

# Graph Theory and Brain Networks



# Graph Theory



# Cosa è un grafo

→ Un grafo  $G = (V, E)$  è una coppia di insiemi disgiunti:

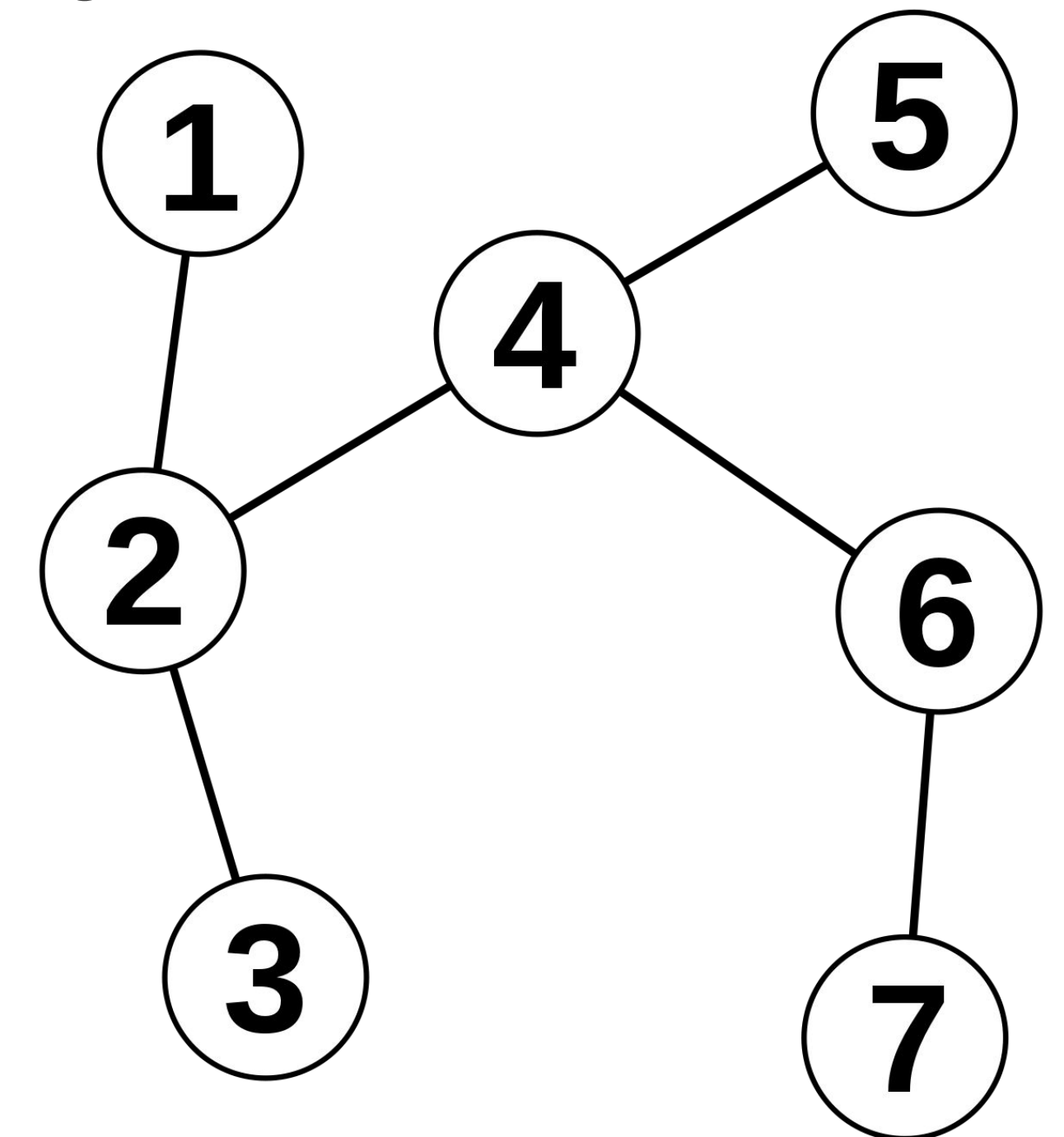
- Un insieme di vertici  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$
- Un insieme di spigoli  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_L\}$

Ove ogni spigolo è una coppia  $e_k = (v_i, v_j)$ , chiamati estremi dello spigolo

Nella teoria dei grafi, un grafo  $G(V, E)$  è una coppia ordinata data da un insieme di vertici e un insieme di archi  $E$  che connette tali vertici.

Se l'insieme  $E$  gode della proprietà di simmetria allora il grafo sarà *non orientato*, altrimenti *orientato*.

Un grafo è detto *pesato* se ad ogni arco è associato un peso



# Alcune definizioni e nozioni utili

## Grado

Il grado di un vertice in un grafo non orientato è il numero di archi in cui è coinvolto

## Density

Il rapporto tra il numero di archi in una rete e il numero di archi possibili. Più è vicino a uno più il grafo è completo, più è vicino a zero più il grafo è sparso.

# Alcune definizioni e nozioni utili

## Path

Il cammino (walk) da un vertice  $v$  a un un vertice  $v'$  in un grafo  $G(V,E)$  è una sequenza di vertici  $(v_0, v_1, \dots, v_N)$  tale per cui  $v_0 = v$  e  $v_N = v'$  e  $(v_{i-1}, v_i) \in E$  per  $i=1 \dots N$ . Quando i nodi e gli archi sono distinti si parla di path.

## Grafo connesso

Un grafo connesso è un grafo non orientato in cui esiste un cammino tra ogni coppia di nodi.

## Componente connessa

Una componente connessa è un sottografo indotto dai nodi tale che esiste almeno un cammino tra ogni coppia di nodi del sottografo. Questa proprietà deve essere massimale.

