

0	1	-1	1	0	-8
1	0	1	-1	0	4
0	1	2	-2	-1	2



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

**Coppia
primale-duale:
approfondimenti**

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Informazione duale nelle tabelle del simplexso

Allo stesso modo, per annullare il coefficiente di costo associato a x_2 si può fare un'operazione di *pivot* sull'unico coefficiente tecnologico non nullo presente nella colonna associata a x_2 .

0	0	-3	3	1	-10
1	0	1	-1	0	4
0	1	2	-2	-1	2

La soluzione di base $[4 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ non è ottima. Nella colonna associata al costo “-3” ($k=3$) ci sono due elementi positivi.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

**Coppia
primale-duale:
approfondimenti**

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Informazione duale nelle tabelle del simplexso

L'operazione di *pivot* è eseguita sull'elemento

$\bar{a}_{hk} = \bar{a}_{23} = 2$ poiché

$\min\left\{\frac{4}{1}, \frac{2}{2}\right\} = \frac{2}{2} \rightarrow h=2$. La tabella risultante è:

0	3/2	0	0	-1/2	-7
1	-1/2	0	0	1/2	3
0	1/2	1	-1	-1/2	1

La soluzione di base $[3 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ non è ottima.
Nella colonna associata al costo “-1/2” c'è un solo
elemento positivo.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

**Coppia
primale-duale:
approfondimenti**

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Informazione duale nelle tabelle del simplexso

Eseguendo l'operazione di *pivot* su tale elemento si ottiene la seguente tabella:

1	1	0	0	0	-4
2	-1	0	0	1	6
1	0	1	-1	0	4

La soluzione di base $[0 \ 0 \ 4 \ 0 \ 6]^T$ è ottima. Pertanto $B=\{5,3\}$ è un insieme di indici di base ottimo .

La tabella finale fornisce delle informazioni utili sul valore ottimo delle variabili duali.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

**Coppia
primale-duale:
approfondimenti**

Metodo del
simpleso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Informazione duale nelle tabelle del simpleso

		\bar{C}_2				
\bar{C}_1	1	1	0	0	0	-4
	2	-1	0	0	1	6
	1	0	1	-1	0	4

$$w_1 = C_1 - \bar{C}_1 = 2 - 1 = 1;$$

$$w_2 = C_2 - \bar{C}_2 = 1 - 1 = 0.$$

Esercizio proposto: Costruire il duale D_1 del problema P_1 e verificare (attraverso l'utilizzo delle relazioni di complementarietà) che $[1 \ 0]^T$ rappresenta la soluzione ottima di D_1 .



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

**Coppia
primale-duale:
approfondimenti**

Metodo del
simpleso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Informazione duale nelle tabelle del simpleso

Esempio 2

Sia dato il seguente problema P_2 di PL in forma canonica:

$$\text{Min } -5x_1 - x_2 - 3x_3$$

s.v.

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 4$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

La tabella corrispondente è:

$m=2$ {	-5	-1	-3	0	0	0
	2	-1	2	1	0	4
	1	1	4	0	1	4

$\underbrace{\hspace{10em}}_{m=2}$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

**Coppia
primale-duale:
approfondimenti**

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Informazione duale nelle tabelle del simplexso

La soluzione di base $[0 \ 0 \ 0 \ 4 \ 4]^T$ non è ottima. Nella colonna associata al costo “-5” ($k=1$) ci sono due elementi positivi. L'operazione di *pivot* è eseguita sull'elemento $\bar{a}_{hk}=\bar{a}_{11}=2$ poiché

$$\min\left\{\frac{4}{2}, \frac{4}{1}\right\} = \frac{4}{2} \rightarrow h=1. \text{ La tabella risultante è:}$$

0	-7/2	2	5/2	0	10
1	-1/2	1	1/2	0	2
0	3/2	3	-1/2	1	2

La soluzione di base $[2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2]^T$ non è ottima. Nella colonna associata al costo “-7/2” c'è un solo elemento positivo. Eseguendo l'operazione di *pivot* su tale elemento si ottiene la seguente tabella





Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

**Coppia
primale-duale:
approfondimenti**

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Informazione duale nelle tabelle del simplexso

0	0	9	4/3	7/3	44/3
1	0	2	1/3	1/3	8/3
0	1	2	-1/3	2/3	4/3

La soluzione di base $[8/3 \ 4/3 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ è ottima.
Pertanto l'insieme di indici di base ottimo è: $B=\{1,2\}$.
La tabella ottima, anche in questo caso, fornisce
delle informazioni utili sul valore ottimo delle variabili
duali.

$\bar{C}_{y_1} = \bar{C}_4$					
$\bar{C}_{y_2} = \bar{C}_5$					
0	0	9	4/3	7/3	44/3
1	0	2	1/3	1/3	8/3
0	1	2	-1/3	2/3	4/3



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

**Coppia
primale-duale:
approfondimenti**

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Informazione duale nelle tabelle del simplexso

$$w_1 = c_4 - \bar{c}_4 = 0 - 4/3 = -4/3;$$

$$w_2 = c_5 - \bar{c}_5 = 0 - 7/3 = -7/3.$$

Esercizio proposto: Costruire il duale D_2 del problema P_2 e verificare (attraverso l'utilizzo delle relazioni di complementarietà) che $[-4/3 \quad -7/3]^T$ rappresenta la soluzione ottima di D_2 .



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

**Coppia
primale-duale:
approfondimenti**

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Informazione duale nelle tabelle del simplexso

Nella tabella ottima è possibile leggere anche la matrice A_B^{-1} , essendo in questo caso $\bar{A}_y = A_B^{-1} I = A_B^{-1}$.

Pertanto, per l'esempio 1 (problema P_1) si ha:

A_B^{-1}	1	1	0	0	0	-4
	2	-1	0	0	1	6
	1	0	1	-1	0	4

 con $B=\{5,3\}$

Per l'esempio 2 (problema P_2) si ha:

A_B^{-1}	0	0	9	4/3	7/3	44/3
	1	0	2	1/3	1/3	8/3
	0	1	2	-1/3	2/3	4/3

 con $B=\{1,2\}$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

**Metodo del
simpleso duale**

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo del simpleso duale

Il **metodo del simpleso** può essere visto come una procedura che, iniziando da una soluzione di base ammissibile per il problema di PL da risolvere, genera una sequenza finita di soluzioni di base ammissibili fino a

- ✓ determinare la soluzione ottima
- ✓ dimostrare che il problema è illimitato.

In estrema sintesi, il metodo è così schematizzabile:

1. Si dispone di una base ammissibile per il primale.
2. Se la base è ammissibile per il duale allora è ottima.
3. Altrimenti si stabilisce che il problema è illimitato oppure si effettua un'operazione di *pivot*. Tale operazione modifica la base in modo da mantenere l'ammissibilità per il primale.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

**Metodo del
simplesso duale**

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo del simplesso duale

In modo totalmente simmetrico è possibile costruire un **metodo di tipo duale** basato sul seguente schema:

1. Si dispone di una base ammissibile per il duale.
2. Se la base è ammissibile per il primale allora è ottima.
3. Altrimenti si stabilisce che il problema primale è inammissibile (e il duale è illimitato) oppure si effettua un'operazione di *pivot*. Tale operazione modifica la base in modo da mantenere l'ammissibilità per il duale.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

**Metodo del
simplexso duale**

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo del simplexso duale

Il metodo del simplexso duale considera forme canoniche duali. Rispetto al procedimento visto nella prima parte del corso, si inverte il ruolo di righe e colonne.

Forma canonica duale

						≥ 0	≥ 0	≥ 0			
	0	...	0	...	0	\bar{c}_{m+1}	...	\bar{c}_k	...	\bar{c}_n	$-\bar{d}$
	1					$\bar{a}_{1,m+1}$...	$\bar{a}_{1,k}$...	$\bar{a}_{1,n}$	\bar{b}_1
		\ddots				\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
h			1			$\bar{a}_{h,m+1}$...	$\bar{a}_{h,k}$...	$\bar{a}_{h,n}$	\bar{b}_h
				\ddots		\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
					1	$\bar{a}_{m,m+1}$...	$\bar{a}_{m,k}$...	$\bar{a}_{m,n}$	\bar{b}_m

k



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

**Metodo del
simplexso duale**

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo del simplexso duale

Verifica di ottimalità/ammissibilità

Se $\bar{b}_i \geq 0 \quad \forall i$, la soluzione $[\bar{b}_1 \dots \bar{b}_m \ 0 \dots 0]^T$ è ottima.
Se l'ottimalità non è raggiunta, si prosegue nel seguente modo.

Scelta della riga di pivot

Si sceglie una riga h con $\bar{b}_h < 0$; per convenzione
$$\bar{b}_h = \min_{i=1, \dots, m} \{\bar{b}_i\}$$

Verifica di illimitatezza del duale

Se $\bar{a}_{hj} \geq 0 \quad \forall j$, si conclude che il primale è inammissibile (il duale è illimitato).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

**Metodo del
simplexso duale**

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo del simplexso duale

Scelta della colonna di pivot

Altrimenti, tra le colonne j con $\bar{a}_{hj} < 0$ si sceglie la colonna k -esima, cioè quella in corrispondenza di

$$\left\{ \frac{\bar{c}_k}{\bar{a}_{hk}} \right\} = \max_j \left\{ \frac{\bar{c}_j}{\bar{a}_{hj}}, \bar{a}_{hj} < 0 \right\}.$$

Questa scelta preserva l'ammissibilità del duale.

Operazione di pivot

Si esegue un'operazione di pivot su \bar{a}_{hk} ottenendo per il primale una soluzione di base peggiore della precedente (si procede verso l'ammissibilità).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

**Metodo del
simplessso duale**

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Simplessso vs simplessso duale

(problema di minimo)

	SIMPLESSO	SIMPLESSO DUALE
genera	soluzioni di base ammissibili per il primale	soluzioni di base non ammissibili per il primale (ma superottime)
procede verso	l'ottimalità (del primale)	l'ammissibilità (del primale)
z (valore di f.o. del primale) parte da un valore	superiore al valore ottimo	inferiore al valore ottimo
z	decresce (miglioramento)	cresce (peggioramento)
si sceglie prima	la colonna	la riga
cioè la variabile	entrante	uscente
poi si sceglie	la riga	la colonna
cioè la variabile	uscente	entrante
calcoli per l'operazione di <i>pivot</i>	Min tra valori positivi	Max tra valori negativi



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

**Metodo del
simplexso duale**

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo del simplexso duale

Il funzionamento del metodo del simplexso duale sarà chiarito meglio a partire da esempi numerici. In particolare si mostrerà l'utilità del metodo nella situazione seguente:

- ☛ il problema di PL da risolvere presenta, facilmente, una soluzione di base (super)ottima ma non ammissibile e risulta complicato o dispendioso disporre di una soluzione di base ammissibile (ad esempio, il ricorso al metodo delle due fasi farebbe crescere il numero di variabili e quindi lo sforzo computazionale).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

**Metodo del
simpleso duale**

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo del simpleso duale

Esempio 1

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & 5x_1 + 12x_2 \\ \text{s.v.} & 3x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & 5x_1 - 4x_2 \leq -2 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Aggiungendo delle variabili di *slack* i vincoli di disuguaglianza possono essere trasformati in vincoli di uguaglianza.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

**Metodo del
simplexso duale**

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo del simplexso duale

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & 5x_1 + 12x_2 \\ \text{s.v.} & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ & 5x_1 - 4x_2 + x_4 = -2 \\ & 3x_1 + x_2 + x_5 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Il problema (primale) è ora nella forma canonica duale. E' immediatamente disponibile un insieme B ammissibile per il suo duale ($B=\{3,4,5\}$) ma non per il problema stesso.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

**Metodo del
simplesson duale**

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo del simplesson duale

5	12	0	0	0	0
3	2	1	0	0	5
5	-4	0	1	0	-2
3	1	0	0	1	1

Infatti, la soluzione di base associata a questa tabella è $[0 \ 0 \ 5 \ -2 \ 1]^T$. A tale soluzione corrisponde un valore di funzione obiettivo pari a 0, ma essa non è ammissibile per il primale.

Il fatto di avere una forma canonica duale ci consente di applicare il metodo del simplesson duale. La riga interessata all'operazione di *pivot* è la seconda: $h=2$ (corrispondente al termine “-2”).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

**Metodo del
simpleso duale**

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo del simpleso duale

Poiché esiste un solo elemento \bar{a}_{2j} negativo (cioè $\bar{a}_{22} = -4$) la colonna interessata all'operazione di *pivot* è la seconda. Si esegue tale operazione sull'elemento \bar{a}_{22} .

20	0	0	3	0	-6
11/2	0	1	1/2	0	4
-5/4	1	0	-1/4	0	1/2
17/4	0	0	1/4	1	1/2

La soluzione $[0 \ 1/2 \ 4 \ 0 \ 1/2]^T$ è ammissibile per il primale e il suo valore di funzione obiettivo è 6 ($6 > 0 \rightarrow$ peggioramento). Il conseguimento dell'ammissibilità ci assicura anche l'ottimalità. Per il problema originario la soluzione ottima è $[x_1 \ x_2]^T = [0 \ 1/2]$.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

**Metodo del
simpleso duale**

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo del simpleso duale

Esempio 2

Risolvere con il metodo del simpleso duale il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{lll} \text{Min} & 12x_1 + 11x_2 + 16x_3 \\ \text{s.v.} & -3x_1 & +x_2 & +x_3 \geq 3 \\ & 4x_1 & +x_2 & +2x_3 \geq 4 \\ & x_1, & x_2, & x_3 \geq 0 \end{array}$$

Aggiungendo delle variabili di *surplus* i vincoli di disuguaglianza possono essere trasformati in vincoli di uguaglianza.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

**Metodo del
simplexso duale**

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo del simplexso duale

$$\text{Min } 12x_1 + 11x_2 + 16x_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.v.} \quad & -3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Si consideri il seguente problema equivalente:

$$\text{Min } 12x_1 + 11x_2 + 16x_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.v.} \quad & 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ & -4x_1 - x_2 - 2x_3 + x_5 = -4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

**Metodo del
simplessso duale**

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo del simplessso duale

È evidente che si ha immediatamente a disposizione una forma canonica duale

12	11	16	0	0	0
3	-1	-1	1	0	-3
-4	-1	-2	0	1	-4

La soluzione di base associata a questa tabella è $[0 \ 0 \ 0 \ -3 \ -4]^T$ e il valore di funzione obiettivo è pari a 0. Tale soluzione non è ammissibile per il primale. Si sceglie, per l'operazione di *pivot*, la seconda riga ($h=2$). La colonna di *pivot* è la prima ($k=1$).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

**Metodo del
simplexso duale**

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo del simplexso duale

Infatti si ha $\max \left\{ \frac{12}{-4}, \frac{11}{-1}, \frac{16}{-2} \right\} = \frac{12}{-4}$. Pertanto, si esegue l'operazione di *pivot* sull'elemento $\bar{a}_{21} = -4$.

0	8	10	0	3	-12
0	-7/4	-5/2	1	3/4	-6
1	1/4	1/2	0	-1/4	1

La soluzione di base associata a questa tabella è $[1 \ 0 \ 0 \ -6 \ 0]^T$ e il valore di funzione obiettivo è pari a 12. Tale soluzione, peggiore della precedente, è ancora non ammissibile per il primale.

La riga interessata all'operazione di *pivot* è la prima ($h=1$) (corrispondente al termine “-6”).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

**Metodo del
simpleso duale**

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo del simpleso duale

La colonna interessata all'operazione di *pivot* è la

terza ($k=3$), essendo $\max\left\{\frac{8}{-7/4}, \frac{10}{-5/2}\right\} = \frac{10}{-5/2}$.

Pertanto, si esegue l'operazione di *pivot* sull'elemento $\bar{a}_{13} = -5/2$.

0	1	0	4	6	-36
0	7/10	1	-2/5	-3/10	12/5
1	-1/10	0	1/5	-1/10	-1/5

La soluzione di base associata a questa tabella è $[-1/5 \ 0 \ 12/5 \ 0 \ 0]^T$ e il valore di funzione obiettivo è pari a 36. Tale soluzione, peggiore della precedente, è ancora non ammissibile per il primale.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

**Metodo del
simplexso duale**

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo del simplexso duale

La riga interessata all'operazione di pivot è la seconda ($h=2$), corrispondente al termine “ $-1/5$ ”. La colonna interessata all'operazione di *pivot* è la seconda ($k=2$), essendo $\max\left\{\frac{1}{-1/10}, \frac{6}{-1/10}\right\} = \frac{1}{-1/10}$. L'elemento di *pivot* è \bar{a}_{22} .

10	0	0	6	5	-38
7	0	1	1	-1	1
-10	1	0	-2	1	2

La soluzione di base associata a questa tabella è $[0 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ e il valore di funzione obiettivo è pari a 38. Tale soluzione è ottima.

