Laboratorio di Ricerca Operativa
2020-2021

Esercitazione 3

ALGORITMO DEL SIMPLESSO - FASE II

secondaFase($\bar{x}_B$, $\mathcal{B}, \mathcal{N}$)**{**

unbounded=**false**; optimal=**false**; r=0; $x_B^{(0)} = \bar{x}_B$, $\mathcal{B}^{(0)} = \mathcal{B}, \mathcal{N}^{(0)} = \mathcal{N}$

while(!unbounded **and** !optimal)**{**

$\hat{c}^T_{N^{(r)}} = c^T_{N^{(r)}} - c^T_{B^{(r)}} {B^{(r)}}^{-1} N^{(r)}$

if($\hat{c}^T_{N^{(r)}} \geq 0$)

optimal=**true**;

else{

$k = \mathcal{N}(j) =$ **scegliVariabileEntranteInB**($\hat{c}^T_{N^{(r)}}$);

$d^{(r)} = {B^{(r)}}^{-1} A_k$

if($d_i^{(r)} \leq 0$)

unbounded=**true**;

else{

$(\bar{\delta}, h)$ =**scegliVariabileUscenteDaB**($x_B^{(r)}, d^{(r)}$);

$x_B^{(r+1)} = x_B^{(r)} - \bar{\delta}\ d^{(r)}$, $x_N^{(r+1)} = \bar{\delta}\mathbf{e}_j$;

$\mathcal{B}^{(r+1)} = \mathcal{B}^{(r)} \setminus \{h\} \cup \{k\}$ $\quad$ ($\mathcal{N}^{(r+1)} = \mathcal{N}^{(r)} \setminus \{k\} \cup \{h\}$);

r=r+1;

}

}

}

if(optimal)

return ($x^* = x^{(r)}, c^T x^* = c^T x^{(r)}$)

else

return ('Problem unbounded')

ESERCIZIO 1

$$P\begin{cases} max & 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 3x_4 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 4x_2 + 3x_4 = 6 \\ & x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \geq 0 \end{cases}$$

1) Verificare che l'insieme di indici $\mathcal{B} = \{2, 1\}$ forma una base ammissibile per P e calcolare la corrispondente sab $\bar{x}$.
2) Risolvere P applicando AS con punto iniziale $x^{(0)} = \bar{x}$

<u>Soluzione</u>

P non è in FS $\implies$ Trasformazione in FS.

$$P_{FS}\begin{cases} -min & -2x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 3x_4 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 4x_2 + 3x_4 = 6 \\ & x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$P_{FS}\begin{cases} min & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

$$A = [A_1 A_2 A_3 A_4] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad c^T = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4] = [-2 \quad -4 \quad -4 \quad 3]$$

ESERCIZIO 1 - 1

1) Verificare che l'insieme di indici $\mathcal{B} = \{2, 1\}$ forma una base ammissibile per P e calcolare la corrispondente sab $\bar{x}$.

$$A = [A_1 A_2 A_3 A_4] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad c^T = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4] = [-2 \quad -4 \quad -4 \quad 3]$$

Soluzione

Se $\mathcal{B} = \{2, 1\} \quad \Longrightarrow \mathcal{N} = \{3,4\} \quad B = [A_2 A_1] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = [A_3 A_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

B forma una base $\Leftrightarrow A_2 \;\; e \;\; A_1$ sono lin. ind. Poiché $\det(B) = -7 \neq 0 \quad \Longrightarrow B$ è una base

WARNING!!!

1) k vettori di $\mathbb{R}^q$ $v_1, v_2, \dots, v_k$ sono lin. ind $\Leftrightarrow$ l'unica soluzione dell'equazione

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = \mathbf{0}_q \quad (V\lambda = \mathbf{0}_q, \quad \text{con} \;\; V = [v_1 v_2, \dots, v_4])$$

è $\quad \lambda_1 = \lambda_2 =, \dots, = \lambda_k = 0$

2) La soluzione del sistema omogeneo dipende dal $\operatorname{rank}(V) \le \min\{k, q\}$ (teorema Rouche-Capelli)

2.a) se $k > q$ i vettori $v_1, v_2, \dots, v_k$ non sono sicuramente lin. ind.

2.b) se $k = q$ i vettori $v_1, v_2, \dots, v_k$ sono lin. ind $\Leftrightarrow \operatorname{rank}(V) = k = q \Leftrightarrow \det(V) \neq 0$

2.c) se $k < q$ occorre applicare la definizione 1) !!!!

ESERCIZIO 1 - 1

1) Verificare che l'insieme di indici $\mathcal{B} = \{2, 1\}$ forma una base ammissibile per P e calcolare la corrispondente sab $\bar{x}$

$$A = [A_1 A_2 A_3 A_4] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad c^T = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4] = [-2 \quad -4 \quad -4 \quad 3]$$

<u>Soluzione</u>

$$\mathcal{B} = \{2, 1\} \qquad \Longrightarrow \mathcal{N} = \{3,4\} \qquad B = [A_2 A_1] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = [A_3 A_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

B forma una base $\Leftrightarrow A_2$ e A_1 sono <u>lin. ind.</u> Poiché $\det(B) = -7 \neq 0 \implies B$ è una base

Calcoliamo la soluzione di base associata

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{bmatrix} \qquad \bar{x}_B = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 \end{bmatrix} = B^{-1} b \qquad \bar{x}_N = \begin{bmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}_B = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 \end{bmatrix} = B^{-1} b = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/7 \\ 10/7 \end{bmatrix} \geq 0$$

$\mathcal{B} = \{2, 1\}$ è una base ammissibile

ESERCIZIO 1 - 2

1) Risolvere P applicando AS con punto iniziale $x^{(0)} = \bar{x}$

$$A = [A_1 A_2 A_3 A_4] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$c^T = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4] = [-2 \quad -4 \quad -4 \quad 3]$$

<u>Soluzione</u>

<u>Iterazione</u> r=0

(per non appesantire la notazione, evitiamo di usare l'indice di iterazione su B, N ....)

