
Complementi ed Esercizi di Ricerca Operativa

Sussidi Didattici

M. FLAVIA MONACO
MARCELLO SAMMARRA

Handwritten mathematical work on a chalkboard showing the simplex method. The work includes two augmented matrices, an arrow indicating a pivot operation, and the calculation of the optimal solution x^* and z^* .

Initial tableau (left):

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 & 5 & 10 \end{array}$$

Pivot operation indicated by a red arrow pointing to the element 1 in the third row, second column.

Optimal solution (right):

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 12 \end{array}$$

Optimal solution:

$$x^* = [3, 2, 1, 0, 0]^T$$
$$z^* = -12$$

UNICAL-DIMES

A.A. 2019 - 2020

Prefazione

Il presente volume è una raccolta di esercizi di Ricerca Operativa. Nella quasi totalità si tratta di originali temi d'Esame proposti agli studenti negli ultimi dieci anni.

La risoluzione di un esercizio numerico di qualsiasi disciplina scientifica (a maggior ragione di una disciplina come la Ricerca Operativa, ricca come è di algoritmi) non deve essere un procedimento meccanico fine a se stesso, bensì deve essere un *completamento* della teoria e, come tale, fungere da guida e da ausilio per una più profonda e semplice comprensione della materia. Per tali ragioni, ove strettamente necessario, saranno richiamati brevemente gli aspetti teorici.

Il volume è pensato per un corso base di Ricerca Operativa (circa 60 ore) e copre, essenzialmente, quattro argomenti: gli aspetti geometrici della Programmazione Lineare (Capitolo 1); la Programmazione Lineare e la Dualità (Capitolo 2); i problemi di Flusso su Rete (Capitoli 3 e 4); infine, in maniera marginale, la Programmazione Lineare a Numeri Interi (Capitolo 5).

Ogni capitolo è composto da tre tipologie di esercizi: esercizi completamente svolti e discussi, con tutti i passaggi matematici e logici che portano alla risoluzione del problema; esercizi per i quali sono riportate solo le soluzioni, individuati da un asterisco *; altri, infine, individuati da un quadratino nero ■, per i quali non è riportata la soluzione. Questi ultimi sono stati pensati per invogliare gli studenti a confrontarsi tra di loro e prepararli, gradualmente, ad affrontare i problemi che si troveranno nella loro esperienza professionale.

Come ogni prima stesura, il testo non è esente da errori. Preghiamo chiunque ne individuasse a volerlo segnalare: le generazioni future, e gli autori, saranno riconoscenti.

M.F. Monaco

M. Sammarra

Elenco Edizioni:

Prima Stesura: Dicembre 2016

Prima Revisione: Novembre 2017

Seconda Revisione: Settembre 2019

Elenco delle figure

1.1	Il Politopo P dell'Esercizio 1.1.1.	2
1.2	Un esempio di proiezione di un poliedro in forma standard.	4
1.3	Un esempio di proiezione di un poliedro non in forma standard.	4
1.4	Soluzione grafica del problema (1.1): $k_1 < k_2 < k^*$	11
1.5	Soluzione grafica del problema (1.3)	12
1.6	Soluzione grafica del problema (1.4): $k_1 < k_2 < k_3$	13
2.1	Esercizio 2.1.3 - Rappresentazione del problema duale	28
2.2	Esercizio 2.1.4 - Rappresentazione del problema duale	32
2.3	Esercizio 2.1.4 - Introduzione del vincolo duale $y_1 \leq 7$	33
2.4	Esercizio 2.1.4 - Introduzione del vincolo duale $y_1 \leq 3$	34
3.1	Modifica della variabile λ_p	48
3.2	$p \in H_2$	49
3.3	$q \in H_2$	49
3.4	Il grafo dell'Esercizio 3.2.1	50
3.5	La soluzione ammissibile di base iniziale dell'Esercizio 3.2.1.	51
3.6	Ciclo alla prima iterazione	51
3.7	La soluzione ammissibile alla fine della prima iterazione.	52
3.8	Ciclo alla seconda iterazione	52
3.9	La soluzione ammissibile di base alla fine della seconda iterazione. . . .	53
3.10	Ciclo alla terza iterazione	53
3.11	La soluzione ammissibile di base alla fine della terza iterazione.	54
3.12	Ciclo alla quarta iterazione	54
3.13	La soluzione ammissibile di base alla fine della quarta iterazione.	54
3.14	Il grafo dell'Esercizio 3.3.1	55
3.15	Il grafo dell'Esercizio 3.3.2	56
3.16	Il grafo dell'Esercizio 3.3.3	56
3.17	Il grafo dell'Esercizio 3.3.4	57

3.18	Il grafo dell'Esercizio 3.3.5	58
3.19	Il grafo dell'Esercizio 3.4.1.	60
3.20	La soluzione ammissibile di base iniziale dell'Esercizio 3.4.1.	61
3.21	Ciclo alla prima iterazione	61
3.22	La soluzione ammissibile alla fine della prima iterazione.	62
3.23	Ciclo alla seconda iterazione.	62
3.24	La soluzione ammissibile alla fine della seconda iterazione.	63
3.25	Ciclo alla terza iterazione.	63
3.26	La soluzione ammissibile alla fine della terza iterazione.	64
3.27	Ciclo alla quarta iterazione.	64
3.28	La soluzione ammissibile alla fine della quarta iterazione.	65
3.29	Il grafo dell'Esercizio 3.4.2.	65
3.30	Il grafo dell'Esercizio 3.4.2 dopo il cambio di variabili.	66
3.31	La soluzione ammissibile di base iniziale dell'Esercizio 3.4.1.	67
3.32	Ciclo alla prima iterazione	67
3.33	La soluzione ammissibile alla fine della prima iterazione.	68
3.34	Ciclo alla seconda iterazione	68
3.35	La soluzione ammissibile alla fine della seconda iterazione.	68
3.36	La soluzione ottima del problema originario.	69
3.37	Il grafo dell'Esercizio 3.5.1	70
3.38	Il grafo dell'Esercizio 3.5.2	71
3.39	Il grafo dell'Esercizio 3.5.3	71
4.1	La rete di flusso dell'esercizio 4.1	74
4.2	La rete di flusso dell'esercizio 4.1 all'inizio della seconda iterazione . . .	75
4.3	La rete di flusso dell'esercizio 4.1 all'inizio della terza iterazione	76
4.4	La rete di flusso dell'esercizio 4.1 all'inizio della quarta iterazione	76
4.5	La rete di flusso dell'esercizio 4.1 all'inizio della quinta iterazione	77
4.6	Il grafo dell'Esercizio 4.2.1	78
4.7	Il grafo dell'Esercizio 4.2.2	79
4.8	Il grafo dell'Esercizio 4.2.3	79
5.1	Regione ammissibile di P_0 e soluzione ottima $x_{P_0}^*$	82
5.2	Regione ammissibile di P_1 e soluzione ottima $x_{P_1}^*$	82
5.3	Regione ammissibile di P_3 e soluzione ottima $x_{P_3}^*$	83
5.4	Regione ammissibile di P_5 e soluzione ottima $x_{P_5}^*$	83
5.5	Regione ammissibile di P_6 e soluzione ottima $x_{P_6}^*$	84

5.6	Regione ammissibile di P_2 e soluzione ottima x_P^*	84
5.7	Albero dei Sottoproblemi dell'Esercizio 5.1.1	85
5.8	Regione ammissibile di PL_0 e soluzione ottima $x_{P_0}^*$	86
5.9	Regione ammissibile di P_1 e soluzione ottima $x_{P_1}^*$	87
5.10	Regione ammissibile di P_3 e soluzione ottima $x_{PL_3}^*$	87
5.11	Albero di Branch&Bound dell'Esercizio 5.2.3.	89
5.12	Esercizio 5.2.4	91
5.13	Esercizio 5.2.5	92

Indice

1	Soluzioni di base - Risoluzione grafica di problemi di PL	1
1.1	Esercizi Svolti	1
1.2	Esercizi non svolti	14
2	Algoritmo del Simplexso e Dualità	15
2.1	Esercizi Svolti	15
2.2	Esercizi non svolti	42
3	Algoritmo del Simplexso su rete per problemi di flusso di costo minimo	47
3.1	Tecniche di aggiornamento delle variabili duali	48
3.2	Flusso di Costo Minimo su reti non capacitate - Esercizi svolti	50
3.3	Flusso di Costo Minimo su reti non capacitate - Esercizi non svolti	55
3.4	Flusso di Costo Minimo su reti capacitate - Esercizi svolti	59
3.5	Flusso di Costo Minimo su reti capacitate - Esercizi non svolti	70
4	Il Problema del Massimo Flusso	73
4.1	Esercizi Svolti	74
4.2	Esercizi non svolti	78
5	Programmazione Lineare Intera	81
5.1	Esercizi svolti	81
5.2	Esercizi non svolti	88

Capitolo 1

Soluzioni di base - Risoluzione grafica di problemi di PL

1.1 Esercizi Svolti

ESERCIZIO 1.1.1. Sono assegnati il poliedro

$$P = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 \leq 4, x_2 \leq 1, -x_1 + x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

ed i punti $x_A = (0, 1)$, $x_B = (1, 1)$, $x_C = (2, \frac{1}{2})$, $x_D = (\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$, $x_E = (2, 2)$, $x_H = (2, 1)$.

1. Stabilire la natura dei punti $x_A, x_B, x_C, x_D, x_E, x_H$ e determinare i vertici di P .

Soluzione – E' facile verificare che x_A, x_B, x_C, x_H soddisfano il sistema di disequazioni e quindi sono punti di P , mentre $x_D, x_E \notin P$. In particolare, rappresentando P su di un piano cartesiano, si può osservare che (Figura 1.1):

- (a) P è un *politopo* ossia un poliedro *limitato* (insieme convesso *chiuso* e *limitato*);
- (b) I vertici di P sono i punti di coordinate: $x_A = (0, 1)$, $x_F = (0, 0)$, $x_H = (2, 1)$, $x_G = (4, 0)$
- (c) x_A e x_H sono *vertici* di P , x_B è un punto che giace sulla *frontiera* di P , x_C è un punto *interno*;

OSSERVAZIONE 1.1.1. *Tutti i poliedri, se non vuoti, ammettono sempre almeno un punto interno ed un punto di frontiera. I poliedri che rappresentano la regione ammissibile di un problema di Programmazione Lineare, se non vuoti, hanno inoltre sempre almeno un vertice (Teorema Fondamentale della PL)*

□

OSSERVAZIONE 1.1.2. Un punto in \mathbb{R}^q è individuato dall'intersezione di q iperpiani linearmente indipendenti. Se $P = \{x \in \mathbb{R}^q \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ è un poliedro in \mathbb{R}^q e $A \in \mathbb{R}^{h \times q}$ allora ogni vertice di P può essere ottenuto intersecando q iperpiani relativi ai $h+q$ semispazi che definiscono P . Se il punto di intersezione di tali iperpiani esiste e soddisfa le rimanenti disequaglianze di P allora esso è un vertice; altrimenti o è esterno a P oppure semplicemente non esiste. Questo caso si verifica se gli iperpiani sono linearmente dipendenti.

□

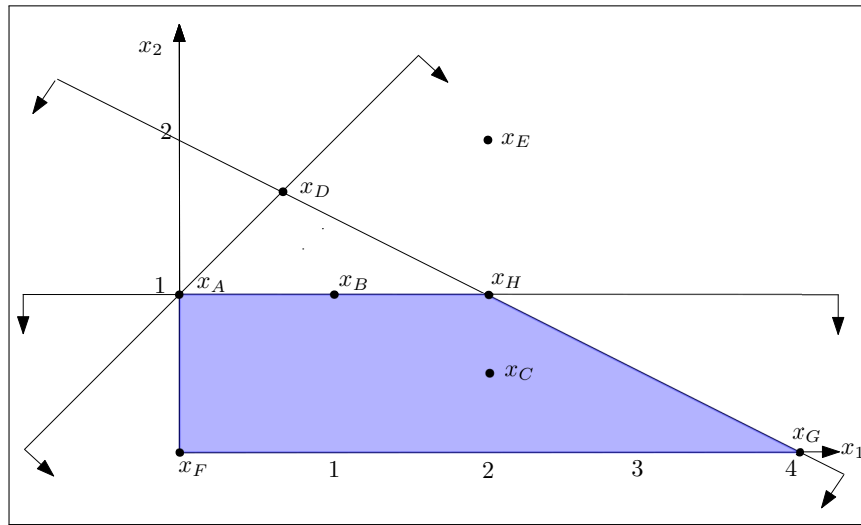


Figura 1.1: Il Politopo P dell'Esercizio 1.1.1.

Alla luce dell'osservazione precedente nel nostro caso ($q = 2$) intersecando, ad esempio, gli iperpiani relativi al primo e al secondo semispazio si ha:

$$x_1 + 2x_2 = 4$$

$$x_2 = 1$$

ossia $x = (x_1, x_2) = (2, 1)$. Poiché $x \in P$, esso è un vertice ($x = x_H$). Lo stesso dicasi intersecando gli iperpiani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ (si ottiene in tal caso x_F) e l'iperpiano relativo al primo semispazio con $x_2 = 0$ (x_G).

Intersecando gli iperpiani relativi al primo ed al terzo semispazio

$$x_1 + 2x_2 = 4$$

$$-x_1 + x_2 = 1$$

troviamo $x = (\frac{2}{3}, \frac{5}{3}) = x_D \notin P$ quindi $x = x_D$ non è un vertice. Intersecando, invece, il secondo semispazio con $x_2 = 0$ troviamo un sistema incompatibile ($x_2 = 1, x_2 = 0$) quindi l'intersezione non esiste. In effetti i due iperpiani sono linearmente dipendenti (sono paralleli!)

Intersecando gli iperpiani relativi al secondo ed al terzo semispazio

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 \\ -x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

si ha $x = (0, 1) = x_A$ che è un vertice. Lo stesso vertice si può ottenere, alternativamente, intersecando sia l'iperpiano relativo al secondo semispazio con $x_1 = 0$, sia intersecando quello relativo al terzo vincolo con $x_1 = 0$. Il vertice x_A è un vertice *speciale*: esso soddisfa come uguaglianza un numero di vincoli (3) superiore a quelli necessari (2) e tali vincoli sono a due a due linearmente indipendenti. Un vertice siffatto è detto *degenere*.

◇

2. Definire il Poliedro P_{FS} (forma standard di P) e ripetere il punto 1.

Soluzione – Il poliedro P_{FS} si ottiene da P trasformando le h disequaglianze che lo definiscono (senza quindi considerare i vincoli di segno sulle variabili) in eguaglianze, aggiungendo al primo membro di ciascun vincolo $a_i^\top x \leq b_i$, $i = 1, \dots, h$ una quantità non negativa (*variabile di slack*) pari allo scarto tra secondo membro e primo membro

$$x_{q+i} = b_i - a_i^\top x \quad i = 1, \dots, h$$

Avremo quindi

$$P_{FS} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \left| \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 4 \\ x_2 + x_4 & = & 1 \\ -x_1 + x_2 + x_5 & = & 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 \end{array} \right. \right\}$$

OSSERVAZIONE 1.1.3. Il poliedro P_{FS} è definito in uno spazio di dimensione superiore (\mathbb{R}^{h+q}) rispetto alla dimensione dello spazio in cui è definito P (\mathbb{R}^q). Tuttavia esiste una forte correlazione tra i due poliedri. Posto, per comodità, x^S pari al vettore delle variabili di slack, vale la seguente

Proposizione 1.1.1. $x \in P \iff \exists x^S \in \mathbb{R}^h$ tale che $(x, x^S) \in P_{FS}$

La proposizione 1.1.1 afferma, sostanzialmente, che P è la proiezione di P_{FS} nello spazio delle variabili x e che i vertici di P e quelli di P_{FS} sono in corrispondenza uno-a-uno (si veda la figura (1.2)). Quest'ultima proprietà non vale in generale, ossia quando P è la proiezione di un poliedro $Q \neq P_{FS}$ (si veda figura (1.3)).

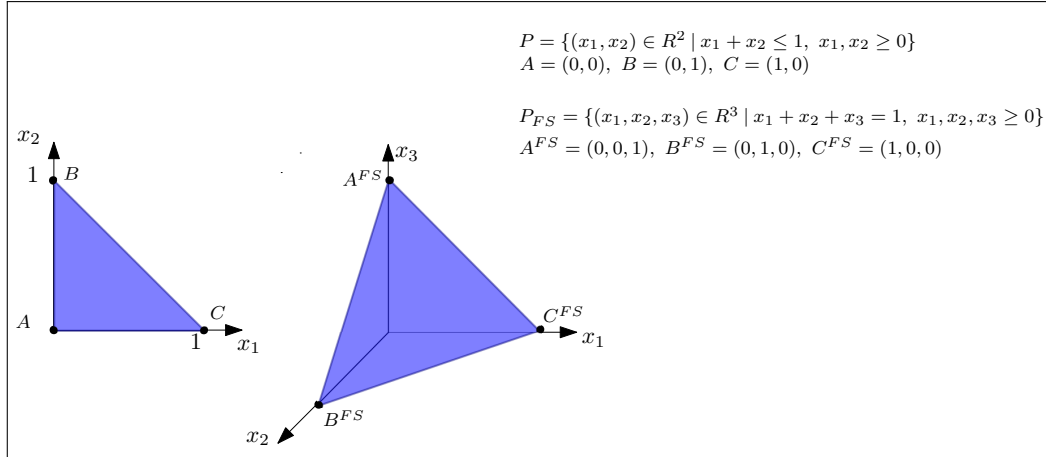


Figura 1.2: Un esempio di proiezione di un poliedro in forma standard.

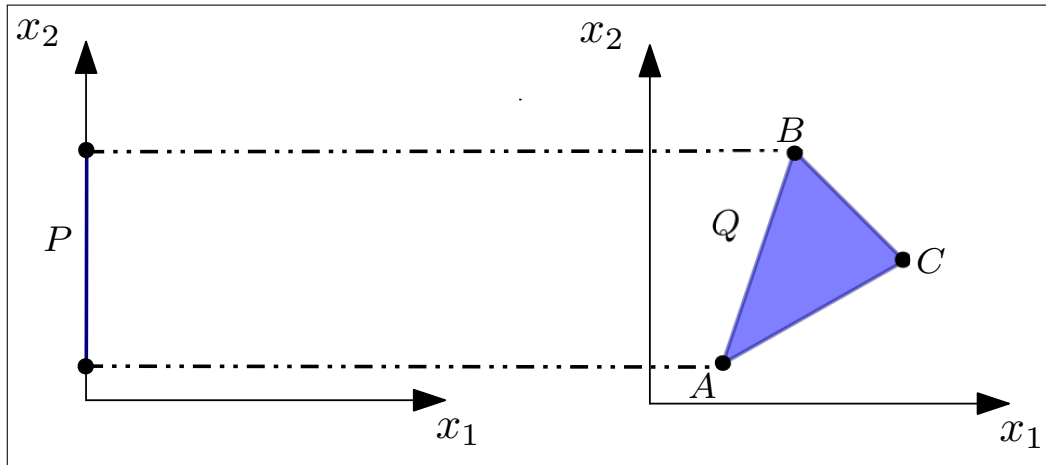


Figura 1.3: Un esempio di proiezione di un poliedro non in forma standard.

□

Grazie alla definizione delle variabili di slack, i corrispondenti dei punti assegnati nello spazio in cui è definito P_{FS} sono: $x_A^{FS} = (0, 1, 2, 0, 0)$, $x_B^{FS} = (1, 1, 1, 0, 1)$, $x_C^{FS} = (2, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $x_D^{FS} = (\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0, -\frac{2}{3}, 0)$, $x_E^{FS} = (2, 2, -2, -1, 1)$, $x_H^{FS} = (2, 1, 0, 0, 2)$. Ne deriva che:

- (a) Se un punto $x \notin P$ allora in x^{FS} vi saranno tante variabili di slack *negative* quanti sono i vincoli di P violati da x ($x_4 < 0$ in x_D^{FS} e $x_3, x_4 < 0$ in x_E^{FS})
- (b) Se un punto x è interno a P allora tutte le variabili di slack saranno strettamente positive ($x_3, x_4, x_5 > 0$) in x_C^{FS} .
- (c) Se un punto x sta sul bordo di P vi sarà *esattamente* una variabile di slack nulla in x^{FS} e precisamente sarà nulla la variabile di slack relativa al vincolo che definisce il bordo di P su cui x giace ($x_4 = 0$ in x_B^{FS} e x_4 è la variabile di slack relativa al secondo vincolo di P).

Per le proprietà precedenti vale anche il viceversa, cioè se x^{FS} presenta una variabile di slack negativa allora $x \notin P$; se tutte le variabili di slack sono strettamente positive allora x è un punto interno di P ; se esiste *almeno* una variabile di slack nulla allora x sta su uno dei bordi di P .

Un discorso a parte meritano i vertici di P_{FS} . Al punto (1) dell'esercitazione è stato evidenziato che un vertice di un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^q$ soddisfa come eguaglianze q vincoli di P linearmente indipendenti, giustificando l'asserzione con il fatto che per identificare un punto in \mathbb{R}^q servono q iperpiani. Consideriamo quindi un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^q$ descritto da h disequazioni ed q vincoli di segno sulle variabili. Poniamo $n = h + q$ e consideriamo la sua forma standard $P_{FS} \subseteq \mathbb{R}^n$, descritto da $m = h$ equazioni e n vincoli di segno sulle variabili. Un vertice x di P_{FS} dovrà quindi soddisfare all'eguaglianza n vincoli linearmente indipendenti. Ma di questi n vincoli m sono già equazioni (per definizione di forma standard), i rimanenti $n - m$ vincoli soddisfatti per uguaglianza saranno vincoli di segno sulle variabili di P_{FS} . Pertanto un vertice di P_{FS} è caratterizzato dall'avere $n - m =$ componenti nulle, mentre le restanti m potranno assumere qualsiasi valore (eventualmente nullo!) compatibilmente con i vincoli di P_{FS} .

OSSERVAZIONE 1.1.4. In P un vertice non degenero, x_H , soddisfa all'uguaglianza $q = 2$ vincoli linearmente indipendenti (il primo ed il secondo); in P_{FS} x_H^{FS} presenta due variabili nulle (le variabili di slack x_3 ed x_4 relative, rispettivamente, al primo ed al secondo vincolo);

□

OSSERVAZIONE 1.1.5. Per calcolare i vertici di P_{FS} si possono porre a zero nel sistema di equazioni $n - m$ variabili. In tale modo il sistema si riduce ad un sistema di m equazioni in m incognite. Sulla risolubilità di questo sistema ridotto di equazioni valgono le considerazioni fatte precedentemente: se la soluzione esiste e soddisfa i vincoli di segno,

essa è un vertice; se esiste ma non soddisfa i vincoli di segno non è un vertice; se non esiste, il sistema è incompatibile.

□

OSSERVAZIONE 1.1.6. Sia $a_i^\top x \leq b_i$ un vincolo di P , sia $a_i^\top x = b_i$ l'iperpiano di associato a tale vincolo e $a_i^\top x + x_{q+i} = b_i$ in vincolo in forma standard. Allora l'equazione dell'iperpiano $a_i^\top x = b_i$ nello spazio di P_{FS} è $x_{q+i} = 0$.

□

Alla luce di quanto detto ponendo $x_1 = x_2 = 0$ si ottiene $x_F^{FS} = (0, 0, 4, 1, 1)$; ponendo $x_3 = x_4 = 0$ si ottiene $x_H^{FS} = (2, 1, 0, 0, 1)$; ponendo $x_2 = x_3 = 0$ si ottiene $x_G^{FS} = (4, 0, 0, 1, 5)$. Considerando invece $x_1 = x_4 = 0$ si ottiene il punto x_D^{FS} che essendo non ammissibile non può essere un vertice.

Infine ponendo $x_1 = x_4 = 0$, $x_1 = x_5 = 0$, $x_4 = x_5 = 0$ si ottiene sempre lo stesso vertice $x_A^{FS} = (0, 1, 2, 0, 0)$. Pertanto come x_A era un vertice degenerare per P , x_A^{FS} è un vertice degenerare per P_{FS}

◇

ESERCIZIO 1.1.2. Determinare le soluzioni ammissibili di base del problema

$$\begin{array}{ll} \min & c^\top x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Soluzione — Dato un sistema di equazioni $Ax = b$, con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m < n$, si assuma che A abbia rango massimo, cioè pari a m . Sia $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ una sottomatrice quadrata non singolare di A e sia $\mathcal{B} \subset \{1, \dots, n\}$ l'insieme degli indici delle colonne di A che compongono B . Sia $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{B}$ l'insieme dei restanti indici e N la sottomatrice di A formata dalle colonne con indici in \mathcal{N} . Sotto queste ipotesi il sistema di equazioni $Ax = b$ può essere scritto come

$$Bx_B + Nx_N = b$$

dove x_B ed x_N sono sottovettori di x le cui componenti hanno indici rispettivamente in \mathcal{B} ed \mathcal{N} . B viene chiamata matrice di *base* (o semplicemente base) di A , x_B vettore

delle variabili di base, \mathcal{B} insieme degli indici di base; x_N è detto vettore delle variabili *fuori base*, \mathcal{N} insieme degli indici non di base e N matrice non di base. Poiché B è non singolare, il precedente sistema può essere risolto per x_B

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \quad (1.2)$$

L'espressione (1.2), per una fissata base B , rappresenta *tutte* le soluzioni del sistema $Ax = b$ al variare degli $n - m$ parametri x_N . La particolare soluzione che si ottiene ponendo $x_N = 0_{n-m}$ viene detta *soluzione di base del sistema* $Ax = b$. Se in corrispondenza di $x_N = 0$ si ha $x_B \geq 0$, il vettore

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$$

viene detto *soluzione ammissibile di base del problema* (1.1) e se $x_B > 0$ la soluzione ammissibile di base è *non degenera*.

