ha:

$$\begin{aligned}G(b)-G(a) &= G(x_n)-G(x_0)=[G(x_n)-G(x_{n-1})]+[G(x_{n-1})-G(x_{n-2})]+\cdots\\&\cdots+[G(x_2)-G(x_1)]+[G(x_1)-G(x_0)]=\\&=\sum_{j=1}^{n}[G(x_j)-G(x_{j-1})]\end{aligned}$$

Applichiamo ora il teorema di Lagrange alla funzione $G(x)$ su ciascuno degli intervalli $[x_{j-1}, x_j]$. Esiste allora $\xi_j \in (x_{j-1}, x_j)$ tale che

$$G(x_j)-G(x_{j-1})=(x_j-x_{j-1})G'(\xi_j)=(x_j-x_{j-1})f(\xi_j)$$

perché per ipotesi G è una primitiva di f e perciò $G'(\xi_j)=f(\xi_j)$. Ne segue che

$$G(b)-G(a)=\sum_{j=1}^{n}(x_j-x_{j-1})f(\xi_j)=S_n$$

dove S_n è una somma n-esima di Cauchy-Riemann di f. L'identità scritta vale per ogni n; possiamo allora far tendere n a $+\infty$, trovando

$$G(b)-G(a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

Si osservi che questa dimostrazione prova che *una certa* successione di Cauchy-Riemann di f tende a $G(b)-G(a)$. Poiché però sappiamo già che f è integrabile, in quanto continua (per il Teorema 6.1, che proveremo in seguito), questo è sufficiente a concludere che ogni altra successione di Cauchy-Riemann converge allo stesso limite, e quindi vale la formula enunciata. ◆

Nel prossimo paragrafo affronteremo il problema di come si determina una primitiva di $f(x)$, almeno per certe classi di funzioni $f(x)$.

Va tenuto presente, comunque, che:

1. A dispetto del fatto che ogni funzione continua su $[a, b]$ ha una primitiva, anche per funzioni continue abbastanza semplici succede che tale primitiva non sia esprimibile come composizione di funzioni elementari. Ciò significa che in molti casi non si sa scrivere un'espressione analitica della primitiva di $f(x)$ utilizzabile per il calcolo effettivo dell'integrale.
2. Anche quando una primitiva di $f(x)$ non è nota, è possibile calcolare un valore approssimato dell'integrale di una funzione continua su un intervallo, con i metodi dell'analisi numerica, che si basano, in sostanza, sulla definizione di integrale come limite di somme, e non sul teorema fondamentale del calcolo integrale. Ecco quindi un caso in cui la "scomoda" definizione di integrale fornisce il modo migliore per calcolarlo. Alla discussione di uno di questi metodi dedicheremo il successivo par. 7.

5 METODI ELEMENTARI PER LA RICERCA DI UNA PRIMITIVA. CALCOLO DI INTEGRALI INDEFINITI E DEFINITI

5.1 Integrali immediati, per scomposizione, per sostituzione

Come abbiamo visto, se f è una funzione continua e G è una sua primitiva, tutte le primitive di f avranno la forma

$$G(x)+c \qquad (c \in \mathbb{R})$$

L'insieme di tutte le primitive di f prende il nome di *integrale indefinito* di f, e si indica col simbolo

$$\int f(x)\,dx$$

Lo stesso simbolo si usa talvolta per indicare una particolare primitiva di f. Ricordiamo ancora che questo simbolo ha un significato ben diverso da quello di

$$\int_a^b f(x)dx$$

che indica l'integrale di f sull'intervallo $[a,b]$, detto anche *integrale definito*. L'integrale definito è un numero, l'integrale indefinito è un insieme di funzioni (o una qualunque di esse).

Ci occuperemo ora dei *metodi di integrazione*, ossia dei metodi per trovare una primitiva di una funzione data (integrazione indefinita) e quindi per calcolarne il suo integrale definito, mediante il teorema fondamentale del calcolo integrale, almeno per funzioni di tipo abbastanza semplice.

Queste tecniche di integrazione saranno usate in molti argomenti trattati nel secondo volume (equazioni differenziali ordinarie, integrali di linea, integrali doppi e di superficie, serie di Fourier...).

Leggendo la tabella delle derivate delle funzioni elementari "in senso inverso", si ottiene la prima tabella di primitive:

Funzione	Primitiva	Funzione	Primitiva
k	kx	e^x	e^x
x^α	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\quad(\alpha\neq-1)$	a^x	$\dfrac{a^x}{\log a}\quad(a>0, a\neq 1)$
$\dfrac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$
$\sin x$	$-\cos x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\cos x$	$\sin x$	$\operatorname{Sh} x$	$\operatorname{Ch} x$
$\dfrac{1}{(\cos x)^2}=1+(\operatorname{tg} x)^2$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{Ch} x$	$\operatorname{Sh} x$
$\dfrac{1}{(\sin x)^2}$	$-\operatorname{cotg} x$	$\dfrac{1}{(\operatorname{Ch} x)^2}$	$\operatorname{Th} x$
		$\dfrac{1}{(\operatorname{Sh} x)^2}$	$-\operatorname{Coth} x$

Nella tabella precedente, quella fornita è *una* delle primitive. Per scrivere l'integrale indefinito, come insieme di *tutte* le primitive, occorre aggiungere sempre una costante arbitraria, ad esempio:

$$\int x^2dx=\frac{x^3}{3}+c$$

Le regole elementari con cui, a partire da certi integrali, se ne calcolano altri, sono:

Integrazione per scomposizione

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx \tag{5.1}$$

(segue dalla linearità della derivata);

Integrazione per sostituzione

Sia G una primitiva di f in un intervallo I, cioè $G'(t) = f(t)$ per ogni $t \in I$. Sia ora $t = \varphi(x)$ una funzione derivabile con continuità su un intervallo $[a, b]$ tale che $\varphi([a, b]) \subset I$. Dal teorema di derivazione delle funzioni composte abbiamo allora:

$$\frac{d}{dt}G(\varphi(x)) = G'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

e cioè:

$$\begin{array}{ccc} G(t) & & \Phi(x) = G(\varphi(x)) \\ \text{primitiva di} & \Longleftrightarrow & \text{primitiva di} \\ f(t) & & f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \,. \end{array}$$

Ne segue la formula (di integrazione per sostituzione)

$$\int f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx = \int f(t)\, dt \quad (\varphi(x) = t) \tag{5.2}$$

È facile ricordare la (5.2) col seguente procedimento formale: si sostituisce $t = \varphi(x)$ nell'integrale a primo membro, e si calcola $dt = \varphi'(x)\, dx$. Così facendo si ottiene proprio la (5.2) (si tenga presente che questo passaggio è puramente formale: il motivo per cui la (5.2) è vera è stato spiegato in precedenza).

