Ricerca Operativa

Prima Parte

Testi consigliati

✓ S. Martello, M.G. Speranza , **Ricerca Operativa per l'Economia e l'Impresa**, Ed. Esculapio, 2012.

✓ M. Caramia, S. Giordani, F. Guerriero, R. Musmanno, D. Pacciarelli, **Ricerca Operativa**, ISEDI, 2014.

✓ F.S. Hillier, G.J. Lieberman, **Introduction to Operations Research**, 10/ed, McGraw-Hill, 2014.

✓ H.A. Taha, **Operations Research: An Introduction**, 9/ed, Pearson Prentice Hall, 2010.

Definizione

La **Ricerca Operativa** (RO) si configura come un approccio scientifico in grado di orientare le decisioni di qualunque soggetto, chiamato a risolvere un problema di scelta, verso la linea più razionale e conveniente.

Problema di riferimento: occorre svolgere un certo numero di attività e si dispone di una quantità limitata di risorse, oppure si devono rispettare dei vincoli nelle assegnazioni delle risorse disponibili alle singole attività. Le risorse possedute (siano esse scarse o meno) vanno distribuite tra le varie attività in modo da ottimizzare l'efficienza complessiva.

Origine

Durante la seconda guerra mondiale i Servizi Militari Britannici chiesero a ingegneri e matematici di applicare un **criterio scientifico** alla soluzione di **problemi militari** (posizionamento di radar e collocazione di mine marine per ostacolare l'avanzata delle navi nemiche).

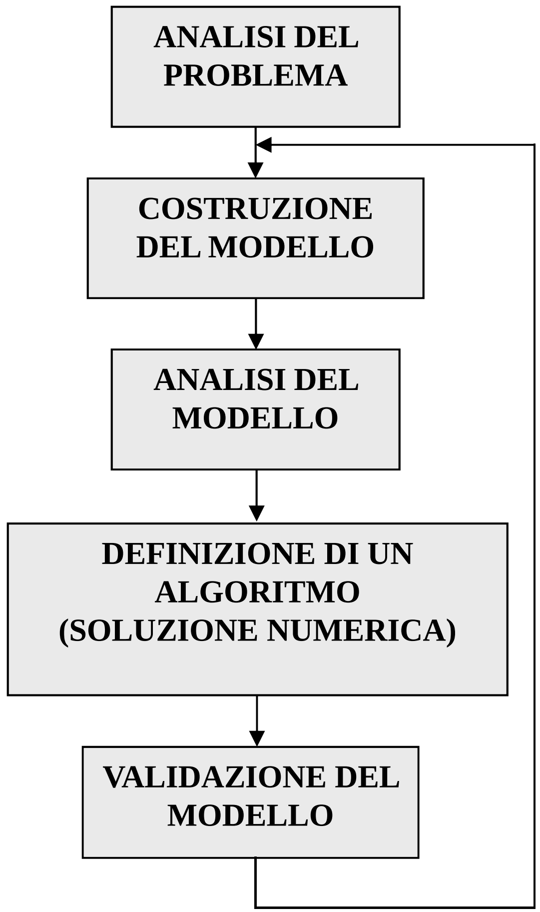
Alla fine della guerra, le tecniche di RO sperimentate con successo in ambito militare vennero trasferite in contesti civili per supportare le decisioni nella **pianificazione**, nella **gestione** e nel **controllo** di sistemi complessi.

Applicazioni

- ✓ Pianificazione e controllo della produzione;
- ✓ Gestione delle scorte;
- ✓ Organizzazione delle attività logistiche e di trasporto;
- ✓ Definizione dei turni del personale nelle grandi organizzazioni (es. ospedali, aeroporti);
- ✓ Gestione delle risorse idriche e protezione dell'ambiente;
- ✓ Gestione dei sistemi di energia elettrica;
- ✓ Pianificazione a medio e lungo periodo di attività finanziarie (da parte di banche);
- ✓ Organizzazione dei servizi pubblici;
- ✓ …

Metodologia

Uno studio di RO si articola in 5 fasi fondamentali



Metodologia

1. La prima fase consiste nell'individuazione degli obiettivi che si vogliono perseguire e dei fattori che possono influenzare il raggiungimento degli obiettivi prefissati. L'analisi del problema da risolvere è un passo estremamente delicato che quasi sempre coinvolge il raggiungimento di un equilibrio fra interessi contrastanti. Ad esempio, nella pianificazione della produzione, una riduzione dei costi totali (costi di produzione + costi di inventario) si ottiene riducendo le scorte in magazzino. Tuttavia, la riduzione delle scorte può nuocere alle vendite in quanto impedisce pronte consegne e non consente di far fronte a brusche variazioni della domanda.

Metodologia

2. Un modello (di Programmazione Matematica) può essere visto come uno schema rappresentativo della realtà in esame, volto a semplificare la stessa realtà e consentire l'uso delle tecniche proprie della RO. Nella fase di costruzione del modello, il problema viene formulato mediante l'utilizzo di **variabili decisionali**, **funzione obiettivo**, **funzioni di vincolo**. Le variabili decisionali quantificano le grandezze su cui il decisore può direttamente intervenire (incognite del problema). La funzione obiettivo esprime una misura dell'efficacia delle decisioni prese e deve essere massimizzata (rispettivamente minimizzata) se rappresenta un profitto (rispettivamente un costo).

Metodologia

Le funzioni di vincolo esprimono i legami fra le variabili decisionali e individuano limitazioni sul valore che esse possono assumere (limitazioni derivanti da considerazioni di carattere fisico, economico, ecc.). In sintesi, occorre esprimere, mediante relazioni matematiche, i legami di interdipendenza esistenti fra le grandezze in gioco.

3. Nella terza fase si prevede la deduzione di alcune proprietà (in riferimento a determinate classi di problemi): l'**esistenza** e l'**unicità** della soluzione ottima, la condizione di **ottimalità** (caratterizzazione analitica della soluzione ottima), ecc.

Metodologia

4. Nella quarta fase, vengono definiti opportuni **algoritmi** di risoluzione. Un algoritmo è una sequenza finita di operazioni elementari (aritmetiche, di confronto, ecc.) tale da fornire la soluzione corretta a ogni istanza del problema in esame (per istanza si intende ogni specifico caso del problema). La soluzione numerica ottenuta tramite l'utilizzo di questi algoritmi deve essere poi interpretata dal punto di vista applicativo in modo da evitare che abbia scarso rilievo pratico.
5. Infine si verifica se il modello costruito rappresenta accuratamente la realtà. In caso contrario, si esegue una fase di revisione.

Metodologia

In particolare, occorre verificare se sono stati commessi degli errori nella definizione degli obiettivi, nella scelta dei parametri, nella definizione delle relazioni di interdipendenza fra le variabili decisionali. Se il modello costruito rappresenta una fedele riproduzione del sistema reale, occorre sviluppare strumenti software di corredo necessari per il suo utilizzo nella pratica (fase di ingegnerizzazione).

☛ una soluzione rimane valida fino a quando rimane valido il modello

Problema di ottimizzazione

Min (o ***Max***) $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$

s.v.

$$g_i(x_1,x_2,\dots,x_n) \begin{Bmatrix} \geq \\ = \\ \leq \end{Bmatrix} b_i,\ i=1,\dots,m$$

- ✓ $x_1,x_2,\dots,x_n$: variabili decisionali (incognite del problema);
- ✓ $f(\cdot)$: funzione obiettivo;
- ✓ $g_i(\cdot)$, $i=1,\dots,m$: funzioni di vincolo.

⇩

Modello di Programmazione Matematica

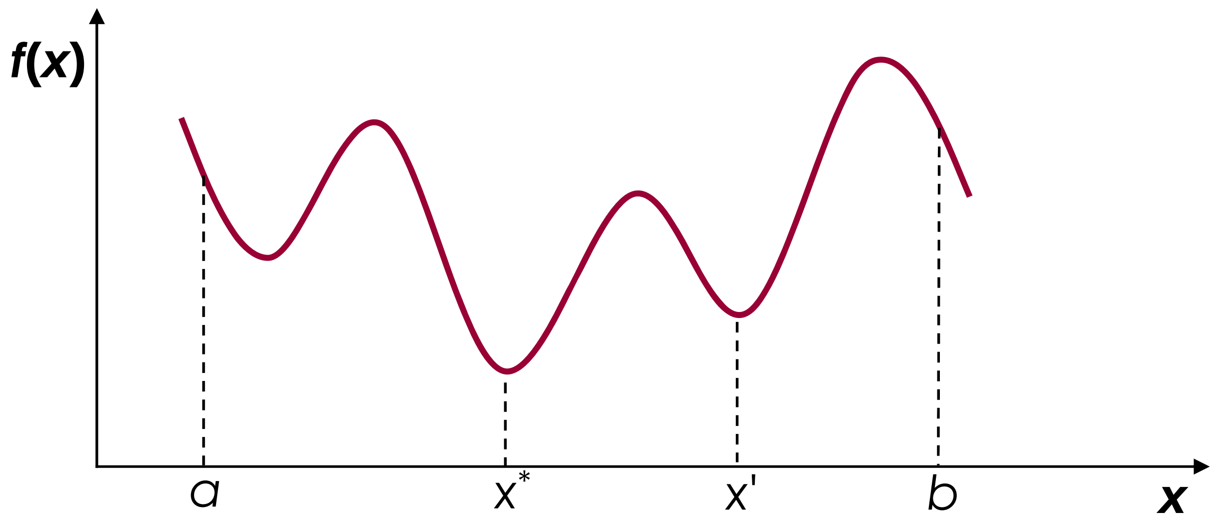
Problema di ottimizzazione

Per illustrare gli aspetti fondamentali relativi ai problemi di ottimizzazione si consideri un **problema monodimensionale** nella forma

Min $f(x)$

s.v.

$a \leq x \leq b$



Problema di ottimizzazione

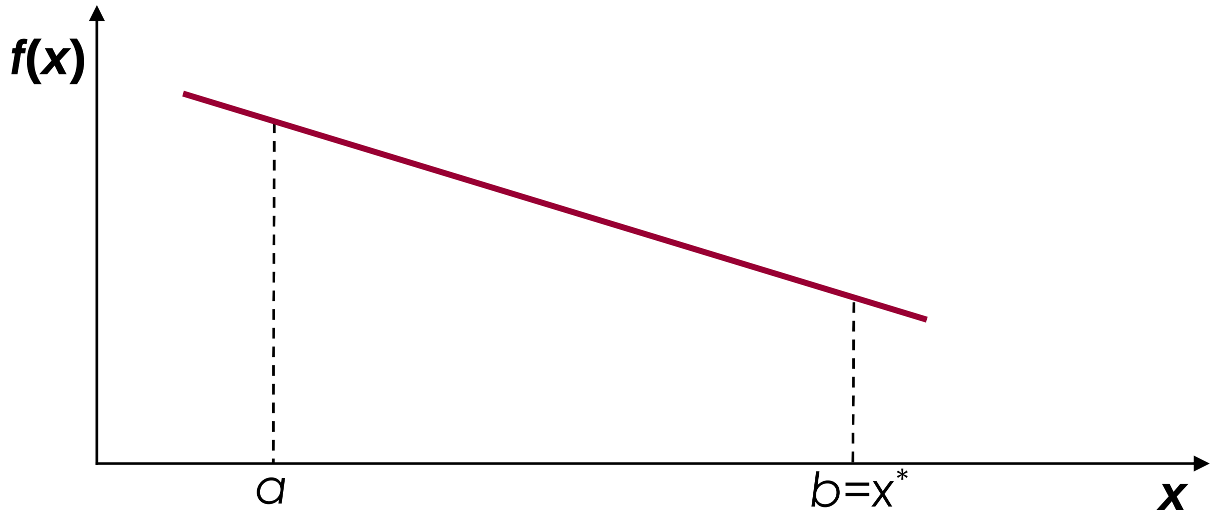
Una soluzione x^* tale che $f(x^*) \leq f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$ è detta **minimo globale** della funzione $f(\cdot)$ nell'intervallo chiuso $[a,b]$.

Una soluzione x' tale che $f(x') \leq f(x)$ per ogni $x \in I(x') \subset [a,b]$ è detta **minimo locale** della funzione $f(\cdot)$ in $[a,b]$ (dove $I(x')$ indica un intorno di x').

La difficoltà a risolvere il problema, ossia a individuare il minimo globale, dipende dalle proprietà della funzione $f(\cdot)$.

Problema di ottimizzazione

Se la funzione obiettivo è lineare, la soluzione del problema è estremamente semplice: è sufficiente confrontare i valori di $f(a)$ e $f(b)$ e scegliere il minore.



Problema di ottimizzazione

Caso generale (più dimensioni)

Min (o ***Max***) $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

s.v.

$$g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n) \begin{Bmatrix} \geq \\ = \\ \leq \end{Bmatrix} b_i,\ i=1,\ldots,m$$

- ✓ $f(\cdot)$: lineare
- ✓ $g_i(\cdot)$, $i=1,\ldots,m$: lineari

⇩

Modello di Programmazione Lineare

Problema di Programmazione Lineare

Min (o ***Max***) $c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$

s.v.

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n \begin{Bmatrix} \geq \\ = \\ \leq \end{Bmatrix} b_i,\ i=1,\ldots,m$$

con c_j e a_{ij} ($i=1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,n$) costanti note.

In particolare:

- ✓ se $x_1,x_2,\ldots,x_n$ possono assumere valori reali, si parla di problemi di Programmazione Lineare (**PL**);
- ✓ se $x_1,x_2,\ldots,x_n$ possono assumere solo valori interi, si parla di problemi di Programmazione Lineare Intera (**PLI**).

Costruzione del modello

Formulazione di problemi di PL e PLI (esempi):

- ✓ problema di **produzione**;
- ✓ problema di **miscelazione**;
- ✓ problema di **schedulazione**;
- ✓ problema di **trasporto**;
- ✓ problema di **investimento finanziario**;
- ✓ problema di **inventario**;
- ✓ problema di **assegnamento**.

Passi fondamentali:

- ✓ individuazione delle variabili decisionali;
- ✓ identificazione dei vincoli e della funzione obiettivo e loro rappresentazione in termini di variabili decisionali.

Problema di produzione

Una industria automobilistica utilizza due differenti linee di montaggio (A e B) per l'assemblaggio di veicoli industriali e veicoli agricoli. Il settore marketing ha previsto una forte richiesta dei due tipi di veicoli per il mese successivo, per cui è possibile vendere un qualsiasi quantitativo che l'industria è in grado di assemblare. Nello stabilire il piano di produzione per il mese successivo gli elementi da considerare sono:

a) dalla vendita dei veicoli l'industria è in grado di realizzare un profitto unitario pari a 6.000 € per i veicoli industriali e a 2.000 € per i veicoli agricoli;

Problema di produzione

b) nel mese successivo, per l'assemblaggio dei due tipi di veicoli, la linea A potrà essere impegnata per un totale di 180 ore complessive, la linea B per 135 ore;

c) ciascun veicolo industriale richiede 20 ore per l'assemblaggio sulla linea A e 10 sulla linea B, mentre per un veicolo agricolo sono richieste 12 ore sulla linea A e 15 sulla linea B;

d) l'industria utilizza un ulteriore impianto per il controllo di qualità, specificatamente per i veicoli industriali e agricoli assemblati. A seguito di accordi sindacali l'impianto deve rimanere attivo per un numero di ore pari almeno al 25% della capacità a regime, calcolata in 100 ore mensili;

Problema di produzione

e) sono richieste 20 ore per testare un veicolo industriale e 10 ore per un veicolo agricolo;

f) il settore "gestione del personale" ha individuato che, per garantire una distribuzione ottimale del personale lungo le linee di montaggio, il numero di veicoli agricoli assemblati deve essere pari almeno alla metà del numero di veicoli industriali assemblati;

g) il responsabile della distribuzione ha segnalato che la più grande concessionaria di zona ha richiesto per il mese successivo almeno 4 veicoli, senza specificare il numero per ogni tipo.

Problema di produzione

Sulla base di tali considerazioni, il problema è pianificare la produzione di veicoli industriali e agricoli per il mese successivo, ovvero, stabilire il mix ottimale di prodotti con l'obiettivo di massimizzare il profitto.

Problema di produzione: Formulazione

Si indichi con:

x_1= numero di veicoli industriali da assemblare nel mese successivo;

x_2= numero di veicoli agricoli da assemblare nel mese successivo.

Vincoli per le linee di assemblaggio. Il numero di ore per cui la linea A sarà utilizzata per l'assemblaggio dei veicoli sarà pari a $20x_1+12x_2$. Tale numero non potrà eccedere il monte orario disponibile sulla linea. Ciò può essere espresso formalmente dal vincolo $20x_1+12x_2 \leq 180$. Analogamente si ricava il vincolo per la linea B: $10x_1+15x_2 \leq 135$.

Problema di produzione: Formulazione

Vincoli per l'impianto per il controllo di qualità. Il 25% di 100 ore è pari a 25. Pertanto, l'impianto per il controllo di qualità dei veicoli industriali e agricoli dovrà essere attivato per almeno 25 ore e per non più di 100 durante il mese successivo. Il numero di ore richieste per testare complessivamente i veicoli sarà pari a $20x_1+10x_2$.

Si avranno allora i vincoli:

$20x_1+10x_2 \geq 25$;

$20x_1+10x_2 \leq 100$.

Problema di produzione: Formulazione

Vincolo per il settore “gestione del personale”.

Il numero di veicoli agricoli assemblati deve essere pari almeno alla metà del numero di veicoli industriali assemblati. Formalmente ciò significa che

$x_1 - 2x_2 \leq 0$.

Vincolo per la distribuzione. Complessivamente è necessario produrre almeno 4 veicoli nel mese successivo. Quindi dovrà risultare $x_1 + x_2 \geq 4$.

Dal momento che non avrebbe senso se le variabili x_1 e x_2 assumessero valori negativi (o frazionari), è necessario considerare vincoli addizionali di non negatività (e interezza) delle variabili.

Problema di produzione: Formulazione

Funzione obiettivo. Il profitto totale z (in migliaia di euro) risultante dalla vendita dei veicoli sarà pari a $z=6x_1+2x_2$.

E' evidente che dovranno essere presi in considerazione soltanto i piani di produzione ammissibili, cioè i valori di x_1 e x_2 tali da soddisfare contemporaneamente i vincoli di produzione.

