Laboratorio di Ricerca Operativa 2020-2021

Esercitazione 2

Check Point

1. L’insieme ammissibile di un problema di PL (sia in FS che non in FS) è un poliedro.

2. La soluzione ottima di un problema di PL (sia in FS che non in FS), se esiste, è sempre su un vertice della regione ammissibile
   a) Analisi geometrica di problemi in 2 variabili
   b) Teorema Fondamentale della PL

3. sab $\Leftrightarrow$ punti estremi $\Leftrightarrow$ vertici

4. Algoritmo per risolvere PL: itera sulle sab (vertici) alla ricerca della sab (vertice) ottimo, se esiste.

Esercitazione 2

1. Soluzioni di base
2. Adiacenza algebrica e adiacenza geometrica
3. Interpretazione geometrica delle soluzioni ammissibili di base degeneri
4. Esercizi

Soluzioni ammissibili di base di P_{FS} (vertici di $\Omega(P_{FS})$)

$$P\begin{cases}\max & x_1 + 2x_2 & & \\ & 2x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ & -2x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 + x_2 & \geq & 1 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0\end{cases}$$

$$P_{FS}\begin{cases}-min & -x_1 & - & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & & \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 4 \\ & -2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & = & 1 \\ \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0\end{cases}$$

Soluzioni ammissibili di base di P_{FS}

$$Bx_B \quad = \quad b - Nx_N \qquad x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

Per $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$, sottomatrice di A, non singolare

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad m = 3, n = 5$$

Numero di basi possibili

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$$

Esercizio Soluzioni ammissibili di base di P_{FS} (vertici di $\Omega(P_{FS})$)

$$P\begin{cases} \max & x_1 + 2x_2 & & \\ & 2x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ & -2x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 + x_2 & \geq & 1 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

$$P_{FS}\begin{cases} -min & -x_1 & - & 2x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & & \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 4 \\ & -2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & & & & & - & x_5 & = & 1 \\ \end{cases}$$

$$x_1 \quad , \quad x_2 \quad , \quad x_3 \quad , \quad x_4 \quad , \quad x_5 \qquad \geq \quad 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$m = 3, n = 5$

Numero di basi possibili $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$

Le possibili sottomatrici $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ di A sono tutte basi(vedi appendice per le soluzioni di base associate): 5 danno luogo a soluzioni ammissibili di base; 5 danno luogo a soluzioni non ammissibili di base.

Gli insiemi di indici di base $\mathcal{B}_i$ $i = 1,..,10$ possono essere ordinati in modo tale che due insiemi consecutivi nella sequenza ordinata, differiscono esattamente per un solo indice.

$\mathcal{B}_1 = \{1,2,3\} \longrightarrow \mathcal{B}_4 = \{2,3,5\} \longrightarrow \mathcal{B}_5 = \{2,4,5\} \longrightarrow \mathcal{B}_3 = \{1,2,5\} \longrightarrow \mathcal{B}_9 = \{1,4,5\}$

$\mathcal{B}_{10} = \{1,3,5\} \longleftarrow \mathcal{B}_6 = \{3,4,5\} \longleftarrow \mathcal{B}_7 = \{2,3,4\} \longleftarrow \mathcal{B}_8 = \{1,3,4\} \longleftarrow \mathcal{B}_2 = \{1,2,4\}$

