Esercitazione 5

Lab RO

ESERCIZIO 1

$$P \quad \begin{aligned} \min\ & -3x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1) Stabilire se i punti $x_A = (1/2, 5/2)^T$ $x_B = (0,4)^T$ sono soluzioni ammissibili, di base, ottime.

Forma std di P

$$P_{FS} \quad \begin{aligned} \min\ & -3x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ & 3x_1 - 2x_2 + x_5 = 6 \\ & x_1 \dots x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

$(x_A)_{FS} = (1/2, 5/2, 1, 0, 19/2)^T$ ammissibile, non di base

$(x_B)_{FS} = (0, 4, 0, -2, 14)$ non ammissibile, di base (A_2, A_4, A_5 lin ind), non ottimo

Perché $(x_A)_{FS}$ è non di base, per stabilire se è ottimo usiamo il Teo. di complementarietà. Costruiamo D_{FS}

$$\begin{aligned} \max\ & 4y_1 + 2y_2 + 6y_3 \\ & y_1 - y_2 + 3y_3 \leq -3 \\ & y_1 + y_2 - 2y_3 \leq 2 \\ & y_1 \leq 0 \\ & y_2 \leq 0 \\ & y_3 \leq 0 \end{aligned}$$

Per complementarietà: $x_j \sigma_j = 0 \quad \forall j = 1 \dots n$

$y_i s_i = 0 \quad \forall i = 1 \dots m$

Poiché stiamo usando le FS, le relazioni $y_i s_i = 0$ sono sempre soddisfatte $\forall x \in \Omega(P_{FS}) \Rightarrow$ basta imporre $x_j \sigma_j = 0 \quad \forall j = 1 \dots n$, ovvero:

se $x_j > 0 \Rightarrow \sigma_j = 0$

variabili positive in P $\Rightarrow$ vincoli attivi in D

In corrispondenza di $(x_A)_{FS} = (1/2, 5/2, 1, 0, 19/2)^T$ si ha

$x_1 > 0 \Rightarrow y_1 - y_2 + 3y_3 = -3$ (vincolo 1 in D attivo)

$x_2 > 0 \Rightarrow y_1 + y_2 - 2y_3 = 2$ (vincolo 2 in D attivo)

$x_3 > 0 \Rightarrow y_1 = 0$ (vincolo 3 in D attivo)

$x_5 > 0 \Rightarrow y_3 = 0$ (vincolo 5 in D attivo)

$\Rightarrow -y_2 = -3$

$y_2 = 2$ impossibile.

$\Rightarrow \nexists\, y \in \Omega(D)$ complementare a $(x_A)_{FS} \Rightarrow$

$(x_A)_{FS}$ non ottimo.

2) Risolvere P con algoritmo del simplesso

PFS è già in forma canonica rispetto alla base $B = \{4, 5, 6\}$ formata dalle variabili di slack

$T^{(0)}$

1	1	1	0	0	4
-1	1	0	1	0	2
3	-2	0	0	1	6
-3	2	0	0	0	0

$x_4 = 4,\ x_5 = 2,\ x_6 = 6$

$x_1 = x_2 = 0$

$z = 0$

- Soluzione corrente non ottima: $c_1 < 0$
- $x_1 \to$ in base $(k = 1)$
- $\bar{\delta} = \min\{4/1, 6/3\} = 2 \Rightarrow (h = 3)$ x_6 lascia la base
- Pivot in $(3, 1) = (h, k)$

$T^{(1)}$

0	5/3	1	0	-1/3	2
0	1/3	0	1	1/3	4
1	-2/3	0	0	1/3	2
0	0	0	0	1	6

Stop! soluzione ottima.

$$x^* = (2, 0, 2, 4, 0)^T \qquad z^* = -6$$

Notiamo che $\hat{c}_2 = 0 \Rightarrow \exists$ ottimi multipli.