La versione (5.2) per l'integrale definito è la seguente

$$\int_a^b f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx \quad (\varphi(t) = x) \tag{5.3}$$

Di nuovo, è facile ricordare la formula precedente con i passaggi formali già visti: si pone $t = \varphi(x)$ nell'integrale a primo membro, e si calcola $dt = \varphi'(x)\, dx$; inoltre, si modificano gli estremi di integrazione tenendo conto che

$$x \in [a, b] \Longrightarrow t = \varphi(x) \in [\varphi(a), \varphi(b)] \,.$$

dove la scrittura $[\varphi(a), \varphi(b)]$ indica che $\varphi(a), \varphi(b)$ sono, in quest'ordine, gli estremi di integrazione del nuovo integrale, anche se, eventualmente, $\varphi(a) > \varphi(b)$.

Esempi

5.1
$$\int (4x^2 + 5x + 1)dx = \text{ (per la (5.1)) } =$$
$$= 4\int x^2 dx + 5\int x dx + \int 1 dx = \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + x + c$$

5.2 $$\int_0^1 \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$$

Poniamo $e^x = t$ ossia $x = \log t$, $dx = \frac{1}{t}\,dt$.
Si ha inoltre: $x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = e$; perciò dalla (5.3) abbiamo:

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int_1^e \frac{1}{t+\frac{1}{t}}\frac{1}{t}\,dt = \int_1^e \frac{1}{1+t^2}\,dt = [\operatorname{arctg} t]_1^e = \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}.$$

5.3 $$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = [\text{per la (5.3)}: \cos x = t; -\sin x dx = dt] =$$
$$= \int -\frac{dt}{t} = -\log|t| + c = -\log|\cos x| + c$$

L'esempio precedente è anche un caso particolare della seguente formula:

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + c}$$

come si verifica con la sostituzione $f(x) = t \quad f'(x)dx = dt$.

5.4 $$\boxed{\int [f(x)]^\alpha f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \qquad \alpha \neq -1}$$

Basta porre $t = f(x)$, $dt = df(x) = f'(x)dx$; si ha:

$$\int [f(x)]^\alpha f'(x)dx = \int t^\alpha\,dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

Ad esempio:

$$\int x^2\sqrt[3]{2+x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt[3]{2+x^3}3x^2dx = \frac{1}{3}\int (\underbrace{2+x^3}_{f(x)})^{1/3}\ \underbrace{3x^2}_{f'(x)}\ dx =$$
$$= \frac{1}{3}(2+x^3)^{4/3}\cdot\frac{3}{4} + c = \frac{1}{4}(2+x^3)^{4/3} + c$$

Simmetrie

Facciamo ora un'osservazione sull'*integrale di una funzione simmetrica* (*pari* o *dispari*) *su un intervallo simmetrico* $[-k, k]$. Si osservino le figure 6.8*a* e 6.8*b*.

Pensando l'integrale come area con segno sottesa al grafico di f, si vede subito che se f è una funzione continua su $[-k, k]$ e

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ è pari, allora } \displaystyle\int_{-k}^k f(x)dx = 2\int_0^k f(x)dx \\[2ex] f \text{ è dispari, allora } \displaystyle\int_{-k}^k f(x)dx = 0 \end{array}}$$

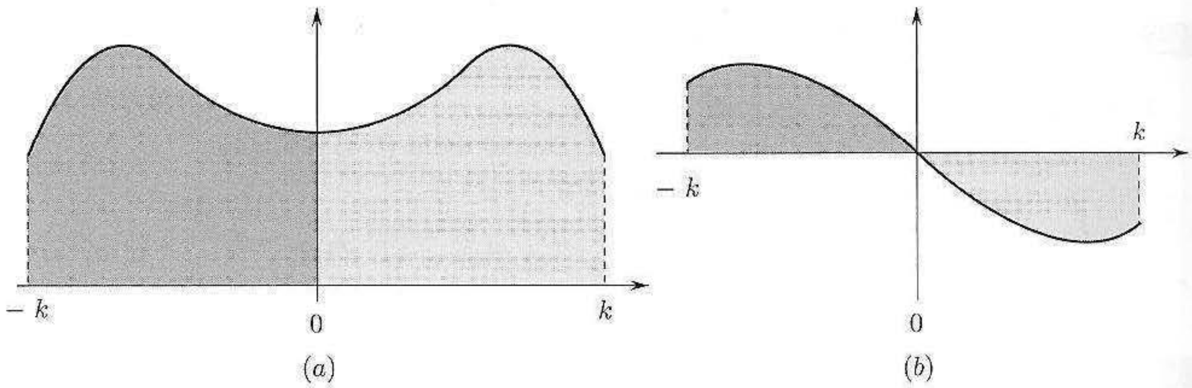

Figura 6.8.

Ad esempio:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \text{(integranda pari)} = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 2[\sin x]_0^{\pi/2} = 2$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \text{(integranda dispari)} = 0$$

Si osservi anche il prossimo esempio:

$$\int_{-1}^{1} e^{-|x|} dx = 2\int_{0}^{1} e^{-|x|} dx = 2\int_{0}^{1} e^{-x} dx = 2\left[-e^{-x}\right]_0^1 = 2 - \frac{2}{e}.$$

In questo caso la simmetria ha consentito di ridursi a un integrale sull'intervallo $[0,1]$; a sua volta, questo ha consentito di togliere il valore assoluto (per $x \in [0,1]$, $e^{-|x|} = e^{-x}$), permettendoci quindi di trovare la primitiva.

Valori assoluti

L'ultimo esempio suggerisce un'idea generale con cui si può calcolare l'integrale definito di una funzione contenente un valore assoluto. Si consideri il prossimo esempio:

$$\int_{0}^{2} |(x-1)(x+3)| \, dx.$$

Per $x \in [0,2]$, abbiamo

$$|(x-1)(x+3)| = \begin{cases} (x-1)(x+3) & \text{se } x \in [1,2] \\ (1-x)(x+3) & \text{se } x \in [0,1] \end{cases}$$

(si osservi che non ci interessano i casi in cui $x \notin [0,2]$). Quindi, per l'additività dell'integrale abbiamo:

$$\int_{0}^{2} |(x-1)(x+3)| \, dx = \int_{0}^{1} (1-x)(x+3) \, dx + \int_{1}^{2} (x-1)(x+3) \, dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{5}{3} - 0\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}\right) = \frac{10}{3}.$$

In generale, volendo calcolare l'integrale definito di una funzione contenente uno o più valori assoluti, si spezzerà l'integrale nella somma di integrali su sottointervalli, in modo che in ciascun sottointervallo l'argomento di ciascun valore assoluto abbia segno costante, e quindi si possa esprimere l'integranda senza usare valori assoluti.

5.2 Integrazione delle funzioni razionali

Diamo ora un'idea schematica di come si calcoli in generale la primitiva di una funzione razionale:

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx$$

(abbiamo indicato con P_n, Q_m polinomi di grado n, m, rispettivamente).