Basi che differiscono per un solo indice sono dette adiacenti

Basi adiacenti

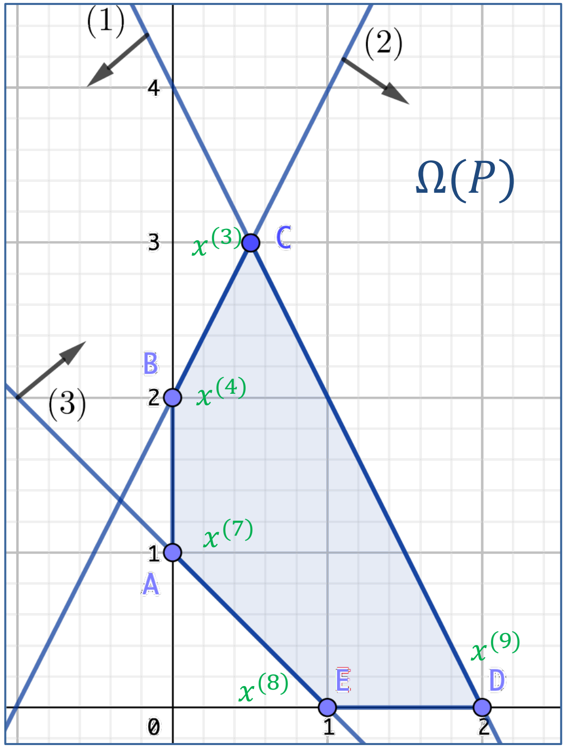
$$
\begin{tikzcd}
\color{red}{\mathcal{B}_1 = \{1,2,3\}} \arrow[r] & \color{green}{\mathcal{B}_4 = \{2,3,5\}} \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & \color{red}{\mathcal{B}_5 = \{2,4,5\}} \arrow[r] & \color{green}{\mathcal{B}_3 = \{1,2,5\}} \arrow[r] & \color{green}{\mathcal{B}_9 = \{1,4,5\}} \arrow[d] \arrow[dl] \\
\color{red}{\mathcal{B}_{10} = \{1,3,5\}} \arrow[u] & \color{red}{\mathcal{B}_6 = \{3,4,5\}} \arrow[l] & \color{green}{\mathcal{B}_7 = \{2,3,4\}} \arrow[l] \arrow[ul] & \color{green}{\mathcal{B}_8 = \{1,3,4\}} \arrow[l] & \color{red}{\mathcal{B}_2 = \{1,2,4\}} \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_7 = \{2,3,4\} \arrow[r] & \mathcal{B}_4 = \{2,3,5\} \arrow[r] & \mathcal{B}_3 = \{1,2,5\} \arrow[d] \\
\mathcal{B}_8 = \{1,3,4\} \arrow[u] & & \mathcal{B}_9 = \{1,4,5\} \arrow[ll]
\end{tikzcd}
$$

Anche le sole Basi Ammissibili sono adiacenti.

I vertici di $\Omega(P_{FS})$?

Adiacenza algebrica ed adiacenza geometrica



sab di P_{FS} = Vertici di $\Omega(P_{FS})$

$$\mathcal{B}_7) \quad x^{(7)} = (0,1,3,1,0)^T$$

$$\mathcal{B}_4) \quad x^{(4)} = (0,2,2,0,1)^T$$

$$\mathcal{B}_3) \quad x^{(3)} = (\frac{1}{2}, 3,0,0, \frac{5}{2})^T$$

$$\mathcal{B}_9) \quad x^{(9)} = (2,0,0,6,1)^T$$

$$\mathcal{B}_8) \quad x^{(8)} = (1,0,2,4,0)^T$$

Vertici di $\Omega(P)$

$$A = (0, 1)^T$$

$$B = (0, 2)^T$$

$$C = (\tfrac{1}{2}, 3)^T$$

$$D = (2, 0)^T$$

$$E = (1, 0)^T$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{B}_7 = \{2,3,4\} & \longrightarrow & \mathcal{B}_4 = \{2,3,5\} & \longrightarrow & \mathcal{B}_3 = \{1,2,5\} \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ \mathcal{B}_8 = \{1,3,4\} & \longleftarrow & & \longleftarrow & \mathcal{B}_9 = \{1,4,5\} \end{array}$$

Basi Adiacenti

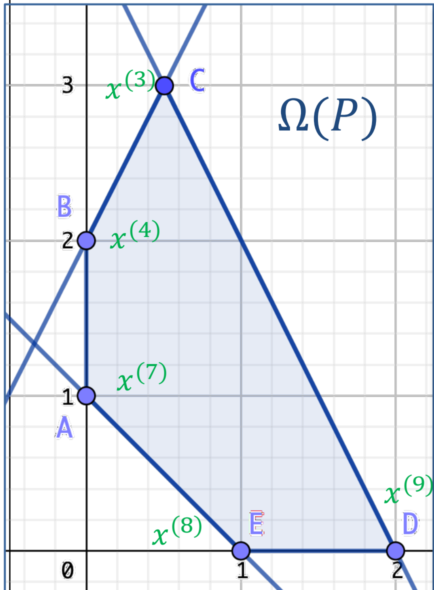
$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ E & \longleftarrow & & \longleftarrow & D \end{array}$$

Vertici Adiacenti

Corrispondenza biunivoca tra vertici e sab

Importanza dell'adiacenza delle soluzioni di base

$$c^T = [-1, -2, 0, 0, 0]$$



$$x^{(7)} = (0,1,3,1,0)^T \quad c^T x^{(7)} = -2$$

$$x^{(4)} = (0,2,2,0,1)^T \quad c^T x^{(4)} = -4$$

$$x^{(3)} = (\frac{1}{2}, 3, 0, 0, \frac{5}{2})^T \quad c^T x^{(3)} = -\frac{13}{2}$$

$$x^{(9)} = (2,0,0,6,1)^T \quad c^T x^{(9)} = -2$$

$$x^{(8)} = (1,0,2,4,0)^T \quad c^T x^{(8)} = -1$$

Sia x^0 una soluzione ammissibile di base (vertice) di valore $c^T x^0$

1) r=1; $x^r = x^0$
2) Se x^r soddisfa la condizione di arresto, STOP.
3) Altrimenti calcola una soluzione ammissibile di base x^{r+1} adiacente (vertice adiacente) ad x^r tale che $c^T x^{r+1} \leq c^T x^r$.
4) $r = r + 1$. GOTO 2