# Alcune definizioni e nozioni utili

## Cammino a lunghezza minima

In un grafo non orientato e non pesato la lunghezza di un cammino è data dal numero di archi che lo compongono. Il cammino minimo tra due nodi è il cammino di lunghezza minima tra di essi. Ma esiste un algoritmo che lo calcola?

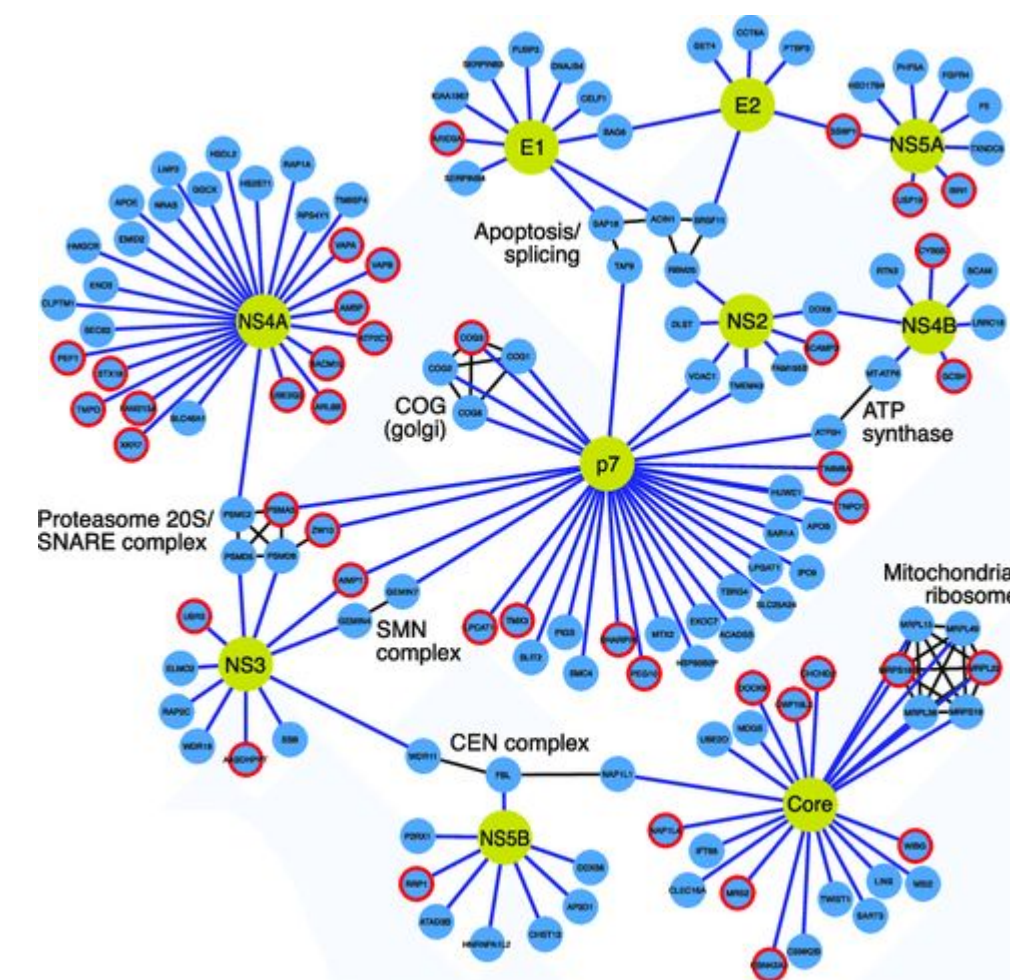
