UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DELLA CALABRIA

Appello di Analisi 1 del 12 febbraio 2019

A

COGNOME e NOME: ....

MATRICOLA E CORSO DI LAUREA: ....

SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE

Esercizio 1.
Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{\log^2(x) - 2}.$$

Determinarne:
dominio
Svolgimento:
L'unica condizione da imporre è che l'argomento del logaritmo sia strettamente maggiore di 0, ovvero: $x > 0$. Pertanto si ha:

$$Dom(f) = (0, +\infty).$$

studiare il segno della funzione;
Svolgimento:
Poichè la funzione $\sqrt[3]{x}$ è strettamente positiva per $x > 0$ e strettamente negativa per $x < 0$, $f(x)$ è strettamente positiva dove $\log^2(x) - 2 > 0$ e strettamente negativa dove $\log^2(x) - 2 < 0$. Si ha: $\log^2(x) > 2$ per i valori di $x \in (0, +\infty)$ tali che $\log(x) > \sqrt{2}$ e per i valori di $x \in (0, +\infty)$ tali che $\log^2(x) < -\sqrt{2}$, ovvero per $x \in \left(0, e^{-\sqrt{2}}\right) \cup \left(e^{\sqrt{2}}, +\infty\right)$.
limiti agli estremi del dominio;
Svolgimento:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \sqrt[3]{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\log^2(x) - 2\right)} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \sqrt[3]{\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\log^2(x) - 2\right)} = +\infty$

derivata prima ed eventuali punti di non derivabilità e loro classificazione;
Svolgimento:
La funzione $f(x)$ è ottenuta come composizione della funzione $\sqrt[3]{x}$ e della funzione $\log^2(x)-2$. Poichè la funzione $\sqrt[3]{x}$ non è derivabile in 0, si può applicare la formula di derivazione delle funzioni composte solo dove l'argomento della radice cubica è diverso da 0, ovvero per i valori di $x \in Dom(f)$ tali che $\log^2(x) - 2 \neq 0$, ovvero per $x \in (0, +\infty)\backslash\{e^{\sqrt{2}}, e^{-\sqrt{2}}\}$.
Pertanto $\forall\, x \in (0, +\infty)\backslash\{e^{\sqrt{2}}, e^{-\sqrt{2}}\}$ si ottiene:

$$f'(x) = \frac{2\log(x)}{3x\sqrt[3]{\left(\log^2(x) - 2\right)^2}}\,.$$

Vediamo se la funzione è derivabile in $e^{\sqrt{2}}$. Poichè

$$\lim_{x \to \left(e^{\sqrt{2}}\right)^+} f'(x) = \lim_{y \to 2^+} \frac{2\sqrt{2}}{3e^{\sqrt{2}}\sqrt[3]{(y-2)^2}} = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to \left(e^{\sqrt{2}}\right)^-} f'(x) = \lim_{y \to 2^-} \frac{2\sqrt{2}}{3e^{\sqrt{2}}\sqrt[3]{(y-2)^2}} = +\infty\,,$$

usando il teorema che lega limite della derivata e limite del rapporto incrementale, deduciamo che anche il limite (sia da destra che da sinistra) del rapporto incrementale di $f(x)$ in $e^{\sqrt{2}}$ è uguale a $+\infty$. Pertanto concludiamo che $e^{\sqrt{2}}$ è un punto di flesso a tangente verticale.

Vediamo se la funzione è derivabile in $e^{-\sqrt{2}}$. Poichè

$$\lim_{x \to \left(e^{-\sqrt{2}}\right)^+} f'(x) = \lim_{y \to 2^+} -\frac{2\sqrt{2}}{3e^{-\sqrt{2}}\sqrt[3]{(y-2)^2}} = -\infty$$