Condizione di arresto:
ottimalità
illimitatezza

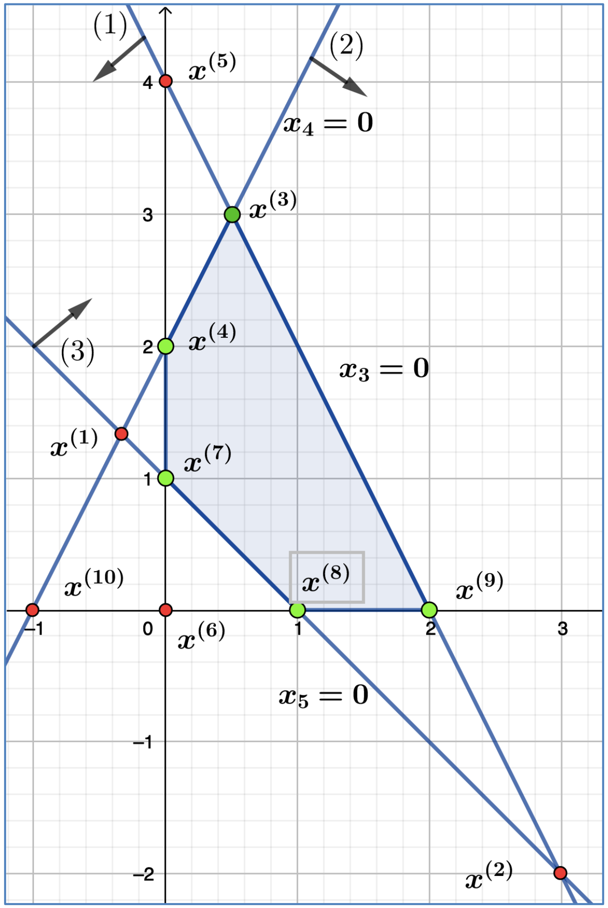
Calcolo base adiacente

$$\mathcal{B}^r = \{j_1, j_2, \dots, j_m\} \to x_B^r \qquad \mathcal{N}^r = \{j_{m+1}, \dots, j_n\} \to x_N^r$$

$$j_h \in \mathcal{B}^r \qquad j_k \in \mathcal{N}^r$$

$$\mathcal{B}^{r+1} = \mathcal{B}^r \setminus \{j_h\} \cup \{j_k\} \xrightarrow{sempre\ ?} x_B^{r+1} \qquad \mathcal{N}^{r+1} = \mathcal{N}^r \setminus \{j_k\} \cup \{j_h\} \to x_N^{r+1}$$