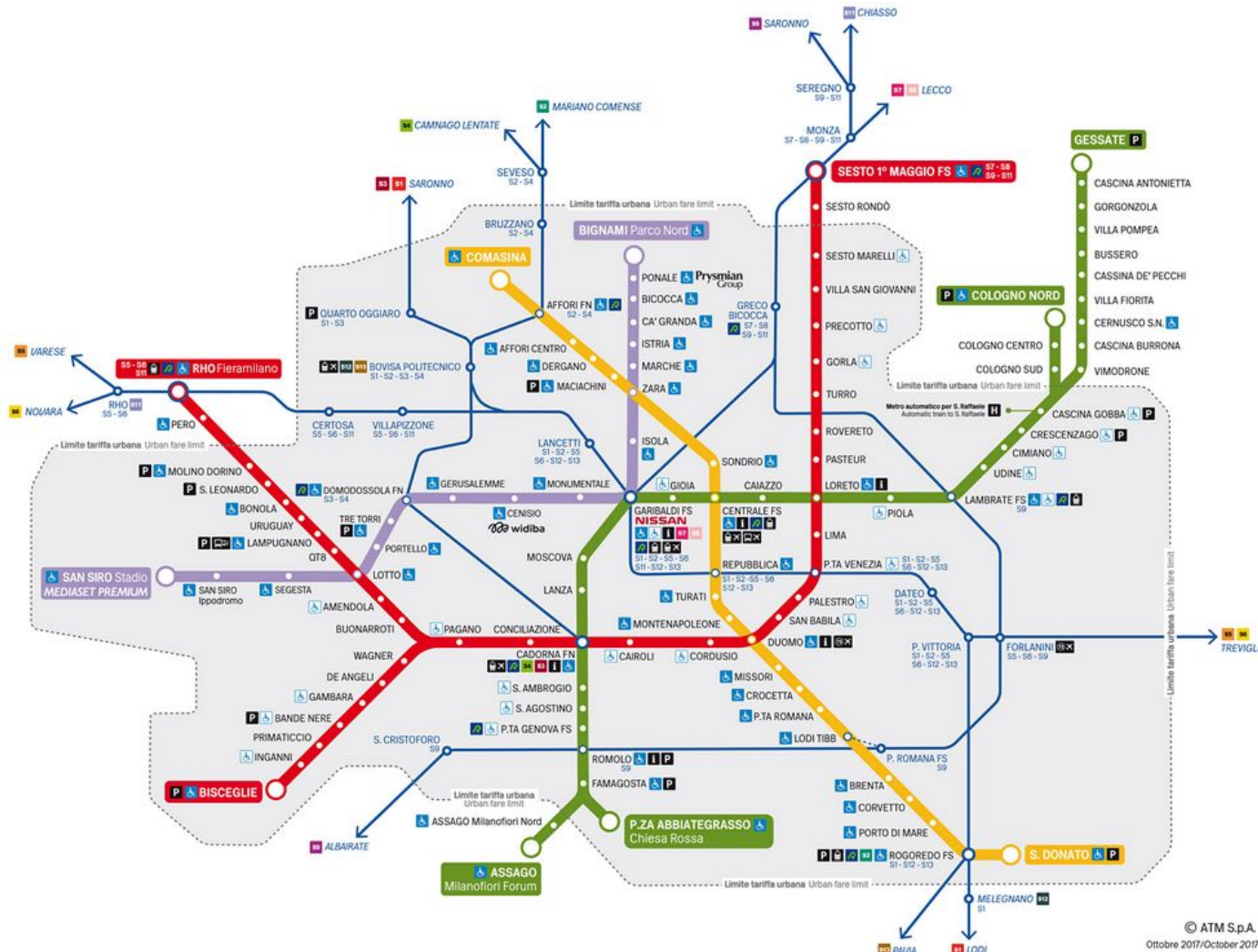
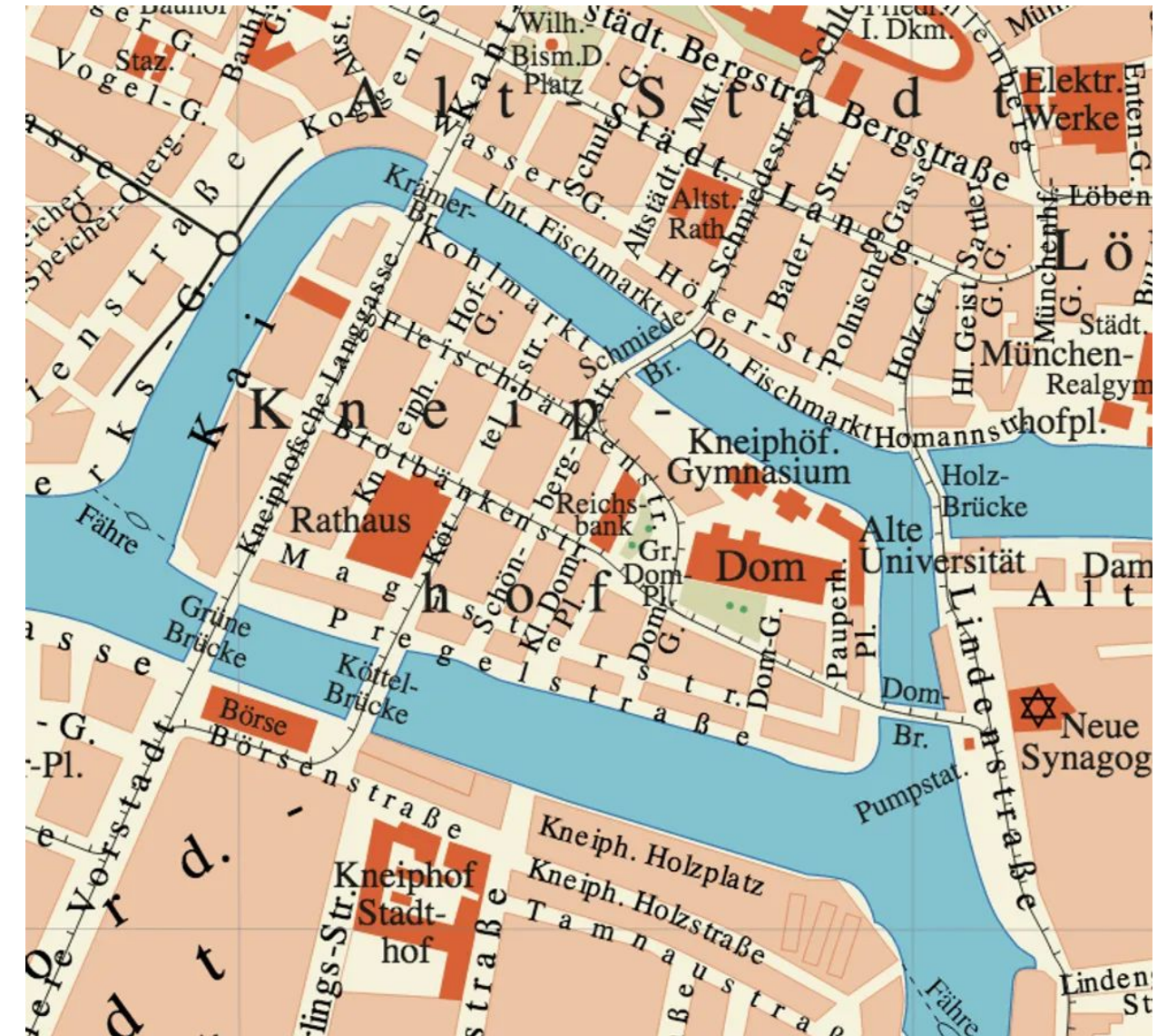
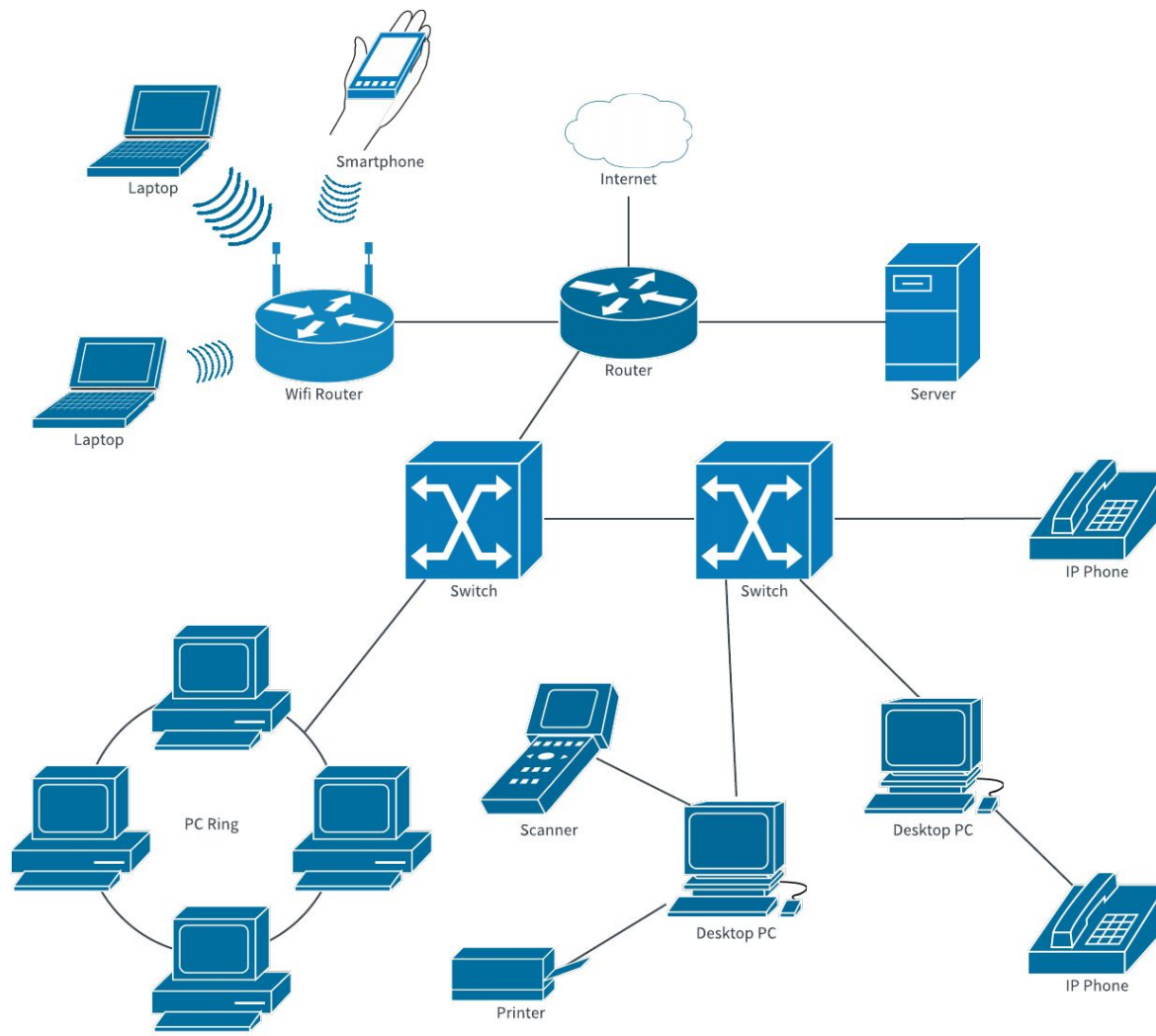
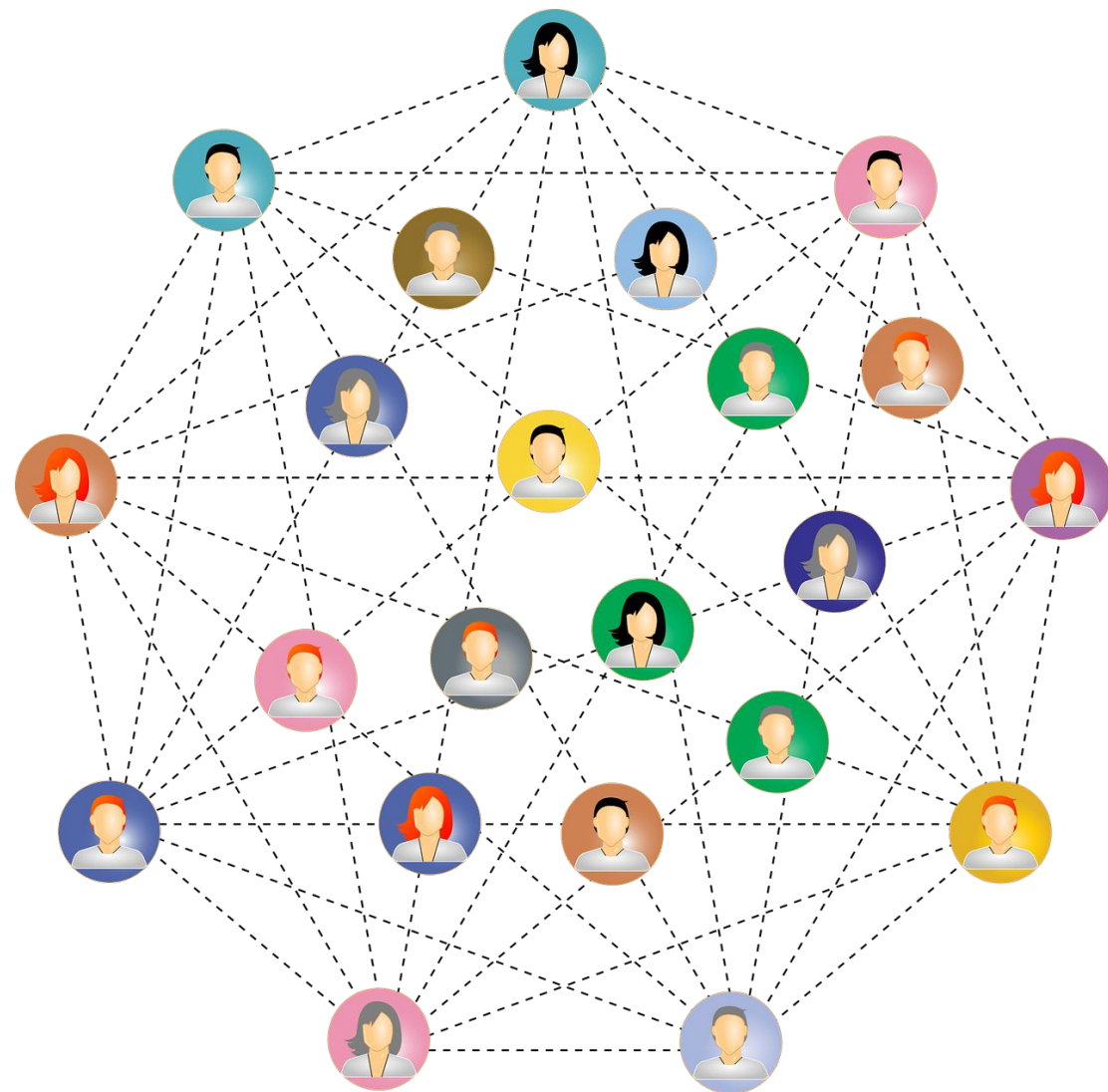
## Diametro