Anzitutto: *se il grado del numeratore è $\geq$ del grado del denominatore, per prima cosa si esegue la divisione di polinomi*; questo porta a riscrivere l'integranda come somma di un polinomio (che si integra immediatamente), più una funzione razionale con lo stesso denominatore di quella di partenza, e il numeratore di grado inferiore. (Questo non conclude il calcolo, ma è un primo passo che semplifica le cose).

Esempio

5.5

$$\int \frac{x^3+x}{x^2+x+1}\,dx$$

La divisione di polinomi dà:

$$x^3+x=(x^2+x+1)(x-1)+(x+1)$$

quindi:

$$\int \frac{x^3+x}{x^2+x+1}\,dx=\int (x-1)dx+\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx$$

In base a questa osservazione, possiamo d'ora in poi supporre che il grado del numeratore sia già minore del grado del denominatore (altrimenti ci si riduce a questo caso mediante divisione).

Se il denominatore è di primo grado il suo integrale si calcola immediatamente, mediante logaritmo:

5.6

$$\int \frac{2}{3x+5}\,dx=\frac{2}{3}\log|3x+5|+c$$

La formula generale è la seguente:

$$\int \frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\log|ax+b|+c.$$

Se il denominatore è di secondo grado (e il numeratore di grado ≤ 1), occorre distinguere 3 casi, a seconda del segno del discriminante del denominatore.

A. *Il denominatore ha due radici distinte.* La frazione si scompone in *fratti semplici* e si integra poi mediante somma di logaritmi:

Esempi

5.7 $$\int \frac{x+2}{(x-2)(x+3)}dx$$

Scriviamo:
$$\frac{x+2}{(x-2)(x+3)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+3}$$
per opportuni coefficienti a, b da determinarsi. Per determinarli, si esegue la somma a secondo membro facendo denominatore comune, e si impone che la frazione trovata sia uguale a quella a primo membro. Si trova:
$$\frac{x(a+b)+(3a-2b)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x+2}{(x-2)(x+3)}$$
che è vero se e solo se:
$$\begin{cases} a+b=1 \\ 3a-2b=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=\frac{4}{5} \\ b=\frac{1}{5} \end{cases}$$
Quindi l'integrale di partenza è uguale a:
$$\int (\frac{\frac{4}{5}}{x-2} + \frac{\frac{1}{5}}{x+3})dx = \frac{4}{5}\log|x-2| + \frac{1}{5}\log|x+3| + c$$

5.8 $$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{1}{(x-2)(x+2)}dx = \int \frac{1}{4}[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}]dx =$$
$$= \frac{1}{4}[\log|x-2| - \log|x+2|] + c$$

B. *Il denominatore è un quadrato perfetto.* Mediante sostituzione ci si riconduce alla somma di potenze (con esponente positivo o negativo), che si integra immediatamente:

Esempio

5.9 $$\int \frac{x+1}{(3x+2)^2}dx = [3x+2=t, 3dx=dt, x=\frac{t-2}{3}]$$
$$= \int \frac{\frac{t-2}{3}+1}{t^2}\frac{dt}{3} = \frac{1}{9}\int \frac{t+1}{t^2}dt = \frac{1}{9}\int (\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2})dt =$$
$$= \frac{1}{9}(\log|t| - \frac{1}{t}) + c = \frac{1}{9}(\log|3x+2| - \frac{1}{3x+2}) + c$$

C. *Il denominatore non si annulla mai.* Vediamo su un paio di esempi come si procede in generale in questo caso:

Esempi

5.10 $$\int \frac{dx}{x^2+3} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x/\sqrt{3})^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + c$$

In generale:

(5.4)
$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c}$$

come si verifica immediatamente calcolando la derivata del secondo membro. Questo esempio illustra il caso più semplice in cui il denominatore non si annulla mai. La situazione più generale è descritta invece nel prossimo esempio.

5.11
$$\int \frac{x}{x^2+2x+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx - \int \frac{1}{x^2+2x+4}dx$$

Si osservi com'è costruita l'identità: il primo addendo deve avere a numeratore la derivata del denominatore, in questo caso $2x+2$; d'altro canto il secondo addendo non deve contenere x a numeratore; il "trucco" è perciò scrivere:

$$x = \frac{1}{2}(2x+2) - 1$$

e *non*, ad esempio, $x = (2x+2) - (x+2)$, che sarebbe vero ma inconcludente, in quanto il secondo integrale avrebbe ancora la x a numeratore. Ora l'espressione trovata è uguale a:

$$\frac{1}{2}\log(x^2+2x+4) - \int \frac{1}{(x+1)^2+3}dx = \frac{1}{2}\log(x^2+2x+4) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + c$$

Nell'ultimo integrale si è usata la formula vista per la primitiva di $\frac{1}{x^2+a^2}$, più la sostituzione $x+1=t$, $dx=dt$.

In generale, se il denominatore ha discriminante negativo, ossia è irriducibile, si spezza la frazione in due addendi, di cui una a numeratore presenta la derivata del denominatore, e porta ad un integrale logaritmico; l'altra ha numeratore costante, e si riporta all'integrale di una funzione arcotangente. Il procedimento generale è sintetizzato dalla formula seguente:

$$\int \frac{x+d}{(x+b)^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2b}{x^2+2bx+b^2+a^2}dx + \int \frac{d-b}{(x+b)^2+a^2}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\log\left(x^2+2bx+b^2+a^2\right) + \frac{d-b}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+b}{a}\right) + c.$$

Se il denominatore è un polinomio di grado maggiore di due è sempre possibile (teoricamente!) scomporlo in un prodotto di (potenze di) fattori di primo grado, oppure di secondo grado irriducibili. Fatto questo, si scompone la frazione in fratti semplici, a cui si applicano i discorsi precedenti. I prossimi esempi illustrano solo alcuni casi semplici in cui questo accade. Se il grado del denominatore è molto maggiore di due... procurarsi un buon software!!

Esempi

5.12
$$\int \frac{2x^2+3x-1}{x^3+2x^2+x+2}dx$$

Osserviamo il denominatore:

$$x^3+2x^2+x+2 = x^2(x+2)+(x+2) = (x+2)(x^2+1)$$

Scomposto il denominatore, si scompone il quoziente in fratti semplici:

$$\frac{2x^2+3x-1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{a}{x+2} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

con a, b, c da determinarsi (il criterio con cui abbiamo scritto i numeratori incogniti è *che il grado del numeratore sia minore di uno del grado del denominatore*). Mettendo a denominatore comune, si trova:

$$\frac{a}{x+2} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{a(x^2+1)+(bx+c)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{2x^2+3x-1}{(x+2)(x^2+1)}$$

se e solo se:

$$\begin{cases} a+b=2 \\ 2b+c=3 \\ a+2c=-1 \end{cases} \quad \text{sistema che risolto dà:} \quad \begin{cases} a=\dfrac{1}{5} \\ b=\dfrac{9}{5} \\ c=-\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

Perciò:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+3x-1}{x^3+2x^2+x+2}dx &= \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+2}dx + \frac{1}{5}\int \frac{9x-3}{x^2+1}dx = \\ &= \frac{1}{5}\log|x+2| + \frac{9}{10}\int \frac{2x}{x^2+1}dx - \frac{3}{5}\int \frac{dx}{x^2+1} = \\ &= \frac{1}{5}\log|x+2| + \frac{9}{10}\log(x^2+1) - \frac{3}{5}\operatorname{arctg} x + c\end{aligned}$$

5.13

$$\int \frac{x+1}{x^2(x+3)}dx$$

Si scompone:

$$\frac{x+1}{x^2(x+3)} = \frac{ax+b}{x^2} + \frac{c}{x+3}$$

e si procede al solito modo. Si noti che

$$\int \frac{ax+b}{x^2}dx = \int (\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2})dx$$

che è immediato.

