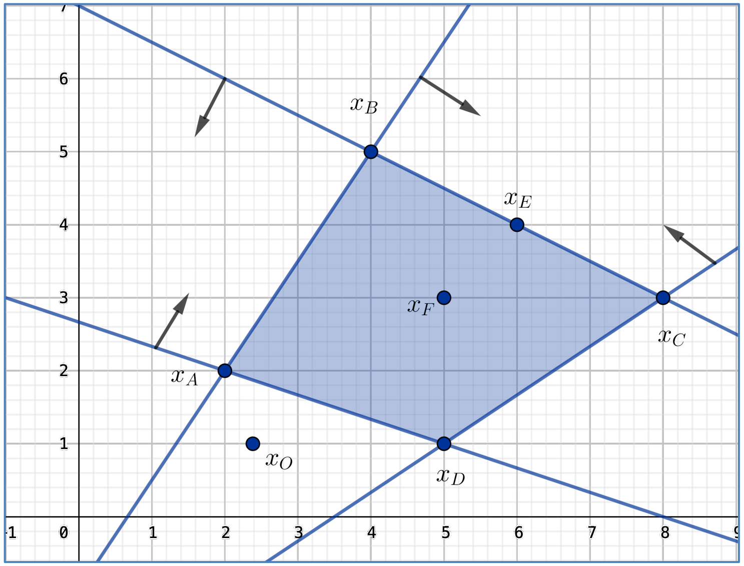
Laboratorio di Ricerca Operativa 2020-2021

Esercitazione 1

Riassunto Lezione 2



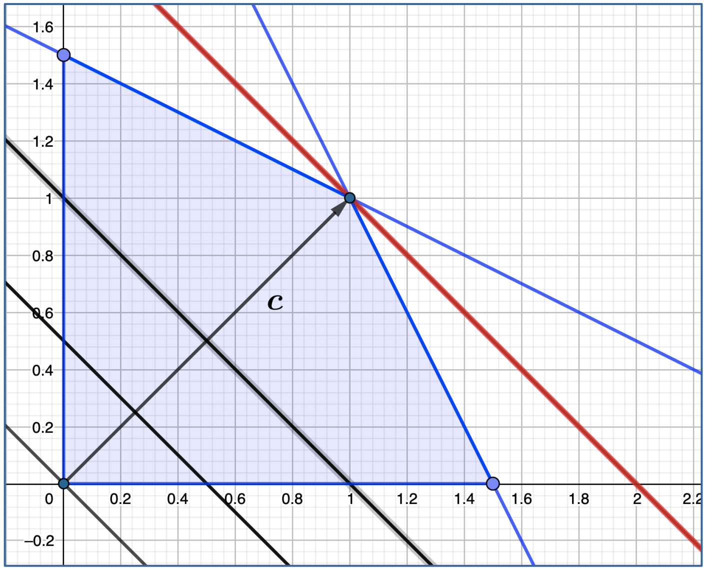
$$P\begin{cases} \min & c^T x & & \\ & a_1^T x & \geq & b_1 \\ & a_2^T x & \geq & b_2 \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ & a_h^T x & \geq & b_h \\ & x & \geq & 0 \end{cases}$$

$\Omega(P) = \{x \in \mathbb{R}_+^q \, | a_i^T x \geq b_i \ , i = 1, .., h\}$

Poliedro in $\mathbb{R}_+^q$

- punti estremi di un poliedro vengono anche detti vertici (x_A, x_B, x_C, x_D)
- Sia $\bar{x} \in \mathbb{R}^q$
  - se $\bar{x}$ è tale che $a_i^T \bar{x} \geq b_i \ \ i = 1, .., h$, allora $\bar{x} \in \Omega(P)$
  - se $\bar{x} \in \Omega(P)$ e $a_i^T \bar{x} = b_i$, diremo che il vincolo « i » è attivo in $\bar{x}$ e $\bar{x}$ è detto punto di frontiera
  - se $\bar{x} \in \Omega(P)$ e $a_i^T \bar{x} > b_i \ \ i = 1, .., h$ (nessuno dei vincoli che definisce $\Omega(P)$ è attivo in $\bar{x}$), allora $\bar{x}$ è un punto interno
  - $\bar{x}$ è un vertice se «q» vincoli linearmente indipendenti sono attivi in $\bar{x}$;
  - se $\bar{x}$ viola almeno un vincolo che definisce $\Omega(P)$, allora $\bar{x} \notin \Omega$

