TEOREMA DELL’UNICITà DEL LIMITE

DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO

IPOTESI: DATA UNA MEDESIMA FUNZIONE F PER IL MEDESIMO PUNTO DI ACCUMULAZIONE ESISTONO DUE LIMITI DIFFERENTI

PARTICOLARITà: BISOGNA SPECIFICARE QUALE DEI DUE VALORI RISULTA MAGGIORE DELL’ALTRO, E SI ASSUME CHE SIANO ENTRAMBI POSITIVI/NEGATIVI (IPOTIZZO CHE L2 è MAGGIORE DI L1, E CHE SONO ENTRAMBI POSITIVI)

SVOLGIMENTO: APPLICANDO LA DEFINIZIONE DI LIMITE SI SOSTIENE CHE, CONTEMPORANEAMENTE, è VERIFICATO CHE IL MODULO DELLA DIFFERENZA TRA FUNZIONE E VALORE LIMITE è MINORE DI UN EPSILON ARBITRARIAMENTE SCELTO PICCOLO.

L’IPOTESI VIENE NEGATA DAL RISULTATO, PER CUI LA METà DELLA DIFFERENZA TRA L2 ED L1 RISULTA MINORE DI EPSILON.

TALE DIFFERENZA DOVREBBE INVECE RISULTARE MAGGIORE, perché ABBIAMO ARBITRARIAMENTE IMPOSTO CHE EPSILON SIA MAGGIORE DI ZERO, MA MINORE PROPRIO DI QUESTO VALORE.

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

IPOTESI: DATA UNA FUNZIONE E UN PUNTO X0 DI ACCUMULAZIONE, SI ASSUME CHE IL SUO LIMITE SIA PARI AD M>0; IN TAL CASO ANCHE LA FUNZIONE SARà MAGGIORE DI ZERO.

ANCHE QUI è CENTRALE LA SCELTA DI EPSILON, CHE DOVRà INFATTI ESSERE MINORE O UGUALE AD M/2

APPLICANDO LA DEFINIZIONE DI LIMITE, VEDREMO CHE LA FUNZIONE è COMPRESA TRA M/2 E 3M/2

TEOREMA DELL’ALGEBRA DEI LIMITI:

LIMITE DELLA SOMMA -> SOMMA DEI LIMITI

LIMITE DEL PRODOTTO -> PRODOTTO DEI LIMITI

LIMITE DEL RAPPORTO -> RAPPORTO DEI LIMITI (CON DENOMINATORE VERIFICATO DIVERSO DA 0)

TEOREMA DEI CARABINIERI O DEL CONFRONTO

IPOTESI: DATE TRE FUNZIONI F1<=F2<=F3 è VERIFICATO CHE, SE I LIMITI DI F1 ED F3 COINCIDONO, COINCIDERà CON ESSI ANCHE IL LIMITE DI F2 PER UN IDENTICO PUNTO DI ACCUMULAZIONE

LA DIMOSTRAZIONE AVVIENE APPLICANDO LA DEFINIZIONE DI LIMITE A TUTTE E TRE LE FUNZIONI, RISCONTRANDO POI CHE LA FUNZIONE CENTRALE RISULTA COMPRESA TRA I MEDESIMI VALORI DEGLI ALTRI LIMITI

TEOREMA DELLE FUNZIONI COMPOSTE

IPOTESI: DATE DUE FUNZIONI, QUESTE POSSIEDONO IL MEDESIMO CODOMINIO, IN PARTICOLARE IPOTIZZIAMO SIA R; INOLTRE, L’INSIEME IMMAGINE DELLA FUNZIONE INTERNA SARà UN SOTTOINSIEME DEL DOMINIO DELLA FUNZIONE ESTERNA.

I LIMITI DI ENTRAMBE LE FUNZIONI PER UN GENERICO X0 (FUNZIONE INTERNA) E PER IL VALORE LIMITE DI QUEST’ULTIMA (FUNZIONE ESTERNA) DOVRANNO RISULTARE ENTRAMBI COMPRESI NEL CODOMINIO (IN QUESTO CASO R).

IMPORTANTE: GLI INTORNI SONO BUCATI, QUINDI I VALORI LIMITI RISULTERANNO DIVERSI DALLE FUNZIONI

RESTRIZIONE DI FUNZIONE POSSIBILE SOLO SE SI RESTRINGE UN INSIEME RICAVANDONE UN SOTTOINSIEME CHE NON POSSIEDA, IN ALCUN MODO, ELEMENTI NON APPARTENENTI ALL’INSIEME DI PARTENZA

TEOREMA DEGLI ZERI

DATA UNA FUNZIONE CONTINUA, SUPPOSTO UN INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO, E CALCOLATI I VALORI AGLI ESTREMI, SI NOTI CHE L’UNO RISULTA POSITIVO E L’ALTRO NEGATIVO. SARà SENZA DUBBIO CERTA L’ESISTENZA DI ALMENO UN VALORE APPARTENENTE ALL’INTERVALLO, PER CUI LA FUNZIONE RISULTA PARI A ZERO. FONDAMENTALE: LA CONTINUITà DELLA STESSA.

AFFINCHè UNA FUNZIONE RISULTI CONTINUA NELLA SUA INVERSA è NECESSARIO CHE SIA DEFINITA IN UN INTERVALLO IN CUI RISULTI CONTINUA E INVERTIBILE. QUESTA CONDIZIONE è NECESSARIA E SUFFICIENTE A CONFERMARE LA TESI.

TEOREMA DI WEIERSTRASS

IN UN INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO, DATA UNA FUNZIONE CONTINUA E DERIVABILE SU TUTTO L’INTERVALLO, ESISTERANNO MASSIMO E MINIMO ASSOLUTI.