OSSERVAZIONE 1.1.7. *E' evidente che*

1. *Un vertice non degenera di P_{FS} è caratterizzato dall'avere un numero di componenti nulle pari alla differenza tra il numero di variabili ed il numero di equazioni.*
2. *Una soluzione ammissibile di base non degenera del problema (1.1) presenta un numero di componenti nulle pari alla differenza tra il numero di variabili ed il numero di equazioni.*

L'osservazione precedente mette in luce una stretta correlazione tra i vertici di P_{FS} e le soluzioni ammissibili di base di un problema di PL in forma standard. Vale infatti il seguente risultato

Proposizione 1.1.2. *x è una soluzione ammissibile di base per $Ax = b, x \geq 0$ se e solo se x è un vertice di P_{FS}*

Pertanto per calcolare i vertici di P_{FS} si possono calcolare le soluzioni ammissibili di base di $Ax = b, x \geq 0$.

Le sottomatrici quadrate di ordine 3×3 estraibili da A (in tutto pari a $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$) e quindi le possibili basi, sono le seguenti

$$\mathcal{B}_1 = \{3, 4, 5\} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B^{-1} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{1, 4, 5\}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_3 = \{1, 2, 5\}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_4 = \{1, 2, 4\}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_5 = \{2, 4, 5\}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{1} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_6 = \{2, 3, 5\}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_7 = \{1, 2, 3\}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_8 = \{2, 3, 4\}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_9 = \{1, 3, 4\}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B}_{10} = \{1, 3, 5\}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \det(B) = 0 \longrightarrow B \text{ non è una base}$$

In definitiva tra le 10 matrici di dimensioni 3×3 che è possibile estrarre da A : 9 rappresentano basi di A ed una ($\mathcal{B}_{10} = \{1, 3, 5\}$) una non base. Delle 9 basi: tre sono non ammissibili ($\mathcal{B}_4 = \{1, 2, 4\}, \mathcal{B}_5 = \{2, 4, 5\}, \mathcal{B}_9 = \{1, 3, 4\}$). Delle 6 basi ammissibili si ha la seguente associazione con i vertici di P_{FS}

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 = \{3, 4, 5\} &\longrightarrow x = [0, 0, 4, 1, 1]^\top \longrightarrow \text{vertice } x_A^{FS} \\ \mathcal{B}_2 = \{1, 4, 5\} &\longrightarrow x = [4, 0, 0, 1, 5]^\top \longrightarrow \text{vertice } x_G^{FS} \\ \mathcal{B}_3 = \{1, 2, 5\} &\longrightarrow x = [2, 1, 0, 0, 2]^\top \longrightarrow \text{vertice } x_H^{FS} \\ \mathcal{B}_6 = \{2, 3, 5\} &\longrightarrow x = [0, 1, 2, 0, 0]^\top \longrightarrow \text{vertice } x_A^{FS} \\ \mathcal{B}_7 = \{1, 2, 3\} &\longrightarrow x = [0, 1, 2, 0, 0]^\top \longrightarrow \text{vertice } x_A^{FS} \\ \mathcal{B}_8 = \{2, 3, 4\} &\longrightarrow x = [0, 1, 2, 0, 0]^\top \longrightarrow \text{vertice } x_A^{FS} \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE 1.1.8. *Comunque prendiamo una coppia di insiemi di indici $\mathcal{B}_k, \mathcal{B}_{k+1}$, $k = 1, \dots, 8$, comprese quindi anche quelle che danno luogo a basi non ammissibili, esse differiscono per un solo indice. Le basi che soddisfano tale proprietà vengono definite adiacenti. Anche le sole basi ammissibili $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_8$ sono adiacenti e generano vertici di P_{FS} che giacciono sullo stesso spigolo di P_{FS} , ovvero vertici che sono sullo stesso spigolo di P , ovvero vertici adiacenti.*

□

OSSERVAZIONE 1.1.9. *Le basi ammissibili $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_6, \mathcal{B}_7, \mathcal{B}_8$ soddisfano tutte la Proposizione (1.1.2). Possiamo osservare che nel caso non degenera la corrispondenza tra basi ammissibili e vertici è biunivoca: ad una base ammissibile corrisponde un vertice ed uno solo, ad un vertice corrisponde una base ammissibile ed una sola. Nel caso degenera invece la corrispon-*

denza è solo univoca: una base individua un vertice ed uno solo, ma non vale più il viceversa (come dimostra il vertice degenero x_A).

□

◇

ESERCIZIO 1.1.3. Determinare la soluzione ottima del problema (1.1) dell'Esercizio 1.1.2.

Soluzione — I vertici di P e di P_{FS} sono in corrispondenza uno-a-uno, mentre a questi ultimi corrispondono le soluzioni di base di $Ax = b, x \geq 0$. Per risolvere il problema (1.1) si potrebbe pensare, pertanto, di calcolare la funzione obiettivo in ciascuna soluzione ammissibile di base e prendere la soluzione ammissibile di base cui corrisponde il valore minimo di funzione obiettivo. Il numero di soluzioni ammissibili di base, benché finito, cresce esponenzialmente al crescere della dimensione del problema (il numero di basi ammissibili è limitato superiormente dal coefficiente binomiale tra n ed m). Anche se un oracolo ci fornisse tutte le soluzioni ammissibili di base di un problema di PL, il solo calcolo della funzione obiettivo in ciascuna di esse sarebbe computazionalmente inefficiente.

Allo stato delle nostre conoscenze, per risolvere (1.1) definito su P_{FS} si può pensare di risolvere il problema equivalente definito su P e questo possiamo risolverlo graficamente. Basta infatti osservare che:

1. La funzione obiettivo $z(x_1, x_2) = -x_1 - 3x_2$ può essere rappresentata nel piano per *curve di livello*. Una curva di livello di una funzione $z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è definita come l'insieme dei punti in cui la funzione assume lo stesso valore

$$L(k) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid z(x) = k, \quad k \in \mathbb{R}\}$$

Se z è lineare, come nel nostro caso, allora $z(x) = k$ è una retta, e quindi $L(k)$, al variare di k , descrive una famiglia di rette parallele.

2. Il gradiente di una funzione in un punto è una direzione di *crescita* della funzione in quel punto (informazione locale). Nel caso di funzioni lineari, il gradiente è costante e quindi indica una direzione *globale* di crescita della funzione. Esso è il vettore dei coefficienti di costo della funzione obiettivo.
3. Il gradiente di una funzione in un punto è sempre ortogonale al piano tangente alla funzione in quel punto. Chiaramente nel caso di funzioni lineari il gradiente è ortogonale alla funzione stessa in ogni punto e, quindi, ortogonale ad ogni retta di livello.

Pertanto per determinare graficamente il vertice ottimo basta tracciare il gradiente della funzione obiettivo ed un fascio di rette ortogonali al gradiente. Spostandoci nella direzione del gradiente la funzione obiettivo cresce; la retta di livello corrispondente al più grande valore di k , $z(x) = k_{\max}$, che ha almeno un punto di tangenza con la regione ammissibile rappresenta il valore massimo della funzione obiettivo nella regione data. Viceversa se ci spostiamo nella direzione opposta a quella del gradiente la funzione obiettivo decresce; la retta di livello corrispondente al più piccolo valore di k , $z(x) = k_{\min}$, che ha almeno un punto di tangenza con la regione ammissibile rappresenta il valore minimo della funzione obiettivo nella regione data. Il punto (o i punti) di tangenza rappresenta la soluzione ottima del problema: esso è un punto di massimo nel primo caso, di minimo nel secondo caso.

Nel nostro esempio (figura 1.4), quindi il vertice ottimo è x_H in cui la funzione obiettivo vale $z^* = z(x_H) = -5 = k^*$

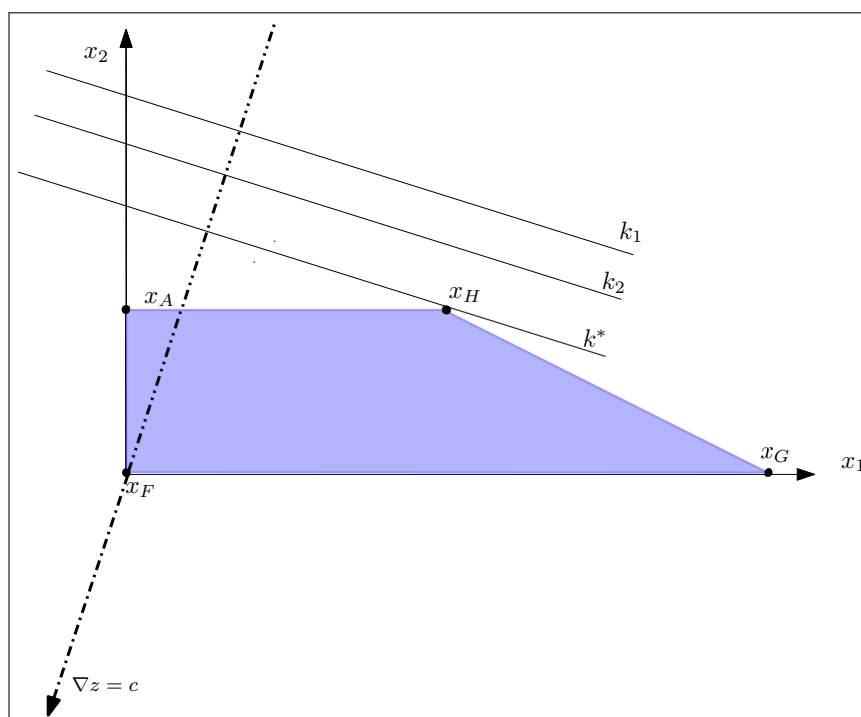


Figura 1.4: Soluzione grafica del problema (1.1): $k_1 < k_2 < k^*$

ESERCIZIO 1.1.4. Risolvere graficamente il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Soluzione – Il problema (1.3) ha per regione ammissibile il poliedro P e la risoluzione è mostrata in figura (1.5). Notiamo, questa volta, che la curva di livello cui corrisponde

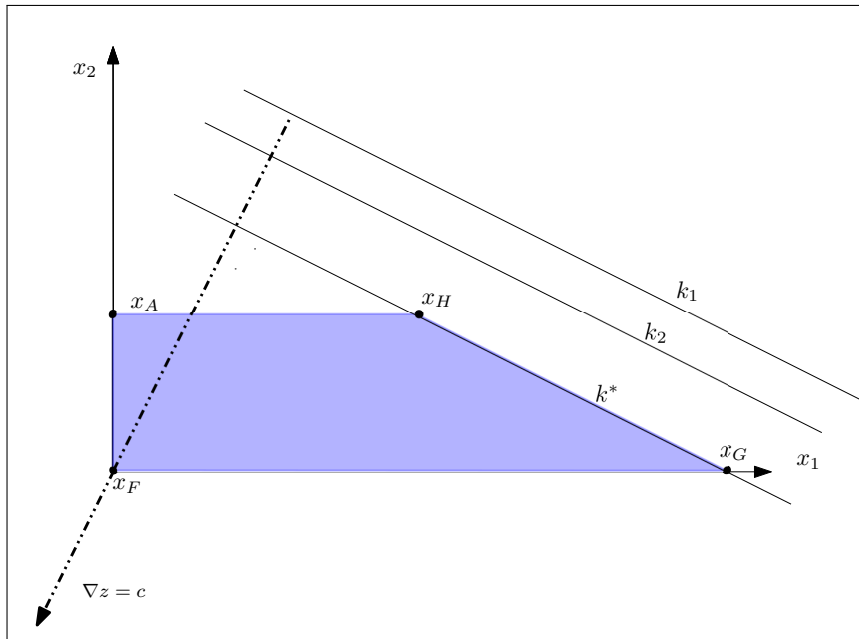


Figura 1.5: Soluzione grafica del problema (1.3)

la soluzione ottima, ha *infiniti* punti di tangenza con la regione ammissibile. Pertanto il problema (1.5) ha infinite soluzioni ottime, delle quali due sono vertici (in accordo con il teorema fondamentale della PL). Ciò accade sempre quando la funzione obiettivo ed uno dei vincoli sono paralleli. In effetti si può notare che $c^\top = [-2, -4, 0, 0, 0] = -2a_1^\top = -2[1, 2, 0, 0, 0]$

◇

ESERCIZIO 1.1.5. Risolvere graficamente il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

Soluzione — La regione ammissibile, il gradiente e le curve di livello della funzione obiettivo sono mostrati in figura (1.6). Osserviamo che la regione ammissibile questa volta è illimitata nella direzione dell'antigradiente. Pertanto il problema non ammette soluzione ottima.

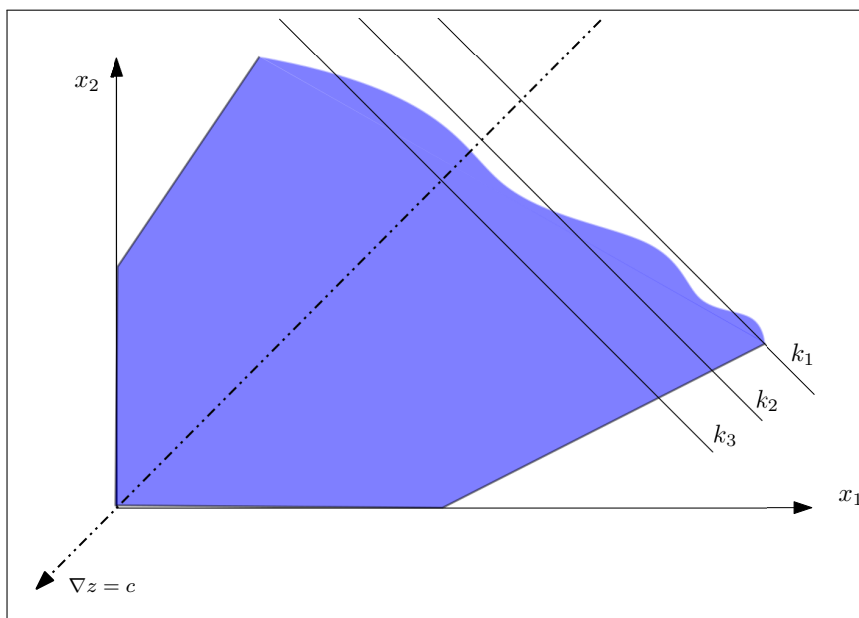


Figura 1.6: Soluzione grafica del problema (1.4): $k_1 < k_2 < k_3$.

OSSERVAZIONE 1.1.10. *L'illimitatezza della regione ammissibile è una condizione necessaria ma non sufficiente a garantire l'illimitatezza della funzione obiettivo. Ad esempio se sulla stessa regione ammissibile si vuole minimizzare la funzione $z(x_1, x_2) = x_2$, allora esistono infinite soluzioni ottime. Così come se volessimo massimizzare $z(x_1, x_2) = -x_1 - x_2$ la soluzione esiste ed è unica. Perciò l'illimitatezza di un problema dipende non solo dall'illimitatezza della regione ammissibile, ma dalla funzione obiettivo e dall'obiettivo (massimo o minimo) che stiamo perseguendo*

◇

ESERCIZIO 1.1.6. Risolvere graficamente il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top x \\ \text{con} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} -10 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

Soluzione — Si vede banalmente che i vincoli sono *opposti* rispetto a quelli del problema (1.4) e pertanto sono incompatibili, cioè l'intersezione dei relativi semispazi è vuota. Quindi il problema (1.5) non ammette soluzione ottima perché inammissibile.



OSSERVAZIONE 1.1.11. Riassumendo: per un problema di PL vale una sola delle seguenti proprietà

1. ammette soluzione ottima unica (problema 1.1), oppure
2. ammette infinite soluzioni ottime, delle quali almeno una corrisponde ad un vertice (problema 1.5), oppure
3. non ammette soluzione ottima. In questo caso il problema può essere illimitato (problema 1.4) oppure inammissibile (problema 1.5)

In ogni caso, se non vuoto, l'insieme delle soluzioni ottime di un problema di PL è un insieme convesso $X^* \subseteq \Omega(P)$. Si può dimostrare che X^* è un poliedro.



1.2 Esercizi non svolti

ESERCIZIO 1.2.1 ■ È assegnato il poliedro

$$P = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1 + x_2 \leq 4, x_1 - x_2 \leq 1, -2x_1 + x_2 \leq 2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

1. Determinare i vertici di P e quelli di P_{FS} .
2. Determinare graficamente il minimo della funzione $z(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$ su P

Capitolo 2

Algoritmo del Simplexso e Dualità

2.1 Esercizi Svolti

ESERCIZIO 2.1.1. È assegnato il seguente problema di PL \mathcal{P}

$$\begin{aligned} \min \quad z(x) = & \quad x_1 \quad + \quad x_2 \quad + \quad 2x_3 \\ & 2x_1 \quad + \quad x_2 \quad - \quad 3x_3 = \quad 6 \\ & \quad x_1 \quad + \quad x_2 \quad \leq \quad 5 \\ & \quad x_1 \quad \quad \quad - \quad x_3 \geq \quad 1 \\ & \quad x_1 \quad , x_2 \quad , x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Determinare la soluzione ottima di \mathcal{P} .
2. Determinare la soluzione ottima del problema duale \mathcal{D}
3. **Studiare la sensibilità della soluzione ottima di \mathcal{P} a seguito di variazioni dei termini noti del primo e secondo vincolo e dei coefficienti di costo di x_1 e x_3 di \mathcal{P}**

Soluzione – Il problema in forma standard è il seguente P_{FS}

$$\begin{aligned} \min \quad z(x) = & \quad x_1 \quad + \quad x_2 \quad + \quad 2x_3 \\ & 2x_1 \quad + \quad x_2 \quad - \quad 3x_3 \quad \quad \quad = \quad 6 \\ & \quad x_1 \quad + \quad x_2 \quad \quad \quad + \quad x_4 \quad \quad \quad = \quad 5 \\ & \quad x_1 \quad \quad \quad - \quad x_3 \quad \quad \quad - x_5 = \quad 1 \\ & \quad x_1 \quad , x_2 \quad , x_3 \quad , x_4, \quad x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Non avendo a disposizione una base ammissibile iniziale per P_{FS} , ricorriamo al Metodo a Due Fasi.

Prima Fase

Costruiamo il problema artificiale, notando che il numero minimo di variabili artificiali da usare è due: una per il primo vincolo ed una per il terzo. Quindi il problema artificiale è il seguente

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \rho = \alpha_1 + \alpha_2 \\
 & 2x_1 + x_2 - 3x_3 + \alpha_1 = 6 \\
 & x_1 + x_2 + x_4 = 5 \\
 & x_1 - x_2 - x_5 + \alpha_2 = 1 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \alpha_1, \alpha_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Il tableau del problema artificiale, in forma canonica rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\alpha_1, x_4, \alpha_2\}$ risulta

$$\begin{array}{ccccccc|c}
 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
 \hline
 -3 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & -7
 \end{array}$$

Iterazione 1 - Applichiamo l'Algoritmo del Simplex.

Pivot sull'elemento (3, 1): la variabile x_1 entra in base, esce la variabile α_2

$$\begin{array}{ccccccc|c}
 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 4 \\
 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 4 \\
 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
 \hline
 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 3 & -4
 \end{array}$$

Iterazione 2 - Entra in base la variabile x_2 , esce la variabile α_1

$$\begin{array}{cccccc|c}
0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 4 \\
0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}$$

Stop. La soluzione del problema artificiale è ottima e $\rho^* = 0$. Pertanto P_{FS} è ammissibile ed una base ammissibile è proprio la base ottima del problema artificiale $\mathcal{B} = \{x_2, x_4, x_1\}$. Si noti che la base è degenera.

Seconda Fase

Il tableau di P_{FS} , in forma canonica rispetto alla base $\mathcal{B} = \{x_2, x_4, x_1\}$ risulta

$$\begin{array}{cccc|c}
0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 4 \\
0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\
\hline
0 & 0 & 4 & 0 & -2 & -5
\end{array}$$

La soluzione non è ottima.

Iterazione 1 - Entra in base la variabile x_5 , esce la variabile x_2

$$\begin{array}{cccc|c}
0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 1/2 & 3/2 & 1 & 0 & 2 \\
1 & 1/2 & -3/2 & 0 & 0 & 3 \\
\hline
0 & 1/2 & 7/2 & 0 & 0 & -3
\end{array}$$

Stop. Soluzione Ottima $x_{FS}^* = (3, 0, 0, 2, 2)^\top$, $z^* = 3$

La soluzione ottima del del problema duale si può ottenere applicando il Teorema di Complementarietà. Scriviamo il duale del problema in forma standard

$$\begin{aligned}
\max \quad w(y) = & \quad 6y_1 + 5y_2 + y_3 \\
& 2y_1 + y_2 + y_3 \leq 1 \\
& y_1 + y_2 \leq 1 \\
& -3y_1 \quad - y_3 \leq 2 \\
& y_2 \leq 0 \\
& \quad - y_3 \leq 0
\end{aligned}$$

Poiché in P_{FS} si ha $x_1^*, x_4^*, x_5^* \geq 0$, allora in D il primo, il quarto ed il quinto vincolo devono essere soddisfatti all'uguaglianza (devono avere slack nulla, cioè essere attivi)

$$\begin{aligned}
2y_1 + y_2 + 2y_3 &= 1 \\
y_2 &= 0 \\
y_3 &= 0
\end{aligned}$$

Ricaviamo quindi $y_1^* = 1/2$, $y_2^* = y_3^* = 0$, $w^* = 3 = z^*$.

Per i più volenterosi

Studiamo, infine, la sensibilità della soluzione ottima di P a variazioni sul termine noto del primo e del secondo vincolo e sui coefficienti di costo delle variabili x_1 e x_3 .

La matrice di base ottima e la sua inversa sono

$$B^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (B^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le variazioni sui termini noti possono inficiare l'ammissibilità della base ottima. Quindi, per studiare la sensibilità della base ottima a variazioni delle componenti b_1 e b_2 del vettore b , basta imporre che, a seguito delle variazioni, la base B^* sia ancora ammissibile, e cioè

$$(B^*)^{-1} \begin{bmatrix} 6 + \Delta_1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (B^*)^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ 5 + \Delta_2 \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0$$

Pertanto, nel primo caso, avremo

$$\begin{aligned} 2 + \Delta_1/2 &\geq 0 \\ 2 - \Delta_1/2 &\geq 0 \quad \Rightarrow \quad -4 \leq \Delta_1 \leq 4 \\ 3 + \Delta_1/2 &\geq 0 \end{aligned}$$

mentre, a seguito di variazioni su b_2 , la base resterà ammissibile se

$$\begin{aligned} 2 &\geq 0 \\ 2 + \Delta_2 &\geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta_2 \geq -2 \\ 3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda le variazioni sui coefficienti di costo, bisogna distinguere i due casi:

1. *Variazione di un c_j relativo ad una variabile non di base*

Se il coefficiente c_j assume il valore $c_j + \Delta$, i coefficienti di costo ridotti diventano

$$\hat{c}_N^\top(\Delta) = (c_N^\top + \Delta \mathbf{e}_j^\top) - c_B^\top (B^*)^{-1} N$$

essendo \mathbf{e}_j un vettore unitario (con 1 in posizione j). Pertanto

$$\hat{c}_N^\top(\Delta) = \underbrace{c_N^\top - c_B^\top (B^*)^{-1} N}_{\hat{c}_N^\top} + \Delta \mathbf{e}_j^\top$$

Imponendo che a seguito della variazione la base B^* sia ancora ottima, avremo

$$\begin{aligned} \hat{c}_N^\top(\Delta) &= \underbrace{c_N^\top - c_B^\top (B^*)^{-1} N}_{\hat{c}_N^\top} + \Delta \mathbf{e}_j^\top \geq 0 \quad \Rightarrow \\ &\hat{c}_N^\top + \Delta \mathbf{e}_j^\top \geq 0 \Rightarrow \\ &\hat{c}_j + \Delta \geq 0 \end{aligned}$$

Quindi nel nostro caso si ha

$$\hat{c}_3 + \Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 7/2 + \Delta \geq 0$$

ovvero la base B^* rimane ottima se $\Delta \geq -7/2$.

2. *Variazione di un c_j relativo ad una variabile di base*

In questo caso si ha

$$\hat{c}_N^\top(\Delta) = c_N^\top - (c_B^\top + \Delta e_j^\top) (B^*)^{-1} N = \underbrace{c_N^\top - c_B^\top (B^*)^{-1} N}_{\hat{c}_N^\top} - \Delta e_j^\top (B^*)^{-1} N \geq 0 \Rightarrow$$

$$\hat{c}_N^\top \geq \Delta e_j^\top (B^*)^{-1} N$$

Nel nostro caso avremo

$$[\hat{c}_2, \hat{c}_3] = [1/2, 7/2] \geq [0, 0, \Delta] \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ovvero

$$[1/2, 7/2] \geq \left[\frac{\Delta}{2}, -\frac{3\Delta}{2} \right] \Rightarrow -\frac{7}{3} \leq \Delta \leq 1$$

◇

ESERCIZIO 2.1.2. E' assegnato il seguente problema di PL \mathcal{P}

$$\begin{aligned} \min \quad z(x) = \quad & 3x_1 + x_2 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 1 \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & -3x_1 + 2x_2 \geq -5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Risolvere \mathcal{P} con l'Algoritmo del Simplex.

2. Determinare la soluzione ottima del problema duale di \mathcal{P}

Soluzione – Il problema in forma standard, dopo aver cambiato di segno al terzo vincolo, è il seguente P_{FS}

$$\begin{aligned} \min \quad z(x) = \quad & 3x_1 + x_2 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Nel problema P_{FS} non è immediatamente disponibile una base ammissibile con cui fare partire l'algoritmo del Simplex. Ricorriamo al Metodo a Due Fasi.