Cambio di base



$$x^{(7)} = (0,1,3,1,0)^T$$

$$x^{(4)} = (0,2,2,0,1)^T$$

$$x^{(3)} = (\frac{1}{2}, 3,0,0, \frac{5}{2})^T$$

$$x^{(9)} = (2,0,0,6,1)^T$$

$$x^{(8)} = (1,0,2,4,0)^T$$

Ammissibili

$$x^{(1)} = (-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3}, 0,0)^T$$

$$x^{(2)} = (3, -2, 0, 10 , 0)^T$$

$$x^{(5)} = (0, 4, 0, -2, 5)^T$$

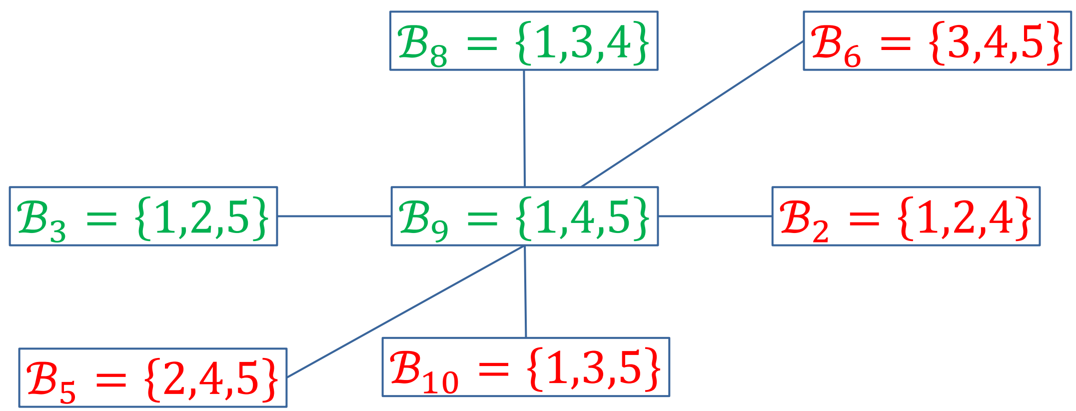
$$x^{(6)} = (0, 0, 4, 2, -1)^T$$

$$x^{(10)} = (-1,0,6,0,-2)^T$$

Non ammissibili

Basi adiacenti di

$\mathcal{B}_9 = \{1,4,5\}$



Esercizio 2 - Determinare le soluzioni di base

$$P \begin{cases} \max & 3x_1 + x_2 & & \\ & x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 + 2x_2 & \leq & 9 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

$$P_{FS} \begin{cases} -min & -3x_1 & - & x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & & \\ & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 6 \\ & & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 3 \\ & x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & x_5 & = & 9 \\ & x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & & x_5 & \geq & 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$m = 3, n = 5$

Numero di basi possibili $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$

$\mathcal{B}_1 = \{1,2,3\}$ $\mathcal{B}_2 = \{1,2,4\}$ $\mathcal{B}_3 = \{1,2,5\}$ $\mathcal{B}_4 = \{1,3,4\}$ $\mathcal{B}_5 = \{1,3,5\}$

$\mathcal{B}_6 = \{1,4,5\}$ $\mathcal{B}_7 = \{2,3,4\}$ $\mathcal{B}_8 = \{2,3,5\}$ $\mathcal{B}_9 = \{2,4,5\}$ $\mathcal{B}_{10} = \{3,4,5\}$

Tra le corrispondenti matrici $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

6 danno luogo a soluzioni ammissibili di base

4 danno luogo a soluzioni non ammissibili di base

1 è una non base

Esercizio 1 – Determinare le soluzioni di base

$$P\begin{cases} max & 3x_1 + x_2 & & \\ & x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 + 2x_2 & \leq & 9 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

$$P_{FS}\begin{cases} -min & -3x_1 & - & x_2 & + & 0x_3 & + & 0x_4 & + & 0x_5 & & \\ & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 6 \\ & & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 3 \\ & x_1 & + & 2x_2 & & & & & + & x_5 & = & 9 \\ & x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & & x_5 & \geq & 0 \end{cases}$$

