UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DELLA CALABRIA
FACOLTÀ DI INGEGNERIA

APPELLO DEL 23 gennaio 2018

COGNOME: ....

NOME: ....

MATRICOLA E CORSO DI LAUREA: ....

IMPORTANTE

Al termine della prova è necessario riconsegnare solo il presente fascicolo. I risultati e lo svolgimento relativo vanno riportati negli appositi spazi o nel retro dei fogli del presente fascicolo: un campo vuoto o assenza di calcoli dove richiesto significano 0 punti.

SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE

A

Esercizio 1.
Si consideri la funzione
$$f(x) = \sqrt[3]{(1-x)(x^2-4x+4)}$$
Determinarne:
dominio
Svolgimento:

Poiché la radice cubica è definita su tutto $\mathbb{R}$, il dominio di f é tutto $\mathbb{R}$.

studiare il segno della funzione;
Svolgimento:
Poiché $\sqrt[3]{t} \geq 0$ per $t \geq 0$ e $\sqrt[3]{t} < 0$ per $t < 0$, studiamo il segno dell'argomento della radice cubica, che è dato dal prodotto di $(x-2)^2$ (che è una quantità sempre positiva) e $1-x$. Pertanto si ha:
$$f(x) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1-x<0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x<1$$
e
$$f(x) = 0 \qquad \text{per } x=1,\ x=2\,.$$
eventuali asintoti obliqui;
Svolgimento:

Poichè
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\,,$$
potrebbero esserci asintoti obliqui.
Inoltre si ha:
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt[3]{-x^3+5x^2-8x+4}}{x} = \frac{\sqrt[3]{-1+\frac{5}{x}-\frac{8}{x^2}+\frac{4}{x^3}}}{x}$$
e quindi:
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = -1 = m\,.$$
Consideriamo quindi la quantità
$$f(x) - mx \quad = \quad \sqrt[3]{-x^3+5x^2-8x+4}+x.$$
Razionalizzando si ha
$$\sqrt[3]{-x^3+5x^2-8x+4}+x =$$
$$\frac{(\sqrt[3]{-x^3+5x^2-8x+4}+x)(\sqrt[3]{(-x^3+5x^2-8x+4)^2}-x\sqrt[3]{-x^3+5x^2-8x+4}+x^2)}{\sqrt[3]{(-x^3+5x^2-8x+4)^2}-x\sqrt[3]{-x^3+5x^2-8x+4}+x^2)}$$
$$\frac{-x^3+5x^2-8x+4+x^3}{\sqrt[3]{(-x^3+5x^2-8x+4)^2}-x\sqrt[3]{-x^3+5x^2-8x+4}+x^2)} =$$
$$\frac{5x^2-8x+4}{\sqrt[3]{(-x^3+5x^2-8x+4)^2}-x\sqrt[3]{-x^3+5x^2-8x+4}+x^2)}.$$
Pertanto si ha
$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-mx] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x^2-8x+4}{\sqrt[3]{(-x^3+5x^2-8x+4)^2}-x\sqrt[3]{-x^3+5x^2-8x+4}+x^2)} =$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x^2}{3x^2} = \frac{5}{3}.$$

IN ALTERNATIVA si poteva procedere nel seguente modo:

$$\begin{aligned} f(x) - mx &= \sqrt[3]{-x^3 + 5x^2 - 8x + 4} + x \\ &= -x\sqrt[3]{1 - \frac{5}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{4}{x^3}} + x \\ &= \frac{1 - \sqrt[3]{1 - \frac{5}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{4}{x^3}}}{\frac{1}{x}} . \end{aligned}$$

Per calcolare $\lim_{x\to\pm\infty}$, usiamo il Teorema di De L'Hospital e otteniamo:

$$\frac{\frac{\frac{5}{x^2} - \frac{16}{x^3} + \frac{12}{x^4}}{3\sqrt[3]{1 - \frac{5}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{4}{x^3}}^{\,2}}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{5 - \frac{16}{x} + \frac{12}{x^4}}{3\sqrt[3]{\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)^2}}$$

e quindi

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{5 - \frac{16}{x} + \frac{12}{x^4}}{3\sqrt[3]{\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right)^2}} = \frac{5}{3},$$

per cui concludiamo che c'è asintoto obliquo sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$ dato dalla retta di equazione:

$$y = -x + \frac{5}{3} .$$

derivata prima;
Svolgimento:

$f(x)$ è ottenuta come funzione composta di $g(x) = \sqrt[3]{x}$ e $h(x) = (1-x)(x-2)^2$. Poiché $h(x)$ si annulla per in $x = 1$ e $x = 2$ e poiché $\sqrt[3]{x}$ è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, allora

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1, 2\}$$

possiamo applicare le regole di derivazione di funzioni composte e prodotto di funzioni, ottenendo:

$$f'(x) = \frac{-(x-2)^2 + 2(1-x)(x-2)}{3\sqrt[3]{(1-x)^2(x-2)^4}} = \frac{4 - 3x}{3\sqrt[3]{x-2}\sqrt[3]{(1-x)^2}} .$$

eventuali punti di non derivabilità e loro classificazione;
Svolgimento:

Per vedere se f è derviabile in $x = 1$ e $x = 2$, possiamo usare il teorema che ci dice che, se esiste il limite per $x \to x_0^\pm$ di $f'(x)$, allora esiste anche $\lim_{x\to x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ e quest'ultimo è uguale al precedente.
Poiché, per $x \to 1^\pm$, $4 - 3x$ tende a 1 e $x - 2$ tende a -1 e $(1-x)^2$ è una quantità che tende a 0 ed è sempre positiva, allora il segno della derivata vicino a 1 è negativo e si ha:

$$\lim_{x\to 1^\pm} f'(x) = -\infty .$$

Poiché, per $x \to 2^\pm$, $4 - 3x$ tende a -2 e $(1-x)^2$ tende a 1 e $(x-2)$ tende a 0 essendo negativa a sinistra di 2 e positiva a sinistra di 2, allora il segno della derivata vicino a 2 è positivo a sinistra di 2 e negativo a destra di 2 e si ha:

$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = -\infty , \qquad \lim_{x\to 2^-} f'(x) = +\infty .$$

Quindi $f(x)$ non è derivabile in $x = 1$ e $x = 2$ e in particolare $x = 1$ è un punto di flesso a tangente verticale e $x = 2$ è un punto di cuspide con punta rivolta verso l'alto.

eventuali punti stazionari e loro classificazione ed eventuali punti di massimo e minimo relativi;

Svolgimento:

Risolvendo l'equazione $\frac{4-3x}{3\sqrt[3]{x-2}\sqrt[3]{(1-x)^2}} = 0$, troviamo il punto stazionario