Prima Fase

Costruiamo il problema artificiale, notando che il numero minimo di variabili artificiali da usare è due: una per il primo vincolo ed una per il secondo vincolo. Quindi il problema artificiale è il seguente

$$\begin{aligned} \min \quad & \rho = \alpha_1 + \alpha_2 \\ & 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + \alpha_1 = 1 \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 + \alpha_2 = 1 \\ & 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \alpha_1, \alpha_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Il tableau del problema artificiale, in forma canonica rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, x_5\}$ risulta

$$\begin{array}{cccccccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ \hline -5 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}$$

Iterazione 1 - Entra in base la variabile x_1 , esce la variabile α_2

$$\begin{array}{cccccccc|c} 0 & 1/3 & -5/3 & -1 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 \\ 1 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \\ \hline 0 & -1/3 & 5/3 & 1 & 0 & 0 & 5/3 & -1/3 \end{array}$$

Iterazione 2 - Entra in base la variabile x_2 , esce la variabile α_1

$$\begin{array}{ccccccc|c}
0 & 1 & -5 & -3 & 0 & 3 & -2 & 1 \\
1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -16 & -9 & 1 & 9 & -7 & 7 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array}$$

Stop. La soluzione del problema artificiale è ottima e $\rho^* = 0$. Pertanto P_{FS} è ammissibile ed una base ammissibile è proprio la base ottima del problema artificiale $\mathcal{B} = \{x_2, x_1, x_5\}$. Si noti che la base è degenerare.

Seconda Fase

Il tableau di P_{FS} , in forma canonica rispetto alla base $\mathcal{B} = \{x_2, x_1, x_5\}$ risulta

$$\begin{array}{cccc|c}
0 & 1 & -5 & -3 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -16 & -9 & 1 & 7 \\
\hline
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1
\end{array}$$

La soluzione non è ottima.

Iterazione 1 - Entra in base la variabile x_3 , esce la variabile x_1 (Iterazione degenerare)

$$\begin{array}{cccc|c}
5/2 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1 \\
1/2 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\
8 & 0 & 0 & -1 & 1 & 7 \\
\hline
1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1
\end{array}$$

Stop. Soluzione Ottima $x_{PFS}^* = (0, 1, 0, 0, 7)^\top$, $z^* = 1$

La soluzione del duale si può ottenere applicando le relazioni di complementarità. Scriviamo il duale del problema in forma standard

$$\begin{aligned}
\max \quad w(y) = & \quad y_1 + y_2 + 5y_3 \\
& 2y_1 + 3y_2 + 3y_3 \leq 3 \\
& y_1 + y_2 - 2y_3 \leq 1 \\
& -y_1 + y_2 \leq 0 \\
& -y_1 \leq 0 \\
& y_3 \leq 0
\end{aligned}$$

Poiché in P_{FS} si ha $x_2^*, x_5^* \geq 0$, allora in D il secondo ed il quinto vincolo devono essere soddisfatti all'uguaglianza

$$\begin{aligned}
y_1 + y_2 - 2y_3 &= 1 \\
y_3 &= 0
\end{aligned}$$

ovvero $y_1 + y_2 = 1$. Posto, ad esempio, $y_2 = k \in \mathbb{R}$, si ha che le soluzioni del precedente sistema di 2 equazioni in tre incognite, sono gli ∞^1 punti del tipo $y(k) = (y_1, y_2, y_3)^\top = (1 - k, k, 0)^\top$, $k \in \mathbb{R}$. Vediamo per quali valori di k il vettore $y(k)$ è ammissibile per D

$$\begin{aligned}
2(1 - k) + 3k &\leq 3 \Rightarrow k \leq 1 \\
(1 - k) + k &\leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1 \\
-(1 - k) + k &\leq 0 \Rightarrow k \leq 1/2 \\
-(1 - k) &\leq 0 \Rightarrow k \leq 1
\end{aligned}$$

Ricaviamo, quindi che per ogni valore di $k \leq 1/2$ la soluzione $y(k)$, complementare a x_{FS}^* , è ammissibile per D e quindi anche ottima.

OSSERVAZIONE 2.1.1. *E' facile verificare quanto segue:*

1. *la degenericità della soluzione ottima in $\mathcal{P}(D)$ implica che $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ presenta ottimi multipli. Questo avviene perché la relazione che lega la variabile di base nulla in $\mathcal{P}(D)$ con lo scarto del corrispondente vincolo in $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ è soddisfatta indipendentemente dal valore dello scarto. Nel nostro esempio la relazione tra x_2^* e lo scarto del secondo vincolo duale è automaticamente soddisfatta. Ne segue che delle tre equazioni necessarie per determinare y^* dalle relazioni di complementarità ne riusciamo ad imporre solo due. Il risultante sistema è sottodimensionato ed ammette ∞^l soluzioni, essendo l il grado di degenericità della soluzione ottima del primale.*

2. Tranne casi patologici, è generalmente vero anche il viceversa: se $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ ha infinite soluzioni ottime allora $\mathcal{D}(\mathcal{P})$ presenta soluzione ottima degenera.
3. Nel caso di infinite soluzioni ottime almeno una di esse deve essere di base (Teorema Fondamentale della PL) e quindi l'intervallo di variabilità di k (o degli l parametri in generale) deve avere un estremo limitato. Nel nostro esempio la soluzione di base si ottiene per $k = 1/2$

◇

ESERCIZIO 2.1.3. E' assegnato il problema primale \mathcal{P} ed il punto $\bar{y} = (3, \frac{3}{2})$ nello spazio delle variabili duali.

$$\begin{aligned} \max z(x) = & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 8 \\ & x_1 - 2x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

1. Verificare che \bar{y} è una soluzione ammissibile non di base per il problema duale \mathcal{D} .
2. Determinare una soluzione \hat{y} ammissibile di base per \mathcal{D} a partire da \bar{y} .
3. Con le informazioni ricavate ai punti precedenti determinare le soluzioni ottime di \mathcal{P} e \mathcal{D} .
4. Servendosi della rappresentazione grafica del problema \mathcal{D} verificare la correttezza delle risposte date ai punti precedenti e giustificare le seguenti affermazioni:
 - (a) Per ogni scelta dei termini noti dei vincoli di \mathcal{P} , la variabile di surplus associata al terzo vincolo duale è sempre non nulla.
 - (b) Se si sceglie il coefficiente di costo della variabile y_1 in \mathcal{D} pari a -1 e quello della variabile y_2 pari a 0, allora la regione ammissibile del problema \mathcal{P} è vuota.

Soluzione – Il problema duale e il problema duale in forma standard sono, rispettivamente,

$$\begin{array}{rcl} \min w(y) = & 8y_1 & + \quad 6y_2 \\ \mathcal{D} & y_1 & + \quad y_2 \geq 2 \\ & 2y_1 & - \quad 2y_2 \geq 3 \\ & 3y_1 & + \quad 2y_2 \geq 5 \\ & y_1 & , \quad y_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \min w(y) = & 8y_1 & + \quad 6y_2 \\ \mathcal{D}_{FS} & y_1 & + \quad y_2 - y_3 = 2 \\ & 2y_1 & - \quad 2y_2 - y_4 = 3 \\ & 3y_1 & + \quad 2y_2 - y_5 = 5 \\ & y_1 & , \quad y_2 , \quad y_3 , \quad y_4 , \quad y_5 \geq 0 \end{array}$$

Si ha quindi che le coordinate di \bar{y} in forma standard sono

$$\bar{y}_{FS} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)^\top = \left(3, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0, 7\right)^\top$$

Ne segue che \bar{y}_{FS} è **una soluzione ammissibile** (variabili di surplus non negative) **non di base** (le colonne della matrice A associate alle componenti non nulle di \bar{y}_{FS} sono sicuramente linearmente dipendenti).

Per determinare una soluzione di base per il problema Duale a partire da \bar{y}_{FS} si procede come nella dimostrazione del Teorema Fondamentale della PL. Poiché A_1, A_2, A_3, A_5 sono linearmente dipendenti, esisteranno gli scalari d_1, d_2, d_3, d_5 , non tutti nulli, tali che

$$d_1 A_1 + d_2 A_2 + d_3 A_3 + d_5 A_5 = 0$$

ovvero

$$\left\{ \begin{array}{rcl} d_1 & + & d_2 - d_3 = 0 \\ 2d_1 & - & 2d_2 = 0 \\ 3d_1 & + & 2d_2 - d_5 = 0 \end{array} \right.$$

le cui ∞^1 soluzioni sono $d_1 = d_2 = k, d_3 = 2k, d_5 = 5k$ con $k \in \mathbb{R}$. Posto ad esempio $k = 1$, se si impone la non negatività del vettore $\bar{y}_{FS} - \varepsilon d$ (essendo $d = [d_1, d_2, d_3, 0, d_5]^\top$)

si trovano, al variare di ε , tutti i punti ammissibili per \mathcal{D} che stanno sul segmento passante per \bar{y}_{FS} , parallelo a d , ed avente per estremi i punti $\bar{y}_{FS} - \varepsilon_{\min}d$ e $\bar{y}_{FS} - \varepsilon_{\max}d$.

$$\bar{y}_{FS} - \varepsilon d \geq 0 \implies \begin{cases} 3 - \varepsilon \geq 0 \\ \frac{3}{2} - \varepsilon \geq 0 \\ \frac{5}{2} - 2\varepsilon \geq 0 \\ 7 - 5\varepsilon \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \varepsilon \leq 3 \\ \varepsilon \leq \frac{3}{2} \\ \varepsilon \leq \frac{5}{4} \\ \varepsilon \leq \frac{7}{5} \end{cases} \implies \varepsilon \leq \frac{5}{4}$$

Ne risulta che comunque si scelga $-\infty \leq \varepsilon \leq \frac{5}{4}$, il punto $\hat{y}_{FS} = \bar{y}_{FS} - \varepsilon d$ è ammissibile per \mathcal{D}_{FS} .¹ Scegliendo $\varepsilon = \varepsilon_{\max} = \frac{5}{4}$, si ottiene $\bar{y}_{FS} - \frac{5}{4}d = \left(\frac{7}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, \frac{3}{4}\right)^\top$. A questo punto bisogna controllare che A_1, A_2 e A_5 siano linearmente indipendenti. Poiché

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 4$$

il punto $\hat{y}_{FS} = \left(\frac{7}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0, \frac{3}{4}\right)^\top$ è una soluzione ammissibile di base per \mathcal{D} in cui la funzione duale vale $w(\hat{y}) = \frac{31}{2}$.

Il punto \hat{y}_{FS} può essere utilizzato come punto iniziale per applicare l'algoritmo del Simplex al problema \mathcal{D}_{FS} . Il Tableau iniziale T^0 per \mathcal{D}_{FS} è il seguente

$$T^0 \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ \hline 8 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

È facile verificare che il tableau T in forma canonica rispetto alla base $\mathcal{B} = \{1, 2, 5\}$ si può ottenere (anche!) premoltiplicando T_0 per la matrice

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & 0 \\ \hline -c_B^\top B^{-1} & 1 \end{array} \right)$$

¹Poiché la regione ammissibile dei problemi di PL è sempre un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}_+^n$, almeno uno tra ε_{\min} e ε_{\max} ha sempre valore finito.

Essendo

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix}$$

si ottiene

$$QT^0 = T^1 \quad \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{3}{4} \\ \hline 0 & 0 & 7 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{31}{2} \end{array}$$

Poiché in T^1 l'ultima riga, che rappresenta i costi ridotti rispetto alla base B , è non negativa, la soluzione $y^* = \hat{y}_{FS}$ è ottima con $w^* = \frac{31}{2}$.

La soluzione ottima del problema primale la si può calcolare utilizzando le relazioni di complementarità

$$\begin{aligned} \hat{y}_1 > 0 &\implies x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ \hat{y}_2 > 0 &\implies x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ \hat{y}_5 > 0 &\implies x_3 = 0 \end{aligned}$$

da cui ricaviamo $x_1 = 7$ e $x_2 = \frac{1}{2}$. Pertanto la soluzione ottima di base per il problema primale è rappresentata dal vettore $x^* = \left(7, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)^\top$, con $z^* = \frac{31}{2}$.

Per rispondere ai quesiti del punto (4), facciamo riferimento alla rappresentazione grafica del problema Duale (si veda figura 2.1).

a) Poiché la variazione del vettore dei termini noti b modifica la regione ammissibile di P ma non quella di D , e poiché il terzo vincolo duale è sempre *non attivo* in qualsiasi soluzione ammissibile del duale stesso, si avrà sempre $3y_1 + 2y_3 - 5 > 0$.

b) Se $\nabla w = [-1, 0]^\top$ allora D è illimitato, di conseguenza deve essere $\Omega(P) = \emptyset$

◇

ESERCIZIO 2.1.4. E' assegnato il seguente problema di Programmazione Lineare \mathcal{P}

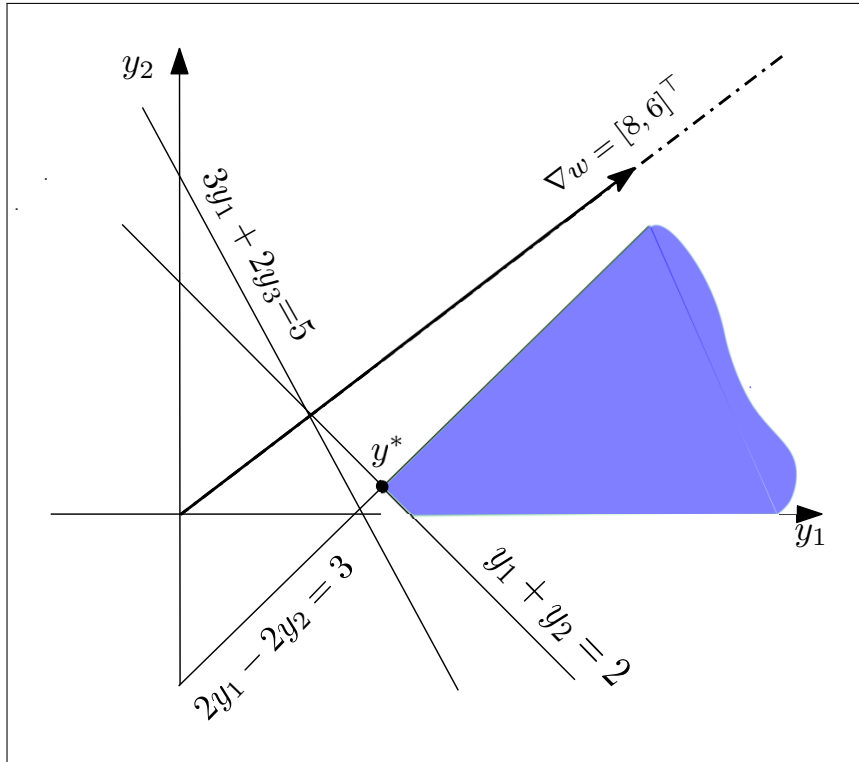


Figura 2.1: Esercizio 2.1.3 - Rappresentazione del problema duale .

$$\begin{aligned}
 \min z(x) = & \quad 6x_1 + 6x_2 - 12x_3 \\
 & -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq 2 \\
 & 3x_1 - x_2 - 3x_3 \geq -1 \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

1. Analizzare i seguenti punti $x^A = (1, 4, 0)^\top$, $x^B = (0, 0, 0)$ e stabilire se si tratta di soluzioni ammissibili, di base, ottime.
2. Qualora nessuno tra x^A e x^B risulti essere soluzione ottima, risolvere \mathcal{P} .
3. Determinare la soluzione ottima del problema duale \mathcal{D} di \mathcal{P} , applicando la teoria della dualità.
4. Rappresentare graficamente il problema duale e verificare la correttezza delle risposte date ai punti 2 e 3.
5. Si consideri, infine, di introdurre in \mathcal{P} una nuova variabile x_t con coefficiente unitario nel primo vincolo e nullo nel secondo. Come si modificano, se si modi-

ficano, le soluzioni ottime di \mathcal{P} e \mathcal{D} nel caso in cui il coefficiente di costo di x_t è pari a 7? Come invece nel caso è 3?

Soluzione – Il problema \mathcal{P} in forma standard è il seguente

$$\begin{array}{rcll} \min z(x) = & 6x_1 & + & 6x_2 & - & 12x_3 \\ \mathcal{P}_{FS} & -2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & & = & 2 \\ & -3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & + & x_5 & = & 1 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

e le componenti di x_A e x_B nello spazio delle variabili di \mathcal{P}_{FS} sono

$$\begin{aligned} (x^A)_{FS} &= [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^\top = [1, 4, 0, 4, 0]^\top \\ (x^B)_{FS} &= [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^\top = [0, 0, 0, -2, 1]^\top \end{aligned}$$

Ne risulta che $(x^A)_{FS}$ è una soluzione ammissibile non di base; viceversa $(x^B)_{FS}$ è una soluzione di base non ammissibile. Riguardo all'ottimalità dei due punti assegnati, $(x^B)_{FS}$ non può essere ottimo, essendo non ammissibile; per verificare l'ottimalità di $(x^A)_{FS}$ bisogna far ricorso al teorema degli scarti complementari, poiché $(x^A)_{FS}$ non è una soluzione di base.

Ricavando il duale della forma standard di \mathcal{P} , si ha

$$\begin{array}{rcll} \max w(y) = & 2y_1 & + & y_2 \\ \mathcal{D}_{FS} & -2y_1 & - & 3y_2 & \leq & 6 \\ & 2y_1 & + & y_2 & \leq & 6 \\ & -3y_1 & + & 3y_2 & \leq & -12 \\ & y_1 & & & \geq & 0 \\ & & & y_2 & \leq & 0 \end{array}$$

Imponendo le relazioni di complementarità otteniamo

$$\begin{aligned} x_1^A > 0 &\implies & -2y_1 - 3y_2 &= 6 \\ x_2^A > 0 &\implies & 2y_1 + y_2 &= 6 \\ x_4^A > 0 &\implies & y_1 &= 0 \end{aligned}$$

Il sistema è chiaramente incompatibile, quindi $(x^A)_{FS}$ non può essere soluzione ottima. Per determinare la soluzione ottima di \mathcal{P} utilizziamo il metodo a due fasi².

Prima fase

Costruiamo il problema artificiale, notando che è sufficiente utilizzare una sola variabile artificiale nel primo vincolo. Quindi il problema artificiale è il seguente

$$\begin{array}{rcllclclclcl} \min \quad \rho = & & \alpha & & & & & & & & \\ & -2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & & +\alpha & = & 2 \\ & -3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & + & x_5 & = & 1 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & \alpha \geq 0 & & & & & \end{array}$$

Il tableau del problema artificiale, in forma canonica rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\alpha, x_5\}$ risulta

$$\begin{array}{cccccc|c} -2 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}$$

Con un'operazione di pivot in posizione (1,2), la variabile x_2 entrerà in base e la variabile artificiale uscirà dalla base

$$\begin{array}{cccccc|c} -1 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 0 & 4 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Poiché $\rho^* = 0$, la base ottima del problema artificiale $\mathcal{B} = \{2, 5\}$ è una base ammissibile per \mathcal{P}_{FS} .

Seconda Fase

Il tableau in forma canonica rispetto a $\mathcal{B} = \{2, 5\}$ risulta

$$\begin{array}{cccccc|c} -1 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 & & 1 \\ -2 & 0 & 4 & \frac{1}{2} & 1 & & 0 \\ \hline 12 & 0 & -6 & 3 & 0 & & -6 \end{array}$$

²In maniera alternativa si può costruire una soluzione ammissibile di base a partire da x_{FS}^A

Portando in base la variabile x_3 nel secondo vincolo, otteniamo

$$\begin{array}{ccccc|c} -\frac{3}{2} & 1 & 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 0 \\ \hline 9 & 0 & 0 & \frac{15}{4} & \frac{3}{2} & -6 \end{array}$$

Siamo all'ottimo: $x^* = [0, 1, 0, 0, 0]^\top$; $c^\top x^* = 6$.

Per calcolare la soluzione ottima di \mathcal{D}_{FS} utilizziamo di nuovo le relazioni di complementarità:

$$x_2^* > 0 \implies 2y_1 + y_2 = 6$$

Osserviamo che essendo la soluzione ottima di \mathcal{P} degenera il sistema che ricaviamo dalle relazioni di complementarità risulta essere sottodeterminato (il numero di incognite è maggiore del numero di equazioni) e pertanto ammette infinite soluzioni.

Nel nostro esempio la soluzione dell'equazione

$$2y_1 + y_2 = 6$$

è costituita dall'insieme di punti del tipo $y_1 = 3 - \frac{k}{2}$, $y_2 = k$ con $k \in \mathbb{R}$. Vediamo per quali valori di k il generico punto $y(k)$ è ammissibile per \mathcal{D}

$$\begin{array}{rclcl} -6 + k & - & 3k & \leq & 6 \implies k \geq -6 \\ -6 + k & + & k & \leq & 6 \implies 6 \leq 6 \\ -6 + k & + & 3k & \leq & -12 \implies k \leq -\frac{3}{2} \\ -6 + k & & & \leq & 0 \implies k \leq 6 \\ & & k & \leq & 0 \implies k \leq 0 \end{array}$$

Risulta quindi che il punto $y(k)$, complementare ad x^* , è ammissibile per \mathcal{D} se $-6 \leq k \leq -\frac{3}{2}$ e per tali valori esso è soluzione ottima di \mathcal{D} . Il problema duale \mathcal{D} ammette infinite soluzioni ottime. In particolare i punti

$$\begin{aligned} y\left(-\frac{3}{2}\right) &= \left[\frac{15}{4}, -\frac{3}{2}\right]^\top \\ y(-6) &= [6, -6]^\top \end{aligned}$$

sono soluzioni ottime di base. Infatti come si può verificare dalla figura 2.2 essi corrispondono, rispettivamente, ai vertici A e B di $\Omega(\mathcal{D})$.

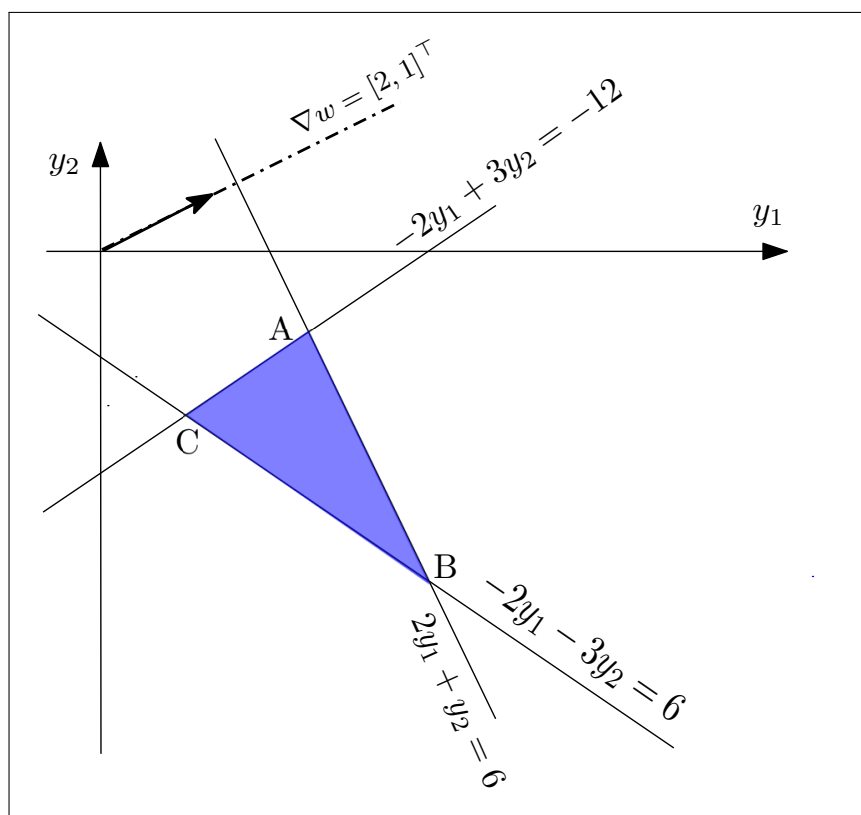


Figura 2.2: Esercizio 2.1.4 - Rappresentazione del problema duale .

Infine, l'analisi di sensibilità sulle soluzioni ottime di \mathcal{P} e \mathcal{D} (punto 5 dell'esercizio), è possibile effettuarla graficamente sul problema \mathcal{D} , ricordando che l'introduzione di una nuova variabile in \mathcal{P} corrisponde all'introduzione di un nuovo vincolo in \mathcal{D} . Poiché questa nuova variabile comparirà solo nel primo vincolo primale con coefficiente unitario, nel duale avremo un nuovo vincolo del tipo $y_1 \leq c$, con $c = 7$ e $c = 3$. Nel primo caso, rappresentato in figura 2.3, non si ha alcun effetto: la regione ammissibile del Duale non cambia, e pertanto non cambieranno le soluzioni ottime di \mathcal{D} e \mathcal{P} . Il vincolo $y_1 \leq 7$ non sarà mai attivo e pertanto la nuova variabile introdotta in \mathcal{P} avrà sempre valore nullo in qualsiasi soluzione ottima.

Quando invece in \mathcal{D} introduciamo il vincolo $y_1 \leq 3$, la regione ammissibile duale cambia (vedi figura 2.4): tutte le infinite soluzioni ottime diventano inammissibili, ed il nuovo vertice ottimo è $y^* = [3, -2]^T$, in cui sono attivi il vincolo $y_1 \leq 3$ ed il terzo vincolo.

