Università degli Studi della Calabria

ANALISI MATEMATICA 1

Appello del 24 gennaio 2017

COGNOME: ....

NOME: ....

MATRICOLA: ....

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA: ....

IMPORTANTE

Al termine della prova è necessario riconsegnare solo il presente fascicolo. I risultati e lo svolgimento relativo vanno riportati negli appositi spazi o nel retro dei fogli del presente fascicolo: un campo vuoto o assenza di calcoli dove richiesto significano 0 punti.

SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE

A

Prova Scritta di Analisi Matematica 1 del 24-1-2017

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{2e^x - 3}{(e^x - 2)^2}.$$

Determinarne:

dominio

Svolgimento:

Affinchè il denominatore non si annulli, si deve avere: $e^x - 2 \neq 0$, ovvero:

$$x \neq \log(2).$$

Pertanto si ha:

$$Dom(f) = (-\infty, \log(2)) \cup (\log(2), \infty).$$

intersezioni con gli assi

Svolgimento:

Per trovare l'intersezione con l'asse della X, vediamo quando si annulla funzione, ovvero quando si annulla il numeratore: $2e^x - 3 = 0$ e quindi si ottiene il punto di intersezione:

$$x = \log\left(\frac{3}{2}\right).$$

limiti agli estremi del dominio

Svolgimento:

Quando $x \to \log(2)$, il numeratore $2e^x - 3$ tende a 1 e il denominatore, che è sempre positivo, tende a 0. Pertanto si ha:

$$\lim_{x \to \log(2)} f(x) = +\infty.$$

Quando $x \to -\infty$, si ha: $2e^x - 3 \to -3$ e $(e^x - 2)^2 \to 4$. Pertanto si ha:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{3}{4}.$$

Quando $x \to +\infty$, si ha:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x \left(2 - \frac{3}{e^x}\right)}{e^{2x} - 4e^x + 4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x \left(2 - \frac{3}{e^x}\right)}{e^{2x}\left(1 - \frac{4}{e^x} + \frac{4}{e^{2x}}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(2 - \frac{3}{e^x}\right)}{e^x\left(1 - \frac{4}{e^x} + \frac{4}{e^{2x}}\right)} = 0.$$

asintoti verticali

Svolgimento:

Da quanto calcolato nel punto precedente, la retta di equazione $x = \log(2)$ è un asintoto verticale.

asintoti orizzontali

Svolgimento:

Da quanto calcolato nel punto precedente, le rette di equazione $y = 0$ e $y = -\frac{3}{4}$ sono asintoti orizzontali rispettivamente per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.

asintoti obliqui

Svolgimento:

Essendo presenti asintoti orizzontali sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$, non esistono asintoti obliqui.

derivata prima

Svolgimento:

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^x - 2)^2 - (2e^x - 3)2(e^x - 2)e^x}{(e^x - 2)^4} = 2e^x \frac{1 - e^x}{(e^x - 2)^3}$$

punti stazionari e loro classificazione

Svolgimento:

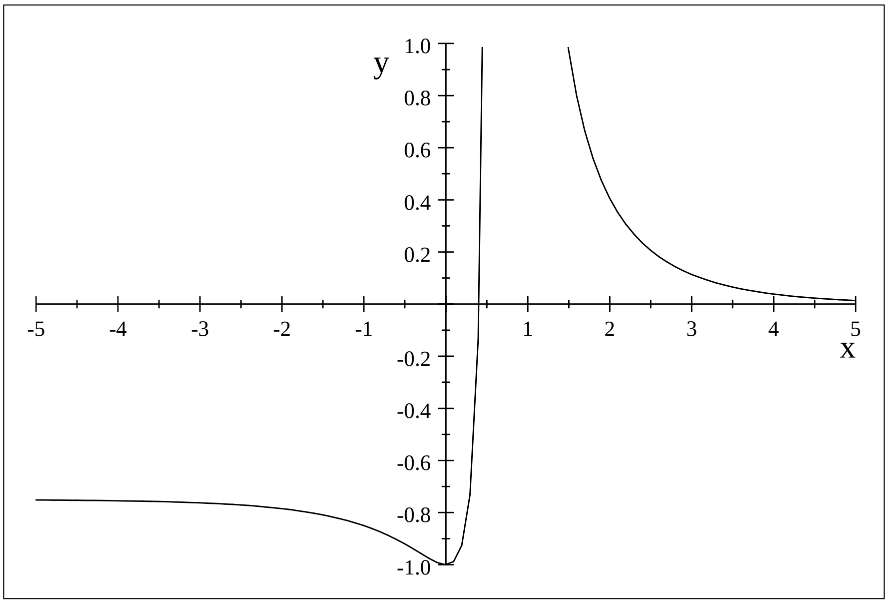
Affinchè la derivata si annulli, si deve annullare la quantità $1-e^x$ e l'unico punto stazionario è il punto $x_0 = 0$.