Un'altra soluzione ottima di base (se esiste), si ottiene portando in base proprio x_2

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 5/3 & 1 & 0 & -1/3 & 2 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1 & 1/3 & 4 \\ 1 & -2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \qquad (x^*)^1 = (2,0,2,4,0)^T$$

- $k = 2$
- $\bar{\delta} = \min\left\{ 2 \cdot \frac{3}{5},\ 4 \cdot \frac{3}{1} \right\} = 6/5 \Rightarrow h = 1$

  $\Rightarrow$ x_3 lascia la base.
- Pivot in $(h,k) = (1,2)$

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 3/5 & 0 & -1/5 & 6/5 \\ 0 & 0 & -1/5 & 1 & 2/5 & 18/5 \\ 1 & 0 & 2/5 & 0 & 1/5 & 14/5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \qquad (x^*)^2 = (14/5, 6/5, 0, 18/5, 0)^T$$

Tutte le soluzioni ottime sono:

$$x^* = \lambda (x^*)^1 + (1-\lambda)(x^*)^2 \qquad 0 \le \lambda \le 1$$

(combinazione convessa di $(x^*)^1$ e $(x^*)^2$

3) Risolvere D -

a) utilizzando $(y^*)^T = c_B^T (B^*)^{-1}$ (TDF)

In P abbiamo trovato due basi ottime

$B_1 = \{3, 4, 1\} \longrightarrow (x^*)^1 = (2, 0, 2, 4, 0)^T$

$B_2 = \{2, 4, 1\} \longrightarrow (x^*)^2 = (14/5, 6/5, 0, 18/5, 0)^T$

Se utilizziamo B_1 $\Rightarrow$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$c_B^T = [c_3, c_4, c_1] = [0, 0, -3]$ $\qquad (y^*)^T = (0, 0, -1)$

$w^* = b^T y^* = -6 = c^T (x^*)^1$

Se utilizziamo B_2

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B_2^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & 0 & -1/5 \\ -1/5 & 1 & 2/5 \\ 2/5 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$c_B^T = [c_2, c_4, c_1] = [2, 0, -3]$ $\qquad (y^*)^T = (0, 0, -1)$

b) Utilizzando il teorema di complementarità

- partendo da $(x^*)^1 = (2, 0, 2, 4, 0)^T$

$x_1^* > 0 \Rightarrow$ vincolo 1 in D attivo $\quad y_1 - y_2 + 3y_3 = -3$

$x_3^* > 0 \Rightarrow$ " 3 " " " $\quad y_1 = 0$

$x_4^* > 0 \Rightarrow$ " 4 " " " $\quad y_2 = 0$

$\Rightarrow y^* = (0, 0, -1)^T$

- partendo da $(x^*)^2 = (14/5, 6/5, 0, 18/5, 0)^T$

$x_1^* > 0 \Rightarrow$ vincolo 1 in D attivo $\quad y_1 - y_2 + 3y_3 = -3$

$x_2^* > 0 \Rightarrow$ " 2 " " " $\quad y_1 + y_2 - 2y_3 = 2$

$x_4^* > 0 \Rightarrow$ " 4 " " " $\quad y_2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 + 3y_3 = -3 \\ y_1 - 2y_3 = 2 \end{cases}$$

$y^* = (0, 0, -1)^T$

Da qui si nota ([redacted] anche nel caso a si nota ma noi non lo abbiamo trattato nella Teoria) che $y^* \in \mathbb{R}^3$ soddisfa come uguaglianze $4 > 3$ vincoli di D $\Rightarrow$ y^* è soluzione ottima degenere!

$\Rightarrow$ P ottimi multipli $\Rightarrow$ D soluzione ottima degenere

Esercitazione 23/11/2020
RO (Lab RO 02/12/2020)

Esercizio 2

$$P \begin{cases} \min\ 9x_1 + x_2 + 5x_3 + 11x_4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

1) Stabilire se $\bar{x} = (4,0,0,3)$ è una sol. amm. di base.

- $\bar{x}$ è ammissibile
- $\bar{x}$ è di base $\iff$ $A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $A_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti.