Il diametro di un grafo è la lunghezza del massimo fra i cammini minimi per ogni coppia di vertici.

“Graphs are Everywhere”



# Usi e Applicazioni



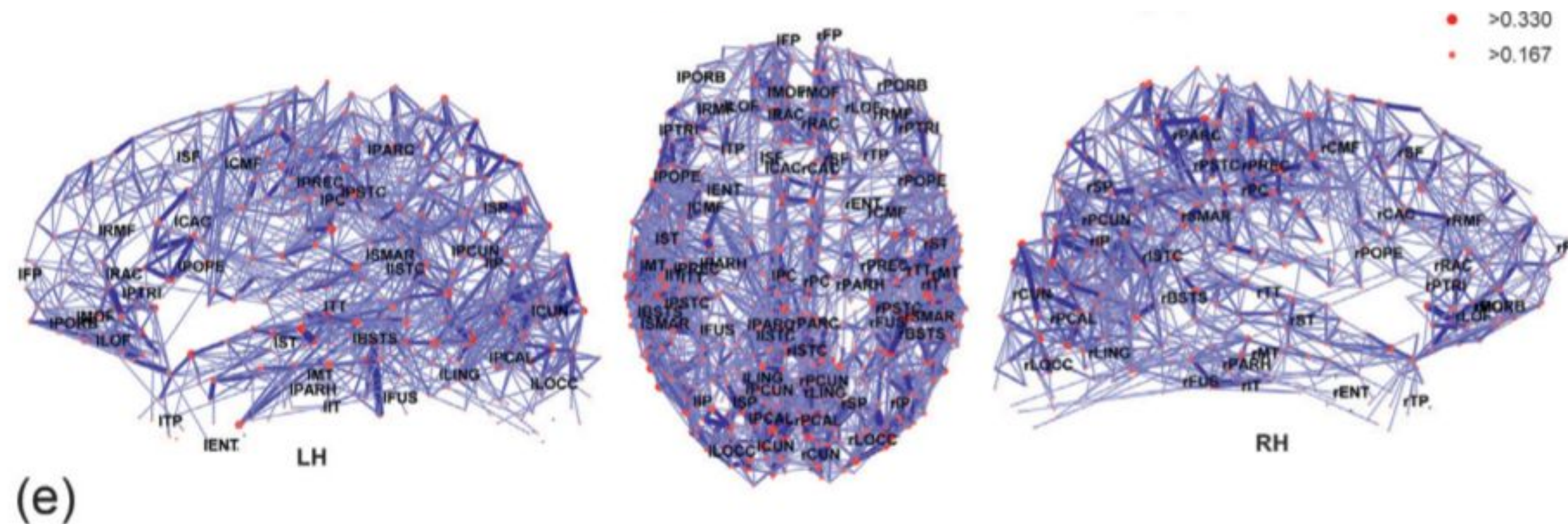


# Brain Networks

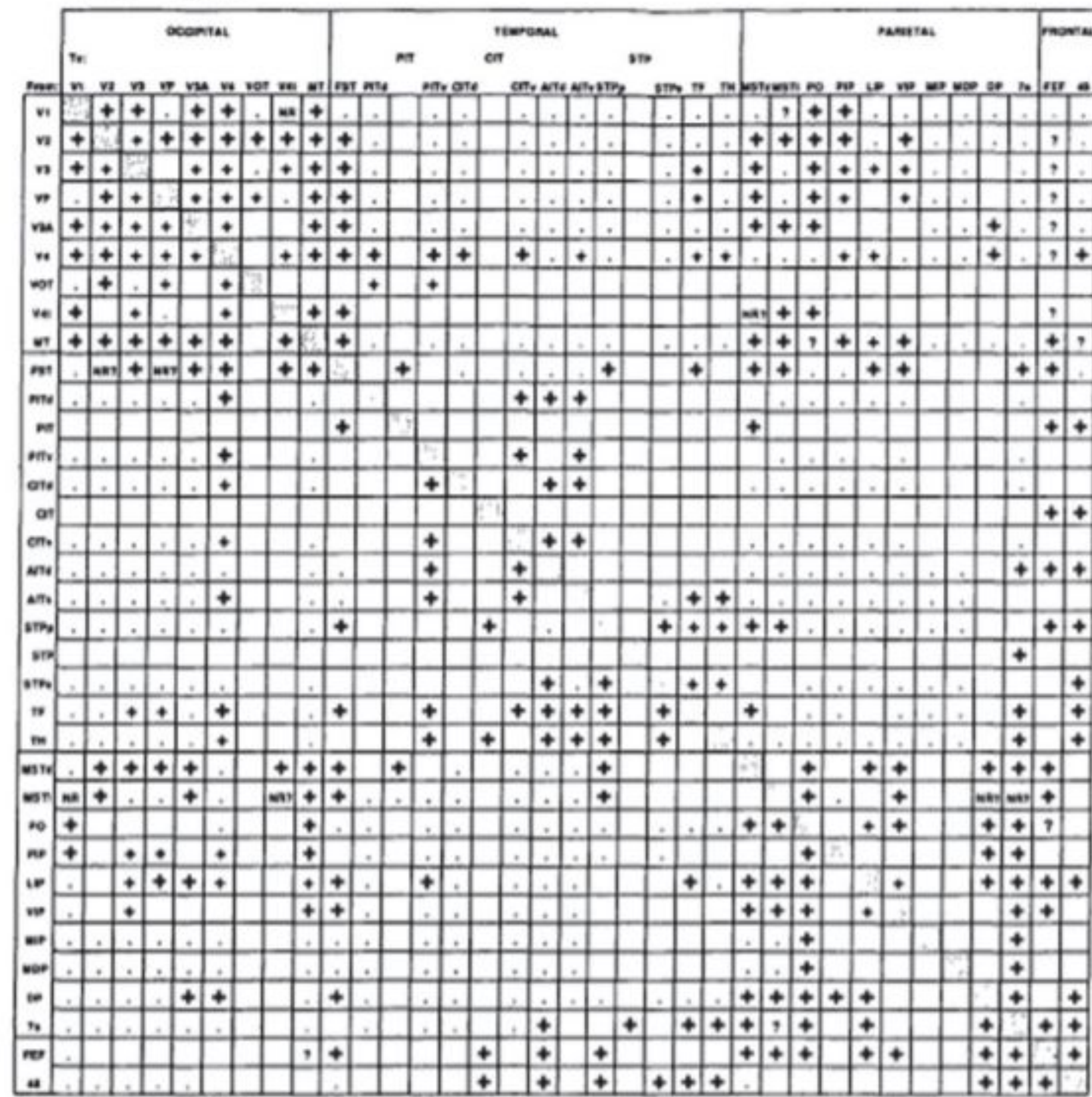
# I Brain Networks

→ Il cervello è un sistema complesso, con