Esercizio 1 - 19-11-2020

Si consideri il seguente problema ($\mathcal{P}$) di Programmazione Lineare

$$(\mathcal{P})\begin{cases} \max\ z(x) = & 2x_1 + 3x_2 \\ & x_1 - 3x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_i \geq 0 \quad i = 1,2 \end{cases}$$

1. Analizzare le proprietà dei punti $x_A^\top = (0,0)$, $x_B^\top = (3,1)$, $x_C^\top = (5,3)$ stabilendo se si tratti di soluzioni ammissibili di base per ($\mathcal{P}$). Quali tra i punti dati **non** possono sicuramente essere soluzioni ottime?
2. Disegnare sul piano Cartesiano la regione ammissibile di $\mathcal{P}$ e verificare la correttezza delle risposte date al punto precedente.
3. Risolvere $\mathcal{P}$ applicando il metodo del simplesso. Riportare le varie iterazioni dell'algoritmo sulla figura della regione ammissibile evidenziando, per ciascuna di esse, la variabile uscente e quella entrante in base.

$$P_{FS}\begin{cases} -\min & -2x_1 - 3x_2 \\ & x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ & 3x_1 + x_2 + x_5 = 10 \\ & x_1 \dots x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$(x_A)_{FS} = (0,0,4,2,10)^T$ ammissibile

$(x_B)_{FS} = (3,1,4,4,0)^T$ ammissibile

$(x_C)_{FS} = (5,3,8,4,-7)^T$ non ammissibile.

$(x_C)_{FS}$ non può essere soluzione ottima

$(x_A)_{FS}$ è sab $\iff$ lin ind $A_3\ A_4\ A_5$ ok.

$(x_B)_{FS}$ è sab $\iff$ lin ind A_1, A_2, A_3, A_4.

perché A_1, A_2, A_3, A_4 sono 4 vettori di $\mathbb{R}^3$, cui sono lin. dip

$\rightarrow$ $(x_B)_{FS}$ non di base.

$$Ax \le b, \quad b \ge 0$$

$$Ax + Is = b$$

$$B^{(0)} = \{3, 4, 5\} \qquad x_B^{(0)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{N} = \{1, 2\} \qquad N = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{(0)} \quad \begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ \boxed{3} & 1 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ \hline -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$t^0_{41} = \hat{c}_1 < 0$ soluzione corrente non ottima.

$t^0_{11} = 1 > 0$ condizione illimitatezza non verificata

$$\bar{\delta} = \min \left\{ \frac{t^0_{16}}{t^0_{11}}, \frac{t^0_{36}}{t^0_{31}} \right\}$$

$$= \min \left\{ 4, \frac{10}{3} \right\} = 10/3 .$$

riga $h = 3$

Pivot $(h = 3, k = 1)$

$$T^{(1)} \quad \begin{array}{ccccc|c} 0 & -10/3 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 4/3 & 0 & 1 & 1/3 & 16/3 \\ 1 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 10/3 \\ \hline 0 & -7/3 & 0 & 0 & 2/3 & 20/3 \end{array}$$

$$\bar{T}_1^{(1)} = \bar{T}_1^{(0)} - \bar{T}_3^{(1)} t_{11}^{(0)}$$
$$\bar{T}_2^{(1)} = \bar{T}_2^{(0)} - \bar{T}_3^{(1)} t_{21}^{(0)}$$
$$\bar{T}_3^{(1)} = \bar{T}_3^{(0)} / t_{31}^{0}$$
$$\bar{T}_4^{(1)} = \bar{T}_4^{(0)} - \bar{T}_3^{(1)} t_{41}^{(0)}$$

$$B^{(0)} = \{3,4,5\} \to B^{(1)} = \{3,4,1\}$$

$$c^T x^{(0)} = \phi \quad \to \quad c^T x^{(1)} = -20/3$$

$$x_B^{(1)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 16/3 \\ 10/3 \end{bmatrix}$$