Per il problema originario si ha $[x_1^* \ x_2^* \ x_3^*]^T = [0 \ 2 \ 1]^T$.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

**Metodo del
simplessso duale**

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo del simplessso duale

Esempio 3

Risolvere con il metodo del simplessso duale il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & 12x_1 + 8x_2 \\ \text{s.v.} & -2x_1 - 4x_2 \geq 5 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Aggiungendo delle variabili di *surplus* i vincoli di disuguaglianza possono essere trasformati in vincoli di uguaglianza.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

**Metodo del
simpleso duale**

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo del simpleso duale

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & 12x_1 + 8x_2 \\ \text{s.v.} & -2x_1 - 4x_2 - x_3 = 5 \\ & x_1 + 2x_2 - x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Problema equivalente:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & 12x_1 + 8x_2 \\ \text{s.v.} & 2x_1 + 4x_2 + x_3 = -5 \\ & -x_1 - 2x_2 + x_4 = -3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

**Metodo del
simplexso duale**

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo del simplexso duale

E' evidente che si ha immediatamente a disposizione una forma canonica duale

12	8	0	0	0
2	4	1	0	-5
-1	-2	0	1	-3

Si noti che nella riga di indice $h=1$ (quella corrispondente a "-5") si ha $\bar{a}_{1j} \geq 0 \quad \forall j$. Si può concludere che il problema originario è inammissibile.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

**Interpretazione dei
problemi duali**

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Interpretazione dei problemi duali

Per problemi di PL dotati di particolare struttura e provenienti da classi ben precise di modelli applicativi, i corrispondenti duali si prestano a essere interpretati come problemi applicativi essi stessi. Un esempio è di seguito fornito.

Problema del mix produttivo

“Un’azienda produce n beni utilizzando m risorse (materie prime, ore-macchina, ...) disponibili in quantità limitate. Si deve stabilire il livello di produzione dei vari beni in modo da massimizzare il profitto derivante dalla loro vendita”.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

**Interpretazione dei
problemi duali**

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Interpretazione dei problemi duali

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.v.} & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i=1, \dots, m \\ & x_j \geq 0, j=1, \dots, n \end{array}$$

- ✓ x_j è il livello di produzione del bene j -esimo
- ✓ c_j è il profitto unitario per il bene j -esimo
- ✓ a_{ij} è la “quantità” di risorsa i -esima necessaria per produrre un'unità del bene j -esimo
- ✓ b_i è la “quantità” di risorsa i -esima disponibile

Ipotesi: tutte le quantità prodotte possono essere vendute



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

**Interpretazione dei
problemi duali**

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Interpretazione dei problemi duali

- ☛ Significato del vincolo i -esimo: il consumo totale della risorsa i -esima non può superare la disponibilità massima della risorsa stessa.

Duale del problema del mix produttivo

“Avendo scelto di vendere tutte le proprie risorse produttive, il manager aziendale deve stabilire il prezzo di vendita. Egli deve fare in modo che la vendita delle risorse risulti non meno conveniente della vendita dei beni prodotti mediante il loro utilizzo”.

Risolvere questo problema equivale a risolvere il duale del problema precedente.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

**Interpretazione dei
problemi duali**

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Interpretazione dei problemi duali

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \sum_{i=1}^m b_i w_i \\ \text{s.v.} & \\ & \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \geq c_j, j=1, \dots, n \\ & w_i \geq 0, i=1, \dots, m \end{array}$$

- ✓ w_i è il prezzo unitario di vendita della risorsa i -esima
- ✓ c_j è il profitto unitario per il bene j -esimo
- ✓ a_{ij} è la “quantità” di risorsa i -esima necessaria per produrre un'unità del bene j -esimo
- ✓ b_i è la “quantità” di risorsa i -esima disponibile



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

**Interpretazione dei
problemi duali**

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Interpretazione dei problemi duali

- Significato della funzione obiettivo: il profitto totale derivante dalla vendita delle risorse è pari a $b_1w_1 + \dots + b_mw_m$. L'obiettivo di minimizzazione è coerente con il desiderio di imporre prezzi competitivi rispetto a quelli di mercato (o comunque stabilire il minimo prezzo di vendita per le risorse).
- Significato del vincolo j -esimo: il manager vuole trarre vantaggi dalla riconversione. Per garantirsi da eventuali perdite rispetto alla situazione attuale, il ragionamento più appropriato è il seguente: per ogni unità di bene j -esimo non prodotta si liberano risorse in quantità pari a $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$. I prezzi unitari di vendita delle risorse w_1, w_2, \dots, w_m devono essere tali che il ricavo complessivo sia almeno pari al mancato profitto della vendita di una unità del bene j -esimo.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Analisi di sensitività

Con il termine “analisi di sensitività” (o “analisi di sensibilità” o “analisi di post-ottimalità”) si intende una serie di tecniche di notevole importanza applicativa mediante le quali è possibile ottenere informazioni su quando e di quanto può variare la soluzione ottima di un problema di PL.

Un'analisi di questo tipo è importante per diverse ragioni.

In molti casi i dati del problema (coefficienti dei costi, coefficienti tecnologici e termini noti dei vincoli) non possono essere considerati esatti perché desunti da osservazioni sperimentali.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Analisi di sensitività

In altri casi i dati del problema sono “controllabili” dall'utente (il quale può intenzionalmente modificarli). Se variazioni sui dati di notevole entità dovessero produrre variazioni piuttosto contenute della soluzione ottima, allora la soluzione potrà considerarsi “stabile”.

Si pone il problema di analizzare le variazioni nella soluzione ottima in seguito a:

- ✓ cambiamenti del vettore b ,
- ✓ cambiamenti del vettore c ,
- ✓ aggiunta di un nuovo vincolo.

Ogni variazione sarà considerata singolarmente, ipotizzando la modifica di un solo termine.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Analisi di sensitività

Variazione del vettore b

Si supponga di avere una variazione δ per l' i -esimo termine del vettore b . Il nuovo vettore sarà $b' = b + \delta e_i$ (dove e_i è un vettore m -dimensionale con 1 in posizione i e 0 in tutte le altre posizioni).

Se A_B rappresenta la base ottima per il problema primale, i coefficienti di costo ridotto a essa associati resteranno non negativi (ammissibilità del duale). Pertanto, la base A_B resterà ottimale se e solo se resterà ammissibile per il primale. In altri termini A_B resterà ottimale se e solo se $A_B^{-1}b' \geq 0_m$; in questo caso il nuovo valore (ottimo) di funzione obiettivo sarà $c_B^T A_B^{-1}b'$.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplesso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Analisi di sensitività

Tableau ottimo:

0_m^T	$\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N = c_N^T - w^T A_N$	$-c_B^T A_B^{-1} \mathbf{b} = -w^T \mathbf{b}$
I	$\bar{A}_N = A_B^{-1} A_N$	$\bar{\mathbf{b}} = A_B^{-1} \mathbf{b}$

$$A_B^{-1} \mathbf{b}' \geq 0_m \rightarrow A_B^{-1} \mathbf{b} + A_B^{-1} (\delta \mathbf{e}_i) \geq 0_m \rightarrow \bar{\mathbf{b}} + A_B^{-1} (\delta \mathbf{e}_i) \geq 0_m.$$

Per individuare un intervallo di valori per δ per i quali A_B resta ammissibile, è sufficiente risolvere il sistema $\bar{\mathbf{b}} + A_B^{-1} (\delta \mathbf{e}_i) \geq 0_m$ che ha come unica incognita δ .



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Analisi di sensitività

Esempio

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -x_1 - 5x_2 + 2x_3 \\ \text{s.v.} & -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

La tabella iniziale è

-1	-5	2	0	0	0
-1	2	2	1	0	5
1	1	4	0	1	6

(forma canonica standard rispetto a $B=\{4,5\}$).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Analisi di sensitività

Risolvendo il problema con il metodo del simplexso si ottiene la seguente tabella ottima (rispetto all'insieme di indici di base $B=\{2,1\}$).

0	0	14	$4/3$	$7/3$	$62/3$
0	1	2	$1/3$	$1/3$	$11/3$
1	0	2	$-1/3$	$2/3$	$7/3$

L'inversa della matrice di base ottima è facilmente deducibile da questa tabella:

$$A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplesso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Analisi di sensitività

1. Effettuare l'analisi di sensitività sul termine b_1 ($b_1' = b_1 + \delta$) → determinare l'**intervallo di variabilità** del termine noto del primo vincolo entro cui la base ottima non viene modificata.

$$\bar{b} + A_B^{-1}(\delta e_i):$$

$$\begin{bmatrix} 11/3 \\ 7/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11/3 \\ 7/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3\delta \\ -1/3\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{3} + \frac{1}{3}\delta \\ \frac{7}{3} - \frac{1}{3}\delta \end{bmatrix}$$

Affinché A_B ($B=\{2,1\}$) resti ottima per il primale si deve avere:

$$\frac{11}{3} + \frac{1}{3}\delta \geq 0 \rightarrow \delta \geq -11$$

$$\frac{7}{3} - \frac{1}{3}\delta \geq 0 \rightarrow \delta \leq 7$$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplesso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Analisi di sensitività

Pertanto la base ottima non cambia se: $-11 \leq \delta \leq 7$.

Il nuovo valore (ottimo) di funzione obiettivo sarà

$$c_B^T A_B^{-1} b' = c_B^T [\bar{b} + A_B^{-1} (\delta e_i)] = \begin{bmatrix} -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{11}{3} + \frac{1}{3} \delta \\ \frac{7}{3} - \frac{1}{3} \delta \end{bmatrix} = -\frac{62}{3} - \frac{4}{3} \delta$$

2. Considerando $b_1=6$, calcolare la nuova soluzione ottima e il suo valore di funzione obiettivo.

Con riferimento al termine noto b_1 , si ha $\delta=1$. Poiché $-11 \leq 1 \leq 7$, la base ottima non cambia.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Analisi di sensitività

La soluzione ottima sarà:

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \\ x_5^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} - \frac{1}{3}\delta \\ \frac{11}{3} + \frac{1}{3}\delta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il suo valore di funzione obiettivo sarà:

$$-\frac{62}{3} - \frac{4}{3}\delta = -22$$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplesso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Analisi di sensitività

3. Considerando $b_1=15$, calcolare la nuova soluzione ottima e il suo valore di funzione obiettivo.

Con riferimento al termine noto b_1 , si ha $\delta=10 \rightarrow A_B$ non è più ammissibile per il primale (valore di δ fuori *range*).

Si può utilizzare A_B come base iniziale per il metodo del simplesso duale (considerato che A_B rimane una base ammissibile per il problema duale).

Si deve ripartire dal tableau finale, calcolando nuovamente solo il vettore dei termini noti e il valore di funzione obiettivo.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Analisi di sensitività

0	0	14	4/3	7/3	?
0	1	2	1/3	1/3	?
1	0	2	-1/3	2/3	?

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{3} + \frac{1}{3}\delta \\ \frac{7}{3} - \frac{1}{3}\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix} ; -\frac{62}{3} - \frac{4}{3}\delta = -34$$

Si ottiene la seguente tabella (forma canonica duale)

0	0	14	4/3	7/3	34
0	1	2	1/3	1/3	7
1	0	2	-1/3	2/3	-1



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Analisi di sensitività

Applicando il metodo del simplexso duale si ottiene:

4	0	22	0	5	30
1	1	4	0	1	6
-3	0	-6	1	-2	3

La soluzione di base associata a questa tabella (con $B=\{2,4\}$) è ottima e il suo valore di funzione obiettivo è -30

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ x_4^* \\ x_5^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Analisi di sensitività

Variazione del vettore c

Si supponga ora di avere una variazione δ per il j -esimo coefficiente di costo c_j .

Modificando il vettore b la regione ammissibile del problema duale non subisce variazioni. In caso di modifiche del vettore c , invece, è la regione ammissibile del primale a rimanere invariata. Di conseguenza la soluzione ottima (del primale) risulterà ammissibile anche dopo la variazione, ma l'ottimalità non sarà più garantita.

Il vettore dei coefficienti di costo ridotto associato alle variabili non di base, rispetto alla base ottima A_B , è: $c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Analisi di sensitività

Dopo la variazione, la non negatività dei coefficienti di costo ridotto è condizione sufficiente per mantenere l'ottimalità di A_B .

Due casi possono presentarsi:

- ✓ c_j è il costo associato a una variabile non di base all'ottimo,
- ✓ c_j è il costo associato a una variabile di base all'ottimo.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Analisi di sensitività

Nel **primo caso**, la variazione di c_j implica una variazione del costo ridotto della sola variabile non di base associata a c_j .

La base A_B resterà ottimale se: $c_j + \delta - c_B^T A_B^{-1} A_j \geq 0 \rightarrow \delta \geq c_B^T A_B^{-1} A_j - c_j$ (dove A_j è la colonna associata alla variabile interessata).

Si noti che il termine $c_B^T A_B^{-1} A_j - c_j = -\bar{c}_j$ è facilmente deducibile dal tableau finale del metodo del simplexso.

Se A_B resta ottimale la soluzione ottima nonché il suo valore di funzione obiettivo restano invariati.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Analisi di sensitività

Nel **secondo caso**, la variazione di c_j implica in generale una variazione in tutti i coefficienti di costo ridotto e del valore di funzione obiettivo (riga 0 del tableau). La base A_B resterà ottimale se $c_N^T - c_B'^T A_B^{-1} A_N \geq 0_{n-m}^T$, con c_B' ottenuto da c_B variando il solo costo della variabile interessata ($c_B' = c_B + \delta e_{\hat{j}}$, dove $e_{\hat{j}}$ è il vettore che ha 1 nella posizione \hat{j} e 0 in tutte le altre posizioni; \hat{j} è la posizione occupata dall'indice j nell'insieme B).

$c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N - (\delta e_{\hat{j}})^T A_B^{-1} A_N \geq 0_{n-m}^T \rightarrow \bar{c}_N^T - \delta e_{\hat{j}}^T \bar{A}_N \geq 0_{n-m}^T$
($e_{\hat{j}}^T \bar{A}_N$ è il vettore dei coefficienti associati alle variabili non di base nella riga \hat{j} della tabella ottima).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Analisi di sensitività

- ☛ In entrambi i casi, se si perde l'ottimalità della base A_B , si può ripartire da essa applicando il metodo del semplice.

Esempio

Per il problema dell'esempio precedente si ha:

Tabella iniziale (forma canonica standard rispetto a $B=\{4,5\}$):

-1	-5	2	0	0	0
-1	2	2	1	0	5
1	1	4	0	1	6



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Analisi di sensitività

Tabella ottima (rispetto all'insieme di indici di base $B=\{2,1\}$):

0	0	14	$4/3$	$7/3$	$62/3$
0	1	2	$1/3$	$1/3$	$11/3$
1	0	2	$-1/3$	$2/3$	$7/3$

- ✓ Analisi di sensitività sul coefficiente $c_3=2$ (associato a una variabile non di base all'ottimo):
se il coefficiente c_3 viene incrementato di δ , la soluzione $[x_1^* \ x_2^* \ x_3^* \ x_4^* \ x_5^*]=[7/3 \ 11/3 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ resterà ottima se $\delta \geq -14$ (valore di funzione invariato).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Analisi di sensitività

- ✓ Analisi di sensitività sul coefficiente $c_1 = -1$ (associato a una variabile di base all'ottimo):
se il coefficiente c_1 viene incrementato di δ ,
l'insieme di indici di base $B = \{2, 1\}$ resterà ottimo se

$$\bar{c}_N^T - \delta e_j^T \bar{A}_N \geq 0_{n-m}^T$$

$$[14 \quad 4/3 \quad 7/3] - \delta [2 \quad -1/3 \quad 2/3] \geq [0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\left. \begin{array}{l} 14 - 2\delta \geq 0 \rightarrow \delta \leq 7 \\ 4/3 + \delta/3 \geq 0 \rightarrow \delta \geq -4 \\ 7/3 - 2\delta/3 \geq 0 \rightarrow \delta \leq 7/2 \end{array} \right\} \quad -4 \leq \delta \leq 7/2$$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Analisi di sensitività

Introduzione di un ulteriore vincolo

L'introduzione di un vincolo del tipo $a_{m+1}x \leq b_{m+1}$ in un problema P di PL permette di definire un nuovo problema P' tale che la regione ammissibile di P' è contenuta nella regione ammissibile di P : $\Omega(P') \subseteq \Omega(P)$. Pertanto, indicando con x^* la soluzione ottima di P , se $x^* \in \Omega(P')$ allora x^* è soluzione ottima anche di P' .