proprietà che sono né completamente random né completamente rigide.

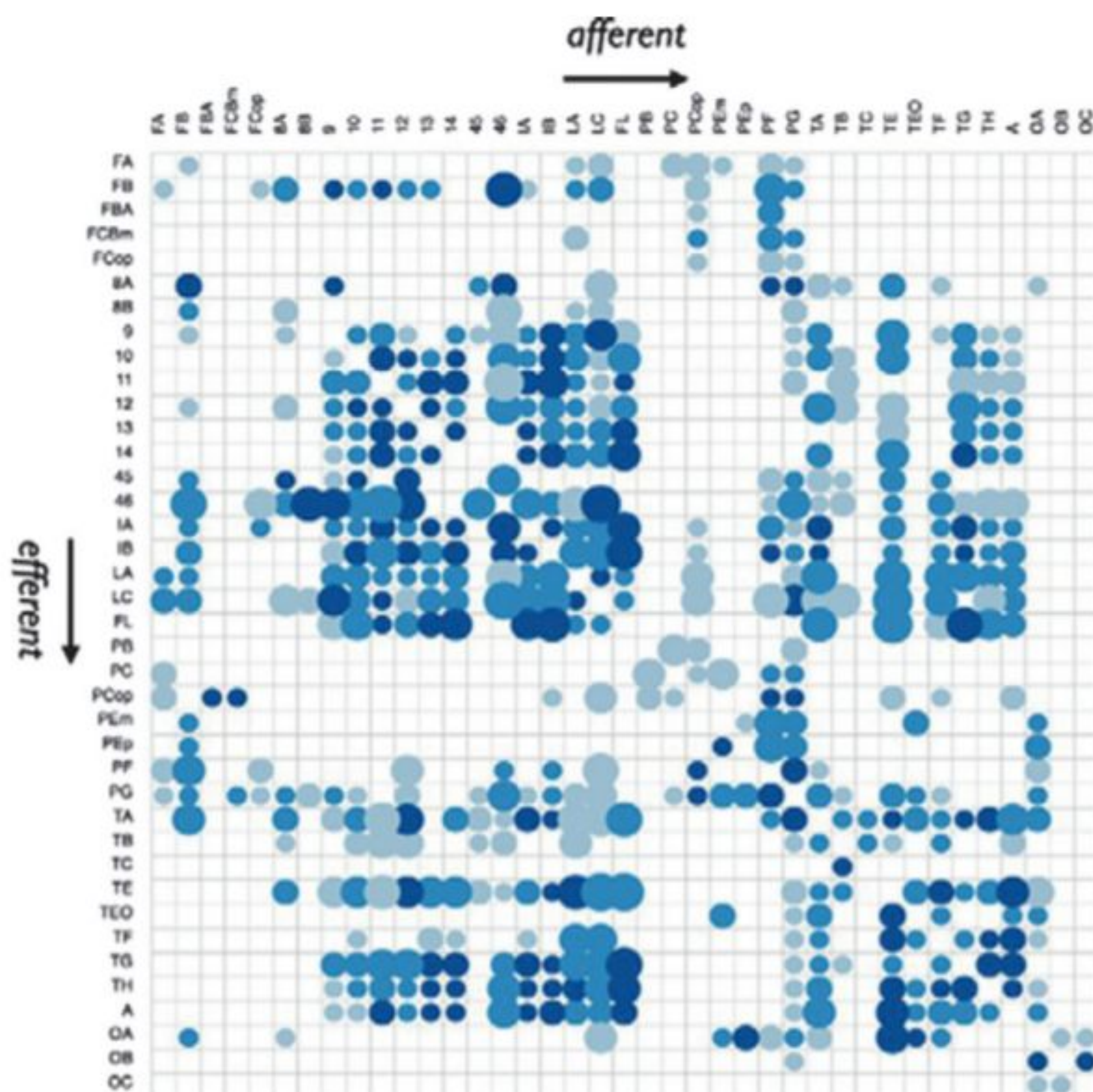
La network science si occupa di modellare sistemi complessi con i grafi, permettendo così di astrarre la rete dal contesto e di effettuare un'analisi sulle relazioni fra gli attori del sistema.