Problema di produzione: Formulazione

Il problema da risolvere è pertanto il seguente:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } z \\
&\qquad z = 6x_1 + 2x_2 \\
&\text{s.v.} \\
&\qquad 20\,x_1 + 12x_2 \le 180 \\
&\qquad 10\,x_1 + 15x_2 \le 135 \\
&\qquad 20\,x_1 + 10x_2 \ge 25 \\
&\qquad 20\,x_1 + 10x_2 \le 100 \\
&\qquad x_1 - 2x_2 \le 0 \\
&\qquad x_1 + x_2 \ge 4 \\
&\qquad x_1,\ x_2 \ge 0 \\
&\qquad (x_1,\ x_2 \text{ int.})
\end{aligned}
$$

Problema di produzione: Formulazione

Ammissibilità e ottimalità giocano un ruolo fondamentale per i problemi di ottimizzazione. Ad esempio, la soluzione x_1=3 e x_2=2, con z=22, è una soluzione **ammissibile**, dal momento che soddisfa tutti i vincoli del problema, ma a essa non corrisponde il profitto ottimo. Viceversa, la soluzione x_1=5 e x_2=3, pur realizzando un profitto migliore del caso precedente (z=36), non può essere presa in considerazione giacché il vincolo sul massimo numero di ore disponibili per l'impianto per il controllo di qualità verrebbe violato. La soluzione **ottima**, a cui corrisponde un valore di profitto pari a z*=28, si raggiunge quando x_1^*=4 e x_2^*= 2. Il modo in cui si determina questa soluzione verrà spiegato in seguito.

Problema di miscelazione

Una industria alimentare leader nella produzione di cibo per gatti ha deciso di lanciare sul mercato un nuovo prodotto in confezioni da gr. 500. Il controllo di qualità sul prodotto ha imposto che in ogni confezione devono essere contenuti almeno gr. 120 di proteine, gr. 115 di carboidrati e gr. 210 di grassi. Per questo nuovo prodotto l'industria intende utilizzare tre composti di base che verrebbero opportunamente miscelati.

Problema di miscelazione

Prezzo e contenuto di gr. 100 di composto sono riassunti nella seguente tabella:

Composto	P	C	G	A	Prezzo
1	14	25	57	4	0,80
2	15	37	40	8	0,55
3	40	20	25	15	0,40

Contenuto (gr.) e prezzo (€) di gr. 100 di composto
(P = proteine; C = carboidrati; G = grassi; A = altro)

L'obiettivo dell'industria è determinare il mix di composti in modo tale da soddisfare i vincoli sulla qualità del prodotto e minimizzare i costi.

Problema di miscelazione: Formulazione

Si indichi con:

$\boldsymbol{x_i}$= percentuale di composto *i* contenuto in gr. 100 di prodotto (i=1,2,3).

Nota che la percentuale è intesa come un numero che varia fra 0 e 1 (0,4 → 40%).

Il quantitativo di proteine contenuto in gr. 100 di prodotto ottenuto miscelando i tre composti sarà dato da: $14x_1+15x_2+40x_3$.

Il controllo di qualità ha imposto che in gr. 500 di prodotto devono essere contenuti almeno gr. 120 di proteine. Ciò significa formalmente che

$14x_1+15x_2+40x_3 \geq 24$ (poiché 120/5=24).

Problema di miscelazione: Formulazione

Analogamente si ricavano i vincoli sul quantitativo di carboidrati e grassi:

$25x_1+37x_2+20x_3 \geq 23$

$57x_1+40x_2+25x_3 \geq 42.$

È necessario, inoltre, considerare che per il nuovo prodotto possono essere utilizzati soltanto i tre composti. Ciò impone che:

$x_1+x_2+x_3=1.$

Infine, si impone il vincolo di non negatività delle variabili.

Problema di miscelazione: Formulazione

L'obiettivo è minimizzare il costo di produzione che si può esprimere come la minimizzazione del costo di gr. l00 di prodotto, espresso come $z=0,80x_1+0,55x_2+0,40x_3$.

Riassumendo si avrà:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } z\\
&\quad z = 0,80\,x_1+0,55\,x_2+0,40\,x_3\\
&\text{s.v.}\\
&\qquad 14x_1+15\,x_2+40\,x_3 \geq 24\\
&\qquad 25x_1+37\,x_2+20\,x_3 \geq 23\\
&\qquad 57x_1+40\,x_2+25\,x_3 \geq 42\\
&\qquad x_1+x_2+x_3 = 1\\
&\qquad x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Soluzione ottima (spiegazione successiva): $x_1^*=0,451$; $x_2^*=0,171$; $x_3^*=0,378$ ($z^*=0,606$).

Problema di miscelazione

Esercizio:

Riformulare il modello di miscelazione modificando il significato delle variabili decisionali:

$\boldsymbol{x_i}$= numero di etti del composto *i* contenuti in una confezione da gr. 500 (*i*=1,2,3).

Problema di schedulazione

Il responsabile della gestione del personale di un'azienda manifatturiera ha il compito di organizzare i turni di lavoro per una catena di montaggio a ciclo continuo. Sono previste sei fasce orarie per ognuna delle quali è richiesto un numero minimo di unità lavorative, come riassunto dalla seguente tabella:

Fascia oraria	Minimo numero di lavoratori
00.00 - 04.00	6
04.00 - 08.00	9
08.00 - 12.00	14
12.00 - 16.00	9
16.00 - 20.00	11
20.00 - 24.00	8

Problema di schedulazione

A seguito di accordi sindacali sono stati individuati sei turni di lavoro ciascuno dei quali di 8 ore lavorative:

Turno	Orario di lavoro per turno
1	20.00 - 04.00
2	00.00 - 08.00
3	04.00 - 12.00
4	08.00 - 16.00
5	12.00 – 20.00
6	16.00 – 24.00

Si vuole determinare il numero di unità lavorative da assegnare a ogni turno in modo tale da impiegare la minor forza lavoro complessiva.

Introduzione

Problemi Decisionali (Formulazioni)

Richiami di Algebra Lineare

Programmazione Lineare

Risoluzione Grafica

Forma Standard

Soluzioni di Base e Teorema Fondamentale

Forma Canonica

Metodo del Simplesso

Regola di Bland

Metodo delle Due Fasi

Problema di schedulazione: Formulazione

Si indichi con:

$\boldsymbol{x_i}$ = unità di personale da assegnare al turno *i*-esimo (i=1,..., 6).

È evidente che la fascia oraria compresa tra le 00.00 e le 04.00 sarà coperta dalle unità lavorative del primo e del secondo turno. Dovendo garantire una disponibilità di personale di almeno 6 unità, si impone il vincolo: $x_1+x_2\geq 6$.

Analogamente si ottiene per le altre fasce orarie:

$x_2+x_3\geq 9$; $x_3+x_4\geq 14$; $x_4+x_5\geq 9$; $x_5+x_6\geq 11$; $x_6+x_1\geq 8$.

Occorre, infine, imporre il vincolo di non negatività (e interezza) delle variabili decisionali.

Problema di schedulazione: Formulazione

L'obiettivo è minimizzare il numero di unità impiegate, cioè $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$. Il problema risulta quindi:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min } z \\
&\quad z = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \\
&\text{s.v.} \\
&\quad x_1+x_2 \geq 6 \\
&\quad x_2+x_3 \geq 9 \\
&\quad x_3+x_4 \geq 14 \\
&\quad x_4+x_5 \geq 9 \\
&\quad x_5+x_6 \geq 11 \\
&\quad x_1+x_6 \geq 8 \\
&\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \\
&\quad (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \text{ int.})
\end{aligned}
$$

Problema di schedulazione: Formulazione

La soluzione ottimale prevede:

$x_1^*=6$, $x_2^*=0$, $x_3^*=9$, $x_4^*=5$, $x_5^*=9$, $x_6^*=2$,

per un numero complessivo di unità lavorative utilizzate pari a: $z^* = 31$ (spiegazione successiva).

Da notare che soltanto per la fascia oraria compresa tra le 12.00 e le 16.00 saranno utilizzate unità di personale in un numero superiore rispetto al minimo richiesto.

Problema di trasporto

Un'azienda possiede due centri di distribuzione e tre punti vendita dislocati sul territorio. Di un prodotto sono disponibili al più 250 unità presso il primo centro di distribuzione e al più 400 presso il secondo. Alla direzione centrale risulta una richiesta di rifornimento dai tre punti vendita pari ad almeno 120, 270, 130 unità rispettivamente. Presso i punti vendita ciascuna unità di prodotto viene venduta a € 14, 17 e 16. I costi unitari di trasporto (in €), legati alla distanza tra i centri di distribuzione e i punti vendita, sono così riassumibili:

	Costo	
2	4	1
3	6	5

Problema di trasporto

Presso i punti vendita è possibile vendere qualsiasi quantità di prodotto disponibile.

Occorre determinare la quantità di prodotto da trasportare dai centri di distribuzione ai punti vendita, con l'obiettivo di massimizzare il profitto.

Problema di trasporto: Formulazione

Si definiscono le seguenti variabili decisionali:

x_{ij} = unità di prodotto inviate dal centro di distribuzione *i* (*i*=1,2) al punto di vendita *j* (*j*=1,2,3).

La quantità di prodotto inviata dal primo centro di distribuzione verso i punti vendita sarà pertanto pari a $x_{11}+x_{12}+x_{13}$. Tale quantità non può eccedere la disponibilità complessiva pari a 250 unità.

Si avrà quindi: $x_{11}+x_{12}+x_{13} \leq 250$.

Problema di trasporto: Formulazione

Analogamente, per il secondo centro di distribuzione: $x_{21}+ x_{22}+ x_{23} \leq 400$.

Il primo punto vendita ha richiesto almeno 120 unità di prodotto. La fornitura potrà avvenire utilizzando i due centri di distribuzione che invieranno un quantitativo pari a $x_{11}+ x_{21}$. E' pertanto necessario imporre che: $x_{11}+x_{21} \geq 120$.

Similmente per gli altri due punti vendita, si avrà:

$x_{12}+x_{22} \geq 270$,

$x_{13}+x_{23} \geq 130$.

Problema di trasporto: Formulazione

Per calcolare il profitto complessivo derivante dalla vendita del prodotto è necessario considerare che i costi di trasporto dipendono dal centro di distribuzione e dal punto vendita interessato. Se, ad esempio, si considera il primo centro di distribuzione e il primo punto vendita, il profitto unitario, esprimibile come differenza tra ricavo e costo unitario, sarà dato da: 14–2=12.

Pertanto il profitto complessivo da massimizzare sarà:

$z=12x_{11}+13x_{12}+15x_{13}+11x_{21}+11x_{22}+11x_{23}$.

Problema di trasporto: Formulazione

Max z

$$z=12x_{11}+13x_{12}+15x_{13}+11x_{21}+11x_{22}+11x_{23}$$

s.v.

$$\begin{array}{lllllll}
x_{11}+ & x_{12}+ & x_{13} & & & & \leq 250 \\
 & & & x_{21}+ & x_{22}+ & x_{23} & \leq 400 \\
x_{11}+ & & & x_{21} & & & \geq 120 \\
 & x_{12}+ & & & x_{22} & & \geq 270 \\
 & & x_{13}+ & & & x_{23} & \geq 130 \\
x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{21}, & x_{22}, & x_{23} & \geq 0 \\
(x_{11}, & x_{12}, & x_{13}, & x_{21}, & x_{22}, & x_{23} & \text{int.})
\end{array}$$

Soluzione ottima (spiegazione successiva): $x_{11}^*=x_{12}^*=0$; $x_{13}^*=250$; $x_{21}^*=120$; $x_{22}^*=270$; $x_{23}^*=10$ $(z^*=8150)$.

Problema di investimento finanziario

Una società di assicurazione deve formulare un piano di investimento quadriennale sulla base di una liquidità valutabile in € 300.000. Essa potrà contare, inoltre, sull'utilizzo di liquidità addizionale per precedenti investimenti che si concluderanno al primo, secondo e terzo anno del seguente importo (in migliaia di euro):

	Liquidità	
60	55	32

Sono stati formulati due possibili progetti di investimento per i quali la società può stabilire una quota di partecipazione compresa tra il 25% e il 100%.

Problema di investimento finanziario

Se la quota è pari al 100%, i piani di investimento si articolano nel modo seguente:

Liquidità				
Iniziale	**Anno I**	**Anno II**	**Anno III**	**Finale**
-140	-60	+150	+30	+65
-150	+50	-43	-22	+222

Flussi di denaro(in migliaia di euro). Il segno + indica recupero di capitale, il segno - indica investimento

Se la percentuale di investimento è minore del 100%, il flusso di liquidità dovrà essere rapportato alla percentuale di partecipazione.

Problema di investimento finanziario

Non è consentito ottenere prestiti nel corso del quadriennio ed eventuali eccedenze di liquidità iniziali o alle scadenze annuali possono essere investite in certificati di deposito bancari annuali al tasso di interesse stimato al 9%. Il problema è stabilire la quota di partecipazione iniziale per i due progetti di investimento e la liquidità investita annualmente in certificati di deposito in modo tale da massimizzare la liquidità al termine del quadriennio.

Problema di investimento finanziario: Formulazione

Si indichi con:

$\boldsymbol{x_1}$= percentuale di partecipazione al primo piano di investimento;

$\boldsymbol{x_2}$= percentuale di partecipazione al secondo piano di investimento;

$\boldsymbol{x_3}$= liquidità da investire inizialmente in certificati di deposito (in migliaia di euro);

$\boldsymbol{x_4}$= liquidità da investire in certificati di deposito al termine del primo anno (in migliaia di euro);

$\boldsymbol{x_5}$= liquidità da investire in certificati di deposito al termine del secondo anno (in migliaia di euro);

$\boldsymbol{x_6}$= liquidità da investire in certificati di deposito al termine del terzo anno (in migliaia di euro).

Problema di investimento finanziario: Formulazione

Nel determinare i vincoli del problema è sufficiente considerare che la quantità di denaro da investire annualmente in certificati di deposito dovrà essere pari alla liquidità disponibile al momento.

Si avrà allora inizialmente:

$x_3=300-(140x_1+150x_2)$,

mentre, al termine degli anni successivi:

$x_4=(60+1{,}09x_3+50x_2)-60x_1$ (primo anno)

$x_5=(55+1{,}09x_4+150x_1)-43x_2$ (secondo anno)

$x_6=(32+1{,}09x_5+30x_1)-22x_2$ (terzo anno).

Problema di investimento finanziario: Formulazione

Inoltre dovrà essere $0{,}25 \leq x_1 \leq 1$ e $0{,}25 \leq x_2 \leq 1$, nonché $x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$.

Al termine della scadenza quadriennale la liquidità sarà pari a: $z = 65x_1 + 222x_2 + 1{,}09x_6$ che rappresenta, evidentemente, l'obiettivo da massimizzare.

La soluzione ottima

$x_1^* = 1$; $x_2^* = 0{,}25$; $x_3^* = 122{,}5$; $x_4^* = 146{,}025$; $x_5^* = 353{,}4173$; $x_6^* = 441{,}7248$ ($z^* = 601{,}9801$)

si ottiene risolvendo il seguente modello di PL (spiegazione successiva)

Problema di investimento finanziario: Formulazione

Max z

$$z = 65x_1 + 222x_2 + 1{,}09x_6$$

s.v.

$$
\begin{aligned}
140x_1 + 150x_2 + x_3 &= 300\\
60x_1 - 50x_2 - 1{,}09x_3 + x_4 &= 60\\
-150x_1 + 43x_2 - 1{,}09x_4 + x_5 &= 55\\
-30x_1 + 22x_2 - 1{,}09x_5 + x_6 &= 32\\
x_1 &\leq 1\\
x_2 &\leq 1\\
x_1 &\geq 0{,}25\\
x_2 &\geq 0{,}25\\
x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Problema di inventario

Un'azienda specializzata nella lavorazione di lamierati riceve una commessa concernente la produzione di lamiere di zinco pari a 2,50×2,50 m.

La quantità richiesta deve essere fornita periodicamente, improrogabilmente alla fine di ogni mese. Le richieste d_t coprono un intervallo temporale di 5 mesi, come mostrato in tabella:

Quantità				
270	290	250	240	310

Quantità di lamierati di zinco richiesto per i 5 mesi successivi

Problema di inventario

Per la lavorazione dei lamierati si utilizza un unico impianto a ciclo continuo caratterizzato, per il particolare prodotto, da costi unitari di produzione mensile c_t e da una capacità di produzione b_t (espressa in massimo numero di unità che si è in grado di lavorare mensilmente) così riassumibile:

Costi unitari e capacità mensile				
25	28	32	21	24
250	220	280	270	260

Costi unitari (in euro) e capacità mensile di produzione di lamierati di zinco

Le unità di prodotto eventualmente non consegnate verranno immagazzinate.

Problema di inventario

Ciò comporta un costo aggiuntivo di inventario, il cui valore unitario h_t varia mensilmente nel seguente modo:

Costi unitari				
10	12	8	10	11

Costi unitari mensili di inventario (in euro)

Nel magazzino sono disponibili inizialmente 100 lamiere di zinco della dimensione desiderata. L'obiettivo per l'azienda è pianificare la produzione di lamierati di zinco in modo tale da minimizzare i costi di produzione e di inventario.

Problema di inventario: Formulazione

Il problema rientra nella classe di problemi di inventario di singolo prodotto di tipo deterministico, giacché il livello di domanda da soddisfare nei periodi successivi è già noto con certezza all'inizio del primo periodo. Si indichi con:

$\boldsymbol{x_t}$= numero di lamiere di zinco prodotte durante il mese t (t=1,...,5).

Il valore dell'inventario $\boldsymbol{I_t}$ alla fine di ogni mese sarà pertanto dato da: $I_t = I_{t-1} + x_t - d_t$, $\forall\ t=1,\ldots,5$.

("inventario alla fine del mese precedente" + "produzione nel mese corrente" – "quantità fornita all'acquirente nel mese corrente").

Problema di inventario: Formulazione

Si avrà, inoltre, che I_0=100, che rappresenta la disponibilità iniziale di magazzino per la quale, senza perdita di generalità, non si assume alcun costo aggiuntivo.

Il modello risultante è riportato di seguito.

La soluzione ottima è:

x_1*=240; x_2*=220; x_3*=270; x_4*=270; x_5*=260;

I_1*=70; I_2*=0; I_3*=20; I_4*=50; I_5*=0 (z*=34070)

(spiegazione successiva).