e

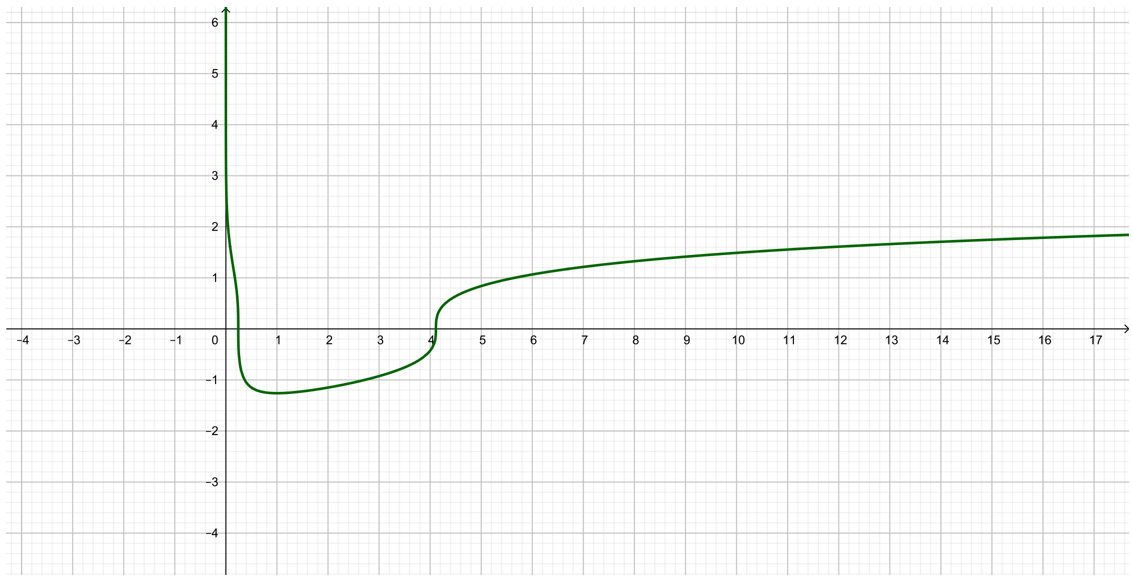
$$\lim_{x \to \left(e^{-\sqrt{2}}\right)^-} f'(x) = \lim_{y \to 2^-} -\frac{2\sqrt{2}}{3e^{-\sqrt{2}}\sqrt[3]{(y-2)^2}} = -\infty\,,$$

usando il teorema che lega limite della derivata e limite del rapporto incrementale, deduciamo che anche il limite (sia da destra che da sinistra) del rapporto incrementale di $f(x)$ in $e^{-\sqrt{2}}$ è uguale a $-\infty$. Pertanto concludiamo che $e^{-\sqrt{2}}$ è un punto di flesso a tangente verticale.

intervalli di monotonia ed eventuali punti di massimo e di minimo;
Svolgimento:
La derivata prima di $f(x)$ si annulla per $x_0 = 1$.
Per studiare il segno di $f'(x)$, osserviamo che il denominatore $3x\sqrt[3]{\log^2(x) - 2}$ è positivo $\forall\, x \in Dom(f)$ e pertanto il segno di $f'(x)$ è dato dal segno di $\log(x)$, che è positivo per $x > 1$ e negativo per $x < 1$. Quindi $x_0 = 1$ è un punto di minimo.

tracciare il grafico qualitativo di $f(x)$;

Svolgimento:



dire, motivando la risposta, se esistono il massimo assoluto e il minimo assoluto di $f(x)$ nell'intervallo $[2, 5]$. In caso affermativo calcolarne i valori;

Svolgimento:

Poichè $f(x)$ è continua e l'intervallo $[2, 5]$ è chiuso e limitato, per il teorema di Weierstrass $f(x)$ ammette massimo assoluto e minimo assoluto nell'intervallo $[2, 5]$.

Dallo studio fatto sopra sia ha che $f(x)$ è strettamente crescente sull'intervallo $[2, 5]$ e pertanto il minimo assoluto si ottiene in 2 e il massimo assoluto si ottiene in 5.

Esercizio 2.
Sia

$$f(x) = \begin{cases} x \log(1+\sqrt[3]{x}) & \text{se } x \le 0 \\ \sqrt[3]{x}\log(1+x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Dire se $f(x)$ è continua in 0.
Svolgimento:
Si ha:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x\log(1+\sqrt[3]{x}) = 0$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{x}\log(1+x) = 0\,.$$

Poichè $f(0) = 0$, è soddisfatta la condizione

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

e quindi $f(x)$ è continua.