Iterazione 2

$t_{42}^{(1)} = -7/3 = \hat{c}_2$ soluzione corrente non ottima $k = 2$

$t_{12}^{(1)} = -10/3 < 0$, $t_{22}^{(1)} = 4/3 > 0 \Rightarrow$ non cond illimitatezza

$$\bar{\delta} = \min \left\{ \frac{t_{26}^{(1)}}{t_{22}^{(1)}}, \frac{t_{36}^{(1)}}{t_{32}^{(1)}} \right\} = \min \left\{ \frac{16}{3}\frac{3}{4}, \frac{10}{3}\,3 \right\} = 4$$

in corrispondenza di $h = 2$ Pivot $= (2,2)$

$$T^{(2)} \quad \begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 5/2 & 1/2 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & 1/4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/4 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 7/4 & 5/4 & +16 \end{array}$$

$$\overline{T}_1^{(2)} = \overline{T}_1^{1} - \overline{T}_1 \, t_{12}^{1}$$

$$\overline{T}_2^{(2)} = \overline{T}^{(1)} / t_{22}^{(1)}$$

$$\overline{T}_3^{(2)} = \overline{T}_3^{(1)} - \overline{T}_1^{(2)} t_{32}^{1}$$

$$\overline{T}_4^{(2)} = \overline{T}_4^{(1)} - \overline{T}_1^{(2)} t_{42}^{1}$$

Stop soluzione ottima

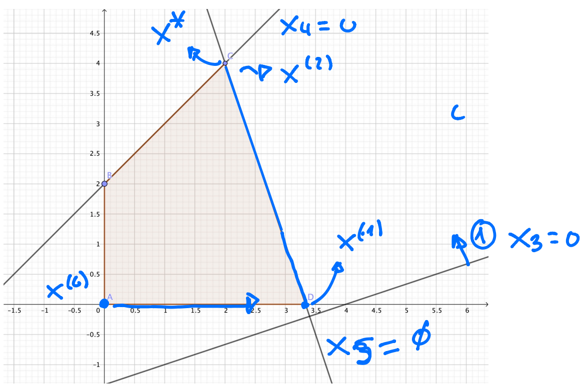
$$x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (2, 4, 14, 0, 0, 0)^T$$

$$c^T x^* = -16 \quad (\text{per il PFS})$$

$$B^{(1} = 3, 4, 1\} \longrightarrow B = \{3, 2, 1\}$$

$$c^T x^{(1)} = -\frac{20}{3} \longrightarrow c^T x^{(2)} = -16$$

$$x_B^{(2)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$



$B^{(0)} = \{3, 4, 5\}$

$x^{(0)}$

$\downarrow$

$B^{(1)} = \{3, 4, 1\}$

B $x^{(1)}$

$B^{(1)} = \{3, 2, 1\}$

$x^{(2)}$

Risolvere il problema $\underline{P}$

$$\underline{P}\begin{cases} \min \; x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_6 = 1 \\ x_1 \; \ldots \; x_6 \geq 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO 2

19/11/2020

$P_{FS} \equiv P$.

Nota che $B^{(0)} = \{4, 5, 6\}$ è una base ammissibile per $\underline{P}$ con $B = I_{3\times 3}$.

I vincoli sono già in forma canonica rispetto a $B^{(0)}$; la f.o. non è in forma canonica

$$\hat{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \qquad B^{-1} = B = I$$

$$B^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad c_B^T = [c_4, c_5, c_6] = [1, 1, 1]$$

$$c_N^T = [1, 2, 1]$$

$$\hat{c}_N^T = [\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3] = [1, 2, 1] - [4, 3, -3] = [-3, -1, 4]$$

$$x_B^{(0)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad c^T x^{(0)} = 6$$

$$\left.\begin{array}{cccccc|c}
1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\
2 & -1 & -5 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
-3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & -6 \\
\uparrow_{k=1} & & & & & &
\end{array}\right.
\begin{array}{l}
\\ \rightarrow h=2 \\ \\ \\ \\
\end{array}
\qquad T^{(0)}$$

$$\bar{\delta} = \min\left\{ \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{1} \right\} = 1 \begin{array}{l} \nearrow h = 2 \\ \searrow h = 3 \end{array}$$

Indeterminazione nella scelta della variabile uscente dalla base ⇒ Bland: uscirà la variabile in base nella riga h di indice minimo, cioè x_5.

La variabile x_6 resterà in base a livello nullo ⇒ alla prossima iterazione la soluzione sarà degenere

$$\left.\begin{array}{cccccc|c}
0 & 5/2 & 11/2 & 1 & -1/2 & 0 & 2 \\
1 & -1/2 & -5/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1 \\
0 & 5/2 & 3/2 & 0 & -1/2 & 1 & 0 \\
\hline
0 & -5/2 & -7/2 & 0 & 3/2 & 0 & -3 \\
 & \uparrow_{k=2} & & & & &
\end{array}\right.
\begin{array}{l}
\\ T^{(1)} \\ \leftarrow h=3 \\ \\ \\
\end{array}$$

$$x_B^{(1)} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c^T x^{(1)} = +3$$

In $T^{(1)}$: $\hat{c}_2 < 0 \Rightarrow x_2$ può entrare in base.