Soluzioni ammissibili di base di P_{FS}
Vertici di $\Omega(P_{FS})$

$\mathcal{B}_1)\quad x^{(1)} = (3,3,0,0,0)^T$

$\mathcal{B}_2)\quad x^{(2)} = (3,3,0,0,0)^T$

$\mathcal{B}_3)\quad x^{(3)} = (3,3,0,0,0)^T$

$\mathcal{B}_8)\quad x^{(8)} = (0,3,3,0,3)^T$

$\mathcal{B}_{10})\quad x^{(10)} = (0,0,6,3,9)^T$

$\mathcal{B}_6)\quad x^{(6)} = (6,0,0,3,3)^T$

Vertici di $\Omega(P)$

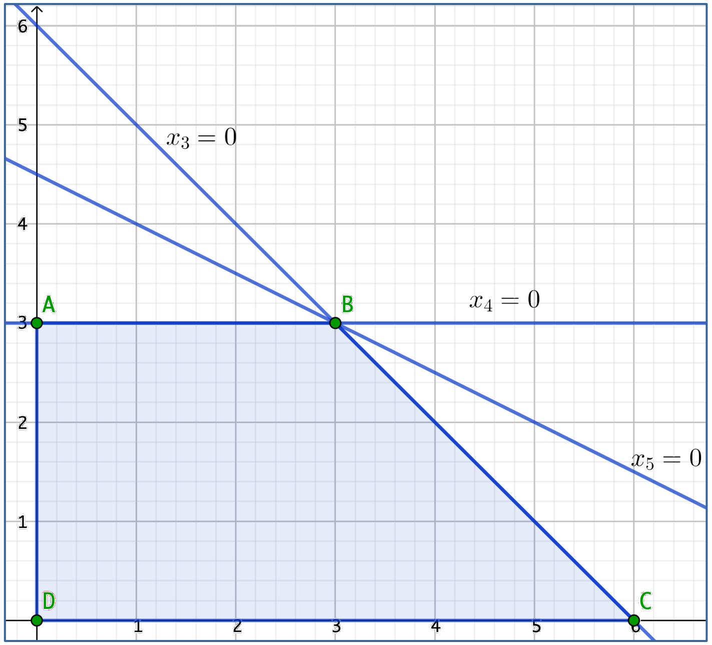
$B = (3,3)^T$

$A = (0, 3)^T$

$D = (0,0)^T$

$C = (6,0)^T$

Soluzioni di base degeneri



$\mathcal{B}_1)\quad x^{(1)} = (3{,}3{,}0{,}0{,}0)^T$

$\mathcal{B}_2)\quad x^{(2)} = (3{,}3{,}0{,}0{,}0)^T$

$\mathcal{B}_3)\quad x^{(3)} = (3{,}3{,}0{,}0{,}0)^T$

$\mathcal{B}_8)\quad x^{(8)} = (0{,}3{,}3{,}0{,}3)^T$

$\mathcal{B}_{10})\quad x^{(10)} = (0{,}0{,}6{,}3{,}9)^T$

$\mathcal{B}_6)\quad x^{(6)} = (6{,}0{,}0{,}3{,}3)^T$

$B = (3{,}3)^T$

$A = (0, 3)^T$

$D = (0{,}0)^T$

$C = (6{,}0)^T$

$\mathcal{B}_3 = \{1,2,5\} \rightarrow \mathcal{B}_2 = \{1,2,4\} \rightarrow \mathcal{B}_3 = \{1,2,3\}$

Basi Adiacenti

$\mathcal{B}_6 = \{1,4,5\} \leftarrow \mathcal{B}_{10} = \{3,4,5\} \leftarrow \mathcal{B}_8 = \{2,3,5\}$

B

Vertici Adiacenti

C ← D ← A

Corrispondenza non biunivoca con soluzioni degeneri

Soluzioni di base degeneri

$c^T = [-3, -1, 0, 0, 0]$

$\mathcal{B}_1)$	$x^{(1)} = (3,3,0,0,0)^T$	$c^T x^{(1)} = -10$
$\mathcal{B}_2)$	$x^{(2)} = (3,3,0,0,0)^T$	$c^T x^{(2)} = -10$
$\mathcal{B}_3)$	$x^{(3)} = (3,3,0,0,0)^T$	$c^T x^{(3)} = -10$
$\mathcal{B}_8)$	$x^{(8)} = (0,3,3,0,3)^T$	$c^T x^{(8)} = -3$
$\mathcal{B}_{10})$	$x^{(10)} = (0,0,6,3,9)^T$	$c^T x^{(10)} = 0$
$\mathcal{B}_6)$	$x^{(6)} = (6,0,0,3,3)^T$	$c^T x^{(6)} = -18$

In presenza di soluzioni degeneri l'algoritmo potrebbe rimanere intrappolato in un «loop» infinito, soprattutto quando ad essere degenere è la soluzione ottima

Schema di Algoritmo

Sia x^0 una soluzione ammissibile di base di valore $c^T x^0$

1) r=1; $x^r = x^0$
2) Se x^r soddisfa la condizione di arresto, STOP.
3) Altrimenti calcola una soluzione ammissibile di base x^{r+1} adiacente ad x^r tale che $c^T x^{r+1} \leq c^T x^r$.
4) $r = r + 1$. GOTO 2

Soluzione: Adottare regole «anti-cycling»
(che per fortuna esistono!)


YOUR JOURNEY BEGINS

Algoritmo del Simplesso

$$P_{FS}\begin{cases}\min & c^T x & & \\ & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0\end{cases}$$

$x, c \in \mathbb{R}^n$
$b \in \mathbb{R}^m$
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

P_{FS} soddisfa le ipotesi usuali

Fase I

1. Inizializzazione *(verifica che* $\Omega(P_{FS})$ sia non vuota)

```
    if(Ω(P_FS) = ∅){
        return ('P_FS inammissibile');
        exit;
    }
    else
        calcola sab x̄;
```