Riassunto Lezione 2



- ✓ Il gradiente di una funzione z calcolato in un punto x_0 $\nabla z(x_0)$ e indica la direzione di crescita della funzione in un intorno di x_0.
- ✓ Se la funzione è lineare $z(x) = c^T x$, allora il gradiente è costante $\nabla z(x_0) = c$ in qualsiasi punto x_0 e indica la direzione globale di crescita della funzione.
- ✓ L'insieme di livello di una funzione è l'insieme dei punti in cui la funzione assume valore costante $\mathcal{L}(k) = \{x \in \mathbb{R}^q |\, z(x) = k\}$. Se z è costante $\mathcal{L}(k) = \{x \in \mathbb{R}^q | c^T x = k\}$ è una famiglia di iperpiani paralleli tra di essi
- ✓ Il gradiente è sempre ortogonale all'insieme di livello
- ✓ La soluzione ottima di un problema di PL, quando esiste, sta sempre su un vertice di $\Omega(P)$

Esercizio 1

$$P \begin{cases} \min & x_1 - 2x_2 & & \\ & 2x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ & -2x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 - x_2 & \leq & 1 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

1) Per il problema P, classificare i seguenti punti

$$x_A = (1,2),\ x_B = (5/3, 2/3) \qquad x_C = (1,1) \qquad x_D = (0,1) \qquad x_E = (2,1)$$

2) Stabilire se l'intersezione dell'iperpiano relativo al vincolo 1 con l'iperpiano relativo a $x_2 \geq 0$ può dare luogo ad un vertice di $\Omega(P)$.

3) Stabilire se l'intersezione degli iperpiani relativi ai vincoli 1 e 2 può dar luogo ad un vertice.

4) Dopo aver riportato $\Omega(P)$ su di un piano cartesiano verificare la correttezza dei risultati ottenuti ai punti 1,2,3 e determinare la soluzione ottima di P per via grafica.

5) Stabilire se esistono punti di $\Omega(P)$ in cui la funzione obiettivo valga 4.

Esercizio 2

$$P \begin{cases} \max & 4x_1 - 10x_2 & & \\ & x_1 + x_2 & \leq & 5 \\ & 3x_1 - x_2 & \leq & 4 \\ & -2x_1 + 5x_2 & \geq & 6 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

1) Determinare tutti i punti di $\Omega(P)$ in cui il vincolo 3 è soddisfatto per uguaglianza

2) Dopo aver riportato $\Omega(P)$ su di un piano cartesiano verificare la correttezza dei risultati ottenuti al punto 1 e determinare la soluzione ottima di P per via grafica.

Esercizio 3

$$P\begin{cases} \max & 5x_1 + 2x_2 & & \\ & 2x_1 + x_2 & \geq & 3 \\ & 3x_1 - x_2 & \geq & 0 \\ & 2x_1 - 4x_2 & \leq & 6 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

1) Verificare che il punto $x_A = (3,0)$ è un vertice di $\Omega(P)$

2) Considerata la semiretta uscente x_A e parallela alla direzione $d = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ di equazione $x = x_A + \lambda d, \lambda \geq 0$, determinare per quali valori di λ i punti della semiretta x sono punti di $\Omega(P)$

3) Dopo aver riportato $\Omega(P)$ su di un piano cartesiano verificare la correttezza dei risultati ottenuti ai punti 1 e 2 e determinare la soluzione ottima di P per via grafica.

Esercizio 4

$$P\begin{cases} \min & 10x_1 + 3x_2 & & \\ & 4x_1 + 5x_2 & \leq & 16 \\ & x_1 - x_2 & \geq & 5 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

1) Determinare tutti i vertici di $\Omega(P)$

2) Dopo aver riportato $\Omega(P)$ su di un piano cartesiano verificare la correttezza dei risultati ottenuti al punto 1 e determinare la soluzione ottima di P per via grafica.