Problema di inventario: Formulazione

Min z

$z=25x_1+28x_2+32x_3+21x_4+24x_5+10I_1+12I_2+8I_3+10I_4+11I_5$

s.v.

$$
\begin{array}{llllllllllll}
x_1 & & & & & -I_1 & & & & & = & 170 \\
x_1 & +x_2 & & & & & -I_2 & & & & = & 460 \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & & & & & -I_3 & & & = & 710 \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & & & & -I_4 & & = & 950 \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & & & & & -I_5 & = & 1260 \\
x_1 & & & & & & & & & & \leq & 250 \\
 & x_2 & & & & & & & & & \leq & 220 \\
 & & x_3 & & & & & & & & \leq & 280 \\
 & & & x_4 & & & & & & & \leq & 270 \\
 & & & & x_5 & & & & & & \leq & 260 \\
\end{array}
$$

$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ I_1,\ I_2,\ I_3,\ I_4,\ I_5 \geq 0, \text{ int.})$

Problema di assegnamento

In vista delle prossime elezioni, la Regione Calabria deve assegnare 5 località (L_1, L_2, L_3, L_4 e L_5) a 4 circoscrizioni elettorali (C_1, C_2, C_3 e C_4). In base alle posizioni geografiche delle 5 località e a fattori di tipo organizzativo, la Regione ha stimato i seguenti costi di assegnamento (in migliaia di euro):

	C_1	C_2	C_3	C_4
L_1	7,2	5,0	3,1	8,3
L_2	4,0	7,1	5,1	6,4
L_3	8,1	9,1	9,0	7,2
L_4	8,9	5,3	3,3	4,8
L_5	9,0	5,5	10,0	5,2

Problema di assegnamento

Ogni località deve essere assegnata esattamente a una circoscrizione. Inoltre, alla circoscrizione C_2 si devono assegnare esattamente due località.

Occorre decidere come assegnare le 5 località alle 4 circoscrizioni con l'obiettivo di minimizzare i costi complessivi.

Problema di assegnamento: Formulazione

Il modello prevede l'impiego di particolari variabili decisionali, dette **variabili binarie**.
Le variabili binarie possono assumere solo i valori 0 e 1; esse si presentano nei casi in cui si devono prendere delle decisioni di tipo si/no (associabili ai valori 1/0).

Variabili decisionali:

$\boldsymbol{x_{ij}} \in \{0,1\}$. In particolare, $\boldsymbol{x_{ij}}$ vale1 se la località L_i è assegnata alla circoscrizione C_j, 0 altrimenti (i=1,…,5; j=1,…,4).

Problema di assegnamento: Formulazione

Ciascuna località L_i (i=1,…,5) deve essere assegnata esattamente a una circoscrizione C_j (j=1,…,4).

Ciò significa che: $x_{i1}+ x_{i2}+ x_{i3}+ x_{i4}=1$ per ogni i=1,…,5.

Inoltre, alla circoscrizione C_2 devono essere assegnate esattamente 2 località. Ne segue che $x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52}=2$.

L'obiettivo di minimizzare i costi complessivi di assegnamento è espresso come:

$z=7{,}2x_{11}+5{,}0x_{12}+3{,}1x_{13}+8{,}3x_{14}+4{,}0x_{21}+7{,}1x_{22}+5{,}1x_{23}+6{,}4x_{24}+8{,}1x_{31}+9{,}1x_{32}+9{,}0x_{33}+7{,}2x_{34}+8{,}9x_{41}+5{,}3x_{42}+3{,}3x_{43}+4{,}8x_{44}+9{,}0x_{51}+5{,}5x_{52}+10{,}0x_{53}+5{,}2x_{54}$.

Problema di assegnamento: Formulazione

Min z

$$z=7,2x_{11}+\ldots+5,2x_{54}$$

s.v.

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1$$

$$x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1$$

$$x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}=1$$

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52}=2$$

$$x_{11},\ldots,x_{54}\in\{0,1\}$$

Problema di assegnamento: Formulazione

Soluzione ottima (spiegazione successiva): le uniche variabili decisionali diverse da 0 sono $x_{13}^*=x_{21}^*=x_{32}^*=x_{43}^*=x_{52}^*=1$ ($z^*=25$).

Si osservi che possono esistere più soluzioni ottime.

Indicando con λ_{ij} il costo di assegnamento della località L_i alla circoscrizione C_j ($i=1,\ldots,5$; $j=1,\ldots,4$), il problema può essere riformulato nel seguente modo:

Min z

$$z=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{4}\lambda_{ij}x_{ij}$$

s.v.

$$\sum_{j=1}^{4}x_{ij}=1,\; i=1,\ldots,5$$

$$\sum_{i=1}^{5}x_{i2}=2$$

$$x_{ij}\in\{0,1\},\; i=1,\ldots,5,\; j=1,\ldots,4$$

Esercizio

Un'azienda deve **tagliare** assi di acciaio di 300 cm, per realizzare profilati di lunghezza variabile (problema di *cutting stock*). In particolare, l'azienda deve produrre almeno 400 unità di lunghezza pari a 120 cm (profilati di tipo A), almeno 600 unità di lunghezza pari a 80 cm (profilati di tipo B), almeno 800 unità di lunghezza pari a 60 cm (profilati di tipo C) e almeno 200 unità di lunghezza pari a 100 cm (profilati di tipo D).

Sono stati definiti 5 modelli (o schemi) di taglio:

✓ *Modello* 1: consente di ottenere profilati di tipo A (1 unità) e profilati di tipo C (3 unità);

Esercizio

- ✓ *Modello* 2: consente di ottenere profilati di tipo C (5 unità);
- ✓ *Modello* 3: consente di ottenere profilati di tipo A (1 unità), profilati di tipo B (1 unità) e profilati di tipo D (1 unità);
- ✓ *Modello* 4: consente di ottenere profilati di tipo D (3 unità);
- ✓ *Modello* 5: consente di ottenere profilati di tipo B (3 unità) e profilati di tipo C (1 unità).

Stabilire quante volte occorre impiegare ogni modello per soddisfare le richieste e minimizzare il numero complessivo di assi da tagliare.

Algebra lineare (alla base della RO)

Vettore *n*-dimensionale: *n*-pla di numeri reali (punto nello spazio R^n) → $v^T=[v_1\ v_2 \ldots\ v_n]$.

Un vettore si dice ***unitario*** se ha una sola componente unitaria e le altre nulle; si dice ***nullo*** se ha tutte le componenti nulle.

Le principali operazioni sui vettori sono la somma (o la sottrazione) e la moltiplicazione per uno scalare.

- La ***somma*** di due vettori *u* e *v* ($u^T=[u_1\ u_2 \ldots\ u_n]$ e $v^T=[v_1\ v_2 \ldots\ v_n]$) è il vettore *u*+*v* che si ottiene sommando le componenti corrispondenti: $(u+v)^T=[u_1+v_1\ u_2+v_2 \ldots\ u_n+v_n]$.

Vettori

- La ***moltiplicazione*** di un vettore *v* ($v^T=[v_1\ v_2 \dots v_n]$) ***per uno scalare*** *k* è il vettore *kv* ottenuto moltiplicando ogni componente di *v* per *k*: $(kv)^T=[kv_1\ kv_2 \dots kv_n]$.
- La ***sottrazione*** di due vettori *u* e *v* si riconduce alla somma, considerando che $-v=-1v$; pertanto si ha: $u-v=u+(-v)$.
- Altre proprietà (*u*, *v* e *w* sono vettori in R^n, *k* è uno scalare e 0_n è il vettore nullo in R^n):

$$(u+v)+w=u+(v+w),$$
$$u+0_n=u,$$
$$u+(-u)=0_n,$$
$$u+v=v+u,$$
$$k(u+v)=ku+kv.$$

Vettori

Inoltre, ai vettori u e v ($u^T=[u_1\ u_2\ \ldots\ u_n]$, $v^T=[v_1\ v_2\ \ldots\ v_n]$) può essere applicata un'altra operazione, detta ***prodotto scalare***, che esprime lo scalare ottenuto moltiplicando le componenti corrispondenti e sommando i prodotti risultanti: $u^Tv=u_1 v_1+ u_2 v_2+\ldots+ u_n v_n$.

- I vettori u e v si dicono ortogonali se il loro prodotto scalare è zero: $u^Tv=0$.
- Proprietà del prodotto scalare: $u^Tv = v^Tu$.

✓ Dati m vettori n-dimensionali $v_1,v_2,\ldots,v_m$ e m scalari $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$, allora il vettore $v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\ldots+\alpha_m v_m$ prende il nome di ***combinazione lineare*** dei vettori.

Vettori

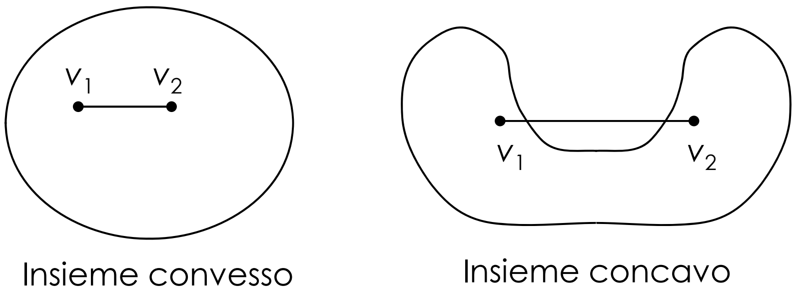
Se gli scalari sono non negativi e tali che la loro somma è 1, il vettore $v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\ldots+\alpha_m v_m$ è, più specificamente, una ***combinazione convessa*.**

- ✓ m vettori $v_1, v_2, \ldots, v_m$ si dicono ***linearmente indipendenti*** se $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\ldots+\alpha_m v_m=0_n$ solo per $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_m=0$.
- ✓ Dati due vettori, l'insieme di tutte le loro combinazioni convesse è detto ***segmento congiungente***.
- ✓ Un insieme V di vettori n-dimensionali si definisce ***convesso*** se per ogni coppia di vettori appartenenti all'insieme, il loro segmento congiungente è anch'esso completamente contenuto nell'insieme.

Vettori

$\forall\, v_1, v_2 \in V$ e $\forall\, \lambda \in [0,1]$: $\lambda v_1 + (1-\lambda) v_2 \in V$.

In caso contrario si parla di insieme ***concavo***.



✓ Un vettore v è un ***punto estremo*** di un insieme convesso se non può essere espresso come combinazione convessa di altri due vettori dell'insieme stesso.

Matrici

Matrice (dimensione $m \times n$): $m \times n$ numeri reali organizzati per *righe* e *colonne*.

- ✓ Esistono operazioni e proprietà analoghe a quelle riportate con riferimento ai vettori.
- ✓ Data una matrice A ($m \times n$) e una matrice B ($n \times p$) il risultato della loro ***moltiplicazione*** è una matrice C ($m \times p$) dove l'elemento c_{ij} è ricavato dal prodotto scalare dell'*i*-esima riga di A e della *j*-esima colonna di B.

Es.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C=AB=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 19 & 5 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrici

- ✓ Una matrice con una sola riga è detta ***vettore riga***; una matrice con una sola colonna è detta ***vettore colonna***.

- ✓ Una matrice quadrata A $(n \times n)$ si dice ***matrice identità*** $\boldsymbol{I_n}$ se ha tutti gli elementi sulla diagonale principale pari a 1 e i restanti pari a 0.

- ✓ Per le **matrici trasposte** valgono i seguenti risultati:
  - $(A^T)^T = A$,
  - Se A e B hanno le stesse dimensioni $(A+B)^T = A^T + B^T$.

Matrici

- ✓ Sia A una matrice quadrata ($n \times n$). Se esiste una matrice quadrata B ($n \times n$) tale che $AB=I_n$ e $BA=I_n$ allora B è detta ***inversa*** di A ed è indicata con A^{-1}. L'inversa, se esiste, è unica.

- ✓ A ha l'inversa (cioè è invertibile) se è ***non singolare*** (determinante diverso da 0).

- ✓ Il ***determinante*** di una matrice quadrata A ($n \times n$) ne specifica le caratteristiche e si indica con $|A|$ o con $det(A)$.

Determinante di una matrice

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

fissato un qualsiasi *j*, se lo si calcola rispetto a una qualsiasi colonna (*j*=1,…,*n*) oppure, in maniera equivalente, da:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$ fissato un qualsiasi *i*,

se lo si calcola rispetto a una qualsiasi riga (*i*=1,…,*n*).

Determinante di una matrice

A_{ij} (i,j=1,2,…,n) può essere definito come segue: fissato l'elemento di posto (i,j) si considera la matrice di ordine (n–1), ottenuta dalla matrice A togliendo la riga i e la colonna j, e se ne calcola il determinante; moltiplicando tale numero per $(-1)^{i+j}$ si ottiene il valore di A_{ij}.

Così, partendo dalla matrice più piccola, di ordine (2×2)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

si ha: $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Introduzione

Problemi Decisionali (Formulazioni)

Richiami di Algebra Lineare

Programmazione Lineare

Risoluzione Grafica

Forma Standard

Soluzioni di Base e Teorema Fondamentale

Forma Canonica

Metodo del Simplesso

Regola di Bland

Metodo delle Due Fasi

Determinante di una matrice

Si consideri una matrice 3×3 del tipo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

In base agli elementi della prima colonna, si ottiene:

$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} =$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

È evidente che il calcolo del determinante diventa sempre più articolato e complesso all'aumentare delle dimensioni della matrice.

Determinante di una matrice

Proprietà:

- ✓ Il determinante di A è uguale al determinante di A^T.
- ✓ Se gli elementi di una riga o di una colonna di una matrice sono tutti nulli, il determinante di questa matrice è nullo.
- ✓ Se gli elementi di una riga o di una colonna sono uguali o proporzionali a un'altra riga o colonna, il determinante è nullo.
- ✓ Il determinante non cambia se agli elementi di una riga o di una colonna si aggiungono o si tolgono gli elementi di altre righe o colonne moltiplicati per delle costanti arbitrarie.

Rango di una matrice

Si consideri una matrice A $(m \times n)$.

✓ Il rango-riga di A è il massimo numero di righe linearmente indipendenti (ogni riga di A è interpretabile come un vettore).

✓ Il rango-colonna di A è il massimo numero di colonne linearmente indipendenti (ogni colonna di A è interpretabile come un vettore).

✓ Il rango-riga è uguale al rango-colonna; quindi il ***rango*** di una matrice è il massimo numero di righe o colonne linearmente indipendenti.

$Rango(A) \leq \text{minimo}(m, n)$.

Se $Rango(A) = \text{minimo}(m, n)$, A si dice a ***rango pieno***.

Sottomatrici

Si consideri una matrice A ($m \times n$). Si può ottenere una sua ***sottomatrice*** scegliendo alcune righe e/o colonne di A.

Si considerino tutte le sottomatrici quadrate, con determinante non nullo, estraibili da A. Si indichi con r l'ordine della sottomatrice di ordine maggiore con queste caratteristiche. Il rango di A è pari a r.

Sottomatrici

Una matrice A può essere ***partizionata*** in sottomatrici.

Si consideri, ad esempio:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \text{ dove}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} \end{bmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

Problemi di Programmazione Lineare

Nella prima parte del corso verranno studiati dettagliatamente **metodi risolutivi** per i modelli di Programmazione Lineare (PL).

E' opportuno ricordare che, date n ***variabili reali*** $x_1,x_2,\ldots,x_n$, una ***funzione lineare*** di tali variabili $\varphi:R^n\rightarrow R$ può sempre essere espressa nella forma

$$\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)=s_1x_1+s_2x_2+\ldots+s_nx_n=\sum_{j=1}^{n} s_jx_j\ ,$$

con $s_1,s_2,\ldots,s_n$ costanti reali.

Quindi, per n=3,

$$x_1+4x_2-3{,}5x_3$$

$$-2x_1+(\ln 6)x_2+\pi x_3$$

sono funzioni lineari;

Problemi di Programmazione Lineare

mentre

$$(x_1)^2+4x_2-3,5x_3$$

$$x_1+4x_2+3,5\,e^{x_3}$$

$$3x_1+\sin x_2-4x_3$$

non sono funzioni lineari.

Equazione/disequazione lineare:

$$\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)\left\{\begin{matrix}\geq\\=\\\leq\end{matrix}\right\} t,$$

con t costante reale e φ funzione lineare.

Problemi di Programmazione Lineare

Un problema di **Programmazione Lineare** (PL) è caratterizzato da:

- ✓ una funzione obiettivo lineare (da minimizzare o massimizzare),
- ✓ un gruppo di vincoli rappresentato esplicitamente mediante un numero finito di equazioni o disequazioni lineari.

Problemi di Programmazione Lineare

Un generico problema di PL potrebbe pertanto avere la forma seguente:

$$\textbf{Opt} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s.v.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i=1,\ldots,m_1$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \; i= m_1+1,\ldots,m_1+m_2$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \; i= m_1+m_2+1,\ldots,m_1+m_2+m_3$$

dove:

Problemi di Programmazione Lineare

- ✓ *Opt=Min* o *Opt=Max*,
- ✓ x_j sono le variabili decisionali (continue) → **non ci sono i vincoli sull'interezza**,
- ✓ *n* è il numero di variabili decisionali,
- ✓ c_j sono i coefficienti della funzione obiettivo (indicati come "coefficienti di costo" nei problemi di minimiz.),
- ✓ a_{ij} sono i coefficienti delle var. decisionali nei vincoli (talvolta indicati come "coefficienti tecnologici"),
- ✓ b_i sono i termini noti nei vincoli,
- ✓ m_1, m_2 e m_3 indicano rispettivamente il numero di vincoli di uguaglianza, di disuguaglianza del tipo "≤" e di disuguaglianza del tipo "≥".

Problemi di Programmazione Lineare

Si noti che il problema precedente ingloba anche i cosiddetti **vincoli di segno** sulle variabili decisionali; tali vincoli, infatti, sono semplici disequazioni lineari.

Esempi (assumendo n=3):

✓ ***Vincolo di non negatività*** (i-esimo): $x_2 \geq 0$

$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3 \geq 0$, con $a_{i1}=a_{i3}=0$ e $a_{i2}=1$.

✓ ***Vincolo di non positività*** (i-esimo): $x_1 \leq 0$

$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3 \leq 0$, con $a_{i2}=a_{i3}=0$ e $a_{i1}=1$.

Tuttavia, in generale, si preferisce mantenere questi vincoli separati dagli altri vincoli del problema.

Problemi di Programmazione Lineare

Nel modello appena introdotto, la funzione obiettivo potrebbe anche essere "affine", cioè avere la forma

$$d + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \,,$$

con d costante reale.

Da un punto di vista algoritmico non vi è alcuna differenza nell'ottimizzare funzioni che differiscono fra loro per una costante!