Applicando le relazioni di complementarietà a \mathcal{P}_{FS} e \mathcal{D}_{FS} , dopo aver aggiunto nel primo la nuova variabile x_t e nel duale il corrispondente vincolo avremo:

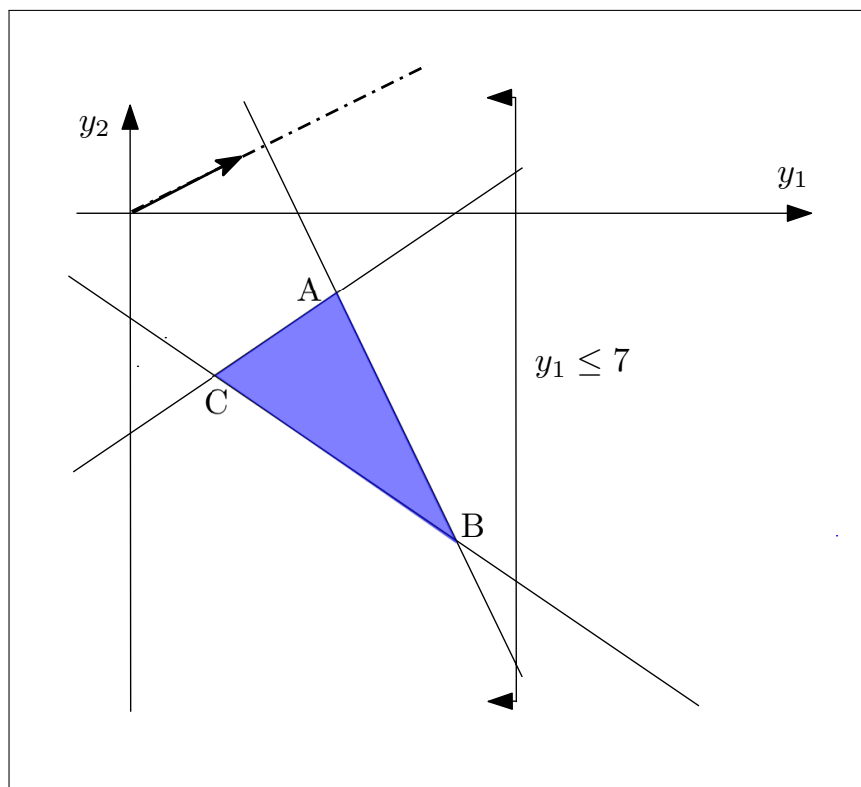


Figura 2.3: Esercizio 2.1.4 - Introduzione del vincolo duale $y_1 \leq 7$.

$$\begin{aligned}
 c_1 - A_1^\top y > 0 &\implies x_1 = 0 \\
 c_2 - A_2^\top y > 0 &\implies x_2 = 0 \\
 y_1 > 0 &\implies x_4 = 0 \\
 y_2 < 0 &\implies x_5 = 0
 \end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
 -2x_3 + x_t &= 2 \\
 3x_3 &= 1
 \end{aligned}$$

cioè $x^* = [0, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{8}{3}]^\top$

◇

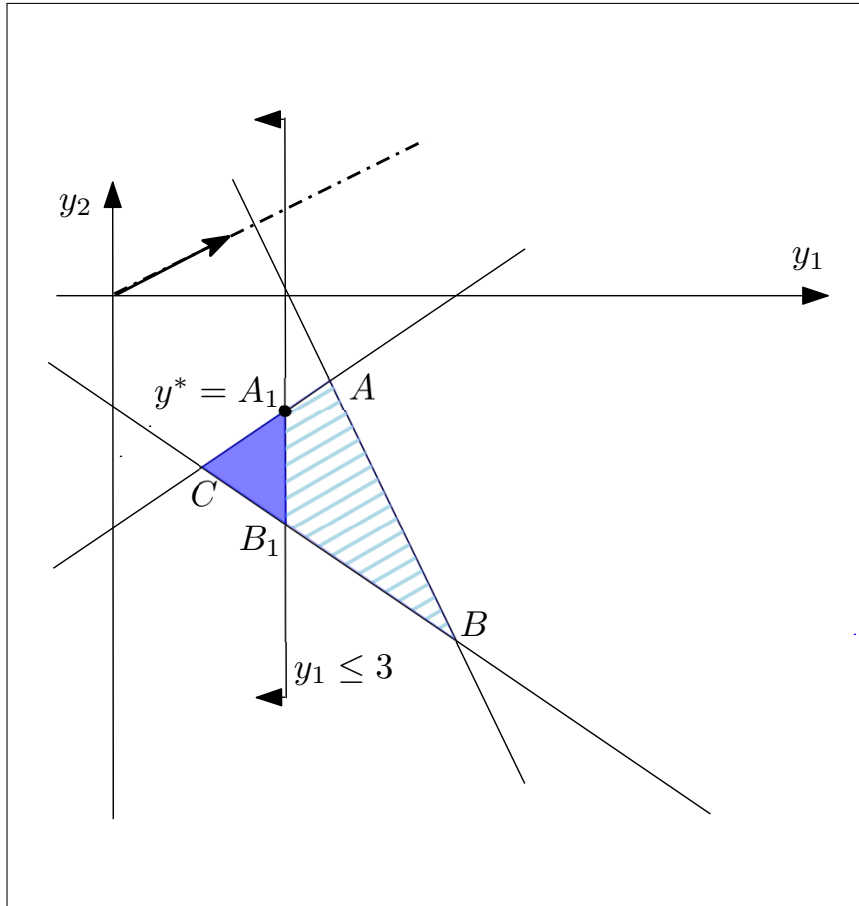


Figura 2.4: Esercizio 2.1.4 - Introduzione del vincolo duale $y_1 \leq 3$.

ESERCIZIO 2.1.5. Risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare \mathcal{P}

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 = 1 \\
 & x_1 + x_3 - x_4 = 2 \\
 & -2x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

Soluzione – Per risolvere \mathcal{P} applichiamo il metodo a due fasi.

Prima Fase

Introducendo le variabili artificiali $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, il tableau iniziale per il problema artificiale, rispetto alla base $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ è il seguente

$$\begin{array}{cccccccc|c}
1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
-2 & 3 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & -4
\end{array}$$

Portando in base la variabile x_1 nel primo vincolo, la variabile α_1 uscirà dalla base (pivot in posizione (1,1)). Successivamente si porta in base la variabile x_3 nel secondo vincolo, facendo uscire dalla base la variabile α_2 (pivot in posizione (2,3)). Si perviene quindi alla soluzione ottima del problema artificiale il cui tableau, in forma canonica rispetto alla base $\mathcal{B} = \{x_1, x_3, \alpha_3\}$, è il seguente:

$$\begin{array}{cccccccc|c}
1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 3 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0
\end{array}$$

Dall'ultimo tableau troviamo che $\rho^* = 0$, il che garantisce che la regione ammissibile di \mathcal{P} è non vuota, ma α_3 è in base con valore nullo. Il problema artificiale presenta, pertanto, soluzione ottima degenera. Per fare uscire la variabile α_3 dalla base, bisogna effettuare un'ulteriore operazione di pivot sulla riga $h = 3$, scegliendo di fare entrare in base una delle variabili originarie attualmente fuori base (x_2 oppure x_4). Si noti che l'operazione di pivot in posizione (3,4) è lecita, anche se $T_{34}^* < 0$ (l'importante è che non sia nullo!). Tale operazione di pivot viene chiamata scambio degenera. Ad esempio operando il pivot in posizione (3,4), si perviene al seguente tableau

$$\begin{array}{cccccccc|c}
1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 4 & 1 & 0 & -2 & 2 & -1 & 1 \\
0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array}$$

Seconda Fase

La base ottima del problema artificiale, essendo $\rho^* = 0$, è una base ammissibile per \mathcal{P} .

Pertanto per la seconda fase il tableau iniziale rispetto alla base $\beta = \{x_1, x_3, x_4\}$ è il seguente

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -10 & 0 & 0 & -7 \end{array}$$

Portando in base la variabile x_2 al posto della variabile x_4 si perviene alla soluzione ottima

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{10}{3} & -7 \end{array}$$

◇

ESERCIZIO 2.1.6. Risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare \mathcal{P}

$$\begin{array}{llll} \min & 4x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 = 1 \\ & 3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 = 2 \\ & -x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 = 2 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 \geq 0 \end{array}$$

Soluzione – Per risolvere \mathcal{P} applichiamo il metodo a due fasi.

Prima Fase

Introducendo le variabili artificiali $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, il tableau iniziale per il problema artificiale, rispetto alla base $\beta = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ è il seguente

$$\begin{array}{cccccc|c}
2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
-1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
-4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4
\end{array}$$

Portando in base la variabile x_1 nel primo vincolo, la variabile α_1 uscirà dalla base (pivot in posizione (1,1)). Il tableau in forma canonica rispetto alla base $\beta = \{x_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ sarà

$$\begin{array}{cccccc|c}
1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
0 & \frac{3}{2} & -2 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\
0 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\
\hline
0 & -3 & 4 & 2 & 0 & 0 & -3
\end{array}$$

Alla seconda iterazione, x_2 sarà la variabile entrante, mentre c'è indeterminazione nella scelta della variabile uscente. Applicando scrupolosamente la regola di Bland bisogna effettuare l'operazione di pivot in posizione (1,2). Pertanto la variabile x_1 uscirà dalla base. Il tableau rispetto alla base x_2, α_2, α_3 sarà

$$\begin{array}{cccccc|c}
2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
-3 & 0 & -5 & -3 & 1 & 0 & 0 \\
-3 & 0 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
6 & 0 & 10 & 5 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Dall'ultimo tableau ricaviamo che la regione ammissibile di \mathcal{P} è non vuota ($\rho^* = 0$), ma α_2 e α_3 sono in base con valore nullo. Per portare fuori base tali variabile occorre effettuare due scambi degeneri. Ad esempio portando in base x_1 al posto di α_2 (pivot in (2,1)) si ottiene

$$\begin{array}{cccccc|c}
0 & 1 & -\frac{4}{3} & -1 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\
1 & 0 & \frac{5}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0
\end{array}$$

Volendo fare uscire dalla base la variabile artificiale α_3 bisognerebbe fare entrare in base l'unica variabile originaria che attualmente è fuori base. Ma ciò è impossibile poiché $T_{33} = 0$. Si osservi però che la terza riga, in corrispondenza delle variabili originarie è interamente nulla. Questo è indice che una delle equazioni di \mathcal{P} dipende linearmente dalle altre, è ridondante nella descrizione della regione ammissibile di \mathcal{P} e può essere eliminata.

OSSERVAZIONE 2.1.2. *Nell'ultimo tableau generato, la condizione di ottimalità non è verificata. Questo non deve preoccuparci: siamo in presenza di soluzioni degeneri ed una base con costi ridotti tutti non negativi per il problema artificiale è già stata determinata (penultimo tableau). In casi come questi in cui nel tableau del problema artificiale si trova una riga tutta nulla in corrispondenza delle variabili originarie del problema, è possibile fermarsi anche se la condizione di ottimalità non è verificata.*

Seconda Fase

Eliminando la terza riga e le ultime tre colonne dal tableau ottimo del problema artificiale, si ottiene il tableau di partenza per la seconda fase, in forma canonica rispetto alla base $\beta = \{x_2, x_1\}$

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 1 \\ 1 & 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{13}{3} & -1 \end{array}$$

Portando in base la variabile x_3 al posto della variabile x_1 si perviene alla soluzione ottima

$$\begin{array}{ccc|c} \frac{4}{5} & 1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & 0 & 1 & 0 \\ \hline \frac{13}{5} & 0 & 0 & -1 \end{array}$$

◇

ESERCIZIO 2.1.7. E' assegnato il seguente problema di Programmazione Lineare \mathcal{P}

$$\begin{aligned}
\min \quad & 15x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 5x_5 \\
& x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\
& 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

1. Determinare quali tra i seguenti punti $x_A = (0, 0, 0, 3, 10)^\top$, $x_B = (1, 0, 0, 2, 5)^\top$ sono vertici della regione ammissibile del problema \mathcal{P} .
2. Calcolare il valore della funzione obiettivo in x_A , in x_B ed in un generico punto \bar{x} che sta sul segmento di estremi x_A ed x_B .
3. Determinare la soluzione ottima di \mathcal{P} .
4. Determinare la soluzione ottima del problema duale \mathcal{D} di \mathcal{P} , applicando la teoria della dualità.
5. Dopo aver riportato su di un piano cartesiano la regione ammissibile e la funzione obiettivo del problema duale, dimostrare che la variabile x_5 assume sempre valore nullo in qualsiasi soluzione ottima di \mathcal{P} .

Soluzione – x_A è un vertice di $\Omega(P)$ se e solo se x_A è una soluzione ammissibile di base per P . Si verifica facilmente che x_A è ammissibile ed inoltre $[A_4, A_5]$ sono linearmente indipendenti. Di conseguenza x_A è un vertice. Per x_B troviamo, invece, che esso è ammissibile ma non di base, poiché $[A_1, A_4, A_5]$ sono linearmente dipendenti. Quindi x_B non è un vertice di $\Omega(P)$.

$z(x_A) = c^\top x_A = 50$, $z(x_B) = c^\top x_B = 40$. Un qualsiasi punto appartenente al segmento di estremi x_A ed x_B può essere scritto come combinazione convessa di x_A ed x_B : $\bar{x} = \lambda x_A + (1 - \lambda)x_B$ $0 \leq \lambda \leq 1$. Si avrà perciò: $z(\bar{x}) = c^\top \bar{x} = \lambda c^\top x_A + (1 - \lambda)c^\top x_B = 50\lambda + 40(1 - \lambda) = 40 + 10\lambda$.

Poiché x_A è una soluzione ammissibile di base, possiamo risolvere P a partire da x_A . Si ha:

$$\mathcal{B} = \{x_4, x_5\} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix} \quad c_B^\top = [0, 5] \quad c_N^\top = [15, 9, 4]$$

da cui ricaviamo

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1}b = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix} \quad B^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$-c_B^\top B^{-1}b = -50 \quad \hat{c}_N^\top = c_N^\top - c_B^\top B^{-1}N = [\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3] = [-10, 4, 24]$$

Pertanto il Tableau in forma canonica rispetto alla base $\mathcal{B} = \{x_4, x_5\}$ è

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & -4 & 0 & 1 & 10 \\ \hline -10 & 4 & 24 & 0 & 0 & -50 \end{array}$$

La soluzione non è ottima, poiché $\hat{c}_1 < 0$. Si porta in base la variabile x_1 e la variabile x_5 esce dalla base (Pivot in (2,1))

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{5} & 1 & -\frac{1}{5} & 1 \\ 1 & \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} & 2 \\ \hline 0 & 6 & 16 & 0 & 2 & -30 \end{array}$$

Stop. La soluzione ottima è $x^* = [2, 0, 0, 1, 0]^\top$ $c^\top x^* = 30$.

Il duale di P (duale della forma standard) è

$$\begin{aligned} \max w(y_1, y_2) = & \quad 3y_1 + 4y_2 \\ & y_1 + 3y_2 \leq 15 \quad (1) \\ & -y_1 + 3y_2 \leq 9 \quad (2) \\ & -y_1 - 2y_2 \leq 4 \quad (3) \\ & y_1 - 2y_2 \leq 0 \quad (4) \\ & y_2 \leq 5 \quad (5) \end{aligned}$$

Applicando il teorema di complementarità troviamo

$$x_1^* > 0 \implies y_1 + 3y_2 = 15$$

$$x_4^* > 0 \implies y_1 - 2y_2 = 0$$

ovvero $y_1^* = 6$ $y_2^* = 3$ $w(y_1^*, y_2^*) = b^\top y^* = 30$

Dopo avere rappresentato la regione ammissibile del problema duale si può osservare che in qualunque punto ammissibile di D , il vincolo corrispondente ad x_5 è sempre non attivo, cioè la variabile di slack associata a tale vincolo è sempre non nulla. Pertanto la relazione di complementarità $(5 - y_2^*)x_5^* = 0$ è verificata solo per $x_5^* = 0$ (qualunque sia il vettore b).

◇

Soluzione – Suggestimento: si può passare da \mathcal{D}_{FS} al duale simmetrico operando il cambio di variabile $y_2 = -\bar{y}_2$.

ESERCIZIO 2.2.2 * Sono dati il problema di PL \mathcal{P} ed i punti $x_A = (0, 0, 2, 1)^\top$, $x_B = (0, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{2})^\top$.

$$\begin{array}{rcll} \min & 2x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 \\ & -2x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \geq & -1 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

1. Analizzare le proprietà di x_A ed x_B in termini di ammissibilità ed ottimalità.
2. Risolvere \mathcal{P} , qualora nessuno tra x_A ed x_B dovesse risultare soluzione ottima di base.
3. Formulare il duale \mathcal{D} di \mathcal{P} e risolverlo applicando la teoria della Dualità.
4. Servendosi della rappresentazione grafica, cosa si può dire della soluzione ottima di \mathcal{D} ?

Soluzione – La soluzione ottima di \mathcal{P} è $x^* = [0, \frac{1}{3}, 0, 0\frac{4}{3}]^\top$, $z^* = 2$

ESERCIZIO 2.2.3 * Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare \mathcal{P}

$$\begin{array}{rcll} \max & 5x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 4x_4 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 20 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & \leq & 30 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

1. Stabilire se il punto $x = (0, 12, 2, 6)^T$
 - a) è soluzione ammissibile per \mathcal{P} ;

- b) è soluzione di base per \mathcal{P} ;
 - c) è soluzione ottima per \mathcal{P} ;
2. Se x **non** risulta essere una soluzione di base, determinare una soluzione ottima di base per \mathcal{P} :
- a) senza far ricorso all'algoritmo del simplesso.
 - b) applicando l'algoritmo del simplesso a \mathcal{P} e confrontando la soluzione ottenuta con quella ricavata al punto (2.a).
3. Scrivere il problema duale di \mathcal{P} , rappresentarlo graficamente e risolverlo mediante la teoria della dualità. Cosa è evidente dalla rappresentazione grafica del problema duale e cosa ciò comporta sul primale?

Soluzione – \bar{x} è una soluzione ottima non di base. Quindi \mathcal{P} ammette ottimi multipli, tra i quali $x_A = [0, 10, 0, 10, 0, 0]^\top$ e $x_B = [0, 15, 5, 0, 0, 0]^\top$ sono punti di ottimo di base.

◇

ESERCIZIO 2.2.4 ■ Con riferimento al seguente problema (\mathcal{P}) di Programmazione Lineare

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \max z(x) = 3x_1 - 3x_2 - 20x_3 - 2x_4 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 + 4x_4 \leq 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - 8x_3 - 3x_4 \leq 1 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

1. Analizzare le proprietà del punto $\bar{x}^\top = (0, \frac{1}{6}, 0, 0)$, stabilendo se si tratti di una soluzione ammissibile di base ottima per (\mathcal{P}).
2. Se il punto dato non è soluzione ammissibile di base, determinarne una a partire da \bar{x} .
3. Risolvere \mathcal{P} , applicando eventualmente il metodo del simplesso a partire dalla soluzione di base individuata al punto 1 o al punto 2.
4. Formulare il problema duale \mathcal{D} di \mathcal{P} , e risolverlo usando la teoria della dualità.
5. Analizzare graficamente come cambiano le soluzioni ottime di \mathcal{D} e \mathcal{P} quando in \mathcal{P} il termine noto del primo vincolo è nullo

ESERCIZIO 2.2.5 ■ Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare \mathcal{P}

$$\begin{array}{rcll}
\min & -2x_1 & -3 & 3x_2 \\
& -x_1 & + & x_2 \leq 0 \\
& x_1 & + & x_2 \leq 5 \\
& & & x_2 \leq b_3 \\
& x_1 & , & x_2 \geq 0
\end{array}$$

Dopo aver posto $b_3 = 2$ nel terzo vincolo, si consideri il punto $\bar{x} = [1, 1]^\top$

1. Stabilire se \bar{x} è una soluzione ammissibile di base;
2. In caso di risposta negativa al quesito precedente, determinare una soluzione ammissibile di base per \mathcal{P} a partire da \bar{x} applicando il Teorema Fondamentale della PL (Suggerimento: nel caso si abbia $\epsilon_{\min} \leq \epsilon \leq \epsilon_{\max}$ si scelga ϵ in modo tale che la variabile di slack associata al terzo vincolo sia non nulla)
3. Risolvere \mathcal{P} a partire dalla base individuata nei punti precedenti.
4. Costruire il Duale \mathcal{D} di \mathcal{P} e determinarne la soluzione ottima.
5. Determinare, anche solo graficamente, il valore di b_3 tale che la base ottima di \mathcal{P} sia degenere. Per tale valore di b_3 cosa succede alla soluzione ottima del problema duale?

ESERCIZIO 2.2.6 ■ Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare \mathcal{P}

$$\begin{array}{rcll}
\max & x_1 & - & 6x_2 & - & 6x_3 \\
& x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 \leq 1 \\
& x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 \leq -3 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 \geq 0
\end{array}$$

1. Assegnato il punto $\bar{x}^\top = (0, \frac{3}{8}, \frac{5}{8})$, stabilire se \bar{x} è un vertice della regione ammissibile di \mathcal{P} e calcolare il valore di funzione obiettivo in \bar{x}
2. Determinare la soluzione ottima del problema \mathcal{P} applicando l'algoritmo del Simplex.
3. Alla luce dei risultati ottenuti ai punti 1 e 2, cosa si può dire riguardo all'ottimalità di \bar{x} ?

4. Determinare la soluzione ottima del problema duale \mathcal{D} di \mathcal{P} , applicando la teoria della dualità. Rappresentare, inoltre, graficamente il problema duale e verificare la correttezza delle risposte date.
5. Si consideri, infine, di modificare in \mathcal{P} il coefficiente di costo della variabile x_2 . Come si modificano, se si modificano, le soluzioni ottime di \mathcal{P} e \mathcal{D} nel caso in cui $c_2 = -7$? Come invece nel caso $c_2 = -5$?

ESERCIZIO 2.2.7 * E' assegnato il seguente problema di Programmazione Lineare \mathcal{P}

$$\begin{array}{llll} \min & x_1 & - & 2x_2 \\ & 2x_1 & & + & 3x_3 = & 1 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 = & 5 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 \geq & 0 \end{array}$$

1. Risolvere il problema \mathcal{P} applicando l'Algoritmo del Simplexso a due Fasi.
2. Scrivere il problema duale di \mathcal{P} e risolverlo mediante la teoria della dualità.
3. Dopo aver rappresentato la regione ammissibile di \mathcal{D} su di un piano cartesiano, verificare la verità o falsità delle seguenti affermazioni, motivando la risposta:
 - (a) La variabile *Primale* x_1 è sempre nulla, per ogni scelta dei coefficienti di costo della funzione obiettivo *Duale*;
 - (b) La variabile *Primale* x_1 è sempre nulla, per ogni scelta del termine noto del primo vincolo *Duale*;
 - (c) Il problema *Duale* ammette sempre ottimo finito, per ogni scelta dei coefficienti di costo della funzione obiettivo;
4. Determinare graficamente, infine, la soluzione ottima di \mathcal{D} e, tramite il Teorema di Complementarietà, di \mathcal{P} quando il termine noto del primo vincolo del problema duale assume il valore -9 .

Soluzione – La soluzione ottima di \mathcal{P} è $x^* = [0, \frac{1}{3}, \frac{8}{3}]^\top$, $z^* = -\frac{16}{3}$. 3.a) Vero; 3.b) Falso; 3.c) Falso; 4) $y^* = [-3, -1]^\top$, $w^* = -8$

◇

ESERCIZIO 2.2.8 ■ E' assegnato il seguente problema di Programmazione Lineare \mathcal{P}

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \max & -x_1 + 3x_2 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & -3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Analizzare le proprietà dei punti $x_A = (0, 4)^\top$ e $x_B = (\frac{1}{6}, 1)^\top$, $x_C = (0, 0)^\top$ stabilendo per ciascuno di essi se si tratti di soluzione ammissibile, di base, ottima per \mathcal{P} .
2. Nel caso nessuno dei punti assegnati risulti essere soluzione ottima, determinare la soluzione ottima di \mathcal{P} applicando l'algoritmo del Simplexso e stabilire se la soluzione ottima è unica o no, motivando la risposta.
3. Determinare la soluzione ottima del duale \mathcal{D} di \mathcal{P} usando la teoria della dualità.
4. Con l'aiuto della rappresentazione geometrica di \mathcal{P} , verificare la correttezza dei risultati ottenuti e dimostrare le seguenti affermazioni:
 - (a) Per ogni possibile valore dei coefficienti di costo c_1 e c_2 in \mathcal{P} , in \mathcal{D} si ha sempre $y_3^* = 0$
 - (b) Se il termine noto del terzo vincolo assume il valore $b_3 = \frac{48}{13}$, allora la soluzione ottima di \mathcal{P} è degenera.

Capitolo 3

Algoritmo del Simpleso su rete per problemi di flusso di costo minimo

Uno dei punti cruciali dell'Algoritmo del Simpleso su Rete, sia nel caso non capacitato che in quello capacitato, è il calcolo, ad ogni iterazione, delle variabili duali. Data una base rappresentata dall'albero $H = \langle V, T \rangle$ ed assumendo che la radice dell'albero sia stata fissata nel nodo 1, le variabili duali si ottengono risolvendo il sistema di equazioni:

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_i - \lambda_j = c_{ij} \quad (i, j) \in T$$

Note le variabili duali, è possibile stabilire se la base corrente sia ottimale o meno calcolando i costi ridotti relativi agli archi (variabili) non di base

$$\hat{c}_{ij} = c_{ij} - \lambda_i + \lambda_j \quad (i, j) \notin T$$

Poiché tra due iterazioni successive l'albero di base H varia per un solo arco, i sistemi di potenziali corrispondenti a due iterazioni successive si differenzieranno per una sola equazione. E' lecito, pertanto, chiedersi se si possibile ricavare le variabili duali all'iterazione $k+1$ a partire dal valore delle variabili duali all'iterazione k , senza risolvere *ex novo* il sistema di potenziali all'iterazione $k+1$.