Ciò significa che se la soluzione ottimale del problema originario soddisfa anche il vincolo aggiuntivo allora la soluzione sarà ancora ottimale.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Analisi di sensitività

Viceversa è necessario introdurre la $(m+1)$ -esima riga nel tableau (quella corrispondente al nuovo vincolo) e ripristinare la forma canonica del problema relativamente all'insieme di indici di base ottimo B . Si avrà: $\bar{b}_{m+1} < 0$, come conseguenza del fatto che la soluzione non sarà più ammissibile per il primale.

Si avrà dunque una tabella iniziale per il metodo del simplexso duale (metodo che condurrà a una nuova soluzione ottima per P').



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplesso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Analisi di sensitività

Esempio

Si consideri lo stesso problema P degli esercizi precedenti:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -x_1 - 5x_2 + 2x_3 \\ \text{s.v.} & \\ & -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ & x_1 + x_2 + 4x_3 + x_5 = 6 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

La soluzione ottima di P è:

$$x_1^* = 7/3, x_2^* = 11/3, x_3^* = 0, x_4^* = 0, x_5^* = 0.$$

- ✓ Cosa succede se al problema P si aggiunge il vincolo: $6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 28$?



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Analisi di sensitività

La soluzione ottima resterà invariata perché essa soddisfa anche il nuovo vincolo:

$$6\left(\frac{7}{3}\right) + 3\left(\frac{11}{3}\right) + 2(0) \leq 28 \rightarrow 25 \leq 28.$$

- ✓ Cosa succede se al problema P si aggiunge il vincolo: $6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 24$? Tale vincolo non è soddisfatto dalla soluzione ottima di P .

La tabella ottima (rispetto all'insieme di indici di base $B=\{2,1\}$) è:

0	0	14	4/3	7/3	62/3
0	1	2	1/3	1/3	11/3
1	0	2	-1/3	2/3	7/3



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Analisi di sensitività

Tale tabella deve essere trasformata introducendo una riga corrispondente ai coefficienti del nuovo vincolo e una colonna corrispondente alla variabile decisionale x_6 (da utilizzare per trasformare il vincolo aggiuntivo in un vincolo di uguaglianza):

0	0	14	$4/3$	$7/3$	0	$62/3$
0	1	2	$1/3$	$1/3$	0	$11/3$
1	0	2	$-1/3$	$2/3$	0	$7/3$
6	3	2	0	0	1	24

Facendo operazioni di pivot sugli elementi di posto (1,2) e (2,1) si ottiene una tabella iniziale per il metodo del simplexso duale.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Analisi di sensitività

0	0	14	$4/3$	$7/3$	0	$62/3$
0	1	2	$1/3$	$1/3$	0	$11/3$
1	0	2	$-1/3$	$2/3$	0	$7/3$
6	0	-4	-1	-1	1	13

0	0	14	$4/3$	$7/3$	0	$62/3$
0	1	2	$1/3$	$1/3$	0	$11/3$
1	0	2	$-1/3$	$2/3$	0	$7/3$
0	0	-16	1	-5	1	-1

Applicando il metodo del simplexso duale, si sceglie come riga di pivot la terza. La colonna di pivot è la quinta.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Analisi di sensitività

Infatti si ha: $\max \left\{ \frac{14}{-16}, \frac{7/3}{-5} \right\} = \frac{7/3}{-5}.$

Eseguendo l'operazione di pivot si ottiene

0	0	98/15	9/5	0	7/15	101/5
0	1	14/15	2/5	0	1/15	18/5
1	0	-2/15	-1/5	0	2/15	11/5
0	0	16/5	-1/5	1	-1/5	1/5

La soluzione ottima è: $x_1^*=11/5$, $x_2^*=18/5$, $x_3^*=0$, $x_4^*=0$, $x_5^*=1/5$. A essa corrisponde il seguente valore di funzione obiettivo: $-101/5$.

Si noti che $-101/5 > -62/3$ (peggioramento della funzione obiettivo).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

**Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo**

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Interpretazione economica delle variabili duali

Si consideri un problema P di PL in forma standard:

$$\text{Min } z = c^T x$$

$$A x = b$$

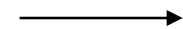
$$x \geq 0_n$$

Il corrispondente duale D sarà:

$$\text{Max } \pi = b^T w$$

$$A^T w \leq c$$

Se B rappresenta l'insieme di indici di base ottimo ($A_B \rightarrow$ base ottima) il problema P , riscritto nella forma canonica, diventa il seguente





Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

**Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo**

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Interpretazione economica delle variabili duali

$$\text{Min } z = c_B^T A_B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N) x_N$$

$$x_B + A_B^{-1} A_N x_N = A_B^{-1} b$$

$$x_B \geq 0_m, x_N \geq 0_{n-m}$$

La soluzione di base ottima è $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_B^{-1} b \\ 0_{n-m} \end{bmatrix}$. A essa corrisponde il valore di funzione obiettivo seguente: $z = c_B^T A_B^{-1} b$.

La soluzione complementare di x (rispetto a B) è: $w^T = c_B^T A_B^{-1}$. Tale soluzione è ottima per D .

Se si perturba di una quantità δ l' i -esima componente del vettore b , la soluzione di base x si trasforma.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

**Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo**

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Interpretazione economica delle variabili duali

Essa diventa $x' = \begin{bmatrix} x_B' \\ x_N' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_B^{-1}b' \\ 0_{n-m} \end{bmatrix}$. Il suo valore di funzione obiettivo diventa: $z' = c_B^T A_B^{-1} b' = c_B^T A_B^{-1} (b + \delta e_i)$.

Ipotesi: la perturbazione δ è tale da non modificare la base ottima (A_B resta ottima), cioè $x' \geq 0_n$

Variazione del valore di funzione obiettivo dovuta alla perturbazione dell' i -esima componente del vettore b :

$$\Delta z = z' - z = c_B^T A_B^{-1} (b + \delta e_i) - c_B^T A_B^{-1} b = c_B^T A_B^{-1} (\delta e_i) = w^T (\delta e_i) = w_i \delta$$

Segue che: $w_i = \frac{\Delta z}{\delta}$.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

**Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo**

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Interpretazione economica delle variabili duali

Interpretazione: l' i -esima variabile duale all'ottimo rappresenta l'incremento del valore di funzione obiettivo quando un'unità in più di b_i si rende disponibile ($\delta=1$). Ciò vale a condizione che una tale variazione di b_i non modifichi la base ottima.

In altri termini, se b_i rappresenta la disponibilità di una risorsa scarsa (l' i -esima) e la base resta immutata se un'unità in più di b_i si rende disponibile, allora w_i rappresenta il **valore marginale** della risorsa i -esima indipendentemente dal suo prezzo di mercato (cioè rappresenta il suo **prezzo ombra**).

- ☛ valore marginale di una risorsa: incremento del valore di funzione obiettivo per incremento unitario della risorsa



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplesso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

**Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo**

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Interpretazione economica delle variabili duali

Il valore assunto dalle variabili duali all'ottimo è del tutto generale, cioè indipendente dalla forma del problema di PL (il problema è stato ipotizzato in forma standard al solo scopo di semplificare la trattazione).

- ✓ Per problemi di massimizzazione con l' i -esimo vincolo del tipo " \leq " il prezzo ombra dell' i -esima risorsa sarà sicuramente non negativo; mentre per un vincolo del tipo " \geq " esso sarà sicuramente non positivo.
- ✓ Per problemi di minimizzazione vale il viceversa.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

**Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo**

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Interpretazione economica delle variabili duali

Significato delle relazioni di complementarietà

Il valore marginale di una risorsa è nullo quando la risorsa non è completamente utilizzata.

Esempio

Un'azienda deve produrre 2 tipi di prodotto (A e B) a partire da una materia prima C disponibile in quantità limitata e attraverso lavorazioni su una macchina M. Per produrre un'unità di A sono necessari 3 kg di C e 2 ore di lavorazione su M, mentre per produrre un'unità di B sono necessari 2 kg di C e 1 ora di lavorazione su M. Si hanno a disposizione 1000 kg di C e 600 ore complessive di lavorazione su M (la macchina è infatti utilizzata anche per altre linee di produzione nel periodo di riferimento).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

**Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo**

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Interpretazione economica delle variabili duali

Variabili decisionali:

x_1 : livello di produzione di A (può essere un numero frazionario);

x_2 : livello di produzione di B (può essere un numero frazionario).

Vincoli:

1. $3x_1 + 2x_2 \leq 1000$ (vincolo relativo alla materia prima C)
2. $2x_1 + x_2 \leq 600$ (vincolo relativo alla macchina M)

L'obiettivo dell'industria coinciderà sicuramente con la massimizzazione del profitto (in €), ma non vengono forniti dati per scrivere la funzione obiettivo (non essenziale per gli scopi di questo esempio).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

**Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo**

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Interpretazione economica delle variabili duali

Si consideri $[x_1^* \ x_2^*] = [0 \ 500]^T$ come soluzione ottima del problema (primale) e $[w_1^* \ w_2^*] = [9 \ 0]^T$ come soluzione ottima del corrispondente duale.

Si ipotizzi, inoltre, che l'incremento di una unità della prima risorsa ($1000+1$) non modifichi la base ottima. Allo stesso modo, si ipotizzi che un incremento unitario della seconda risorsa ($600+1$) non modifichi la base ottima.

Si può dire che:

- ✓ La disponibilità di 1 kg in più della materia prima C porta a un incremento della funzione obiettivo di 9 (il profitto complessivo aumenta di 9 €), essendo $w_1^* = 9$.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

**Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo**

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Interpretazione economica delle variabili duali

In altri termini, la variabile duale w_1^* determina il valore marginale della materia prima C ed è chiamata “prezzo ombra” di questa risorsa. E' ovvio che 9 € rappresenta anche il massimo prezzo che si sarebbe disposti a pagare per aumentare la disponibilità della materia prima C di 1 kg (acquistandola, ad esempio, dall'esterno).

- ✓ La disponibilità di 1 ora in più sulla macchina M non produce incrementi di profitto, essendo $w_2^*=0$ (prezzo ombra nullo).

Nota: con riferimento al secondo vincolo del primale si può scrivere la seguente relazione di complementarietà: $w_2(600-2x_1-x_2)=0$.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

**Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo**

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Interpretazione economica delle variabili duali

All'ottimo il secondo vincolo **non** è soddisfatto per uguaglianza: $2x_1^* + x_2^* = 2(0) + (500) = 500$ ($500 < 600$). Quindi, poiché $600 - 2x_1^* - x_2^* \neq 0$, per soddisfare la relazione di complementarietà si trova $w_2^* = 0$.



le ore disponibili sulla macchina M sono utilizzate solo in parte (500 su 600); ciò significa che non si sfrutta a pieno questa risorsa. Il suo valore marginale è evidentemente nullo ($w_2^* = 0$). Avere a disposizione un'ora in più sulla macchina M è perfettamente inutile per l'azienda considerando che ci sono già ore lavorative inutilizzate.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Dualità

Esercizio di ricapitolazione

Un'industria chimica produce 3 tipologie di prodotto (1,2,3) che vende a 20 €/kg, 12 €/kg e 25 €/kg (rispettivamente). Per la produzione utilizza 2 impianti. Le ore richieste per produrre 1 kg di prodotto sui due impianti è riassunto nella tabella seguente:

	Prodotto		
Impianto	1	2	3
1	2	1	4
2	2,4	1,5	3

L'impianto 1 è disponibile per 16 ore al giorno, mentre l'impianto 2 è disponibile per 21 ore al giorno.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Dualità

Indicando con x_j il livello di produzione giornaliero (in kg) del prodotto j ($j=1,2,3$) si può formulare il seguente problema P :

Max z

$$z = 20x_1 + 12x_2 + 25x_3$$

S.V.

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 \leq 16$$

$$12/5 x_1 + 3/2 x_2 + 3x_3 \leq 21$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

✓ tabella iniziale (forma canonica rispetto a $B=\{4,5\}$)

-20	-12	-25	0	0	0
2	1	4	1	0	16
12/5	3/2	3	0	1	21



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

**Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo**

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Dualità

- ✓ tabella ottima (rispetto all'insieme di indici di base $B=\{1,2\}$)

0	0	3	2	20/3	172
1	0	5	5/2	-5/3	5
0	1	-6	-4	10/3	6

La soluzione ottima per il problema P (originario) è $x^* = [x_1^* \ x_2^* \ x_3^*]^T = [5 \ 6 \ 0]^T$ e il suo valore di funzione obiettivo è $z^* = 172$.

Domande:

1. Formulare il duale D corrispondente al problema P .



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplesso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

**Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo**

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Dualità

2. Effettuare l'analisi di sensitività sulle componenti del vettore delle risorse $b=[16 \ 21]^T$ (Soluzione: per b_1 si ha $-2 \leq \delta \leq 3/2$, per b_2 si ha $-9/5 \leq \delta \leq 3$).
3. Sfruttando i risultati dell'analisi di sensitività su b_2 e considerando $b_2=24$, ridefinire x^* e z^* (Soluzione: $x^*=[x_1^* \ x_2^* \ x_3^*]^T = [0 \ 16 \ 0]^T$; $z^*=192$).
4. Ricavare la soluzione ottima di D utilizzando le relazioni di complementarietà (Soluzione: $[w_1^* \ w_2^*]^T = [2 \ 20/3]^T$).
5. Dare un'interpretazione economica della variabile duale ottima w_1^* .



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

**Programmazione
Lineare Intera**

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Programmazione Lineare Intera (PLI)

Finora sono stati presentati problemi in cui le variabili decisionali potevano assumere valori reali (regione ammissibile \equiv insieme continuo)



Problemi di Programmazione Lineare (PL)

Ora si farà riferimento a problemi in cui le variabili possono assumere solo valori interi (regione ammissibile \equiv insieme discreto)



Problemi di Programmazione Lineare Intera (PLI)



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

**Programmazione
Lineare Intera**

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Programmazione Lineare Intera (PLI)

Esempi di variabili decisionali intere:

- ✓ numero di automobili di una certa tipologia che deve produrre un'industria automobilistica;
- ✓ numero di persone da assegnare a un determinato turno in un'azienda ospedaliera.

In particolare, le variabili decisionali possono essere di 2 tipi:

- ✓ **variabili di tipo generale** che assumono valori interi in intervalli definiti dai vincoli del modello (le variabili degli esempi precedenti sono variabili di questo tipo);
- ✓ **variabili binarie** che si presentano nei casi in cui si devono prendere delle decisioni di tipo sì/no (associabili ai valori 1/0).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

**Programmazione
Lineare Intera**

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Programmazione Lineare Intera (PLI)

Quando le variabili decisionali sono binarie si usa spesso il termine di **Programmazione Lineare Binaria** in luogo di Programmazione Lineare Intera.

Esistono, infine, i cosiddetti problemi di **Programmazione Lineare Mista**. Si tratta di problemi di PL con alcune variabili decisionali continue e altre intere (di tipo generale e/o binario).

- ☛ Stessa metodologia di risoluzione (nel seguito, comunque, verranno considerati solo problemi di PLI con variabili decisionali di tipo generale).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplesso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

**Programmazione
Lineare Intera**

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Proprietà dei problemi di PLI

Per cogliere le caratteristiche distintive di un problema di PLI e, quindi, capire in che misura un problema di PLI si discosta da un problema di PL, è necessario fare riferimento al concetto di **rilassamento**.

Qualsiasi problema di ottimizzazione vincolata può essere “rilassato” eliminando uno o più vincoli in modo da ottenere un nuovo problema dalla struttura semplificata.

Eliminare un vincolo ha sempre l'effetto di alterare la regione ammissibile (in particolare allargandola, se il vincolo che si sta eliminando non è superfluo o ridondante).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

**Programmazione
Lineare Intera**

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Proprietà dei problemi di PLI

Per tale ragione, indicando con $\Omega(P')$ e $\Omega(P'')$ rispettivamente le regioni ammissibili del problema P' originario e del problema P'' ottenuto eliminando un vincolo di P' , si ha $\Omega(P') \subseteq \Omega(P'')$.

Il tipo di rilassamento più utilizzato nell'ambito della PLI è l'eliminazione dei vincoli sull'interezza delle variabili decisionali (vincoli a tutti gli effetti). Se i vincoli di interezza di un problema di PLI vengono eliminati, il problema che si ottiene è un problema di PL ed è denominato **rilassato continuo** (o semplicemente rilassato) del problema di partenza.