5.14

$$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x^2-x+1)}dx$$

Il fattore (x^2-x+1) è irriducibile. Si scompone:

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x^2-x+1)} = \frac{ax+b}{(x+1)^2} + \frac{cx+d}{x^2-x+1}$$

e si imposta un sistema di quattro equazioni in quattro incognite che risolto dà la scomposizione in fratti semplici. Si trovano così due integrali di tipi che abbiamo già trattato.

Funzioni razionali di e^x

Dovendo integrare una funzione razionale di e^x, si pone $e^x = t; x = \log t; dx = \frac{dt}{t}$, e ci si riconduce a una funzione razionale di t. Occorre, alla fine, tornare alla variabile x.

Esempio

5.15

$$\int \frac{1}{\mathrm{Ch}x} dx = 2\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \left[e^x = t; x = \log t; dx = \frac{dt}{t}\right] =$$
$$= 2\int \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \frac{dt}{t} = 2\int \frac{dt}{1+t^2} = 2 \operatorname{arctg} t + c = 2\operatorname{arctg}(e^x) + c$$

Esercizi

1. $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^2} dx$
2. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2+2x+4} dx$
3. $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+4x+3} dx$
4. $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2(x+1)} dx$
5. $\displaystyle\int \frac{1+2x^2}{x^4-1} dx$
6. $\displaystyle\int \frac{1-2x}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3+1} dx$
8. $\displaystyle\int \frac{1+e^{-x}}{\mathrm{Ch}x} dx$
9. $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x^2+1} dx$
10. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x+2}{2x^2+1} dx$
11. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(3x+2)^2} dx$
12. $\displaystyle\int_2^5 \frac{2x+3}{x^2+x-2} dx$
13. $\displaystyle\int \frac{1-x^6}{1-x} dx$
14. $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2+4x+4} dx$

5.3 Integrazione per parti

Se f e g sono derivabili in $[a, b]$ si ha

$$(fg)' = f'g + fg'$$

ossia

$$fg' = (fg)' - f'g\,.$$

Prendendo l'integrale indefinito di entrambi i membri ed osservando che $\int (fg)' dx = fg$ si trova la formula di *integrazione per parti*

$$\boxed{\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx\,.} \tag{5.5}$$

Usando la notazione differenziale, la (5.5) si può scrivere nella forma seguente (più sintetica)

$$\int \underbrace{f}_{\substack{\text{fattore}\\ \text{finito}}} \quad \underbrace{dg}_{\substack{\text{fattore}\\ \text{differenziale}}} = fg - \int g\, df \tag{5.6}$$

Le (5.5) e (5.6) hanno una versione per l'*integrale definito*:

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx}$$

Nei casi concreti occorre saper scegliere correttamente il fattore finito e quello differenziale.

Esempi

5.16

$$\int x \sin x\, dx$$

Sappiamo calcolare sia la derivata che la primitiva di entrambe le funzioni $x, \sin x$; tuttavia la scelta migliore è quella di derivare x, il che semplifica l'integrale:

$$\int \underset{f}{\underset{\downarrow}{x}}\ \underset{g'}{\underset{\downarrow}{\sin x}}\, dx = -x\cos x - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \sin x + c$$

La scelta inversa avrebbe portato

$$\int \underset{g'}{\underset{\downarrow}{x}}\ \underset{f}{\underset{\downarrow}{\sin x}}\, dx = \frac{x^2}{2}\sin x - \int \frac{x^2}{2}\cos x\, dx = \text{più complicato dell'integrale di partenza}$$

Questo semplice esempio contiene un'idea molto generale: dovendo calcolare un integrale

$$\int x^n f(x)\, dx \qquad \text{con} \qquad f(x) = \cos x, \sin x, e^x, \mathrm{Sh}\, x, \mathrm{Ch}\, x$$

si integra per parti, derivando x^n (che si abbassa di grado) e integrando $f(x)$ (che dà una funzione "simile": $\sin x$, $-\cos x$, e^x, $\mathrm{Ch}\, x$, $\mathrm{Sh}\, x$, rispettivamente).

Per $n = 1$ questo porta un integrale immediato; per $n > 1$ si itera il procedimento finché la derivata della potenza scompare del tutto. Per la linearità dell'integrale indefinito, il procedimento permette di calcolare un integrale del tipo

$$\int P_n(x) f(x)\, dx$$

con $P_n(x)$ polinomio di grado n, e $f(x)$ come sopra.

5.17

$$\int e^x \sin x\, dx$$

Entrambe le funzioni $e^x, \sin x$ hanno derivata e primitiva altrettanto semplici: la scelta di quale fattore integrare e quale derivare sembra essere indifferente (e lo è). Procediamo ad esempio così:

$$\int \underset{g'}{\underset{\downarrow}{e^x}}\ \underset{f}{\underset{\downarrow}{\sin x}}\, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx =$$

Applichiamo un'altra integrazione per parti, scegliendo f, g' coerentemente alla prima scelta fatta, ossia $g'(x) = e^x$, $f(x) = \cos x$:

$$= e^x \sin x - \{e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)\,dx\}$$

Se chiamiamo I l'integrale di partenza, abbiamo trovato:

$$I = e^x \sin x - e^x \cos x - I \tag{5.7}$$

Apparentemente, la doppia integrazione per parti non ha semplificato nulla; in realtà, però, l'integrale I si ottiene ora risolvendo l'equazione elementare (5.7):

$$2I = e^x \sin x - e^x \cos x; \implies I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + c$$

5.18 Con lo stesso metodo dell'esempio precedente si calcolano le seguenti primitive (si lasciano i calcoli per esercizio):

$$\int (\mathrm{Ch}\,x)^2 dx = \frac{1}{2}(\mathrm{Sh}x\mathrm{Ch}x + x) + c; \int (\mathrm{Sh}\,x)^2 dx = \frac{1}{2}(\mathrm{Sh}\,x\mathrm{Ch}x - x) + c$$

In generale: dovendo calcolare un integrale del tipo:

$$\int f(x)g(x)dx \quad \text{con } f(x) = \begin{cases} e^{ax} \\ \mathrm{Sh}(ax) \\ \mathrm{Ch}(ax) \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \cos(bx) \\ \sin(bx) \end{cases}$$

si eseguono due integrazioni per parti successive; nella prima, la scelta della funzione da derivare o da integrare è indifferente; nella seconda, però, la scelta dev'essere coerente alla prima. Dopo due integrazioni per parti si trova un'espressione del tipo $I = h(x) - \left(\frac{b}{a}\right)^2 I$, da cui si ricava I.