3.1 Tecniche di aggiornamento delle variabili duali

E' immediato verificare (si veda figura 3.1) che, data la particolare forma del sistema di equazioni duali, se si modifica di ϑ una variabile duale, ad esempio la variabile λ_p , facendole assumere il valore $\lambda'_p + \vartheta$ allora:

1. Le variabili duali relative a nodi appartenenti a catene che partono dalla radice dell'albero e non contengono il nodo p , a seguito della variazione di λ_p rimangono costanti. Ad esempio la variabile λ_w non è influenzata dalla variazione della variabile λ_p ;
2. Le rimanenti, relative perciò a nodi appartenenti a catene contenenti il nodo p , vengono modificate della stessa quantità. Ad esempio:

$$\lambda'_t = -c_{pt} + \lambda'_p = -c_{pt} + \lambda_p + \vartheta = \lambda_t + \vartheta$$

$$\lambda'_s = c_{sp} + \lambda'_p = c_{sp} + \lambda_p + \vartheta = \lambda_s + \vartheta$$

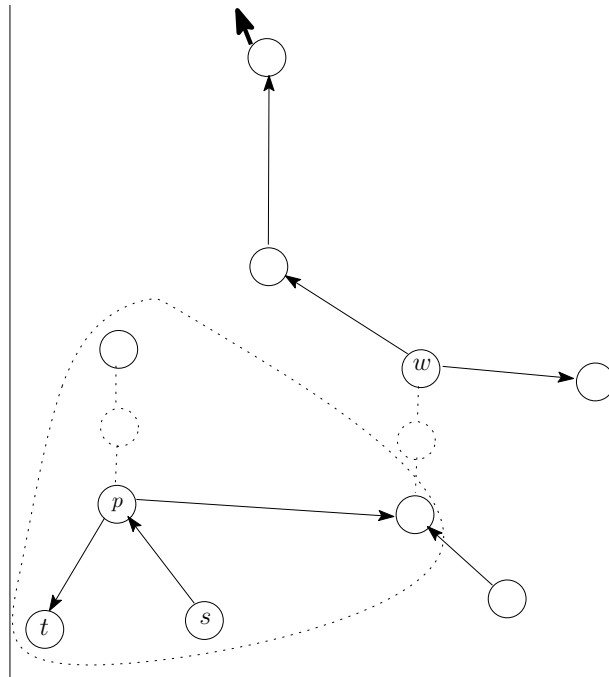
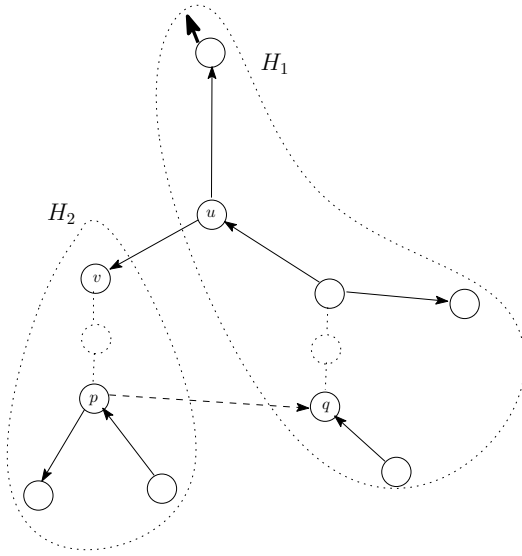
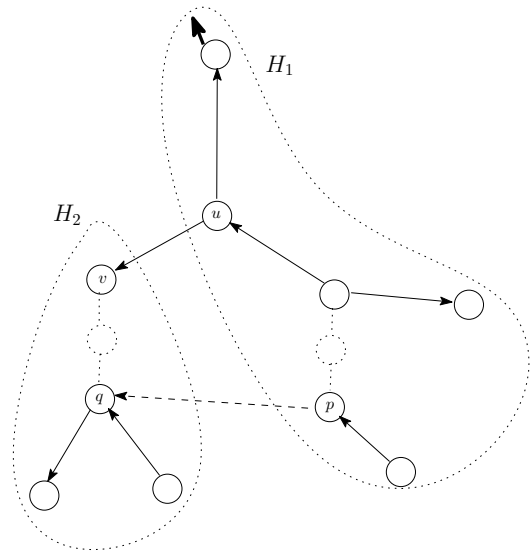


Figura 3.1: Modifica della variabile λ_p

Questa proprietà può essere vantaggiosamente utilizzata per l'aggiornamento delle variabili duali a seguito di un'operazione di pivot, evitando in tal modo la risoluzione dell'intero sistema di equazioni.

Alla generica iterazione k sia $H = \langle V, T \rangle$ l'albero di base, siano $\lambda_i, i \in V$ i valori delle variabili duali e $\hat{c}_{ij}, (i, j) \notin T$ i coefficienti di costo ridotto. Supponiamo di voler portare in base la variabile (p, q) e che (u, v) sia la variabile uscente. Se in H eliminiamo l'arco (u, v) , esso si decompone in due sotto-alberi, uno dei quali contiene sicuramente la radice. Chiamiamo $H_1 = \langle V_1, T_1 \rangle$ il sotto-albero contenente la radice e $H_2 = \langle V_2, T_2 \rangle$ l'altro. Possono presentarsi due casi: a) $p \in H_2, q \in H_1$; b) $q \in H_2, p \in H_1$. Nel primo caso (figura 3.2) alla successiva iterazione la variabile duale λ_p subirà una

Figura 3.2: $p \in H_2$ Figura 3.3: $q \in H_2$

variazione, perché la catena dalla radice al nodo p cambia a seguito dell'operazione di pivot. Per quanto precedentemente osservato si ha

$$\lambda'_i = \lambda_i \quad i \in V_1$$

D'altro canto, poiché (p, q) è entrata in base deve essere

$$\begin{aligned} \hat{c}_{pq} &= c_{pq} - \lambda_p + \lambda_q \leq 0 \\ \lambda'_p - \lambda'_q &= c_{pq} \Rightarrow \lambda'_p - \hat{c}_{pq} + c_{pq} - \lambda_p = c_{pq} \end{aligned}$$

L'ultima relazione mostra che $\lambda'_p - \lambda_p = \hat{c}_{pq}$, ossia che a seguito dell'operazione di pivot il valore della p -ma variabile duale λ'_p sarà diminuito di $\vartheta = |\hat{c}_{pq}|$. Della stessa quantità diminuiranno anche tutte le variabili duali relative a nodi di H_2 . Viceversa se $q \in H_2$,

avremo

$$\hat{c}_{pq} = c_{pq} - \lambda_p + \lambda_q \leq 0$$

$$\lambda'_p - \lambda'_q = c_{pq} \Rightarrow \lambda_q - \hat{c}_{pq} + c_{pq} - \lambda'_q = c_{pq} \Rightarrow \lambda'_q - \lambda_q = -\hat{c}_{pq}$$

Di conseguenza, la variabile λ_q crescerà di $|\hat{c}_{pq}|$ così come tutte le altre variabili relative ai nodi di H_2 .

E' immediato altresì verificare che, a seguito dell'operazione di pivot sull'arco (p, q) , i costi ridotti di archi che connettono nodi di H_1 rimarranno costanti, in quanto sono le variabili duali a rimanere costanti. Ma anche i costi ridotti di archi che connettono nodi di H_2 rimangono costanti, in quanto tutte le variabili duali relativi a nodi di H_2 aumentano o diminuiscono della medesima quantità. Gli unici costi ridotti a variare sono relativi ad archi che connettono nodi di H_1 e di H_2 . La regola di variazione viene lasciata come esercizio agli studenti.

◇

3.2 Flusso di Costo Minimo su reti non capacitate - Esercizi svolti

ESERCIZIO 3.2.1. Risolvere il problema di flusso di costo minimo sulla rete di in Figura 3.4. L'etichetta su ciascun nodo rappresenta la divergenza del nodo, mentre le etichette sugli archi rappresentano, nell'ordine, il costo unitario ed il flusso corrente sull'arco.

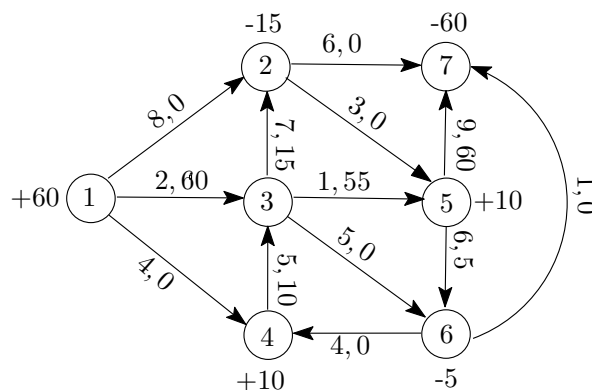


Figura 3.4: Il grafo dell'Esercizio 3.2.1

Soluzione – E' facile verificare che la distribuzione di flusso assegnata è ammissibile ed inoltre gli archi (i, j) tali che $f_{ij} \neq 0$ formano un albero ricoprente $H^0 = \langle V, T^0 \rangle$

(si veda la Figura 3.5). La distribuzione di flusso assegnata è pertanto una soluzione ammissibile di base con costo $z = c^\top f = 900$

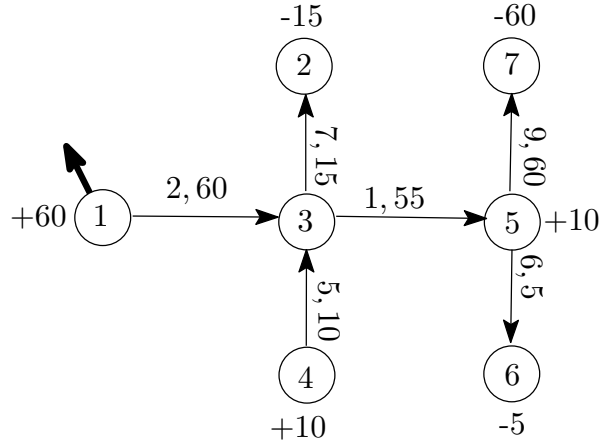


Figura 3.5: La soluzione ammissibile di base iniziale dell'Esercizio 3.2.1.

Prima iterazione

Scelto il nodo 1 come nodo radice e risolvendo il sistema di potenziali si ottiene $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -9$, $\lambda_3 = -2$, $\lambda_4 = 3$, $\lambda_5 = -3$, $\lambda_6 = -9$, $\lambda_7 = -12$.

I costi ridotti \hat{c}_{ij} ($(i, j) \notin T^0$) saranno¹:

$$\hat{c}_{12} = -1, \hat{c}_{14} = 7, \hat{c}_{25} = 9, \hat{c}_{27} = 3, \hat{c}_{36} = -2, \hat{c}_{64} = 10, \hat{c}_{67} = -2.$$

La soluzione non è ottima; scegliamo di portare in base la variabile f_{36} (scelta greedy).

In H^0 si forma il ciclo

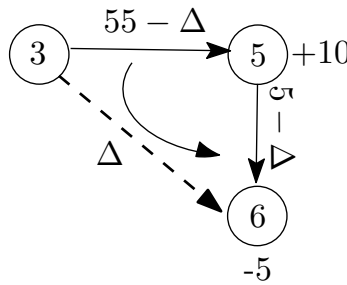


Figura 3.6: Ciclo alla prima iterazione

Scelto l'orientamento del ciclo concorde a quello dell'arco che entra in base, ovvero l'arco (3,6), gli archi del ciclo possono essere partizionati in due sottoinsiemi C^+ e C^- , in cui C^+ contiene archi concordi all'orientamento fissato e C^- gli archi discordi. Il massimo incremento ammissibile per la variabile entrante in base sarà $\Delta = \min_{(i,j) \in C^-} \{f_{ij}\}$

¹Non è strettamente necessario calcolare tutti i costi ridotti, ma ci si può fermare quando si incontra il primo costo ridotto negativo.

cioè $\Delta = 5$. Modificando il flusso come

$$f'_{ij} = \begin{cases} f_{ij} + \Delta & (i, j) \in C^+ \\ f_{ij} - \Delta & (i, j) \in C^- \\ f_{ij} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

la variabile f_{56} uscirà dalla base e la nuova soluzione ammissibile di base, mostrata in Figura 3.7, avrà costo $c^\top f = 900 + \hat{c}_{36}\Delta = 890$.

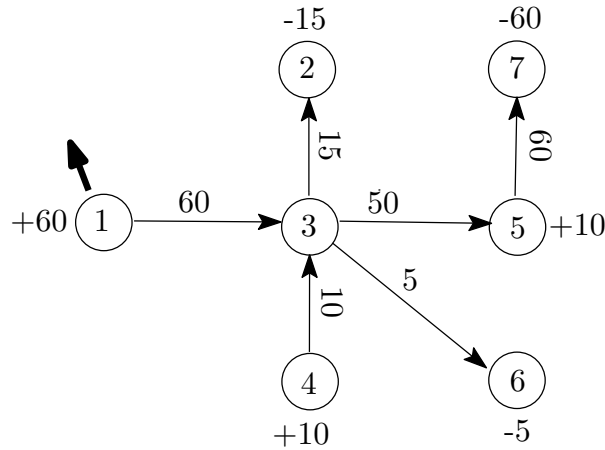


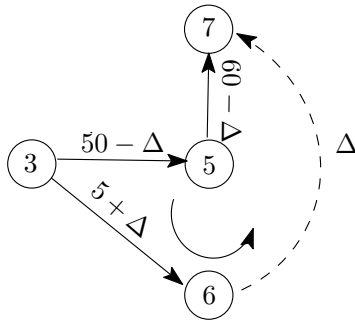
Figura 3.7: La soluzione ammissibile alla fine della prima iterazione.

Seconda iterazione

I potenziali nodali saranno:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -9, \lambda_3 = -2, \lambda_4 = 3, \lambda_5 = -3, \lambda_6 = -7, \lambda_7 = -12.$$

Si noti che, rispetto all'iterazione precedente, solo la variabile duale λ_6 è cambiata. Di conseguenza tutti i costi ridotti degli archi non incidenti sul nodo 6 rimangono costanti; gli unici a cambiare sono pertanto $\hat{c}_{56} = 2$, $\hat{c}_{64} = 14$ e $\hat{c}_{67} = -4$. Portiamo in base la variabile f_{67} . Si forma il ciclo mostrato in figura 3.8.



$$C^+ = \{(6, 7), (3, 6)\}, C^- = \{(3, 5), (5, 7)\}$$

$$\Delta = \min_{(i,j) \in C^-} \{f_{ij}\} = f_{35} = 50$$

Figura 3.8: Ciclo alla seconda iterazione

Portando fuori dalla base l'arco (3,5), la nuova soluzione, con costo $c^\top f = 800 + \hat{c}_{67}\Delta = 800 - 200 = 600$, è mostrata in Figura 3.9.

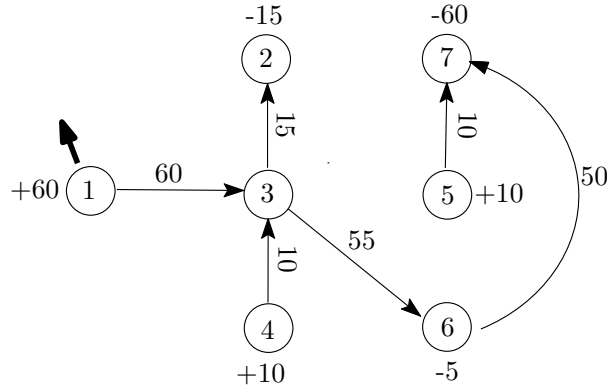
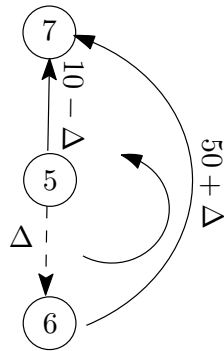


Figura 3.9: La soluzione ammissibile di base alla fine della seconda iterazione.

Terza iterazione

Rispetto all'iterazione precedente, soltanto le variabili duali associate ai nodi 5 e 7 sono cambiate. Risulta, pertanto: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -9$, $\lambda_3 = -2$, $\lambda_4 = 3$, $\lambda_5 = 1$, $\lambda_6 = -7$, $\lambda_7 = -8$. Come conseguenza, solo i costi ridotti degli archi incidenti sui nodi 5 e 7 vanno modificati. Si ha: $\hat{c}_{12} = -1$, $\hat{c}_{14} = 7$, $\hat{c}_{25} = 13$, $\hat{c}_{27} = 7$, $\hat{c}_{35} = 4$, $\hat{c}_{56} = -2$, $\hat{c}_{64} = 14$.

La soluzione non è ottima. Portando in base la variabile f_{56} si forma il ciclo mostrato in Figura 3.10



$$C^+ = \{(6, 7), (5, 6)\}, C^- = \{(5, 7)\}$$

$$\Delta = \min_{(i,j) \in C^-} \{f_{ij}\} = f_{57} = 10$$

Figura 3.10: Ciclo alla terza iterazione

L'arco (5,7) esce dalla base e la nuova soluzione, con costo $c^\top f = 690 + \hat{c}_{56}\Delta = 690 - 20 = 670$, è mostrata in Figura 3.11.

Quarta iterazione

Solo il valore della variabile duale λ_5 è modificato rispetto all'iterazione precedente: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -9$, $\lambda_3 = -2$, $\lambda_4 = 3$, $\lambda_5 = -1$, $\lambda_6 = -7$, $\lambda_7 = -8$. Analogamente, solo i costi ridotti degli archi incidenti sul nodo 5 cambiano: $\hat{c}_{12} = -1$, $\hat{c}_{14} = 7$, $\hat{c}_{25} =$

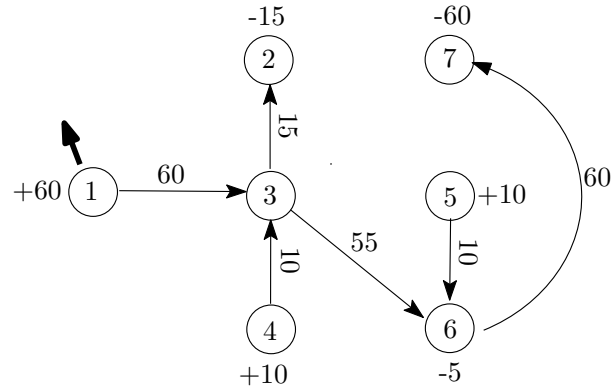
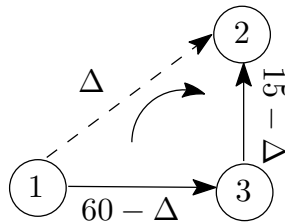


Figura 3.11: La soluzione ammissibile di base alla fine della terza iterazione.

11, $\hat{c}_{27} = 7$, $\hat{c}_{35} = 2$, $\hat{c}_{57} = 2$, $\hat{c}_{64} = 14$. L'unico costo ridotto negativo è relativo all'arco (1,2). Portando in base la variabile f_{12} si forma il ciclo mostrato in figura 3.12



$$C^+ = \{(1, 2)\}, C^- = \{(1, 3), (2, 3)\}$$

$$\Delta = \min_{(i,j) \in C^-} \{f_{ij}\} = f_{32} = 15$$

Figura 3.12: Ciclo alla quarta iterazione

L'arco (3,2) esce dalla base e la nuova soluzione di base, con costo $c^T f = 670 + \hat{c}_{12}\Delta = 670 - 15 = 655$, è mostrata in Figura 3.13.

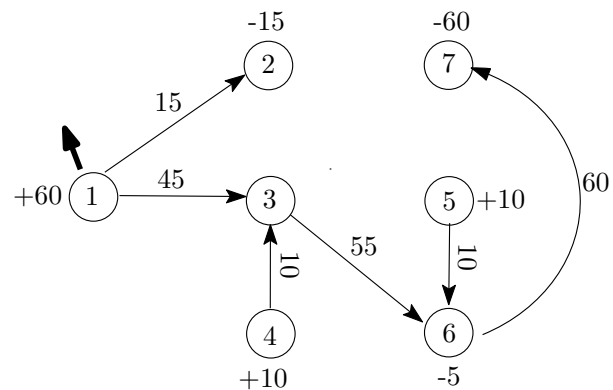


Figura 3.13: La soluzione ammissibile di base alla fine della quarta iterazione.

Quinta iterazione

L'unica variabile duale ad subire una modifica è λ_2 : $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -8$, $\lambda_3 = -2$, $\lambda_4 =$

3, $\lambda_5 = -1$, $\lambda_6 = -7$, $\lambda_7 = -8$. Per quanto riguarda i costi ridotti si ha: $\hat{c}_{14} = 7$, $\hat{c}_{25} = 10$, $\hat{c}_{27} = 6$, $\hat{c}_{35} = 2$, $\hat{c}_{32} = 1$, $\hat{c}_{57} = 2$, $\hat{c}_{64} = 14$.

I costi ridotti sono tutti non negativi. Quella determinata è la soluzione ottima.

◇

3.3 Flusso di Costo Minimo su reti non capacitate - Esercizi non svolti

ESERCIZIO 3.3.1 * E' assegnata la rete di flusso di seguito riportata, dove le etichette sui nodi rappresentano le divergenze (si assuma che un nodo non etichettato abbia divergenza nulla) mentre le etichette sugli archi sono costi unitari di flusso. Si consideri

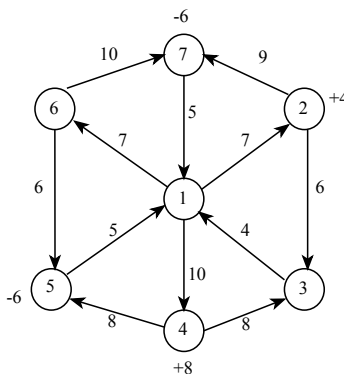


Figura 3.14: Il grafo dell'Esercizio 3.3.1

il seguente insieme di archi $T = \{(1, 6), (2, 3), (3, 1), (4, 3), (4, 5), (6, 7)\}$

1. Verificare che T forma una base ammissibile per il problema assegnato calcolando la corrispondente distribuzione di flusso.
2. Determinare la distribuzione di flusso a costo minimo a partire dalla soluzione determinata al punto precedente.

Soluzione – Soluzione ottima degenera. Base ottima:

$$T^* = \{(6, 7), (2, 7), (1, 2), (3, 1), (4, 3), (4, 5)\}. z^* = 140$$

◇

ESERCIZIO 3.3.2 * Nella rete di flusso di seguito rappresentata l'etichetta su ciascun arco indica il costo unitario di flusso, mentre l'etichetta su ciascun nodo rappresenta la sua divergenza. Determinare la distribuzione di flusso di costo minimo a partire dalla base $T = \{(1, 4), (6, 1), (6, 2), (2, 3), (7, 2), (7, 5)\}$.

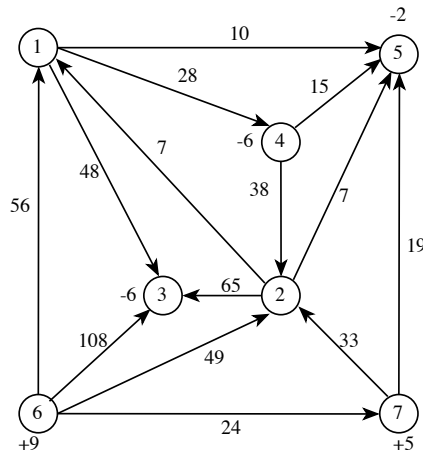


Figura 3.15: Il grafo dell'Esercizio 3.3.2

Soluzione – Soluzione ottima non unica. Una base ottima è:

$$T^* = \{(1, 3), (1, 4), (2, 1), (6, 1), (7, 2), (7, 5)\}. z^* = 1115$$

◇

ESERCIZIO 3.3.3 * Si consideri la rete di flusso di seguito riportata, dove le etichette sui nodi rappresentano le divergenze (si assuma che un nodo non etichettato abbia divergenza nulla) mentre le etichette sugli archi sono costi unitari di flusso.

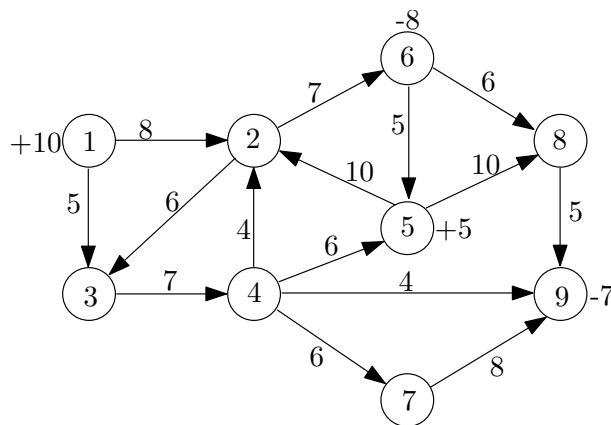


Figura 3.16: Il grafo dell'Esercizio 3.3.3

1. Determinare quale tra i seguenti insiemi di archi forma una base ammissibile calcolando la relativa distribuzione di flusso.

$$T_1 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 6), (6, 5), (5, 8), (8, 9), (4, 9), (4, 7)\}$$

$$T_2 = \{(1, 3), (3, 4), (2, 6), (6, 5), (5, 8), (8, 9), (4, 9), (4, 7)\}$$

2. Determinare la distribuzione di flusso a costo minimo a partire dalla soluzione determinata al punto precedente.

Soluzione – T_2 è una base non ammissibile. A partire da T_1 si giunge alla base ottima (degenere):

$$\{(1, 2), (1, 3), (2, 6), (3, 4), (5, 8), (8, 9), (4, 9), (4, 7)\}$$

◇

ESERCIZIO 3.3.4 ■ Si consideri la rete di flusso non capacitata riportata nella figura seguente, in cui le etichette sugli archi rappresentano i costi unitari e quelle sui nodi le divergenze.