Sia P un problema di PLI e P_R il suo rilassato continuo.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

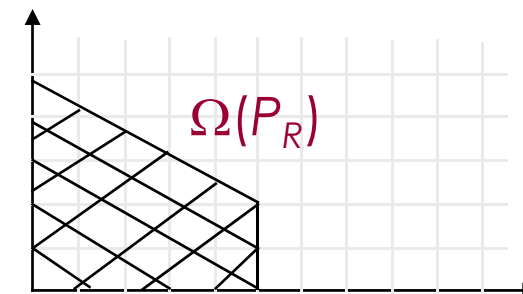
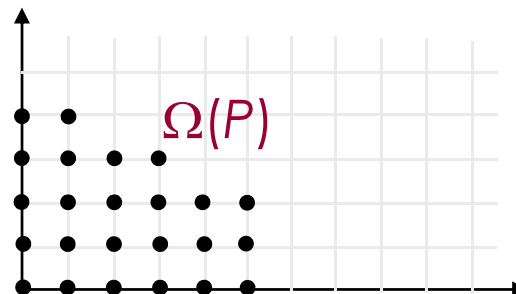
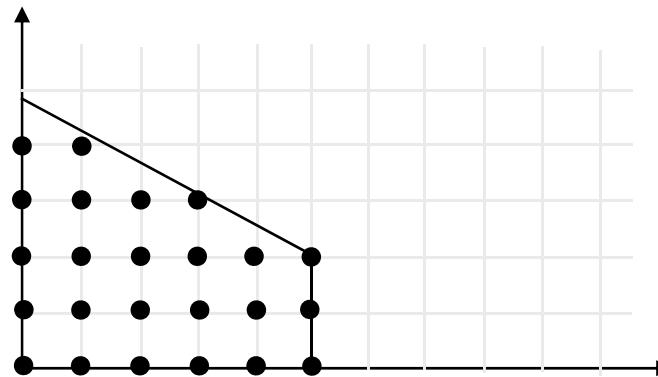
**Programmazione
Lineare Intera**

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Proprietà dei problemi di PLI

- ✓ La regione ammissibile di P è contenuta nella regione ammissibile del suo rilassato continuo:
 $\Omega(P) \subseteq \Omega(P_R)$.





Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

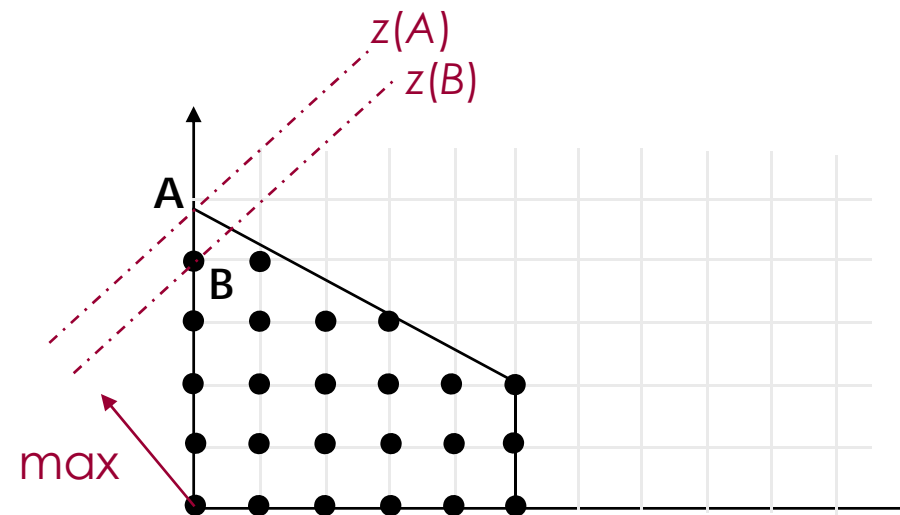
**Programmazione
Lineare Intera**

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Proprietà dei problemi di PLI

- ✓ Se P_R ammette soluzione ottima con valore di funzione obiettivo z_R e P ammette soluzione ottima con valore di funzione obiettivo z , si ha certamente $z_R \leq z$ (se P è un problema di minimizzazione), $z_R \geq z$ (se P è un problema di massimizzazione)



A: soluzione ottima di P_R
B: soluzione ottima di P e
ammissibile per P_R

$$z(A) \geq z(B)$$

Nota: P_R potrebbe ammettere ottimo finito e $\Omega(P)$ essere vuota.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

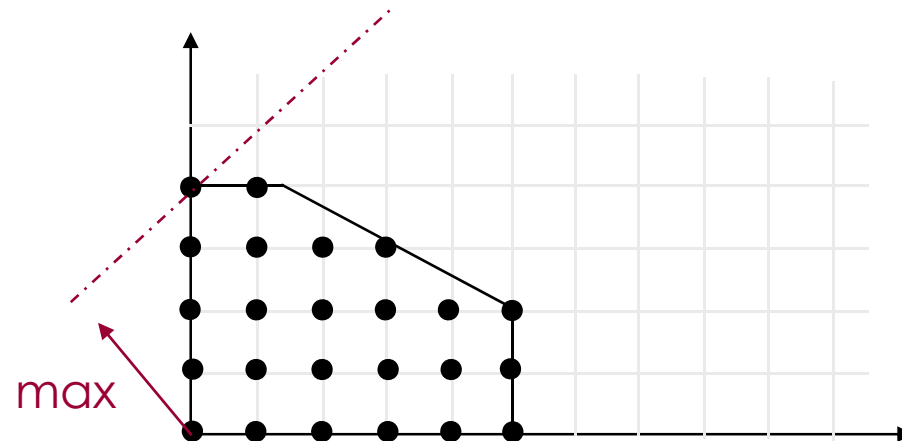
**Programmazione
Lineare Intera**

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Proprietà dei problemi di PLI

- ✓ Se la soluzione ottima di P_R è ammissibile per P (cioè le variabili decisionali hanno valori interi) allora essa è ottima per P (caso in cui $z_R = z$).



- ✓ Se P_R è inammissibile ($\Omega(P_R) = \emptyset$) allora P è inammissibile ($\Omega(P) = \emptyset$).
- ✓ Se P_R è illimitato allora P è illimitato oppure inammissibile.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

**Programmazione
Lineare Intera**

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Proprietà dei problemi di PLI

Si consideri, ad esempio, il seguente problema P di PLI:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & x_2 \\ \text{s.v.} & \\ & x_1 \geq 1/4 \\ & x_1 \leq 3/4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \text{ int.} \end{array}$$

Il suo rilassato continuo è illimitato, mentre P è inammissibile.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplesso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

**Programmazione
Lineare Intera**

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Risoluzione dei problemi di PLI

Un'importante osservazione è la seguente:

<< I problemi di PL sono in generale molto più semplici da risolvere dei problemi di PLI. In particolare, il rilassato continuo di un problema di PLI è tipicamente molto più facile da risolvere del problema di PLI stesso >>

Questa osservazione potrebbe spingere a risolvere un problema P di PLI mediante la seguente procedura

1. si risolve il suo rilassato continuo P_R ;
2. se la soluzione di P_R è ammissibile per P allora è ottima per P ; altrimenti le componenti non intere della soluzione di P_R vengono approssimate all'intero più vicino (arrotondamento).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

**Programmazione
Lineare Intera**

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Risoluzione dei problemi di PLI

Una procedura del genere rischia di restituire risultati molto inesatti. Ad esempio, come osservato in precedenza, esistono casi in cui il rilassato continuo P_R ha soluzione ottima finita mentre il problema P di PLI ha regione ammissibile vuota. In tal caso, applicando la procedura appena descritta si avrebbe una soluzione ottima per un problema che non ha neppure una soluzione ammissibile!



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

**Programmazione
Lineare Intera**

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Risoluzione dei problemi di PLI

In generale, gli errori a cui si va incontro utilizzando la procedura precedente sono di due tipi:

- ✓ la soluzione ottenuta può risultare inammissibile per il problema di PLI;
- ✓ la soluzione, pur essendo ammissibile per il problema di PLI, può discostarsi di molto dalla reale soluzione ottima.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

**Programmazione
Lineare Intera**

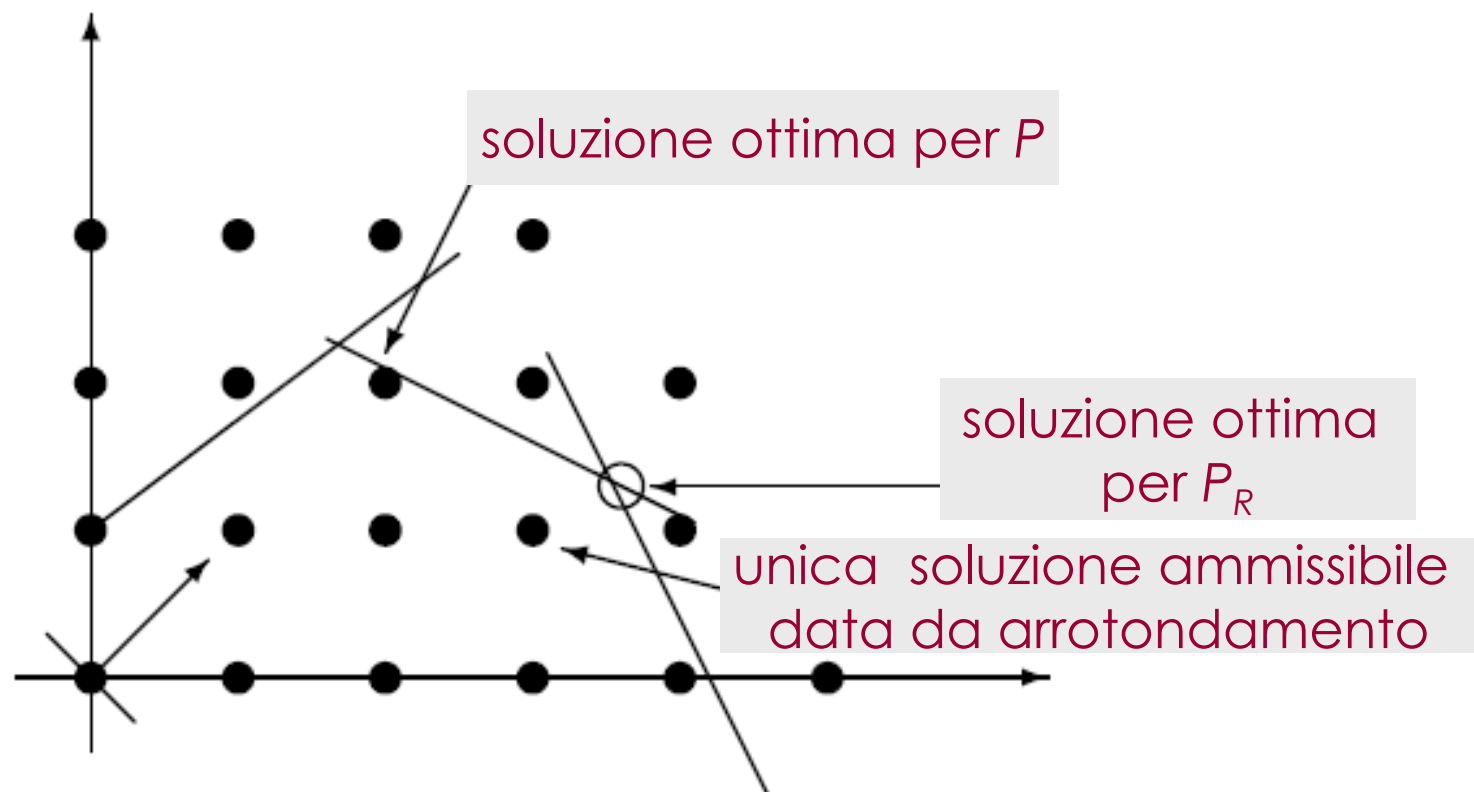
Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Risoluzione dei problemi di PLI

P : problema di PLI

P_R : rilassato continuo di P





Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

**Programmazione
Lineare Intera**

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Risoluzione dei problemi di PLI

Quando, come nella maggior parte dei casi reali, la regione $\Omega(P_R)$ del rilassato continuo di un problema P di PLI è limitata, è immediatamente verificabile una diversa cardinalità delle due regioni ammissibili: il numero di soluzioni ammissibili per P_R è **infinito**, mentre risulta **finito** quello per P . Nel seguito della trattazione si farà riferimento solo a questo caso.

Idea risolutiva alternativa: valutare la funzione obiettivo z in corrispondenza di ciascuna soluzione ammissibile del problema di PLI e scegliere quella soluzione che minimizza (o massimizza) $z \rightarrow$ **tecnica di enumerazione totale**.

Problema: questo numero finito di soluzioni può essere immensamente grande.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

**Programmazione
Lineare Intera**

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Risoluzione dei problemi di PLI

Ad esempio, in un problema di programmazione lineare binaria con n variabili decisionali, le soluzioni da considerare sono 2^n (prima valutando il soddisfacimento dei vincoli e poi, eventualmente, calcolando il valore di funzione obiettivo corrispondente). Già con $n=30$ ci sono più di un miliardo di soluzioni.

Esistono tecniche enumerative più avanzate, in grado di ridurre drasticamente i tempi di calcolo mediante piccoli accorgimenti che impongono la valutazione delle sole soluzioni ammissibili rispondenti a dei criteri prestabiliti (**tecniche di enumerazione parziale**).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Fra i metodi di enumerazione parziale più conosciuti ed efficaci per risolvere un problema P di PLI c'è il **metodo di Branch & Bound** (B&B).

- ✓ Il termine “branch” fa riferimento al processo di separazione del problema P .
- ✓ Il termine “bound” si riferisce alla determinazione di valori numerici che vengono usati per dimostrare che una qualche soluzione ammissibile (calcolata nel corso della procedura) è ottimale senza dover ricorrere a una ricerca esaustiva.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Separazione

Dato un problema P di PLI con regione ammissibile $\Omega(P)$, si dice che P viene separato nei sottoproblemi P_1, P_2, \dots, P_r se le regioni ammissibili dei sottoproblemi $\Omega(P_1), \Omega(P_2), \dots, \Omega(P_r)$ formano una partizione di $\Omega(P)$. In altri termini devono essere soddisfatte le seguenti condizioni:

- ✓ $\Omega(P_h) \cap \Omega(P_j) = \emptyset, \forall h \neq j (h, j = 1, 2, \dots, r);$
- ✓ $\bigcup_{h=1}^r \Omega(P_h) = \Omega(P).$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

I sottoproblemi P_1, P_2, \dots, P_r (che sono ancora problemi di PLI) sono detti “**discendenti**” (o “figli”) di P . Un generico sottoproblema P_h ($h=1, 2, \dots, r$) può avere a sua volta dei discendenti.

Se P_h viene separato nei sottoproblemi $P_{r+1}, P_{r+2}, \dots, P_{r+s}$, allora le regioni ammissibili $\Omega(P_{r+1}), \Omega(P_{r+2}), \dots, \Omega(P_{r+s})$ rappresentano una partizione di $\Omega(P_h)$, mentre le regioni ammissibili $\Omega(P_1), \Omega(P_2), \dots, \Omega(P_{h-1}), \Omega(P_{h+1}), \dots, \Omega(P_r), \Omega(P_{r+1}), \dots, \Omega(P_{r+s})$ rappresentano una nuova partizione di $\Omega(P)$, più fine della precedente.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplesso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Tipicamente il processo di separazione viene rappresentato utilizzando dei particolari grafi, detti **alberi**, che mettono chiaramente in luce le discendenze. I nodi del grafo rappresentano il problema originario P e i vari sottoproblemi. Il problema originario P , spesso indicato con P_0 , è il cosiddetto “**nodo radice**” (nodo senza archi entranti poiché non discende da nessuno).