Poiché $A_1 = -A_4$, $\bar{x}$ non è di base.

2) Risolvere P applicando l'A.S. a due fasi:

Prima Fase

Tableau iniziale del problema P_α.

$T^{(0)}_\alpha$

1	1	-3	-1	1	0	1
3	-1	-1	-3	0	1	3
-4	0	4	4	0	0	-4

$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 3$
$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$
$\rho = 4$

Soluzione corrente non ottima: $\hat{c}_1 < 0 \Rightarrow$ $x_k = x_1$ può entrare in base.

$\bar{\delta} = \min\{1/1,\ 3/3\} = 1$ Indeterminazione $\Rightarrow$ prossima soluzione degenere.

Bland $\Rightarrow$ $h = 1$, α_1 uscirà dalla base.

Pivot in T_{11}

$T_\alpha^{(1)}$

1	1	-3	-1	1	0	1
0	-4	8	0	-3	1	0
0	4	-8	0	4	0	0

$x_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$

$\alpha_1 = 0$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$

$\rho = 0 = \rho^*$

OSSERVAZIONE

a) $\rho^* = 0$, α_2^* in base a valore nullo, ma $\hat{c}_3 < 0$: la condizione $\hat{c}_j \geq 0\ \forall j \in \mathcal{N}$ è condizione sufficiente, ma non necessaria, in caso di soluzioni ottime degeneri.

b) Tra le molteplici basi corrispondenti alla soluzione ottima degenere, ci sarà almeno 1 base tale che $\hat{c}_N \geq 0$

Pivot in $T_{23} = 8$

1	-1/2	0	-1	-1/8	3/8	1
0	-1/2	1	0	-3/8	1/8	0
0	0	0	0	1	1	0

stop Prima Fase.

una base ammissibile per P è la base ottima di P_α $\quad B = \{1, 3\}$

<u>Seconda fase</u>

$B = \{1, 3\}$ $\qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ +3 & -1 \end{bmatrix}$ $\qquad B^{-1}N = \begin{bmatrix} -1/2 & -1 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\hat{c}_N^T = [\hat{c}_2, \hat{c}_4] = [c_2, c_4] - [c_1, c_3]\, B^{-1}N =$$

$$= [1, 11] - [9, 5] \begin{bmatrix} -1/2 & -1 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= [1, 11] - [-7, -9] = [8, 20]$$

$\hat{c}_N \geq 0 \implies$ STOP $\qquad x^* = (1, 0, 0, 0)^T$ è soluzione ottima di P con $c^T x^* = 9$

3) Determinare la soluzione ottima di D.

$$\max\ y_1 + 3y_2$$

DFS

$$y_1 + 3y_2 \leq 9$$
$$y_1 - y_2 \leq 1$$
$$-3y_1 - y_2 \leq 5$$
$$-y_1 - y_2 \cancel{\leq} 11$$

a) Utilizzando il TDF.

$$(y^*)^T = c_B^T (B^*)^{-1}$$

dove $B^* = \{1, 3\}$ $\qquad B^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

$$(B^*)^{-1} = \begin{bmatrix} -1/8 & 3/8 \\ -3/8 & 1/8 \end{bmatrix} \qquad c_B^T = [c_1, c_3] = [9, 5]$$

$$(y^*)^T = (-3, 4) \qquad w^* = b^T y^* = (1, 3)\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 9 = c^T x^*$$

Se utilizziamo la complementarietà $\Rightarrow$

3.a

Per complementarietà

$x_1^* > 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 + 3y_2 = 9$

(tutte le altre relazioni sono soddisfatte essendo $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$)

DFS ammette ∞^1 soluzioni ottime del tipo

$$y(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-3k \\ k \end{bmatrix} \qquad k \in \mathbb{R}.$$

NOTA

$w^* = b^T y(k) = 9 - 3k + 3k = 9 = c^T x^*$

come sempre per soluzioni complementari.