$\mathcal{B} = \{2,1\}$, $\mathcal{N} = \{3,4\}$, $x_B^{(0)} = \begin{bmatrix} 8/7 \\ 10/7 \end{bmatrix}$

$$B = [A_2 A_1] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = [A_3 A_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad c_B^T = [c_2, c_1] = [-4, -2] \qquad c_N^T = [c_3, c_4] = [-4, 3]$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}N = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$z^{(0)}(x^{(0)}) = c_B^T x_B^{(0)} = [-4, -2]\begin{bmatrix} 8/7 \\ 10/7 \end{bmatrix} = -\frac{52}{7}$$

1) Verifica condizione di ottimalità soluzione corrente: (calcolo costi ridotti)

$\hat{c}_N^T = [\hat{c}_3, \hat{c}_4] = c_N^T - c_B^T B^{-1} N = [c_3, c_4] - [c_2, c_1]\, B^{-1}N = [-4, 3] + {}^1/_7\, [-4, -2] \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} =$

$= [-4, 3] + {}^1/_7\, [4, 18] = [-{}^{24}/_7, {}^{39}/_7]$. Soluzione non ottima $\hat{c}_3 < 0$, la variabile x_3 può entrare in base $k = 3 = \mathcal{N}(1)$, $\quad j = 1$

2)Verifica condizione condizione di illimitatezza (calcolo della direzione d)

$$d = (B^{-1}N)\hat{\mathbf{e}}_j = \left(-\frac{1}{7}\begin{bmatrix}1 & -6\\ -4 & 3\end{bmatrix}\right)\hat{\mathbf{e}}_1 = \begin{bmatrix}-{}^1/_7\\ {}^4/_7\end{bmatrix} \nleq 0$$ (condizione non verificata)

3) calcolo dello spostamento ammissibile lungo $-d$

$$x_B^{(0)} = \begin{bmatrix}{}^8/_7\\ {}^{10}/_7\end{bmatrix} \qquad \bar{\delta} = \min_{1\le i\le 2}\left\{\frac{x_{\mathcal{B}(i)}^{(0)}}{d_i}\ |d_i > 0\right\} = \left\{\frac{x_{\mathcal{B}(2)}^{(0)}}{d_2}\right\} = \left\{\frac{10}{7}\frac{7}{4}\right\} = \frac{5}{2}$$

4) Cambio di base

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix}x_2^{(1)}\\ x_1^{(1)}\\ x_3^{(1)}\\ x_4^{(1)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_B^{(0)} - \bar{\delta}d\\ \bar{\delta}\mathbf{e}_j\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_{\mathcal{B}(1)}^{(0)} - \bar{\delta}d_1\\ x_{\mathcal{B}(2)}^{(0)} - \bar{\delta}d_2\\ \bar{\delta}\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}{}^8/_7 + {}^5/_{14}\\ {}^{10}/_7 - {}^{20}/_{14}\\ {}^5/_2\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}{}^3/_2\\ 0\\ {}^5/_2\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}^{(1)} = \mathcal{B}^{(0)} \setminus \{1\} \cup \{3\} \qquad \left(\ \mathcal{N}^{(1)} = \mathcal{N}^{(0)} \setminus \{3\} \cup \{1\}\ \right)$$

$$z^{(1)}(x^{(1)}) = z^{(0)}(x^{(0)}) + \hat{c}_3\bar{\delta} = -\frac{52}{7} - \frac{24}{7}\frac{5}{2} = -16$$

ESERCIZIO 1 - 2

$$A = [A_1A_2A_3A_4] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$c^T = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4] = [-2 \quad -4 \quad -4 \quad 3]$$

Soluzione

Iterazione r=1

$\mathcal{B} = \{2,3\}$, $\mathcal{N} = \{1,4\}$, $x_B^{(1)} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 5/2 \end{bmatrix}$

$B = [A_2A_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad N = [A_1A_4] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad c_B^T = [c_2, c_3] = [-4, -4]$ $\quad c_N^T = [c_1, c_4] = [-2, 3]$

$$B^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}N = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

$z^{(1)}(x^{(1)}) = c_B^T x_B^{(1)} = -16$

1) Verifica condizione di ottimalità soluzione corrente: (calcolo costi ridotti)

$\hat{c}_N^T = [\hat{c}_1, \hat{c}_4] = c_N^T - c_B^T B^{-1}N = [c_1, c_4] - [c_2, c_3]\, B^{-1}N = [-2, 3] + {}^1/_4\, [-4, -4] \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -7 & 3 \end{bmatrix} =$

$= [-2, 3] + {}^1/_4\, [32, \ 0] = [6, 3]$. Stop! Soluzione ottima.