I sottoproblemi che non hanno discendenti (cioè archi uscenti) sono detti “**nodi foglie**”.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

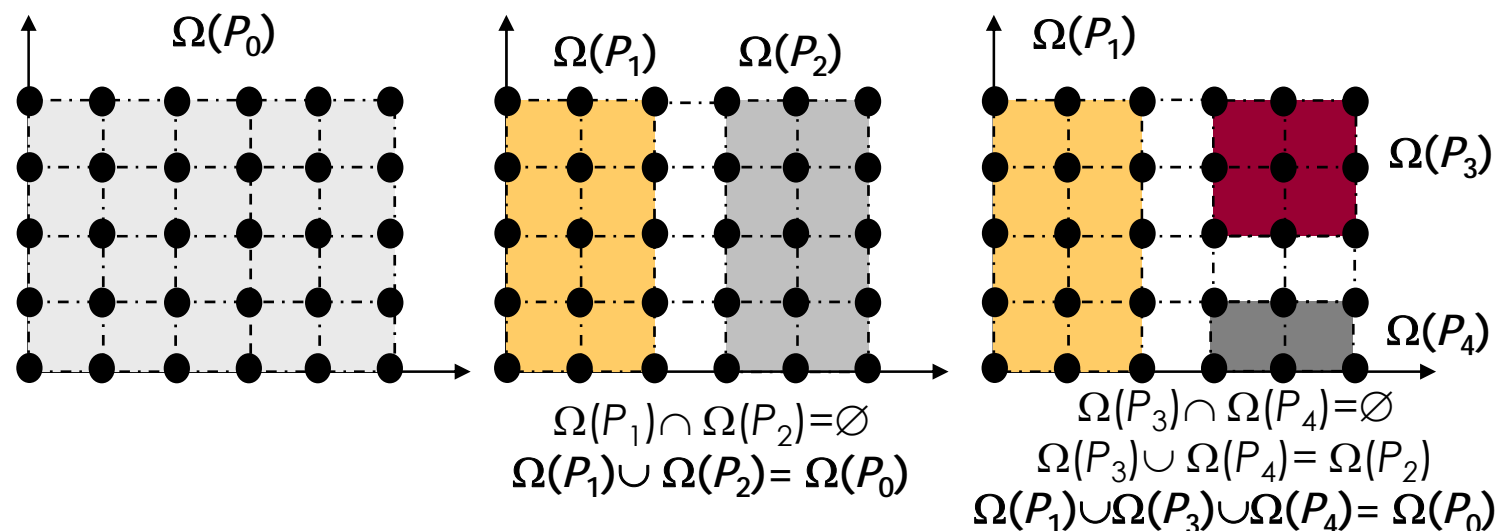
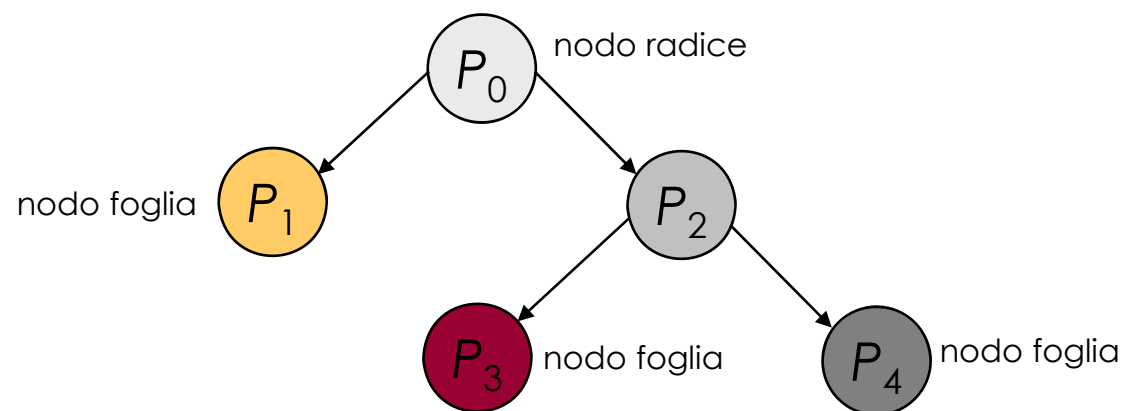
Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound





Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Osservazioni

- ✓ La soluzione ottima x^* del problema P_0 originario può essere ottenuta confrontando le soluzioni ottime di sottoproblemi le cui regioni ammissibili formano una partizione di $\Omega(P_0) \rightarrow x^*$ corrisponde alla migliore fra le soluzioni ottime dei sottoproblemi.
- ✓ Il valore di funzione obiettivo di un “discendente” sarà sicuramente non migliore del valore di funzione obiettivo del problema che lo ha generato (con riferimento all'albero precedente, ad esempio, si avrà $z_{P_3}^* \geq z_{P_2}^*$ se il problema è di minimizzazione).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Resta da capire **se** e **come** separare un problema di PLI (problema originario o sottoproblema).

Ci si può fermare con le separazioni (cioè si può “chiudere” il problema in esame P_h , $h=0,1,2,\dots$) quando

- ✓ il problema P_h è risolto facilmente;
- ✓ si hanno elementi per concludere che la soluzione ottima di P_0 non si trova nella regione ammissibile di P_h (questo vale per $h \neq 0$).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Esempio

Il problema originario P_0 verrà direttamente chiuso (cioè non ci sarà alcuna separazione) se è facile da risolvere. Questo accade quando il suo rilassato continuo è **inammissibile** (di conseguenza P_0 sarà inammissibile) oppure la soluzione ottima del rilassato continuo ha **coordinate intere** (tale soluzione sarà anche la soluzione ottima di P_0).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Chiusura del generico problema P_h (criteri di "fathoming")

Si ipotizzi di conoscere una soluzione ammissibile \bar{x} per il problema originario P_0 con valore di funzione obiettivo pari a \bar{z} .

Il problema P_h verrà chiuso se:

- ✓ il rilassato continuo di P_h è inammissibile. In questo caso anche P_h è inammissibile (la soluzione ottima di P_0 non si può trovare in un insieme vuoto!);
- ✓ la soluzione ottima del rilassato continuo di P_h ha coordinate intere. In questo caso essa è ammissibile e ottima per P_h ;



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

- ✓ la soluzione ottima del rilassato continuo di P_h non ha coordinate intere ma il suo valore di funzione obiettivo è maggiore o uguale a \bar{z} se il problema è di minimizzazione, minore o uguale se è di massimizzazione.

In questo ultimo caso è perfettamente inutile continuare a esplorare la regione ammissibile di P_h . E' certo, infatti, che tutte le soluzioni con coordinate intere in essa contenute sono non migliori di \bar{x} .



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

- Il valore di funzione obiettivo del rilassato continuo del problema P_h rappresenta un limite (*bound*) per il valore di funzione obiettivo di P_h . In particolare, è un **limite inferiore** (*lower bound*) se il problema è di minimizzazione, è un **limite superiore** (*upper bound*) se il problema è di massimizzazione.

Criteri di separazione

Quando non sussistono le condizioni per chiudere il problema P_h sotto esame ($h=0,1,2,\dots$) esso viene separato. Questa operazione è più propriamente definita **branching**.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Esistono diverse strategie di separazione. La più comune, nel caso di variabili decisionali generali, si basa sulla soluzione del rilassato continuo del problema di PLI da separare. In particolare, se nella soluzione del rilassato continuo la j -esima variabile assume un valore frazionario compreso fra k e $k+1$ (con k intero) si possono generare due sottoproblemi aggiungendo al problema P_h da separare il vincolo $x_j \leq k$ in un sottoproblema e il vincolo $x_j \geq k+1$ nell'altro. La j -esima variabile è detta **variabile di branching** e k rappresenta la sua parte intera inferiore.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplesso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

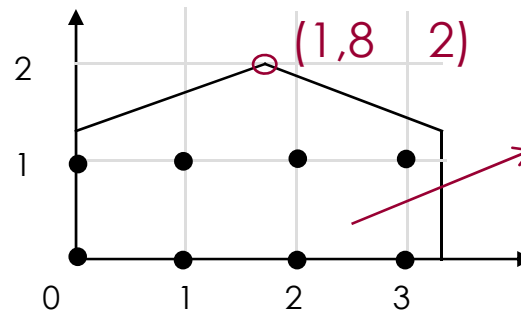
Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Esempio:



i punti con
coordinate intere
costituiscono $\Omega(P_h)$

- ✓ $[1,8 \ 2]^T \rightarrow$ soluzione ottima del rilassato continuo del problema P_h
- ✓ x_1 è la componente frazionaria della soluzione del rilassato continuo di $P_h \rightarrow x_1$ è la variabile di *branching*.
- ✓ k coincide con la parte intera inferiore del suo valore, cioè con $\lfloor 1,8 \rfloor \rightarrow k=1$.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplesso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

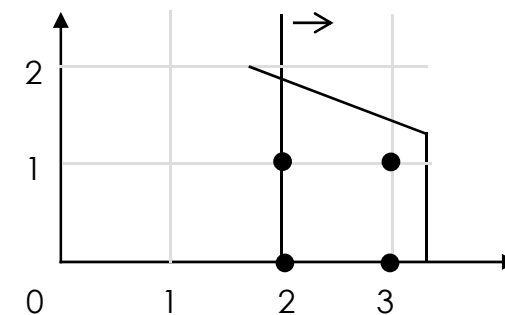
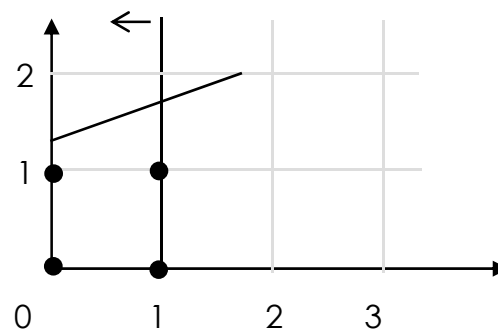
**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Vengono quindi generati due sottoproblemi: uno aggiungendo al problema P_h il vincolo $x_1 \leq 1$, l'altro aggiungendo a P_h il vincolo $x_1 \geq 2$.

Conseguenza: si effettua una partizione della regione ammissibile del problema P_h in due sottoinsiemi senza escludere nessuna delle soluzioni con coordinate intere del problema partizionato.





Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplesso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Il criterio di separazione appena esposto fa nascere un **albero** di rappresentazione **binario** (un nodo dell'albero, corrispondente a un problema di PLI, è un "nodo foglia" oppure ha esattamente due discendenti).

Nel caso di più componenti frazionarie nella soluzione ottima del rilassato continuo, come si sceglie la variabile di branching?

La scelta è assolutamente arbitraria. In ogni caso, un criterio molto utilizzato è il seguente: si sceglie la variabile con valore frazionario "più lontano" da un intero.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Esempio

$[3,8 \quad 4,6 \quad 3 \quad 4,1]^T$

variabile di branching

Nel seguito viene fornito lo schema dell'algoritmo di B&B per un problema di minimizzazione .

Sia L la **lista dei problemi** di PLI da esaminare.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

0. (*Inizializzazione*) Poni $q=0$ e $L=\{P_0\}$. Si indichi con \bar{x} la migliore soluzione ammissibile disponibile (detta **incombente**) e con \bar{z} il suo valore di funzione obiettivo.

Nota: In genere, all'inizio non si conosce alcuna soluzione ammissibile per P_0 ; in questo caso si avrà $\bar{z}=+\infty$.

1. (*Criterio di arresto*) Se $L=\emptyset$, STOP \rightarrow se $\bar{z} < +\infty$, allora la soluzione ottima di P_0 è rappresentata dall'incombente \bar{x} e il suo valore di funzione obiettivo è \bar{z} ; altrimenti P_0 è inammissibile.

2. (*Estrazione*) Estrai dalla lista L un problema P_h .

3. (*Rilassamento*) Risolvi il rilassato continuo di P_h (indicato con P_h').



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

4. (*Chiusura*)

4.1. Se P_h' è inammissibile torna al passo 1;

4.2. Se il valore ottimo di funzione obiettivo di P_h' è maggiore o uguale di \bar{z} torna al passo 1 (Nota: la soluzione ottima di P_h' può essere ammissibile per P_h oppure non ammissibile);

4.3. Se la soluzione ottima di P_h' è ammissibile per P_h e il suo valore di funzione obiettivo è minore di \bar{z} , aggiorna \bar{x} e \bar{z} e torna al passo 1.

5. (*Separazione*) Separa P_h nei sottoproblemi P_{q+1} e P_{q+2} e aggiungi questi sottoproblemi a L . Poni $q=q+2$ e torna al passo 1.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Nel seguito si farà riferimento soltanto a problemi di PLI con variabili decisionali di tipo generale.

Al passo 5 verrà utilizzato il criterio di separazione e la strategia di scelta della variabile di branching descritti in precedenza (lucidi n. 170,173).

Resta da chiarire la strategia utilizzata al passo 2. Quale problema si deve estrarre da una lista che contiene più sottoproblemi?

La scelta può essere assolutamente casuale.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Esistono tuttavia diverse strategie. Le più note sono:

- ✓ Strategia **LIFO** (*Last-In-First-Out*). Consiste nello scegliere come problema da esaminare al passo 2 l'ultimo problema di PLI generato (cioè il problema a cui corrisponde l'indice più grande). Questa scelta corrisponde a una procedura di visita dell'albero in profondità.
- ✓ Strategia **FIFO** (*First-In-First-Out*). Consiste nello scegliere come problema da esaminare al passo 2 il problema di PLI generato prima degli altri della lista (cioè il problema a cui corrisponde l'indice più piccolo). Questa scelta corrisponde a una procedura di visita dell'albero in ampiezza.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

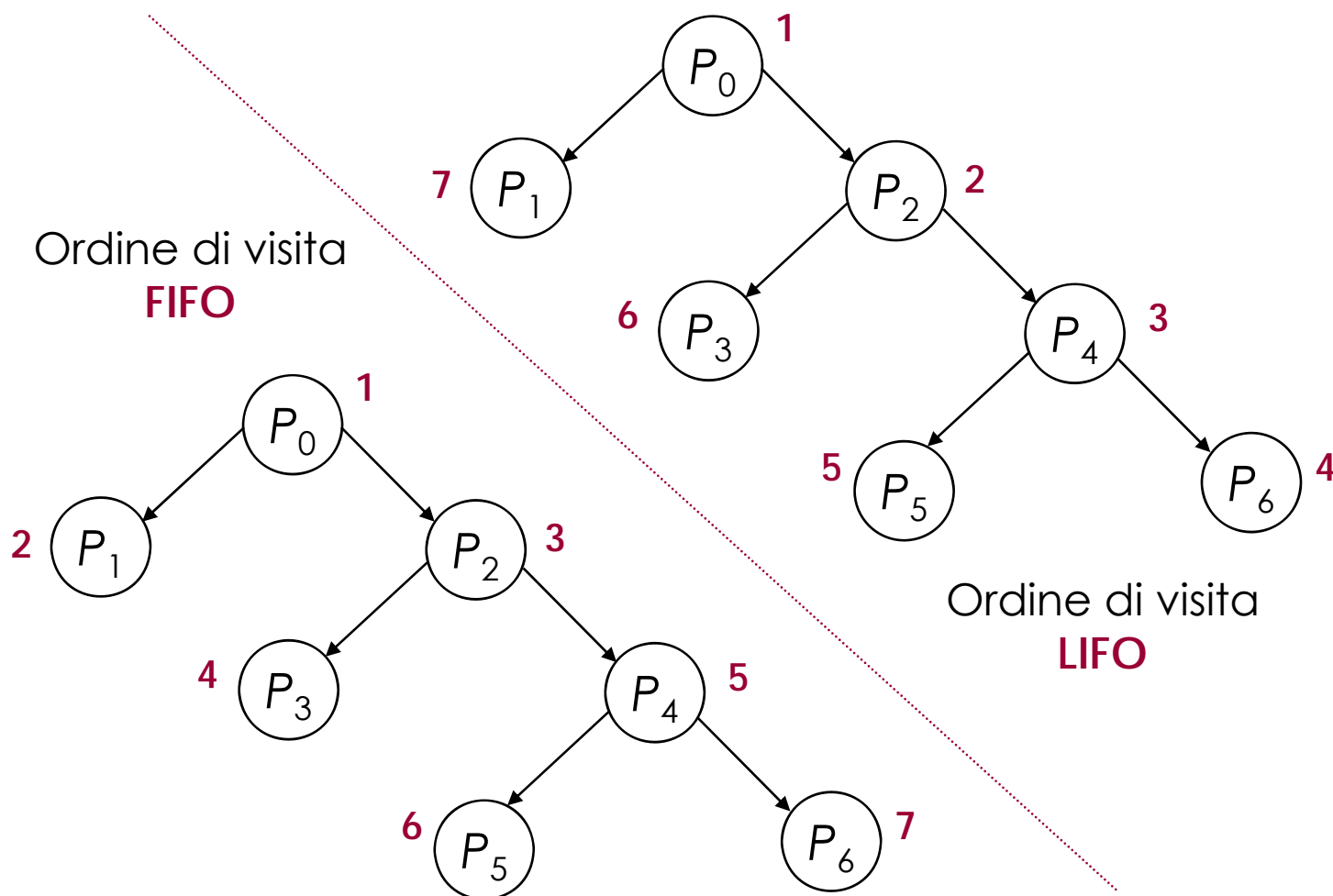
Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound





Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Esempio 1

Risolvere il seguente problema di PLI:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -x_1 - x_2 \\ \text{s.v.} & 2x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ & 4x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \text{ int.} \end{array}$$

Si indichi con P_0 tale problema.

Prima iterazione

$L = \{P_0\}$ e $\bar{z} = +\infty$

Criterio di arresto: non verificato

Problema estratto da L ed esaminato: P_0



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Risolvere il rilassato continuo di P_0 equivale a risolvere il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -x_1 \quad -x_2 \\ \text{s.v.} & 2x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ & 4x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ & x_1, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

Per applicare il metodo del simplexso a tale problema (P_0') occorre ridurlo in forma standard

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -x_1 \quad -x_2 \\ \text{s.v.} & 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 30 \\ & 4x_1 - 3x_2 + x_4 = 6 \\ & x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \geq 0 \end{array}$$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Il problema è già nella forma canonica (primale).
La tabella iniziale è:

-1	-1	0	0	0
2	5	1	0	30
4	-3	0	1	6

La soluzione ammissibile di base associata a questa tabella non è ottima. La colonna di pivot è la prima, mentre la riga di pivot è la seconda ($\min\{30/2, 6/4\}=6/4$). La successiva tabella è:

0	$-7/4$	0	$1/4$	$3/2$
0	$13/2$	1	$-1/2$	27
1	$-3/4$	0	$1/4$	$3/2$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

La soluzione ammissibile di base associata a questa tabella non è ottima. La colonna di pivot è la seconda, mentre la riga di pivot è la prima. La successiva tabella è la seguente:

0	0	7/26	3/26	114/13
0	1	2/13	-1/13	54/13
1	0	3/26	5/26	60/13

La soluzione ottima del rilassato continuo P_0' è $[60/13 \quad 54/13]^T$. Nessuno dei criteri di chiusura è soddisfatto. Pertanto il problema P_0 viene separato in due sottoproblemi: P_1 e P_2 .