Problemi di Programmazione Lineare

Il modello potrebbe essere scritto in una forma più concisa:

$$\textbf{Opt } c^T x$$

s.v.

$$A_1 x = \beta_1$$
$$A_2 x \leq \beta_2$$
$$A_3 x \geq \beta_3$$

riunendo i coefficienti di costo e le variabili decisionali in distinti vettori *n*-dimensionali

Problemi di Programmazione Lineare

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

i termini noti in 3 vettori di diverse dimensioni (m_1, m_2 e m_3)

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{m_1} \end{bmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{bmatrix} b_{m_1+1} \\ b_{m_1+2} \\ \vdots \\ b_{m_1+m_2} \end{bmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{bmatrix} b_{m_1+m_2+1} \\ b_{m_1+m_2+2} \\ \vdots \\ b_{m_1+m_2+m_3} \end{bmatrix}$$

Problemi di Programmazione Lineare

e i coefficienti delle variabili decisionali nei vincoli in 3 diverse matrici di dimensione $m_1 \times n$, $m_2 \times n$ e $m_3 \times n$ rispettivamente

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m_1 1} & a_{m_1 2} & \cdots & a_{m_1 n} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{m_1+1\,1} & a_{m_1+1\,2} & \cdots & a_{m_1+1\,n} \\ a_{m_1+2\,1} & a_{m_1+2\,2} & \cdots & a_{m_1+2\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m_1+m_2\,1} & a_{m_1+m_2\,2} & \cdots & a_{m_1+m_2\,n} \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{m_1+m_2+1\,1} & a_{m_1+m_2+1\,2} & \cdots & a_{m_1+m_2+1\,n} \\ a_{m_1+m_2+2\,1} & a_{m_1+m_2+2\,2} & \cdots & a_{m_1+m_2+2\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m_1+m_2+m_3\,1} & a_{m_1+m_2+m_3\,2} & \cdots & a_{m_1+m_2+m_3\,n} \end{bmatrix}.$$

Problemi di Programmazione Lineare

Il notevole peso dato ai modelli lineari si può spiegare in vari modi:

- ✓ molti concetti e proprietà relativi ai modelli lineari si possono ritrovare, con opportune varianti, anche in modelli più complessi;
- ✓ i modelli lineari possono essere risolti molto efficientemente;
- ✓ moltissimi modelli applicativi sono effettivamente modelli lineari o possono ricondursi a essi;
- ✓ molti modelli non lineari possono essere approssimati efficacemente mediante opportuni modelli lineari.

Definizioni

Si consideri un problema *P* di PL con *n* incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ che possono essere viste come le componenti di un vettore *n*-dimensionale x (come in precedenza).

- ✓ Si definisce ***regione ammissibile*** l'insieme *X* dei vettori $x \in R^n$ che soddisfano tutti i vincoli.
- ✓ *P* è detto **ammissibile** se $X \neq \emptyset$. In caso contrario, si parla di problema **inammissibile**.
- ✓ Un vettore $x \in R^n$ è detto **ammissibile** per *P* se $x \in X$.

Definizioni

- ✓ Un vettore $x \in R^n$ è una **soluzione ottima** per *P* se $x \in X$ e il valore di funzione obiettivo a esso corrispondente è minore o uguale al valore di funzione obiettivo corrispondente a un qualsiasi altro vettore appartenete a *X* se il problema è di *minimizzazione* (maggiore o uguale se il problema di *massimizzazione*).
- ✓ *P* è **illimitato** se per ogni $k \in R$ esiste $x \in X$ tale che $z<k$ se il problema è di *minimizzazione*, $z>k$ se il problema è di *massimizzazione* (z è il valore di funzione obiettivo corrispondente a x).

Iperpiani e semispazi affini

Sia $\alpha \in R^n$ un vettore non nullo e β un numero reale.

L'insieme $\boldsymbol{H = \{x \in R^n \colon \alpha^T x = \beta\}}$ si definisce ***iperpiano*** (un iperpiano generalizza la nozione di retta in R^2). Un iperpiano è un insieme convesso.

Un iperpiano suddivide lo spazio R^n in due insiemi convessi definiti ***semispazi affini***

$$\boldsymbol{H' = \{x \in R^n \colon \alpha^T x \leq \beta\}}$$

$$\boldsymbol{H'' = \{x \in R^n \colon \alpha^T x \geq \beta\}}$$

(in R^2, H' e H'' corrispondono a 2 *semipiani*).

Nota: l'intersezione di insiemi convessi è un insieme convesso.

Introduzione

Problemi Decisionali (Formulazioni)

Richiami di Algebra Lineare

Programmazione Lineare

Risoluzione Grafica

Forma Standard

Soluzioni di Base e Teorema Fondamentale

Forma Canonica

Metodo del Simplesso

Regola di Bland

Metodo delle Due Fasi

Problemi di PL con 2 incognite

Quando un problema di PL contiene solamente ***due variabili decisionali*** (n=2), si può utilizzare un piano cartesiano e determinare una soluzione in maniera elementare con semplici deduzioni geometriche. Sebbene i problemi di PL siano generalmente caratterizzati da un maggior numero di variabili, la modalità di ***risoluzione grafica*** costituisce un valido supporto per una migliore comprensione dei metodi di soluzione dei problemi di PL per via numerica.

Nello spazio R^2, vincoli lineari possono essere rappresentati graficamente, individuando per ciascuno di essi la retta o il semipiano in cui è soddisfatta la condizione che esprimono.

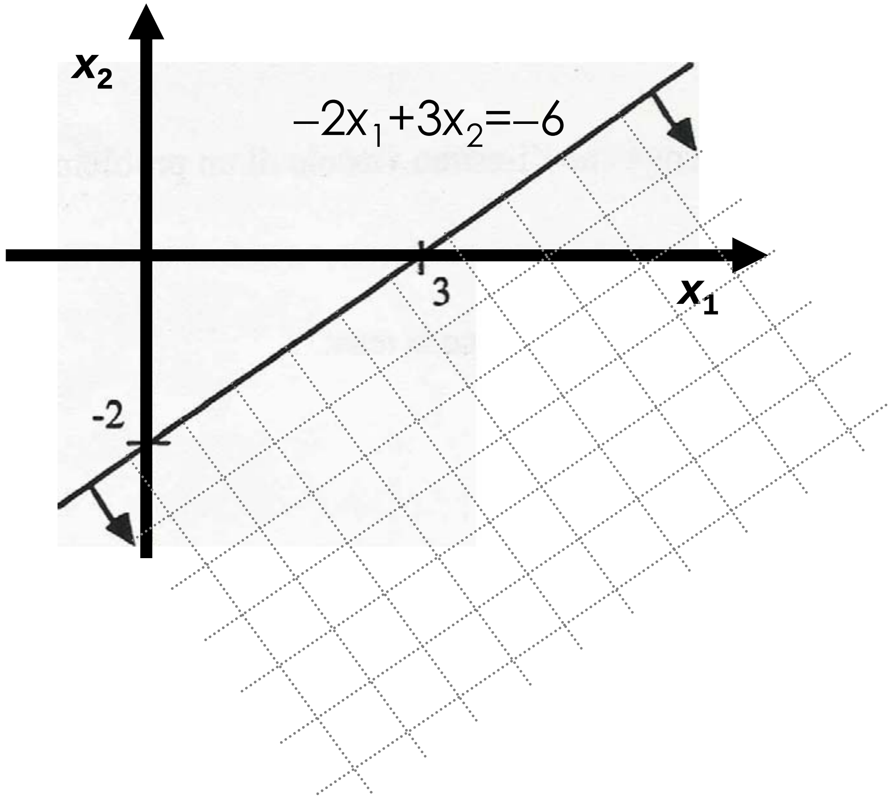
Problemi di PL con 2 incognite

In particolare, un vincolo di uguaglianza corrisponde a una ***retta***, mentre un vincolo di disuguaglianza corrisponde a un ***semipiano***. L'intersezione delle rette e dei semipiani associati ai vincoli individua la ***regione ammissibile***.

Poiché la funzione obiettivo è anch'essa lineare, è possibile individuare un fascio di rette parallele tra loro, ciascuna delle quali rappresenta l'insieme dei punti che corrispondono a uno stesso valore di funzione obiettivo. Tali rette parallele, note come ***curve di livello,*** sono ortogonali alla direzione del vettore definito dai coefficienti della funzione obiettivo.

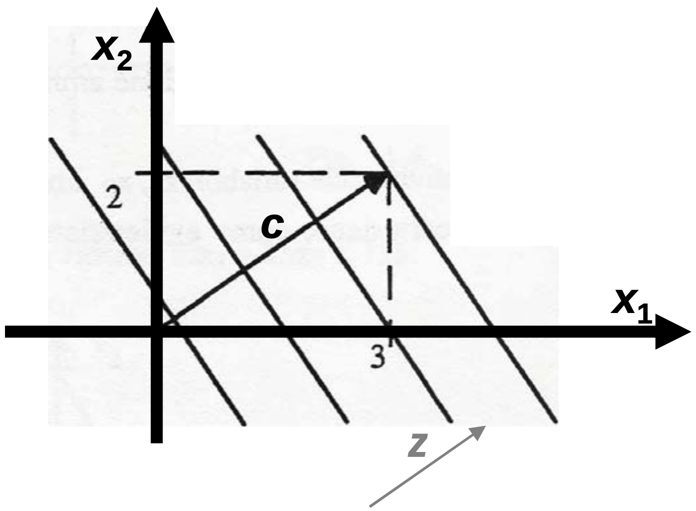
Rappresentazione di un vincolo

Rappresentazione del vincolo di disuguaglianza S:$-2x_1+3x_2 \leq -6$ (semipiano).



Rappresentazione delle curve di livello

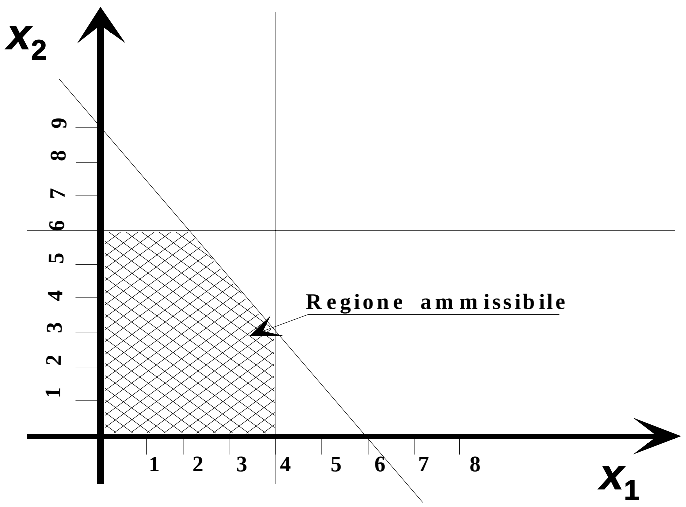
Sia $c^T=[3 \;\; 2]$ il vettore dei coefficienti della funzione obiettivo di un problema di PL con 2 variabili decisionali. Le curve di livello sono rappresentate dalle rette $3x_1+2x_2=z$ ***ortogonali*** alla direzione del vettore definito dai coefficienti della funzione obiettivo. Il valore di funzione obiettivo cresce nel verso di questo vettore.



Esempio 1

$$
\begin{aligned}
\mathit{Max}\ \ z = \ & 3x_1 + 5x_2 \\
& x_1 \qquad\quad \leq 4 \\
& \qquad\quad x_2 \leq 6 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\
& x_1, \quad x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

La regione ammissibile è di seguito rappresentata:



Esempio 1

Facendo variare il valore di z si ottengono delle curve di livello parallele. L'obiettivo è quello di individuare la curva di livello ottima.

Si rappresenta il vettore dei coefficienti della funzione obiettivo c^T=[3 5] (vettore applicato nell'origine) e si disegna una retta a esso ortogonale (si disegna cioè una qualsiasi curva di livello). Si fa "scivolare" tale retta parallelamente a se stessa nel **verso dato da *c*** (poiché si sta considerando un **problema di massimizzazione**).

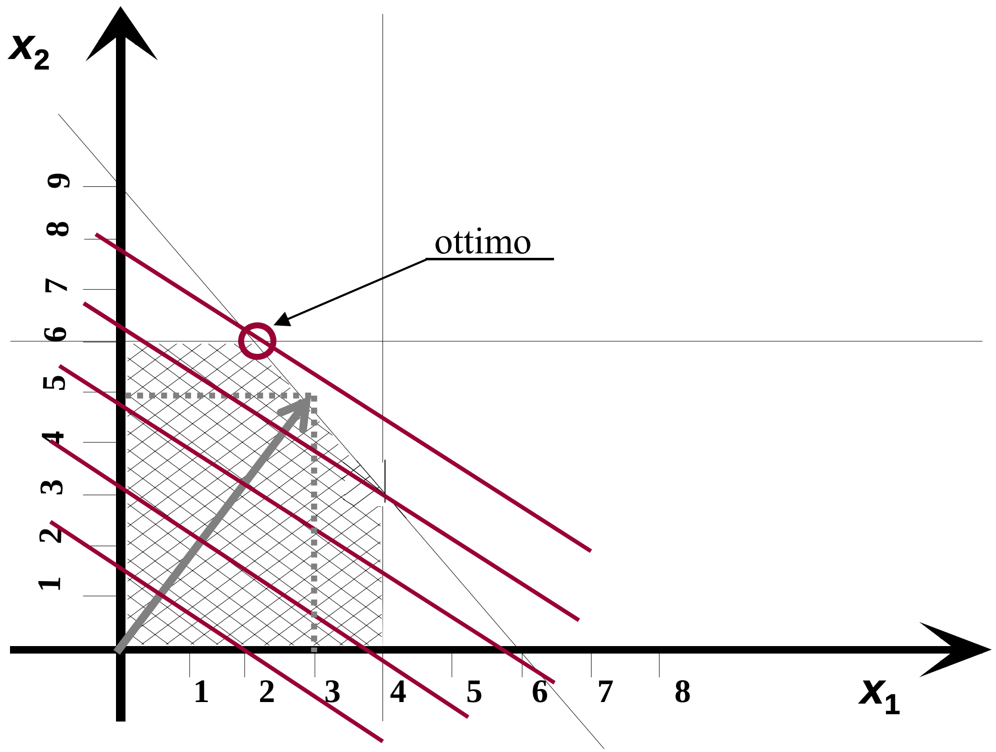
Nota: Per problemi di ***minimizzazione***, si fa "scivolare" la retta parallelamente a se stessa nel ***verso opposto* a quello di *c***.

Esempio 1

L'ultimo punto della regione ammissibile incontrato dalla retta rappresenta l'ottimo del problema di PL considerato.

In questo caso, l'ottimo corrisponde al punto di intersezione delle rette: $x_2=6$ e $3x_1+2x_2=18 \rightarrow x_1=2$; $x_2=6$. Il valore di funzione obiettivo associato a tale punto è: $z^*=36$.

Esempio 1



Esercizio:

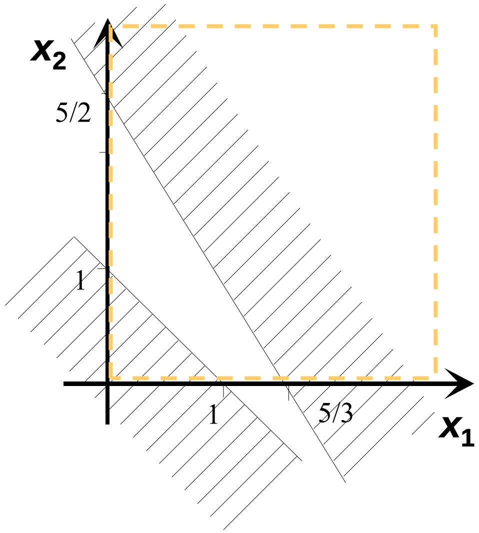
Rappresentare la regione ammissibile per il problema dell'esempio 1 nel caso in cui il vincolo $3x_1+2x_2 \leq 18$ è rimpiazzato dal vincolo $3x_1+ 2x_2 =18$.

L'ottimo del problema cambia?

Esempio 2

$$
\begin{aligned}
Min\ \ z = & -x_1 + x_2 \\
& 3x_1 + 2x_2 \geq 5 \\
& x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x_1, \ x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

La regione ammissibile è un insieme vuoto: il problema è inammissibile!



Esempio 3

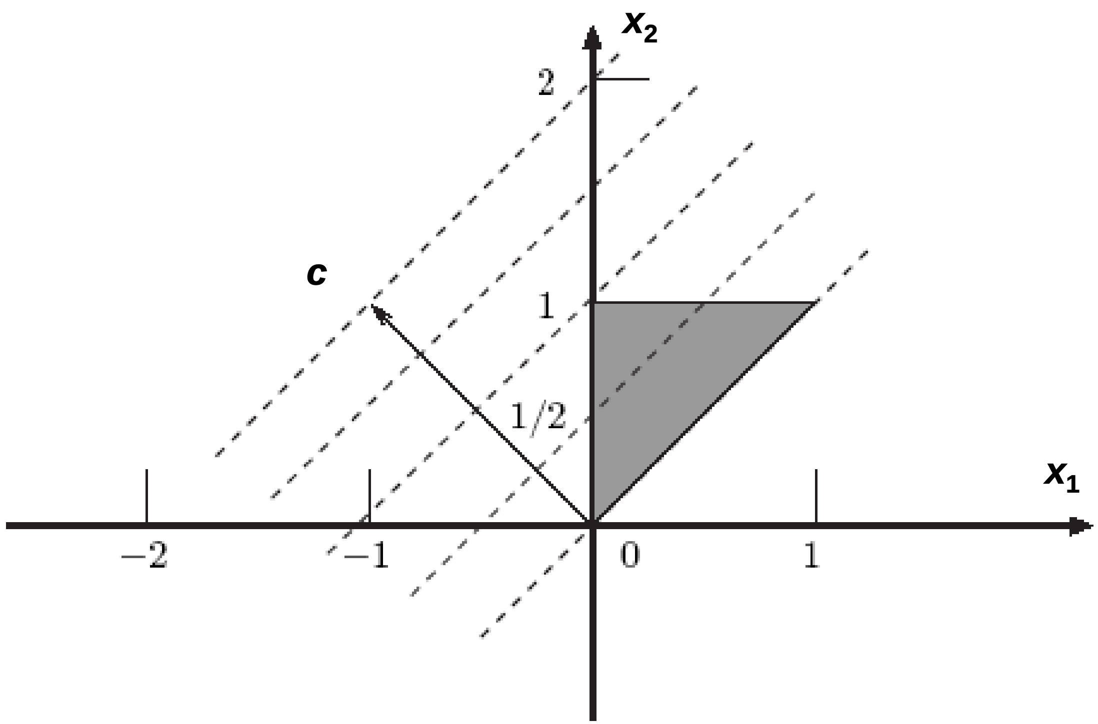
Risolvere graficamente i seguenti problemi di PL

$$\begin{aligned} & Max\ \ z = -x_1 + x_2 \\ & \text{s.v.} \\ & \qquad x_1 - x_2 \le 0 \\ & \qquad x_2 \le 1 \\ & \qquad x_1 , x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Min\ \ z = -x_1 + x_2 \\ & \text{s.v.} \\ & \qquad x_1 - x_2 \le 0 \\ & \qquad x_2 \le 1 \\ & \qquad x_1 , x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Esempio 3

La regione ammissibile dei due problemi è identica, come identico è il vettore dei coefficienti della funzione obiettivo.



Esempio 3

Poiché $c^T=[-1 \;\; 1]$, la soluzione ottima del problema di massimizzazione è $x^{*T}=[0 \;\; 1]$ (con $z^*=1$).