$x_B^* = x_B^{(1)} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 5/2 \end{bmatrix} \qquad z^* = -16$

Un forma Tabellare per l'Algoritmo del Simplesso

Si può dimostrare che ogni iterazione dell'AS può essere svolta operando opportune combinazioni lineari sulle righe di una tabella T (Tabella del Simplesso o Tableau)

Ad ogni iterazione r T rappresenta il problema in forma canonica rispetto alla base corrente

$$
\begin{array}{ccccccc}
c_B^T \bar{x}_B & + & min & 0_m^T x_B & + & \hat{c}_N^T x_N & & \\
 & & & I_{mxm} x_B & + & B^{-1} N x_N & = & B^{-1} b \\
 & & & x_B & & x_N & \geq & 0
\end{array}
$$

T

$I_{m\times m}$	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
0_m^T	$\hat{c}_N^T$	$-c_B^T B^{-1} b$

Nota
In T, non necessariamente le colonne della matrice Identità devono essere le prime m e non necessariamente devono essere contigue

Tableau in forma canonica rispetto alla base iniziale $\mathcal{B} = \{2, 1\}$

$$
\begin{array}{rl}
-\frac{52}{7} + \min & 0x_1 + 0x_2 - \frac{24}{7}x_3 + \frac{39}{7}x_4 \\
 & x_2 - \frac{1}{7}x_3 + \frac{6}{7}x_4 = \frac{8}{7} \\
 & x_1 + \frac{4}{7}x_3 - \frac{3}{7}x_4 = \frac{10}{7} \\
 & x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \geq 0
\end{array}
$$

Colonne della matrice Identità relative alle variabili di base

Colonne di $B^{-1}N$

0	1	$-1/7$	$6/7$	$8/7$
1	0	$4/7$	$-3/7$	$10/7$
0	0	$-24/7$	$39/7$	$52/7$

Valore delle variabili Di base

Costi ridotti

Valore f.o. cambiato di segno

Un forma Tabellare per l'Algoritmo del Simplesso

In genere, il Tableau T si può scrivere come

$$
\begin{array}{cccccc|c}
t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1k} & \cdots & t_{1\,n} & \boxed{\begin{matrix} t_{1\,n+1} \\ t_{2\,n+1} \\ \vdots \\ t_{h\,n+1} \\ \vdots \\ t_{m\,n+1} \end{matrix}} \\
t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2k} & \cdots & t_{2\,n} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
t_{h1} & t_{h2} & \cdots & t_{hk} & \cdots & t_{hn} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\
t_{m\,1} & t_{m\,2} & \cdots & t_{m\,k} & \cdots & t_{m\,n} & \\
\hline
t_{m+1\,1} & t_{m+1\,2} & \cdots & t_{m+1\,k} & \cdots & t_{m+1\,n} & \boxed{t_{m+1\;n+1}}
\end{array}
$$

Valore delle variabili
Di base

Valore della f.o.
cambiato di segno

Costi ridotti (=0 per le variabili di base)

Il cambio di base ed il ripristino della forma canonica - 1

Supponiamo di essere all'iterazione r dell'Algoritmo del Simplesso

$$
T^{(r)} \quad
\begin{array}{cccccc|c}
t_{11}^{(r)} & t_{12}^{(r)} & \cdots & t_{1k}^{(r)} & \cdots & t_{1n}^{(r)} & t_{1\,n+1}^{(r)} \\
t_{21}^{(r)} & t_{22}^{(r)} & \cdots & t_{22}^{(r)} & \cdots & t_{2n}^{(r)} & t_{2n}^{(r)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
t_{h1}^{(r)} & t_{h2}^{(r)} & \cdots & t_{hk}^{(r)} & \cdots & t_{hn}^{(r)} & t_{h\,n+1}^{(r)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
t_{m1}^{(r)} & t_{m2}^{(r)} & \cdots & t_{mk}^{(r)} & \cdots & t_{mn}^{(r)} & t_{m\,n+1}^{(r)} \\
\hline
t_{m+1\,1}^{(r)} & t_{m+1\,2}^{(r)} & \cdots & t_{m+1\,k}^{(r)} & \cdots & t_{m+1\,n}^{(r)} & t_{m+1\;\,n+1}^{(r)}
\end{array}
$$

1. Scegli la prima colonna k tale che $t_{m+1\,k}^{(r)} < 0$ (la variabile k può entrare in base). La colonna k è detta «colonna di Pivot» (regola di Bland)

2. Scegli prima la riga h tale che il rapporto $\frac{t_{i\,n+1}^{(r)}}{t_{i\,k}^{(r)}}$ $i = 1, \ldots, m$ $t_{i\,k}^{(r)} > 0$ sia minimo (la variabile che attualmente è in base nel vincolo h lascerà la base). La riga h è detta «riga di Pivot» (regola di Bland)

3. L'elemento $t_{hk}^{(r)}$ è detto «elemento di Pivot» o semplicemente «Pivot»

Il cambio di base ed il ripristino della forma canonica - 2

La forma canonica rispetto alla nuova base in cui la variabile k è entrata in base al posto della variabile che era in base sulla riga h, si ottiene effettuando le seguenti operazioni