$t_{12}^{(1)} > 0 \Rightarrow$ condizione di illimitatezza non verificata

$$\bar{\delta} = \min\left\{ 2 \cdot \frac{2}{5},\ 0 \cdot \frac{2}{5} \right\} = 0 \Rightarrow h = 3$$

x_6 variabile uscente dalla base

$$T^{(2)}: \quad \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -11/5 & 0 & 2/5 & 1/5 & 1 \\ 0 & 1 & 3/5 & 0 & -1/5 & 2/5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$x_B^{(2)} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad c^T x^{(2)} = 3$$

In $T^{(2)}$: $\hat{c}_3 < 0$ soluzione non ottima

: $t^{(2)}_{13} > 0$ condizione P2. Illimitato non verificata

$\bar{s} = 0 \qquad h = 3$

0	-20/3	0	1	4/3	-11/3		2
1	11/3	0	0	-1/3	5/3		1
0	5/3	1	0	-1/3	2/3		0
0	10/3	0	0	1/3	5/3		-3

$T^{(3)} = T^*$

STOP

$x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T = (1, 0, 0, 2, 0, 0)^T$

$c^T x^* =$

Ricapitolando

$B^0 = \{4, 5, 6\} \longrightarrow \boxed{B^{(1)} = \{4, 1, 6\} \longrightarrow B^{(2)} = \{4, 1, 2\} \downarrow B^{(3)} = B^* = \{4, 1, 3\}}$

BASI DEGENERI

Tre basi associate allo stesso sub

1 ottima $B^{(3)}$

2 non ottime.

In pratica già in $B^{(1)}$ l'algoritmo era sul vertice ottimo ma non "lo ha riconosciuto" come tale!

Questo significa che la condizione di ottimalità $\hat{c}_N^T \geq 0$ per le soluzioni ottime degeneri non è condizione necessaria: si può essere all'ottimo ma $\hat{c}_N^T \ngeq 0$.

Se la soluzione ottima è non degenere $\hat{c}_N^T \geq 0$ è condizione necessaria e sufficiente di ottimalità (LEZIONE 6, SLIDE 8).

Risolvere $\underline{P}$ a partire dalla base $\mathcal{B}^0 = \{2,5\}$

$$\underline{P} \begin{cases} \min & 6x_1 + 6x_2 - 12x_3 \\ & -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq 3 \\ & 3x_1 - x_2 - 3x_3 \geq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{ESERCIZIO} \\ 3 \\ 19/11/2020 \end{array}}$$

$$P_{FS} \begin{cases} \min & 6x_1 + 6x_2 - 12x_3 \\ & -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 2 \\ & -3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 = 1 \\ & x_1 \dots x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$\mathcal{B}^{(0)} = \{2,5\}$ sappiamo essere una base amm.

$$B = [A_2\ A_5] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = [A_1, A_3, A_4] = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}N = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1/2 \\ -2 & 4 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad x_B^{(0)} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sol. degenere

$$c^T x^{(0)} = 6$$

$\hat{c}_N^T = [\hat{c}_1, \hat{c}_3, \hat{c}_4] = [c_1, c_3, c_4] - [6, 0] B^{-1} N =$

$\hat{c}_N^T = [6, -12, 0] - [-6, -6, -3] =$

$= [12, -6, 3]$

$$T^{(0)} \quad \begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & -1 & -1/2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & 1/2 & 1 & 0 \\ \hline 12 & 0 & -6 & 3 & 0 & -6 \end{array}$$

$\hat{c}_3 < 0 \quad x_k = x_3$ può entrare in base.

$\bar{\delta} = 0$ sulla riga $h = 2 \Rightarrow x_6$ lascerà la base

$$T^{(1)} \quad \begin{array}{ccccc|c} -3/2 & 1 & 0 & -3/8 & 1/4 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1 & 1/8 & 1/4 & 0 \\ \hline 9 & 0 & 0 & 15/4 & 3/2 & -6 \end{array}$$

Siamo all'ottimo $x^* = x^{(1)} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T$

$c^T x^* = 6 \qquad = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$