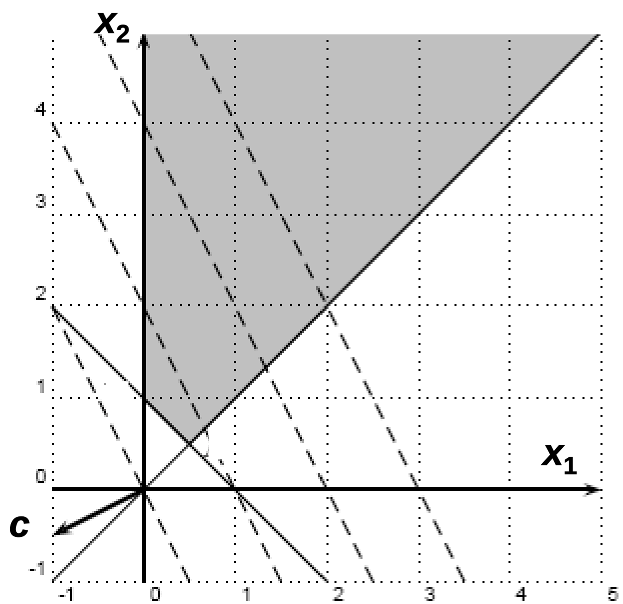
Il problema di minimizzazione, invece, ammette infinite soluzioni ottime poiché la curva di livello corrispondente a $z=0$ coincide con la retta che definisce il primo vincolo. Essa corrisponde infatti a $-x_1+x_2=z=0 \rightarrow x_1-x_2=0$.

Le infinite soluzioni ottime sono del tipo:

$$x^*(\lambda) = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (1-\lambda) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ con } \lambda \in [0,1] \text{ e } z^*=0.$$

Esempio 4

$$
\begin{array}{lrrl}
\mathit{Min}\ \ z = & -x_1 - 0{,}5\,x_2 & & \\
& -x_1 & +\,x_2 & \geq 0 \\
& x_1 & +\,x_2 & \geq 1 \\
& x_1\ , & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$



Il problema è illimitato!

Forma standard di un problema di PL

Un problema di PL può essere rappresentato in vari modi equivalenti.

Talvolta risulta utile ricondursi alla cosiddetta "forma standard":

$$\begin{aligned} \textbf{\textit{Min}} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.v.} \quad & \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; i=1,\ldots,m \\ & x_j \geq 0, \; j=1,\ldots,n \end{aligned}$$

Naturalmente, lo stesso problema può essere espresso in una forma più concisa:

Forma standard di un problema di PL

$$
\begin{aligned}
\textbf{\textit{Min}} \quad & c^T x \\
\text{s.v.} \quad & \\
& Ax = b \\
& \quad x \geq 0_n
\end{aligned}
$$

dove:

$$
c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix},\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.
$$

Trasformazioni

Un problema di programmazione lineare potrebbe non essere “naturalmente” nella forma standard.

☛ **Ricondurre un problema alla forma standard**

- ✓ Max → Min
- ✓ Vincoli di disuguaglianza → Vincoli di uguaglianza
- ✓ Variabili non positive o non vincolate in segno → Variabili non negative

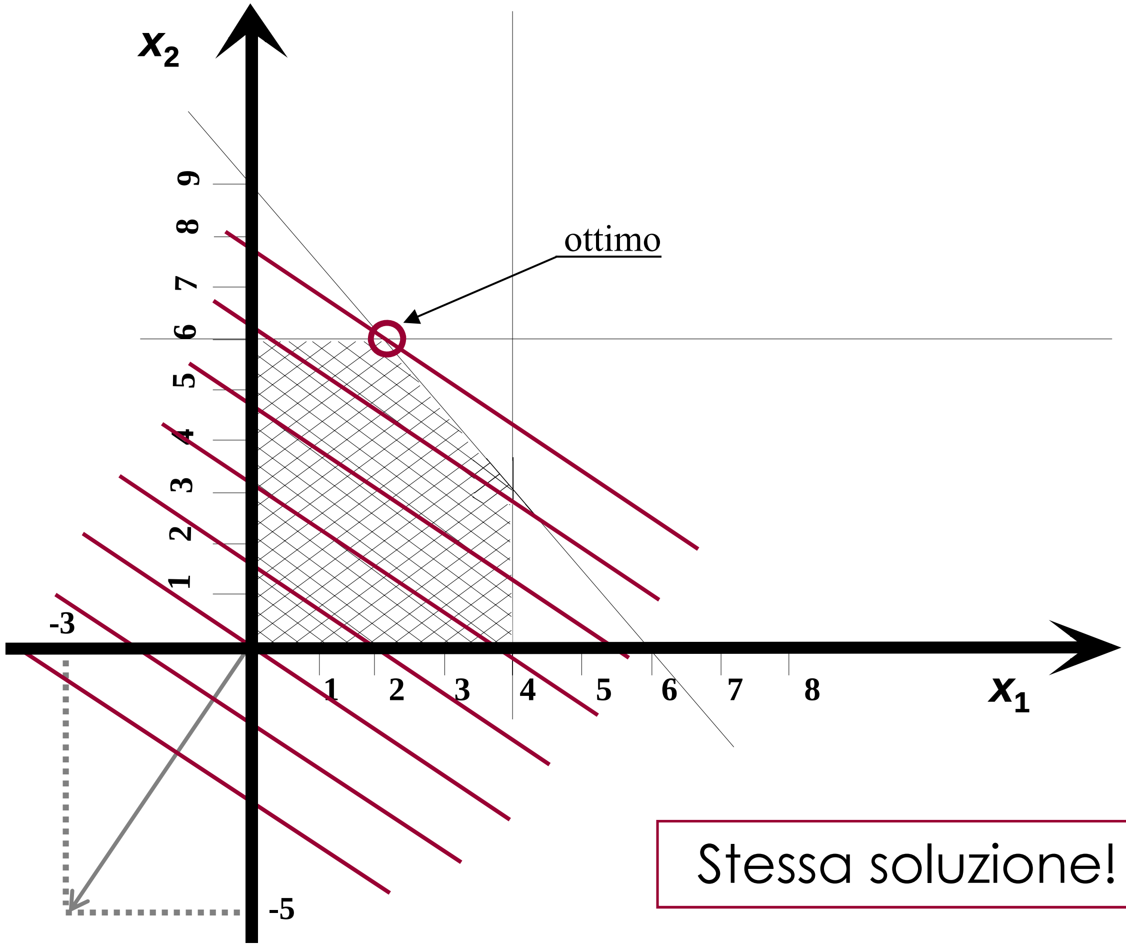
Forma standard (trasformazioni)

- ✓ **Massimizzazione**. Se si richiede la massimizzazione di un obiettivo lineare, ci si può ricondurre a un problema di minimizzazione semplicemente cambiando segno al vettore c dei coefficienti della funzione obiettivo. Dovendo, ad esempio, risolvere un problema di PL di massimizzazione con vincoli di uguaglianza e variabili non negative, avendo a disposizione un codice di calcolo predisposto per la minimizzazione, basterà risolvere il problema

$$
\begin{aligned}
-\textit{Min} \quad & -c^T x \\
\text{s.v.} \quad & \\
& Ax = b \\
& x \geq 0_n
\end{aligned}
$$

Riferimento: Esempio 1 del metodo di risoluzione grafica

$$Max\ \ 3x_1+5x_2 = -\ \mathbf{Min}\ -3x_1-5x_2$$



Stessa soluzione!

Forma standard (trasformazioni)

Il segno "−" prima dell'operatore "*Min*" indica che, al termine, occorre cambiare segno al valore dell'ottimo trovato (solo al *valore* di funzione obiettivo corrispondente alla soluzione trovata, non alla soluzione stessa!).

✓ **Vincoli di disuguaglianza**. Un vincolo del tipo

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,$$

può essere trasformato in un vincolo di uguaglianza introducendo una nuova variabile non negativa, coerentemente con quanto richiesto dalla forma standard:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + s_i = b_i, \quad s_i \geq 0.$$

Forma standard (trasformazioni)

La variabile s_i è detta variabile di ***slack*** o di ***scarto***. Se nel problema compaiono diversi vincoli di disuguaglianza del tipo "≤", si potrà operare una simile trasformazione per ciascuno di essi, ricordandosi di utilizzare, per ciascun vincolo, una diversa variabile di slack.

Se nel problema compaiono disequazioni del tipo "≥", si utilizza un procedimento analogo. In particolare una disequazione del tipo

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i,$$

può essere rimpiazzata con:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - s_i = b_i, \quad s_i \geq 0.$$

Forma standard (trasformazioni)

In questo caso, la variabile s_i è detta variabile di ***surplus*** o di ***eccedenza***.

- ✓ **Vincoli sul segno delle variabili**. Talvolta una variabile decisionale è vincolata ad assumere valori non positivi: $x_j \leq 0$. In questo caso, sostituendo ogni occorrenza della variabile x_j con il suo opposto $y_j = -x_j$, si può scrivere il vincolo di non negatività: $y_j \geq 0$. In altri casi, invece, la variabile decisionale è non vincolata in segno. Uno dei modi più utilizzati per trattare questo caso consiste nel sostituire la variabile *libera* con la differenza di due variabili non negative:

$$x_j = x_j^+ - x_j^-, \text{ dove } x_j^+, x_j^- \geq 0.$$

Forma standard (trasformazioni)

Grazie alle trasformazioni appena viste, un problema generico di PL può sempre essere ricondotto a un ***problema equivalente*** in forma standard; in alcuni casi tale problema avrà un numero di variabili decisionali maggiore del problema originale.

Le trasformazioni viste si configurano come operazioni in grado di mantenere inalterata la struttura del problema sotto studio.

Forma standard (trasformazioni)

Esempio:

Riduzione alla forma standard del seguente problema di PL:

$$\mathit{Max} \quad z = -20x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4$$

s.v.

$$
\begin{aligned}
-3x_1 + 22x_2 - 5x_3 - 12x_4 &\leq 4 \\
4x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 15x_4 &= 9 \\
2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 6x_4 &\geq 2 \\
x_2, \quad x_3, \quad x_4 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Forma standard (trasformazioni)

Forma standard:

$$(-)\ Min \quad z = 20\,x_1^{+} - 20\,x_1^{-} - 3x_2 + 4x_3 - 4x_4$$

s.v.

$$\begin{array}{rrrrrrrl}
-3\,x_1^{+} & +3x_1^{-} & +22x_2 & -5x_3 & -12x_4 & +\,x_5 & & = 4 \\
4x_1^{+} & -4x_1^{-} & +7x_2 & +5x_3 & +15x_4 & & & = 9 \\
2x_1^{+} & -2x_1^{-} & +2x_2 & +4x_3 & -6x_4 & & -x_6 & = 2 \\
x_1^{+}, & x_1^{-}, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \geq 0
\end{array}$$

Forma standard (trasformazioni)

Esercizio:

1. Ricondurre alla forma standard il problema di PL formulato a pag. 33 (modello di miscelazione).
2. Scrivere il problema in forma standard ottenuto al punto precedente in una forma più concisa utilizzando vettori e matrici.

Introduzione

Problemi Decisionali (Formulazioni)

Richiami di Algebra Lineare

Programmazione Lineare

Risoluzione Grafica

Forma Standard

Soluzioni di Base e Teorema Fondamentale

Forma Canonica

Metodo del Simplesso

Regola di Bland

Metodo delle Due Fasi

Teoria della Programmazione Lineare

Si consideri un problema di PL in forma standard (P_S).

$$
\begin{aligned}
\textbf{\textit{Min}} \quad & c^T x \\
& Ax = b \\
& x \geq 0_n
\end{aligned}
$$

Si fanno le seguenti ipotesi:

✓ il numero di righe della matrice $A \in R^{m \times n}$ è strettamente minore del numero di colonne.

✓ la matrice A ha rango pari al numero di righe.

E' chiaro che esistono casi in cui queste ipotesi non sono verificate. Tuttavia è possibile ridurre l'analisi dei problemi di PL in forma standard alle sole situazioni nelle quali esse sono valide.

Teoria della Programmazione Lineare

Da un punto di vista formale, si hanno infatti i seguenti casi.

✓ ***m>n***: nel sistema di equazioni $Ax=b$ compaiono più equazioni che incognite. Segue che il sistema

- è privo di soluzioni → il problema di *PL* sarà non ammissibile;
- ammette almeno una soluzione → almeno un'equazione è ridondante e può essere eliminata (si può ripetere l'operazione, eliminando via via le equazioni ridondanti).

Teoria della Programmazione Lineare

✓ ***m=n***: la matrice *A* è quadrata.

- Se det(A)≠0 esiste un'unica soluzione tale che $Ax=b$. Se tale soluzione ha tutte componenti non negative, essa sarà anche ottimale; se invece esiste almeno una componente negativa, il problema di PL è inammissibile.
- Se det(A)=0 il sistema non ammette soluzioni oppure almeno un'equazione può essere eliminata (ci si riconduce quindi al caso $m<n$).

✓ ***m<n***: eliminando tutte le eventuali equazioni ridondanti, si arriva a un sistema equivalente a quello iniziale caratterizzato da una matrice *A* con rango pari a *m*.

Teoria della Programmazione Lineare

Lo stesso metodo utilizzato per la risoluzione dei problemi di PL potrà essere utilizzato anche per la verifica delle ipotesi, come si vedrà in seguito.

Se rango(A)=m, è sempre possibile scegliere tra le n colonne della matrice A un sottoinsieme costituito da m colonne fra loro linearmente indipendenti. In altri termini, è sempre possibile individuare un insieme di indici $B \subset \{1,\ldots,n\}$ a cui corrisponde una sottomatrice $A_B \in R^{m \times m}$ invertibile (A_B è costituita da m colonne linearmente indipendenti i cui indici sono in B).

Teoria della Programmazione Lineare

Le restanti colonne di A formano una sottomatrice $A_N \in R^{m\times(n-m)}$ (gli indici di tali colonne costituiscono l'insieme $N=\{1,\ldots,n\}\setminus B$).

- ✓ B è detto ***insieme degli indici di base*** (indici delle colonne linearmente indipendenti).
- ✓ A_B è detta ***matrice di base*** o semplicemente ***base***. Il nome "base" deriva dal fatto che le m colonne di A_B costituiscono una base per lo spazio m-dimensionale, cioè ogni elemento di R^m può essere espresso in modo univoco tramite una combinazione lineare delle colonne di A_B.
- ✓ N è detto ***insieme degli indici non di base***.
- ✓ A_N è detta ***matrice non di base***.

Teoria della Programmazione Lineare

Anche il vettore x può essere visto come formato da due sottovettori:

- ✓ x_B: sottovettore di *m* componenti (dette ***variabili di base***); l'*i*-esimo elemento di x_B è la variabile decisionale associata all'*i*-esima colonna di A_B (i=1,…,m).
- ✓ x_N: sottovettore di *n–m* componenti (dette ***variabili non di base***); il *j*-esimo elemento di x_N è la variabile associata alla *j*-esima colonna di A_N (j=1,…,$n-m$).

Il sistema $Ax=b$ può essere sempre riscritto come

$$[A_B\ A_N]\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}=b \rightarrow A_Bx_B+A_Nx_N=b.$$

Teoria della Programmazione Lineare

Esempio:

$$
\begin{array}{lllll}
\textit{Min} & 3x_1 & -2x_2 & +4x_3 & \\
\text{s.v.} & & & & \\
 & 2x_1 & -4x_2 & +14x_3 & =12 \\
 & x_1 & +3x_2 & +12x_3 & =26 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0
\end{array}
\qquad (\tilde{P})
$$

Si consideri $B=\{2,3\}$.

$|A_B| \neq 0$ $\rightarrow$ la matrice A_B è non singolare $\rightarrow$ la matrice A_B è invertibile.

$$
Ax=b \;\rightarrow A_Bx_B+A_Nx_N=b \rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 14 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 = \begin{bmatrix} 12 \\ 26 \end{bmatrix}.
$$

Soluzioni di base

$Ax=b \rightarrow A_B x_B + A_N x_N = b \rightarrow A_B x_B = b - A_N x_N$.

Poiché A_B è invertibile, si può moltiplicare il primo e il secondo membro dell'equazione per A_B^{-1}:

$A_B^{-1} A_B x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N \rightarrow x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$.

Ponendo $x_N = 0_{n-m}$, si ottiene $x_B = A_B^{-1} b$.

Definizione: la soluzione $\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_B^{-1} b \\ 0_{n-m} \end{bmatrix}$ sicuramente soddisfa il sistema di vincoli $Ax=b$. Essa è detta ***soluzione di base*** associata alla base A_B (o rispetto all'insieme degli indici di base B) per il problema P_S.

Soluzioni di base

Si noti che una soluzione di base possiede sicuramente $n-m$ componenti uguali a zero.

Potrebbe, tuttavia, avere anche più di $n-m$ componenti nulle (il valore di qualche variabile di base è pari a zero). In questo caso si parla di ***soluzioni di base degeneri***. Per estensione, anche la base si dirà degenere.

Definizione: una soluzione di base $\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_B^{-1}b \\ 0_{n-m} \end{bmatrix}$ è ***ammissibile*** per il problema P_S se $x_B \geq 0_m$.

Soluzioni di base

Esempio:
Con riferimento al precedente problema in forma standard $(\tilde{P})$, la soluzione di base rispetto all'insieme degli indici B={2,3} è:

$$\begin{bmatrix} x_B \\ \hdashline x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_B^{-1}b \\ \hdashline 0_{n-m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22/9 \\ 14/9 \\ \hdashline 0 \end{bmatrix},$$

considerando che $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -2/15 & 7/45 \\ 1/30 & 2/45 \end{bmatrix}$.

La soluzione $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 22/9 \\ 14/9 \end{bmatrix}$ è una soluzione di base ammissibile e non degenere.

Teorema fondamentale della PL

Con riferimento a un problema di PL in forma standard con $m<n$ e rango$(A)=m$, valgono le seguenti proposizioni:

i. se esiste una soluzione ammissibile allora esiste una soluzione di base ammissibile;

ii. se esiste una soluzione ottima, allora esiste una soluzione di base ottima.

Osservazioni

- È sufficiente esplorare le sole soluzioni di base, poiché tra di esse, se il problema ammette ottimo, si troverà la soluzione ottimale; ciò non vuol dire che non possano esistere soluzioni non di base ottimali, ma almeno una delle soluzioni ottimali deve essere di base. Le eventuali soluzioni ottimali alternative avranno, naturalmente, tutte lo stesso valore di funzione obiettivo.

  Si osservi che il teorema della PL permette, in un certo senso, di passare da uno spazio delle soluzioni (da analizzare per trovare l'ottimo) "continuo" a un insieme di candidati ottimi discreto, anzi, finito.