5.19

$$\int \log x\,dx$$

Il logaritmo è una funzione elementare di cui ancora non conosciamo la primitiva. Integriamo per parti, ponendo $f(x) = \log x, g'(x) = 1$:

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\log x - \int 1dx = x\log x - x + c$$

Più in generale, con questo metodo si può calcolare

$$\int \underset{\substack{\downarrow \\ g'}}{x^m} \underset{\substack{\downarrow \\ f}}{(\log x)^n}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}(\log x)^n - \int \frac{x^{m+1}}{m+1} n \frac{(\log x)^{n-1}}{x} dx =$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}(\log x)^n - \frac{n}{m+1}\int x^m (\log x)^{n-1}\,dx.$$

L'ultimo integrale ottenuto è simile a quello di partenza, con il logaritmo elevato ad $(n-1)$ anziché a n. Questo significa che, iterativamente, con n integrazioni per parti si può calcolare l'integrale. Più in generale, questo metodo consente allora di calcolare l'integrale di funzioni del tipo

$$P_m(x)\,Q_n(\log x)$$

dove P_m, Q_n sono polinomi di grado m, n, rispettivamente.

5.20.
$$\int \operatorname{arctg} x dx$$

L'arcotangente è una funzione elementare di cui ancora non conosciamo la primitiva. Integriamo per parti, ponendo $f(x) = \operatorname{arctg} x, g'(x) = 1$:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arctg} x dx &= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log\left(1+x^2\right) + c,\end{aligned}$$

dove si è integrata coi metodi noti la funzione razionale $\frac{x}{1+x^2}$.

Più in generale, si può calcolare:

$$\int \underset{\substack{\downarrow \\ g'}}{x^n} \underset{\substack{\downarrow \\ f}}{\operatorname{arctg} x} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{dx}{1+x^2}.$$

L'ultimo integrale ottenuto è quello di una funzione razionale: se $n \geq 1$ occorrerà per prima cosa eseguire la divisione di polinomi $x^{n+1} : 1 + x^2$ per riscrivere

$$\frac{x^{n+1}}{1+x^2} = P_{n-1}(x) + \frac{ax+b}{1+x^2}$$

con P_{n-1} polinomio di grado $n-1$, che si integra direttamente, mentre la funzione razionale $\frac{ax+b}{1+x^2}$ si integra coi metodi visti, riportandosi a funzioni logaritmo e arcotangente.

Esercizi

15 Si presti attenzione ai prossimi integrali: in quali casi è utile effettuare una sostituzione? (se non è utile, si può comunque sviluppare il cubo e integrare il polinomio termine a termine)

$$\int (3x+1)^3 dx \qquad \int (3x^2+1)^3 dx \qquad \int x(3x^2+1)^3 dx$$

16 $\displaystyle\int (x^{5/6} + 2x^{-2} - 3x^{-1} + 2) dx$

17 $\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\sin x)^2 \, dx$

18 $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x \, dx \qquad \int \operatorname{Th} x \, dx$

19 $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos 2x \sin x \, dx$

20 $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x+2} + \frac{1}{x^2}\right) dx$

21 $\displaystyle\int_0^1 (3x^3+1)^2 x^2 dx$

22 $\displaystyle\int (1 + (\sin x)^2)^3 \sin 2x \, dx$

23 $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\log x)^2} dx$

24 $\displaystyle\int (\operatorname{tg} x)^2 \, dx \qquad \int \operatorname{Th}^2 x \, dx$

25 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^2} dx$

26 $\displaystyle\int \left(\frac{e^{2x} - e^{-x}}{3}\right) dx$

27 $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{-|x|} dx$

28 $\int e^{-x^2} x\, dx$

29 $\int (x^2+5x+4)e^x\, dx$

30 $\int \frac{dx}{x \log x}$

31 $\int_0^1 x e^{3x}\, dx$

32 $\int \sqrt{2+\sin x} \cos x\, dx$

33 $\int_1^3 x^2 \log x\, dx$

34 $\int \frac{1}{x(1+(\log x)^2)} dx$

35 $\int_0^\pi x \cos x\, dx$

36 $\int \frac{1}{x(x+1)} dx$

37 $\int e^x (\sin x)^2\, dx$

38 $\int \frac{1}{(x+1)^2} dx$

39 $\int e^{-x^2} x^3 dx$

40 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x)^2\, dx$

41 $\int (\mathrm{Ch}\, x)^2 (\mathrm{Sh}\, x)^2\, dx$

5.4 Integrazione delle funzioni trigonometriche

In questo paragrafo faremo una breve panoramica di metodi per integrare una funzione trigonometrica.

Integrali del tipo

$$\int f(\sin x) \cos x\, dx : \quad \text{si pone} \quad \sin x = t, \cos x\, dx = dt$$

$$\int f(\cos x) \sin x\, dx : \quad \text{si pone} \quad \cos x = t, -\sin x\, dx = dt$$

Esempi

5.21

$$\int_0^{\pi/3} (\sin x)^3 (\cos x)^2\, dx$$

Si osserva che:

$$(\sin x)^3 (\cos x)^2 = \sin x \cdot (\sin x)^2 \cdot (\cos x)^2 = \sin x(1-(\cos x)^2)(\cos x)^2 = f(\cos x) \sin x$$

$$\int_0^{\pi/3} \sin x(1-(\cos x)^2)(\cos x)^2\, dx = \left[\cos x = t;\ -\sin x\, dx = dt; t \in \left(1, \frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= \int_1^{1/2} -(1-t^2)t^2 dt = \int_{1/2}^1 (t^2 - t^4) dt =$$

$$= [\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}]_{1/2}^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{24} + \frac{1}{160}$$

In generale: dovendo calcolare

$$\int (\sin x)^n (\cos x)^m\, dx$$

con *almeno uno degli esponenti dispari*, è sempre possibile riscrivere l'integranda in una delle forme $f(\sin x)\cos x$ o $f(\cos x)\sin x$, sfruttando la relazione $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$. A questo punto l'integrale si calcola con la sostituzione $\sin x = t$, o $\cos x = t$, rispettivamente.

