Università degli Studi della Calabria

ANALISI MATEMATICA 1

Appello del 16 febbraio 2016

COGNOME: ....

NOME: ....

MATRICOLA: ....

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA: ....

IMPORTANTE

Al termine della prova è necessario riconsegnare solo il presente fascicolo. I risultati e lo svolgimento relativo vanno riportati negli appositi spazi o nel retro dei fogli del presente fascicolo: un campo vuoto o assenza di calcoli dove richiesto significano 0 punti.

SPAZIO RISERVATO ALLA COMMISSIONE

A

Prova Scritta di Analisi Matematica 1 del 16 febbraio 2016

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\left(\frac{x-2}{x+1}\right).$$

Determinarne:

dominio

Svolgimento:

$$D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty);$$

intersezioni con gli assi

Svolgimento:

risulta

$$f(0) = 0 \text{ e } f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ o } x = 2,$$

di conseguenza i punti d'intersezione con gli assi sono

$$(0,0) \text{ e } (2,0);$$

limiti agli estremi del dominio

Svolgimento:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= +\infty, \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to(-1)^+} f(x) &= +\infty, \lim_{x\to(-1)^-} f(x) = -\infty; \end{aligned}$$

asintoti verticali

Svolgimento:

$$x = -1;$$

asintoti orizzontali

Svolgimento:

la funzione data non ammette asintoti orizzontali;

asintoti obliqui

Svolgimento:

poichè

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

la funzione non ammette asintoti obliqui;

derivata prima

Svolgimento:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{x-2}{x+1}\right) + x^{\frac{1}{3}}\,\frac{3}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2+8x-2}{3x^{\frac{2}{3}}(x+1)^2} \quad (x \neq 0); \end{aligned}$$

punti di non derivabilità e loro classificazione

Svolgimento:

risulta

$$f'_+(0) = f'_-(0) = -\infty,$$

dunque $x = 0$ è un punto di flesso a tangente verticale per f;

punti stazionari e loro classificazione

Svolgimento:

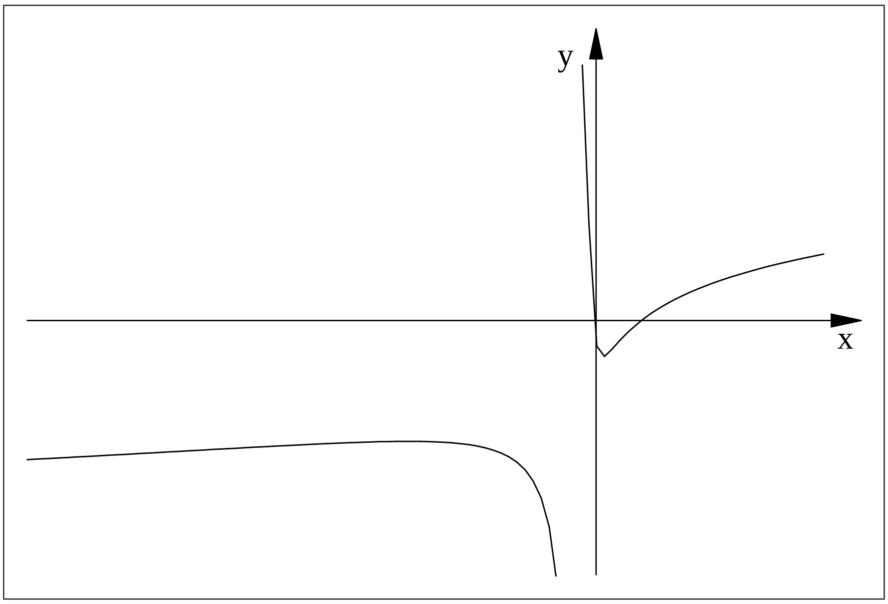
si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^2+8x-2}{3x^{\frac{2}{3}}(x+1)^2} \geq 0, \\ x^2+8x-2 &\geq 0 \Leftrightarrow x \leq -4+3\sqrt{2} \text{ o } x \geq -4+3\sqrt{2}, \end{aligned}$$

quindi $x = -4-3\sqrt{2}$ è un punto di massimo relativo per f e $x = -4+3\sqrt{2}$ è un punto di minimo relativo per f;

grafico qualitativo

Svolgimento:



Esercizio 2.