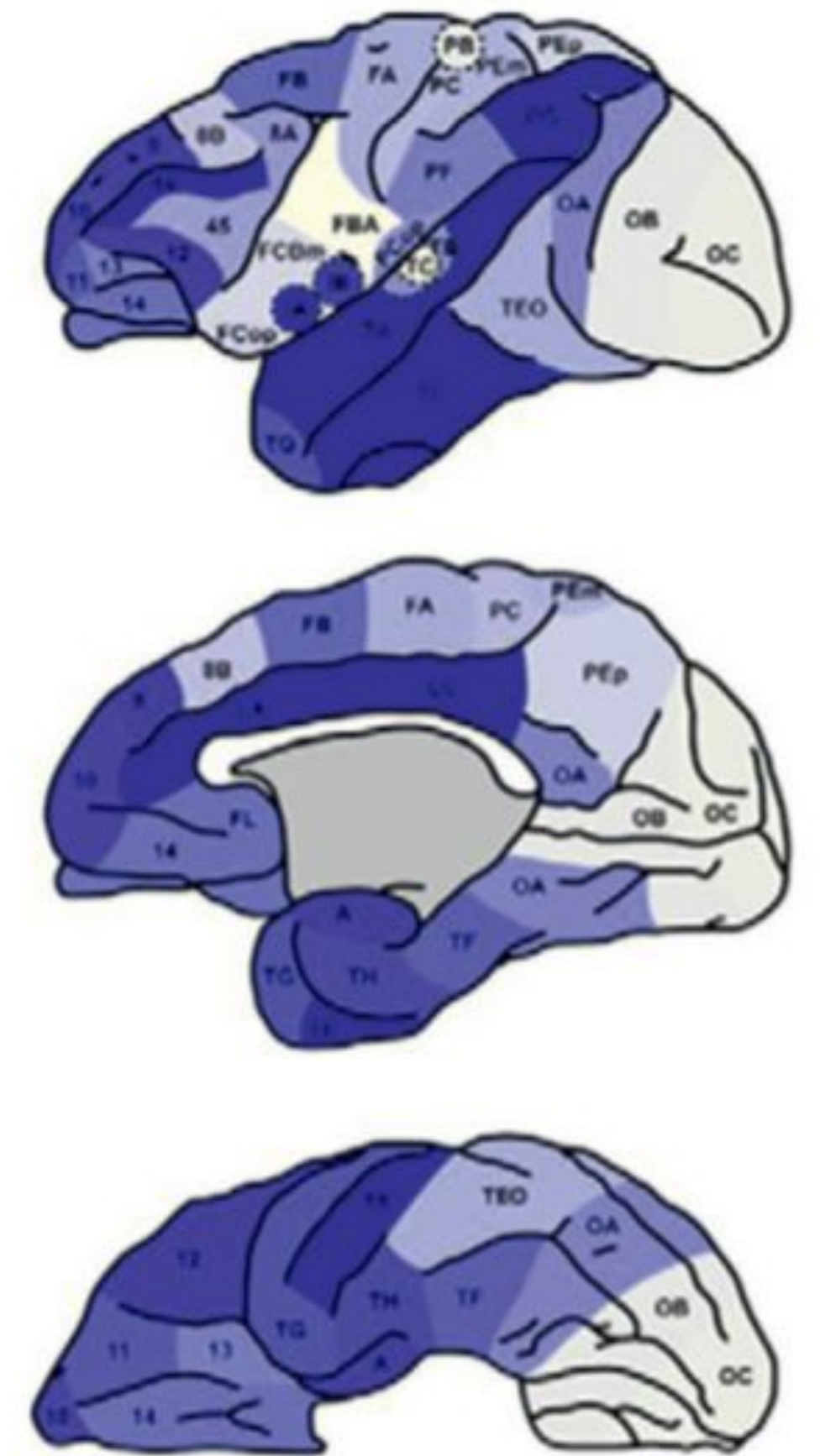




(a)



(b)



(c)