1. $t_{hj}^{(r+1)} = \frac{t_{hj}^{(r)}}{t_{hk}^{(r)}} \quad j = 1, \dots, n+1$ (la nuova riga h si ottiene dividendo la riga di Pivot per l'elemento di Pivot)

2. $t_{ij}^{(r+1)} = t_{ij}^{(r)} - t_{ik}^{(r)}\, t_{hj}^{(r+1)}. \quad j = 1, \dots, n+1 \quad i = 1, \dots, m+1,\ i \neq h.$ (ogni riga i diversa da h si ottiene sottraendo dalla riga i all'iterazione r la riga h all'iterazione r+1 moltiplicata per il corrispondente elemento sulla colonna di Pivot)

$$
T^{(r)} \quad
\begin{array}{ccccccc|c}
t_{11}^{(r+1)} & t_{12}^{(r+1)} & \dots & 0 & \dots & t_{1n}^{(r+1)} & & t_{1\,n+1}^{(r+1)} \\
t_{21}^{(r+1)} & t_{22}^{(r+1)} & \dots & 0 & \dots & t_{2n}^{(r+1)} & & t_{2n}^{(r+1)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
t_{h1}^{(r+1)} & t_{h2}^{(r+1)} & \dots & 1 & \dots & t_{hn}^{(r+1)} & & t_{h\,n+1}^{(r+1)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots \\
t_{m1}^{(r+1)} & t_{m2}^{(r+1)} & \dots & 0 & \dots & t_{mn}^{(r+1)} & & t_{m\,n+1}^{(r+1)} \\
\hline
t_{m+1\,1}^{(r+1)} & t_{m+1\,2}^{(r+1)} & \dots & 0 & \dots & t_{m+1\,n}^{(r+1)} & & t_{m+1\;n+1}^{(r+1)}
\end{array}
$$

Esempio 1 – Iterazione 1 – Fase II

T^0

0	1	$-{}^{1}/_{7}$	${}^{6}/_{7}$	${}^{8}/_{7}$
1	0	${}^{4}/_{7}$	$-{}^{3}/_{7}$	${}^{10}/_{7}$
0	0	$-{}^{24}/_{7}$	${}^{39}/_{7}$	${}^{52}/_{7}$

Variabili in base: $x_1 = {}^{10}/_{7}, \quad x_2 = {}^{8}/_{7}$

Variabili fuori base: $x_3 = 0, x_4 = 0$

Valore f.o.: $z = -{}^{52}/_{7}$

1) Verifica ottimalità: base (soluzione) corrente non ottima $t_{33}^0 = -{}^{24}/_{7} < 0, \quad k = 3$

2) Verifica illimitatezza: $t_{13}^0 = -{}^{1}/_{7} < 0, \ t_{23}^0 = {}^{4}/_{7} > 0$ non verificata

3) Calcolo incremento: $\bar{\delta} = \min_{1 \le i \le 2} \left\{ \frac{t_{i5}^0}{t_{i3}^0} \mid t_{i3}^0 > 0 \right\} = \min \left\{ \frac{t_{25}^0}{t_{23}^0} \right\} = \left\{ \frac{10}{7} \ \frac{7}{4} \right\} = \frac{5}{2}$

in corrispondenza della riga $h = 2 \quad \Longrightarrow Pivot\ (h,k) = (2,3)$

la variabile x_1 uscirà dalla base.

4) Cambio base

T^1

${}^{1}/_{4}$	1	0	${}^{3}/_{4}$	${}^{3}/_{2}$
${}^{7}/_{4}$	0	1	$-{}^{3}/_{4}$	${}^{5}/_{2}$
6	0	0	3	16

$T_1^1 = T_1^0 - t_{13}^0 \times T_2^1 = T_1^0 + {}^{1}/_{7}\, T_2^1$

$T_2^1 = \frac{T_2^0}{t_{23}^0} = 7\frac{T_2^0}{4}$

$T_3^1 = T_3^0 - t_{33}^0 \times T_2^1 = T_3^0 + {}^{24}/_{7} \times T_2^1$

Esempio 1 - Iterazione 2 - Fase II

$$T^1 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1/4 & 1 & 0 & 3/4 & 3/2 \\ 7/4 & 0 & 1 & -3/4 & 5/2 \\ \hline 6 & 0 & 0 & 3 & 16 \end{array}\right]$$

Variabili in base: $x_2 = 3/2$, $x_3 = 5/2$

Variabili fuori base: $x_1 = 0, x_4 = 0$

Valore f.o.: $z = -16$

1) Verifica ottimalità: base (soluzione) corrente ottima $t^1_{3k} \geq 0 \;\; k = 1,2,3,4$. STOP
2) $x^* = (0, 3/2, 5/2, 0)^T \qquad z^* = -16$

