Test Person
Email: testperson@example.com
Classe: E1a
Insegnante: Professor Teacher

2021-01-12

Laboratorio di Ricerca Operativa-III Appello Sess. Estiva-Prova Scritta

Conteggio parole: 432

	Prova Scritta di Laboratorio di Ricerca Operativa del 14 Settembre 2020
Nome	
Cognome	
Matricola	

Esercizio 1

Esercizio 1

Si consideri il problema di Programmazione Lineare (P)

$$\begin{array}{llllllllll} \min & 2x_1 & + & 6x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & & \\ & -2x_1 & + & 3x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & \geq & -1 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

ed i punti $x_A = (0,0,2,1)^\top$ e $x_B = (0,\frac{1}{6},0,\frac{1}{2})^\top$

1) Stabilire se x_A e x_B sono soluzioni ammissibili di base

Risposta Riportando i punti in forma standard si ha (x_A)_FS=(00000)^T, risulta perciò che x_A è ammissibile ma non di base

2) Risolvere *P* utilizzando il metodo del simplesso a due fasi. Riportare nella tabella sottostante il tableau ottimo della seconda fase

*x**	
*z**	

3. Formulare il problema Duale e risolverlo mediante la teoria della Dualità. (*riportare le espressioni della funzione obiettivo e dei vincoli del problema duale nella tabella sottostante, aggiungendo le righe necessarie)*

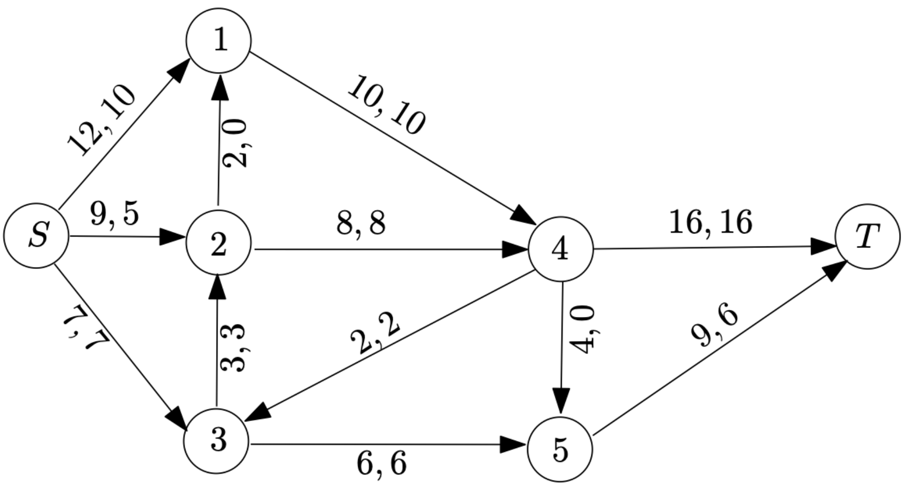
funzione obiettivo	$y_1 + y_2$
vincolo 1	

*y**	
*w**	

5) Cosa si può dire delle soluzioni ottime di P e D?

Esercizio 2

E' assegnato il problema del massimo flusso definito sul grafo *G* mostrato in figura, in cui le etichette su ciascun arco $(i,\ j)$ rappresentano, rispettivamente, la capacità dell'arco b_{ij} ed il flusso corrente f_{ij} che lo attraversa.



1) Calcolare il valore di flusso V_0trasferito da S a T mediante f

$v_o =$	

2) Considerato il taglio S-T definito da $W = \{S, 1, 2\}, \ \ \bar{W} = \{3, 4, 5, T\}$calcolare:

a) il valore del flusso netto *v* che attraversa il taglio

$v =$	

b) il valore della capacità del taglio

$C(W, \bar{W}) =$	

N.B.: ***Riportare non solo i valori numerici di*** v ***e di*** $C(W, \bar{W})$***ma anche le corrispondenti espressioni in termini di*** f_{ij} ***e*** b_{ij}

3) Stabilire, se esiste, una relazione d'ordine tra $v, \ v_0, \ v^*, C(W\bar{W})$ motivando la risposta.

$v_0 \ = v \leq W^* \ \leq C(W, \bar{W})$

3) Effettuare un'iterazione dell'Algoritmo di Ford-Fulkerson, riportando le etichette nella tabella seguente (aggiungere eventualmente ulteriori righe)

	S	1	2	3	4	5	T	L
	- , $+\infty$							{S}

4) Indicare il cammino aumentante *P* determinato al punto 3), (***utilizzare la notazione i --> j se l'arco (i,j) è un arco di P+; i <-- j se l'arco (j,i) è un arco di P***), il relativo incremento di flusso Δ

	$\Delta =$	$v_0 \ + \Delta =$

4) Dopo aver effettuato l'aumentazione di flusso lungo il cammino *P*, il flusso trasferito da S a T è massimo? In caso di risposta positiva indicare il taglio di capacità minima.