Scelta della variabile di branching: $60/13 \approx 4,6$;

$54/13 \approx 4,1 \rightarrow x_1$. $k = \lfloor 60/13 \rfloor = 4$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

$L=\{P_1, P_2\}$ dove

$$\begin{array}{lll} \text{Min} & -x_1 & -x_2 \\ \text{s.v.} & & \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ & 4x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \text{ int.} \end{array}$$

(P_1)

$$\begin{array}{lll} \text{Min} & -x_1 & -x_2 \\ \text{s.v.} & & \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ & 4x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \text{ int.} \end{array}$$

(P_2)



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Seconda iterazione

$$\bar{z} = +\infty; L = \{P_1, P_2\}$$

Criterio di arresto: non verificato

Problema estratto da L ed esaminato: P_1

Risolvere il rilassato continuo di P_1 (cioè P_1') equivale
a risolvere il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -x_1 \quad -x_2 \\ \text{s.v.} & 2x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ & 4x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Forma equivalente per P_1' :

$$\begin{array}{llllll} \text{Min} & -x_1 & -x_2 & & & \\ \text{s.v.} & 2x_1 + 5x_2 + x_3 & & & & = 30 \\ & 4x_1 - 3x_2 & & + x_4 & & = 6 \\ & x_1 & & & + x_5 & = 4 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 \geq 0 \end{array}$$

P_1' può essere risolto a partire dalla tabella ottima di P_0' (analisi di sensitività: aggiunta di un vincolo a un problema di PL già risolto).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplesso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Tabella ottima per P_0' :

0	0	7/26	3/26	114/13
0	1	2/13	-1/13	54/13
1	0	3/26	5/26	60/13

Trasformazione:

0	0	7/26	3/26	0	114/13
0	1	2/13	-1/13	0	54/13
1	0	3/26	5/26	0	60/13
1	0	0	0	1	4

Si ripristina la forma canonica facendo un'operazione di pivot sull'elemento 1 in posizione (2,1).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

La tabella risultante è la seguente:

0	0	7/26	3/26	0	114/13
0	1	2/13	-1/13	0	54/13
1	0	3/26	5/26	0	60/13
0	0	-3/26	-5/26	1	-8/13

Essa è nella forma canonica duale. Si può applicare il metodo del simplexso duale. La riga di pivot è la terza, mentre la colonna di pivot è la quarta

$$\max \left\{ \frac{7}{26} \left(-\frac{26}{3} \right); \frac{3}{26} \left(-\frac{26}{5} \right) \right\} = -\frac{3}{5}$$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

La tabella risultante è la seguente:

0	0	1/5	0	3/5	42/5
0	1	1/5	0	-2/5	22/5
1	0	0	0	1	4
0	0	3/5	1	-26/5	16/5

La soluzione ottima del rilassato continuo P_1' è $[4 \ 22/5]^T$. A essa è associato un valore di funzione obiettivo pari a $-42/5$. Nessuno dei criteri di chiusura è soddisfatto. Pertanto il problema P_1 viene separato in due sottoproblemi: P_3 e P_4 .

Variabile di branching: x_2 .

$$k = \lfloor 22/5 \rfloor = 4$$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplesso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -x_1 \quad -x_2 \\ \text{s.v.} & 2x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ & 4x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \text{ int.} \end{array}$$

(P_3)

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -x_1 \quad -x_2 \\ \text{s.v.} & 2x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ & 4x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_2 \geq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \text{ int.} \end{array}$$

(P_4)



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Terza iterazione

$$\bar{z} = +\infty; L = \{P_2, P_3, P_4\}$$

Criterio di arresto: non verificato

Problema estratto da L ed esaminato: P_2

Risolvere il rilassato continuo di P_2 (cioè P_2') equivale
a risolvere il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -x_1 \quad -x_2 \\ \text{s.v.} & 2x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ & 4x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 \geq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Forma equivalente per P_2' :

$$\begin{array}{llllll} \text{Min} & -x_1 & -x_2 & & & \\ \text{s.v.} & 2x_1 + 5x_2 + x_3 & & & & = 30 \\ & 4x_1 - 3x_2 & & + x_4 & & = 6 \\ & -x_1 & & & + x_5 & = -5 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 \geq 0 \end{array}$$

Anche P_2' può essere risolto a partire dalla tabella ottima di P_0' (analisi di sensitività: aggiunta di un vincolo a un problema di PL già risolto).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Tabella ottima per P_0' :

0	0	7/26	3/26	114/13
0	1	2/13	-1/13	54/13
1	0	3/26	5/26	60/13

Trasformazione:

0	0	7/26	3/26	0	114/13
0	1	2/13	-1/13	0	54/13
1	0	3/26	5/26	0	60/13
-1	0	0	0	1	-5

Si ripristina la forma canonica (duale) facendo l'operazione di pivot sull'elemento 1 in posizione (2,1).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

La tabella risultante è la seguente:

0	0	7/26	3/26	0	114/13
0	1	2/13	-1/13	0	54/13
1	0	3/26	5/26	0	60/13
0	0	3/26	5/26	1	-5/13

Essa è nella forma canonica duale. Applicando il metodo del simplexso duale si può concludere che il rilassato continuo P_2' è inammissibile.

Un criterio di chiusura è soddisfatto → non si separa P_2 .



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Quarta iterazione

$$\bar{z} = +\infty; L = \{P_3, P_4\}$$

Criterio di arresto: non verificato

Problema estratto da L ed esaminato: P_3

Rilassato continuo di P_3 (cioè P_3'):

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -x_1 \quad -x_2 \\ \text{s.v.} & 2x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ & 4x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Forma equivalente per P_3' :

$$\begin{array}{llllll} \text{Min} & -x_1 & -x_2 & & & \\ \text{s.v.} & 2x_1 + 5x_2 & +x_3 & & & = 30 \\ & 4x_1 - 3x_2 & & +x_4 & & = 6 \\ & x_1 & & & +x_5 & = 4 \\ & & x_2 & & & +x_6 = 4 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 \geq 0 \end{array}$$

P_3' può essere risolto a partire dalla tabella ottima di P_1' (analisi di sensitività: aggiunta di un vincolo a un problema di PL già risolto).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplesso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Tabella ottima per P_1' :

0	0	1/5	0	3/5	42/5
0	1	1/5	0	-2/5	22/5
1	0	0	0	1	4
0	0	3/5	1	-26/5	16/5

Trasformazione:

0	0	1/5	0	3/5	0	42/5
0	1	1/5	0	-2/5	0	22/5
1	0	0	0	1	0	4
0	0	3/5	1	-26/5	0	16/5
0	1	0	0	0	1	4



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Si ripristina la forma canonica facendo un'operazione di pivot sull'elemento 1 in posizione (1,2):

0	0	$1/5$	0	$3/5$	0	$42/5$
0	1	$1/5$	0	$-2/5$	0	$22/5$
1	0	0	0	1	0	4
0	0	$3/5$	1	$-26/5$	0	$16/5$
0	0	$-1/5$	0	$2/5$	1	$-2/5$

La tabella è nella forma canonica duale. Si può applicare il metodo del simplexso duale. L'elemento di pivot è $-1/5$.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplesso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

La tabella risultante è la seguente:

0	0	0	0	1	1	8
0	1	0	0	0	1	4
1	0	0	0	1	0	4
0	0	0	1	-4	3	2
0	0	1	0	-2	-5	2

La soluzione ottima di P_3' è $[4 \ 4]^T$. A essa è associato un valore di funzione obiettivo pari a -8 . La soluzione di P_3' ha coordinate intere \rightarrow essa è anche la soluzione ottima di P_3 . Poiché $-8 < \bar{z}$ viene aggiornato l'incombente e il suo valore di funzione obiettivo: $\bar{x} = [4 \ 4]^T$; $\bar{z} = -8$.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Un criterio di chiusura è soddisfatto; pertanto il problema P_3 non viene separato.

Quinta iterazione

$\bar{z} = -8$; $L = \{P_4\}$; criterio di arresto non verificato

Problema estratto da L ed esaminato: P_4

Rilassato continuo di P_4 (cioè P_4'):

$$\begin{array}{lll} \text{Min} & -x_1 & -x_2 \\ \text{s.v.} & 2x_1 + 5x_2 \leq 30 \\ & 4x_1 - 3x_2 \leq 6 \\ & x_1 & \leq 4 \\ & & x_2 \geq 5 \\ & x_1, & x_2 \geq 0 \end{array}$$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Forma equivalente per P_4' :

$$\begin{array}{llllll} \text{Min} & -x_1 & -x_2 & & & \\ \text{s.v.} & 2x_1 & +5x_2 & +x_3 & & = 30 \\ & 4x_1 & -3x_2 & & +x_4 & = 6 \\ & x_1 & & & & +x_5 = 4 \\ & & -x_2 & & & +x_6 = -5 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 \geq 0 \end{array}$$

P_4' può essere risolto a partire dalla tabella ottima di P_1' (analisi di sensitività: aggiunta di un vincolo a un problema di PL già risolto).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Tabella ottima per P_1' :

0	0	1/5	0	3/5	42/5
0	1	1/5	0	-2/5	22/5
1	0	0	0	1	4
0	0	3/5	1	-26/5	16/5

Trasformazione:

0	0	1/5	0	3/5	0	42/5
0	1	1/5	0	-2/5	0	22/5
1	0	0	0	1	0	4
0	0	3/5	1	-26/5	0	16/5
0	-1	0	0	0	1	-5



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Si ripristina la forma canonica (duale) facendo l'operazione di pivot sull'elemento 1 in posizione (1,2):

0	0	$1/5$	0	$3/5$	0	$42/5$
0	1	$1/5$	0	$-2/5$	0	$22/5$
1	0	0	0	1	0	4
0	0	$3/5$	1	$-26/5$	0	$16/5$
0	0	$1/5$	0	$-2/5$	1	$-3/5$

La tabella è nella forma canonica duale. Si può applicare il metodo del simplexso duale. La riga di pivot è la quarta, mentre la colonna di pivot è la quinta.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplesso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

La tabella risultante è la seguente:

0	0	1/2	0	0	3/2	15/2
0	1	0	0	0	-1	5
1	0	1/2	0	0	5/2	5/2
0	0	-2	1	0	-13	11
0	0	-1/2	0	1	-5/2	3/2

La soluzione ottima di P_4' è $[5/2 \ 5]^T$. A essa è associato un valore di funzione obiettivo pari a $-15/2$.

$-15/2 > \bar{z} \rightarrow$ un criterio di chiusura è soddisfatto.

Sesta iterazione

$L = \emptyset \rightarrow$ criterio di arresto verificato.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

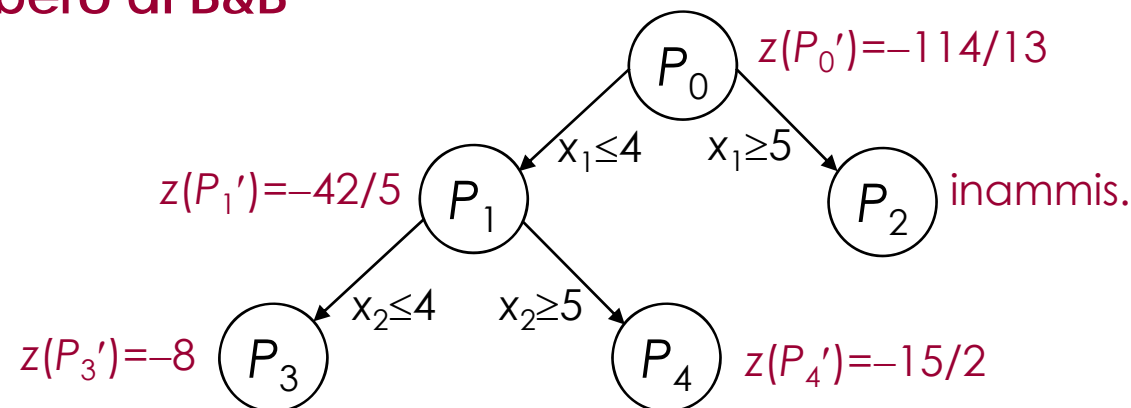
Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

La soluzione ottima del problema di PLI originario (P_0) è rappresentata dall'incombente $[4 \ 4]^T$. A essa corrisponde un valore di funzione obiettivo pari a -8 .

Si noti che è stata adottata una strategia di tipo FIFO per la scelta dei problemi da esaminare a ogni iterazione.

Albero di B&B





Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Esempio 2

Risolvere il seguente problema di PLI:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -x_1 \quad -x_2 \\ \text{s.v.} & \\ & x_2 \leq 4 \\ & 8x_1 - 5x_2 \leq 8 \\ & x_1, \quad x_2 \geq 0 \\ & x_1, \quad x_2 \text{ int.} \end{array}$$

Si indichi con P_0 tale problema.

Prima iterazione

$L = \{P_0\}$ e $\bar{z} = +\infty$

Criterio di arresto: non verificato

Problema estratto da L ed esaminato: P_0



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Risolvere il rilassato continuo di P_0 equivale a risolvere il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -x_1 \quad -x_2 \\ \text{s.v.} & \\ & x_2 \leq 4 \\ & 8x_1 - 5x_2 \leq 8 \\ & x_1, \quad x_2 \geq 0 \end{array} \quad (P_0')$$

Per applicare il metodo del simplexso a tale problema occorre ridurlo in forma standard

$$\begin{array}{llll} \text{Min} & -x_1 & -x_2 & \\ \text{s.v.} & & & \\ & & x_2 + x_3 & = 4 \\ & 8x_1 - 5x_2 & + x_4 & = 8 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \geq 0 \end{array}$$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Il problema è già nella forma canonica (primale).
La tabella iniziale è la seguente:

-1	-1	0	0	0
0	1	1	0	4
8	-5	0	1	8

La soluzione ammissibile di base associata a questa tabella non è ottima. La colonna di pivot è la prima, mentre la riga di pivot è la seconda. La successiva tabella è la seguente:

0	-13/8	0	1/8	1
0	1	1	0	4
1	-5/8	0	1/8	1



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

La soluzione ammissibile di base associata a questa tabella non è ottima. La colonna di pivot è la seconda, mentre la riga di pivot è la prima. La successiva tabella è la seguente:

0	0	13/8	1/8	15/2
0	1	1	0	4
1	0	5/8	1/8	7/2

La soluzione ottima del rilassato continuo P_0' è $[7/2 \quad 4]^T$. A essa è associato un valore di funzione obiettivo pari a $-15/2$. Nessuno dei criteri di chiusura è soddisfatto. Pertanto il problema P_0 viene separato in due sottoproblemi: P_1 e P_2 .

