UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DELLA CALABRIA

Appello di Analisi 1 del 19 giugno 2018

A

COGNOME e NOME: ....

MATRICOLA E CORSO DI LAUREA: ....

SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE

Esercizio 1.
Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{x-1}{x}}$$

Determinarne:
dominio
Svolgimento:

Il dominio di f coincide con il dominio della funzione razionale fratta $\frac{x-1}{x}$, pertanto

$$\mathcal{D}_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

limiti agli estremi del dominio;
Svolgimento:

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{1-\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to\pm\infty} 1-\frac{1}{x}} = e,$$

dove nell'ultimo passaggio si sfrutta la continuità della funzione esponenziale. Dunque la retta $y = e$ è un asintoto orizzontale sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$.

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 0^-} e^{1-\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0^-} 1-\frac{1}{x}} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{1-\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0^+} 1-\frac{1}{x}} = 0.$$

Da quanto appena dimostrato si deduce che la retta $x = 0$ è un asintoto verticale per $x \to 0^-$.

intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo e di minimo;
Svolgimento:

Procediamo con il calcolo della derivata prima di f, applicando nell'ordine la regola di derivazione per le funzioni composte e la regola di derivazione del quoziente, si ha

$$f'(x) = e^{\frac{x-1}{x}} \left(\frac{x-1}{x} \right)' = e^{\frac{x-1}{x}} \left(\frac{x-(x-1)}{x^2} \right) = \frac{e^{\frac{x-1}{x}}}{x^2}.$$

Osserviamo che la disequazione $f'(x) > 0$ è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Quindi f risulta essere **crescente** nell'intervallo $(-\infty, 0)$ **e** anche nell'intervallo $(0, +\infty)$.

N.B. La funzione non è crescente in tutto il dominio. Infatti, e.g. presi $x_1 = -1 < x_2 = 50$ risulta $f(x_1) = e^2 > f(x_2) = e^{\frac{49}{50}}$.

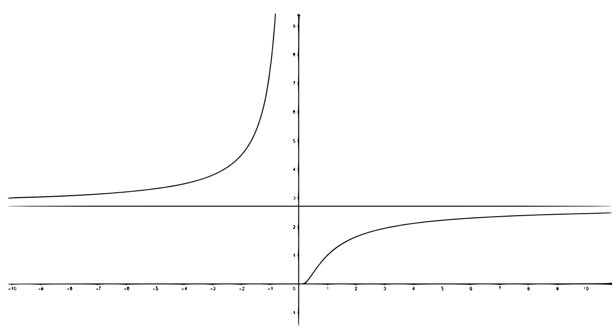
intervalli di concavità e convessità;
Svolgimento:

Analogamente a quanto fatto nel quesito precedente, calcoliamo la derivata seconda di f.

$$f''(x) = \left(\frac{e^{\frac{x-1}{x}}}{x^2} \right)' = \frac{\left(e^{\frac{x-1}{x}}\right)' x^2 - e^{\frac{x-1}{x}} (x^2)'}{x^4} = \frac{\frac{1}{x^2} x^2 - 2x}{x^4} e^{\frac{x-1}{x}} = \frac{1-2x}{x^4} e^{\frac{x-1}{x}} = \frac{1-2x}{x^2} f'(x).$$

Osserviamo che essendo $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $x^2 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, segue che $f''(x) \geq 0$ per $x \leq \frac{1}{2}$. Dunque, applicando il criterio di convessità risulta che f è convessa in $(-\infty, 0)$ e in $(0, \frac{1}{2})$, mentre risulta essere concava in $(\frac{1}{2}, +\infty)$. Inoltre il punto di ascissa $x = \frac{1}{2}$ è un punto di flesso.

tracciare il grafico qualitativo di $f(x)$;
Svolgimento:



dire, motivando la risposta, quanti sono gli zeri dell'equazione

$$f(x) = 1,$$

dove $f(x)$ rappresenta la funzione precedentemente studiata;
Svolgimento:

il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = 1$ basta risolvere l'equazione. Si ha

$$e^{\frac{x-1}{x}} = 1 \Rightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1.$$

