UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DELLA CALABRIA

Appello di Analisi 1 del 28/01/2020

A

COGNOME e NOME: ....

MATRICOLA E CORSO DI LAUREA: ....

SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE

Esercizio 1.
Si consideri la funzione

$$f(x) = (x+2)\sqrt{\frac{x^2+1}{x+2}}$$

Determinarne:
dominio
Svolgimento:
Il denominatore della frazione all'interno della radice non deve annullarsi, per cui un primo vincolo è:

$$x + 2 \neq 0\,.$$

Inoltre, l'argomento della radice deve essere positivo, ovvero si deve avere:

$$\frac{x^2+1}{x+2} \geq 0\,.$$

Poiché $x^2 + 1 > 0$, il segno della frazione è dato dal segno del denominatore, che sarà positivo quando $x \geq -2$.
Pertanto, mettendo insieme le due informazioni, si conclude che

$$Dom(f) = (-2, +\infty)\,.$$

limiti agli estremi del dominio;
Svolgimento:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+2)\sqrt{\frac{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{1+\frac{2}{x}}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+} \sqrt{x+2}\cdot\sqrt{5} = 0\,.$$

derivata prima;
Svolgimento:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \sqrt{\frac{x^2+1}{x+2}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+2}{x^2+1}} \cdot \frac{2x(x+2)-(x^2+1)}{x+2} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x+2}} + \frac{x^2+4x-1}{2\sqrt{x^2+1}\cdot\sqrt{x+2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+2}}\left[\sqrt{x^2+1} + \frac{x^2+4x-1}{2\sqrt{x^2+1}}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+2}} \cdot \frac{2(x^2+1)+x^2+4x-1}{2\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{3x^2+4x+1}{2\sqrt{(x+2)(x^2+1)}}
\end{aligned}
$$

intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo e di minimo relativi;
Svolgimento:
Troviamo prima i punti stazionari, ovvero risolviamo l'equazione:

$$f'(x) = 0$$

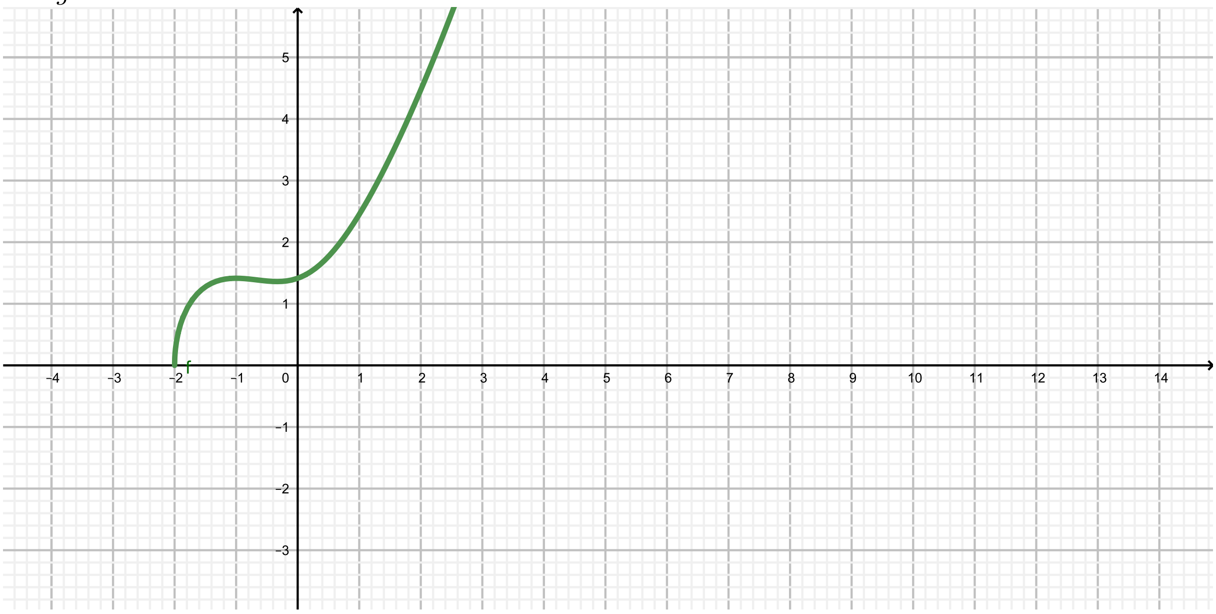
e quindi:

$$3x^2 + 4x + 1 = 0,$$

le cui soluzioni sono:

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = -\frac{1}{3}\,.$$

Poiché il segno di f' è dato dal segno del numeratore $3x^2 + 4x + 1$, che è strettamente positivo per $x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ e strettamente negativo per $x \in \left(-1, -\frac{1}{3}\right)$, deduciamo che f è strettamente crescente a sinistra di x_1 e strettamente decrescente a destra di x_1, per cui x_1 è un punto di massimo relativo e che f è strettamente decrescente a sinistra di x_2 e strettamente crescente a destra di x_2, per cui x_2 è un punto di minimo relativo.
giustificando la risposta, stabilire se la funzione ammette massimo assoluto;
Svolgimento:
Poichè $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $f(x)$ non ammette massimo assoluto.
tracciare il grafico qualitativo di $f(x)$;
Svolgimento:



