UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DELLA CALABRIA
EX FACOLTÀ DI INGEGNERIA

APPELLO DEL 19 Febbraio 2018

COGNOME: ....

NOME: ....

MATRICOLA E CORSO DI LAUREA: ....

IMPORTANTE

Al termine della prova è necessario riconsegnare solo il presente fascicolo. I risultati e lo svolgimento relativo vanno riportati negli appositi spazi o nel retro dei fogli del presente fascicolo: un campo vuoto o assenza di calcoli dove richiesto significano 0 punti.

SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE

A

Esercizio 1.
Si consideri la funzione

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}$$

Determinarne:
dominio
Svolgimento:
La radice quadrata è definita se il radicando è non negativo, dunque

$$\frac{x^3}{x+1}\geq 0.$$

Risolvendo separatamente le disequazioni

$$x^3\geq 0, \quad x+1>0$$

da cui segue

$$x\geq 0, \quad x>-1$$

e applicando la regola dei segni, si ha che il dominio della funzione è

$$D=(-\infty,-1)\cup[0,+\infty).$$

eventuali asintoti obliqui;
Svolgimento:
Poichè

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x(1+\frac{1}{x})}}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{x^2}{1+\frac{1}{x}}}=+\infty,$$

potrebbero esserci asintoti obliqui. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}}{x}=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{1+\frac{1}{x}}}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{|x|}{x}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}.$$

Pertanto segue

$$m_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1, \quad m_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1.$$

Inoltre

$$q_1=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-m_1x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}-x\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}-x\right]\left[\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}+x\right]}{\left[\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}+x\right]}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x+1}-x^2}{\left[\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}+x\right]}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^3-x^2}{(x+1)\left[\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}+x\right]}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{(x+1)\left[|x|\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}+x\right]}=-\frac{1}{2}.$$

$$q_2=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-m_2x]=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}+x\right]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left[\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}+x\right]\left[\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}-x\right]}{\left[\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}-x\right]}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3}{x+1}-x^2}{\left[\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}-x\right]}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-x^3-x^2}{(x+1)\left[\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}-x\right]}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{(x+1)\left[|x|\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}-x\right]}=\frac{1}{2}.$$

Dunque la funzione ha asintoto obliquo destro

$$y=x-\frac{1}{2}$$

e asintoto obliquo sinistro

$$y=-x+\frac{1}{2}.$$

derivata prima;
Svolgimento:
Per $x\neq 0$, si ha

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}}\cdot\left[\frac{3x^2(x+1)-x^3}{(x+1)^2}\right]=\frac{x^2(2x+3)}{2\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}(x+1)^2}$$

eventuali punti stazionari e loro classificazione ed eventuali punti di massimo e minimo relativi;
Svolgimento: Vediamo se esiste ed è finito il limite del rapporto incrementale da destra di f in 0. Si ha

$$\lim_{h\to0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\sqrt{\frac{h^3}{h+1}}}{h}=$$

$$\lim_{h\to0^+}\sqrt{\frac{h}{h+1}}=0.$$

Pertanto esiste (solo) la derivata destra in 0 e si ha $f'_+(0)=0$. Inoltre da

$$\frac{x^2(2x+3)}{2\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}(x+1)^2}=0$$