Se invece entrambi gli esponenti sono pari, si possono usare le formule trigonometriche per l'abbassamento del grado:

$$\boxed{(\cos x)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \qquad (\sin x)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)}$$

5.22
$$\int (\sin x)^2 (\cos x)^4 \, dx$$

Si verifichi che dalle formule precedenti segue:

$$\int (\sin x)^2 (\cos x)^4 \, dx = \frac{1}{8} \int (-(\cos 2x)^3 - (\cos 2x)^2 + \cos 2x + 1) dx$$

Ora: gli addendi $\cos 2x + 1$ hanno integrale immediato; $(\cos 2x)^2$ si integra come visto in precedenza (attenzione alla presenza di $2x$ anziché x); $(\cos 2x)^3$ rientra nel caso in cui uno degli esponenti è dispari: si riscrive $(\cos 2x)^3 = \cos 2x(1 - (\sin 2x)^2)$, e si integra ponendo $\sin 2x = t$. Si trova (verificare i calcoli per esercizio):

$$\int (\sin x)^2 (\cos x)^4 \, dx = \frac{12x + 3\sin 2x - 3\sin 4x - \sin 6x}{192} + c$$

(o una delle molte espressioni trigonometriche equivalenti a questa!)

5.23 Calcoliamo, in particolare, due integrali notevoli di funzioni trigonometriche:

$$\int (\sin x)^2 \, dx, \quad \int (\cos x)^2 \, dx$$

Sfruttando le le formule trigonometriche per l'abbassamento del grado (v. sopra) si ha:

$$\boxed{\begin{aligned} \int (\sin x)^2 \, dx &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + c \\ \int (\cos x)^2 \, dx &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + c \end{aligned}}$$

5.24 Sfruttando il risultato dell'esempio precedente si possono calcolare, ad esempio, i seguenti integrali definiti:

$$\boxed{\int_0^{k\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 dx = \int_0^{k\frac{\pi}{2}} (\cos x)^2 dx = k\frac{\pi}{4} \quad \text{con} \quad k \in \mathbb{Z}} \tag{5.8}$$

La formula precedente, che esprime due *integrali notevoli* che si presentano spesso, è facile da ricordare: l'integrale di $(\cos x)^2$, $(\sin x)^2$ su un intervallo del tipo $[0, k\frac{\pi}{2}]$ vale la metà dell'area del rettangolo di base $[0, k\frac{\pi}{2}]$ e altezza 1. Questa "coincidenza" ha un significato geometrico; si osservi la figura 6.9:

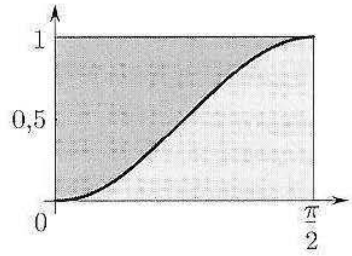

Figura 6.9.

Le due regioni disegnate hanno la stessa area; quella inferiore è l'integrale di $(\sin x)^2$ su $[0, \frac{\pi}{2}]$, quella superiore è l'integrale di $(\cos x)^2$, perché $(\cos x)^2 = 1 - (\sin x)^2$; ognuno dei due integrali vale dunque $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$. Per le simmetrie e periodicità dei grafici di $(\cos x)^2, (\sin x)^2$, ne segue la formula generale.

Integrali del tipo

$$\int \cos \alpha x \sin \beta x \, dx, \int \cos \alpha x \cos \beta x \, dx, \int \sin \alpha x \sin \beta x \, dx$$

Si possono utilizzare le formule di prostaferesi (v. appendice A), che riconducono alla somma di due integrali immediati.

Esempio

5.25 Applicando il metodo visto, si verifica che:

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx \, dx = 0 \text{ per ogni coppia di interi } n, m$$

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0 \text{ per ogni coppia di interi } n, m, \; n \neq m$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0 \text{ per ogni coppia di interi } n, m, \; n \neq m$$

Questi integrali sono importanti nello studio delle serie di Fourier (v. secondo volume), assieme ai seguenti (che non si calcolano con le formule di prostaferesi, ma sostituendo $nx = t$ e sfruttando la (5.8)):

$$\int_0^{2\pi} (\cos nx)^2 \, dx = \int_0^{2\pi} (\sin nx)^2 \, dx = \pi \quad \text{per ogni intero positivo } n$$

Funzioni razionali di $\sin x$, $\cos x$

L'integrale di una funzione razionale di $\sin x$, $\cos x$, può sempre essere ricondotto all'integrale di una funzione razionale, mediante la seguente sostituzione:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \qquad x = 2 \operatorname{arctg} t \qquad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

La sostituzione è utile in forza delle seguenti identità trigonometriche:

$$\begin{cases} \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \end{cases} \quad \text{se} \quad t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

Questo metodo porta, in genere, a calcoli laboriosi, e va utilizzato perciò solo quando non sembra esservi una via più semplice o un buon software a portata di mano.

Esempio

5.26
$$\int \frac{\sin x - 5\cos x}{3+\sin x}\,dx$$

L'integrale si scompone nella somma di due:

$$I = \int \frac{\sin x}{3+\sin x}dx - 5\int \frac{\cos x}{3+\sin x}dx = I_1 - 5I_2$$

Il secondo è immediato:

$$I_2 = \log(3+\sin x) + c$$

Il primo non è immediato, ma può essere trattato con la sostituzione appena vista. Può essere utile un'ultima semplificazione preliminare:

$$I_1 = \int \frac{\sin x}{3+\sin x}dx = \int \left(1 - \frac{3}{3+\sin x}\right)dx = x - 3\int \frac{1}{3+\sin x}dx = x - 3I_3$$

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned} I_3 &= \left[t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}; \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2}\right] = \\ &= \int \frac{1}{3+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2} = 2\int \frac{1}{3t^2+2t+3}dt \end{aligned}$$

che è l'integrale di una funzione razionale di t. Scritta la primitiva di questa, occorre ritornare alla variabile x. I calcoli (noiosi ma ormai di routine) danno:

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)\right) + c$$

e in definitiva si ha:

$$\begin{aligned} I &= I_1 - 5I_2 = x - 3I_3 - 5\log(3+\sin x) = \\ &= x - \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)\right) - 5\log(3+\sin x) + c \end{aligned}$$

Esercizi

42 $\displaystyle\int (\sin x)^3\,dx$

43 $\displaystyle\int (\sin x)^4\,dx$

45 $\displaystyle\int_0^{\pi/8} (\sin x)^2(\cos x)^2\,dx$

65 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x + 2\cos x}{2+\sin x}\,dx$

44 $\displaystyle\int (\sin x)^2 \sin 2x\,dx$

46 $\displaystyle\int \sin 2x \cos 3x\,dx$

5.5 Integrazione delle funzioni irrazionali

Vediamo alcuni metodi di integrazioni applicabili a funzioni irrazionali di tipo molto semplice.

