UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DELLA CALABRIA

Appello di Analisi 1 del 12 luglio 2018

$\boxed{\text{A}}$

COGNOME e NOME: ....

MATRICOLA E CORSO DI LAUREA: ....

SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE

Esercizio 1.
Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right)$$

Determinarne:
dominio
Svolgimento:

Le condizioni da imporre affinchè f sia definita sono:

- $x \neq 0$
- $\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} > 0$

Osserviamo che

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

e quindi

$$\mathrm{Dom(f)} = (0, +\infty)$$

studiare il segno della funzione;
Svolgimento:

f è positiva se

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} > 1,$$

ovvero se

$$\sqrt{x^2+1} > x+1.$$

Essendo $x > 0$, segue che anche $x+1 > 0$ e quindi $\sqrt{x^2+1}$ è strettamente maggiore di $x+1$ se

$$x^2+1 > (x+1)^2,$$

ovvero se

$$x^2 + 1 > x^2 + 2x + 1$$

e quindi se:

$$x < 0.$$

Poiché la funzione è definita solo per $x > 0$, deduciamo che f è negativa in tutto il suo dominio.

limiti agli estremi del dominio;
Svolgimento:

Ricordando che

$$f(x) = \log\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}\right),$$

otteniamo:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}\right) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{x}{x\left[\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\right]}\right) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(\frac{1}{\left[\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\right]}\right) = 0$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \log\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}\right) = -\infty.$$

intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo e di minimo;
Svolgimento:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1} \cdot \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - \left(\sqrt{x^2+1}-1\right)}{x^2} = \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1} \cdot \frac{x^2 - x^2 - 1 + \sqrt{x^2+1}}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \\ &= \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}, \end{aligned}$$

per cui f è strettamente crescente in tutto il suo dominio e quindi non ci sono punti di massimo e minimo relativi. Inoltre, dallo studio dei limiti visto prima deduciamo che la funzione non ammette punti di massimo e minimo assoluti.

intervalli di concavità e convessità;
Svolgimento:

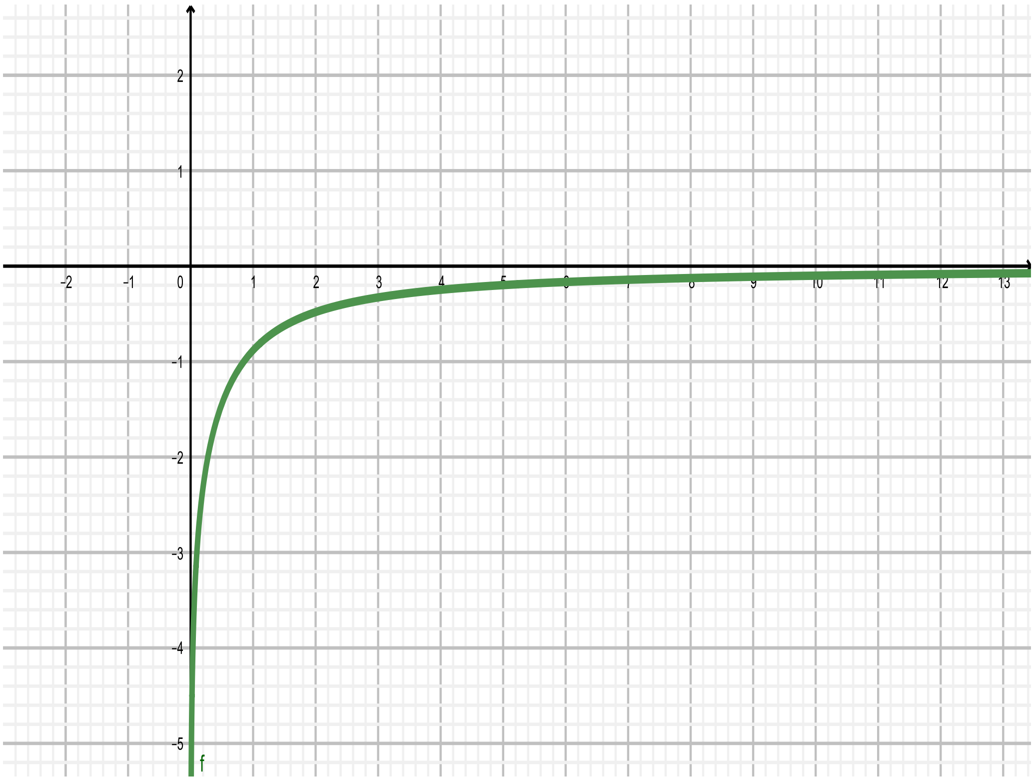
Poiché $f''(x) = -\frac{2x^2+1}{x^2\sqrt{(x^2+1)^3}} < 0 \quad \forall\, x \in \mathrm{Dom(f)}$, deduciamo che f è concava in tutto il suo dominio.

tracciare il grafico qualitativo di $f(x)$;
Svolgimento:
dire, motivando la risposta, quanti sono gli zeri dell'equazione

$$f(x) = -50,$$

dove $f(x)$ rappresenta la funzione precedentemente studiata;
Svolgimento:

Essendo la funzione strettamente monotona crescente, l'equazione data ha un'unica soluzione.