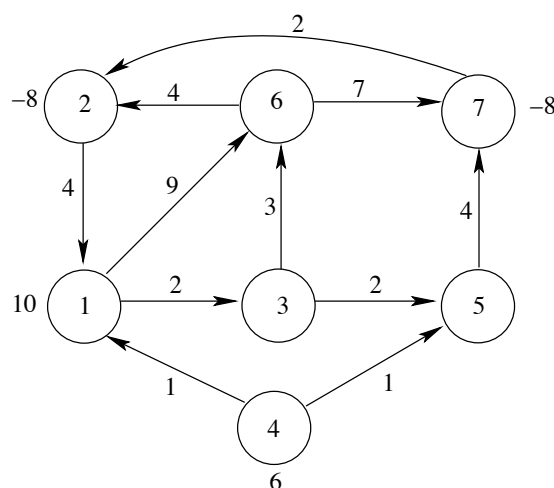


Figura 3.17: Il grafo dell'Esercizio 3.3.4

1. Si supponga che ad una certa iterazione r dell'Algoritmo del Simplex gli archi $(1, 6)$ e $(6, 2)$ siano archi di base. Dimostrare che per qualsiasi valore delle variabili duali λ_i non può mai verificarsi che $\hat{c}_{21} \leq 0$.
2. Si consideri ora il seguente vettore di variabili duali $\lambda_i = [0, -9, -2, -7, -8, -5, -12]^T$.
 - (a) Calcolare la soluzione primale f complementare a λ e verificare che f è ammissibile, di base ma non ottima.
 - (b) Determinare la soluzione ottima del problema a partire dalla distribuzione di flusso determinata al punto precedente.

◇

ESERCIZIO 3.3.5 ■ Si consideri la rete di flusso di seguito riportata

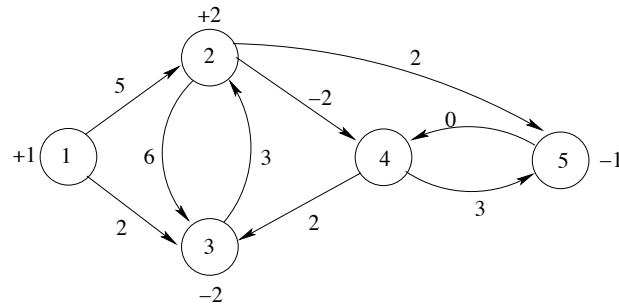


Figura 3.18: Il grafo dell'Esercizio 3.3.5

1. La presenza del coefficiente di costo $c_{24} < 0$ è sufficiente a garantire che il problema sia inferiormente illimitato? Motivare la risposta.
2. Determinare, se esiste, la distribuzione di flusso a costo minimo a partire dalla base $T = \{(1, 2), (2, 4), (2, 5), (4, 3)\}$

◇

3.4 Flusso di Costo Minimo su reti capacitate - Esercizi svolti

In questa sezione verrà mostrata un'implementazione dell'Algoritmo del Simpleso su rete per il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} f_{ij} \\ \sum_{j|(i,j) \in E} f_{ij} - \sum_{j|(j,i) \in E} f_{ji} &= b_i & i \in V \\ l_{ij} \leq f_{ij} \leq u_{ij} & & (i,j) \in E \end{aligned}$$

Qualora le limitazioni inferiori l_{ij} non sono tutte nulle, è possibile ricondursi al caso $l_{ij} = 0$ per ogni arco (i,j) mediante il seguente cambio di variabili

$$f_{ij} = f'_{ij} + l_{ij} \quad (i,j) \in E$$

in tale modo la formulazione precedente diventa

$$\begin{aligned} \bar{c} + \min \quad & \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} f'_{ij} \\ \sum_{j|(i,j) \in E} f'_{ij} - \sum_{j|(j,i) \in E} f'_{ji} &= b'_i & i \in V \\ 0 \leq f'_{ij} \leq u'_{ij} & & (i,j) \in E \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} \bar{c} &= \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} l_{ij} \\ b'_i &= b_i + \sum_{j|(i,j) \in E} l_{ij} - \sum_{j|(j,i) \in E} l_{ji} & i \in V \\ u'_{ij} &= u_{ij} - l_{ij} & (i,j) \in E \end{aligned}$$

Va inoltre ricordato che le variabili non di base non sono necessariamente tutte nulle. Vi possono essere variabili fuori base che assumono valore pari alla capacità superiore dell'arco. Per tale ragione nel risolvere gli esercizi riporteremo nell'albero di base sempre gli archi fuori base che sono al loro upper bound indicandoli con il simbolo $--- \mapsto$, per ricordarci che nel risolvere l'equazione di continuità sull'albero di base

$H = \langle V, T \rangle$ sugli archi di $(i, j) \in \mathcal{U}$ il flusso vale u_{ij} .

ESERCIZIO 3.4.1. E' assegnata la rete di flusso capacitata riportata in Figura 3.19, in cui le etichette sugli archi rappresentano, nell'ordine, le capacità superiori (u_{ij}) ed i costi unitari di flusso (c_{ij}), mentre le etichette sui nodi rappresentano le divergenze (b_i). Si assuma che $l_{ij} = 0$ per ogni arco del grafo.

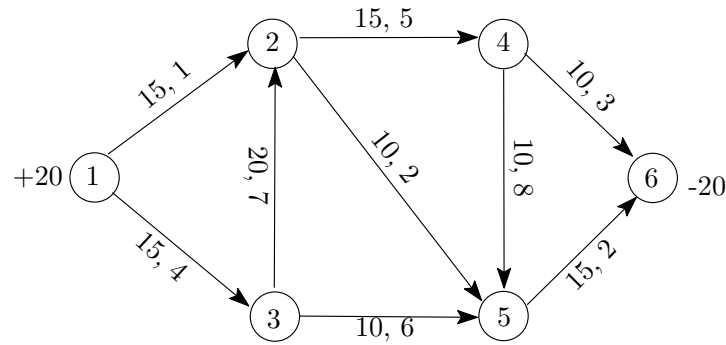


Figura 3.19: Il grafo dell'Esercizio 3.4.1.

Considerata la seguente partizione degli archi:

$$\mathcal{T} = \{(1, 2), (3, 2), (2, 5), (4, 5), (4, 6)\}$$

$$\mathcal{L} = \{(3, 5)\}$$

$$\mathcal{U} = \{(1, 3), (2, 4), (5, 6)\}$$

1. Verificare che alla partizione assegnata corrisponde una soluzione ammissibile di base per il problema di flusso minimo capacitato.
2. Determinare la distribuzione di flusso a costo minimo.

Soluzione — Gli archi in \mathcal{T} formano un albero ricoprente i nodi del grafo. Tenendo in considerazione gli archi in \mathcal{U} ed applicando, come al solito, le equazioni di continuità dalle foglie alla radice dell'albero, troviamo la distribuzione di flusso mostrata in figura 3.20. Il costo di tale soluzione è:

$$c^\top f = \sum_{(i,j) \in \mathcal{U}} c_{ij} u_{ij} + \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} c_{ij} f_{ij} = 380$$

Si noti che tale soluzione è degenere, essendo $(4, 5) \in \mathcal{T}$ e $f_{45} = u_{45} = 10$.

Prima iterazione

I potenziali nodali ed i coefficienti di costo ridotto sono, rispettivamente:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 6, \lambda_4 = 5, \lambda_5 = -3, \lambda_6 = 2.$$

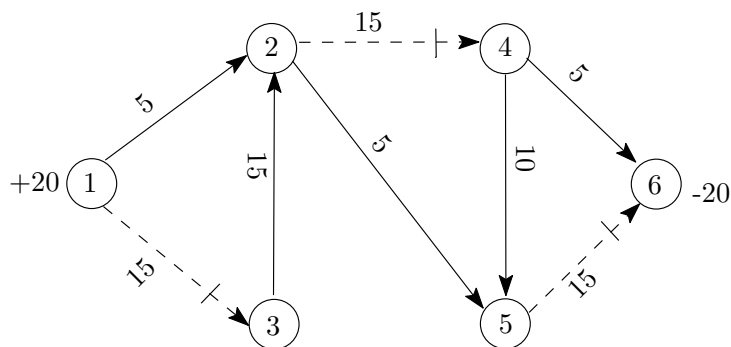


Figura 3.20: La soluzione ammissibile di base iniziale dell'Esercizio 3.4.1.

$\mathcal{U} : \hat{c}_{13} = 10, \hat{c}_{24} = 11, \hat{c}_{56} = 8;$

$\mathcal{L} : \hat{c}_{35} = -3.$

La soluzione non è ottima. Portando in base l'arco $(1,3) \in \mathcal{U}$ si forma il ciclo di figura 3.21. Affinché l'arco $(1,3)$ entri in base, il flusso lungo tale arco deve diminuire. Pertanto il verso di percorrenza del ciclo è discorde al verso dell'arco $(1,3)$. Il massimo

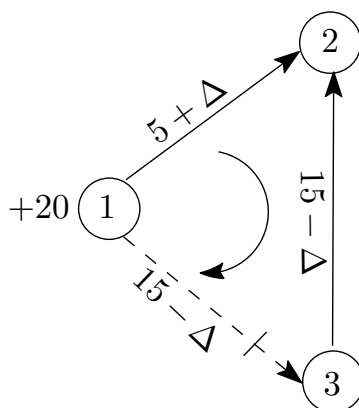


Figura 3.21: Ciclo alla prima iterazione

decremento ammissibile Δ per l'arco $(1,2)$ sarà

$$C^+ = \{(1,2)\}, C^- = \{(1,3), (3,5)\}$$

$$\Delta^- = \min_{(i,j) \in C^-} \{f_{ij}\} = 10$$

$$\Delta^+ = \min_{(i,j) \in C^+} \{u_{ij} - f_{ij}\} = 15$$

$$\Delta = \min\{\Delta^-, \Delta^+\} = 10 \text{ in corrispondenza dell'arco } (1,2)$$

Modificando il flusso come al solito

$$f'_{ij} = \begin{cases} f_{ij} + \Delta & (i, j) \in C^+ \\ f_{ij} - \Delta & (i, j) \in C^- \\ f_{ij} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

troviamo $f_{12} = u_{12}$: l'arco $(1,2)$ passa da \mathcal{T} ad \mathcal{U} . La nuova soluzione ammissibile di base degenerare, con $\mathcal{T} = \{(1,3), (3,2), (2,5), (4,5), (4,6)\}$, $\mathcal{L} = \{(3,5)\}$, e $\mathcal{U} = \{(1,2), (2,4), (5,6)\}$, è mostrata in Figura 3.22 ed avrà costo $c^\top f = 380 + \hat{c}_{13}\Delta = 280$.

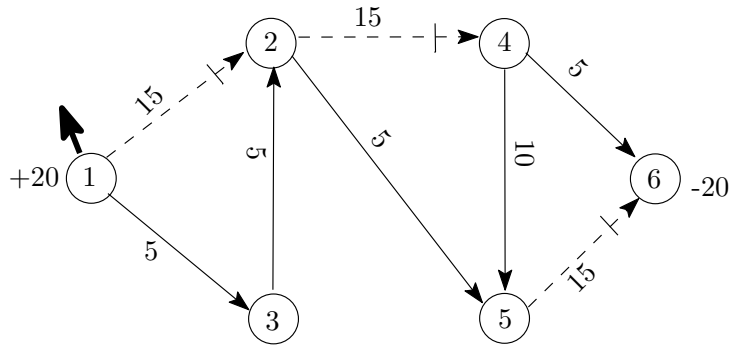


Figura 3.22: La soluzione ammissibile alla fine della prima iterazione.

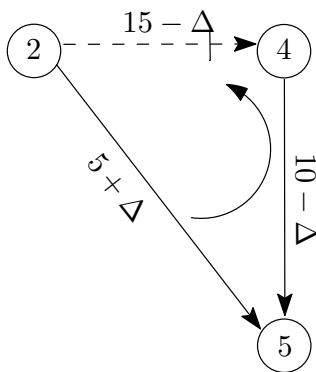
Seconda iterazione

Tranne λ_1 , le variabili duali cambiano tutte. Siamo nel caso $(p, q) = (1, 3)$ con $q \in H_2$. Di conseguenza avremo $\lambda'_i = \lambda_i - |\hat{c}_{13}|$, $i = 2, \dots, 6$, cioè $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -11$, $\lambda_3 = -4$, $\lambda_4 = -5$, $\lambda_5 = -13$, $\lambda_6 = -8$.

$\mathcal{U} : \hat{c}_{12} = -10$, $\hat{c}_{24} = 11$, $\hat{c}_{56} = 8$;

$\mathcal{L} : \hat{c}_{35} = -3$.

Portando in base l'arco $(2,4)$ si forma il ciclo di figura 3.23 La nuova soluzione am-



$$C^+ = \{(2,5)\}, C^- = \{(2,4), (4,5)\}$$

$$\Delta^- = \min_{(i,j) \in C^-} \{f_{ij}\} = 10$$

$$\Delta^+ = \min_{(i,j) \in C^+} \{u_{ij} - f_{ij}\} = 5$$

$$\Delta = \min\{\Delta^-, \Delta^+\} = 5 \text{ in corrispondenza di } (2,5)$$

Figura 3.23: Ciclo alla seconda iterazione.

missibile di base non degenera, con $\mathcal{T} = \{(1, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 5), (4, 6)\}$, $\mathcal{L} = \{(3, 5)\}$, e $\mathcal{U} = \{(1, 2), (2, 5), (5, 6)\}$, è mostrata in Figura 3.24 ed avrà costo $c^\top f = 280 - |\hat{c}_{25}|\Delta = 280 - 55 = 225$.

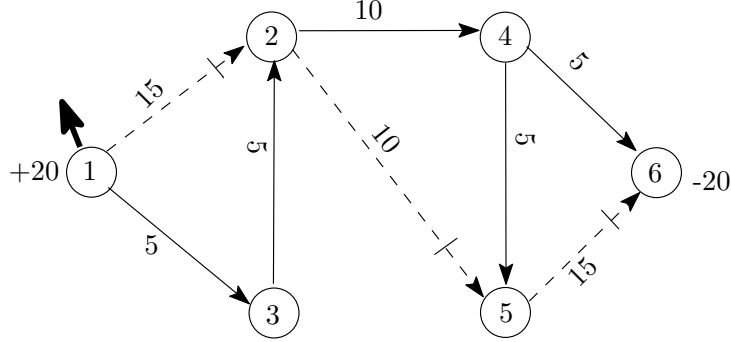


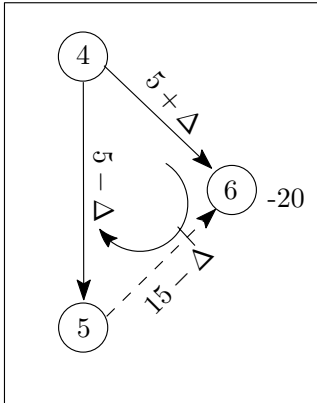
Figura 3.24: La soluzione ammissibile alla fine della seconda iterazione.

Terza iterazione

Le variabili duali $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ rimarranno costanti, mentre le variabili $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ decresceranno di $|\hat{c}_{24}| = 11$ unità. Avremo quindi $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -11$, $\lambda_3 = -4$, $\lambda_4 = -16$, $\lambda_5 = -24$, $\lambda_6 = -19$.

$\mathcal{U} : \hat{c}_{12} = -10$, $\hat{c}_{25} = -11$, $\hat{c}_{56} = 7$;

$\mathcal{L} : \hat{c}_{35} = -3$. Portiamo in base la variabile (5,6).



$$C^+ = \{(4, 6)\}, C^- = \{(4, 5), (5, 6)\}$$

$$\Delta^- = \min_{(i,j) \in C^-} \{f_{ij}\} = 5$$

$$\Delta^+ = \min_{(i,j) \in C^+} \{u_{ij} - f_{ij}\} = 5$$

$$\Delta = \min\{\Delta^-, \Delta^+\} = 5$$

Indeterminazione nella scelta dell'arco uscente: la nuova soluzione sarà ancora degenera.

Figura 3.25: Ciclo alla terza iterazione.

Scegliendo di portare fuori base l'arco (4,5), la nuova soluzione ammissibile di base degenera, con $\mathcal{T} = \{(1, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 6), (5, 6)\}$, $\mathcal{L} = \{(3, 5), (4, 5)\}$, e $\mathcal{U} = \{(1, 2), (2, 5)\}$, è mostrata in Figura 3.26 ed avrà costo $c^\top f = 225 - |\hat{c}_{56}|\Delta = 225 - 35 = 190$.

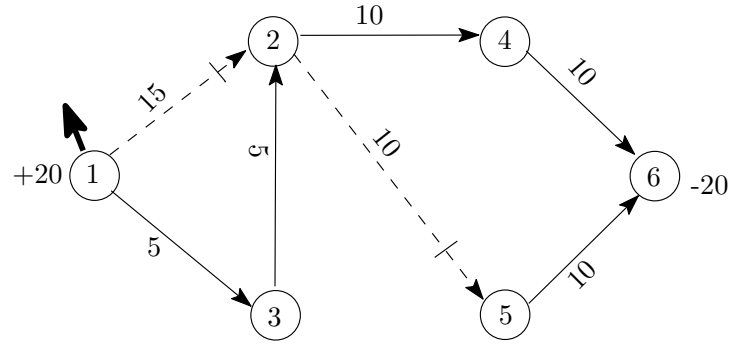


Figura 3.26: La soluzione ammissibile alla fine della terza iterazione.

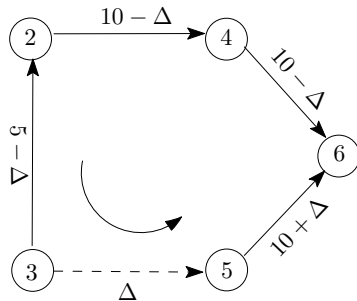
Quarta iterazione

Solo la variabile duale λ_5 cambia e diminuisce di $|\hat{c}_{56}| = 7$ unità. Perciò $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -11$, $\lambda_3 = -4$, $\lambda_4 = -16$, $\lambda_5 = -17$, $\lambda_6 = -19$.

$\mathcal{U} : \hat{c}_{12} = -11, \hat{c}_{25} = -4;$

$\mathcal{L} : \hat{c}_{35} = -7, \hat{c}_{45} = 7.$

L'unica variabile a non rispettare la condizione di ottimalità è f_{35} . Portando in base l'arco (3,5) si forma il ciclo di figura 3.27



$$C^+ = \{(3, 5), (5, 6)\}, C^- = \{(3, 2), (2, 4), (4, 6)\}$$

$$\Delta^- = \min_{(i,j) \in C^-} \{f_{ij}\} = 5$$

$$\Delta^+ = \min_{(i,j) \in C^+} \{u_{ij} - f_{ij}\} = 5$$

$$\Delta = \min\{\Delta^-, \Delta^+\} = 5$$

Figura 3.27: Ciclo alla quarta iterazione. Indeterminazione nella scelta della variabile uscente

Portando fuori base l'arco (3,2), la nuova soluzione ammissibile di base degenera, con $\mathcal{T} = \{(1, 3), (3, 5), (2, 4), (4, 6), (5, 6)\}$, $\mathcal{L} = \{(3, 2), (4, 5)\}$, e $\mathcal{U} = \{(1, 2), (2, 5)\}$, è mostrata in Figura 3.28 ed avrà costo $c^T f = 190 - |\hat{c}_{35}|\Delta = 155$.

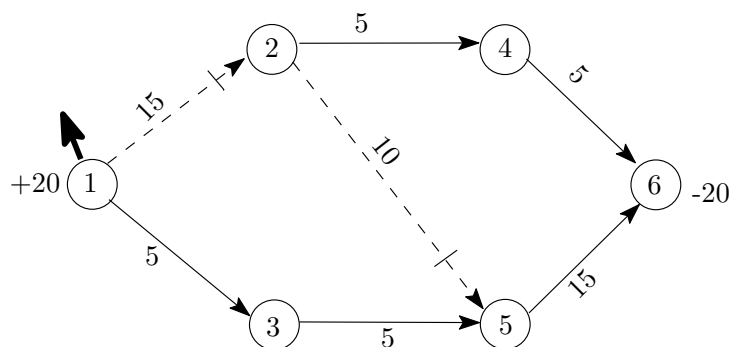


Figura 3.28: La soluzione ammissibile alla fine della quarta iterazione.

Quinta iterazione

Rispetto all'iterazione precedente si ha che λ_1 e λ_3 rimangono costanti, mentre le altre crescono di $|\hat{c}_{35}| = 7$ unità. Perciò $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = -4$, $\lambda_4 = -9$, $\lambda_5 = -10$, $\lambda_6 = -12$.

$\mathcal{U} : \hat{c}_{12} = -3, \hat{c}_{25} = -5;$

$\mathcal{L} : \hat{c}_{32} = 7, \hat{c}_{45} = 7.$

Poiché $\hat{c}_{ij} \geq 0, (i, j) \in \mathcal{L}$ e $\hat{c}_{ij} \leq 0, (i, j) \in \mathcal{U}$, la soluzione corrente è ottima.

◇

ESERCIZIO 3.4.2. E' data la rete di flusso capacitata riportata nella figura 3.29 in cui le etichette sui nodi rappresentano le divergenze mentre quelle sugli archi sono, rispettivamente, il valore minimo di flusso l_{ij} che su di essi può transitare ed il costo per unità di flusso c_{ij} . Si assuma $u_{ij} = \infty$ per ogni arco (i, j) .

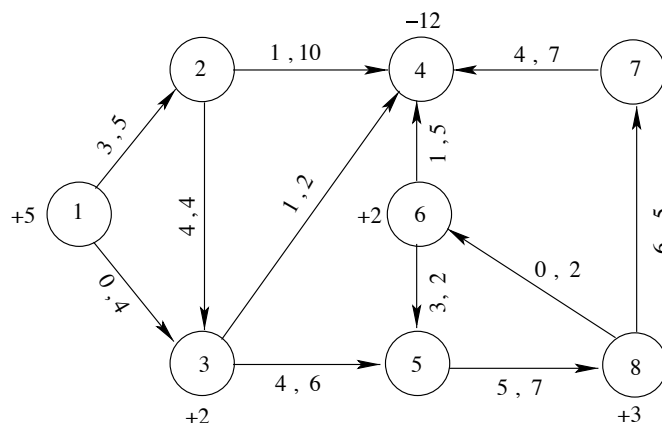


Figura 3.29: Il grafo dell'Esercizio 3.4.2.

Considerati i seguenti insiemi:

$$\mathcal{T} = \{(1, 2), (2, 4), (3, 4), (5, 8), (8, 6), (8, 7), (7, 4)\}$$

$$\mathcal{L} = \{(1, 3), (2, 3), (3, 5), (6, 4), (6, 5)\}$$

1. Verificare che \mathcal{T} forma una base ammissibile determinando la distribuzione di flusso associata.
2. Determinare la distribuzione di flusso a costo minimo a partire dalla soluzione individuata al punto precedente.

Soluzione – Si tratta di un problema di flusso di costo minimo con capacità inferiori sugli archi l_{ij} non tutte nulle. Ci si può ricondurre al caso $l_{ij} = 0 \ \forall (i, j) \in E$ operando il cambio di variabili $f_{ij} = f'_{ij} + l_{ij} \ (i, j) \in E$ come descritto all'inizio di questa sezione. Notando che $u_{ij} = +\infty$, tale cambio di variabili comporta:

- la modifica delle divergenze dei nodi: $b'_i = b_i + \sum_{j|(i,j) \in E} l_{ij} - \sum_{j|(j,i) \in E} l_{ji} \ i \in V$;
- la modifica delle capacità inferiori: $l'_{ij} = 0, \ (i, j) \in E$;
- nel calcolo della funzione obiettivo, in corrispondenza di una distribuzione di flusso ammissibile f' , la presenza del termine costante $\bar{c} = \sum_{(i,j) \in E} l_{ij} c_{ij}$.

Si avrà, pertanto, $b'_1 = +2, b'_2 = -2, b'_3 = +1, b'_4 = -5, b'_6 = -2, b'_7 = +2, b'_8 = +2, \bar{c} = 171$. La rete di flusso modificata è mostrata in figura 3.30 e su di essa si può applicare l'algoritmo del simplesso su rete nella sua versione non capacitata.

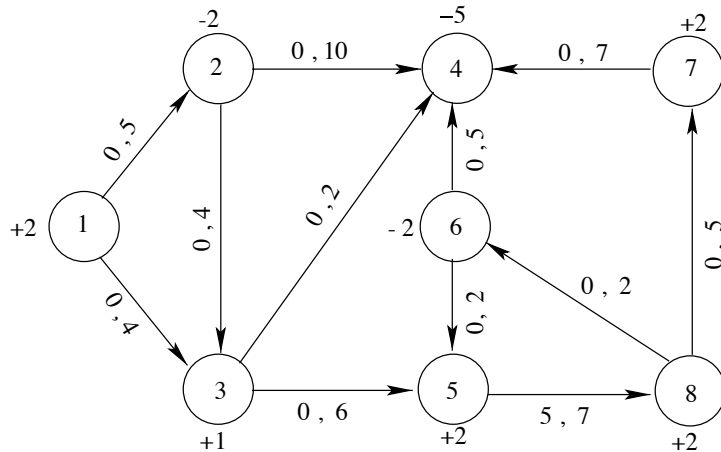


Figura 3.30: Il grafo dell'Esercizio 3.4.2 dopo il cambio di variabili.

Gli archi in \mathcal{T} formano un albero ricoprente i nodi del grafo cui corrisponde una distribuzione ammissibile di flusso f' mostrata in figura 3.31 con costo $c^\top f' = \sum_{(i,j) \in \mathcal{T}} c_{ij} f'_{ij} =$

68. Si noti che tale soluzione è degenere, essendo $(2, 4) \in \mathcal{T}$ e $f'_{24} = 0$.

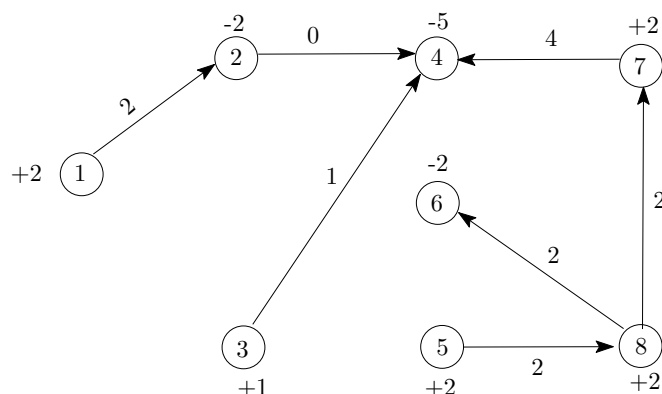


Figura 3.31: La soluzione ammissibile di base iniziale dell'Esercizio 3.4.1.