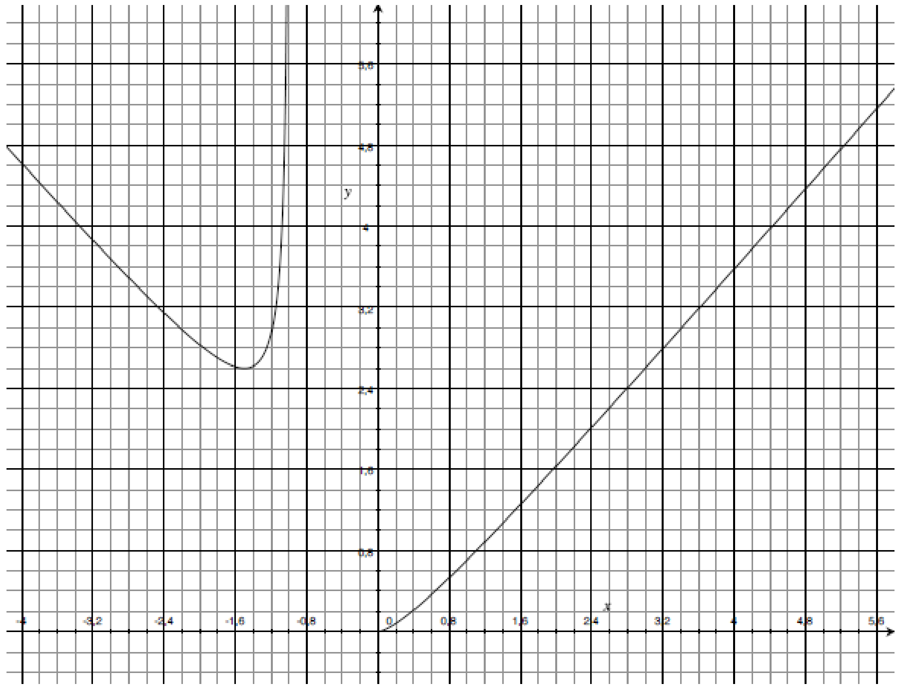
segue $x=-\frac{3}{2}$. Dunque $x=-\frac{3}{2}$ è un punto stazionario. Per determinare i punti di massimo e minimo relativi, studiamo il segno della derivata prima

$$f'(x)\geq 0\Rightarrow 2x+3\geq 0\Leftrightarrow -\frac{3}{2}\leq x<1\ \vee x>0.$$

Dunque $x=-\frac{3}{2}$ è un punto di minimo relativo e $f(-\frac{3}{2})=\frac{3}{2}\sqrt{3}>1$. Dallo studio del segno della derivata ($f(x)$ è crescente per $x\geq 0$) risulta inoltre che il punto $x=0$ è punto di minimo relativo (difatti assoluto).

tracciare il grafico qualitativo di $f(x)$;

Svolgimento:



dire, motivando la risposta, quanti sono gli zeri della funzione

$$g(x) = (f(x) - 1)^5,$$

dove $f(x)$ rappresenta la funzione precedentemente studiata;

Svolgimento:

Gli zeri della funzione $g(x)$ (ricordare il grafico elementare della funzione $t \to t^5$) coincidono con gli zeri della funzione $h(x) = f(x) - 1$ che si ottiene da quello di $f(x)$ con una traslazione di un'unità verso il basso. La funzione $h(x)$ per $x < -1$ risulta essere positiva. Infatti $f(x) \geq f(-\frac{3}{2})$ per ogni $x \in (-\infty, -1)$. Dunque

$$h(x) = f(x) - 1 \geq f\left(-\frac{3}{2}\right) - 1 = \frac{3}{2}\sqrt{3} - 1 > 0.$$

Per $x \geq 0$, considerando per esempio che $h(0) < 0$ e $h(10) > 0$ ed essendo $h(x)$ una funzione continua, dal teorema degli zeri segue l'esistenza di almeno un punto di zero. Tale zero è unico, essendo la funzione strettamente crescente (si noti che $h'(x) = f'(x)$) per $x \geq 0$.

Analisi Matematica 1 - 19/02/2018 A

Esercizio 2. Studiare il segno della seguente funzione

$$f(x) = \sin^2 x - \cos x - 1$$

nell'intervallo $[0, 2\pi]$.
Svolgimento:
Per studiare il segno della funzione, poniamo $f(x) \geq 0$. Si ha

$$\sin^2 x - \cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x - \cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos^2 x + \cos x \leq 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x + 1) \leq 0.$$

Essendo

$$-1 \leq \cos x \leq 1,$$

si ha che $\cos x + 1 \geq 0$ e dunque

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \cos x < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi, x \neq \pi.$$

e

$$f(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3}{2}\pi, x = \pi.$$

Trovare i punti di massimo assoluto della funzione

$$g(x) = -|\sin^2 x - \cos x - 1|$$

nell'intervallo $[0, 2\pi]$.
Svolgimento:
Poichè $g(x)$ è una funzione continua e $[0, 2\pi]$ è un intervallo chiuso e limitato, per il teorema di Weierstarss $g(x)$ ammette massimo e minimo assoluti in $[0, 2\pi]$. Essendo $g(x) \leq 0$, segue che il massimo assoluto della funzione è 0. Ricordando il grafico elementare $t \to -|t|$, $g(x) = 0$ nei punti $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, π che sono pertanto i punti di massimo assoluto.

