UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DELLA CALABRIA

Appello di Analisi Matematica 1 del 18/02/2020

A

COGNOME e NOME: ....

MATRICOLA E CORSO DI LAUREA: ....

SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE

Esercizio 1.
Si consideri la funzione

$$f(x) = x\left(2 + \frac{1}{\ln x}\right)$$

Determinarne:
dominio;
Svolgimento:
Osserviamo che f è ben definita se e soltanto se

$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases} \qquad \iff \qquad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Quindi deduciamo che

$$\mathcal{D}_f = (0,1) \cup (1,+\infty).$$

limiti agli estremi del dominio;
Svolgimento:
Grazie alle proprietà della funzione elementare $g(x) = \ln x$ e ai teoremi di algebra dei limiti si ha

$$\lim_{x\to 0^+} x\left(2 + \frac{1}{\ln x}\right) = 0,$$
$$\lim_{x\to 1^-} x\left(2 + \frac{1}{\ln x}\right) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 1^+} x\left(2 + \frac{1}{\ln x}\right) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to +\infty} x\left(2 + \frac{1}{\ln x}\right) = +\infty.$$

Dai risultati ottenuti possiamo dedurre che la retta di equazione $x = 1$ è un asintoto verticale; inoltre, la funzione non presenta asintoti orizzontali.

derivata prima;
Svolgimento:

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{\ln x} + x\left(-\frac{1}{x\ln^2 x}\right) = \frac{2\ln^2 x + \ln x - 1}{x\ln^2 x}$$

intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo e di minimo relativi;
Svolgimento:
Per determinare gli intervalli di monotonia è necessario studiare il segno della derivata prima, pertanto:

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{2\ln^2 x + \ln x - 1}{x\ln^2 x} \geq 0 \iff \frac{2(\ln x + 1)\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)}{x\ln^2 x} \geq 0 \iff x \in (0, e^{-1}] \cup [\sqrt{e}, +\infty).$$

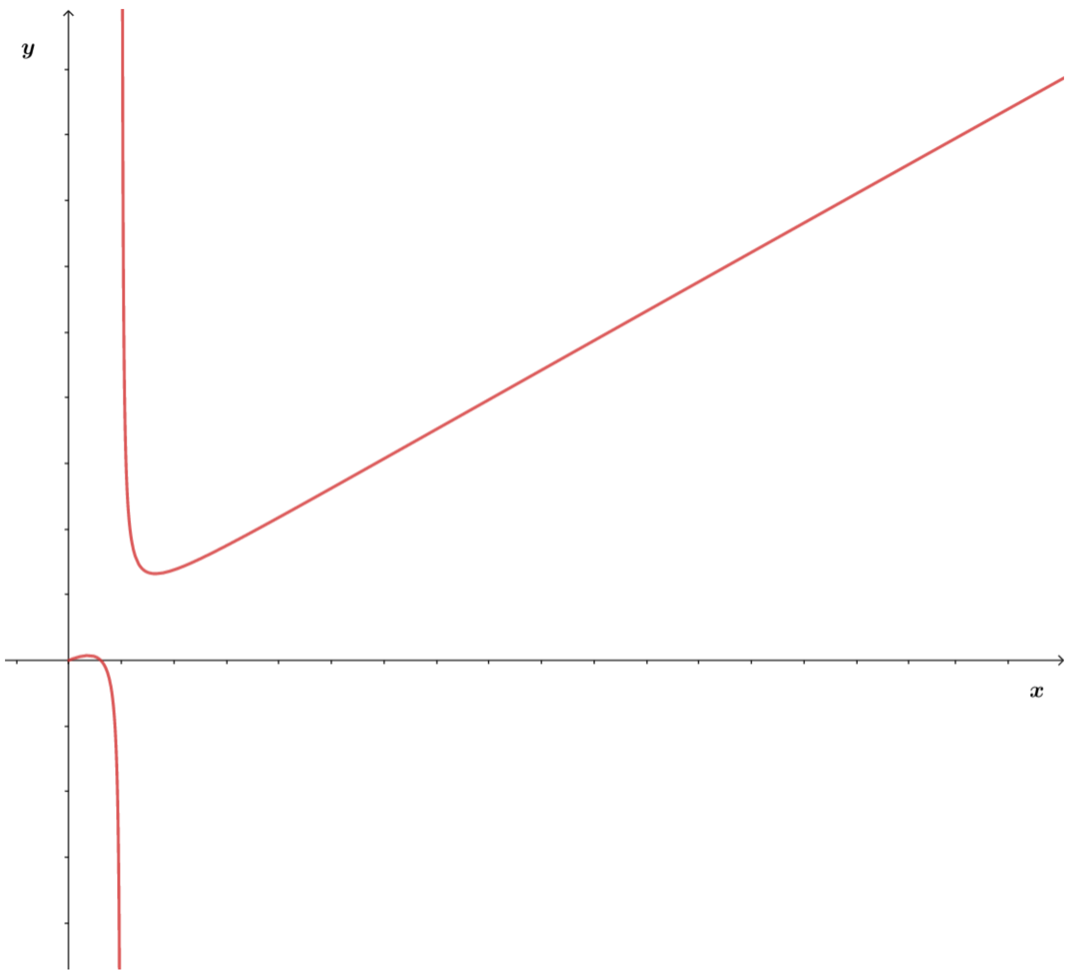
Dunque f è monotona crescente in $(0, e^{-1}]$ e in $[\sqrt{e}, +\infty)$, mentre f è decrescente in $(e^{-1}, 1)$ e in $(1, \sqrt{e})$.
Quindi il punto (e^{-1}, e^{-1}) è un punto di massimo relativo (ma non assoluto dalle informazioni sui limiti), mentre $(\sqrt{e}, 4\sqrt{e})$ è un punto di minimo relativo (ma non assoluto dalle informazioni sui limiti).