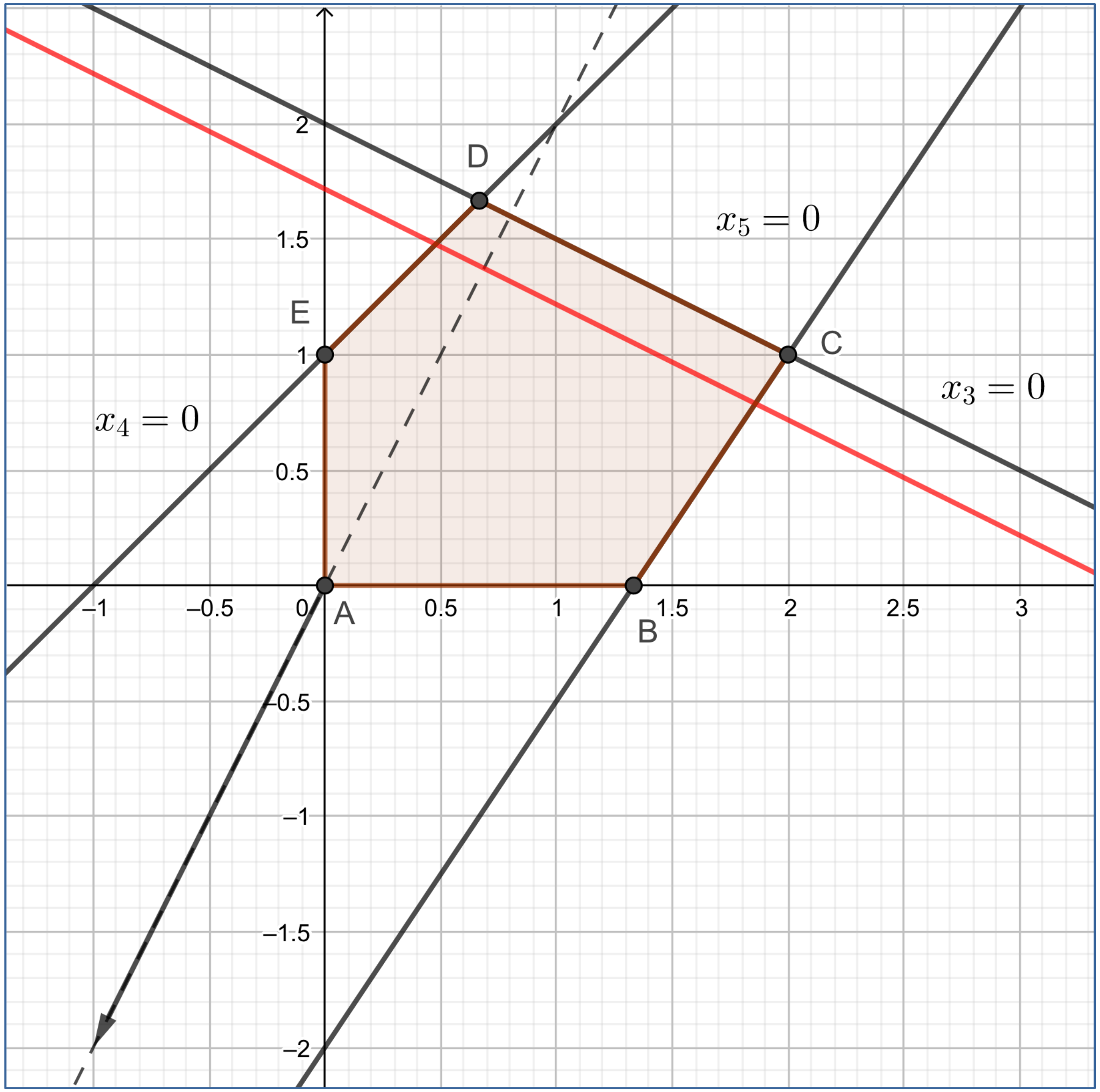
Esercizio 2

$$P\begin{cases} \min & -2x_1 - 4x_2 & & \\ & x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 + x_2 & \leq & 1 \\ & 3x_1 - 2x_2 & \leq & 4 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

Tableau Finale

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & \frac{3}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 1 & \frac{3}{8} & 2 \\ 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 2 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & \color{red}{0} & 8 \end{array}$$

Soluzioni ottime multiple



Esercizio 3 (Esercitazione 3)

$$P\begin{cases}\max & 5x_1+2x_2 & & \\ & 2x_1+x_2 & \geq & 3\\ & 3x_1-x_2 & \geq & 0\\ & 2x_1-4x_2 & \leq & 6\\ & x_1,x_2 & \geq & 0\end{cases}
\qquad
P_{FS}\begin{cases}-min & -5x_1-2x_2+0x_3+0x_4+0x_5 & & \\ & 2x_1+x_2-x_3 & = & 3\\ & 3x_1-x_2-x_4 & = & 0\\ & 2x_1-4x_2+x_5 & = & 6\\ & x_1\quad x_2\quad x_3\quad x_4\quad x_5 & \geq & 0\end{cases}$$

Per P_{FS} è nota una base ammissibile $\mathcal{B}=\{1,4,5\}$. Determinare la soluzione ottima di P_{FS} (P) a partire dalla base $\mathcal{B}=\{1,4,5\}$

1) Scrivere il TABLEAU T in forma Canonica rispetto alla base $\mathcal{B}=\{1,4,5\}$. Due possibilità:

$$\begin{array}{c:c|c} I_{m\times m} & B^{-1}N & B^{-1}b \\ \hline 0^T_m & \bar{c}^T_N & -c_B^T B^{-1}b \end{array}$$

colonne in base accorpate (1)

$$\begin{array}{c|c} B^{-1}A & B^{-1}b \\ \hline c^T - c_B^T B^{-1}A & -c_B^T B^{-1}b \end{array}$$

colonne in base non accorpate (2)