Il flusso è massimo?

(***Riempire i campi sottostanti solo in caso di risposta positiva***)

*v**=

$W^* =$	$\bar{W}^* =$
$C(W^*, \bar{W}^*) =$	

Test Person

Lab RO. 15/09/2020

$$\min \quad 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4$$
$$-2x_1 + 3x_2 + x_4 = 1$$
$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \geq -1$$
$$x_1, \dots x_4 \geq 0$$

$x_A = (0,0,2,1)^T \qquad x_B = (0, 1/6, 0, 1/2)^T$

$$\min \quad 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4$$
$$-2x_1 + 3x_2 + x_4 = 1$$
$$-x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1$$
$$x_1 \dots x_5 \geq 0$$

$(x_A)_{FS} = (0, 0, 2, 1, 2)^T$ ammissibile non di base.

$(x_B)_{FS} = (0, 1/6, 0, 1/2, 4/3)^T$ " " " ".

Prima fase.

$$\min \quad \rho = \alpha$$
$$-2x_1 + 3x_2 + x_4 + \alpha = 1$$
$$-x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 1$$
$$x_1 \dots x_5 \geq 0, \ \alpha \geq 0$$

Nota: È sufficiente una sola variabile artificiale nel primo vincolo.

-2	3	0	1	0	1	1
-1	-1	-1	1	1	0	1
2	-3	0	-1	0	0	-1

Pivot in $(1,2)$: entra in base x_2, esce dalla base α

$-2/3$	1	0	$1/3$	0	$1/3$	$1/3$
$-5/3$	0	-1	$4/3$	1	$+1/3$	$4/3$
0	0	0	0	0	1	0

$\rho^* = 0 \Rightarrow P$ ammissibile (lo sapevamo!)

$\{x_2, x_5\}$ è una base ammissibile per P

Seconda Fase

$B^{-1}N$

$-2/3$	1	0	$1/3$	0	$1/3$
$-5/3$	0	-1	$4/3$	1	$5/3$

$\mathcal{B} = \{x_2, x_5\}$

$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$N = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ +1 & 3 \end{bmatrix}$

$B^{-1}N = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 & 0 & 1/3 \\ -5/3 & -1 & 4/3 \end{bmatrix}$

$$\hat{c}_N^T = [\hat{c}_1, \hat{c}_3, \hat{c}_4] = [c_1, c_3, c_4] - c_B^T B^{-1}N =$$
$$= [c_1, c_3, c_4] - [c_2, c_5]\, B^{-1}N =$$
$$= [2, 1, 2] - [6, 0]\, B^{-1}N =$$
$$= [2, 1, 2] - [-4\ \ 0,\ 2] = [6,\ 1,\ 0]$$

$2/3$	1	0	$1/3$	0	$1/3$
$-5/3$	0	-1	$4/3$	1	$4/3$
6	0	1	0	0	-2

stop soluzione ottima.

$(x^*)' = (0, 1/3, 0, 0, 4/3)^T \qquad z^* = 2$ ③

P presenta ottimi multipli $\hat{c}_4 = 0$ e $x_4 \in N$

2/3	1	0	1/3	0	1/3
-5/3	0	-1	4/3	1	4/3
6	0	1	0	0	-2

Portando in base x_4 al posto di x_2 si ottiene un'altra base ottima. (degenere)

2	3	0	1	0	1
-13/3	-4/3	-1	0	1	0
6	0	1	0	0	-2

$(x^*)'' = (0, 0, 0, 1, 0)$

$(x^*) = \lambda (x^*)' + (1-\lambda)(x^*)'' \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$

Duale della F.S.

$\max \; y_1 + y_2$

$-2y_1 - y_2 \leq 2$

$3y_1 - y_2 \leq 6 \Rightarrow$

$-y_2 \leq 1$

$y_1 + y_2 \leq 2$

$y_2 \leq 0$

1) complementarietà usando $(x^*)'$

$x_2^* > 0 \Rightarrow 3y_1 - y_2 = 6$

$x_5^* > 0 \Rightarrow y_2 = 0$

$\Rightarrow y_1 = 2 \;,\; y_2 = 0$

degenere! anche il vincolo 4 è soddisfatto come uguaglianza.