Fase II

2. Test Ottimalità

```
    if(x̄ è soluzione ottima){
        return (x* = x̄, z(x*) = c^T x̄ )
        exit;
    }
```

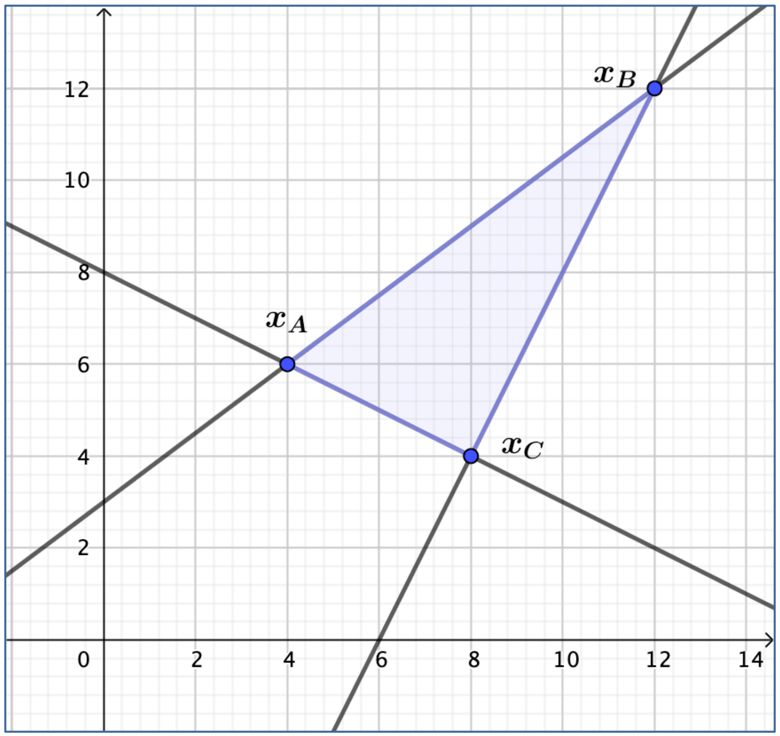
3. Cambio Base

```
    if((esiste sab x adiacente ad x̄) & (c^T x ≤ c^T x̄)){
        x = x̄;
        GOTO 2;
    }
    else{
        return ('P_FS inferiormente illimitato')
        exit;
    }
```

Algoritmo del Simplesso - FASE II: Criterio (Test) di ottimalità per sab.

$$P \begin{cases} \min & -2x_1 + 3x_2 & & \\ & x_1 + 2x_2 & \geq & 16 \\ & -3x_1 + 4x_2 & \leq & 12 \\ & 2x_1 - x_2 & \leq & 12 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

$$P_{FS} \begin{cases} -min & -2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 & & \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 16 \\ & -3x_1 + 4x_2 + x_4 & = & 12 \\ & 2x_1 - x_2 + x_5 & = & 12 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 \end{cases}$$



Tre basi ammissibili

$\mathcal{B}_A = \{1,2,5\}$ $\quad x_A = (4, 6, 0, 0, 10)^T$

$\mathcal{B}_B = \{1,2,3\}$ $\quad x_B = (12, 12, 20, 0, 0)^T$

$\mathcal{B}_C = \{1,2,4\}$ $\quad x_C = (8, 4, 0, 20, 0)^T$

Algoritmo del Simplesso - FASE II: Criterio (Test) di ottimalità per sab.

Consideriamo $\mathcal{B}_A = \{1,2,5\}$ e risolviamo il sistema di vincoli $Ax = b$ rispetto ad x_1, x_2, x_5 (variabili di base) in funzione di x_3, x_4 (variabili fuori base)

$$P_{FS}\begin{cases} -min & -2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 & \\ & x_1 + 2x_2 - x_3 & = 16 \\ & -3x_1 + 4x_2 + x_4 & = 12 \\ & 2x_1 - x_2 + x_5 & = 12 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

1) sostituendo: $eq2 = eq2 + 3eq1 \quad eq3 = eq3 - 2eq1$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 16 \\ + 10x_2 - 3x_3 + x_4 &= 60 \\ - 5x_2 + 2x_3 + x_5 &= -20 \end{aligned}$$

2) sostituendo: $eq3 = 2eq3 + eq2$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 16 \\ + 10x_2 - 3x_3 + x_4 &= 60 \\ x_3 + x_4 + 2x_5 &= 20 \end{aligned}$$

3) sostituendo: x_2 in $eq1$

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 \\ x_2 &= 6 + \frac{3}{10}x_3 - \frac{1}{10}x_4 \\ x_5 &= 10 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{aligned}$$

Forma Canonica dei vincoli rispetto alla base $\mathcal{B}_A = \{1,2,5\}$

Ponendo $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ si ottiene la sab $x_A = (4,6,0,0,10)^T$

Algoritmo del Simplesso - FASE II: Criterio (Test) di ottimalità per sab.