Analisi Matematica 1 - 12/07/2018

A

Esercizio 2. Studiare il dominio della seguente funzione

$$f(x) = \log(\cos x) + x.$$

Svolgimento:

La funzione è definita quando $\cos x > 0$, ovvero:

$$\forall x \in D = \cup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right).$$

Determinare gli eventuali punti di massimo e minimo della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$.
Svolgimento:

Osserviamo che $D \cap [0, 2\pi] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$.
Si ha:

$$f'(x) = -\tan x + 1.$$

L'equazione $f'(x) = 0$ ha due soluzioni all'interno dell'intervallo $[0, 2\pi]$: $x_1 = \frac{\pi}{4}$ e $x_2 = \frac{5}{4}\pi$. Di queste, però, solo $x_1 \in D$.
Studiando il segno di f' vicino x_1, si ha che $f' > 0$ a sinistra di x_1 e $f' < 0$ a destra e pertanto x_1 è un punto di massimo locale.
Inoltre osserviamo che:

$$f(0) = 0, \quad f(2\pi) = 2\pi, \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{4} = -\log(\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} < 2\pi$$

e

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{3}{2}\pi^+} f(x) = -\infty$$

e quindi, poiché $f\left(\frac{\pi}{4}\right) < f(2\pi)$, deduciamo che x_1 è un punto di massimo relativo ma non assoluto, che il massimo assoluto di f è assunto in 2π, che 0 è un punto di minimo relativo e che f non ammette minimo assoluto.

A

Esercizio 3. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sin^3(x).$$

Calcolare l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione $f(x)$ e l'asse delle x, per $x \in [0, 2\pi]$.

Svolgimento:

Studiando il segno di f, si ha: $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, \pi]$ e $f(x) \leq 0 \quad \forall x \in [\pi, 2\pi]$.
Pertanto l'area cercata è uguale a:

$$A = \int_0^{\pi} f(x)dx - \int_{\pi}^{2\pi} f(x)dx.$$

Calcoliamo una primitiva di f. Si ha:

$$\int \sin^3(x)dx = \int \left(1 - \cos^2(x)\right)\sin(x)dx.$$

Facendo la sostituzione $t = \cos(x)$, si ottiene

$$\int \left(1 - \cos^2(x)\right)\sin(x)dx = \int (t^2 - 1)dt = \frac{t^3}{3} - t = \frac{\cos^3(x)}{3} - \cos(x) = F(x).$$

Quindi, usando il Teorema Fondamentale del Calcolo, si ottiene:

$$A = F(\pi) - F(0) - F(2\pi) + F(\pi) = 2\left[F(\pi) - F(0)\right] = 2\left[-\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1 = 2 - \frac{2}{3}\right] = \frac{8}{3}.$$

Motivando la risposta, dire se il seguente integrale improprio converge.

$$\int_1^{+\infty} \left[\sin\left(\frac{x + \sqrt{x}}{x^2 + x}\right)\right]^2 dx.$$

Svolgimento:

Per $x \to +\infty$ la funzione $\frac{x+\sqrt{x}}{x^2+x}$ è asintoticamente equivalente alla funzione $\frac{1}{x}$ e quindi $\left[\sin\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x^2+x}\right)\right]^2$ è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{x^2}$. Pertanto, usando il criterio del confronto asintotico, deduciamo che l'integrale improprio converge.

 A

Esercizio 4. Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{n^n}{n!\ 3^n}\sin(n).$$

Svolgimento:

Vediamo se la serie converge assolutamente, ovvero controlliamo se converge la serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^n}{n!\ 3^n}|\sin(n)|.$$

Osservato che $|\sin(n)| \leq 1$, segue che:

$$b_n = \frac{n^n}{n!\ 3^n}|\sin(n)| \leq \frac{n^n}{n!\ 3^n}.$$

Usiamo il criterio del rapporto per studiare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^n}{n!\ 3^n}$. Si ha:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!3^{n+1}}\cdot\frac{n!3^n}{n^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^n}{3n^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1.$$

Quindi la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^n}{n!\ 3^n}$ converge e per il Criterio del Confronto converge anche la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge e quindi la serie di partenza converge assolutamente e, quindi, anche semplicemente.