Sostituzioni tipiche per trattare funzioni razionali di x e una delle seguenti funzioni

$$\sqrt{a^2-x^2};\ \sqrt{a^2+x^2};\ \sqrt{x^2-a^2}$$

Se l'integranda è una funzione razionale di x e di una sola delle precedenti radici quadrate, si effettua una sostituzione standard:

A. $\sqrt{a^2-x^2}$. Si pone: $x = a\sin t, dx = a\cos t dt$;

$$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2(1-(\sin t)^2)} = |a\ \cos t|$$

(Se si sta calcolando un integrale definito, si sa dove varia x, e quindi t; perciò si può togliere il modulo mettendo il segno opportuno). L'integrale è quindi ricondotto a quello di una funzione razionale di $\sin t, \cos t$. A sua volta, questo è sempre riconducibile all'integrale di una funzione razionale, mediante la sostituzione $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = u$ (o un'altra via più semplice, se possibile).

B. $\sqrt{a^2+x^2}$. Si pone: $x = a\,\mathrm{Sh}\,t$, $dx = a\,\mathrm{Ch}\,t\,dt$;

$$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2(1+(\mathrm{Sh}\,t)^2)} = a\mathrm{Ch}t$$

(Si osservi che $\mathrm{Ch}\,t$ è sempre positivo). L'integrale è quindi ricondotto a quello di una funzione razionale di $\mathrm{Sh}\,t$, $\mathrm{Ch}\,t$. A sua volta, questo è sempre riconducibile all'integrale di una funzione razionale, mediante la sostituzione $e^t = u$; $t = \log u$; $dt = \frac{du}{u}$ (oppure, l'integrale si calcola per un'altra via più semplice).

C. $\sqrt{x^2-a^2}$. Si pone: $x = a\,\mathrm{Ch}\,t$, $dx = a\,\mathrm{Sh}\,t\,dt$;

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2((\mathrm{Ch}t)^2-1)} = |a\mathrm{Sh}t|$$

(Se si sta calcolando un integrale definito, si sa dove varia x, e quindi t; perciò si può togliere il modulo mettendo il segno opportuno). L'integrale è quindi ricondotto a quello di una funzione razionale di $\mathrm{Sh}\,t$, $\mathrm{Ch}\,t$ (v. caso B).

Osserviamo che quando si effettuano le sostituzioni B e C, nel ritornare alla variabile x occorre usare le *funzioni iperboliche inverse*:

$$x = a\mathrm{Ch}t \Rightarrow t = \ \mathrm{SettCh}\left(\frac{x}{a}\right) = \log\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right)$$

$$x = a\mathrm{Sh}t \Rightarrow t = \ \mathrm{SettSh}\left(\frac{x}{a}\right) = \log\left(\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}\right)$$

A questo proposito, è utile anche notare che:

$$\mathrm{Sh}(\mathrm{SettCh}\ \alpha) = \sqrt{\alpha^2-1} \qquad \mathrm{Ch}(\mathrm{SettSh}\ \alpha) = \sqrt{\alpha^2+1}$$

Esempi

5.27 Calcoliamo l'area dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Per simmetria, quest'area è quattro volte quella compresa nel primo quadrante, che può calcolarsi come integrale su $[0, a]$ della funzione:

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$\text{Area ellisse} = 4\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}dx = \left[x = a\sin t; dx = a\cos t\, dt;\ t = \arcsin\frac{x}{a} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2\, dt = 4ab \cdot \frac{\pi}{4} = \pi ab$$

risultato che generalizza in modo naturale la formula per l'area del cerchio, πr^2.

5.28 $$\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 - 1}}\, dx =$$

$[x = \mathrm{Ch}t; dx = \mathrm{Sh}t\, dt; t = \mathrm{SettCh}x \in (\mathrm{SettCh}\sqrt{2}, \mathrm{SettCh}2)]$

$$= \int_{\mathrm{SettCh}\sqrt{2}}^{\mathrm{SettCh}2} \frac{\mathrm{Sh}t}{(\mathrm{Ch}\, t)^2\mathrm{Sh}t}dt = \int_{\mathrm{SettCh}\sqrt{2}}^{\mathrm{SettCh}2} \frac{1}{(\mathrm{Ch}\, t)^2}\, dt = \left[\frac{\mathrm{Sh}t}{\mathrm{Ch}t}\right]_{\mathrm{SettCh}\sqrt{2}}^{\mathrm{SettCh}2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Integrale di una funzione razionale di $x, x^{n_1/m_1}, x^{n_2/m_2}, \ldots$

Si pone $x = t^n$ con n =minimo comune multiplo di $m_1, m_2, \ldots$. Si ha quindi $dx = nt^{n-1}dt$, e si ottiene una funzione razionale di t. Integrata questa, si torna alla variabile x.

Esempio

5.29 $$\int \frac{\sqrt{x}}{2x^{1/3} + 3}\, \frac{dx}{x}$$

La funzione integranda dipende da due diverse potenze a esponente razionale di x: $x^{1/2}, x^{1/3}$. Se poniamo:

$$x = t^6,\ dx = 6t^5 dt$$

otteniamo una funzione razionale di t, perché $x^{1/2} = t^3, x^{1/3} = t^2$:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{2x^{1/3} + 3}\, \frac{dx}{x} = \int \frac{t^3}{2t^2 + 3} \cdot \frac{6t^5}{t^6}dt =$$

$$= \int \frac{6t^2}{2t^2 + 3}dt = \int (3 - \frac{9}{2t^2 + 3})dt =$$

$$= 3t - 3\sqrt{\frac{3}{2}}\, \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{2}{3}}t + c = 3x^{1/6} - 3\sqrt{\frac{3}{2}}\, \mathrm{arctg}(\sqrt{\frac{2}{3}}x^{1/6}) + c$$

5.6 Integrazione di funzioni discontinue

Se una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è limitata in $[a, b]$ e continua salvo un numero finito di punti di discontinuità a salto nei punti $r_1, \ldots, r_k$, la funzione f è continua (o meglio prolungabile con continuità fino agli estremi) in ogni intervallino $[r_{i-1}, r_i]$; pertanto è integrabile su ogni intervallino $[r_{i-1}, r_i]$ e dunque (per il Teorema 6.3 visto nel par. 2.2) anche in tutto $[a, b]$. Inoltre, per la proprietà di additività dell'integrale, si può scrivere:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{r_1} f(x)dx + \int_{r_1}^{r_2} f(x)dx + \ldots + \int_{r_k}^b f(x)dx \tag{5.9}$$

Questo è utile perché ciascuno degli integrali scritti a secondo membro è ora l'integrale di una funzione continua, di cui possiamo cercare la primitiva (o calcolare il valore numerico approssimato dell'integrale). In ogni caso, il problema viene ricondotto a un numero finito di problemi più semplici.