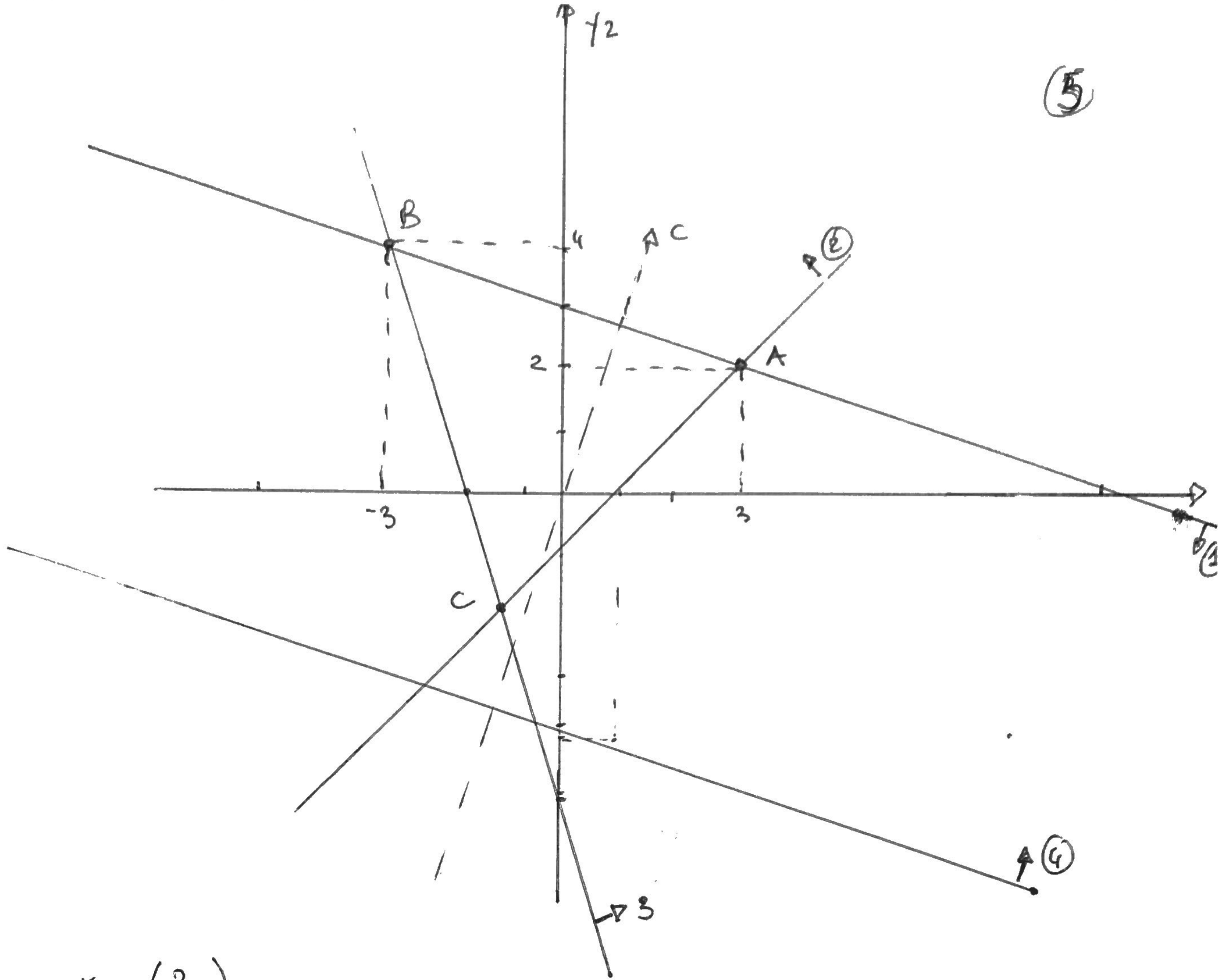
Sono ottimi i punti di $y(k)$ ammissibili per DFS