Variabile di branching: x_1 ; $k=\lfloor 7/2 \rfloor=3$.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

$L = \{P_1, P_2\}$ dove

Min $-x_1 \quad -x_2$

s.v.

$$x_2 \leq 4$$

$$8x_1 - 5x_2 \leq 8$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \text{ int.}$$

(P_1)

Min $-x_1 \quad -x_2$

s.v.

$$x_2 \leq 4$$

$$8x_1 - 5x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \text{ int.}$$

(P_2)



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Seconda iterazione

$$\bar{z} = +\infty; L = \{P_1, P_2\}$$

Criterio di arresto: non verificato

Problema estratto da L ed esaminato: P_1

Risolvere il rilassato continuo di P_1 equivale a risolvere il seguente problema di PL:

$$\text{Min} \quad -x_1 \quad -x_2$$

s.v.

$$x_2 \leq 4$$

$$8x_1 - 5x_2 \leq 8$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(P_1')



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Forma equivalente per P_1' :

$$\begin{array}{llllll} \text{Min} & -x_1 & -x_2 & & & \\ \text{s.v.} & & & x_2 + x_3 & & = 4 \\ & 8x_1 - 5x_2 & & + x_4 & & = 8 \\ & x_1 & & & + x_5 & = 3 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 \geq 0 \end{array}$$

P_1' può essere risolto a partire dalla tabella ottima di P_0' (analisi di sensitività: aggiunta di un vincolo a un problema di PL già risolto).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Tabella ottima per P_0' :

0	0	13/8	1/8	15/2
0	1	1	0	4
1	0	5/8	1/8	7/2

Trasformazione:

0	0	13/8	1/8	0	15/2
0	1	1	0	0	4
1	0	5/8	1/8	0	7/2
1	0	0	0	1	3

Si ripristina la forma canonica facendo un'operazione di pivot sull'elemento 1 in posizione (2,1).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

La tabella risultante è la seguente:

0	0	13/8	1/8	0	15/2
0	1	1	0	0	4
1	0	5/8	1/8	0	7/2
0	0	-5/8	-1/8	1	-1/2

Essa è nella forma canonica duale. Si può applicare il metodo del simplexso duale. La riga di pivot è la terza, mentre la colonna di pivot è la quarta; infatti

$$\max \left\{ \frac{13}{8} \left(-\frac{8}{5} \right); \frac{1}{8} \left(-\frac{8}{1} \right) \right\} = -1$$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

La tabella risultante è la seguente:

0	0	1	0	1	7
0	1	1	0	0	4
1	0	0	0	1	3
0	0	5	1	-8	4

La soluzione ottima del rilassato continuo P_1' è $[3 \ 4]^T$. A essa è associato un valore di funzione obiettivo pari a -7 . Poiché tale soluzione ha coordinate intere e $-7 < \bar{z}$, si può aggiornare l'incombente e il suo valore di funzione obiettivo prima di “chiudere” P_1 .

$$\bar{x} = [3 \ 4]^T; \bar{z} = -7.$$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Terza iterazione

$$\bar{z} = -7; L = \{P_2\}$$

Criterio di arresto: non verificato

Problema estratto da L ed esaminato: P_2

Risolvere il rilassato continuo di P_2 equivale a risolvere il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -x_1 \quad -x_2 \\ \text{s.v.} & \\ & x_2 \leq 4 \\ & 8x_1 - 5x_2 \leq 8 \\ & x_1 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

(P_2')



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Forma equivalente per P_2' :

$$\begin{array}{llllll} \text{Min} & -x_1 & -x_2 & & & \\ \text{s.v.} & & & x_2 + x_3 & & = 4 \\ & 8x_1 - 5x_2 & & + x_4 & & = 8 \\ & -x_1 & & & + x_5 & = -4 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 \geq 0 \end{array}$$

Anche P_2' può essere risolto a partire dalla tabella ottima di P_0' (analisi di sensitività: aggiunta di un vincolo a un problema di PL già risolto).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Tabella ottima per P_0' :

0	0	13/8	1/8	15/2
0	1	1	0	4
1	0	5/8	1/8	7/2

Trasformazione:

0	0	13/8	1/8	0	15/2
0	1	1	0	0	4
1	0	5/8	1/8	0	7/2
-1	0	0	0	1	-4

Si ripristina la forma canonica (duale) facendo un'operazione di pivot sull'elemento 1 in posizione (2,1).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

La tabella risultante è la seguente:

0	0	13/8	1/8	0	15/2
0	1	1	0	0	4
1	0	5/8	1/8	0	7/2
0	0	5/8	1/8	1	-1/2

Essa è nella forma canonica duale. Applicando il metodo del simplexso duale si può concludere che il rilassato continuo P_2' è inammissibile.

Un criterio di chiusura è soddisfatto \rightarrow non si separa P_2 .



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

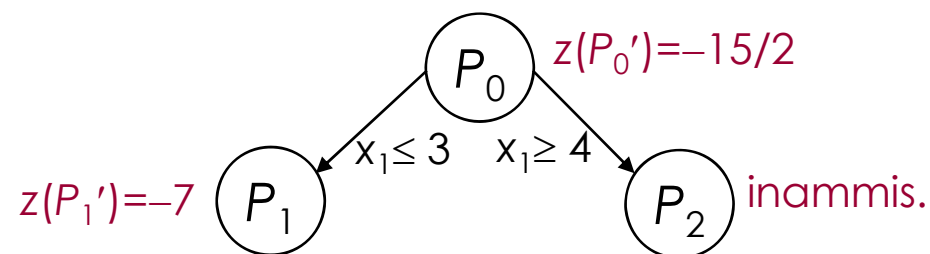
Quarta iterazione

$$\bar{z} = -7; L = \emptyset$$

Criterio di arresto: verificato

La soluzione ottima di P_0 è $[3 \ 4]^T$; a essa corrisponde un valore di funzione obiettivo pari a -7 .

Albero di B&B





Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

**Metodo di
Branch & Bound**

Algoritmi dei piani
di taglio

Metodo di Branch & Bound

Esercizio

Risolvere il seguente problema di PLI utilizzando il metodo di Branch & Bound:

Min z

$$\begin{array}{ll} \text{s.v.} & z = -2x_1 - x_2 \\ & 2x_1 \leq 5 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \text{ int.} \end{array}$$

(Soluzione: $x_1^*=2$, $x_2^*=5$, $z^*=-9$)



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

**Algoritmi dei piani
di taglio**

Algoritmi dei piani di taglio

Approccio alternativo al metodo B&B per la risoluzione dei problemi di PLI: **algoritmo dei piani di taglio**.

Durante la fase di branching della tecnica B&B, si effettua una suddivisione della regione ammissibile corrente in due sottoregioni più piccole tramite l'imposizione di nuovi vincoli opportunamente ricavati a partire dall'ultima soluzione ottima determinata. Un principio di riduzione del campo di indagine è anche alla base degli algoritmi dei piani di taglio.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

**Algoritmi dei piani
di taglio**

Algoritmi dei piani di taglio

La differenza sostanziale è costituita dal fatto che, in ciascuna fase degli algoritmi dei piani di taglio, si aggiunge un “unico nuovo vincolo” così da restringere la regione ammissibile di riferimento senza sdoppiarla (tagliando appunto e non separando).

Nozioni preliminari:

Si consideri un problema P_0 di PLI. La sua regione ammissibile $\Omega(P_0)$ è rappresentata dai vettori a coordinate intere contenuti nella regione ammissibile del suo rilassato continuo P_0' , cioè all'interno dell'insieme convesso $\Omega(P_0')$.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

**Algoritmi dei piani
di taglio**

Algoritmi dei piani di taglio

Al solito, se risolvendo P_0' si ottiene una soluzione a coordinate intere (quindi ammissibile per P_0), questa soluzione rappresenta anche la soluzione ottima di P_0 .

Nel seguito si farà l'ipotesi che P_0 e P_0' ammettano soluzioni ottime finite.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

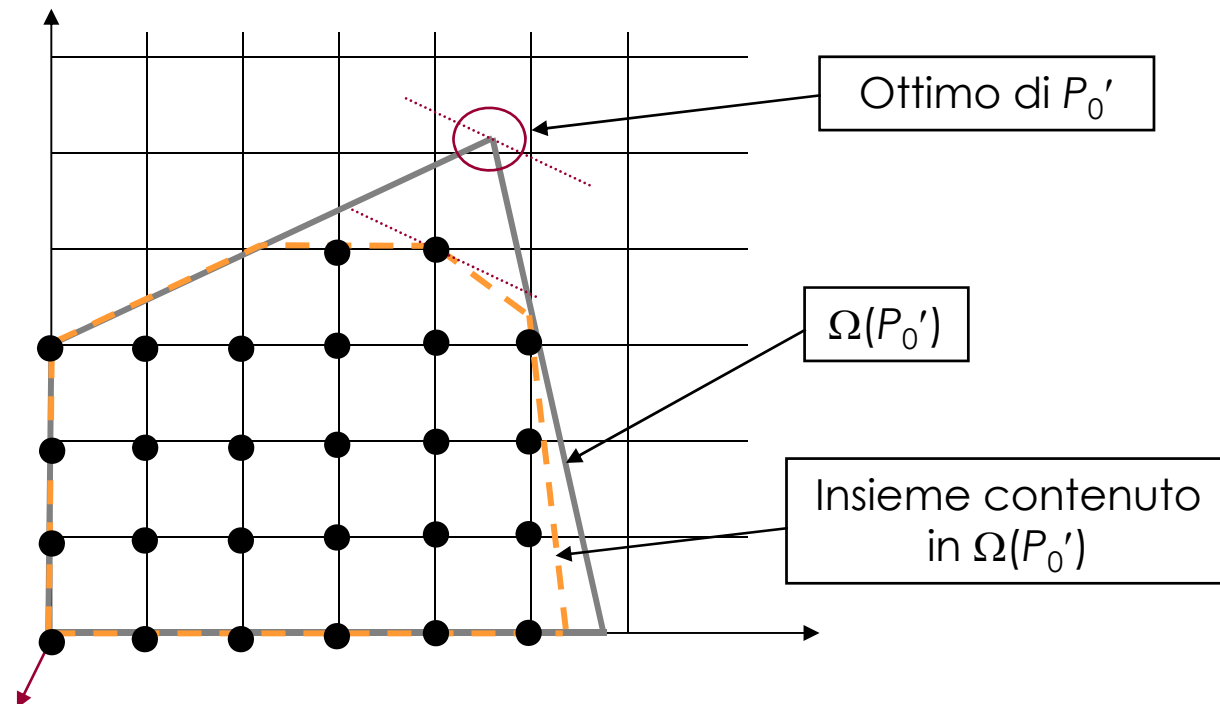
Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

**Algoritmi dei piani
di taglio**

Algoritmi dei piani di taglio

Si noti che esistono altri insiemi convessi che contengono $\Omega(P_0)$ e che sono contenuti in $\Omega(P_0')$ \rightarrow tali insiemi consentono in generale una più agevole determinazione del punto di ottimo del problema P_0 .





Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

**Algoritmi dei piani
di taglio**

Algoritmi dei piani di taglio

Dalla figura si evince che, in questo caso specifico, se la regione ammissibile del rilassato continuo di P_0 coincidesse con l'insieme convesso contenuto in $\Omega(P_0')$, la sua risoluzione condurrebbe a una soluzione a coordinate intere (quindi ottima per P_0).

Il più piccolo insieme convesso che contiene $\Omega(P_0)$ è definito **copertura convessa** di $\Omega(P_0)$. Se un insieme di questo tipo rappresentasse la regione ammissibile del rilassato continuo di P_0 , la soluzione ottima di P_0 coinciderebbe sempre con quella del suo rilassato continuo (per qualunque funzione obiettivo lineare).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

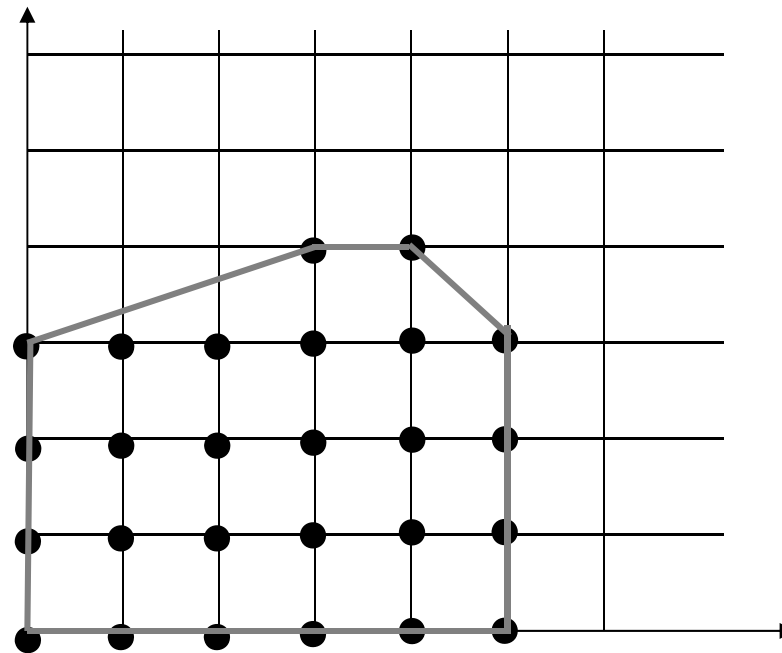
Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

**Algoritmi dei piani
di taglio**

Algoritmi dei piani di taglio

Copertura convessa \rightarrow regione più “aderente” a $\Omega(P_0)$.



In generale, determinare la copertura convessa della regione ammissibile di un problema di PLI è estremamente complicato.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

**Algoritmi dei piani
di taglio**

Algoritmi dei piani di taglio

Gli algoritmi dei piani di taglio si basano sulle considerazioni appena viste. Al rilassato continuo del problema iniziale vengono ripetutamente aggiunti dei vincoli che rendono la sua regione ammissibile più “aderente” a $\Omega(P_0)$.

Lo schema generale di un algoritmo dei piani di taglio è fornito di seguito:

1. Si risolve il problema originario P_0 rilassando i suoi vincoli di interezza.
2. Se la soluzione ottenuta rispetta i vincoli di interezza l'algoritmo termina (tale soluzione è ottima per P_0), altrimenti si aggiunge al rilassato continuo un nuovo vincolo detto **piano di taglio** (*cutting plane*) o semplicemente **taglio**.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

**Algoritmi dei piani
di taglio**

Algoritmi dei piani di taglio

Tale vincolo riduce la regione ammissibile del rilassato continuo senza pregiudicare la determinazione della soluzione ottima di P_0 .

3. Si risolve il nuovo problema di PL (con vincolo addizionale) e si torna al passo 2.

Il piano di taglio deve avere le seguenti caratteristiche:

- ✓ escludere la soluzione ottima corrente (non ammissibile per P_0)

Grazie a questa caratteristica, quando si risolve un nuovo problema di PL (con vincolo addizionale) la soluzione ottima precedente non potrà essere nuovamente determinata.

- ✓ non escludere alcuna soluzione ammissibile per P_0 .



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

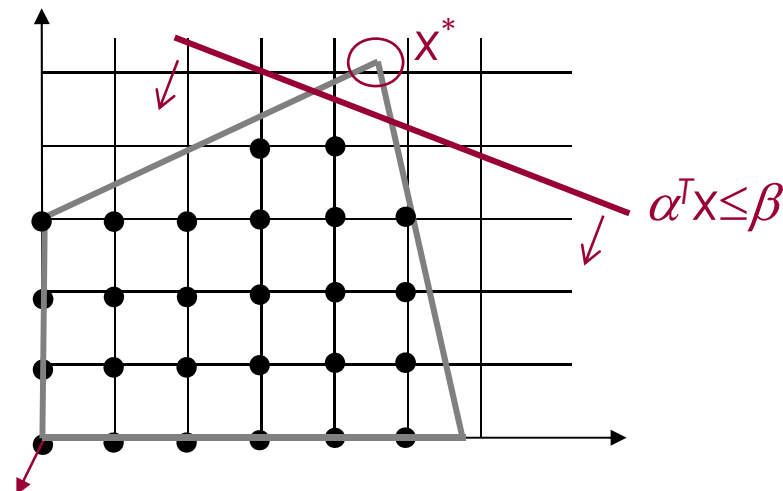
Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Algoritmi dei piani di taglio

Formalmente, indicando con x^* la soluzione ottima corrente (non ammissibile per P_0), con α^T e con β rispettivamente il vettore riga dei coefficienti e il termine noto del vincolo addizionale, un piano di taglio è una disuguaglianza del tipo $\alpha^T x \leq \beta$ tale che:

- ✓ $\alpha^T x^* > \beta$
- ✓ $\alpha^T x \leq \beta \quad \forall x \in \Omega(P_0)$





Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

**Algoritmi dei piani
di taglio**

Algoritmi dei piani di taglio

Ci sono molti modi per generare piani di tagli. Alcuni sono generali e valgono per ogni problema di PLI; altri sfruttano le proprietà di specifici problemi (e sono, in generale, più “efficaci”).

Nel seguito sarà descritta una procedura per la generazione di tagli di tipo generale ideata da Gomory.