Dunque lo zero è **unico** Alternativamente, notiamo che trovare il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = 1$ è equivalente a trovare il numero degli zeri della funzione $g(x) := f(x) - 1$. Il grafico della funzione $g(x)$ è una traslazione verso il basso di un'unità rispetto al grafico di $f(x)$, pertanto $g(x)$ avrà come asintoto orizzontale la retta $y = e - 1 > 0$. Poiché nell'intervallo $(-\infty, 0)$ la funzione $g(x)$ è strettamente positiva, gli eventuali zeri vanno ricercati nell'intervallo $(0, +\infty)$. Presi $a = \frac{1}{2}$ e $b = 2$, risulta $g(a) \cdot g(b) = (e^{-1} - 1)(e^{\frac{1}{2}} - 1) < 0$; essendo $g(x)$ continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, il **teorema degli zeri** garantisce l'**esistenza** di almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$. Essendo $g'(x) = f'(x)$, segue che anche $g(x)$ monotona crescente in $(0, +\infty)$ e quindi che lo zero è **unico**.

Esercizio 2. Studiare il dominio della seguente funzione

$$f(x) = \frac{|\tan x|}{\tan^2 x + 3}.$$

Svolgimento: Osserviamo che per i valori per i quali è definita la tangente il denominatore risulta sempre diverso da zero. Pertanto

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Trovare i punti di massimo e minimo della funzione $f(x)$.
Svolgimento:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{\tan^2 x+3} & \text{se} \quad k\pi \le x < \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{-\tan x}{\tan^2 x+3} & \text{se} \quad \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi \end{cases}$$

e

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3-\tan^2 x}{\cos^2 x(\tan^2 x+3)} & \text{se} \quad k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{\tan^2 x-3}{\cos^2 x(\tan^2 x+3)} & \text{se} \quad \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi. \end{cases}$$

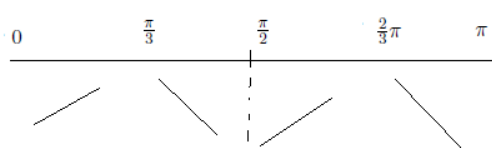
Essendo la tangente periodica di periodo π studiamo la derivata prima nell'intervallo $[0, \pi]$. Si ha:
se $0 < x < \frac{\pi}{2}$ allora $f'(x) = \frac{3-\tan^2 x}{\cos^2 x(\tan^2 x+3)}$. Pertanto

$$f'(x) \ge 0 \Rightarrow 3 - \tan^2 x \ge 0 \Rightarrow \tan^2 x \le 3 \Rightarrow \tan x \le \sqrt{3} \Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{3}.$$

Dunque la funzione è crescente per $0 < x < \frac{\pi}{3}$ e decrescente per $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$.
Se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ allora $f'(x) = \frac{\tan^2 x-3}{\cos^2 x(\tan^2 x+3)}$. Pertanto

$$f'(x) \ge 0 \Rightarrow \tan^2 x - 3 \ge 0 \Rightarrow \tan^2 x \ge 3 \Rightarrow -\tan x \ge \sqrt{3} \Rightarrow \tan x \le -\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < x < \frac{2}{3}\pi.$$

Dunque la funzione è crescente per $\frac{\pi}{2} < x < \frac{2}{3}\pi$ e decrescente per $\frac{2}{3}\pi < x < \pi$.
Riassumiamo le informazioni trovate in un grafico



Possiamo allora concludere che i punti di massimo della funzione sono $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, x = \frac{2}{3}\pi + k\pi$, mentre i punti di minimo sono $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 3. Studiare la convergenza del seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\sqrt[3]{x^2}\right)}{x(\log^2 x + 1)}\, dx.$$

Svolgimento:
L'integrale risulta essere improprio, sia perchè l'integranda

$$\frac{\sin\left(\sqrt[3]{x^2}\right)}{x(\log^2 x + 1)}$$

risulta essere illimitata in un intorno del punto $x = 0$, sia perchè il dominio di integrazione $(0, +\infty)$ è illimitato. Pertanto da definizione

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\sqrt[3]{x^2}\right)}{x(\log^2 x + 1)}\, dx \\ &:= \int_0^{1} \frac{\sin\left(\sqrt[3]{x^2}\right)}{x(\log^2 x + 1)}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(\sqrt[3]{x^2}\right)}{x(\log^2 x + 1)}\, dx\end{aligned}$$

e la funzione è integrabile in senso improprio se e solo se ambedue gli integrali a destra della precedente uguaglianza risultano essere integrabili in senso improprio.