Esercizio 2.
Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x > 1 \\ e^{-x^2} & \text{se } x \leq 1\,. \end{cases}$$

Studiare la continuità di f nel suo dominio.
Svolgimento:
Osserviamo che f è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed innanzitutto osserviamo che nell'insieme $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ è continua, essendo definita sugli intervalli $(-\infty, 1)$ e $(1, +\infty)$ tramite composizione delle funzioni elementari continue e^x, $-\frac{1}{x^2}, -x^2$.
Rimane da verificare se f è continua nel punto 1.
Si ha:

$$\lim_{x\to 1^+} e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{e} = \lim_{x\to 1^-} e^{-x^2}$$

e $f(1) = \frac{1}{e}$, per cui f è continua in 1.
Studiare la derivabilità di f nel suo dominio.
Svolgimento:
Si ha:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x > 1 \\ \\ -2x\, e^{-x^2} & \text{se } x < 1\,. \end{cases}$$

Rimane da verificare se f è derivabile nel punto 1.
Si ha:

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{e}$$

e

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} -2x\, e^{-x^2} = -\frac{2}{e}\,,$$

per cui f non è derivabile in 1, che è un punto angoloso.
Calcolare il massimo e minimo assoluto di f nell'intervallo $[0, 2]$.
Svolgimento:
Osserviamo che f' è strettamente negativa in $(0, 1)$ e strettamente positiva in $(1, 2)$, per cui f è strettamente decrescente in $(0, 1)$ e strettamente crescente in $(1, 2)$. Quindi il minimo di f in $[0, 2]$ è asssunto in 1 e vale $\frac{1}{e}$ e, osservato che $f(0) = 1$ e $f(2) = e^{-\frac{1}{4}} < 1$, il massimo di f in $[0, 2]$ è assunto in 0 e vale 1.

Esercizio 3. Trovare le primitive della funzione

$$f(x) = x^2 \log(x^2+1)\,.$$

Svolgimento:
Applicando la formula di integrazione per parti, si ottiene:

$$\int x^2 \log(x^2+1)dx = -\int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{2x}{x^2+1}dx + \frac{1}{3}x^3\log(x^2+1) = -\frac{2}{3}\int\frac{x^4}{x^2+1}dx + \frac{1}{3}x^3\log(x^2+1)\,.$$

Calcoliamo $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$.
Osservato che

$$x^4 = (x^2+1)(x^2-1)+1\,,$$

si ha:

$$\int\frac{x^4}{x^2+1}dx = \int(x^2-1)dx + \int\frac{1}{x^2+1}dx = \frac{x^3}{3} - x + \arctan(x) + c\,.$$

In conclusione si ha:

$$\int x^2\log(x^2+1)dx = -\frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3} - x + \arctan(x)\right] + \frac{1}{3}x^3\log(x^2+1) + c\,.$$

Motivando la risposta, dire se il seguente integrale improprio converge:

$$\int_0^{+\infty}\arctan(\sqrt{x^5})\frac{1}{x^3}dx.$$

Svolgimento:
Si ha:

$$\int_0^{+\infty}\arctan(\sqrt{x^5})\frac{1}{x^3}dx = \int_0^{1}\arctan(\sqrt{x^5})\frac{1}{x^3}dx + \int_0^{+\infty}\arctan(\sqrt{x^5})\frac{1}{x^3}dx\,.$$

Per $x \to 0$ la funzione $\arctan(\sqrt{x^5})$ è asintoticamente equivalente alla funzione $x^{\frac{5}{2}}$ e pertanto la funzione $\arctan(\sqrt{x^5})\frac{1}{x^3}$ è asintoticamente equivalente alla funzione $\frac{1}{x^{3-\frac{5}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, che ha integrale improprio convergente tra 0 e 1. Quindi, per il criterio del confronto asintotico, $\displaystyle\int_0^1 \arctan(\sqrt{x^5})\frac{1}{x^3}dx$ converge.
Poichè $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\arctan(x) = \frac{\pi}{2}$, per $x \to +\infty$ la funzione $\arctan(\sqrt{x^5})\frac{1}{x^3}$ è asintoticamente equivalente alla funzione $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^3}$, che ha integrale improprio convergente tra 1 e $+\infty$. Quindi, per il criterio del confronto asintotico, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\arctan(\sqrt{x^5})\frac{1}{x^3}dx$ converge.

Esercizio 4.
Studiare la convergenza delle seguenti serie

1.
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+3}\,.$$

Svolgimento:

Ponendo $a_n=\frac{n}{n^2+3}$, si ha $a_n=f(n)$, dove

$$f(x)=\frac{x}{x^2+3}\,.$$

Essendo

$$f'(x)=\frac{-x^2+3}{(x^2+3)^2}$$

negativa per $x>\sqrt{3}$, deduciamo che la successione a_n è decrescente per $n\geq 2$. Osserviamo, inoltre, che a_n è postiva e che $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

Quindi si può applicare il criterio di Leibniz e concludere che la serie converge.

2.
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2+\log(n)}{n^2+3}\,.$$

Svolgimento:

Poichè

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+\log(n)}{n^2+3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{\log(n)}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}=1\,,$$

non è verificata la condizione necessaria affinchè una serie converga e quindi la serie non converge.