LABORATORIO DI RICERCA OPERATIVA 2020-2021

Laboratorio OPL - LEZIONE 5

Sommario

1. Problemi di Copertura
    a) Set Covering e Set Partitioning

2. Problemi di Localizzazione
    a) Plant Location
    b) Plant Location capacitato
    c) P-mediana
    d) P-centro

Coperture e Partizioni

Consideriamo una matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in cui $a_{ij} \in \{0,1\}$ $\forall i = 1,..,m$ $j = 1,..n$.

Diremo che la colonna di indice j (A_j) copre la riga di indice i $(a_i^\top)$ se $a_{ij} = 1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A_4 copre le righe $a_1^\top$ e $a_2^\top$, A_5 copre le righe $a_1^\top$ e $a_3^\top$, etc.

Un sottoinsieme di indici di colonne $N^* \subseteq \{1, \dots, n\}$, ovvero un sottoinsieme di colonne, è detto COVER (Copertura) se ogni riga di A è coperta da almeno una colonna A_j , $j \in N^*$.

Esempio di Cover: $N^* = \{4,7\}$, $N^* = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $N^* = \{1,2,3,7\}$

Un sottoinsieme di indici di colonne $N^* \subseteq \{1, \dots, n\}$ è detto PARTIZIONE se ogni riga di A è coperta da una ed una sola colonna A_j , $j \in N^*$.

Esempi di Partizione: $N^* = \{5,6\}$, $N^* = \{2,7\}$, $N^* = \{1,3,6\}$

Più in generale

- Le righe di A rappresentano gli elementi di un insieme M ($|M| = m$);
- Ogni colonna A_j di A, è il vettore rappresentativo di un sottoinsieme N_j di M;
- Il generico elemento a_{ij} $\forall i = 1,..,m$ $j = 1,..n$ indica se l'elemento $i \in M$ appartiene al sottoinsieme N_j ($a_{ij} = 1$) oppure non appartiene ad esso ($a_{ij} = 0$);
- L'insieme delle colonne rappresenta, quindi, una famiglia $N = \{N_1, N_2, .., N_j, .., N_n\}$ di n sottoinsiemi di M, tali che

$$\bigcup_{j=1}^{n} N_j = M$$

Esempio

$M = \{a, b, c, d\}$ $\quad N = \{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7\}$

$N_1 = \{a\}$, $\quad N_2 = \{b\}$, $\quad N_3 = \{c\}$, $\quad N_4 = \{a, b\}$, $\quad N_5 = \{a, c\}$, $\quad N_6 = \{b, d\}, N_7 = \{a, c, d\}$

Un sottoinsieme $N^* \subseteq N$ è un Cover se

$$\bigcup_{N_j \in N^*} N_j = M$$

Esempio di Cover: $N^* = \{N_4, N_7\}$, $N^* = N$, $N^* = \{N_1, N_2, N_3, N\_7\}$

Un sottoinsieme $N^* \subseteq N$ è una Partizione se è un Cover ed, inoltre, $N_i \cap N_k = \emptyset \quad \forall N_i \neq N_k$

Esempi di Partizione: $N^* = \{N_5, N_6\}$, $N^* = \{N_2, N_7\}$, $N^* = \{N_1, N_3, N_6\}$

I Problemi di Set Covering e Set Partitioning

Se a ciascun sottoinsieme N_j è associato un costo c_j (costo di copertura) allora è interessante sapere quali sono le coperture e le partizioni di costo minimo. Definite le variabili decisionali

$$x_j = \begin{cases} 1 & se\ il\ sottoinsieme\ N_j\ fa\ parte\ di\ N^* \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

si ha

$$\boxed{\begin{array}{lccc} min & c^\top x & & \\ & Ax & \geq & \mathbf{1} \\ & x & \in & \{0,1\}^n \end{array}}$$

A è chiamata matrice di Appartenenza

$$\boxed{\begin{array}{lccc} min & c^\top x & & \\ & Ax & = & \mathbf{1} \\ & x & \in & \{0,1\}^n \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{lcccc} min & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\ & \sum_{j=1}^{n} A_j x_j & \geq & \mathbf{1} & \\ & x_j & \in & \{0,1\} & j = 1, \dots, n \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{lcccc} min & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\ & \sum_{j=1}^{n} A_j x_j & = & \mathbf{1} & \\ & x_j & \in & \{0,1\} & j = 1, \dots, n \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{lcccc} min & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & \geq & 1 & i = 1, \dots, m \\ & x_j & \in & \{0,1\} & j = 1, \dots, n \end{array}}$$

Set Covering

$$\boxed{\begin{array}{lcccc} min & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & & & \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j & = & 1 & i = 1, \dots, m \\ & x_j & \in & \{0,1\} & j = 1, \dots, n \end{array}}$$