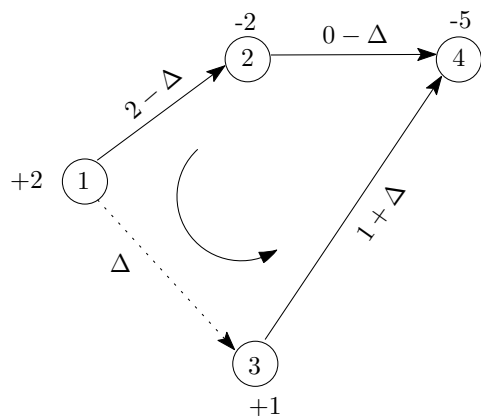
Prima iterazione

I potenziali nodali ed i coefficienti di costo ridotto sono, rispettivamente:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -5, \lambda_3 = -13, \lambda_4 = -15, \lambda_5 = 4, \lambda_6 = -5, \lambda_7 = -8, \lambda_8 = -3.$$

$$\hat{c}_{13} = -9, \hat{c}_{23} = -4, \hat{c}_{24} = -9, \hat{c}_{35} = 23, \hat{c}_{64} = -5, \hat{c}_{65} = 11.$$

La soluzione non è ottima. Portando in base l'arco $(1,3) \in \mathcal{L}$ si forma il ciclo di figura 3.32. Affinché l'arco $(1,3)$ entri in base, il flusso lungo tale arco deve crescere. Pertanto il verso di percorrenza del ciclo è concorde al verso dell'arco $(1,3)$.



$$C^+ = \{(1,3), (3,4)\}, C^- = \{(1,2), (2,4)\}$$

$$\Delta = \min_{(i,j) \in C^-} \{f'_{ij}\} = 0$$

Iterazione degenera.

Figura 3.32: Ciclo alla prima iterazione

Facendo uscire dalla base l'arco $(2,4)$ esce dalla base, si ottiene la soluzione di base mostrata in figura 3.33 con costo $c^\top f' = 68$.

Seconda iterazione

Il potenziale nodale del nodo 2 rimane costante, mentre tutti gli altri cresceranno di $|\hat{c}_{13}| = 9$. Quindi:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -5, \lambda_3 = -4, \lambda_4 = -6, \lambda_5 = 13, \lambda_6 = 4, \lambda_7 = 1, \lambda_8 = 6.$$

$$\hat{c}_{23} = 5, \hat{c}_{24} = 9, \hat{c}_{35} = 23, \hat{c}_{64} = -5, \hat{c}_{65} = 11.$$

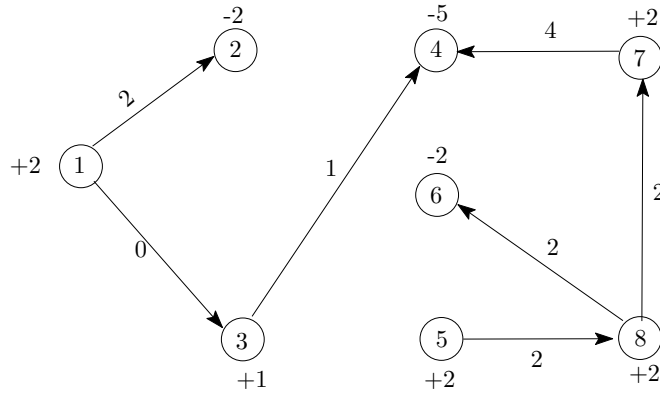
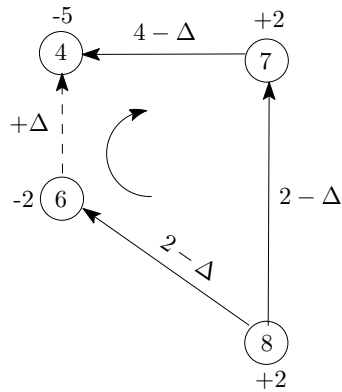


Figura 3.33: La soluzione ammissibile alla fine della prima iterazione.

La soluzione non è ottima. Portando in base l'arco $(6, 4) \in \mathcal{L}$ si forma il ciclo di figura 3.34.



$$C^+ = \{(6, 4), (8, 6)\}, C^- = \{(7, 4), (8, 7)\}$$

$$\Delta = \min_{(i,j) \in C^-} \{f'_{87}\} = 2$$

Figura 3.34: Ciclo alla seconda iterazione

Portando l'arco $(8, 7)$ fuori dalla base, la nuova soluzione ammissibile con costo $c^\top f' = 68 - \hat{c}_{64}\Delta = 68 - 10 = 58$, è mostrata in figura 3.35.

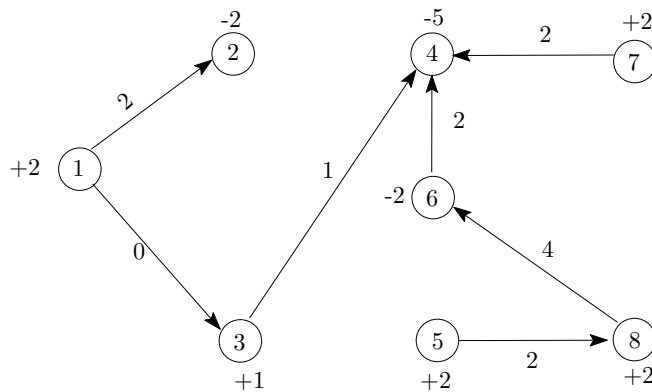


Figura 3.35: La soluzione ammissibile alla fine della seconda iterazione.

Terza iterazione

Le variabili duali relative ai nodi 1, 2, 3, 4, 7, rimangono costanti, mentre quelle relative ai nodi 5, 6, 8 diminuiscono tutte di $|\hat{c}_{64}| = 5$ unità. Perciò: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -5$, $\lambda_3 = -4$, $\lambda_4 = -6$, $\lambda_5 = 8$, $\lambda_6 = -1$, $\lambda_7 = 1$, $\lambda_8 = 1$; $\hat{c}_{23} = 5$, $\hat{c}_{24} = 9$, $\hat{c}_{35} = 2$, $\hat{c}_{65} = 11$, $\hat{c}_{87} = 5$.

Poiché la condizione di ottimalità è verificata, la soluzione di figura 3.35 è ottima con costo $c^\top f' = 58$. La soluzione del problema originario nelle variabili $f_{ij} = f'_{ij} + i_j$ è mostrata in figura, dove viene evidenziato l'albero della base ottima e, tratteggiati, gli archi fuori base in cui il flusso $f_{ij} = l_{ij}$. Il costo di tale soluzione è $c^\top f = \bar{c} + c^\top f' = 171 + 58 = 229$.

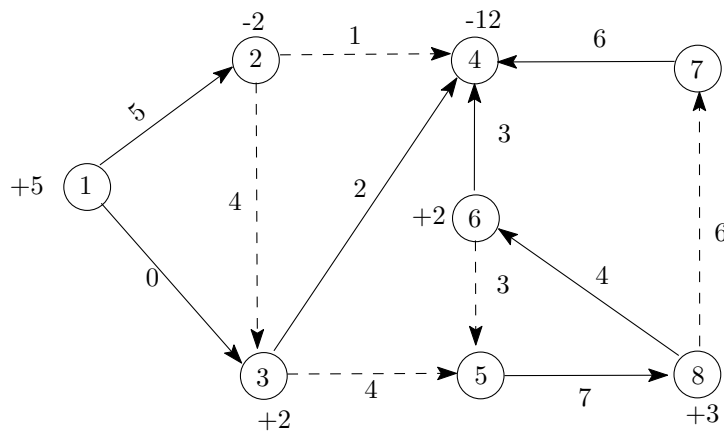


Figura 3.36: La soluzione ottima del problema originario.

◇

3.5 Flusso di Costo Minimo su reti capacitate - Esercizi non svolti

ESERCIZIO 3.5.1 * E' assegnata la rete di flusso capacitate mostrata nella figura seguente, dove le etichette sugli archi rappresentano, nell'ordine, le capacità u_{ij} ed i costi unitari di flusso c_{ij} . Si assuma che le limitazioni inferiori siano tutte nulle e si consideri la seguente ripartizione dell'insieme degli archi:

$$T = \{(2, 1), (2, 3), (3, 4), (5, 6), (5, 2)\} \quad L = \{(1, 3), (3, 5), (4, 5), (6, 2)\} \quad U = \{(1, 4)\}$$

Determinare la distribuzione di flusso a costo minimo a partire dalla base T .

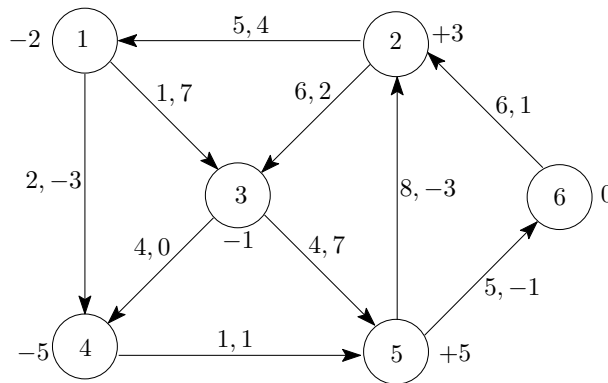


Figura 3.37: Il grafo dell'Esercizio 3.5.1

Soluzione – Il problema presenta ottimi multipli. Una base ottima è

$$\mathcal{T} = \{(2, 1), (2, 3), (3, 4), (5, 2), (6, 2)\} \quad \mathcal{L} = \{(1, 3), (3, 5), (4, 5), (5, 6)\} \quad \mathcal{U} = \{(1, 4)\}$$

◇

ESERCIZIO 3.5.2 ■ E' assegnata la rete di flusso capacitate riportata nella figura seguente, in cui le etichette sugli archi rappresentano, nell'ordine, le capacità superiori degli archi (u_{ij}) ed i costi unitari di flusso (c_{ij}), mentre quelle sui nodi le divergenze.

Assumendo $l_{ij} = 0, \forall (i, j)$, si consideri la seguente base:

- $\mathcal{T} = \{(2, 1), (2, 3), (3, 4), (5, 2)\}$
- $\mathcal{L} = \{(1, 4), (3, 5)\}$
- $\mathcal{U} = \{(1, 3), (5, 4)\}$

1. Determinare la distribuzione di flusso associata alla base data.

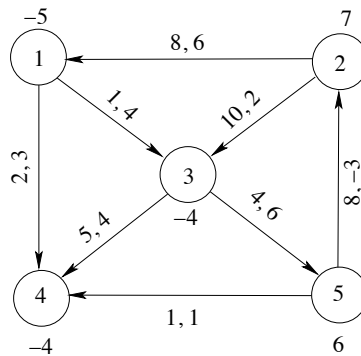


Figura 3.38: Il grafo dell'Esercizio 3.5.2

2. Risolvere il problema di flusso di costo minimo a partire dalla soluzione calcolata al punto 1.
3. Si consideri ora il problema non capacitato e la base $\mathcal{T}^1 = \mathcal{T}, \mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{(1, 3), (5, 4)\}$
 - (a) Quale sarebbe, in questo caso, la soluzione ottima?
 - (b) Quale, invece, se il coefficiente di costo c_{52} assumesse il valore -9 ?

◇

ESERCIZIO 3.5.3 ■ E' assegnata la rete di flusso capacitata riportata nella figura seguente

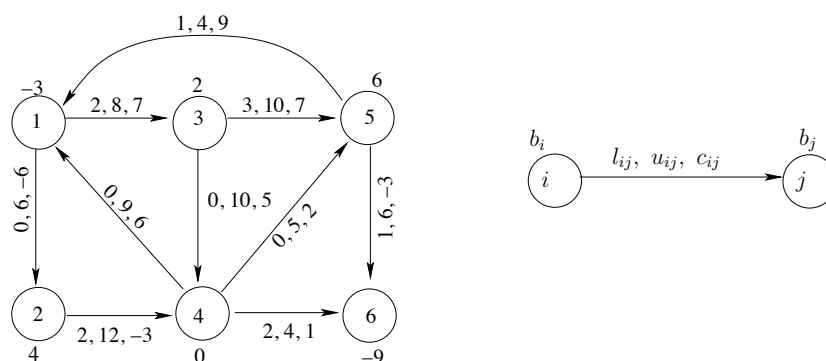


Figura 3.39: Il grafo dell'Esercizio 3.5.3

Determinare la distribuzione di flusso a costo minimo a partire dalla base:

$$\mathcal{T} = \{(2, 4), (3, 4), (4, 1), (4, 5), (4, 6)\}$$

$$\mathcal{L} = \{(1, 2), (1, 3), (3, 5)\}$$

$$\mathcal{U} = \{(5, 1), (5, 6)\}$$

◇

Capitolo 4

Il Problema del Massimo Flusso

Per l'applicazione dell'algoritmo di Ford e Fulkerson per il problema del massimo flusso, faremo utilizzo di una tabella che ha $m + 2$ colonne, se m è il numero di nodi del grafo. Una riga h di tale tabella indica un'iterazione della procedura di ricerca di un cammino aumentante; in particolare indica l'operazione di propagazione delle etichette a partire dal generico nodo i . Tale riga è composta come di seguito descritto:

1. nella prima colonna è riportato il nodo i ;
2. nell'ultima colonna lo stato della lista dei nodi etichettati fino a quell'iterazione;
3. le colonne dalla seconda alla penultima, una per ogni nodo del grafo, rappresentano le etichette dei nodi j adiacenti ad i che è possibile etichettare;
4. se all'iterazione h dal nodo i non è possibile etichettare nessun nodo ad esso adiacente, le colonne dalla seconda alla penultima sono vuote;

Va ricordato, infine, che l'algoritmo di F&F non specifica come effettuare la visita del grafo per la ricerca dei cammini aumentanti e, quindi, come gestire l'inserimento e l'estrazione dei nodi dalla lista Q . Per effettuare una visita in *ampiezza*, Q è una coda ed è gestita in modalità **FIFO**. Per ottenere una visita in *profondità* bisogna, invece, gestire Q come una pila (**LIFO**). In entrambi i casi useremo la seguente convenzione: se dobbiamo inserire in Q l'insieme dei nodi adiacenti al nodo i , diciamo $j_1 < j_2 < \dots < j_k$, faremo in modo che essi saranno estratti in ordine di indice crescente.

4.1 Esercizi Svolti

ESERCIZIO 4.1.1. Data la rete di flusso di seguito riportata, dove le etichette sugli archi rappresentano nell'ordine la capacità ed il valore di flusso, si chiede di:

1. verificare l'ammissibilità della distribuzione di flusso assegnata;
2. determinare il massimo flusso che è possibile inviare dalla sorgente s al terminale t mediante l'Algoritmo di Ford & Fulkerson
3. determinare un taglio $s - t$ di capacità minima;
4. come si ripercuote l'incremento della capacità dell'arco $(2, 3)$ sulla soluzione ottima precedentemente determinata? Come, invece, l'incremento della capacità dell'arco $(5, t)$? Motivare le risposte.

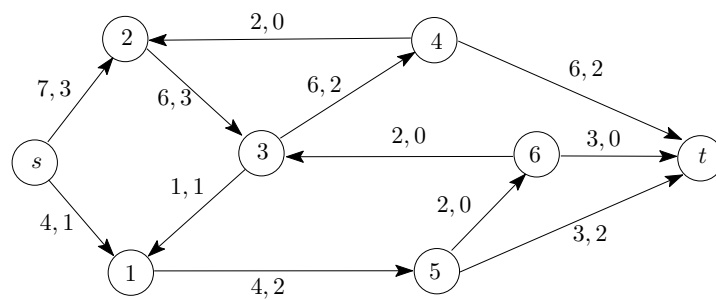


Figura 4.1: La rete di flusso dell'esercizio 4.1

Soluzione – La distribuzione di flusso è ammissibile. Si ha infatti:

$$f_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall (i, j) \in G$$

sono inoltre verificate le equazioni di continuità sui nodi

$$f_{23} - f_{s2} - f_{42} = 0$$

$$f_{31} + f_{34} - f_{23} - f_{62} = 0$$

$$f_{42} + f_{4t} - f_{34} = 0$$

$$f_{56} + f_{5t} - f_{15} = 0$$

$$f_{63} + f_{6t} - f_{56} = 0$$

Utilizziamo la visita in profondità. $v_0 = 4, \Delta V = 0$

Terza iterazione

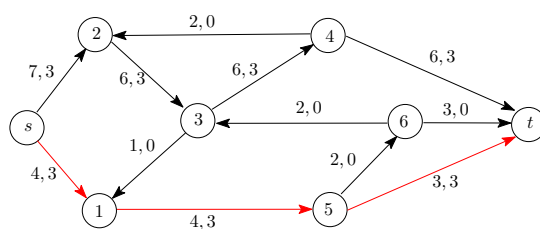


Figura 4.3: La rete di flusso dell'esercizio 4.1 all'inizio della terza iterazione

nodo corrente	s	1	2	3	4	5	6	t	Q
—	[0, ∞]								{s}
s	[+s, 1] [+s, 4]								{1, 2}
1	[+1, 1]								{5, 2}
5	[+5, 1]								{6, 2}
6	[+6, 1]								{t, 2}
cammino aumentante	$s \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow t, \hat{\delta} = 1, \Delta V = 3$								

Quarta iterazione

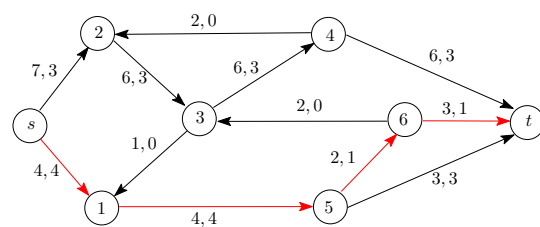


Figura 4.4: La rete di flusso dell'esercizio 4.1 all'inizio della quarta iterazione

<i>nodo corrente</i>	<i>s</i>	1	2	3	4	5	6	<i>t</i>	<i>Q</i>
—	[0, ∞]								{ <i>s</i> }
s			[+ <i>s</i> , 4]						{2}
2				[+2, 3]					{3}
3					[+3, 3]				{4}
4								[+4, 3]	{ <i>t</i> }
cammino aumentante	<i>s</i> → 2 → 3 → 4 → <i>t</i> , $\hat{\delta} = 3, \Delta V = 6$								

Quinta iterazione

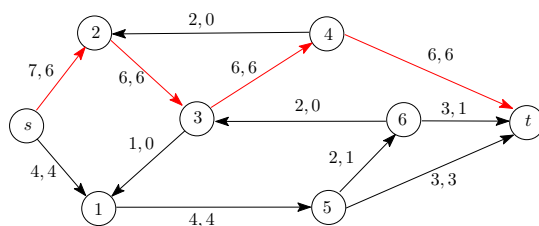


Figura 4.5: La rete di flusso dell'esercizio 4.1 all'inizio della quinta iterazione

nodo corrente	s	1	2	3	4	5	6	t	Q
—	$[0, \infty]$								$\{s\}$
s			$[+s, 1]$						$\{2\}$
2				$\{\emptyset\}$					

Non esistono più cammini aumentanti: la distribuzione di flusso di figura (4.5) è massima, con valore $v_{\max} = v_0 + \Delta V = 10$. Il taglio di capacità minima è

$$W^* = \{s, 2\}, \quad \bar{W}^* = V \setminus W^*$$

ed inoltre vale

$$V_{\max} = c(W^*, \bar{W}^*) = u_{s1} + u_{23} = 4 + 6 = 10$$

Poichè l'arco $(2, 3)$ è un arco in avanti del taglio di capacità minima, l'incremento della sua capacità è una condizione necessaria ad incrementare il valore di v_{\max} , ma non sufficiente perché è possibile che nella rete sia presente un altro taglio la cui capacità vale 10, come ad esempio il taglio $W^1 = \{s, 1, 2, 3\}$. Viceversa l'incremento della capacità dell'arco $(5, t)$ non essendo un arco in avanti del taglio di capacità minima, non ha alcuna influenza sul valore ottimo del massimo flusso.

◇

4.2 Esercizi non svolti

ESERCIZIO 4.2.1 ■ E' dato il problema di massimo flusso definito sul grafo orientato, con 8 nodi ($\{s, 1, 2, 3, 4, 5, 6, t\}$) e 14 archi, di seguito rappresentato. Le etichette sugli archi rappresentano, nell'ordine, la capacità ed il flusso corrente sul quell'arco.

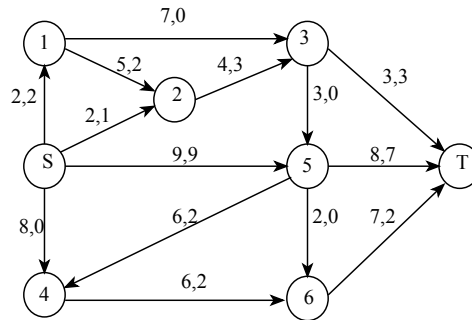


Figura 4.6: Il grafo dell'Esercizio 4.2.1

1. Si consideri il taglio $W = \{s, 1, 2, 4\}$, $\bar{W} = \{5, 6, t\}$. Quanto vale il flusso netto che attraversa il taglio?
2. Rispetto al taglio (W, \bar{W}) gli archi $(1,2)$ e $(6,4)$ sono non saturi e l'arco $(5,4)$ è non scarico. Tale condizione è sufficiente a garantire che il flusso corrente non è quello ottimo?
3. Applicando l'algoritmo di Ford & Fulkerson, determinare il massimo flusso ed il taglio di capacità minima.

◇

ESERCIZIO 4.2.2 ■ Nella rete di flusso di seguito rappresentata le etichette su ciascun arco indicano la capacità ed il flusso corrente sull'arco, mentre i nodi 1 e 10 sono, rispettivamente, la sorgente ed il terminale

1. Si considerino i tagli $W_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\bar{W}_1 = \{6, 7, 8, 9, 10\}$ e $W_2 = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$, $\bar{W}_2 = \{5, 9, 10\}$. Siano v_1 e v_2 i flussi netti che attraversano rispettivamente (W_1, \bar{W}_1) e (W_2, \bar{W}_2) , verificare che $v_1 = v_2$.
2. Determinare un estremo superiore sul numero di cammini aumentanti che sono presenti nella rete assegnata.

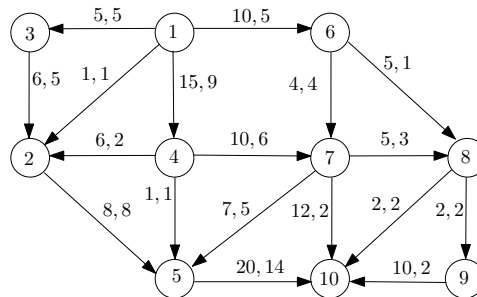


Figura 4.7: Il grafo dell'Esercizio 4.2.2

3. Determinare il massimo flusso ed il taglio di capacità minima mediante l'algoritmo di Ford e Fulkerson.

◇

ESERCIZIO 4.2.3 ■ Nella rete di flusso di seguito rappresentata le etichette su ciascun arco indicano, rispettivamente, la capacità ed il flusso corrente.

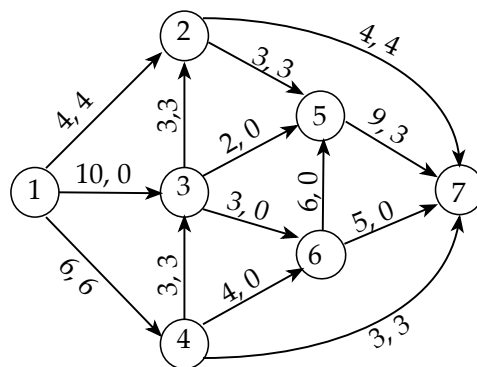


Figura 4.8: Il grafo dell'Esercizio 4.2.3

1. Verificare che la distribuzione corrente di flusso è ammissibile e calcolare il valore di v .
2. Considerato un generico taglio W, \bar{W} è noto che vale la relazione $C(W^*, \bar{W}^*) \leq C(W, \bar{W})$, dove (W^*, \bar{W}^*) è il taglio di capacità minima. Osservando la rete e senza enumerare tutti i possibili tagli, determinare un estremo inferiore LB su $C(W^*, \bar{W}^*)$. La risposta $LB = 0$ non vale.
3. Applicando l'algoritmo di Ford&Fulkerson, determinare il valore del massimo flusso ed il taglio di capacità minima.

◇

Capitolo 5

Programmazione Lineare Intera

5.1 Esercizi svolti

ESERCIZIO 5.1.1. Risolvere il seguente problema di *PLI*

$$\begin{aligned} \min \quad & z(x) = -3x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 - 4x_2 \leq 3 \\ & 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ intere} \end{aligned}$$

Soluzione – Algoritmo Branch and Bound

Inizializzazione

$$\mathcal{Q} = \{S_0\}, U = +\infty, \hat{x} = \perp$$

Iterazione 1

Estraiano dalla lista dei sottoproblemi aperti S_0 e risolviamo il suo rilassato lineare (Figura 5.1). Si ha $x_{P_0}^* = (3, 3/2)^\top$, $L_0 = -6$. La soluzione ottima di P_0 non è intera. Generiamo due nuovi sottoproblemi operando un branching su x_2 .

$$1. S_1 = S_0 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leq 1\}$$

$$2. S_2 = S_0 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 2\}$$

$$\mathcal{Q} = \{S_1, S_2\}$$

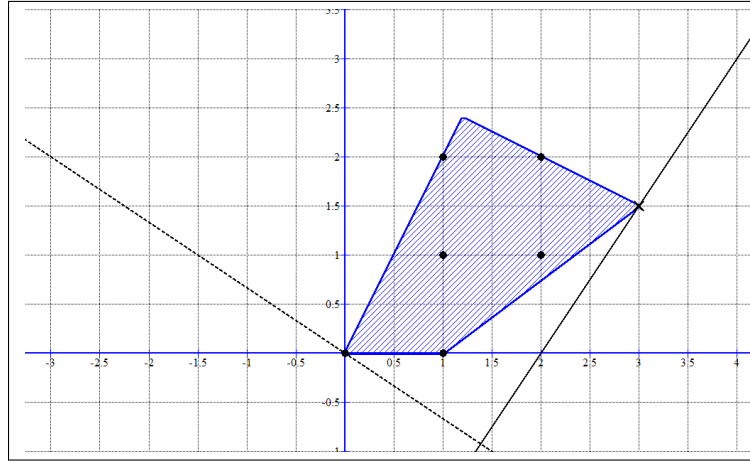


Figura 5.1: Regione ammissibile di P_0 e soluzione ottima $x_{P_0}^*$

Iterazione 2

Estraiamo dalla lista dei sottoproblemi aperti S_1 e risolviamo il suo rilassato lineare (Figura 5.2) Si ha $x_{P_1}^* = (7/3, 1)^\top$, $L_1 = -5$. La soluzione ottima di PL1 non è intera.