Forma Canonica de vincoli $\mathcal{B}_A = \{1,2,5\}$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 4 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 \\
x_2 &= 6 + \frac{3}{10}x_3 - \frac{1}{10}x_4 \\
x_5 &= 10 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4
\end{aligned}
$$

Sostituiamo l'espressione di x_1, x_2, x_5 nella f.o di P_{FS} $\quad z(x) = -2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

$$z(x) = -2\left(4 + \frac{2}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4\right) + 3\left(6 + \frac{3}{10}x_3 - \frac{1}{10}x_4\right) + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 =$$

$$= 10 + \left(-\frac{4}{5} + \frac{9}{10}\right)x_3 + \left(-\frac{2}{5} - \frac{3}{10}\right)x_4 =$$

$$\boxed{= \boxed{10} + \frac{1}{10}x_3 - \frac{7}{10}x_4}$$

Forma Canonica della f.o. rispetto alla base $\mathcal{B}_A = \{1,2,5\}$ - Funzione ridotta.

Valore della f.o. in corrispondenza della sab $x_A = (4, 6, 0, 0, 10)^T$

Algoritmo del Simplesso - FASE II: Criterio (Test) di ottimalità per sab.

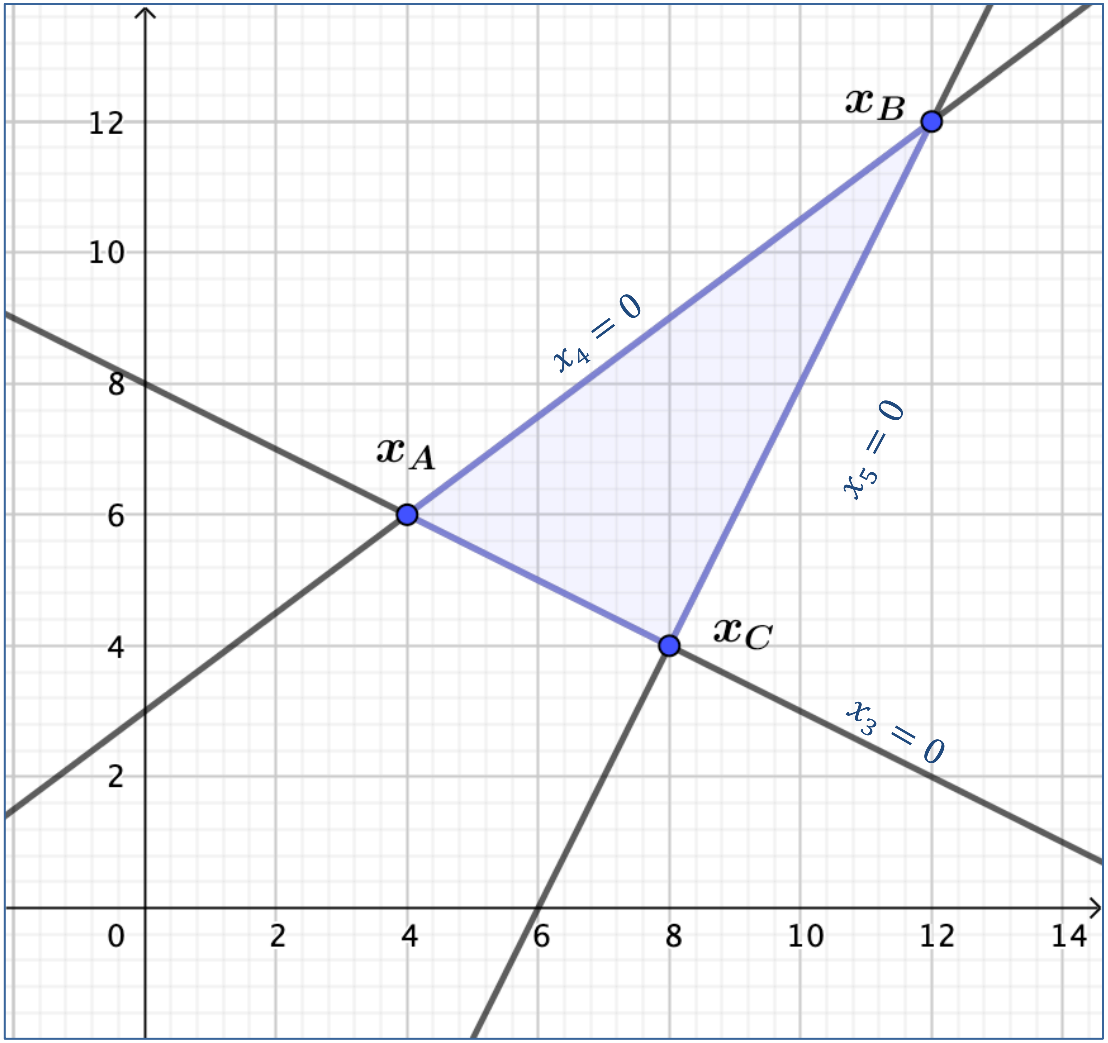
$$
\begin{cases}
10 + \min & & & & \frac{1}{10}x_3 & - & \frac{7}{10}x_4 & & \\
& x_1 & & & - \frac{2}{5}x_3 & - & \frac{1}{5}x_4 & = & 4 \\
& & x_2 & & - \frac{3}{10}x_3 & + & \frac{1}{10}x_4 & = & 6 \\
& & & x_5 & + \frac{1}{2}x_3 & + & \frac{1}{2}x_4 & = & 10 \\
& x_1, & x_2, & & x_3, & & x_4, & x_5 \geq & 0
\end{cases}
$$