Riepilogo

$$P\begin{cases}\min & c^T x & & \\ & a_1^T x & \geq & b_1 \\ & a_2^T x & \geq & b_2 \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ & a_h^T x & \geq & b_h \\ & x & \geq & 0\end{cases}$$

$$x, c \in \mathbb{R}^q, b \in \mathbb{R}^h, A \in \mathbb{R}^{h\times q}$$

$$\Omega(P) = \{x \in \mathbb{R}^q \mid Ax \geq b, x \geq 0\}$$

1. Se $\Omega(P) \neq \emptyset$
   a. Ha almeno un vertice
      - ✓ i suoi vertici corrispondono ai punti estremi
      - ✓ si ottengono intersecando q iperpiani (linearmente indipendenti) relativi alle h+q diseguaglianze che definiscono$\Omega(P)$
   b. Se la funzione obiettivo non è illimitata su $S(P)$, esiste almeno un vertice ottimo (Esempio 1). P può avere infinite soluzioni ottime, ma almeno una di esse sarà un vertice (Esempio 2).
   c. Se la funzione obiettivo è illimitata su$\Omega(P)$, il problema P non ammette soluzione ottima (Esempio 3)
3. Se $\Omega(P) = \emptyset$, il problema P non ammette soluzione ottima (Esempio 4)

X^* insieme delle soluzioni ottime di P o è vuoto oppure è un poliedro, quindi un insieme convesso, con almeno un vertice. Inoltre $X^* \subseteq \Omega(P)$.

Esercizio 1

$$P\begin{cases} \min & x_1 - 2x_2 & & \\ & 2x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ & -2x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 - x_2 & \leq & 1 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

1) Per il problema P, classificare i seguenti punti

$x_A = (1,2)$, $x_B = (5/3, 2/3)$ $x_C = (1,1)$ $x_D = (0,1)$ $x_E = (2,1)$

$x_A = (1,2)$ sostituendo nei vincoli:

$2+2 = 4 \leq 4$ attivo

$-2+2 = 0 < 2$

$1-2 = -1 < 1$

$1>0 \quad 2>0$

$\Rightarrow$ $x_A \in \Omega(P)$

x_A sta sulla frontiera (1 vincolo attivo)

$x_B = (5/3, 2/3)$

$10/3 + 2/3 = 4 \leq 4$ attivo

$-10/3 + 2/3 = -8/3 < 2$

$5/3 - 2/3 = 1 \leq 1$ attivo

$5/3 > 0 \quad 2 > 0$

$x_B \in \Omega(P)$.

Soddisfa come uguaglianze 2 vincoli lin. ind.

x_B è un vertice.

$x_C = (1,1)$

$2+1 = 3 < 4$

$-2+1 = -1 < 2$

$1-1 = 0 < 1$

$1>0, \ 1>0$

$x_C \in \Omega(P)$

nessun vincolo attivo

x_C è punto interno

~~x_D~~

$x_D = (0,1)$

Esercizio 1

$1 < 4$

$1 < 2$

$-1 < 1$

$0 \geq 0$ attivo

$1 > 0$

$x_D \in \Omega(P)$

1 vincolo attivo

x_D sta sulla frontiera

$x_E = (2,1)$

$4+1 = 5 > 4$ vincolo 1 violato

$x_D' \notin \Omega(P)$

$$P \begin{cases} \min & x_1 - 2x_2 & & \\ & 2x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ & -2x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 - x_2 & \leq & 1 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

2) Stabilire se l'intersezione dell'iperpiano relativo al vincolo 1 con l'iperpiano relativo a $x_2 \geq 0$ può dare luogo ad un vertice di $\Omega(P)$.

3) Stabilire se l'intersezione degli iperpiani relativi ai vincoli 1 e 2 può dar luogo ad un vertice.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{x}$ non vertice

$x_1 \geq 0$ ✓

$-2x_1 + x_2 \leq 2$ $\quad -4 + 0 < 2$

$x_1 - x_2 \leq 1$ $\quad 2 - 0 > 1$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 4 \\ -2x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \qquad 2x_2 = 6 \qquad x_2 = 3$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(4 - x_2) = 1/2$$