Dire se $f(x)$ è derivabile in 0.
Svolgimento:
Si ha:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x\log(1+\sqrt[3]{x})}{x} = \lim_{x\to 0^-} \log(1+\sqrt[3]{x}) = 0$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{x}\log(1+x)}{x} = 0\,.$$

Quindi esiste il limite del rapporto incrementale di $f(x)$ in 0 e vale 0, per cui concludiamo che $f(x)$ è derviabile in 0 e si ha $f'(0) = 0$.

A

Esercizio 3.
Trovare le primitive di

$$f(x) = \frac{\arctan(x)}{x^2}.$$

Svolgimento:
Applicando la formula di integrazione per parti, si ottiene:

$$\int \frac{\arctan(x)}{x^2}dx = \int \frac{1}{x(1+x^2)}dx - \frac{1}{x}\arctan(x)\,.$$

Per calcolare $\int \frac{1}{x(1+x^2)}dx$, scomponiamo la frazione $\frac{1}{x(1+x^2)}$ in fratti semplici, ovvero troviamo $A, B \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}\,.$$

Si ha:

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{A(1+x^2)+x(Bx+C)}{x(1+x^2)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(1+x^2)}\,.$$

Quindi, affinchè $(A+B)x^2 + Cx + A \equiv 1$, si deve avere:

$$A + B = 0 \qquad C = 0 \qquad A = 1$$

da cui deduciamo:

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\,.$$

Quindi:

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)}dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{x}{1+x^2}dx = \log|x| - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c = \log\left(\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}\right) + c\,.$$

In conclusione, le primitive cercate sono:

$$\log\left(\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \frac{1}{x}\arctan(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Dire se converge l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2}dx.$$

Svolgimento:
Osserviamo che $\frac{\arctan(x)}{x^2} > 0 \quad \forall x \in (0, +\infty)$. Poichè la funzione $\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x)}{x^2} = +\infty$, spezziamo l'integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2}dx = \int_0^{1} \frac{\arctan(x)}{x^2}dx + \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2}dx$$

e studiamo separatamente i due integrali.
Poichè $\arctan(x) < \frac{\pi}{2}$, abbiamo:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2}dx < \frac{\pi}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2}dx$$

e l'integrale a destra della preccedente disequazione converge per quanto visto a lezione, per cui, applicando il criterio del confronto, converge anche l'integrale a sinistra.
Quando $x \to 0^+$, $\frac{\arctan(x)}{x^2}$ è asintoticamente equivalente a $\frac{1}{x}$. Poichè, per quanto visto a lezione, $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ diverge, allora, per il criterio del confronto asintotico, diverge anche $\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x^2}dx$.
In conclusione, $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2}dx$ diverge.

A

Esercizio 4.
Sia
$$f(x) = \frac{x}{9+x^2}.$$

Scrivere la serie di Taylor centrata in 0 **di** $f(x)$
Svolgimento:
Ricordando che per $x \in (-1,1)$ si ha:
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$
otteniamo:
$$f(x) = \frac{x}{9}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{x}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{3^{2n}} = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2n}}.$$

Scrivere il polinomio di Taylor di grado 4 **e centrato in** 0 **di** $f(x)$
Svolgimerto:
Da quanto calcolato nel punto precedente, il polinomio di Taylor richiesto è:
$$\frac{1}{9}x - \frac{1}{81}x^3.$$
Osserviamo che il coefficente del termine di grado 4 è 0.

Calcolare
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\frac{\sin x}{9} - f(x)\right).$$

Svolgimento:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\frac{\sin x}{9} - f(x)\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\frac{x}{9} - \frac{x^3}{54} + o(x^3) - \frac{x}{9} + \frac{x^3}{81} + o(x^3)\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{81} - \frac{1}{54} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right) = \frac{1}{81} - \frac{1}{54}\,.\end{aligned}$$