2) complementarietà usando $(x^*)''$

$x_4^* > 0 \qquad y_1 + y_2 = 2$

$y_2 = k \qquad y_1 = 2 - k$

sostituendo nei vincoli di D

$-4 + 2k - k \leq 2$

$6 - 3k - k \leq 6$

$-k \leq 1$

$+2 - k + k \leq 2$

$k \leq 0$

$k \leq 6$

$-4k \leq 0$

$-k \leq 1$

$2 \leq 2$

$k \leq 0$

$k \leq 6$

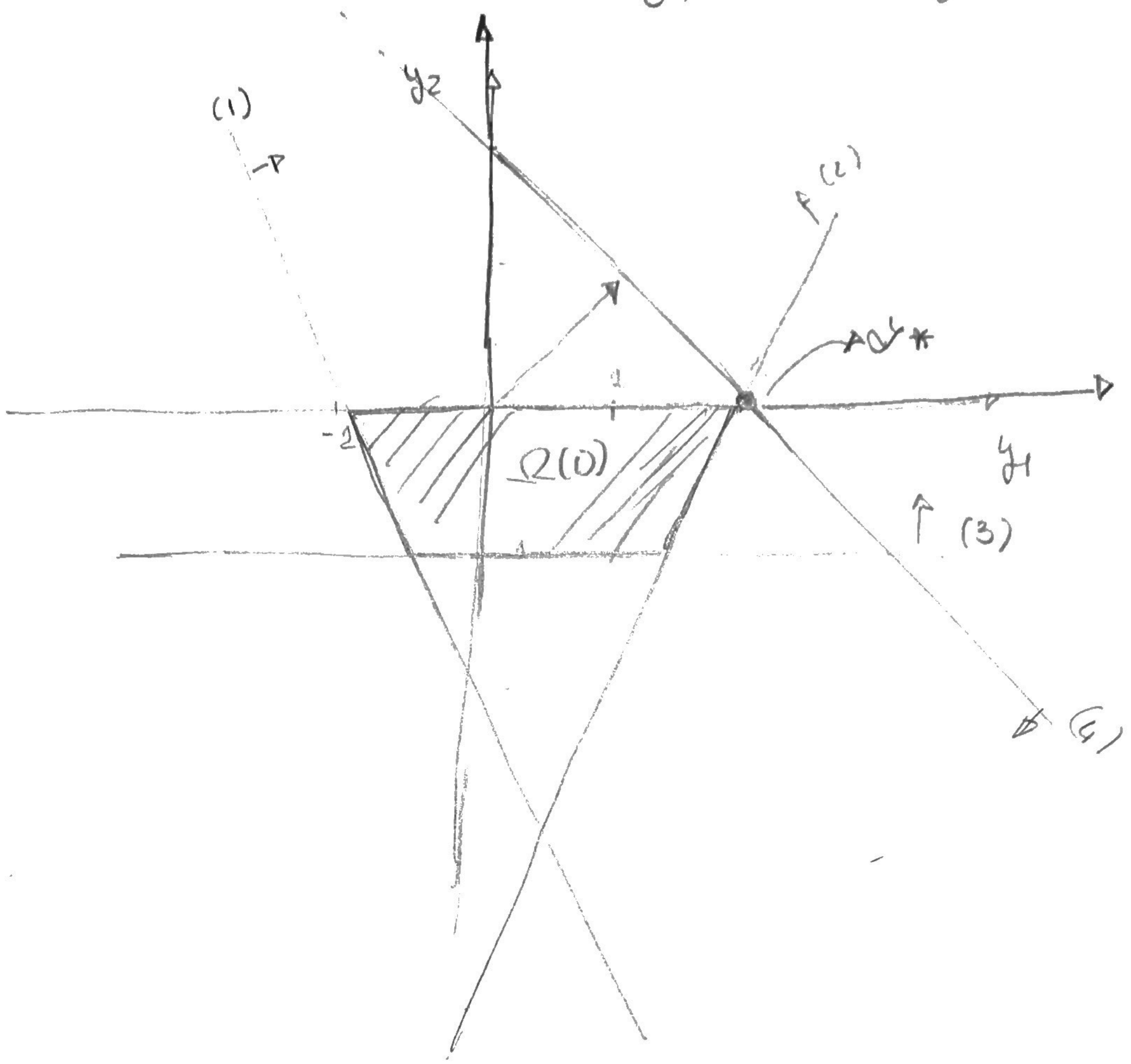
$k \geq 0$

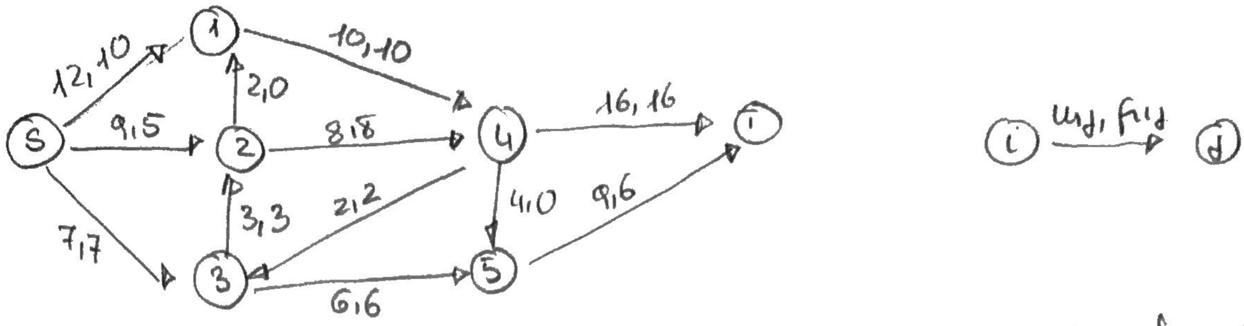
$k \geq -1$

$k \leq 0$

$\boxed{k = 0}$

$y_1 = 2 \qquad y_2 = 0$





1) Calcolare il valore del flusso V_0 trasferito da S a T mediante f

$$V_0 = \sum_{j|(S,j)\in E} f_{Sj} = f_{S1} + f_{S2} + f_{S3} = 10+5+7 = 22 = \quad (a)$$

$$= \sum_{i|(i,T)\in E} f_{iT} = f_{4T} + f_{5T} = 16+6 = 22 \quad (b)$$

Queste espressioni sono due casi particolari dell'espressione del flusso netto attraverso un taglio $(W, \bar{W})$

$$V = \sum_{\substack{i\in W\\ j\in\bar{W}}} f_{ij} - \sum_{\substack{i\in\bar{W}\\ j\in W}} f_{ij} \quad (c)$$

nel caso (a) $\quad W = \{S\} \quad \bar{W} = V \setminus \{S\}$

nel caso (b) $\quad W = V\setminus\{T\} \quad \bar{W} = \{T\}$

In entrambi i casi il contributo dato dalla seconda ~~~~ sommatoria è nullo perché S non ha archi entranti (caso a) T non ha archi uscenti (caso b)

2) Considerato il taglio $W = \{S, 1, 2\}$ $\bar{W} = \{3, 4, 5, T\}$ determinare il flusso netto e la capacità