I PUNTI DI MASSIMO E MINIMO, INVECE, NON è DETTO CHE SIANO UNICI.

LA DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA:

SIA F UNA FUNZIONE DERIVABILE E STRETTAMENTE MONOTONA, E G LA SUA INVERSA, AVREMO LA DERIVATA DI G PARI AL RECIPROCO DELLA DERIVATA DELLA COMPOSTA F.G

PUNTI DI MASSIMO E MINIMO SONO, PROBABILMENTE: ESTREMI DEL DOMINIO, PUNTI STAZIONARI O PUNTI SINGOLARI DI NON DERIVABILITà.

TEOREMA DI FERMAT

SE X0 è UN PUNTO INTERNO DI MASSIMO/MINIMO, PRESA UNA GENERICA FUNZIONE F DERIVABILE IN X0, RISULTERà NULLA IN QUEL PUNTO.

INTERNO -> ESCLUDO GLI ESTREMI

DERIVABILE -> ESCLUDO I PUNTI SINGOLARI DI NON DERIVABILITà

RIMANGONO I PUNTI IN CUI LA DERIVATA SI ANNULLA

TEOREMA DI ROLLE: DATA UNA FUNZIONE CONTINUA, DERIVABILE IN UN INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO E AVENTE UN VALORE IDENTICO AGLI ESTREMI-> ESISTERà UN PUNTO INTERNO IN CUI LA DERIVATA RISULTA NULLA

TEOREMA DI LAGRANGE: DATA UNA FUNZIONE CONTINUA E DERIVABILE IN UN INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO, ESISTERà ALMENO UN PUNTO INTERNO C PER CUI LA SUA DERIVATA SARà PARI AL RAPPORTO TRA LA VARIAZIONE DELLE ORDINATE E LA VARIAZIONE DELLE ASCISSE

SE PER OGNI X APPARTENENTE ALL’INTERVALLO LA DERIVATA RISULTA NULLA, LA FUNZIONE IN QUESTIONE è UNA FUNZIONE COSTANTE.

UNA FUNZIONE è DERIVABILE IN UN PUNTO SOLO SE COINCIDONO DERIVATA SINISTRA E DESTRA E SONO VALORI FINITI PARI AL VALORE DELLA FUNZIONE IN X0 STESSO.

LA CRESCENZA DI UNA FUNZIONE è VERIFICABILE ATTRAVERSO LO STUDIO DELLA SUA DERIVATA PRIMA.

PRENDENDO F CRESCENTE COME IPOTESI, E APPLICANDO LAGRANGE perché CONTINUA E DERIVABILE, NOTIAMO CHE IN UN INTERVALLO DEFINITO CHIUSO E LIMITATO, AVENTE COME ESTREMI RISPETTIVAMENTE X1 E X2, CON X1<X2, SARà VERIFICATA L’UGUAGLIANZA

Fz x (x2-x1) = fx2 – fx1; tale uguaglianza, in ogni caso, è a termini tutti positivi

Fz positiva per ipotesi, le due variazioni seguenti sono positive per imposizione di x1<x2

TEOREMA DI CAUCHY

DATE DUE FUNZIONI CONTINUE IN UN INTERVALLO CHIUSO E LIMITATO, E DERIVABBILI ALL’INTERNO DI TALE INTERVALLO, ESISTE UN PUNTO INTERNO PER CUI IL RAPPORTO DELLE DERIVATE DELLE FUNZIONI IN TALE PUNTO è PARI ALLA VARIAZIONE DELLE ORDINATE DELLE FUNZIONI NEGLI ESTREMI DELL’INTERVALLO

TH DI DE L’HOPITAL

DATE DUE FUNZIONI CONTINUE IN UN INTEVALLO CHIUSO E LIMITATO, E DERIVABILI AL SUO INTERNO ESCLUSO AL Più UN PUNTO X0 PER CUI I LIMITI DELLE FUNZIONI RISULTERANNO ENTRAMBI INFINITESIMI (ATTENZIONE: Gx NON Può ANNULLARSI, Può AL Più ESSERE INFINITESIMO)

È VERIFICATA L’UGUAGLIANZA TRA IL LIMITE DEL RAPPORTO DELLE DUE FUNZIONI E IL LIMITE DEL RAPPORTO TRA LE DERIVATE DELLE DUE FUNZIONI

DICASI CONVESSA LA FUNZIONE PER CUI, COMUNQUE PRENDO DUE PUNTI APPARTENENTI ALLA FUNZIONE, IL SEGMENTO CHE LI CONGIUNGE RISULTA AL DI SOPRA DEL GRAFICO DELLA FUNZIONE TRA DI ESSI COMPRESO, E, IN GENERALE, SE LA DERIVATA SECONDA DELLA FUNZIONE RISULTA MAGGIORE DI ZERO

DICASI CONCAVA LA FUNZIONE PER CUI, COMUNQUE PRENDO DUE PUNTI APPARTENENTI ALLA FUNZIONE, IL SEGMANETO CHE LI CONGIUNGE RISULTERà AL DI SOTTO DEL GRAFICO DELLA FUNZIONE STESSA, E, IN GENERALE, SARà VERIFICATO CHE LA DERIVATA SECONDA DELLA FUNZIONE RISULTA MINORE DI ZERO

CONVESSA/CONCAVA è LA FUNZIONE CHE POSSIEDE UNA DERIVATA SECONDA MAGGIORE/MINORE O UGUALE A 0 PER OGNI X DEL DOMINIO DELLA DERIVATA SECONDA

STRETTAMENTE CONVESSA/CONCAVA è LA FUNZIONE CHE POSSIEDE UNA DERIVATA SECONDA MAGGIORE/MINORE PER OGNI X DEL DOMINIO DELLA DERIVATA SECONDA