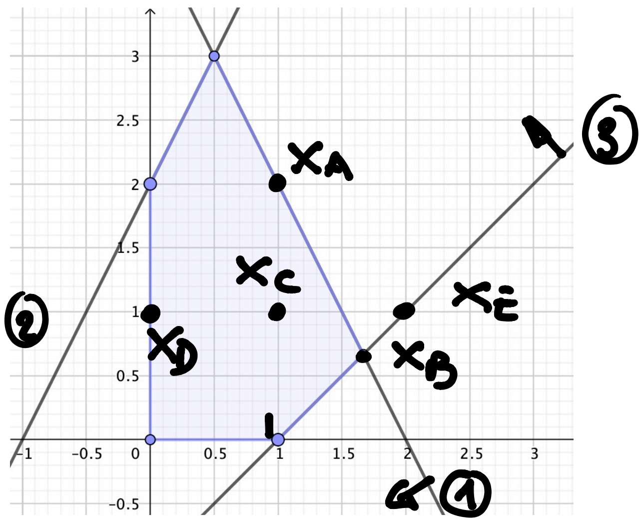
$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \hat{x}$ è un vertice di $\Omega(P)$

$$P\begin{cases}\min & x_1 - 2x_2 & & \\ & 2x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ & -2x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 - x_2 & \leq & 1 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0\end{cases}$$

Esercizio 1

4) Dopo aver riportato $\Omega(P)$ su di un piano cartesiano verificare la correttezza dei risultati ottenuti ai punti 1,2,3 e determinare la soluzione ottima di P per via grafica.

5) Stabilire se esistono punti di $\Omega(P)$ in cui la funzione obiettivo valga 4.



$z(x_1, x_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$x_1 - 2x_2 = 4$

$\mathcal{L}(k) = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = k \} =$

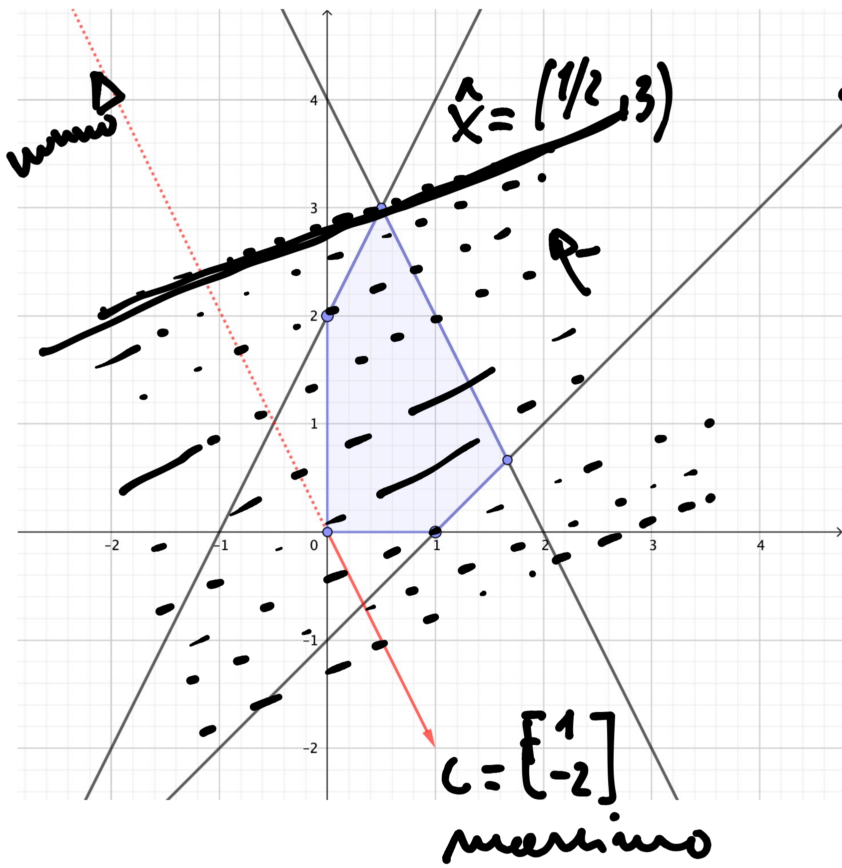
$\mathcal{L}(k) = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - 2x_2 = k \}$ $\quad k = 4$

$\mathcal{L}(4) \cap \Omega(P) = \emptyset$ $\quad x_1 - 2x_2 = 4$

$x_1 = 4 + 2x_2$

$8 + 4x_2 + x_2 \leq 4$	$5x_2 \leq -4$	$x_2 \leq -5/4$
$-8 - 4x_2 + x_2 \leq 2$	$-3x_2 \leq 10$	$x_2 \leq -10/3$
$4 + 2x_2 - x_2 \leq 1$	$x_2 \leq -3$	$x_2 \leq -3$
$4 + 2x_2 \geq 0$	$2x_2 \geq -4$	$x_2 \geq -2$
$x_2 \geq 0$	$x_2 \geq 0$	$x_2 \geq 0$