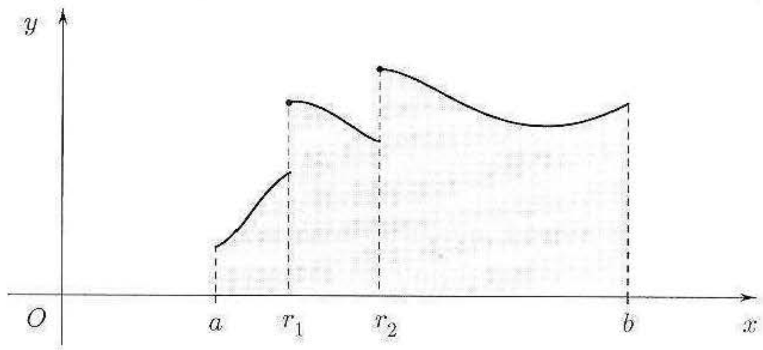

Figura 6.10. Integrazione di una funzione con due discontinuità a salto.

Si noti che, nel ragionamento precedente, ciò che conta è che su ciascun intervallino (r_k, r_{k+1}) la funzione sia continua, e i limiti ai due estremi esistano finiti; non ha importanza, invece, il valore effettivo di f nei due estremi. In altre parole, alterare il valore della funzione integranda in un numero finito di punti è del tutto irrilevante ai fini del calcolo dell'integrale. (Si pensi al significato geometrico: se un rettangolo viene alterato togliendogli un segmento e sostituendolo con un altro di diversa lunghezza, la sua area non cambia).

Esempio

5.30 Le seguenti funzioni sono integrabili (lo studente si renda conto in dettaglio del motivo):

$$\frac{\sin x}{x}, \text{ su } [-1, 1] \qquad \frac{x}{|x|}, \text{ su } [-1, 2]$$

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \text{ su } [-2, 3] \qquad e^{-1/x}, \text{ su } [0, 1] \text{ (ma non su } [-1, 0]!)$$

Esercizi

47 $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{2 - x^2}}\,dx$

48 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}}\,dx$

49 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3+x^2}}{x^2}\,dx$

50 $\displaystyle\int_2^3 \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^2}\,dx$

51 $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

52 $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-2}}{x}\,dx$

53 $\displaystyle\int \frac{1-x}{\sqrt{1+x}}\,dx$

54 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$

55 $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^{3/2}\,dx$

56 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{x(1+\sqrt[4]{x})}\,dx$

57 $\displaystyle\int x\sqrt{4-x^2}\,dx$

58 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+(\sin x)^2}\cos x\,dx$

I prossimi esercizi mostrano esempi di situazioni in cui, con opportune integrazioni per parti, ci si riconduce all'integrale di una funzione razionale o una funzione irrazionale dei tipi trattati in precedenza.

59 $\displaystyle\int x \arcsin x\,dx$

60 $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$

61 $\displaystyle\int_1^2 x(\log x)^2\,dx$

62 $\displaystyle\int x \operatorname{arctg}(x+1)\,dx$

Esercizi vari

63 a) Verificare che

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \qquad (n \geq 1)$$

è una somma di Cauchy-Riemann per la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, relativa all'intervallo $[0,1]$.
b) Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} S_n$$

64 Sia $f(t) = a_0 + a_1 \cos\omega t + b_1 \sin\omega t$.
Calcolare il valor medio e il valore efficace di f. Generalizzare a

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \{a_k \cos k\,\omega t + b_k \sin k\,\omega t\}$$

65 Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$a)\ \displaystyle\int \frac{x}{x^2-4}\,dx \qquad b)\ \int e^{-x}(x^2+x)\,dx \qquad c)\ \int e^x \sin 2x\,dx$

$d)\ \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx \qquad e)\ \int \sqrt{2x+1}\,\frac{1}{x}\,dx$

66 Calcolare i seguenti integrali definiti:

$$a)\ \int_0^{\pi} x \sin 2x\, dx \qquad b)\ \int_1^2 \frac{1}{x(\log x + 1)}\, dx$$

$$c)\ \int_1^2 \frac{\sqrt{x+1}}{x}\, dx \qquad d)\ \int_0^9 \sqrt{1+\sqrt{x}}\, dx \qquad \left(\text{porre } \sqrt{1+\sqrt{x}} = t\right)$$

67 Calcolare per ogni n intero positivo

$$a_n = \int_0^n \frac{x-1}{(x+1)^3}\, dx$$

Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

6 ALCUNE APPLICAZIONI FISICHE E GEOMETRICHE

Oltre a quelle già incontrate nel par. 2.1, l'integrale ha numerose altre importanti applicazioni.

Energia potenziale di una forza elastica di richiamo. Lavoro di una forza

Una particella di massa M è soggetta ad una forza elastica di richiamo, in direzione dell'asse x, cioè ad una forza direttamente proporzionale allo spostamento da un punto fisso determinato (posizione a riposo) con verso tale da ridurre lo spostamento. Il caso tipico è quello prodotto da una molla soggetta a spostamenti sufficientemente piccoli dalla posizione a riposo.

Se si scelgono le coordinate sull'asse in modo che la posizione di riposo per la particella corrisponda ad $x = 0$ la forza avrà un'intensità data dalla formula

$$F = -kx \tag{6.1}$$

dove $k > 0$ è una costante (detta costante elastica) che dipende dalla molla. La (6.1) si chiama *legge di Hooke*. Per calcolare l'energia potenziale associata alla forza F, calcoliamo il lavoro L che una forza applicata, F_{app}, deve compiere per spostare la massa M, inizialmente a riposo, in un punto di ascissa x_f. L'energia potenziale sarà data da $E_{\text{pot}} = -L$. In base alla (6.1), la forza applicata è funzione della posizione ed è in ogni punto uguale ed opposta a F:

$$F_{\text{app}} = -F = kx$$

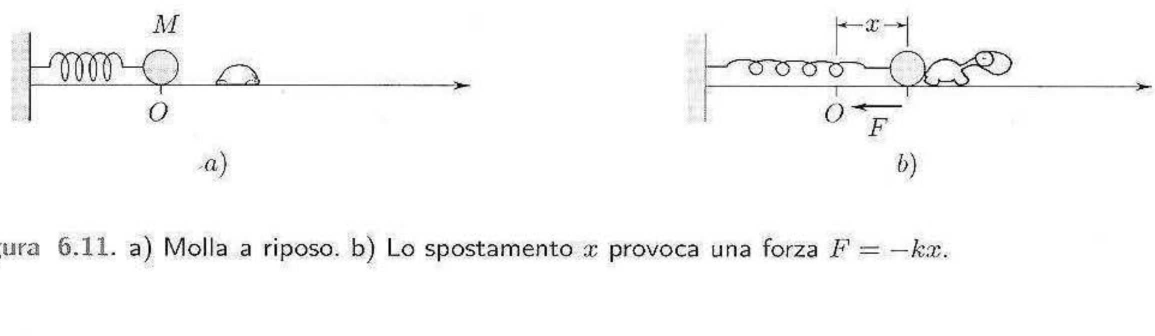

Figura 6.11. a) Molla a riposo. b) Lo spostamento x provoca una forza $F = -kx$.