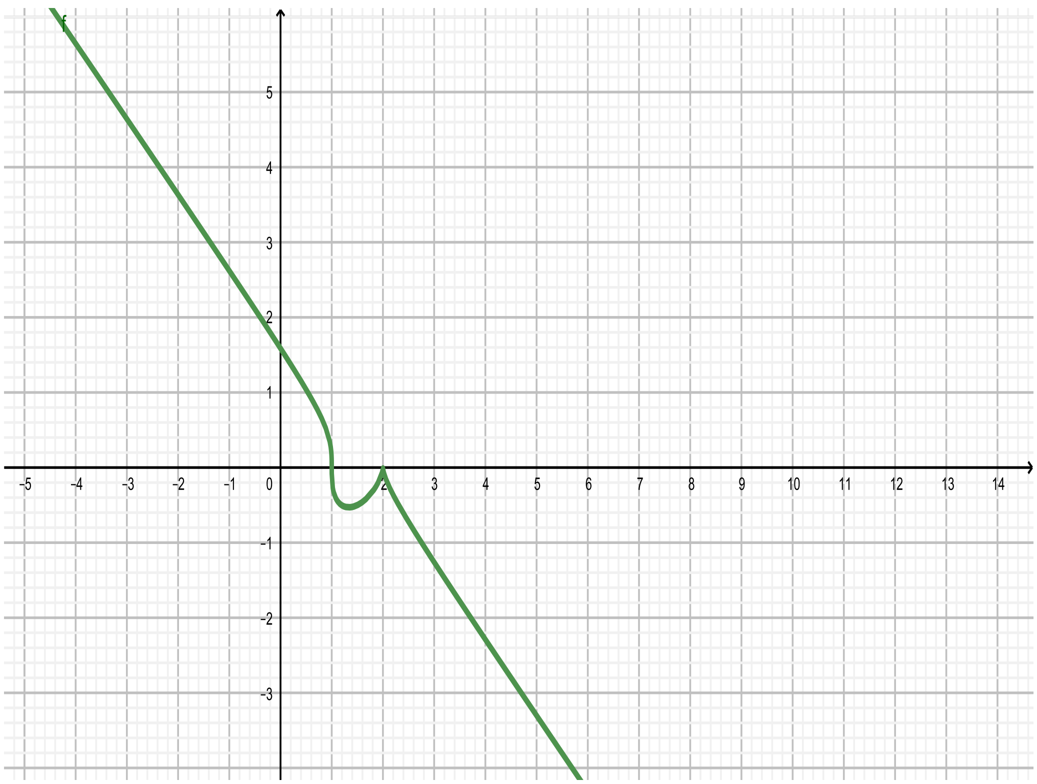
$$\overline{x} = \frac{4}{3}\,.$$

In un intorno sufficientemente piccolo di $\overline{x}$ si ha $f'(x) < 0$ a sinistra e $f'(x) > 0$ e quindi $\overline{x}$ è un punto di minimo relativo.

Osserviamo inoltre che, per quanto visto nel punto precedente, in $x = 2$ c'è un punto di cuspide con punta rivolta verso l'alto e quindi in $x = 2$ c'è un punto di massimo relativo.

tracciare il grafico qualitativo di $f(x)$;

Svolgimento:



Esercizio 2.
Studiare la derivabilità di

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\left(1 - \cos(\sqrt[3]{x})\right) .$$

Svolgimento:

La funzione $\sqrt[3]{x}$ è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Quindi

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

possiamo applicare le regole di derivazione di prodotto e composizione di funzioni, ottenendo:

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\left(1 - \cos(\sqrt[3]{x})\right) + \frac{\sqrt[3]{x}\sin(\sqrt[3]{x})}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\left(1 - \cos(\sqrt[3]{x})\right) + \frac{\sin(\sqrt[3]{x})}{3\sqrt[3]{x}} .$$

Per vedere se f è derivabile in $x = 0$, vediamo se esiste ed è finito il limite del rapporto incrementale di f in 0. Si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}(1 - \cos(\sqrt[3]{x}))}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} = \frac{1}{2} .$$

Quindi f è derivabile in 0 e si ha:

$$f'(0) = \frac{1}{2} .$$

OSSERVAZIONE

In alternativa si poteva calcolare

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f'(x) &= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1 - \cos(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\sin(\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\right] \\
&= \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1 - \cos(t)}{t^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\sin(t)}{t}\right] \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

e ricordare il teorema che dice che, se esiste $\lim_{x\to x_0} f'(x)$, allora esiste anche il limite del rapporto incrementale di f in x_0 e coincidono.

Dire se esiste la retta tangente al grafico di f nel punto $x_0 = 0$ e in caso affermativo scriverne l'equazione.
Svolgimento:

Essendo f derivabile in 0, f ammette retta tangente al grafico nel punto 0. Poinchè $f(0) = 0$, si ha che l'equazione della retta tangente è

$$y = \frac{1}{2}x .$$

Esercizio 3.
Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{5x-1}{(x-1)^2}dx\,.$$

Svolgimento:

$$\begin{aligned}\int \frac{5x-1}{(x-1)^2}dx &= \int \frac{5(x-1)}{(x-1)^2}dx + \int \frac{4}{(x-1)^2}dx = \\ &= 5\int \frac{1}{x-1}dx + 4\int \frac{1}{(x-1)^2}dx = \\ &= 5\log(|x-1|) - \frac{4}{x-1} + c\,.\end{aligned}$$

Motivando la risposta, dire se l'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{5x-1}{(x-1)^2}dx$$

converge oppure diverge.
Svolgimento:

L'integrale è improprio in $x = 1$ e, poiché la funzione è positiva, possiamo applicare il criterio del confronto asintotico. Vicino a 1 la funzione $\frac{5x-1}{(x-1)^2}$ è asintoticamente equivalente alla funzione $\frac{4}{(x-1)^2}$ e quindi l'integrale improprio diverge.

OSSERVAZIONE

In alternativa si poteva fare il calcolo diretto, ovvero:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{5x-1}{(x-1)^2}dx &= \lim_{k\to1^-}\int_0^k \frac{5x-1}{(x-1)^2}dx = \lim_{k\to1^-}\left[5\log(|k-1|) - \frac{4}{k-1} - 5\log(|0-1|) + \frac{4}{0-1}\right] \\ &= \lim_{k\to1^-}\left[5\log(|k-1|) - \frac{4}{k-1} - 4\right]\,.\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\lim_{k\to1^-}\left[5\log(|k-1|) - \frac{4}{k-1}\right]\,,$$

quando k tende a 1 da sinistra, è una forma inderminata del tipo $-\infty + \infty$. Poiché

$$5\log(|k-1|) - \frac{4}{k-1} = \frac{5(k-1)\log(|k-1|) - 4}{k-1}\,,$$

applicando De L'Hospital, si ottiene:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to1^-}\frac{5(k-1)\log(|k-1|) - 4}{k-1} &= \lim_{k\to1^-}\left[5\log(|k-1|) + \frac{5(k-1)}{|k-1|}\cdot\frac{k-1}{|k-1|}\right] \\ &= \lim_{k\to1^-}\left[5\log(|k-1|) + 5\right] \\ &= -\infty\,.\end{aligned}$$