da (c) si ha $\quad V = f_{S3} + f_{24} + f_{14} - f_{32} =$

$$= 7 + 8 + 10 - 3 =$$

$$25 - 3 = 22 = V_0$$

$$C(W, \bar{W}) = \sum_{\substack{i\in W\\ j\in\bar{W}}} u_{ij} = u_{S3} + u_{24} + u_{14} = 7+8+10 = 25$$

3) Relazione tra $V_0, V, C(W, \bar{W})$

$$V_0 = V \le C(W, \bar{W})$$

4)

	S	1	2	3	4	5	T	L
	[-, +∞]							{S}
S		[S+, 1]	[S+, 4]					{1, 2}
1	—							{2}
2				[2-, 3]				{3}
3					[3, 2]			{4}
4						[4+, 2]		{5}
5							[5+, 2]	{T}

$$S \xrightarrow{+\Delta} 2 \xleftarrow{-\Delta} 3 \xleftarrow{-\Delta} 4 \xrightarrow{+\Delta} 5 \xrightarrow{+\Delta} T \qquad \Delta = 2$$

$$V_1 = V_0 + \Delta = 22 + 2 = 24$$

5) Dopo aver effettuato l'aumento di f, il flusso è max?

Il flusso è max se e solo se non esistono in G cammini aumentanti rispetto a f.

	S	1	2	3	4	5	T	L
	[-, +∞]							{S}
S		[S+, 2]	[S+, 2]					{1, 2}
1								{2}
2				[2-, 1]				{3}
3								{∅}

Non esistono cammini aumentanti. La soluzione è quella ottima (7)

$$v^* = 24$$

$$W^* = \{S, 1, 2, 3\} \qquad \bar{W}^* = \{4, 5, T\}$$

$$C(W^*, \bar{W}^*) = \sum_{\substack{i \in W^* \\ j \in \bar{W}^*}} u_{ij} = u_{14} + u_{24} + u_{35} = 10 + 8 + 6 = 24$$

$$f^*_{ij} = u_{ij} \qquad \forall i \in W^*, j \in \bar{W}^*$$

$$f_{ij} = 0 \qquad \forall i \in \bar{W}^*, j \in W^*$$