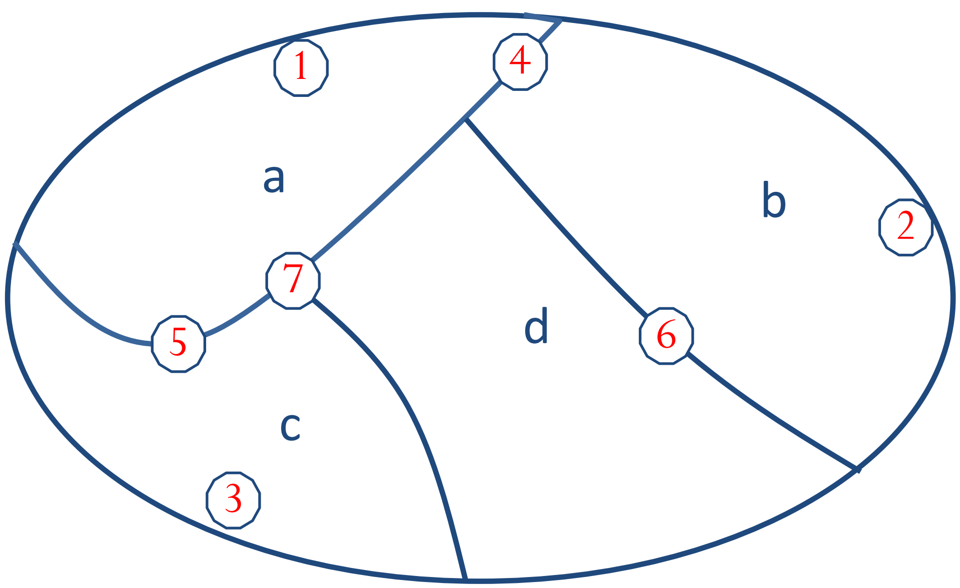
Set Partitioning

I Problemi di Set Covering e Set Partitioning – Applicazioni

M l'insieme di quartieri di una citta; N l'insieme di punti della città in cui installare delle stazioni di servizio (caserme dei vigili del fuoco; postazioni di guardia medica; farmacie; etc); N_j l'insieme dei quartieri che possono essere serviti dalla stazione installata in j. L'obiettivo è quello di servire tutti i quartieri a costo minimo, posto che nel Covering ogni quartiere è servito da almeno un centro di servizio; nel Partitioning ogni quartiere è servito da un centro di servizio ed uno solo.

$M = \{a, b, c, d\}$ $\quad N = \{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7\}$

$N_1 = \{a\}$, $\quad N_2 = \{b\}$, $\quad N_3 = \{c\}$, $\quad N_4 = \{a, b\}$, $\quad N_5 = \{a, c\}$, $\quad N_6 = \{b, d\}, N_7 = \{a, c, d\}$



N_4, N_7 Cover

N_5, N_6 Partizione

Esempio

Implementare in OPL i problemi di Set Covering e Set Partitioning con $N = \{1,2, \dots, 9\}$, $M = \{1,2, \dots, 8\}$.

Gli insiemi N_j sono rappresentati dalle colonne della seguente matrice A

1	0	0	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	0	0

Il vettore dei costi C è

47	27	45	20	40	45	60	60	22

Soluzione

1	0	0	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	0	0

Cover $N^* = \{N_2, N_6, N_9\}$

$z^* = c_2 + c_6 + c_9 = 27 + 45 + 22 = 94$

1	0	0	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1	0	0	0

Partizione $N^* = \{N_3, N_8, N_9\}$

$z^* = c_3 + c_8 + c_9 = 45 + 60 + 22 = 127$

Il Problema di Plant Location non capacitato

Sono dati un insieme insieme di utenti $M = \{1,2,\dots,m\}$ e un insieme $N = \{1,2,\dots,n\}$ di locazioni in cui è possibile installare dei centri di servizio. E' noto che costruire un centro di servizio nella locazione $j \in N$ costa f_j e che servire l'utente $i \in M$ a partire dal centro di servizio costruito nella locazione $j \in N$ costa c_{ij}. Si vuole decidere dove costruire i centri di servizio e come servire tutti gli utenti a costo complessivo minimo, posto che un utente debba essere servito da un centro di servizio ed uno solo .

$$y_j = \begin{cases} 1 \; se \; la \; stazione \; j \; \text{è} \; costruita \\ 0 \; altrimenti \end{cases} \qquad x_{ij} = \begin{cases} 1 \; se \; il \; cliente \; i \; \text{è} \; servito \; dalla \; stazione \; j \\ 0 \; altrimenti \end{cases}$$

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j y_j$$

f. o. = costo afferenza + costo di attivazione

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1,\dots,m$$

vincoli di scelta multipla

$$x_{ij} \le y_j \qquad i = 1,\dots,m \;\; j = 1,\dots,n$$

vincoli di upper bound variabile

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i = 1,\dots,m \;\; j = 1,\dots,n$$

$$y_j \in \{0,1\} \qquad j = 1,\dots,n$$

Analogie/differenze tra problemi di localizzazione e problemi di copertura

Copertura

1. Nessun utente deve essere lasciato scoperto.
2. Gli insiemi di utenti che sono serviti da un centro di servizio sono noti a priori.
3. Lo stesso utente può essere servito da più centri di servizio.
4. I costi della copertura tengono conto solo dei costi di costruzione dei centri di servizio.