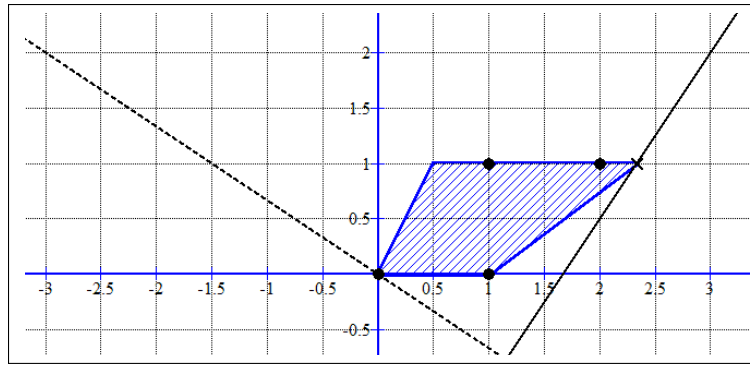


Figura 5.2: Regione ammissibile di P_1 e soluzione ottima $x_{P_1}^*$

Generiamo due nuovi sottoproblemi operando un branching su x_1 .

1. $S_3 = S_1 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq 2\}$

2. $S_4 = S_1 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 3\}$

$$\mathcal{Q} = \{S_2, S_3, S_4\}$$

Iterazione 3

Estraiamo dalla lista dei sottoproblemi aperti S_3 e risolviamo il suo rilassato lineare (Figura 5.3). Si ha $x_{P_3}^* = (2, 3/4)^\top$, $L_3 = -9/2$. La soluzione ottima di P_3 non è intera. Generiamo due nuovi sottoproblemi operando un branching su x_2 .

1. $S_5 = S_3 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leq 0\}$

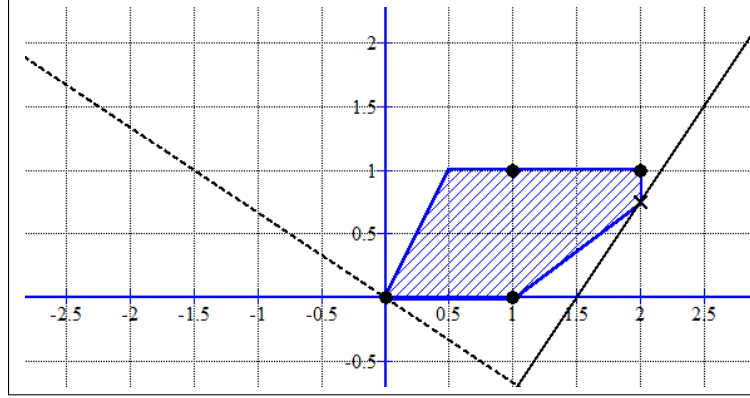


Figura 5.3: Regione ammissibile di P_3 e soluzione ottima $x_{P_3}^*$

$$2. S_6 = S_3 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 1\}$$

$$\mathcal{Q} = \{S_2, S_4, S_5, S_6\}$$

Iterazione 4

Estraiamo dalla lista dei sottoproblemi aperti S_5 e risolviamo il suo rilassato lineare (Figura 5.4).

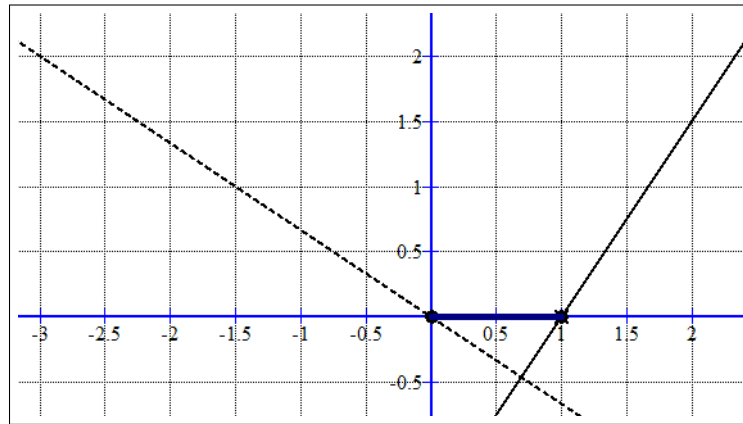


Figura 5.4: Regione ammissibile di P_5 e soluzione ottima $x_{P_5}^*$

Si ha $x_{P_5}^* = (1, 0)^\top$, $L_5 = -3$. La soluzione ottima di PL5 è intera. Aggiorniamo l'ottimo corrente

$U = -3$, $\hat{x} = (1, 0)^\top$ e chiudiamo il problema S_5 .

$$\mathcal{Q} = \{S_2, S_4, S_6\}$$

Iterazione 5

Estraiamo dalla lista dei sottoproblemi aperti S_6 e risolviamo il suo rilassato lineare (Figura 5.5).

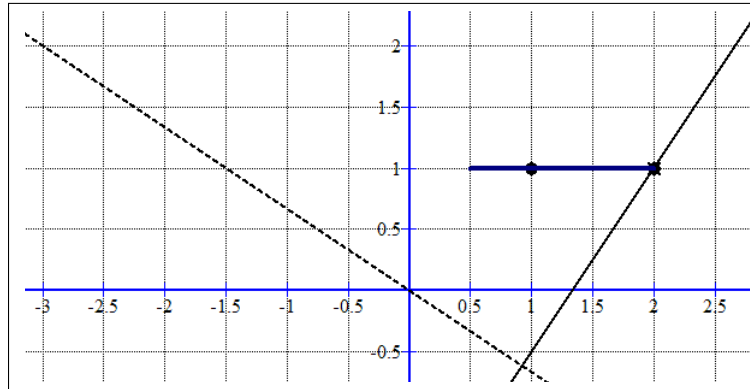


Figura 5.5: Regione ammissibile di P_6 e soluzione ottima $x_{P_6}^*$

Si ha $x_{P_6}^* = (2, 1)^\top$, $L_6 = -4$. La soluzione ottima di P_6 è intera ed essendo $L_6 < U$ aggiorniamo l'ottimo corrente

$U = -4$, $\hat{x} = (2, 1)^\top$ e chiudiamo il problema S_6 .

$$\mathcal{Q} = \{S_2, S_4\}$$

Iterazione 6

Estraiano dalla lista dei sottoproblemi aperti S_4 . S_4 risulta inammissibile e quindi si può chiudere.

$$\mathcal{Q} = \{S_2\}$$

Iterazione 7

Estraiano dalla lista dei sottoproblemi aperti S_2 e risolviamo il suo rilassato lineare (Figura 5.6) Si ha $x_{P_2}^* = (2, 2)^\top$, $L_2 = -2$. La soluzione ottima di P_2 è intera ma $L_2 > U$

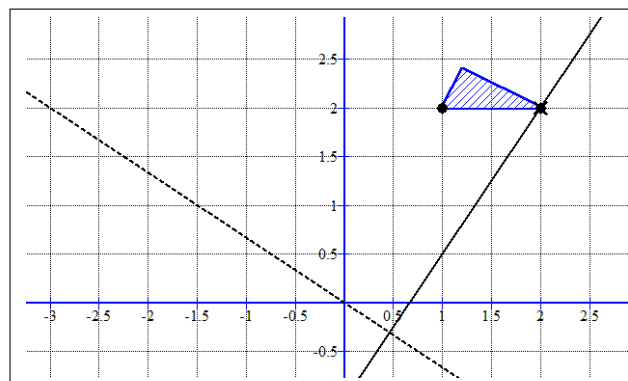


Figura 5.6: Regione ammissibile di P_2 e soluzione ottima $x_{P_2}^*$

e quindi non aggiorniamo l'ottimo corrente. Chiudiamo il problema S_2 , $\mathcal{Q} = \emptyset$ e l'algoritmo si arresta fornendo la soluzione ottima

$$x_{PLI}^* = \hat{x} = (2, 1)^\top$$

$$z_{PLI}^* = U = -4$$

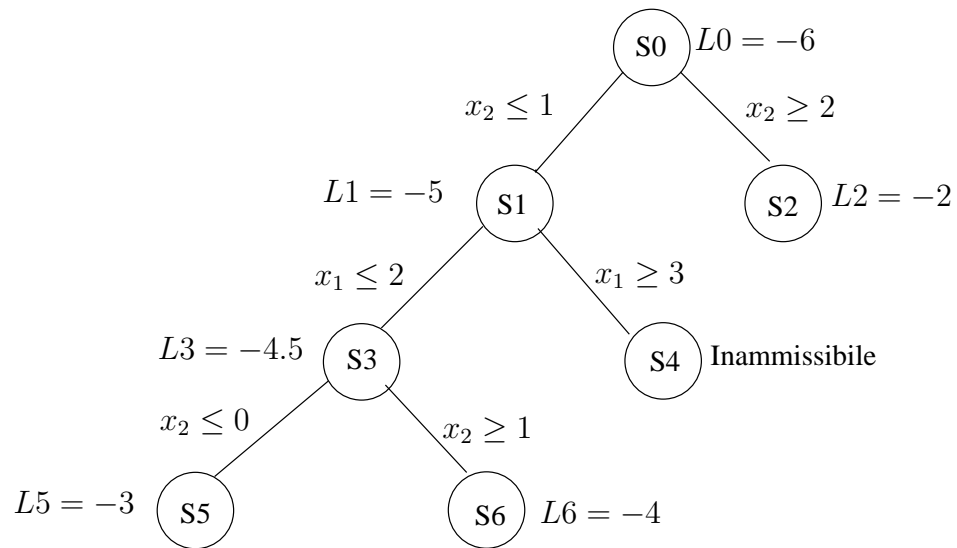


Figura 5.7: Albero dei Sottoproblemi dell'Esercizio 5.1.1

◇

ESERCIZIO 5.1.2. Risolvere il seguente problema di *PLI*

$$\begin{aligned} \max \quad z(x) = \quad & x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ & 2x_2 \leq 7 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ intere} \end{aligned}$$

Soluzione – Algoritmo Branch and Bound

Applichiamo l'algoritmo al problema di massimo (in modo equivalente si può trasformare il problema in un problema di minimo) ricordando che questa volta la soluzione dei rilassati lineari dei vari sottoproblemi S_i forniscono Upper Bound sul valore ottimo (incognito) del problema intero e che il valore delle soluzioni ammissibili del problema intero sono un Lower Bound.

Inizializzazione

$$\mathcal{Q} = \{S_0\}, L = -\infty, \hat{x} = \perp$$

Iterazione 1

Estraia dalla lista dei sottoproblemi aperti S_0 e risolviamo il suo rilassato lineare (Figura 5.8). Si ha $x_{P_0}^* = (15/4, 7/2)^\top$, $U_0 = 43/4 = 10.75$. La soluzione ottima di P_0

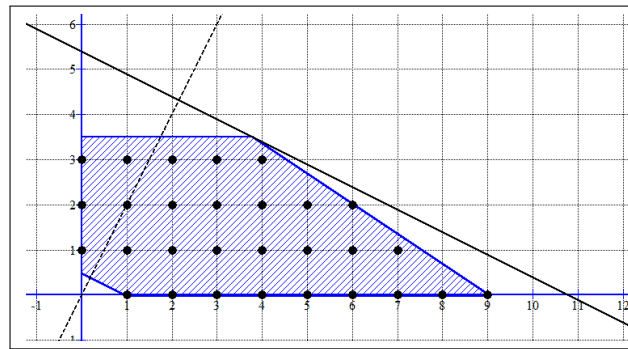


Figura 5.8: Regione ammissibile di PL_0 e soluzione ottima $x_{P_0}^*$.

non è intera. Generiamo due nuovi sottoproblemi operando un branching su x_2 .

$$1. S_1 = S_0 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leq 3\}$$

$$2. S_2 = S_0 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq 4\}$$

$$\mathcal{Q} = \{S_1, S_2\}$$

Iterazione 2

Estraiano dalla lista dei sottoproblemi aperti S_1 e risolviamo il suo rilassato lineare (Figura ??) Si ha $x_{P_1}^* = (9/2, 3)^\top$, $U_1 = 21/2$. La soluzione ottima di P_1 non è intera.

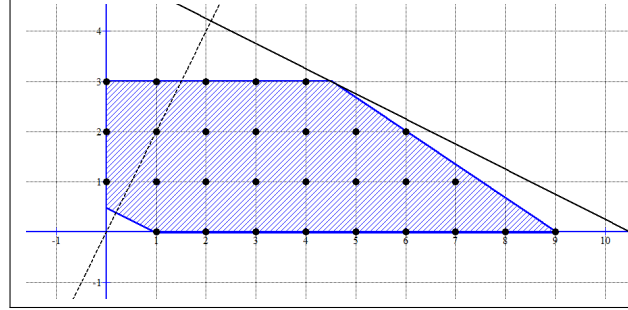


Figura 5.9: Regione ammissibile di P_1 e soluzione ottima $x_{P_1}^*$

Generiamo due nuovi sottoproblemi operando un branching su x_1 .

1. $S_3 = S_1 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq 4\}$
2. $S_4 = S_1 \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 5\}$

$$\mathcal{Q} = \{S_2, S_3, S_4\}$$

Iterazione 3

Estraiano dalla lista dei sottoproblemi aperti S_3 e risolviamo il suo rilassato lineare (Figura 5.10). Si ha $x_{P_3}^* = (4, 3)^\top$, $U_3 = 10$. La soluzione ottima di P_3 è intera. Aggiorniamo l'ottimo corrente

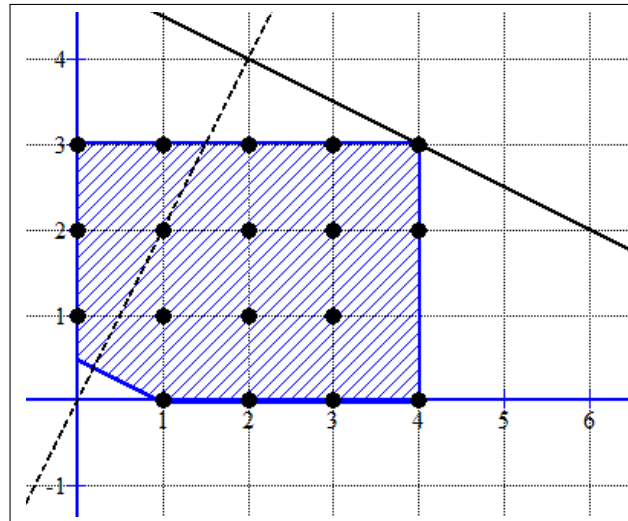


Figura 5.10: Regione ammissibile di P_3 e soluzione ottima $x_{P_3}^*$

$L = 10$, $\hat{x} = (4, 3)^\top$ e chiudiamo il sottoproblema S_3 $\mathcal{L} = \{S_2, S_4\}$

Iterazione 4

Notiamo che $U_0 - L = 0.75 < 1$. Quindi possiamo chiudere, senza esaminarli, i sottoproblemi S_2 ed S_4 perché sono dominati dall'ottimo corrente (in realtà S_2 è inammissibile). Nella migliore delle ipotesi le soluzioni degli eventuali sottoproblemi figli del sottoproblema S_4 non possono essere migliori dell'ottimo corrente, essendo l'upper bound globale pari a 10.75.

Pertanto $\mathcal{Q} = \emptyset$ e l'algoritmo si arresta fornendo la soluzione ottima

$$x_{PLI}^* = \hat{x} = (4, 3)^\top$$

$$z_{PLI}^* = L = 10$$

◇

5.2 Esercizi non svolti

ESERCIZIO 5.2.1 ■ Risolvere il problema di PLI,

$$\begin{array}{llll} \max & 3x_1 & + & 4x_2 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq 6 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq 9 \\ & x_1 & , & x_2 & \text{ intere} \end{array}$$

applicando l'algoritmo Branch-and-Bound con le seguenti specifiche: prima separazione fatta sulla variabile x_2 ; esplorazione dell'albero dei sottoproblemi a partire dal sotto-albero destro.

◇

ESERCIZIO 5.2.2 ■ Risolvere mediante l'algoritmo Branch-and-Bound il seguente problema di PLI, esplorando l'albero dei sottoproblemi in profondità.

$$\begin{array}{ll}
\max & x_1 + x_2 \\
& 2x_1 + 2x_2 \leq 15 \\
& 4x_1 - x_2 \geq 15 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \\
& x_1, x_2 \text{ intere}
\end{array}$$

◇

ESERCIZIO 5.2.3 ■ Per il seguente problema di PLI è noto l'albero parziale prodotto dall'algoritmo Branch & Bound

$$\begin{array}{ll}
\max & 2x_1 + 3x_2 \\
& a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i \quad i = 1, \dots, m \\
& 2x_2 \leq 5 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \quad \text{interi}
\end{array}$$

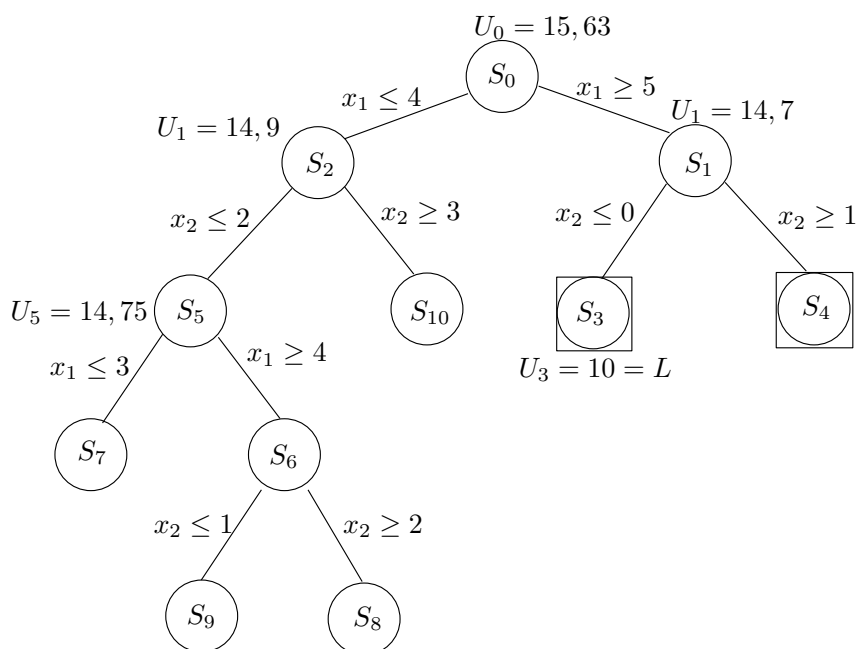


Figura 5.11: Albero di Branch&Bound dell'Esercizio 5.2.3.

Assumendo che i sottoproblemi siano stati esaminati secondo la numerazione di ciascun nodo e che la lista dei sottoproblemi aperta sia $Q = \{S_7, S_8, S_9, S_{10}\}$, si risponda in maniera esaustiva alle seguenti domande:

1. In quale intervallo ricade il valore ottimo z_{PLI}^* prima della risoluzione di S_3 . E dopo?
2. Per quale ragione il sottoproblema S_4 è stato chiuso?
3. E' possibile che la risoluzione del rilassato lineare di S_6 abbia fornito $U_6 = 10,5$?
4. Cosa comporta la risoluzione di S_{10} subito dopo la risoluzione di S_4 ?
5. Si ipotizzi che tra i vincoli $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$ $i = 1, \dots, m$ sia presente il vincolo $5x_1 + 4x_2 \leq 30$ e che nella descrizione di S_7 solo quest'ultimo è rilevante (oltre che i vincoli di branching ovviamente). Completare l'algoritmo e determinare la soluzione ottima di PLI, visitando prima S_7 ed i suoi eventuali figli, quindi nell'ordine, S_8 , S_9 ed S_{10} .

ESERCIZIO 5.2.4 ■ Nella Figura 5.12 sono mostrate la regione ammissibili di un problema di PLI $S_0 = \{x \in \mathbb{Z}^2 | Ax \leq b, x \geq 0\}$ e del suo rilassato lineare $\Omega(P_0) = \{x \in \mathbb{R}^2 | Ax \leq b, x \geq 0\}$ identificate rispettivamente dai punti \blacklozenge e dal politopo di vertici B, C, D, E . Si assuma che la matrice A ed il vettore dei termini noti b siano a componenti intere. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere oppure false.

1. La matrice A è TUM.
2. Esiste almeno una funzione obiettivo $z(x) = c^\top x$ tale che l'algoritmo Branch-and-Bound applicato al problema di PLI

$$\max c^\top x, x \in S_0$$

termina in una sola iterazione. In caso di risposta positiva, fornire anche un esempio della funzione $z(x) = c^\top x$

3. Poiché $|S_0| = 7$, l'algoritmo Branch-and-Bound applicato al problema

$$\max c^\top x, x \in S_0$$

necessita sempre di almeno 7 iterazioni, indipendentemente dalla funzione obiettivo

Dopo aver posto $c^\top = (3, 2)^\top$ si consideri il problema

$$\max c^\top x, x \in S_0$$

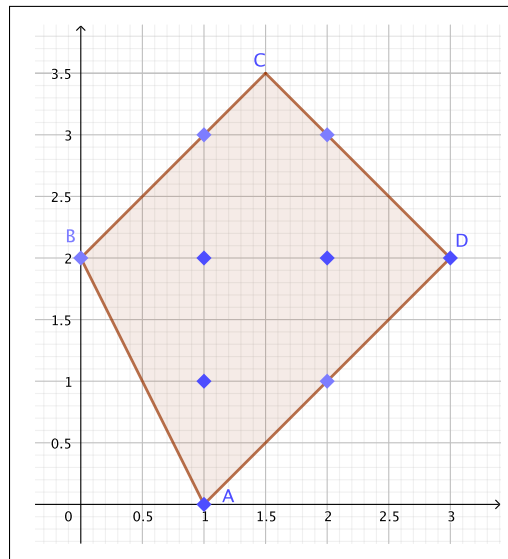


Figura 5.12: Esercizio 5.2.4

e si assuma di conoscere a priori una soluzione ammissibile per PLI. Sia $\bar{x} = (1, 0)$ tale soluzione. Si chiede:

1. in quale intervallo ricade il valore ottimo z_{PLI}^* prima e dopo la risoluzione del rilassato lineare P_0 ?
2. Dopo aver risolto P_0 , l'algoritmo Branch-and-Bound si arresta o prosegue operando un branching? In questo secondo caso:
 - (a) quali sono le espressioni delle regioni ammissibili dei sottoproblemi S_1 e S_2 ?
 - (b) è possibile stabilire in quale delle due sottoregioni ricadrà la soluzione ottima di PLI?

ESERCIZIO 5.2.5 ■ Per un problema di Programmazione Lineare Intera (S_0, c) in forma di **minimo**, è noto l'albero parziale dei sottoproblemi, generati applicando l'algoritmo Branch-and-Bound. I sottoproblemi sono stati analizzati in ordine lessicografico crescente degli indici dei corrispondenti nodi, ovvero: $S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$. Rispondere **nell'ordine** alle seguenti domande.

1. Per quale motivo il sottoproblema S_2 è stato chiuso?
2. Quale è l'intervallo di incertezza in cui ricade z_{PLI}^* prima e dopo la risoluzione di S_3 ?
3. Quale è l'intervallo di incertezza in cui ricade z_{PLI}^* prima e dopo la risoluzione di S_5 ?

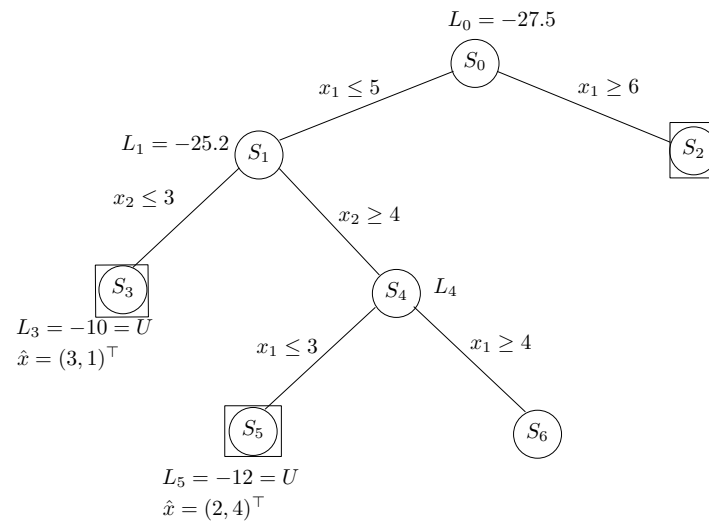


Figura 5.13: Esercizio 5.2.5

4. Se S_4 è stato separato, in quale range ricade il valore di L_4 ?
5. Completare la risoluzione del problema di PLI assumendo che la formulazione di S_6 (unico sottoproblema aperto) sia:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & z(x) = -2x_1 - x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ & x_1 \leq 5 \\ & x_2 \geq 4 \\ & x_1 \geq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \quad \text{intere} \end{array} \right.$$

...

◇