Useremo la forma (2)

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 2 & -4 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix}3\\0\\6\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}=\{1,4,5\} \Rightarrow B=[A_1 \vdots A_4 \vdots A_5]=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N}=\{1,3\} \Rightarrow N=[A_2 \vdots A_3]=\begin{bmatrix} 1 & -1\\ 1 & 0\\ -4 & 0\end{bmatrix}$$

$$c_B^T=[c_1,c_4,c_5]=[-5,0,0]$$

$$c_N^T=[c_2,c_3]=[-2,0]$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 3/2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}N = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 5/2 & -3/2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{c}^T = c^T - c_B^T B^{-1} A =$$

$$= [-5, -2, 0, 0, 0] - [-5, 0, 0]\, B^{-1}A =$$

$$= [-5, -2, 0, 0, 0] - [-5, -5/2, +5/2, 0, 0]$$

$$= [0, \underbrace{1/2, -5/2}_{\hat{c}_N^T}, 0, 0]$$

$$x_B^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 9/2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad c_B^T x_B^{(0)} = -15/2 .$$

$T^{(0)}$

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	1/2	-1/2	0	0	3/2
0	5/2	-3/2	1	0	9/2
0	-5	1	0	1	3
0	1/2	-5/2	0	0	15/2

$x_{B(1)} = x_1 = 3/2$

$x_{B(2)} = x_4 = 9/2$

$x_{B(3)} = x_5 = 3$

Iterazione 1 : Verifica ottimalità base corrente

$\exists\, k \in \mathcal{N} : \hat{c}_k < 0 ,\ k = 3 \ (T_{43}^{(0)} < 0) \Rightarrow$

Soluzione corrente non ottima

Verifica condizione di illimitatezza

$\overline{T}_{13}^{(0)} = -1/2 < 0 \qquad \overline{T}_{23}^{(0)} = -3/2, \quad \overline{T}_{33}^{(0)} = 1 > 0$

Non verificata.

x_3 può entrare in base. Massimo incremento consentito

$$\bar{\delta} = \min_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \frac{x_{B(i)}}{d_i} \mid d_i > 0 \right\}$$

$$\bar{\delta} = \min_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \frac{\overline{T}_{i6}^{(0)}}{T_{i3}^{(0)}} \mid \overline{T}_{i3}^{(0)} > 0 \right\} = \left\{ \frac{\overline{T}_{36}^{(0)}}{\overline{T}_{33}^{(0)}} \right\} = \left\{ \frac{3}{1} \right\} = 3$$

Il valore minimo di $\bar{\delta}$ è raggiunto in corrispondenza della riga $h = 3$ $\Rightarrow$

La variabile $x_{B(3)}$ (variabile attualmente in base nella riga $h=3$) lascerà la base

$k = 3$ colonna di PIVOT

$h = 3$ riga di PIVOT

$\overline{T}_{hk}^{(0)} = \overline{T}_{33}^{(0)}$ PIVOT

$T^{(0)}$

1	1/2	-1/2	0	0	3/2
0	5/2	-32	1	0	9/2
0	-5	1	0	1	3
0	1/2	-5/2	0	0	15/2

Cambio di base.: di

1) Dividi la riga $h=3$ per $T_{hk}^{(0)} = T_{33}^{(0)}$
2) Calcola tutte le altre righe $i \neq h$ di T^1 come: $T^1_i = T^0_i - T^1_h * T^{(0)}_{ik}$

$T^{(1)}$

1	-2	0	0	1/2	3	$T^1_1 = T^0_1 - T^1_3 * T^0_{13}$
0	-2	0	1	3/2	9	$T^1_2 = T^0_2 - T^1_3 * T_{23}$
0	-5	1	0	1	3	
0	-12	0	0	0	+15	$T^1_4 = T^0_4 - T^1_3 * T^0_{43}$

Nuova base $B = \{1, 4, 3\}$

$x_{B(1)} = x_1 = 3 \qquad x_{B(2)} = x_4 = 9 \qquad x_{B(3)} = x_3 = 3$

$x' = (3, 0, 3, 9, 0)^T \qquad c^T x' = -15$

NOTA:

$$\Delta z = c^T x' - c^T x^0 = -15 + 15/2 = -15/2 = \hat{c}_3 \bar{\delta}$$

$$\Rightarrow \quad c^T x' = c^T x^{(0)} + \hat{c}_3 \bar{\delta} = -\frac{15}{2} - 3\frac{5}{2} = -15$$

Iterazione 2

Verifica ottimalità: $\exists k \in N : \hat{c}_k = \bar{T}^{(1)}_{4k} < 0, \; k=2$