Localizzazione

1. Ogni utente deve essere servito.
2. Gli insiemi di utenti che verranno serviti da un centro di servizio sono il risultato del processo decisionale.
3. Un utente deve essere servito da un solo centro di servizio (partitioning).
4. I costi della localizzazione tengono conto dei costi di costruzione e dei costi di afferenza.
5. Potenzialmente, un utente può essere servito da un qualunque centro di servizio.

Esempio con 6 utenti e 5 impianti

Costi di afferenza C_{ij}

12	8	2	3	8
8	4	6	5	7
2	6	5	6	5
3	5	6	9	10
8	4	5	10	8
7	3	3	4	4

Costi di attivazione f_j

4	3	5	4	7

Soluzione

12	8	2	3	8
8	4	6	5	7
2	6	5	6	5
3	5	6	9	10
8	4	5	10	8
7	3	3	4	4

Costi di afferenza C_{ij}

4	3	5	4	7

Costi di attivazione f_j

x^*

0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0

costo totale di afferenza =
$c_{13} + c_{22} + c_{31} + c_{41} + c_{52} + c_{63} = 18$

$z^* = 18 + 12 = 30$

y^*

1	1	1	0	0

costo totale di attivazione $= f_1 + f_2 + f_3 = 12$

Il Problema di Plant Location capacitato

Nel caso più generale ogni utente $i \in N$ presenta "domanda di servizio" non unitaria D_i; a sua volta ogni centro di servizio j ha una "capacità" limitata, K_j , di erogazione del servizio

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j y_j$$

f.o. = costo afferenza + costo di attivazione

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1,..,m$$

vincoli di scelta multipla

$$\sum_{i=1}^{m} D_i x_{ij} \leq K_j y_j \quad j = 1,..,n$$

vincoli di upper bound variabile generalizzati

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i = 1,..,m \;\; j = 1,..,n$$

$$y_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,..,m$$

Varianti del Plant Location

1) Numero di centri di servizio da attivare noto a priori e pari a p

2) Costi di attivazione uguali per ogni centro di servizio

Minimizzazione dei costi totale di afferenza

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1,..,m$$

$$x_{ij} \leq y_j \qquad i = 1,..,m \;\; j = 1,..n$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = p$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i = 1,..,m \;\; j = 1,..,n$$

$$y_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,..,m$$

Modello di p-mediana

Minimizzazione del massimo costo di afferenza

$$\min \; Costo_{max}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1,..,m$$

$$x_{ij} \leq y_j \qquad i = 1,..,m \;\; j = 1,..n$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = p$$

$$Costo_{max} \geq c_{ij} x_{ij} \qquad i = 1,..n, j = 1,..n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \qquad i = 1,..,m \;\; j = 1,..,n$$

$$y_i \in \{0,1\} \qquad i = 1,..,m$$

$$Costo_{max} \geq 0$$

Modello di p-centro

Esercizio

6 utenti, 5 impianti

12	8	2	3	8
8	4	6	5	7
2	6	5	6	5
3	5	6	9	10
8	4	5	10	8
7	3	3	4	4

costi di afferenza

Implementare in OPL il modello di p-mediana ed il modello di p-centro con $p = 2$. Confrontare le soluzioni ottenute nei due casi

Soluzione

costi di afferenza

12	8	2	3	8
8	4	6	5	7
2	6	5	6	5
3	5	6	9	10
8	4	5	10	8
7	3	3	4	4

p-mediana

x^*

0	0	1	0	0
0	0	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	1	0	0

y^*

1	0	1	0	0

costo totale di afferenza =
$z^* = c_{13} + c_{23} + c_{31} + c_{41} + c_{53} + c_{63} = 21$

p-centro

x^*

0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0

y^*

0	1	1	0	0

costo di afferenza max =
$z^* = c_{33} = c_{42} = 5$

Esercizio per casa: Le soluzioni ottime del problema della p-mediana e del p-centro, sono ammissibili per il problema di localizzazione non capacitato. Verificare che in corrispondenza di tali soluzioni, il valore di f.o. del problema di localizzazione non capacito è non inferiore alla soluzione ottima riportata nella slide 13.