Per classificarlo, osserviamo che la quantità $\frac{2e^x}{(e^x-2)^4}$ è sempre strettamente positiva e quindi, per determinare il segno della derivata vicino x_0 bisogna studiare il segno di $1 - e^x$, che è positivo per $x > 0$ e negativo per $x < 0$.

Pertanto concludiamo che x_0 è un punto di minimo non solo relativo ma anche assoluto.

grafico qualitativo

Svolgimento:



eventuali massimi e minimi assoluti

Svolgimento:

Da quanto visto sopra f ha un minimo assoluto in 0, dove vale -1.

Poichè $\lim_{x\to\log(2)} f(x) = +\infty$, non esiste massimo assoluto.

Prova Scritta di Analisi Matematica 1 del 24-1-2017

Esercizio 2.

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2+4x}{2+x} & \text{if } x \geq 0 \\ \\ \frac{2-4x}{2-x} & \text{if } x < 0\,. \end{cases}$$

Dire se la funzione è continua in $x_0 = 0$.

Svolgimento:

Per $x > 0$ f è continua in quanto definita come rapporto di due polinomi e il denominatore di questo rapporto $2 + x$ nono si annula mai per $x > 0$

Stesso discorso vale per $x < 0$.

Vediamo se f è continua in 0.

Osserviamo che $f(0) = 1$.

Inoltre si ha: $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ e quindi la funzione è continua in 0.

Dire se la funzione è derivabile in $x_0 = 0$.

Svolgimento:

Si ha:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{4(2+x)-(2+4x)}{(2+x)^2} = \frac{6}{(2+x)^2} & \text{se } x > 0 \\ \\ \frac{-4(2-x)+2-4x}{(2-x)^2} = -\frac{6}{(2-x)^2} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e quindi:

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \frac{3}{2}, \qquad \lim_{x \to 0^-} f'(x) = -\frac{3}{2}.$$

Pertando, ricordando il teorema che lega il limite della derivata e il limite del rapporto incrementale, concludiamo che:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{3}{2}, \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -\frac{3}{2}$$

e quindi la funzione non è derivabile in 0.

Prova Scritta di Analisi Matematica 1 del 24-1-2017

Esercizio 3.

Trovare le primitive della funzione

$$f(x) = 2x \arctan x.$$

Svolgimento:

$$\begin{aligned}
\int 2x \arctan x \, dx &= x^2 \arctan x - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = x^2 \arctan x - \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \\
&= x^2 \arctan x - \int 1 \, dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx = \\
&= x^2 \arctan x - x + \arctan x + C
\end{aligned}$$

Stabilire se il seguente integrale improprio converge.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^5 + x^7} \, dx.$$

Svolgimento:

Verifichiamo che

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^5 + x^7} \right| dx < +\infty,$$

da cui deduciamo che l'integrale dato converge.

Ricordando che $|\sin x| \leq 1$, segue che:

$$\left| \frac{\sin x}{x^5 + x^7} \right| \leq \frac{1}{x^5 + x^7} \qquad \forall x \in [1, +\infty).$$

La funzione $\frac{1}{x^5+x^7}$ per $x \to +\infty$ è asintoticamente equivalente alla funzione $\frac{1}{x^7}$, il cui integrale improprio tra 1 e $+\infty$ converge.

Pertanto per il criterio del confronto asintotico

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^5 + x^7} dx < +\infty$$

e per il criterio del confronto si ha anche

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^5 + x^7} \right| dx < +\infty.$$

Esercizio 4. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n \cdot \sin n}{4^n \cdot n} .$$

Svolgimento:

La serie **non** è a termini positivi. Studiamo la convergenza assoluta. Risulta

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{3^n \cdot \sin n}{4^n \cdot n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n \cdot |\sin n|}{4^n \cdot n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{4^n \cdot n}.$$

Inoltre, applicando il criterio della radice, otteniamo:

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{4^n \cdot n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{3}{4} < 1,$$

da cui deduciamo che la serie converge assolutamente e quindi converge.

Prova Scritta di Analisi Matematica 1 del 24-1-2017

Esercizio 5. Scrivere il polinomio di Taylor di ordine $n = 3$ e centro $x_0 = 0$ di $f(x) = \arctan(x^3)$.

Svolgimento:

Ricordando che $\arctan x = x + o(x)$, si ottiene:

$$\arctan(x^3) = x^3 + o(x^3).$$

Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x) + \arctan(x^3)}{x^3}.$$

Svolgimento:

Ricordando che $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ e lo sviluppo calcolato sopra per $\arctan(x^3)$, otteniamo:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x) + \arctan(x^3)}{x^3} &= \lim_{x\to 0} \frac{x - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) + x^3 + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{7}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \\ &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{7}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} \right) = \frac{7}{6}.\end{aligned}$$