Esercizio 1



- Gradiente indica la direzione in cui la funzione cresce
- $\mathcal{L}(k) \perp$ grad $\forall k$

Esercizio 2

$$P\begin{cases}\max & 4x_1 - 10x_2 & & \\ & x_1 + x_2 & \leq & 5 \\ & 3x_1 - x_2 & \leq & 4 \\ & -2x_1 + 5x_2 & \geq & 6 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0\end{cases}$$

1) Determinare tutti i punti di $\Omega(P)$ in cui il vincolo 3 è soddisfatto per uguaglianza

$\underline{-2x_1 + 5x_2} = 6$ retta su $\mathbb{R}^2$

$x_1 = -3 + 5/2\, x_2 \rightarrow x(\delta) = \begin{cases} x_1(\delta) = \\ x_2(\delta) = \end{cases} \begin{cases} -3 + 5/2\,\delta \\ \delta \in \mathbb{R} \end{cases}$

$-3 + \frac{5}{2}\delta + \delta \leq 5 \qquad 7/2\,\delta \leq 8 \qquad \delta \leq \frac{16}{7}$

$-9 + \frac{15}{2}\delta - \delta \leq 4 \qquad \frac{13}{2}\delta \leq 13 \qquad \delta \leq 2 \qquad \delta \leq 2$

$6 - \frac{10}{2}\delta + 5\delta = 6 \qquad 0 \leq 0$

$-3 + 5/2\,\delta \geq 0 \qquad 5/2\,\delta \geq 3 \qquad \delta \geq 6/5 \qquad \delta \geq 6/5$

$\delta \geq 0 \qquad \delta \geq 0 \qquad \delta \geq 0$

$6/5 \leq \delta \leq 2$

$$\boxed{x(\delta) \in \Omega(P) \quad 6/5 \leq \delta \leq 2}$$

$x(6/5) = \begin{cases} x_1 = -3 + 5/2 \cdot 6/5 \\ x_2 = 6/5 \end{cases} \qquad x(2) = \begin{cases} -3 + \frac{5}{2} \cdot 2 \\ 2 \end{cases}$

$x(6/5) = \begin{bmatrix} 0 \\ 6/5 \end{bmatrix} \in \Omega(P) \qquad x(2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \in \Omega(P)$