$$\begin{aligned} 9 - 3k + 3k &\leq 9 && \checkmark \\ 9 - 3k - k &\leq 1 && \Rightarrow \quad k \geq 2. \\ -27 + 9k - k &\leq 5 && \Rightarrow \quad k \leq 4. \\ -9 + 3k - k &\leq 11 && \Rightarrow \quad k \leq 10 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad y(k) \in \Omega(DFS)$ ed è ottimo $\quad 2 \leq k \leq 4$

$$y_A^* = y(2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad y(4) = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = y_B^*$$

$$y^* = \lambda y_A^* + (1-\lambda) y_B^* \qquad 0 \leq \lambda \leq 1.$$



$y_A^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ corrisponde alla base primale $\beta_A = \{1, 2\}$

$y_B^* \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ " " " " $\beta_B = \{1, 3\}$

Poiché $\sigma_4 = 11 + y_1 + 3y_2 > 0 \quad \forall (y_1, y_2) \in \Omega(D)$

e $\sigma_4 x_4 = 0$ in ogni coppia di soluzioni ottime $\Rightarrow x_4^* = 0$ sempre.

ESERCIZIO 3 - Lab RO 02/12/2020

1) Risolvere P
2) Risolvere D

$$P \begin{cases} \max -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 4 \\ x_1 \ldots x_4 \geq 0 \end{cases}$$

1) $P \rightarrow P_{FS}$

$$P_{FS} \begin{cases} -\min \; x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_6 = 4 \\ x_1 \ldots x_6 \geq 0 \end{cases}$$

Nessuna informazione su P (P_{FS}) $\Rightarrow$ I Fase A.S.

$$P_\alpha \begin{cases} \min \; \varrho = \alpha_1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_5 + \alpha_1 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_6 = 4 \\ x_1 \ldots x_6, \alpha_1 \geq 0 \end{cases}$$

NOTA!

Nella costruzione di P_α è possibile sfruttare x_6 come variabile di base del secondo vincolo ed utilizzare una sola variabile artificiale α_1 nel primo vincolo.
Non è sbagliato utilizzare 2 variabili artificiali: sarà necessaria un'iterazione in più della I Fase!

Tableau iniziale per la prima fase.

$$T^{(0)} \quad \begin{array}{cccccc|c|c} 2 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ \hline -2 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -6 \end{array}$$

$\boxed{\text{NOTA}}$

Nella I Fase, i costi ridotti delle variabili fuori base all'iterazione iniziale, si ottengono come $\hat{c}_N^T = -c_B^T A$

It 1

$x_6 = 4 \quad \alpha_1 = 6 \quad \rho = 6$

$x_1 = x_2 = \ldots x_5 = 0$

Condizione di ottimalità non verificata

Entra in base la variabile $k=1$ (x_1)

$\bar{\delta} = \min \left\{ \frac{t_{18}^0}{t_{11}^0}, \frac{t_{28}^0}{t_{21}^0} \right\} = \min \{6/2, 4/1\} = 3$

in corrispondenza di $h = 1$

Uscirà dalla base la variabile che attualmente è in base nel vincolo $h=1$, cioè x_1.

1	1/2	1/2	1/2	-1/2	0	1/2	3	$\bar{T}_1^{(1)} = \bar{T}_1^{(0)} / t_{11}^{(0)}$
0	3/2	-5/2	1/2	1/2	1	-1/2	1	$\bar{T}_2^{(1)} = \bar{T}_2^{(0)} - t_{21}^{(0)} \bar{T}_1^{(1)}$
0	0	0	0	0	0	1	0	$\bar{T}_3^{(1)} = \bar{T}_3^{(0)} - t_{31}^{(0)} \bar{T}_1^{(1)}$

- $\rho^* = 0 \Rightarrow$ P. (P_{FS}) è ammissibile.
- in $P\alpha$ all'ottimo tutte le variabili artificiali sono fuori base
- una base ammissibile per P_{FS} è quella costituita dalle variabili x_1 e x_6