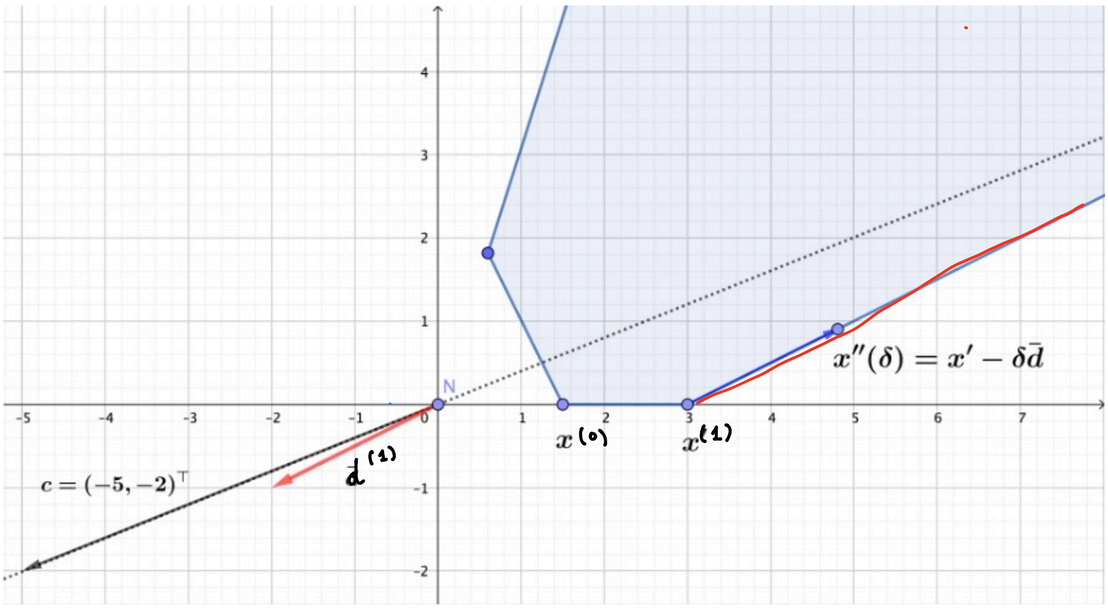
Soluzione corrente non ottima

Verifica illimitatezza:

$\bar{T}^{(1)}_{12} = -2 < 0 \qquad \bar{T}^{(1)}_{22} = -2 < 0 \qquad \bar{T}^{(1)}_{23} = -5 < 0$

STOP! Problema inferiormente illimitato

ANALISI GRAFICA



Esercizio 3 (Esercitazione 3). Risolvere P con l'Algoritmo del Simplesso

$$P \begin{cases} \min & -2x_1 - 4x_2 & & \\ & x_1 + 2x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 + x_2 & \leq & 1 \\ & 3x_1 - 2x_2 & \leq & 4 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

F.S. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \min \; & -2x_1 - 4x_2 + \emptyset x_3 + \emptyset x_4 + \emptyset x_5 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ & 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 4 \\ & x_1 \; \dots \; x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

NOTA

Tutti i vincoli di P sono di " $\leq$ "

Tutti i termini noti dei vincoli sono ≥ 0

Il P_{FS} è in forma canonica rispetto alla base

$\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$ con $B = I$

Tableau Iniziale $\Rightarrow$

$$T^{(0)} \quad \begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ \hline -2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$x^{(0)} = (0, 0, 4, 1, 4)^T$

$c^T x = \emptyset$

Iterazione 1

Verifica ottimalità: soluzione non ottima $T^{(0)}_{41}$ e $T^{(0)}_{42} < 0$

Due variabili candidate ad entrare in base: x_1 e x_2

Scegliamo x_1 (Regola di Bland) $\Rightarrow k = 1$

Verifica illimitatezza: $T^{0}_{11} = 1 > 0$ Criterio non verificato

Calcolo di $\bar{\delta} = \min \left\{ \frac{T^0_{16}}{T^0_{11}} , \frac{T^0_{26}}{T^0_{21}} \right\} = \min \left\{ \frac{4}{1} , \frac{4}{3} \right\} = 4/3$

in corrispondenza di $h=3$

$\Rightarrow$ $k=1$ colonna di pivot $\qquad T^0_{12} = 3$ PIVOT

$h=2$ riga di pivot

la variabile $k=1$ entra in base; la variabile $B(h)=B(3)=x_5$ lascerà la base.

CAMBIO BASE

$T^{(0)}$

1	2	1	0	0	4
-1	1	0	1	0	1
3	-2	0	0	1	4
-2	-4	0	0	0	0

$$T^1_3 = \frac{T^{(0)}_3}{T^{(0)}_{31}}$$

T'

0	8/3	1	0	-1/3	8/3
0	1/3	0	1	1/3	7/3
1	-2/3	0	0	1/3	4/3
0	-16/3	0	0	2/3	8/3

$T'_1 = T^0_1 - T'_3 \cdot T^0_{11}$

$T'_2 = T^0_2 - T'_3 \cdot T_{21}$

$T'_4 = T^0_4 - T'_3 \cdot T^0_{41}$

$x^1 = (4/3, 0, 8/3, 7/3, 0)^T \qquad c^T x' = -8/3$

Iterazione 2. $\qquad k = 2$

Verifica ottimalità: soluzione non ottima: $T^{(1)}_{42} = \hat{c}_2 < 0$

Verifica illimitatezza: $T^1_{21} = 8/3 > 0$

criterio non verificato

calcolo di $\bar{\delta} = \min \left\{ \frac{\bar{T}_{16}^{(1)}}{\bar{T}_{12}^{(1)}}, \frac{\bar{T}_{26}^{(1)}}{\bar{T}_{22}^{(1)}} \right\} = \min \{ 1, 7 \} = 1$

in corrispondenza di $h = 1$.

$\Rightarrow$ PIVOT $\bar{T}_{21} = 3$

La variabile $k=2$ entrerà in base; la variabile $B(h) = B(1) = x_3$ lascerà la base.