Problema in forma canonica rispetto alla base $\mathcal{B}_A = \{1,2,5\}$

x_A è per caso la soluzione ottima di P_{FS} ?

Il Problema in Forma Canonica rispetto ad una base descrive tutte le soluzioni ammissibili di P_{FS} al variare delle variabili fuori base (parametri):

- Ponendo $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ si ottiene la sab $x_A = (4, 6, 0, 0, 10)^T$ con valore di f.o. $z(x_A) = 10$
- Cosa succede alla funzione obiettivo (ridotta) quando facciamo variare uno solo dei parametri?
  1. $x_3 = 0 \longrightarrow x_3 = \delta > 0.$ Purché l'entità dello spostamento δ sia tale mantenere l'ammissibilità di $x_A(\delta)$, la funzione obiettivo cresce $z\big(x_A(\delta)\big) = z(x_A) + \frac{1}{10}\delta = 10 + \frac{1}{10}\delta = 10 + \hat{c}_3\delta.$
  2. $x_4 = 0 \longrightarrow x_3 = \delta > 0.$ Purché l'entità dello spostamento δ sia tale mantenere l'ammissibilità di $x_A(\delta)$, la funzione obiettivo decresce $z\big(x_A(\delta)\big) = z(x_A) - \frac{7}{10}\delta = 10 + \hat{c}_4\delta$



A partire da x_A fare crescere x_4 significa muoversi lungo il segmento $[x_A, x_C]$, facendo decrescere la f.o. Quindi x_A non può essere soluzione ottima.

<u>Condizione sufficiente di ottimalità</u>
Se nella funzione ridotta, rispetto ad una base $\mathcal{B}$, i coefficienti delle variabili fuori base sono tutti ≥ 0, allora la sab identificata da $\mathcal{B}$ è ottima.

Appendice: Le soluzioni di base dell'esempio della slide 3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta_1 = \{1,2,3\} \qquad \beta_2 = \{1,2,4\}$$

$$\beta_3 = \{1,2,5\} \qquad \beta_4 = \{2,3,5\}$$

β_1

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & 1/3 & -4/3 \end{bmatrix} \qquad x_{B_1} = B_1^{-1}b = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 4/3 \\ 10/3 \end{bmatrix}$$

soluzione di base non ammissibile

β_2

$$B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \qquad x_{B_2} = B_2^{-1}b = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

soluzione di base non ammissibile

β_3

$$B_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & -1 \end{bmatrix} \qquad x_{B_3} = B_3^{-1}b = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 3 \\ 5/2 \end{bmatrix}$$

soluzione di base ammissibile

β_4

$$B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B_4^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad x_4 = B_4^{-1}b = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

soluzione di base ammissibile

Appendice: Le soluzioni di base dell'esempio della slide 3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta_5 = \{2,4,5\} \qquad \beta_6 = \{3,4,5\}$$

$$\beta_7 = \{2,3,4\} \qquad \beta_8 = \{1,3,4\}$$

β_5

$$B_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B_5^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad x_{B_5} = B_5^{-1} b = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

soluzione di base non ammissibile

β_6

$$B_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B_6^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad x_{B_6} = B_6^{-1} b = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

soluzione di base non ammissibile

β_7

$$B_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_7^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad x_{B_7} = B_7^{-1} b = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

soluzione di base ammissibile

β_8

$$B_8 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B_8^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad x_{B_8} = B_8^{-1} b = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

soluzione di base ammissibile

Le soluzioni di base di P_{FS}

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta_9 = \{1,4,5\}$$
$$\beta_{10} = \{1,3,5\}$$

β_9

$$B_9 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B_9^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad x_{B_9} = B_9^{-1} b = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

soluzione di base ammissibile

β_{10}

$$B_{10} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B_{10}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 \end{bmatrix} \quad x_{B_{10}} = B_{10}^{-1} b = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

soluzione di base non ammissibile