II Fase

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\beta = \{1, 6\}$

$c_B^T = [1, 0]$

$c_N^T = [1, -2, -1, 0]$

1	1/2	1/2	1/2	-1/2	0	3
0	3/2	-5/2	1/2	1/2	1	1
0	1/2	-5/2	-3/2	1/2	0	-3

$$\hat{C}_N^T = [\hat{c}_2, \hat{c}_3, \hat{c}_4, \hat{c}_5] = [c_2, c_3, c_4, c_5] - [c_1, c_6]\, B^{-1} N$$

$$= [1, -2, -1, 0] - [1, 0]\, B^{-1} N =$$

$$= [1, -2, -1, 0] - [1/2, 1/2, 1/2, -1/2] =$$

$$= [1/2, -5/2, -3/2, 1/2]$$

Fase II

It 1

$T^{(0)}$	1	1/2	1/2	1/2	-1/2	0	3
	0	3/2	-5/2	1/2	1/2	1	1
	0	1/2	-5/2	-3/2	1/2	0	-3

$x_1 = 3$ $\quad z = 3$
$x_6 = 1$
$x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$

- Soluzione non ottima $\quad t^0_{33} = -5/2 = \hat{c}_3 < 0 \Rightarrow k = 3$
- Condizione di illimitatezza non verificata, $t^0_{13} = 1/2 > 0$
- $\bar{\delta} = \left\{ \frac{t^{(0)}_{16}}{t^{(0)}_{13}} \right\} = 6$ in corrispondenza di $h = 1$
- x_3 entra in base, con valore 6, x_1 uscirà dalla base

$T^{(1)}$	2	1	1	1	-1	0	6
	5	4	0	3	-2	1	16
	5	3	0	1	-2	0	12

$T_1^{(1)} = T_1^{(0)} / t^{(0)}_{13}$

$T_2^{(1)} = T_2^{(0)} - t^{(0)}_{23} T_1^{(1)}$

$T_3^{(1)} = T_3^{(0)} - t^{(0)}_{33} T_1^{(1)}$

It 2.

- Soluzione non ottima $\quad t^{(1)}_{35} = -2 = \hat{c}_5 < 0 \quad k = 5$
- Condizione di illimitatezza: $t^1_{15} = -1 < 0$, $t^{(1)}_{25} = -2 < 0$

Stop - Problema inferiormente illimitato

② Risolvere il Duale

Corollario 2 Teorema di Dualità debole.

$P\ (D)$ illimitato $\Rightarrow$ $D\ (P)$ inammissibile.

Infatti:

$$
P \quad
\begin{aligned}
\max\ & -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \\
& 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 6 \\
& x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 4 \\
& x_1 \ \dots\ x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Cambiando di segno al primo vincolo, in modo da avere la forma simmetrica;

$$
P \quad
\begin{aligned}
\max\ & -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \\
& -2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \leq -6 \\
& x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 4 \\
& x_1 \ \dots\ x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
D \quad
\begin{aligned}
\min\ & 4y_1 - 6y_2 \\
& -2y_1 + y_2 \geq -1 \\
& -y_1 + 2y_2 \geq -1 \\
& \boxed{-y_1 - 2y_2 \geq 2} \\
& -y_1 + y_2 \geq 1 \\
& \boxed{y_1, y_2 \geq 0}
\end{aligned}
$$

vincoli incompatibili.

Pasando, inverso de DFS,

$$-\max \; 6y_1 + 4y_2$$

DFS

$$\begin{aligned}
2y_1 + y_2 &\leq 1 \\
y_1 + 2y_2 &\leq 1 \\
\boxed{y_1 - 2y_2 \leq -2} \\
y_1 + y_2 &\leq 1 \\
\boxed{\begin{matrix} -y_1 \leq 0 \\ y_2 \leq 0 \end{matrix}}
\end{aligned}$$

Imposible.

$$\boxed{\begin{matrix} y_1 - 2y_2 \leq -2 \\ y_1 \geq 0 \;, \; y_2 \leq 0 \end{matrix}}$$

imposible.