Osservazioni

Infatti le soluzioni di base nascono dall'identificazione di una sottomatrice A_B invertibile costituita da m colonne della matrice originale A. Pertanto il numero complessivo di possibili basi non potrà superare il numero (finito) di modi in cui è possibile scegliere m colonne da un insieme di n, cioè

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

⬇

numero massimo di soluzioni di base

Osservazioni

Tuttavia il numero di soluzioni di base cresce al crescere di *n* e *m* a una velocità tale da rendere totalmente impraticabile la strada dell'***enumerazione esplicita*** di tutte le soluzioni di base.

Il ***metodo del simplesso*** si è dimostrato estremamente efficiente nel determinare una soluzione di base ottimale evitando di generare esplicitamente tutte le soluzioni di base (compiendo cioè una loro ***enumerazione implicita***).

Forma canonica

Si consideri un problema di PL caratterizzato solamente da vincoli di "≤" e variabili vincolate in segno; si ipotizzi anche che tutti i termini noti b_i dei vincoli siano non negativi:

$$
\begin{array}{ll}
\textbf{\textit{Min}} & \sum_{j=1}^{t} c_j x_j \\
\text{s.v.} & \\
 & \sum_{j=1}^{t} a_{ij} x_j \le b_i,\ i=1,\ldots,m \\
 & x_j \ge 0,\ j=1,\ldots,t
\end{array}
$$

Introducendo m variabili di slack per portare il sistema in forma standard, si arriva alla forma:

Forma canonica

$$\textbf{Min} \quad \sum_{j=1}^{t} c_j x_j$$

s.v.

$$\sum_{j=1}^{t} a_{ij} x_j + x_{t+i} = b_i, \; i=1,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0, \; j=1,\ldots,t+m$$

Il problema è in ***forma canonica***.

Caratteristiche:

- ✓ esistono m variabili decisionali associate a un coefficiente di costo nullo;
- ✓ ciascuna di queste variabili compare in una sola equazione con coefficiente tecnologico pari a 1.

Forma canonica

In questo caso, è semplice individuare una soluzione di base ammissibile (quella associata all'insieme $B=\{t+1,t+2,\ldots,t+m\}$)

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ \text{-.-.-} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{t+1} \\ \vdots \\ x_{t+m} \\ \text{-.-.-} \\ x_1 \\ \vdots \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \geq 0 \\ \vdots \\ b_m \geq 0 \\ \text{-.-.-} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} m \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} (t+m)-m=t \end{array}$$

(***Nota***. La matrice $A_B=I_m$ è una particolare matrice invertibile: la matrice identità)

Esempio

$$
\begin{array}{ll}
Min & 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\
\text{s.v.} & \\
& 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 15 \\
& -x_1 + 5x_2 - x_3 \le 12 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3 \ge 0
\end{array}
$$

$\Downarrow$

$$
\begin{array}{ll}
Min & 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\
\text{s.v.} & \\
& 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\
& -x_1 + 5x_2 - x_3 + x_5 = 12 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5 \ge 0
\end{array}
$$

Esempio

$B=\{4,5\}$; $N=\{1,2,3\}$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] ; \quad b = \begin{bmatrix} 15 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} A_N & A_B \end{array}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ \hdashline x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ \hdashline x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_B^{-1} b = A_B b = b \\ \hdashline 0_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 12 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x^T=[x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4\ \ x_5]=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 15\ \ 12]$ è una soluzione di base ammissibile.

Ottimalità di una soluzione di base ammissibile

Un problema in ***forma standard*** P_S con $m<n$ e rango$(A)=m$ (dove $A \in R^{m \times n}$), individuato un insieme di indici di base B, può essere scritto come

$$\begin{aligned} \textbf{Min } & c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ & A_B x_B + A_N x_N = b \\ & x_B \geq 0_m,\ x_N \geq 0_{n-m} \end{aligned}$$

Anche il vettore dei costi c, infatti, può essere suddiviso in due sottovettori:

- ✓ c_B: sottovettore dei coefficienti di costo associati alle variabili di base;
- ✓ c_N: sottovettore dei coefficienti di costo associati alle variabili non di base.

Ottimalità di una soluzione di base ammissibile

$A_B x_B + A_N x_N = b \rightarrow x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$

La funzione obiettivo di P_s si può scrivere in maniera equivalente come:

$$\textbf{\textit{Min}}\ c_B^T A_B^{-1} b - c_B^T A_B^{-1} A_N x_N + c_N^T x_N$$

$$\Downarrow$$

$$\textbf{\textit{Min}}\ c_B^T A_B^{-1} b + \boxed{(c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N)}\, x_N$$

vettore dei coefficienti di costo ridotto associati alle variabili non di base

Ottimalità di una soluzione di base ammissibile

Il problema P_S può essere quindi riscritto in modo equivalente come:

$$\textbf{\textit{Min}}\ c_B^T A_B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N)\, x_N$$
$$x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$$
$$x_B \geq 0_m,\ x_N \geq 0_{n-m}$$

Una soluzione $\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_B^{-1} b \geq 0_m \\ 0_{n-m} \end{bmatrix}$ è una soluzione di base ammissibile per il problema. A essa è associato un valore di funzione obiettivo pari a $\overline{d} = c_B^T A_B^{-1} b$.

- Se $(c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N) \geq 0_{n-m}^T$, questa soluzione è ottima.

Ottimalità di una soluzione di base ammissibile

Avendo posto $\overline{d} = c_B{}^T A_B{}^{-1} b$ e considerando $\overline{b} = A_B{}^{-1} b$, $\overline{c}_N^T = c_N{}^T - c_B{}^T A_B{}^{-1} A_N$, $\overline{A}_N = A_B{}^{-1} A_N$, si ottiene:

$$
\begin{aligned}
\textbf{\textit{Min}} \quad & \overline{d} + \overline{c}_N^T x_N \\
& x_B + \overline{A}_N x_N = \overline{b} \\
& x_B \geq 0_m,\ x_N \geq 0_{n-m}
\end{aligned}
$$

costante reale

Se $\overline{b} \geq 0_m$ il problema è in **forma canonica** rispetto a B.

Forma canonica (trasformazioni)

Ricapitolando:

- ✓ un problema di PL potrebbe già essere naturalmente in forma canonica;
- ✓ se un problema di PL ha solo vincoli "≤" e $b \geq 0_m$, trasformando il problema in forma standard si ottiene già una forma canonica. Infatti, considerando B pari all'insieme degli indici associati alle variabili di *slack*, si ha $A_B = I_m$ e $c_B = 0_m$;
- ✓ un generico problema in forma standard, con $m<n$ e rango$(A)=m$, può essere ricondotto alla forma canonica attraverso le operazioni appena viste se si conosce un insieme di indici di base B tale che $A_B^{-1}b \geq 0_m$.

Principi alla base del metodo del simplesso

Il metodo del simplesso considera forme canoniche dei problemi di PL.

Si consideri quindi un problema in forma canonica rispetto all'insieme di indici $B=\{1,2,\ldots,m\}$:

$$
\begin{array}{lllllll}
\textbf{Min} & & \bar{c}_{m+1}x_{m+1}+\ldots & +\bar{c}_k x_k + \ldots & +\bar{c}_n x_n & +\bar{d} \\
x_1 & + & \bar{a}_{1\,m+1}x_{m+1}+\ldots & +\bar{a}_{1k}x_k+\ldots & +\bar{a}_{1n}x_n & =\bar{b}_1 \\
\quad\ddots & & \vdots & \vdots & & \\
\quad x_i & + & \bar{a}_{i\,m+1}x_{m+1}+\ldots & +\bar{a}_{ik}x_k+\ldots & +\bar{a}_{in}x_n & =\bar{b}_i \\
\qquad\ddots & & \vdots & \vdots & & \\
\qquad x_m & + & \bar{a}_{m\,m+1}x_{m+1}+\ldots & +\bar{a}_{mk}x_k+\ldots & +\bar{a}_{mn}x_n & =\bar{b}_m \\
 & & & & x_j\ge 0,\ j=1,\ldots,n &
\end{array}
$$

$(\bar{b}\ge 0_m)$

Principi alla base del metodo del simplesso

La soluzione $[x_B \ \ x_N]^T = [\bar{b} \ \ 0_{n-m}]^T$ è una soluzione di base ammissibile per il problema. A essa è associato un valore di funzione obiettivo pari a $\bar{d}$.

In rapporto a questa formulazione si possono verificare i seguenti 3 casi:

1. Se $\bar{c}_{m+1},\ldots,\bar{c}_n$ sono coefficienti non negativi, la soluzione di base è ottimale.
2. Se esiste un indice k (con $m+1 \le k \le n$) tale che $\bar{c}_k < 0$ e $A_k = [\bar{a}_{1k} \ldots \bar{a}_{ik} \ldots \bar{a}_{mk}]^T \le 0_m$, il problema è illimitato.
3. Se esiste un indice k (con $m+1 \le k \le n$) tale che $\bar{c}_k < 0$ e, in corrispondenza di questo indice, almeno un elemento $\bar{a}_{rk} > 0$ (con $1 \le r \le m$), esiste una soluzione di base non peggiore di quella corrente.

Principi alla base del metodo del simplesso

Prova

1. Poiché deve essere $x_{m+1},\dots,x_n \geq 0$, se $\overline{c}_{m+1},\dots,\overline{c}_n \geq 0$ non è possibile decrementare ulteriormente il valore di funzione obiettivo.
2. Si può assumere che tutte le variabili non di base, a eccezione di x_k, restino nulle. Il valore di funzione obiettivo, essendo $\overline{c}_k < 0$, può essere decrementato. Si tratta di stabilire il massimo valore che può assumere x_k per non violare i vincoli. Occorre in altri termini verificare che: $x_i + \overline{a}_{ik} x_k = \overline{b}_i$ per ogni $i=1,\dots,m$ (con $x_i, x_k \geq 0$) $\rightarrow x_i = \overline{b}_i - \overline{a}_{ik} x_k \geq 0$.
   Se $\overline{a}_{ik} \leq 0$ per ogni i, a x_k si può dare un valore positivo grande a piacere. I vincoli saranno sempre rispettati!

Principi alla base del metodo del simplesso

Questo significa che il valore di funzione obiettivo può essere reso arbitrariamente piccolo.

3. Come prima, si può assumere che tutte le variabili non di base, a eccezione di x_k, restino nulle. Il valore di funzione obiettivo, essendo $\overline{c}_k<0$, può essere decrementato. Occorre avere $x_i+\overline{a}_{ik}x_k=\overline{b}_i$ per ogni $i=1,\ldots,m$ (con $x_i,x_k\geq 0$) $\rightarrow$ $x_i=\overline{b}_i-\overline{a}_{ik}\, x_k\geq 0$. In questo caso, per tutti gli indici *r tali* che $\overline{a}_{rk}>0$, il massimo valore che si può dare a x_k per rispettare il vincolo "$x_r=\overline{b}_r-\overline{a}_{rk}\, x_k\geq 0$" è $\overline{b}_r\, /\overline{a}_{rk}$. Infatti, ponendo $x_k>\overline{b}_r\,/\overline{a}_{rk}$, si avrebbe $x_r<0$ (violazione di un vincolo). In particolare, ponendo:

Principi alla base del metodo del simplesso

$$x_k = \min_r \left\{ \frac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rk}}, \overline{a}_{rk} > 0 \right\} = \left\{ \frac{\overline{b}_h}{\overline{a}_{hk}} \right\}$$

si assicura il massimo incremento a x_k (e quindi il massimo decremento di funzione obiettivo) nel rispetto di tutti i vincoli.
Ponendo $x_k = \overline{b}_h / \overline{a}_{hk}$, si ha $x_h=0$. In pratica si ha una nuova soluzione di base corrispondente a $B=\{1,\ldots,h-1,k, h+1,\ldots,m\}$ → l'indice k entra in B e l'indice h esce da B.

In corrispondenza del nuovo insieme B, occorre ***ripristinare la forma canonica*** mediante operazioni di pivot (*pivoting*). Il ***pivot*** è l'elemento $\overline{a}_{hk}>0$.

Pivot

Le operazioni di *pivot* saranno illustrate facendo riferimento direttamente alle tabelle utilizzate per applicare il metodo del simplesso.

$$
\begin{array}{lllllll}
\textbf{Min} & & \bar{c}_{m+1} x_{m+1} + \ldots & + \bar{c}_k x_k + \ldots & + \bar{c}_n x_n + \bar{d} & \\
x_1 & & + \bar{a}_{1\,m+1} x_{m+1} + \ldots & + \bar{a}_{1k} x_k + \ldots & + \bar{a}_{1n} x_n & = \bar{b}_1 \\
 & \ddots & \vdots & \vdots & & \\
 & x_h & + \bar{a}_{h\,m+1} x_{m+1} + \ldots & + \bar{a}_{hk} x_k + \ldots & + \bar{a}_{hn} x_n & = \bar{b}_h \\
 & \ddots & \vdots & \vdots & & \\
 & & x_m + \bar{a}_{m\,m+1} x_{m+1} + \ldots & + \bar{a}_{mk} x_k + \ldots & + \bar{a}_{mn} x_n & = \bar{b}_m \\
 & & & & x_j \geq 0,\ j=1,\ldots,n &
\end{array}
$$

$(\bar{b} \geq 0_m)$

Pivot

Tabella corrispondente a questa forma canonica (***tableau***)

$$
\begin{array}{c|ccccc|ccccc|c|}
\cline{2-12}
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \bar{c}_{m+1} & \cdots & \bar{c}_k & \cdots & \bar{c}_n & -\bar{d} \\
\cline{2-12}
1 & 1 & & & & & \bar{a}_{1\,m+1} & \cdots & \bar{a}_{1\,k} & \cdots & \bar{a}_{1\,n} & \bar{b}_1 \\
 & & \ddots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
h & & & 1 & & & \bar{a}_{h\,m+1} & \cdots & \bar{a}_{h\,k} & \cdots & \bar{a}_{h\,n} & \bar{b}_h \\
 & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
m & & & & & 1 & \bar{a}_{m\,m+1} & \cdots & \bar{a}_{m\,k} & \cdots & \bar{a}_{m\,n} & \bar{b}_m \\
\cline{2-12}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{5}{c}{\underbrace{\hspace{6em}}_{\text{colonne i cui indici sono di base: } 1,\ldots,m}} & \multicolumn{1}{c}{m+1} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{k} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{n} & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}
$$

Pivot

Si dice operazione di *pivot*, con riferimento ad $\overline{a}_{hk}$, una trasformazione della tabella ottenuta nel seguente modo:

- ✓ si divide per l'elemento $\overline{a}_{hk}$ ciascun elemento della riga *h*-esima;
- ✓ a ogni elemento della riga *i*-esima (i=0,1,…, h–1,h+1,…,m) si somma il corrispondente elemento della riga *h*-esima, risultante dalla trasformazione fatta al punto precedente, moltiplicato per $-\overline{a}_{ik}$ (moltiplicato per $-\overline{c}_k$ nel caso di i=0).

Si ottiene una nuova tabella in cui le colonne che corrispondono a vettori unitari sono: 1,…,h–1,k,h+1,…,m.

Esempio 1

Il metodo del simplesso sarà presentato a partire da esempi numerici. Sia dato il seguente problema di PL in forma canonica:

$$
\begin{array}{lllll}
\mathit{Min} & -21x_3 + 34 & & & \\
\text{s.v.} & & & & \\
 & x_1 & & +9x_3 & = 14 \\
 & & x_2 & +x_3 & = 4 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

m=2, n=3. Le soluzioni di base avranno almeno $n-m$=1 variabili nulle.
Essendo il problema già in forma canonica rispetto a B={1,2} si può scrivere direttamente la prima tabella.

Esempio 1

$$T^{(0)} = \begin{array}{|ccc|c|} \hline 0 & 0 & -21 & -34 \\ \hline 1 & 0 & 9 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ \hline \end{array}$$

La soluzione di base $x^{(0)}=[14\ \ 4\ \ 0]^T$ non è ottima poiché $\overline{c}_3 < 0$. Si pone k=3. Si esamina il segno dei coefficienti $\overline{a}_{i3}$, con i=1,2. Si calcola:

$$\min\left\{\frac{\overline{b}_1}{\overline{a}_{13}}, \frac{\overline{b}_2}{\overline{a}_{23}}\right\} = \min\left\{\frac{14}{9}, \frac{4}{1}\right\} = \frac{14}{9} \rightarrow h=1.$$ Occorre eseguire l'operazione di *pivot* sull'elemento $\overline{a}_{13}$.

$$0+\left(21\cdot\frac{1}{9}\right)$$

$$T^{(1)} = \begin{array}{|ccc|c|} \hline 7/3 & 0 & 0 & -4/3 \\ \hline 1/9 & 0 & 1 & 14/9 \\ -1/9 & 1 & 0 & 22/9 \\ \hline \end{array}$$

$$4+\left(-1\cdot\frac{14}{9}\right)$$

Esempio 1

Si noti il passaggio a una nuova forma canonica corrispondente all'insieme $B=\{3,2\}$: la variabile x_1 non è più di base (**variabile uscente**), mentre la variabile x_3 è diventata una variabile di base (**variabile entrante**). La soluzione di base corrispondente alla nuova tabella è: $x^{(1)}=[0 \;\; 22/9 \;\; 14/9]^T$. Questa soluzione è ottima perché $\overline{c}_1>0$ (coefficiente associato all'unica variabile non di base). Il valore di funzione obiettivo si legge immediatamente nella tabella. E' sufficiente cambiare il segno al numero in alto a destra.

$$T^{(1)}=\left[\begin{array}{ccc|c} 7/3 & 0 & 0 & -4/3 \\ \hline 1/9 & 0 & 1 & 14/9 \\ -1/9 & 1 & 0 & 22/9 \end{array}\right] \rightarrow z^*=4/3$$

Esempio 2

Sia dato il seguente generico problema di PL:

$$
\begin{array}{lrcl}
Min & -2x_1 + x_2 & & \\
\text{s.v.} & -3x_1 + 2x_2 & \leq & 6 \\
& x_1 - x_2 & \leq & 3 \\
& -2x_1 + x_2 & \leq & 2 \\
& x_1, \ x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Il primo passo è quello di trasformare il problema in forma standard (ci sono vincoli di disuguaglianza).

$$
\begin{array}{lrcl}
Min & -2x_1 + x_2 & & \\
\text{s.v.} & -3x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 6 \\
& x_1 - x_2 + x_4 & = & 3 \\
& -2x_1 + x_2 + x_5 & = & 2 \\
& x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \ x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

già in forma canonica

Esempio 2

$$T^{(0)}=\begin{array}{|ccccc|c|}\hline -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$B=\{3,4,5\}$. La soluzione di base $x^{(0)}=[0\ \ 0\ \ 6\ \ 3\ \ 2]^T$ non è ottima poiché $\overline{c}_1 < 0$. Si pone $k=1$. Si esamina il segno dei coefficienti $\overline{a}_{i1}$, con $i=1,2,3$. L'unico non negativo è $\overline{a}_{21}$. L'operazione di *pivot* è eseguita su tale elemento.

$$T^{(1)}=\begin{array}{|ccccc|c|}\hline 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 3 & 0 & 15 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 8 \\ \hline \end{array}$$

Esempio 2

Si noti il passaggio a una nuova forma canonica corrispondente all'insieme B={3,1,5}. In pratica, la variabile x_4 non è più di base, mentre la variabile x_1 è diventata una variabile di base.