Considerata la funzione

$$f(x) = xe^{\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x-1},$$

si chiede di

stabilire se f è derivabile nel suo dominio e classificare eventuali punti di non derivabilità;

Svolgimento:

La funzione è definita e continua in $D = (-\infty, +\infty)$. Risulta

$$f'(x) = e^{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

Quindi f è derivabile nel suo dominio per $x \neq 1$. Inoltre

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} \left(e^{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{3}e^{\sqrt[3]{x}}\sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} \right) = +\infty \Rightarrow f'_{\pm}(1) = +\infty,$$

Dunque f non è derivabile in $x = 1$ che è un punto di flesso a tangente verticale.

stabilire se f ammette massimo o minimo assoluti nell'intervallo $[1, 2]$ e in caso affermativo calcolarne il valore.

Svolgimento:

Evidentemente risulta ha $f'(x) > 0$ per $x > 0$. Quindi $f(x)$ è strettamente crescente nell'intervallo assegnato. Dunque

$$\min_{[1,2]} f = f(1) = e, \max_{[1,2]} f = f(2) = 2e^{\sqrt[3]{2}} + 1.$$

Prova Scritta di Analisi Matematica 1 del 16 febbraio 2016

Esercizio 2. Calcolare l'area della regione di piano sottesa al grafico della funzione $f(x) = e^{-2x} \sin x$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

Svolgimento:

Studiamo il segno della funzione data nell'intervallo assegnato:

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, \pi].$$

Integrando due volte per parti, si ha

$$\begin{aligned} & \int e^{-2x} \sin x dx \\ = & -\frac{1}{2} e^{-2x} \sin x + \frac{1}{2} \int e^{-2x} \cos x dx \\ = & -\frac{1}{2} e^{-2x} \sin x - \frac{1}{4} e^{-2x} \cos x - \frac{1}{4} \int e^{-2x} \sin x dx, \end{aligned}$$

da cui

$$\int e^{-2x} \sin x dx = -\frac{2}{5} e^{-2x} \sin x - \frac{1}{5} e^{-2x} \cos x + c.$$

Quindi, detta A l'area richiesta, risulta

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi} e^{-2x} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-2x} \sin x dx \\ &= \left[-\frac{2}{5} e^{-2x} \sin x - \frac{1}{5} e^{-2x} \cos x \right]_0^{\pi} - \left[-\frac{2}{5} e^{-2x} \sin x - \frac{1}{5} e^{-2x} \cos x \right]_{\pi}^{2\pi} \\ &= \frac{1}{5} e^{-4\pi} + \frac{1}{5} e^{-2\pi} + \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Esercizio 4. Studiare convergenza assoluta e convergenza semplice della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(1 - \cos\left(\frac{1}{e^n}\right)\right) \frac{1}{e^n}.$$

Svolgimento:

Si tratta di una serie a segni alterni. Poichè

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos\left(\frac{1}{e^n}\right)}{\frac{1}{e^{2n}}} = \frac{1}{2},$$

si ha

$$\left(1-\cos\left(\frac{1}{e^n}\right)\right)\frac{1}{e^n} \sim \frac{1}{2e^{3n}}.$$

Per il criterio del confronto asintotico, la serie dei moduli della serie data ha lo stesso carattere della serie a termini positivi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2e^{3n}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{e^3}\right)^n,$$

che è una serie geometrica convergente. Dunque la serie data converge assolutamente e quindi converge semplicemente.

Esercizio 5. Determinare mediante calcolo diretto il polinomio di Taylor al secondo ordine della funzione $f(x) = e^2 - e^{x^2+x}$ nel punto $x_0 = 1$.

Svolgimento:

Risulta

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(2x+1)\, e^{x^2+x}, \\ f''(x) &= -\left(2e^{x^2+x} + e^{x^2+x}(2x+1)^2\right) \\ &= -e^{x^2+x}\left(4x^2+4x+3\right), \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} f(1) &= 0, \\ f'(1) &= -3e^2, \\ f''(1) &= -11e^2. \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} T_2^1(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 \\ &= -3e^2(x-1) - \frac{11e^2}{2}(x-1)^2. \end{aligned}$$