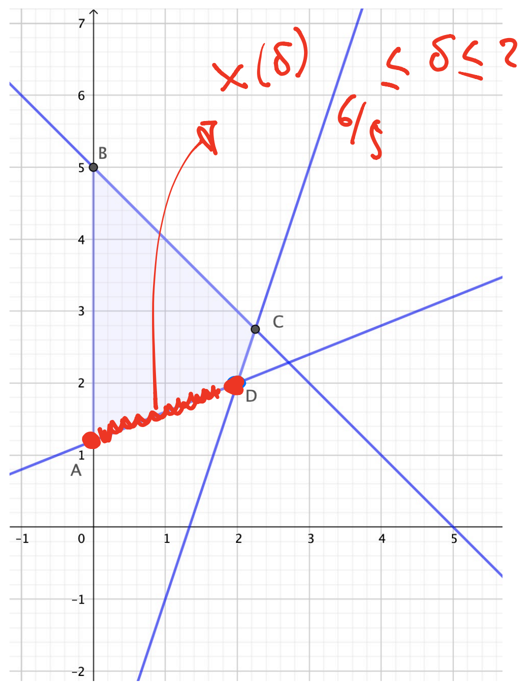
x_A, x_B

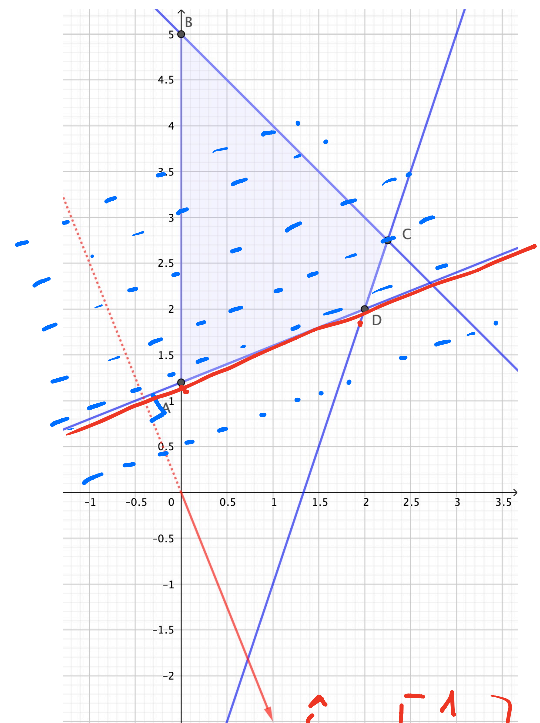
$[x_A, x_B] = \lambda x_A + (1-\lambda) x_B \quad 0 \leq \lambda \leq 1$

Esercizio 2

$$P \begin{cases} \max & 4x_1 - 10x_2 & & \\ & x_1 + x_2 & \leq & 5 \\ & 3x_1 - x_2 & \leq & 4 \\ & -2x_1 + 5x_2 & \geq & 6 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

2) Dopo aver riportato $\Omega(P)$ su di un piano cartesiano verificare la correttezza dei risultati ottenuti al punto 1 e determinare la soluzione ottima di P per via grafica.





$\hat{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5/2 \end{bmatrix}$

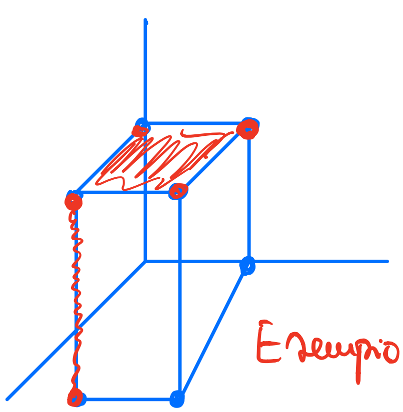
$z(x_1, x_2) = 4x_1 - 10x_2.$

$c = \begin{bmatrix} 4 \\ -10 \end{bmatrix}$

∞ soluzioni ottime delle quali 2 sono vertici.

Esercizio 1 . 1 sol ott.

Esercizio 2 . ∞ sol ott.



Esempio di ∞ soluzioni ottime in $\mathbb{R}^3$

Esercizio 3

$$P\begin{cases} \max & 5x_1 + 2x_2 & & \\ & 2x_1 + x_2 & \geq & 3 \\ & 3x_1 - x_2 & \geq & 0 \\ & 2x_1 - 4x_2 & \leq & 6 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{cases}$$

1) Verificare che il punto $x_A = (3{,}0)$ è un vertice di $\Omega(P)$

2) Considerata la semiretta uscente x_A e parallela alla direzione $d = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ di equazione $x = x_A + \lambda d, \lambda \geq 0$, determinare per quali valori di λ i punti della semiretta x sono punti di $\Omega(P)$

$6 + 0 \geq 3$ V $>$

$9 - 0 \geq 0$ V $>$

$6 - 0 \leq 6$ V $=$.

$x_1 = 3 > 0$ V $>$

$x_2 = 0 \geq 0$ V $=$.

x_A è vertice.

$x = x_A + \lambda d$ $\quad d = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda \geq 0$