La soluzione di base corrispondente alla nuova tabella è: $x^{(1)}=[3\ \ 0\ \ 15\ \ 0\ \ 8]^T$. Questa soluzione, a cui corrisponde un valore di funzione obiettivo pari a –6, non è ottima perché $\overline{c}_2<0$.

Poiché $[\overline{a}_{12}\ \ \overline{a}_{22}\ \ \overline{a}_{32}]=[-1\ -1\ -1]\leq 0_3^T$ il ***problema è illimitato***.

Esempio 3

Sia dato il seguente generico problema di PL:

$$
\begin{array}{llllll}
Max & 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \\
s.v. \\
& 3x_1 & +2x_2 & -5x_3 & \leq 4 \\
& 2x_1 & -x_2 & +4x_3 & \leq 2 \\
& x_1, & & x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

Il primo passo è quello di trasformare il problema in forma standard.

$$
\begin{array}{llllllll}
(-)\ Min & -2x_1 - 3x_2^+ + 3x_2^- + 4x_3 \\
s.v. \\
& 3x_1 & +2x_2^+ & -2x_2^- & -5x_3 & +x_4 & & = 4 \\
& 2x_1 & -x_2^+ & +x_2^- & +4x_3 & & +x_5 & = 2 \\
& x_1, & x_2^+, & x_2^-, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0
\end{array}
$$

Esempio 3

Il problema è già in forma canonica.

$$T^{(0)} = \begin{array}{|cccccc|c|} \hline -2 & -3 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 2 & -2 & -5 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

La soluzione di base $x^{(0)}=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 4\ \ 2]^T$ non è ottima. Ci sono più coefficienti di costo ridotto associati a variabili non di base negativi. In questo caso, si pone il problema di scelta della colonna, ossia dell'indice della variabile entrante. Esistono vari criteri di scelta. E' necessario sottolineare che non esiste un criterio da preferire in assoluto rispetto agli altri.

Esempio 3

Possibili criteri sono i seguenti:

- ✓ l'indice è scelto a caso;
- ✓ si sceglie la colonna corrispondente al ***primo*** coefficiente di costo ridotto negativo;
- ✓ si sceglie la colonna corrispondente al ***più piccolo*** coefficiente di costo ridotto negativo.

L'ultima regola è quella più utilizzata. Applicando tale regola al problema in esame, si sceglie la colonna associata al coefficiente –3. In essa c'è un solo elemento positivo. L'operazione di *pivot* è eseguita su tale elemento.

Esempio 3

$$T^{(1)} = \begin{array}{|cccccc|c|} \hline 5/2 & 0 & 0 & -7/2 & 3/2 & 0 & 6 \\ \hline 3/2 & 1 & -1 & -5/2 & 1/2 & 0 & 2 \\ 7/2 & 0 & 0 & 3/2 & 1/2 & 1 & 4 \\ \hline \end{array}$$

La soluzione di base $x^{(1)}=[0\ \ 2\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 4]^T$ non è ottima. C'è infatti un coefficiente di costo ridotto negativo. Nella colonna a esso associata c'è un solo elemento positivo. L'operazione di *pivot* è eseguita su tale elemento.

$$T^{(2)} = \begin{array}{|cccccc|c|} \hline 32/3 & 0 & 0 & 0 & 8/3 & 7/3 & 46/3 \\ \hline 22/3 & 1 & -1 & 0 & 4/3 & 5/3 & 26/3 \\ 7/3 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & 8/3 \\ \hline \end{array}$$

Esempio 3

La soluzione di base $x^{(2)}=[0\ \ 26/3\ \ 0\ \ 8/3\ \ 0\ \ 0]^T$ è ottima.

Per il problema originario la soluzione ottima è:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{26}{3} - 0 \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{26}{3} \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

A essa corrisponde un valore di funzione obiettivo pari a $\dfrac{46}{3}$.

Esempio 4

Sia dato il seguente problema di PL in forma canonica:

$$
\begin{array}{llllll}
Min & 3\,x_1 - 6\,x_2 & & & & \\
\text{s.v.} & & & & & \\
& 5x_1 + & 7x_2 + & x_3 & & = 35 \\
& -x_1 + & 2\,x_2 & & + x_4 & = 2 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4 & \geq 0
\end{array}
$$

Dopo avere verificato che il problema ammette ***infinite soluzioni ottime***, scriverne 3.

Esempio 4

$$T^{(0)}= \begin{array}{|cccc|c|} \hline 3 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 5 & 7 & 1 & 0 & 35 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

La soluzione di base associata a questa tabella è $x^{(0)}=[0\ \ 0\ \ 35\ \ 2]^T$. Poiché $\overline{c}_2 < 0$, si pone k=2. Si esamina il segno dei coefficienti $\overline{a}_{i2}$, con i=1,2. Si calcola: $\min\left\{\frac{35}{7},\frac{2}{2}\right\}=\frac{2}{2} \rightarrow h$=2. Occorre eseguire l'operazione di *pivot* sull'elemento $\overline{a}_{22}$.

$$T^{(1)}= \begin{array}{|cccc|c|} \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ \hline 17/2 & 0 & 1 & -7/2 & 28 \\ -1/2 & 1 & 0 & 1/2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Esempio 4

La soluzione di base associata a questa tabella è $x^{(1)}=[0 \;\; 1 \;\; 28 \;\; 0]^T$. Questa soluzione è ottima. A essa è associato un valore di funzione obiettivo pari a –6.

Si noti che c'è un **coefficiente di costo ridotto associato a una variabile non di base nullo** ($\overline{c}_1 = 0$). Si può fare entrare in B l'indice 1. Si esamina il segno dei coefficienti $\overline{a}_{i1}$, con i=1,2. L'unico coefficiente positivo è $\overline{a}_{11}$. Si esegue un'operazione di pivot su questo elemento.

$$T^{(2)}=\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \\ \hline 1 & 0 & 2/17 & -7/17 & 56/17 \\ 0 & 1 & 1/17 & 5/17 & 45/17 \end{array}\right]$$

Esempio 4

La soluzione di base associata a questa tabella è $x^{(2)}=[56/17\ \ 45/17\ \ 0\ \ \ 0]^T$. Anche questa soluzione è ottima (il valore di funzione obiettivo resta pari a –6).

Sono state individuate 2 soluzioni di base ottime. Qualsiasi altra soluzione ottenuta come combinazione convessa di $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ è ottima:

$$\lambda\begin{bmatrix}0\\1\\28\\0\end{bmatrix}+(1-\lambda)\begin{bmatrix}\frac{56}{17}\\\frac{45}{17}\\0\\0\end{bmatrix},\quad 0<\lambda<1.$$

Ponendo $\lambda=1/2$, si ottiene: $x^{(3)}=[28/17\ \ 31/17\ \ 14\ \ \ 0]^T$.

$x^{(1)}$, $x^{(2)}$ e $x^{(3)}$ sono 3 soluzioni ottime per il problema dato ($x^{(3)}$ non è una soluzione di base).

Esempio 5

Sia dato il seguente generico problema di PL:

$$
\begin{array}{lrcrcl}
Max & -x_1 & + & 2x_2 & & \\
s.v. & & & & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Trasformazione in forma standard:

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrcl}
(-) & Min & x_1 - 2\,x_2 & & & & & & & & & & \\
 & s.v. & & & & & & & & & & & \\
 & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 4 \\
 & & -x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2 \\
 & & & & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 3 \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Esempio 5

Il problema è già in forma canonica.

$$T^{(0)}=\begin{array}{|ccccc|c|}\hline 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}$$

La soluzione di base $x^{(0)}=[0\ \ 0\ \ 4\ \ 2\ \ 3]^T$ non è ottima, poiché $\bar{c}_2 < 0$. Si pone k=2. Si esamina il segno dei coefficienti $\bar{a}_{i2}$, con i=1,2,3. Si calcola:

$\min\left\{\frac{4}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{1}\right\}=\frac{2}{1}\rightarrow h=2$. Occorre eseguire l'operazione di *pivot* sull'elemento $\bar{a}_{22}$.

Esempio 5

$$T^{(1)}= \begin{array}{|ccccc|c|} \hline -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ \hline 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

La soluzione di base $x^{(1)}=[0\ \ 2\ \ 2\ \ 0\ \ 1]^T$ non è ottima poiché $\bar{c}_1<0$. Si pone $k=1$. Si esamina il segno dei coefficienti $\bar{a}_{i1}$, con $i=1,2,3$. Si ha $\bar{a}_{11}, \bar{a}_{31}>0$. Si calcola: $\min\left\{\frac{2}{2}, \frac{1}{1}\right\}$. Ci sono più rapporti che corrispondono al valore minimo! Questa situazione porta ad avere una ***soluzione di base degenere*** all'iterazione successiva. Se si seleziona la riga $h=1$, l'elemento di pivot è $\bar{a}_{11}=2$.

Esempio 5

$$T^{(2)}=\begin{array}{|ccccc|c|}\hline 0 & 0 & 1/2 & 3/2 & 0 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

La soluzione di base $x^{(2)}=[1 \;\; 3 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]^T$ è ottima. Si tratta, come detto in precedenza, di una soluzione di base degenere (una variabile di base ha valore nullo). Per il problema originario la soluzione ottima è:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

A essa corrisponde un valore di funzione obiettivo pari a 5.

Regola di Bland

Gli esempi hanno dimostrato che si può presentare un problema di scelta sia della colonna (ossia dell'indice della variabile entrante) sia della riga (ossia dell'indice della variabile uscente). Esiste una regola che disciplina la selezione sia delle variabili entranti sia delle variabili uscenti: la ***regola di Bland***. In particolare, se esistono più indici candidati a entrare in *B* e/o più indici candidati a uscire da *B*, si seleziona sempre l'indice minimo, cioè:

- ✓ $k=\min\{\, j \in N : \overline{c}_j < 0 \,\}$;
- ✓ $h=\min\left\{ i \in B : \dfrac{\overline{b}_i}{\overline{a}_{ik}} = \min\left\{ \dfrac{\overline{b}_r}{\overline{a}_{rk}}, \overline{a}_{rk} > 0 \right\} \right\}$.

Regola di Bland

Nell'esempio 5, la regola di Bland è stata applicata.

E' importante sottolineare che le soluzioni di base degeneri possono compromettere la terminazione del metodo del simplesso (presenza di ***cicli***). Tuttavia, l'applicazione della regola di Bland assicura la convergenza del metodo.

Esercizio

Sia dato il seguente problema di PL:

$$
\begin{aligned}
Min \quad & -\frac{3}{4}x_1 + 20x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 6x_4 - 3 \\
\text{s.v.} \quad & \\
& \frac{1}{4}x_1 - 8x_2 - x_3 + 9x_4 \le 0 \\
& \frac{1}{2}x_1 - 12x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 3x_4 \le 0 \\
& x_3 \le 1 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

- ✓ Risolvere il problema applicando il metodo del simplesso e utilizzando la regola di Bland.
- ✓ Verificare l'insorgenza di un ciclo se, in presenza di più coefficienti di costo ridotto negativi, si sceglie la colonna corrispondente al coefficiente più piccolo.

Inizializzazione del metodo del simplesso

Ci sono problemi di PL che, una volta ridotti in forma standard, non sono automaticamente ridotti anche in forma canonica.
In questo caso non si dispone immediatamente di un insieme di indici di base *B* e, quindi, di una soluzione di base ammissibile (punto di avvio del metodo del simplesso).

Un approccio molto conosciuto utilizzato per la ricerca di una soluzione ammissibile di base è la ***tecnica delle variabili artificiali***. Essa prevede la definizione di un problema artificiale attraverso l'introduzione di variabili non negative nei vincoli del problema in forma standard.

Inizializzazione del metodo del simplesso

Si consideri il seguente problema P_s in forma standard (con $b \geq 0_m$):

$$
\begin{aligned}
\textbf{Min} \quad & z = c^T x + d \\
\text{s.v.} \quad & \\
& Ax = b \\
& x \geq 0_n
\end{aligned}
$$

Una soluzione di base ammissibile per P_s, se esiste, può essere determinata costruendo il seguente ***problema artificiale*** $P^{(\alpha)}$ (o ***problema di prima fase***):

$$
\begin{aligned}
\textbf{Min} \quad & \rho = 1^T \alpha = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \\
\text{s.v.} \quad & \\
& Ax + \alpha = b \\
& x \geq 0_n, \ \alpha \geq 0_m
\end{aligned}
$$

Inizializzazione del metodo del simplesso

Il vettore m-dimensionale $\alpha=[\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_m]^T$ è detto vettore delle ***variabili artificiali***. Il vettore m-dimensionale $1^T=[1\ 1\ \ldots\ 1]$ è un vettore in cui tutte le componenti sono pari a 1.

$P^{(\alpha)}$ non è in forma canonica ma può essere facilmente ricondotto a questa forma.

Nota: $P^{(\alpha)}$ ammette sempre una soluzione ottima (per individuare questa soluzione si può applicare il metodo del simplesso).

Inizializzazione del metodo del simplesso

- ***P_s è ammissibile se e solo se $\rho^*=0$ (il valore di funzione obiettivo di $P^{(\alpha)}$ all'ottimo è nullo).***

Pertanto:

✓ Se $\rho^*=0$, P_s è ammissibile e, a partire dalla tabella finale di $P^{(\alpha)}$, si può ottenere una tabella iniziale per P_S (inizializzazione del metodo del simplesso). Questo caso si presenta quando:

- le variabili artificiali sono tutte non di base (nella soluzione ottima);
- esistono variabili artificiali di base all'ottimo, ma il valore a esse associato è zero (la soluzione di base ottima per $P^{(\alpha)}$ è degenere).

✓ Se $\rho^*>0$, il problema P_s è inammissibile.

Esempio 1

Il ***metodo delle due fasi*** (che utilizza la tecnica delle variabili artificiali) sarà presentato a partire da esempi numerici.

Si consideri il problema di PL seguente:

$$
\begin{array}{lrl}
Max & 3x_1 + 4x_2 - 4x_3 & \\
\text{s.v.} & & \\
 & 2x_1 - 5x_2 + x_3 = -3 & \\
 & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 & \qquad (P) \\
 & x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0 &
\end{array}
$$

Il primo passo è quello di trasformare il problema in forma standard.

Esempio 1

$$
\begin{array}{llrrrcr}
(-) & Min & -3x_1 & -4x_2 & +4x_3 & & \\
& \text{s.v.} & & & & & \\
& & 2x_1 & -5x_2 & +x_3 & = & -3 \\
& & 3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = & 5 \\
& & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Per avere $b \geq 0$, si può riscrivere il modello in modo equivalente modificando il primo vincolo:

$$
\begin{array}{llrrrcr}
(-) & Min & -3x_1 & -4x_2 & +4x_3 & & \\
& \text{s.v.} & & & & & \\
& & -2x_1 & +5x_2 & -x_3 & = & 3 \\
& & 3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = & 5 \\
& & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0
\end{array}
\qquad (P_s)
$$

Esempio 1

Il problema non è in forma canonica.

Prima fase:

Si costruisce il problema artificiale $P^{(\alpha)}$ corrispondente:

$$
\begin{array}{lrrrrrcl}
Min \quad \rho = & & & & \alpha_1 & +\alpha_2 & & \\
\text{s.v.} & & & & & & & \\
& -2x_1 & +5x_2 & -x_3 & +\alpha_1 & & = & 3 \\
& 3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & & +\alpha_2 & = & 5 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & \alpha_1, & \alpha_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Per applicare il metodo del simplesso a $P^{(\alpha)}$ si costruisce la tabella seguente

Esempio 1

$$
\begin{array}{ccccc|c}
 & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
-2 & 5 & -1 & 1 & 0 & 3 \\
3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 5 \\
\hline
\end{array}
$$

Non si ha una forma canonica. Dalla struttura della tabella, però, si intuisce che una base da cui partire per risolvere $P^{(\alpha)}$ è quella associata alle variabili artificiali. Per fare in modo che il coefficiente di costo associato ad α_1 si annulli si può fare un'operazione di pivot sull'unico elemento diverso da zero presente nella colonna associata ad α_1 (il riferimento è alla colonna comprendente i soli coefficienti tecnologici).

Esempio 1

$$\begin{array}{ccccc|c} & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline -2 & 5 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccc|c} & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \\ 2 & -5 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ \hline -2 & 5 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}$$

Allo stesso modo, per fare in modo che il coefficiente di costo associato ad α_2 si annulli si può fare un'operazione di pivot sull'unico elemento diverso da zero presente nella colonna associata ad α_2.

$$\begin{array}{ccccc|c} & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \\ 2 & -5 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ \hline -2 & 5 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccccc|c} & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \\ -1 & -7 & -1 & 0 & 0 & -8 \\ \hline -2 & 5 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 5 \end{array}$$

Esempio 1

La tabella ottenuta costituisce la prima tabella del metodo del simplesso per $P^{(\alpha)}$

$$T_\alpha^{(0)} = \begin{array}{ccccc|c} & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \\ \hline -1 & -7 & -1 & 0 & 0 & -8 \\ \hline -2 & 5 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 5 \\ \hline \end{array}$$

La soluzione di base associata a questa tabella è $[x_1\ x_2\ x_3\ \alpha_1\ \alpha_2]^T = [0\ \ 0\ \ 0\ \ 3\ \ 5]^T$. Tale soluzione non è ottima per $P^{(\alpha)}$. La colonna scelta per l'operazione di pivot è quella associata a –7; la riga è la prima poiché $\min\left\{\frac{3}{5}, \frac{5}{2}\right\} = \frac{3}{5}$.

Esempio 1

$$T_\alpha^{(1)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} -19/5 & 0 & -12/5 & 7/5 & 0 & -19/5 \\ \hline -2/5 & 1 & -1/5 & 1/5 & 0 & 3/5 \\ 19/5 & 0 & 12/5 & -2/5 & 1 & 19/5 \end{array}\right] \end{array}$$

Occorre fare un'altra operazione di pivot. La colonna scelta è quella associata a –19/5; la riga è la seconda.

$$T_\alpha^{(2)} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1/19 & 3/19 & 2/19 & 1 \\ 1 & 0 & 12/19 & -2/19 & 5/19 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

La soluzione di base ottima di $P^{(\alpha)}$ è $[x_1^*\ x_2^*\ x_3^*\ \alpha_1^*\ \alpha_2^*]^T = [1\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^T$, con valore di funzione obiettivo $\rho^*=0$.