Esercizio 3.
Calcolare l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x}(\log x - 1),$$

e l'asse delle x, per $x \in [1, e^2]$.
Svolgimento:
Ricordiamo che data una funzione $y = f(x)$ in $[a, b]$ l'area della parte di piano compresa tra il grafico della funzione e l'asse delle x, per $x \in [a, b]$ è

$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Pertanto l'area richiesta è data da

$$A = \int_1^{e^2} \frac{1}{x} |\log x - 1|\, dx.$$

Osserviamo che

$$|\log x - 1| = \begin{cases} \log x - 1 & \text{se} \quad x \geq e \\ -(\log x - 1) & \text{se} \quad x < e \end{cases}$$

Pertanto

$$A = -\int_1^e \frac{1}{x}(\log x - 1)\, dx + \int_e^{e^2} \frac{1}{x}(\log x - 1)\, dx.$$

Si ha

$$\int \frac{1}{x}(\log x - 1)\, dx = \int \left(\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x}\right) dx =$$

$$\frac{\log^2 x}{2} - \log x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Dunque

$$A = -\left(\frac{\log^2 x}{2} - \log x\right)\Big|_1^e + \left(\frac{\log^2 x}{2} - \log x\right)\Big|_e^{e^2} = 1.$$

Trovare la primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x}(\log x - 1),$$

che si annulla per $x = e$.
Svolgimento:
La famiglia di tutte le primitive è

$$y(x) = \frac{\log^2 x}{2} - \log x + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

La primitiva che si annulla in $x = e$ è la funzione $y(x)$ che vale zero in $x = e$ vale a dire che soddisfa la condizione $y(e) = 0$. Imponendo tale condizione si ha

$$0 = \frac{\log^2 e}{2} - \log e + c \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} - 1 + c \Rightarrow c = \frac{1}{2}.$$

Dunque la primitiva cercata è

$$y(x) = \frac{\log^2 x}{2} - \log x + \frac{1}{2}.$$

 $\boxed{\text{A}}$

Esercizio 4. Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n^2+3n+1}.$$

Svolgimento:
La serie dei moduli è

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+2}{n^2+3n+1}.$$

Poichè

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n+2}{n^2+3n+1}}{\frac{1}{n}}=1$$

ovvero

$$\frac{n+2}{n^2+3n+1}\sim\frac{1}{n}$$

e la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$$

diverge, ne segue che la serie, per il criterio del confronto asintotico, non converge assolutamente. Studiamo la convergenza semplice. La serie è a segni alterni, vale a dire della forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n,\quad a_n\geq 0\ \ \forall n$$

con

$$a_n=\frac{n+2}{n^2+3n+1}.$$

Inoltre

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{n^2+3n+1}=0$$

e la successione a_n è decrescente. Infatti, posto $f(x)=\frac{x+2}{x^2+3x+1}$ si ha

$$f'(x)=\frac{x^2+3x+1-(2x+3)(x+2)}{(x^2+3x+1)^2}=-\frac{x^2+4x+5}{(x^2+3x+1)^2}<0$$

in quanto $x^2+4x+5>0$ per ogni x essendo il discriminante negativo. Dunque per il criterio di Leibniz la serie converge semplicemente.

Esercizio 5. Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 e centrato in 1 della funzione

$$f(x) = \sqrt[5]{x}\,.$$

Svolgimento:
Il polinomio di Taylor di grado 2 è

$$f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2.$$

Si ha

$$f(1) = 1.$$

$$f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{5}.$$

$$f''(x) = -\frac{4}{25}\frac{1}{\sqrt[5]{x^9}} \Rightarrow f''(1) = -\frac{4}{25}.$$

Pertanto il polinomio di Taylor è

$$1 + \frac{1}{5}(x-1) - \frac{2}{25}(x-1)^2.$$

Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[5]{x} - 1}{\log x}.$$

Svolgimento:

$$\log x = \log(1 + (x-1)) = (x-1) + o(x-1)$$

Allora

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[5]{x} - 1}{\log x} = \lim_{x\to 1} \frac{1 + \frac{1}{5}(x-1) + o(x-1) - 1}{(x-1) + o(x-1)} = \frac{1}{5}.$$