Per $0 < x < 1$ la funzione integranda $\sin\left(\sqrt[3]{x^2}\right)/x(\log^2 x + 1)$ risulta essere positiva. Inoltre $\sin\left(\sqrt[3]{x^2}\right) \sim \sqrt[3]{x^2}$ per $x \to 0^+$ e $(\log^2 x + 1) \geq 1$ per $x \in (0, 1)$. Si ha quindi

$$\frac{\sin\left(\sqrt[3]{x^2}\right)}{x(\log^2 x + 1)} \leq \frac{\sin\left(\sqrt[3]{x^2}\right)}{x} \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}, \text{ per } x \to 0.$$

Utilizzando il criterio del confronto asintotico e del confronto semplice, otteniamo

$$\int_0^{1} \frac{\sin\left(\sqrt[3]{x^2}\right)}{x(\log^2 x + 1)}\, dx < +\infty.$$

Nell'intervallo $(1, +\infty)$ la funzione integranda $\sin\left(\sqrt[3]{x^2}\right)/x(\log^2 x + 1)$ cambia segno. Utilizziamo quindi il criterio della convergenza assoluta per gli integrali impropri. Si ha che

$$\left|\frac{\sin\left(\sqrt[3]{x^2}\right)}{x(\log^2 x + 1)}\right| \leq \frac{1}{x(\log^2 x + 1)}$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(\log^2 x + 1)} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2 + 1}\, dt := \lim_{k \to +\infty} \arctan(k) - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Per il criterio del confronto semplice e il criterio della convergenza assoluta, si ottiene

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(\sqrt[3]{x^2}\right)}{x(\log^2 x + 1)}\, dx < +\infty.$$

Finalmente si deduce che

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\sqrt[3]{x^2}\right)}{x(\log^2 x + 1)}\, dx < +\infty.$$

Risolvere il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 5e^x + 6}\, dx$$

Poniamo $t = e^x$.

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 5e^x + 6}\, dx = \int \frac{1}{t^2 - 5t + 6}\, dt.$$

Utilizzando la regola dei fratti semplici, si ha che

$$\frac{1}{t^2 - 5t + 6} = \frac{A}{(t-2)} + \frac{B}{(t-3)}$$

con $A = -1$ e $B = 1$. Quindi

$$\int \frac{1}{t^2 - 5t + 6}\, dt = -\ln|(t-2)| + \ln|(t-1)| + C.$$

Concludendo

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} - 5e^x + 6}\, dx = -\ln|(e^x - 2)| + \ln|(e^x - 1)| + C.$$

Esercizio 4. Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln\left(n^2\right)}{n^2}.$$

Svolgimento:

Per studiare la convergenza assoluta, dobbiamo vedere se converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln\left(n^2\right)}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln\left(n\right)}{n^2}.$$

Poiché $\ln(n) < \sqrt{n}$, si ha:

$$\frac{\ln(n)}{n^2} < \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Quindi, poiché $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge, allora per il criterio del confronto converge anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$.
Concludiamo pertanto che la serie data converge assolutamente e quindi anche semplicemente.

Osserviamo che la convergenza semplice si sarebbe potuta ottenere anche applicando il criterio di Leibnitz. Infatti la successione $a_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$ è positiva e tende a 0 (vedi gerarchia degli infiniti). Inoltre a_n è decrescente, come si vede considerando la funzione

$$f(x) = \frac{\log(x)}{x^2},$$

la cui derivata è

$$f'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3},$$

che è negativa per $x \geq \sqrt{e}$. Quindi, poiché $a_n = f(n)$, a_n è decrescente per $n \geq 2$.