CAMBIO DI BASE

$$T^2 \quad \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 3/8 & 0 & -1/8 & 1 \\ 0 & 0 & -1/8 & 1 & 3/8 & 2 \\ 1 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \bar{T}_{1}^{(2)} = \bar{T}_1^{(1)}/t_{12}^{(1)} \\ \bar{T}_2^{(2)} = \bar{T}_2^{(1)} - \bar{T}_{22}^{(1)}\bar{T}_1^{(2)} \\ \bar{T}_3^{(2)} = \bar{T}_3^{(1)} - \bar{T}_{32}^{(1)}\bar{T}_1^{(2)} \\ \bar{T}_4^{(2)} = \bar{T}_4^{(1)} - \bar{T}_{42}^{(1)}\bar{T}_1^{(2)} \end{array}$$

STOP: condizione di ottimalità verificata.

$x^* = x^{(2)} = (2, 1, 0, 1, 0)^T \qquad c^T x^* = -8$

NOTA x_5 fuori base e $\hat{c}_4 = \bar{T}_{44}^{2} = 0$

Se x_5 entra in base assumendo un qualsiasi valore $\bar{\delta} \geq 0 \Rightarrow \Delta z = \bar{\delta}\, \hat{c}_4 = 0$

$\Rightarrow$ P ammette soluzioni ottime multiple

Teo fondamentale: Se esistono soluzioni ottime, almeno una sarà di base (x^*)

Per stabilire se esistono altre soluzioni ottime di base diverse da x^*, operiamo il cambio di base

$k = 5$

$$\bar{\delta} = \min \left\{ \frac{\bar{T}^{(2)}_{26}}{T^2_{25}}, \frac{\bar{T}^2_{36}}{T^2_{35}} \right\} = \min \left\{ 2 \cdot 8/3, 2 \cdot 4 \right\} = \frac{16}{3} \quad h=2.$$

$\Rightarrow$ x_5 entra in base. Lascerà la base la variabile $B(h) = B(2) = 4$

Pivot in $(2;4)$

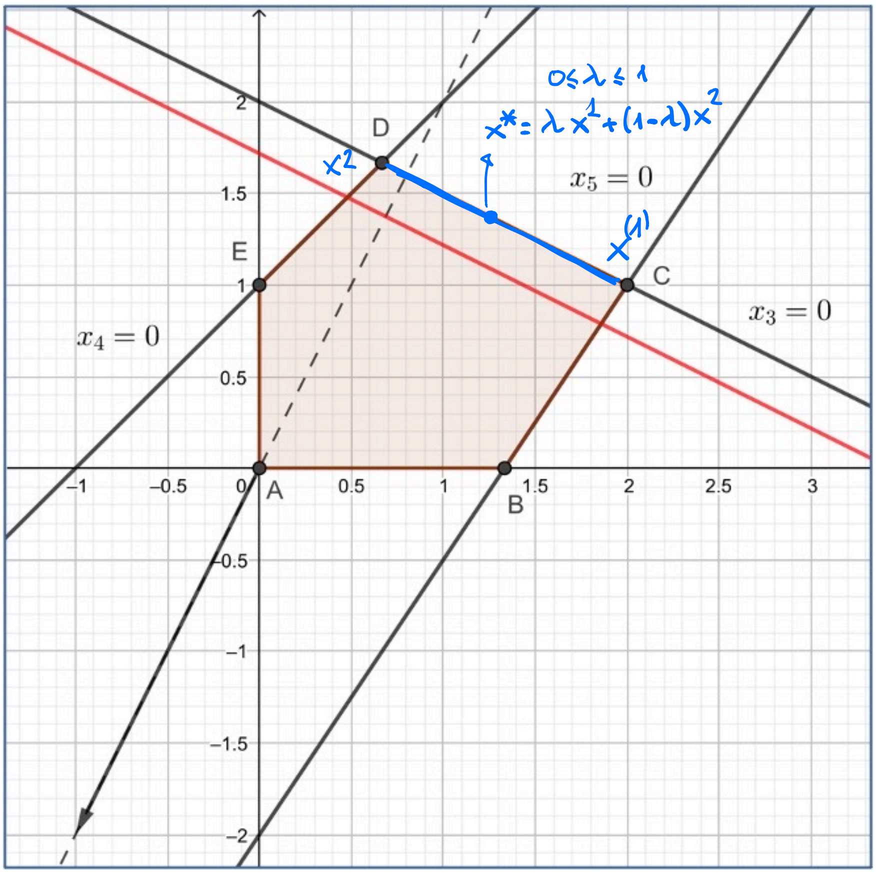
$$T^{(3)} \quad \begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & 8/3 & 1 & 16/3 \\ 1 & 0 & 1/3 & -7/3 & 0 & 2/3 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 8 \end{array}$$

$$x^{(3)} = (2/3, 5/3, 0, 0, 16/3)^T$$

Tutte le soluzioni ottime

$$x^* = \lambda x^{(2)} + (1-\lambda) x^{(3)} \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

combinazione convessa di $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$



$0 \le \lambda \le 1$
$x^* = \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2$
D
x^2
$x_5 = 0$
E
$x^{(1)}$
C
$x_3 = 0$
$x_4 = 0$
A
B