$$x = \begin{cases} x_1 = 3 + 2\lambda \\ x_2 = 0 + \lambda \end{cases}$$

$6 + 4\lambda + \lambda \geq 3$ $\quad 5\lambda \geq -3$

$9 + 6\lambda - \lambda \geq 0$ $\quad 5\lambda \geq -9$

$6 + 4\lambda - 4\lambda \leq 6$ $\quad 6 \leq 6$

$3 + 2\lambda \geq 0$ $\quad 2\lambda \geq -3$

$\lambda \geq 0$ $\quad \lambda \geq 0$

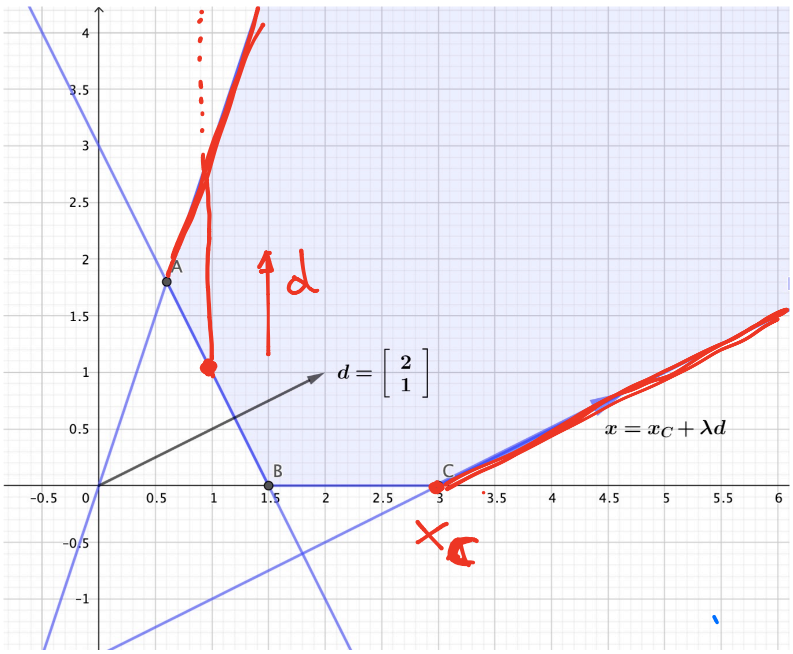
$\boxed{\forall \lambda \geq 0}$

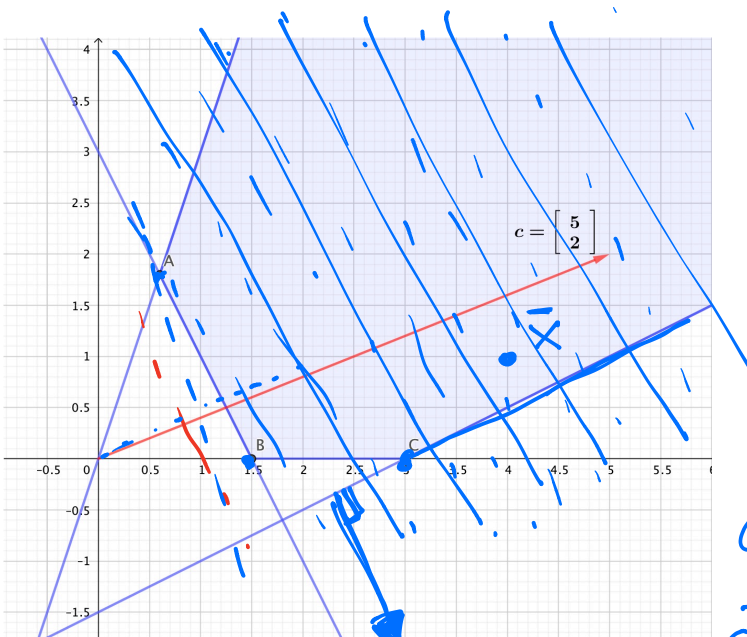
$\forall \lambda \geq 0$ $\quad x(\lambda) = x_A + \lambda \delta$ $\quad x(\lambda) \in \Omega(P)$

Esercizio 4

$$P\begin{cases} \max & 5x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ & 3x_1 - x_2 \geq 0 \\ & 2x_1 - 4x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3) Dopo aver riportato $\Omega(P)$ su di un piano cartesiano verificare la correttezza dei risultati ottenuti ai punti 1 e 2 e determinare la soluzione ottima di P per via grafica.





$\forall M > 0, \exists x \in \Omega(P)$

$c^T x > M$

superiormente illimitato

x^* è ottimo

se $c^T x \leq c^T x^*$

$\forall x \in \Omega(P)$

$c^T x^* = [5,2]\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 15$

$<$

$c^T \bar{x} = [5,2]\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 22$

Non esiste soluzione ottima

$\Omega(P)$ illimitato $\qquad c^T x \to \infty$

$\not\Rightarrow$

$\Leftarrow$

$E_1 \Rightarrow 1$ soluzione ottima

$E_2 \Rightarrow \infty$ soluzioni ottime

E_3 nessuna soluzione illimitato

Esercizio 4

$$P\begin{cases} \min & 10x_1 + 3x_2 \\ & 4x_1 + 5x_2 \le 16 \\ & x_1 - x_2 \ge 5 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1) Determinare tutti i vertici di $\Omega(P)$