derivata seconda, intervalli di concavità e convessità ed eventuali punti di flesso;
Svolgimento:

$$f''(x) = \left(\frac{2\ln^2 x + \ln x - 1}{x\ln^2 x}\right)' = \frac{-\ln^2 x + 2\ln x}{x\ln^4 x} = \frac{-\ln x + 2}{x\ln^3 x} \geq 0 \iff x \in (1, e^2].$$

Quindi f è convessa in $(1, e^2]$, mentre f è concava in $(0, 1)$ e in $(e^2, +\infty)$. Il punto $\left(e^2, \frac{5e^2}{2}\right)$ è un punto di flesso.

tracciare il grafico qualitativo di $f(x)$.
Svolgimento:



Esercizio 2.
Sia $y = mx + q$ l'asintoto obliquo per $x \to +\infty$ della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{x^2}}.$$

Si calcoli il valore del coefficiente angolare m.
Svolgimento:

$$m := \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{x^5\left(1+\frac{1}{x}\right)^5}{x^5}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^5} = 1$$

Si calcoli il valore della quota q.
Svolgimento:

$$\begin{aligned} q &:= \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{x^2}} - x\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)^5} - x\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{5}{3}} - 1\right] = \lim_{t\to0^+} \frac{(1+t)^{\frac{5}{3}} - 1}{t} = \frac{5}{3}, \end{aligned}$$

dove nella penultima uguaglianza abbiamo applicato il cambio di variabile nei limiti $t = \frac{1}{x}$, mentre nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il limite notevole

$$\lim_{t\to0} \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} = \alpha.$$

Esercizio 3. **Trovare la primitiva della funzione**

$$f(x) = \arctan(\sqrt{x}),$$

che vale 1 **nel punto** $x = 0$**.**

Svolgimento:

Per trovare la primitiva richiesta bisogna calcolare innanzitutto il seguente integrale indefinito, mediante la regola di integrazione per parti:

$$\int \arctan(\sqrt{x})\,dx = x\arctan(\sqrt{x}) - \int \frac{x}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = x\arctan\sqrt{x} - \int \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}\,dx$$

$$\underset{\substack{x=t^2,\\ dx=2t\,dt}}{=} x\arctan\sqrt{x} - \int \frac{t^2}{t^2+1}\,dt = x\arctan\sqrt{x} - \int\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

$$\underset{x=t^2}{=} x\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} - \arctan\sqrt{x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Sia F la primitiva richiesta, allora poiché

$$F(0) = 1$$

dal risultato dell'integrale indefinito si ricava che, necessariamente, $C = 1$ e quindi

$$F(x) = \arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} - \arctan\sqrt{x} + 1.$$

Motivando la risposta, dire se i seguenti integrali impropri convergono:

1.
$$\int_0^1 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\ln(1+\sqrt{x})dx.$$

Svolgimento:

Osserivamo innanzitutto che $f(x) = \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\ln(1+\sqrt{x}) \geq 0$ per ogni $x \in (0, +\infty)$.

Essendo $\sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ in $(0, 1]$ risulta che

$$0 < \int_0^1 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\ln(1+\sqrt{x})\,dx \leq \int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})\,dx < +\infty$$

Quindi l'integrale converge dal teorema del confronto semplice, essendo $g(x) = \ln(1+\sqrt{x})$ continua in $[0, 1]$ e quindi integrabile secondo Riemann (nel senso classico).

2.
$$\int_1^{+\infty} \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\ln(1+\sqrt{x})dx.$$

Svolgimento:

Per $x > 1$ sufficientemente grande, risulta

$$\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\ln(1+\sqrt{x}) \leq \sqrt{x}\sin^2\left(\frac{1}{x}\right).$$

Inoltre, se $x \to +\infty$ allora

$$\sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x^2}.$$

Dunque presa $g(x) = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ risulta

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx < +\infty,$$

e quindi applicando prima il teorema del confronto asintotico e, successivamente, quello del confronto semplice, si deduce che l'integrale di partenza converge.

A

Esercizio 4.

1. **Stabilire se la serie**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(\sin(n)+5)}{n+\ln(n)}$$

converge oppure diverge.

Svolgimento:

Ricordiamo che essendo la funzione logaritmo monotona crescente, risulta che

$$\sin(n)+5 \geq 4 \quad \Longrightarrow \quad \ln(\sin(n)+5) \geq \ln(4).$$

Quindi risulta che

$$a_n := \frac{\ln(\sin(n)+5)}{n+\ln(n)} \geq \frac{\ln(4)}{n+\ln(n)} =: b_n.$$

Inoltre essendo $n+\ln(n) \sim n$, deduciamo che

$$b_n \sim c_n := \frac{1}{n}.$$

Applicando prima il criterio del confronto asintotico e, successivamente, quello del confronto semplice si deduce che la serie diverge positivamente.

2. **Calcolare la somma della seguente serie**

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Svolgimento:

Trattandosi di una serie geometrica di ragione $q = \frac{1}{3} < 1$ risulta

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Quindi,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^0 - \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$