Tagli di Gomory

E' possibile generare un taglio usando le informazioni associate alla tabella ottima del metodo del simplexso.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Tagli di Gomory

Si consideri un problema di PL in forma standard
(rilassato continuo di un problema di PLI)

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= c^T x \\ A x &= b \\ x &\geq 0_n \end{aligned}$$

Individuato un insieme di indici di base B (in particolare un insieme di indici di base B ottimo), questo problema di PL può essere scritto nella seguente forma (canonica)

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= c_B^T A_B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N) x_N \\ x_B + A_B^{-1} A_N x_N &= A_B^{-1} b \\ x_B &\geq 0_m, x_N \geq 0_{n-m} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{Min } z &= \bar{d} + \bar{c}_N^T x_N \\ x_B + \bar{A}_N x_N &= \bar{b} \\ x_B &\geq 0_m, x_N \geq 0_{n-m} \end{aligned}$$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplesso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Tagli di Gomory

Tabella ottima:

0_m^T	$\bar{c}_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$	$-\bar{d} = -c_B^T A_B^{-1} b$
I	$\bar{A}_N = A_B^{-1} A_N$	$\bar{b} = A_B^{-1} b$

In generale, sia x_h una variabile frazionaria, con h in posizione t nell'insieme B . Il t -esimo vincolo del problema (t -esima riga nella tabella ottima) è:

$$x_h + \sum_{j \in N} \bar{a}_{tj} x_j = \bar{b}_t \quad (1)$$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Tagli di Gomory

Per la non negatività delle variabili decisionali, se si rimpiazza \bar{a}_{tj} con la sua parte intera inferiore $\lfloor \bar{a}_{tj} \rfloor$, l'espressione precedente diventa:

$$x_h + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{tj} \rfloor x_j \leq \bar{b}_t \quad (2)$$

Per il problema di PLI c'è l'ulteriore vincolo sull'interezza delle variabili decisionali. Considerando anche questo vincolo, si può scrivere la seguente disuguaglianza valida (taglio di Gomory):

$$x_h + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{tj} \rfloor x_j \leq \lfloor \bar{b}_t \rfloor \quad (3)$$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Tagli di Gomory

Sottraendo (3) da (1) si ottiene una disuguaglianza diversa ma ugualmente valida: i tagli di Gomory in forma “frazionaria”:

$$\sum_{j \in N} (\bar{a}_{tj} - \lfloor \bar{a}_{tj} \rfloor) x_j \geq \bar{b}_t - \lfloor \bar{b}_t \rfloor \quad (4)$$

Questa disuguaglianza è un taglio:

- ✓ non è soddisfatta dalla soluzione ottima corrente
 - $\bar{b}_t - \lfloor \bar{b}_t \rfloor > 0$ (perché \bar{b}_t è frazionario)
 - $x_j = 0 \quad \forall j \in N$. La (4) diventa $0 \geq \bar{b}_t - \lfloor \bar{b}_t \rfloor$ (numero strettamente positivo) \rightarrow impossibile!
- ✓ nessuna soluzione a coordinate intere è eliminata (per costruzione).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Tagli di Gomory

Si precisa che anche la riga 0, relativa alla funzione obiettivo, può essere presa in considerazione per la generazione di tagli (strategia che non verrà adottata negli esempi numerici riportati di seguito).

Esempio 1

Sia dato il seguente problema di PLI

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -x_1 + x_2 \\ \text{s.v.} & \\ & x_1 \leq 1 \\ & -x_1 + 4x_2 \geq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \text{ int.} \end{array} \quad (P_0)$$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplesso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Tagli di Gomory

Rilassato continuo di P_0 in forma standard:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & z = -x_1 + x_2 \\ \text{S.V.} & \\ & x_1 + x_3 = 1 \\ & -x_1 + 4x_2 - x_4 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Risolvendo tale problema di PL si perviene alla seguente tabella ottima:

0	0	3/4	1/4	-1/2
1	0	1	0	1
0	1	1/4	-1/4	3/2



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Tagli di Gomory

La soluzione ottima del rilassato continuo di P_0 ha una componente frazionaria: $x_2=3/2$ ($h=2$).

$B=\{1,2\} \rightarrow t=2; N=\{3,4\}$.

Il taglio di Gomory è:

$$(\bar{a}_{23} - \lfloor \bar{a}_{23} \rfloor)x_3 + (\bar{a}_{24} - \lfloor \bar{a}_{24} \rfloor)x_4 \geq \bar{b}_2 - \lfloor \bar{b}_2 \rfloor$$

$$\left(\frac{1}{4} - 0\right)x_3 + \left(-\frac{1}{4} + 1\right)x_4 \geq \frac{3}{2} - 1$$

$$\frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 \geq \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2}$$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplessso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

**Algoritmi dei piani
di taglio**

Tagli di Gomory

Introducendo il vincolo addizionale (taglio di Gomory) la precedente tabella si trasforma nel seguente modo:

0	0	$3/4$	$1/4$	0	$-1/2$
1	0	1	0	0	1
0	1	$1/4$	$-1/4$	0	$3/2$
0	0	$-1/4$	$-3/4$	1	$-1/2$

La tabella è nella forma canonica duale. Si può applicare il metodo del simplessso duale. La riga di pivot è la terza, mentre la colonna di pivot è la quarta. Dopo l'operazione di pivot si perviene alla tabella riportata nel seguito.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Tagli di Gomory

0	0	2/3	0	1/3	-2/3
1	0	1	0	0	1
0	1	1/3	0	-1/3	5/3
0	0	1/3	1	-4/3	2/3

La soluzione ottima del rilassato continuo di P_0 (con il vincolo aggiuntivo) ha ancora x_2 frazionaria ($h=2$). $B=\{1,2,4\} \rightarrow t=2; N=\{3,5\}$. Il taglio di Gomory è:

$$(\bar{a}_{23} - \lfloor \bar{a}_{23} \rfloor)x_3 + (\bar{a}_{25} - \lfloor \bar{a}_{25} \rfloor)x_5 \geq \bar{b}_2 - \lfloor \bar{b}_2 \rfloor$$

$$\left(\frac{1}{3} - 0\right)x_3 + \left(-\frac{1}{3} + 1\right)x_5 \geq \frac{5}{3} - 1$$
$$\frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_5 \geq \frac{2}{3} \rightarrow -\frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_5 + x_6 = -\frac{2}{3}$$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Tagli di Gomory

Introducendo il vincolo addizionale (taglio di Gomory) la precedente tabella si trasforma nel seguente modo:

0	0	$2/3$	0	$1/3$	0	$-2/3$
1	0	1	0	0	0	1
0	1	$1/3$	0	$-1/3$	0	$5/3$
0	0	$1/3$	1	$-4/3$	0	$2/3$
0	0	$-1/3$	0	$-2/3$	1	$-2/3$

La tabella è nella forma canonica duale. Si può applicare il metodo del simplexso duale. La riga di pivot è la quarta, mentre la colonna di pivot è la quinta.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

**Algoritmi dei piani
di taglio**

Tagli di Gomory

Dopo l'operazione di pivot si perviene alla tabella riportata nel seguito.

0	0	1/2	0	0	1/2	-1
1	0	1	0	0	0	1
0	1	1/2	0	0	-1/2	2
0	0	1	1	0	-2	2
0	0	1/2	0	1	-3/2	1

La soluzione ottima del rilassato continuo di P_0 (con i due vincoli addizionali) ha componenti intere \rightarrow criterio di arresto soddisfatto.

L'ottimo è quindi rappresentato da $[x_1^* \ x_2^*]^T = [1 \ 2]^T$; il suo valore di funzione obiettivo è 1.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

**Algoritmi dei piani
di taglio**

Tagli di Gomory

Per chiarire meglio il concetto di taglio è utile vedere graficamente come l'algoritmo ha risolto il problema P_0 .

Occorre, a tale proposito, esprimere i vincoli aggiunti alla formulazione del rilassato di P_0 in funzione delle variabili decisionali x_1 e x_2 .

$$x_1 + x_3 = 1 \rightarrow x_3 = 1 - x_1$$

$$-x_1 + 4x_2 - x_4 = 5 \rightarrow x_4 = -x_1 + 4x_2 - 5$$

$$-\frac{1}{4}x_3 - \frac{3}{4}x_4 + x_5 = -\frac{1}{2}$$

↓

$$x_5 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 = -4 - x_1 + 3x_2$$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

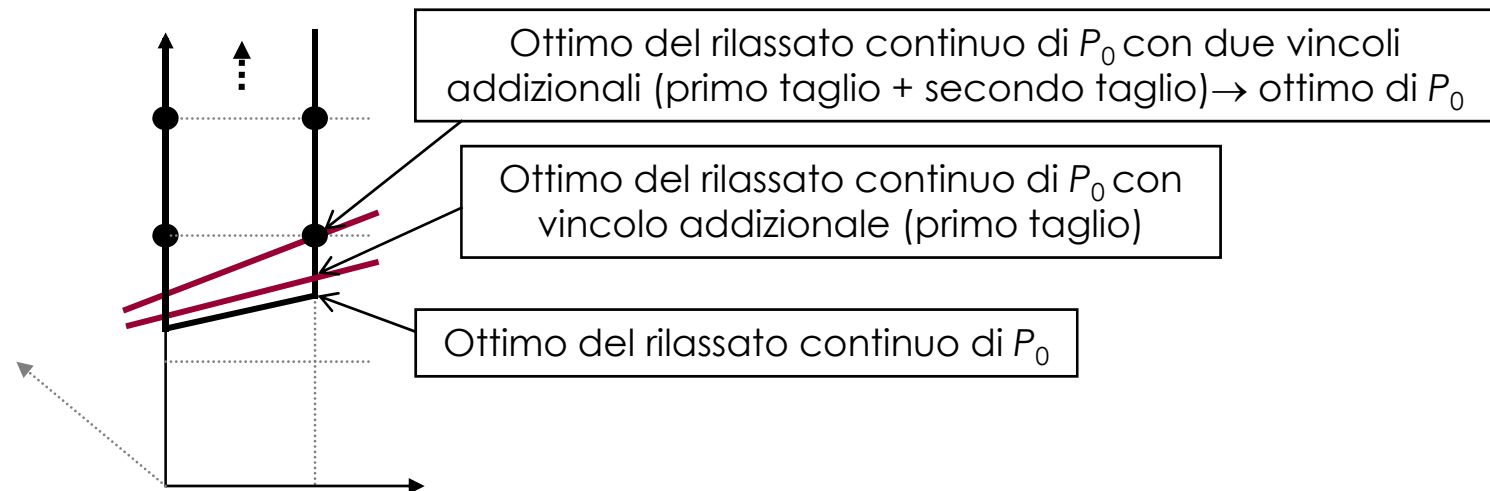
Tagli di Gomory

✓ Primo taglio di Gomory

$$\frac{1}{4}x_3 + \frac{3}{4}x_4 \geq \frac{1}{2} \rightarrow -x_1 + 3x_2 \geq 4$$

✓ Secondo taglio di Gomory

$$\frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_5 \geq \frac{2}{3} \rightarrow -x_1 + 2x_2 \geq 3$$





Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Tagli di Gomory

Esempio 2

Sia dato il seguente problema di PLI

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & x_1 + x_2 \\ \text{s.v.} & 2x_1 \leq 3 \\ & 2x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \text{ int.} \end{array} \quad (P_0)$$

Rilassato continuo di P_0 in forma standard:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & -x_1 - x_2 \\ \text{s.v.} & 2x_1 + x_3 = 3 \\ & 2x_2 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

**Algoritmi dei piani
di taglio**

Tagli di Gomory

Risolviendo il rilassato continuo di P_0 si perviene alla seguente tabella ottima:

0	0	1/2	1/2	3
1	0	1/2	0	3/2
0	1	0	1/2	3/2

La soluzione ottima del rilassato continuo di P_0 ha due componenti frazionarie. Si sceglie la prima (scelta arbitraria). $h=1$; $B=\{1,2\} \rightarrow t=1$; $N=\{3,4\}$.

Il taglio di Gomory è:

$$\frac{1}{2}x_3 \geq \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}x_3 + x_5 = -\frac{1}{2}$$

(poiché $x_3 = 3 - 2x_1$ esso equivale a $x_1 \leq 1$)



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simpleso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

**Algoritmi dei piani
di taglio**

Tagli di Gomory

Introducendo il vincolo addizionale (taglio di Gomory) la precedente tabella si trasforma nel seguente modo:

0	0	1/2	1/2	0	3
1	0	1/2	0	0	3/2
0	1	0	1/2	0	3/2
0	0	-1/2	0	1	-1/2

La tabella è nella forma canonica duale. Si può applicare il metodo del simpleso duale. L'elemento di pivot è quello in posizione (3,3). Dopo l'operazione di pivot si perviene alla tabella riportata nel seguito.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplex duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

**Algoritmi dei piani
di taglio**

Tagli di Gomory

0	0	0	1/2	1	5/2
1	0	0	0	1	1
0	1	0	1/2	0	3/2
0	0	1	0	-2	1

La soluzione ottima del rilassato continuo di P_0 con l'aggiunta del primo taglio ha una componente frazionaria: $x_2=3/2$ ($h=2$).

$B=\{1,2,3\} \rightarrow t=2; N=\{4,5\}$.

Il taglio di Gomory è:

$$\frac{1}{2}x_4 \geq \frac{1}{2} \rightarrow -\frac{1}{2}x_4 + x_6 = -\frac{1}{2}$$

(poiché $x_4 = 3 - 2x_2$ esso equivale a $x_2 \leq 1$)



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

**Algoritmi dei piani
di taglio**

Tagli di Gomory

Introducendo il vincolo addizionale (taglio di Gomory) la precedente tabella si trasforma nel seguente modo:

0	0	0	1/2	1	0	5/2
1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1/2	0	0	3/2
0	0	1	0	-2	0	1
0	0	0	-1/2	0	1	-1/2

La tabella è nella forma canonica duale. Si può applicare il metodo del simplexso duale. L'elemento di pivot è quello in posizione (4,4). Dopo l'operazione di pivot si perviene alla tabella riportata nel seguito.



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

Algoritmi dei piani
di taglio

Tagli di Gomory

0	0	0	0	1	1	2
1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	-2	0	1
0	0	0	1	0	-2	1

La soluzione ottima del rilassato continuo di P_0 (con i due vincoli addizionali) ha componenti intere \rightarrow criterio di arresto soddisfatto.

L'ottimo è quindi rappresentato da $[x_1^* \ x_2^*]^T = [1 \ 1]^T$; il suo valore di funzione obiettivo è 2 (problema originario di massimizzazione).



Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplesso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

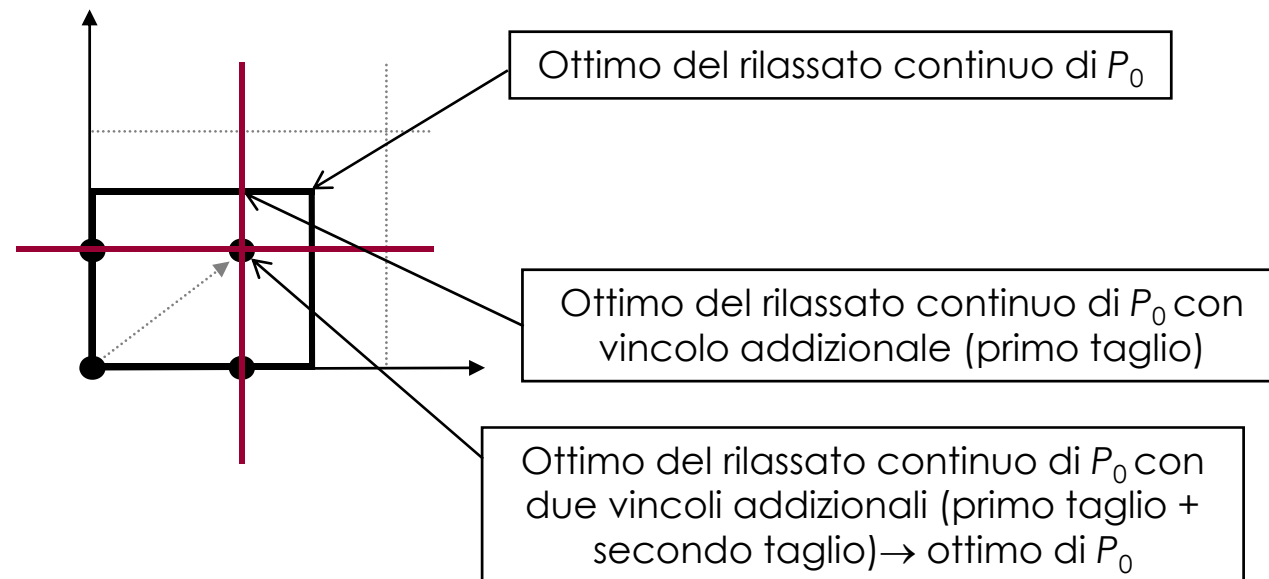
Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

**Algoritmi dei piani
di taglio**

Tagli di Gomory





Introduzione alla
teoria della dualità

Relazioni di
complementarietà

Coppia
primale-duale:
approfondimenti

Metodo del
simplexso duale

Interpretazione dei
problemi duali

Analisi di sensitività

Interpretazione
delle variabili duali
all'ottimo

Programmazione
Lineare Intera

Metodo di
Branch & Bound

**Algoritmi dei piani
di taglio**

Tagli di Gomory

Esercizio

Risolvere il seguente problema di PLI utilizzando l'algoritmo dei piani di taglio di Gomory:

Min z

$$\begin{aligned} \text{s.v.} \quad & z = -3x_1 - x_2 \\ & 8x_1 + 4x_2 \leq 28 \\ & -3x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ & x_1, \quad x_2 \geq 0 \\ & x_1, \quad x_2 \quad \text{int.} \end{aligned}$$

(Soluzione: $x_1^*=3$, $x_2^*=1$, $z^*=-10$)