Massimo numero di vertici $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{12}{2} = 6$

1) $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 16 \\ x_1 - x_2 = 5 \end{cases}$ $\qquad 9x_1 = 41 \quad x_1 = 41/9$

NO $\qquad x_2 = x_1 - 5$

$= \frac{41}{9} - 5 = -\frac{4}{9}$

2) $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 16 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ $\qquad x_1 = 0 \quad x_2 = \frac{16}{5} \qquad -\frac{16}{5} < 5$

NO

3) $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 16 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ $\qquad x_1 = 4 \quad x_2 = 0 \qquad 4 - 0 < 5$

NO

4) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 = 0 \end{cases}$ $\qquad x_1 = 0 \quad x_2 = -5$ $\qquad$ NO

$$P\begin{cases} \min & 10x_1+3x_2 \\ & 4x_1+5x_2 \le 16 \\ & x_1-x_2 \ge 5 \\ & x_1,x_2 \ge 0\end{cases}$$

(5) $x_1 - x_2 = 5$ $x_1 = 5$

$x_2 = 0$ $x_2 = 0$

$20 > 16$ NO

(6) $x_1 = 0$ $0 < 5$ NO

$x_2 = 0$

$\Omega(P)$ non ha vertici!

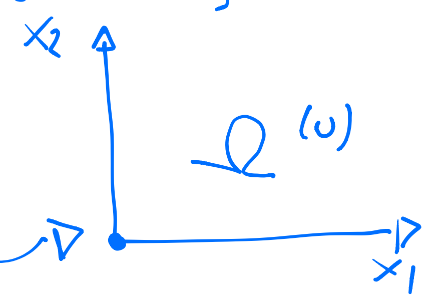
$$\boxed{\Omega(P) = \{ x \in \mathbb{R}^q \mid a_i^T x \le b_i,\ i = 1..h,\ x_j \ge 0\ \ j = 1..q \}}$$

$\Omega(P) = \Omega \cap \Omega^0$

$\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^q \mid a_i^T x \le b_i,\ i = 1..h \}$ Poliedro

$\Omega^0 = \{ x \in \mathbb{R}^q \mid x_j \ge 0,\ j = 1..q \} \rightarrow$ Poliedro

$\Omega^{(0)}$ ha vertici? sì

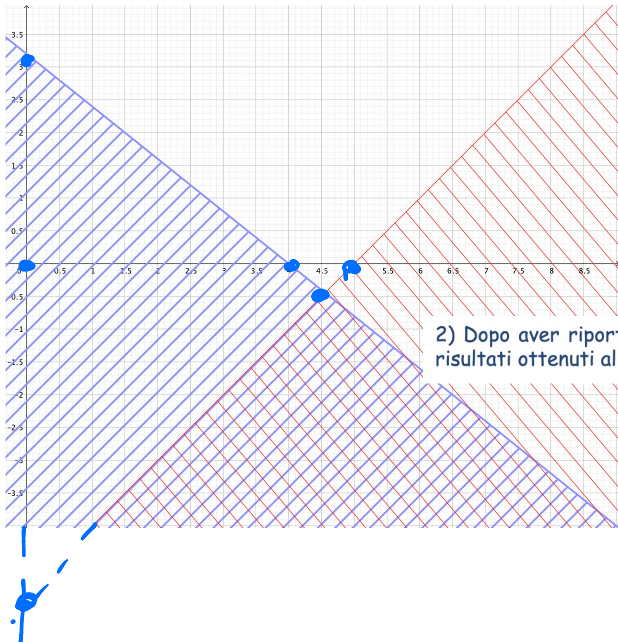


$x^0 = (0, 0 \dots 0)$

$x^0 \in \Omega$. $\Omega \cap \Omega^0 = \{\emptyset\}$

$\Rightarrow \Omega(P) = \{\emptyset\}$ non esiste soluzione amm.

$\Rightarrow$ non esiste soluzione ottima



2) Dopo aver riportato $\Omega(P)$ su di un piano cartesiano verificare la correttezza dei risultati ottenuti al punto 1 e determinare la soluzione ottima di P per via grafica.

E_1 1 sol. ottima

E_2 ∞ sol ottime

E_3 no soluzioni ottime → P sup illimitato

E_4 no soluzione ottima → P inammissibile