Esempio 1

Poiché $\rho^*=0$, P_s è ammissibile
(***caso esaminato***: nella soluzione ottima di $P^{(\alpha)}$, le variabili artificiali sono tutte non di base).

Seconda fase:
A partire dalla tabella finale di $P^{(\alpha)}$, si può ottenere facilmente una tabella iniziale per P_s. Innanzitutto, si eliminano le colonne associate alle variabili artificiali e si rimpiazzano i coefficienti di costo ridotto nella riga 0 con i coefficienti di costo del problema P_s:

–3	–4	4	0
0	1	1/19	1
1	0	12/19	1

Esempio 1

Non si ha una forma canonica. Tuttavia, dalla struttura della tabella, si intuisce che un insieme di indici di base iniziale per P_s è B={1,2}. Come prima, per fare in modo che il primo coefficiente di costo si annulli, si può fare un'operazione di pivot sull'elemento "1" della prima colonna.

–3	–4	4	0
0	1	1/19	1
1	0	12/19	1

$\Rightarrow$

0	–4	112/19	3
0	1	1/19	1
1	0	12/19	1

Allo stesso modo, per fare in modo che il secondo coefficiente di costo si annulli, si può fare un'operazione di pivot sull'elemento "1" della seconda colonna.

Esempio 1

0	–4	112/19	3
0	1	1/19	1
1	0	12/19	1

$\Rightarrow$

0	0	116/19	7
0	1	1/19	1
1	0	12/19	1

La tabella ottenuta costituisce la prima tabella del metodo del simplesso per P_s.

$T^{(0)}=$

0	0	116/19	7
0	1	1/19	1
1	0	12/19	1

Non occorrono altre iterazioni perché la soluzione di base iniziale $x^{(0)}=[1 \;\; 1 \;\; 0]^T$ è ottima per P_S. Il valore ottimo di funzione obiettivo per P_s è: –7.

Esempio 1

Rispetto al problema originario *P*, la soluzione ottima resta:

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con un valore di funzione obiettivo pari a 7.

Esempio 2

Si consideri il seguente problema di PL:

$$
(P)\quad
\begin{array}{llcccl}
\textit{Min} & 3x_1 & -7x_2 & +2x_3 & & \\
\text{s.v.} & 2x_1 & +3x_2 & +5x_3 & \leq & 15 \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & \geq & 1 \\
 & -x_1 & +x_2 & & = & 5 \\
 & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Trasformazione del problema in forma standard:

$$
(P_s)\quad
\begin{array}{llcccccl}
\textit{Min} & 3x_1 & -7x_2 & +2x_3 & & & & \\
\text{s.v.} & 2x_1 & +3x_2 & +5x_3 & +x_4 & & = & 15 \\
 & x_1 & +x_2 & +x_3 & & -x_5 & = & 1 \\
 & -x_1 & +x_2 & & & & = & 5 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Esempio 2

Prima fase:

Si costruisce il problema artificiale $P^{(\alpha)}$ corrispondente:

$$
\begin{array}{llr}
Min \ \ \rho = & \alpha_1 + \alpha_2 & \\
\text{s.v.} & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 & = 15 \\
& x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + \alpha_1 & = 1 \\
& -x_1 + x_2 + \alpha_2 & = 5 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ \alpha_1,\ \alpha_2 & \geq 0
\end{array}
$$

Nota: si può evitare di aggiungere variabili artificiali nei vincoli originariamente di "≤" .

Il primo insieme *B* per $P^{(\alpha)}$ sarà formato dagli indici delle colonne associate alle variabili artificiali e alle variabili di *slack* (introdotte per trasformare i vincoli di "≤" in vincoli di "=").

Esempio 2

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
 & & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\
1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\
\hline
\end{array}
$$

Non si ha una forma canonica a causa dei coefficienti di costo non nulli associati alle variabili artificiali. Per fare in modo che il coefficiente associato ad α_1 si annulli si può fare un'operazione di pivot sull'unico elemento diverso da zero presente nella colonna associata ad α_1 (il riferimento è alla colonna comprendente i soli coefficienti tecnologici).

Esempio 2

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
 & & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\
1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\
\hline
\end{array}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
 & & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \\
\hline
-1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\
\hline
2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\
1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\
\hline
\end{array}
$$

Esempio 2

Per annullare il coefficiente di costo associato ad α_2 si si può fare un'operazione di pivot sull'unico elemento non nullo presente nella colonna associata ad α_2

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
 & & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \\
\hline
-1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\
\hline
2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\
1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\
\hline
\end{array}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{array}{ccccccc|c}
\hline
0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\
\hline
2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\
1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\
\hline
\end{array}
$$

Introduzione

Problemi Decisionali (Formulazioni)

Richiami di Algebra Lineare

Programmazione Lineare

Risoluzione Grafica

Forma Standard

Soluzioni di Base e Teorema Fondamentale

Forma Canonica

Metodo del Simplesso

Regola di Bland

Metodo delle Due Fasi

Esempio 2

La tabella ottenuta costituisce la prima tabella del metodo del simplesso per $P^{(\alpha)}$

$$T_\alpha^{(0)} = \begin{array}{ccccccc|c} & & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \\ \hline 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ \hline 2 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}$$

La soluzione di base associata a questa tabella è $[x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ \alpha_1\ \alpha_2]^T=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 15\ \ 0\ \ 1\ \ 5]^T$. Tale soluzione non è ottima per $P^{(\alpha)}$. La colonna interessata all'operazione di pivot è quella associata a –2; la riga è la seconda poiché $\min\left\{\frac{15}{3},\frac{1}{1},\frac{5}{1}\right\}=\frac{1}{1}$.

Introduzione

Problemi Decisionali (Formulazioni)

Richiami di Algebra Lineare

Programmazione Lineare

Risoluzione Grafica

Forma Standard

Soluzioni di Base e Teorema Fondamentale

Forma Canonica

Metodo del Simplesso

Regola di Bland

Metodo delle Due Fasi

Esempio 2

$$T_\alpha^{(1)} = \begin{array}{|ccccccc|c|} \multicolumn{1}{c}{} & & & & & \alpha_1 & \multicolumn{1}{c}{\alpha_2} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & -4 \\ \hline -1 & 0 & 2 & 1 & 3 & -3 & 0 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Occorre fare un'altra operazione di pivot. La colonna interessata è quella associata a –1; la riga è la prima (per la regola di Bland).

$$T_\alpha^{(2)} = \begin{array}{|ccccccc|c|} \multicolumn{1}{c}{} & & & & & \alpha_1 & \multicolumn{1}{c}{\alpha_2} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \hline 5/3 & 0 & 5/3 & 1/3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -1/3 & 0 & 2/3 & 1/3 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 2/3 & 1 & 5/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ -5/3 & 0 & -5/3 & -1/3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Esempio 2

La soluzione di base ottima è $[x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ \alpha_1\ \alpha_2]^T=$ $[0\ \ 5\ \ 0\ \ 0\ \ 4\ \ 0\ \ 0]^T$ con valore di funzione obiettivo $\rho^*=0$. Tale soluzione è degenere.

Poiché $\rho^*=0$, P_s è ammissibile
(***caso esaminato***: nella soluzione ottima di $P^{(\alpha)}$, c'è una variabile artificiale di base; tuttavia a essa è associato valore nullo).

Occorre fare un'ulteriore iterazione sulla tabella $T_\alpha^{(2)}$ $\rightarrow$ α_2 non deve essere una variabile di base.

Esempio 2

$$
T_{\alpha}^{(2)} = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc|c} & & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc|c}
5/3 & 0 & 5/3 & 1/3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
-1/3 & 0 & 2/3 & 1/3 & 1 & -1 & 0 & 4 \\
2/3 & 1 & 5/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
-5/3 & 0 & -5/3 & -1/3 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Si esaminano i coefficienti sulla riga dove si trova l'elemento "1" associato ad α_2 (riga 3). Si può fare un'operazione di pivot su uno qualsiasi dei coefficienti associati a una variabile non artificiale a condizione che sia diverso da 0. In questo modo, una variabile non artificiale diventerà di base mantenendo il valore 0 (il valore ottimo ρ^*=0 non verrà quindi alterato).

Esempio 2

Nota: Nel caso di più variabili artificiali di base con valore 0, occorre ripetere il procedimento appena descritto sino ad averle tutte non di base.

Eseguendo l'operazione di pivot sull'elemento $\overline{a}_{31}^{(\alpha)}$ =–5/3 si ottiene:

$$T_\alpha^{(3)} = \begin{array}{ccccccc|c} & & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2/5 & 1 & -1 & -1/5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1/5 & 0 & 0 & 2/5 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1/5 & 0 & 0 & -3/5 & 0 \\ \hline \end{array}$$

La soluzione di base è rimasta $[x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ \alpha_1\ \alpha_2]^T$= $[0\ \ 5\ \ 0\ \ 0\ \ 4\ \ 0\ \ 0]^T$.

Esempio 2

Seconda fase:

A partire da $T_\alpha^{(3)}$ si può ottenere facilmente una tabella iniziale per P_s. Innanzitutto, si eliminano le colonne associate alle variabili artificiali e si rimpiazzano i coefficienti di costo ridotto nella riga 0 con i coefficienti di costo del problema P_s:

3	–7	2	0	0	0
0	0	1	2/5	1	4
0	1	1	1/5	0	5
1	0	1	1/5	0	0

Non si ha ancora una forma canonica per P_s. Tuttavia si intuisce che un insieme di indici di base iniziale per P_s è $B=\{5,2,1\}$.

Esempio 2

Si può fare un'operazione di pivot sull'elemento "1" della prima colonna.

3	–7	2	0	0	0
0	0	1	2/5	1	4
0	1	1	1/5	0	5
1	0	1	1/5	0	0

$\Rightarrow$

0	–7	–1	–3/5	0	0
0	0	1	2/5	1	4
0	1	1	1/5	0	5
1	0	1	1/5	0	0

Quindi si può fare un'operazione di pivot sull'elemento "1" della seconda colonna.

0	–7	–1	–3/5	0	0
0	0	1	2/5	1	4
0	1	1	1/5	0	5
1	0	1	1/5	0	0

$\Rightarrow$

0	0	6	4/5	0	35
0	0	1	2/5	1	4
0	1	1	1/5	0	5
1	0	1	1/5	0	0

Esempio 2

La tabella ottenuta costituisce la prima tabella del metodo del simplesso per P_s.

$$T^{(0)}= \begin{array}{|ccccc|c|} 0 & 0 & 6 & 4/5 & 0 & 35 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2/5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1/5 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1/5 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Non occorrono altre iterazioni perché la soluzione di base iniziale $x^{(0)}=[0\ \ 5\ \ 0\ \ 0\ \ 4]^T$ è ottima per P_S (i coefficienti di costo ridotto associati alle variabili non di base sono positivi). Il valore ottimo di funzione obiettivo per P_s (ma anche per P) è: –35.

Per il problema originario P si ha: $x_1^*=x_3^*=0$, $x_2^*=5$.

Esempio 3

Si consideri un problema di PL già risolto per via grafica (Esempio 2)

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ z = -x_1 + x_2 \\
&\text{s.v.} \\
&\qquad 3x_1 + 2x_2 \geq 5 \\
&\qquad x_1 + x_2 \leq 1 \\
&\qquad x_1, \ x_2 \geq 0
\end{aligned}
\qquad (P)
$$

Il primo passo è quello di trasformare il problema in forma standard.

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ z = -x_1 + x_2 \\
&\text{s.v.} \\
&\qquad 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\
&\qquad x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\
&\qquad x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4 \geq 0
\end{aligned}
\qquad (P_s)
$$

Esempio 3

Prima fase:

Si costruisce il problema artificiale $P^{(\alpha)}$ corrispondente:

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Min} & \rho = & & \alpha_1 \\
\text{s.v.} & 3x_1 + 2x_2 - x_3 & + \alpha_1 & = 5 \\
& x_1 + x_2 \qquad + x_4 & & = 1 \\
& x_1, \; x_2, \; x_3, \; x_4, & \alpha_1 & \geq 0
\end{array}
$$

Per applicare il metodo del simplesso a $P^{(\alpha)}$ si costruisce la seguente tabella:

$$
\begin{array}{ccccc|c}
 & & & & \alpha_1 & \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 5 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Esempio 3

Non si ha una forma canonica a causa del coefficiente di costo non nullo associato all'unica variabile artificiale presente. Per fare in modo che questo coefficiente si annulli si può fare un'operazione di pivot sull'unico elemento diverso da zero presente nella colonna associata ad α_1 (il riferimento è alla colonna comprendente i soli coefficienti tecnologici).

				α_1	
0	0	0	0	1	0
3	2	–1	0	1	5
1	1	0	1	0	1

$\Rightarrow$

				α_1	
–3	–2	1	0	0	–5
3	2	–1	0	1	5
1	1	0	1	0	1

Introduzione

Problemi Decisionali (Formulazioni)

Richiami di Algebra Lineare

Programmazione Lineare

Risoluzione Grafica

Forma Standard

Soluzioni di Base e Teorema Fondamentale

Forma Canonica

Metodo del Simplesso

Regola di Bland

Metodo delle Due Fasi

Esempio 3

La tabella ottenuta costituisce la prima tabella del metodo del simplesso per $P^{(\alpha)}$

$$T_\alpha^{(0)}= \begin{array}{ccccc|c} & & & & \alpha_1 & \\ \hline -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ \hline 3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

La soluzione di base associata a questa tabella è $[x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ \alpha_1]^T=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 5]^T$. Tale soluzione non è ottima per $P^{(\alpha)}$. La colonna interessata all'operazione di pivot è quella associata a –3; la riga è la seconda poiché $\min\left\{\frac{5}{3},\frac{1}{1}\right\}=\frac{1}{1}$.

Esempio 3

$$
T_\alpha^{(1)} = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} & & & & \alpha_1 & \end{array} \\
\begin{array}{|ccccc|c|}
\hline
0 & 1 & 1 & 3 & 0 & -2 \\
\hline
0 & -1 & -1 & -3 & 1 & 2 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
$$

La soluzione di base associata a questa tabella è $[x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ \alpha_1]^T=[1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 2]^T$. Tale soluzione è ottima e il valore di funzione obiettivo a essa associato è $\rho^*=2$.

Poiché $\rho^* \neq 0$, P_s è ***inammissibile***.
Pertanto il problema originario P è inammissibile.

Nota: non c'è la seconda fase.

Esempio 4

Si consideri il seguente problema di PL (già in forma standard):

$$
\begin{array}{llr}
\textit{Min} & 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 & \\
\text{s.v.} & -8x_1 + 4x_2 - x_3 = 3 & \\
 & x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 6 & (P_s) \\
 & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 &
\end{array}
$$

Nota: si può evitare di aggiungere una variabile artificiale nel secondo vincolo (la variabile x_4 in esso presente non compare in altri vincoli; inoltre il coefficiente tecnologico a essa associato è 1).

Esempio 4

Prima fase:

Si costruisce il problema artificiale $P^{(\alpha)}$ corrispondente:

$$
\begin{array}{llr}
\text{Min} & \rho = & \alpha_1 \\
\text{s.v.} & & \\
& -8x_1 + 4x_2 - x_3 \qquad + \alpha_1 & = 3 \\
& x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 & = 6 \\
& x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \; \alpha_1 & \geq 0
\end{array}
$$

La tabella associata è:

				α_1	
0	0	0	0	1	0
–8	4	–1	0	1	3
1	–1	4	1	0	6

Esempio 4

Non si ha una forma canonica a causa del coefficiente di costo non nullo associato all'unica variabile artificiale presente. Si può fare un'operazione di pivot sull'unico elemento diverso da zero presente nella colonna associata ad α_1 (il riferimento è alla colonna comprendente i soli coefficienti tecnologici).

				α_1	
0	0	0	0	1	0
–8	4	–1	0	1	3
1	–1	4	1	0	6

$\Rightarrow$

				α_1	
8	–4	1	0	0	–3
–8	4	–1	0	1	3
1	–1	4	1	0	6

Esempio 4

La tabella ottenuta costituisce la prima tabella del metodo del simplesso per $P^{(\alpha)}$

$$
T_\alpha^{(0)} = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} & & & & \alpha_1 & \end{array} \\
\begin{array}{|ccccc|c|}
\hline
8 & -4 & 1 & 0 & 0 & -3 \\
\hline
-8 & 4 & -1 & 0 & 1 & 3 \\
1 & -1 & 4 & 1 & 0 & 6 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
$$

Occorre eseguire un'operazione di pivot. La colonna interessata è quella associata al coefficiente di costo ridotto –4; la riga è la prima.

$$
T_\alpha^{(1)} = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} & & & & \alpha_1 & \end{array} \\
\begin{array}{|ccccc|c|}
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
-2 & 1 & -1/4 & 0 & 1/4 & 3/4 \\
-1 & 0 & 15/4 & 1 & 1/4 & 27/4 \\
\hline
\end{array}
\end{array}
$$

Esempio 4

La soluzione di base ottima di $P^{(\alpha)}$ è $[x_1^* \ x_2^* \ x_3^* \ x_4^* \ \alpha_1^*]^T =$ $[0 \ \ 3/4 \ \ 0 \ \ 27/4 \ \ 0]^T$, con valore di funzione obiettivo $\rho^*=0$ (la variabile artificiale non è di base).

Seconda fase:

Si elimina la colonna associata alla variabile artificiale e si rimpiazzano i coefficienti di costo ridotto nella riga 0 con i coefficienti di costo del problema P_s:

3	5	–4	0	0
–2	1	–1/4	0	3/4
–1	0	15/4	1	27/4

Si esegue un'operazione di pivot sull'elemento "1" della seconda colonna.

Esempio 4

Prima tabella del metodo del simplesso per P_s:

$$T^{(0)}= \begin{array}{|cccc|c|} \hline 13 & 0 & -11/4 & 0 & -15/4 \\ \hline -2 & 1 & -1/4 & 0 & 3/4 \\ -1 & 0 & 15/4 & 1 & 27/4 \\ \hline \end{array}$$

La soluzione di base associata a questa tabella non è ottima. Si esegue un'operazione di pivot su "15/4":

$$T^{(1)}= \begin{array}{|cccc|c|} \hline 184/15 & 0 & 0 & 11/15 & 6/5 \\ \hline -31/15 & 1 & 0 & 1/15 & 6/5 \\ -4/15 & 0 & 1 & 4/15 & 9/5 \\ \hline \end{array}$$

La soluzione di base associata a questa tabella è $[x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T=[0\ \ 6/5\ \ 9/5\ \ 0]^T$. Essa è ottima per P_s. Il valore ottimo di funzione obiettivo è: $-6/5$.