Esercizio 4. Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\cos n}{(\arctan n)^n}.$$

Svolgimento:
Studiamo prima la convergenza assoluta. Ricordando che $\arctan x \geq 0$ per $x \geq 0$ e che $|\cos n| \leq 1\,\forall n$, si ha:

$$\left|\frac{n\cos n}{(\arctan n)^n}\right| \leq \frac{n}{(\arctan n)^n}\,.$$

Applicando il criterio della radice, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{(\arctan n)^n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{\arctan n} = \frac{2}{\pi} < 1\,.$$

Quindi la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\arctan n}$ converge e per confronto converge anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{n\cos n}{(\arctan n)^n}\right|$. Quindi la serie data converge assolutamente.
Poichè la convergenza assoluta implica la convergenza semplice, la serie data converge anche semplicemente.

Esercizio 5.
Scrivere il polinomio di Taylor di grado 5 e centrato in 0 della funzione

$$f(x) = e^{x^3+x^5}.$$

Svolgimento:

Poiché $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$, si ha:

$$e^{x^3+x^5} = 1+x^3+x^5+\frac{1}{2}(x^3+x^5)^2+o((x^3+x^5)^2) = 1+x^3+x^5+\frac{1}{2}(x^6+2x^8+x^{10})+o(x^6+2x^8+x^{10}).$$

Ricordando che $o(x^6 + 2x^8 + x^{10}) = o(x^6) = o(x^5)$ e che $\frac{1}{2}(x^6 + 2x^8 + x^{10}) = o(x^5)$, concludiamo che:

$$f(x) = 1 + x^3 + x^5 + o(x^5)$$

e quindi il polinomio di Taylor cercato è:

$$1 + x^3 + x^5.$$

OSSERVAZIONE

Se avessimo usato lo sviluppo al primo ordine della funzione e^t, ovvero $e^t = 1 + t + o(t)$, avremmo potuto scrivere:

$$e^{x^3+x^5} = 1 + x^3 + x^5 + o(x^3 + x^5)$$

e quindi, poichè $o(x^3 + x^5) = o(x^3)$, avremmo avuto solo

$$e^{x^3+x^5} = 1 + x^3 + x^5 + o(x^3),$$

che non sarebbe stato sufficiente per dire che $p(x) = 1+x^3+x^5$ è il polinomio di Taylor richiesto, perchè, per dire che un polinomio $p(x)$ è il polinomio di Taylor di grado 5, si deve avere: $f(x) = p(x) + o(x^5)$.

Stabilire se la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^3+x^5}-3+2\cos(x^3)}{x^2\sin(x)} & x > 0 \\ \\ 1 - x & x \leq 0, \end{cases}$$

è continua nel punto $x = 0$.
Svolgimento:

Dai passaggi fatti sopra si ha:

$$e^{x^3+x^5} = 1 + x^3 + x^5 + \frac{1}{2}x^6 + o(x^6).$$

Inoltre, ricordando che $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + o(t^3)$, si ha:

$$\cos(x^3) = 1 - \frac{1}{2}x^6 + o(x^9).$$

Ricordando che $o(x^6) + o(x^9) = o(x^6)$, si ottiene:

$$\frac{e^{x^3+x^5} - 3 + 2\cos(x^3)}{x^2\sin(x)} = \frac{1 + x^3 + x^5 + \frac{1}{2}x^6 + o(x^6) - 3 - 2 - x^6 + o(x^9)}{x^3\frac{\sin x}{x}} = \frac{x^3 + x^5 - \frac{1}{2}x^6 + o(x^6)}{x^3\frac{\sin x}{x}}.$$

Quindi, ricordando che $\lim_{x\to 0}\frac{o(x^6)}{x^3} = 0$, si ottiene:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}\left[1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{o(x^6)}{x^3}\right] = 1.$$

Poiché

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(1 - x) = 1$$

e $f(0) = 1$, concludiamo che la funzione è continua in 0.