# Rappresentazioni



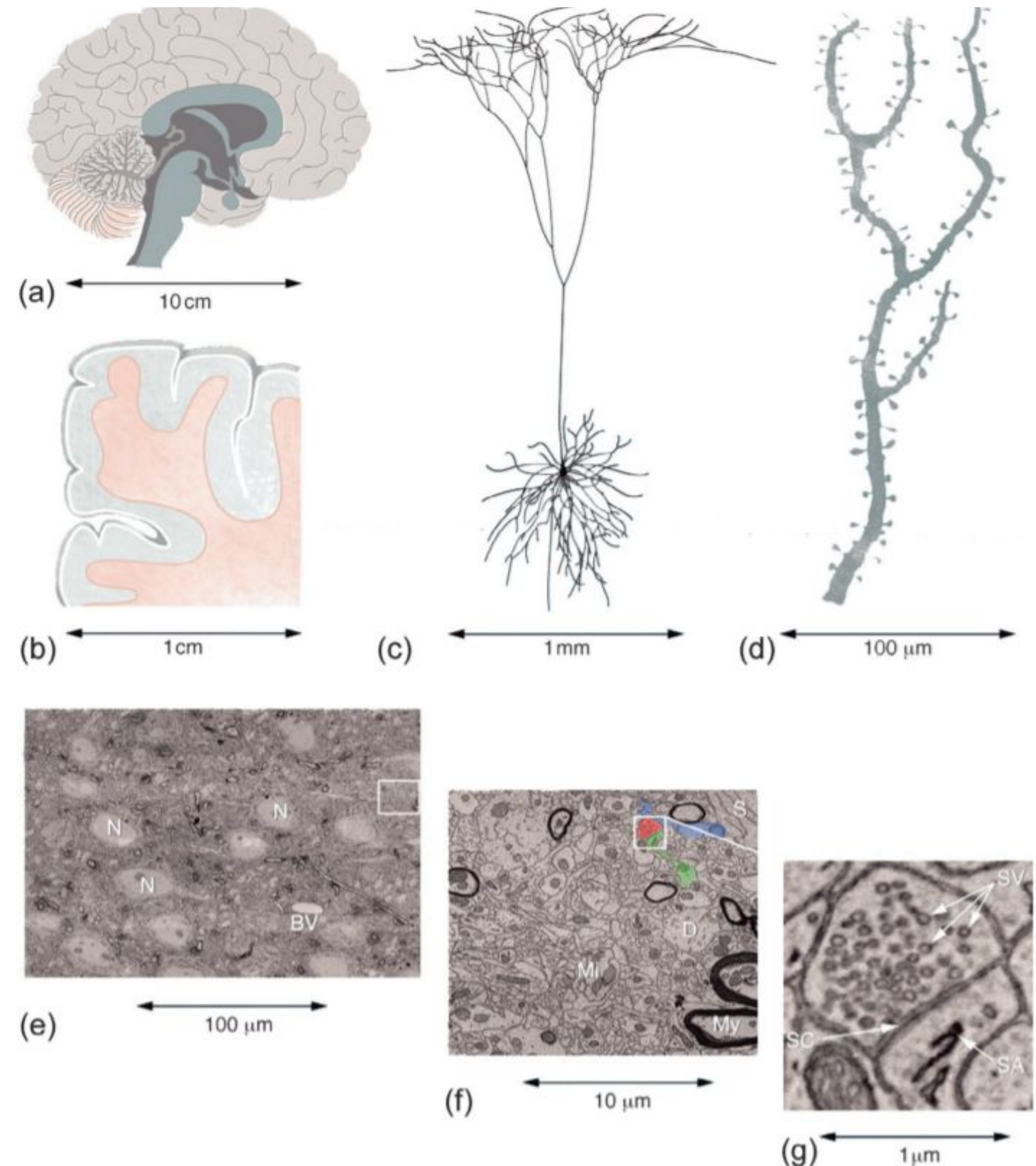
# Nodi e Archi

Non c'è una precisa definizione dei nodi e degli archi nei brain network.

Il cervello è organizzato in modo multiscalare.

Di conseguenza ci sono varie opzioni per la scelta di assegnazione di nodi e archi.

Usare una scala piuttosto che un'altra non è equivalente





# Nodi e Archi

## Scala Microscopica

Singoli neuroni e sinapsi.  
Ne consegue un grafo  
corposo con molti nodi e  
archi.

## Scala Mesoscopica

Popolazioni di neuroni  
funzionalmente correlate e  
circoscritti in uno spazio.  
☐ Perdita di informazione  
✓ Maggiore semplicità

## Scala Macroscopica

Aree citoarchitettoniche.  
Poco usata e vengono usati  
metodi euristici per definire i  
nodi a questa scala.

# Caratteristiche di un Brain Network

- I brain network sono intrinsecamente orientati: ogni proiezione assonale si origina in una cellula e termina in una o più sinapsi. Tuttavia non è ancora possibile mappare le direzioni di una proiezione assonale in un essere ancora vivente.
- I brain network sono pesati: non tutti i collegamenti neurali sono uguali



# Brain Network Analysis

# Proprietà 1 – Degree Distribution

Identificare la degree distribution significa identificare la distribuzione del grado dei nodi, ovvero, preso il grado di ogni nodo, si calcolano le frequenze assolute o relative dei gradi si traccia il grafico della distribuzione di probabilità.

## Reti Single-Scale

Reti in cui è possibile stabilire un ordine di grandezza per i gradi dei nodi.

→ Distribuzione: *Poisson* o *Binomiale*.

## Reti Scale-Free

Non è possibile stabilire una grandezza di misura per i gradi dei nodi: esistono nodi detti *Hub* o *Influencer*.

→ Distribuzione: *Pareto*

## Reti Broad-Scale

Una via di mezzo delle single-scale e le scale-free. Per una buona parte della distribuzione la legge è di pareto dopo di che ho una più bassa probabilità rispetto a Pareto di trovare degli Hub.





# Proprietà 1 – Degree Distribution

Analisi sulla connettività strutturale umana (*Gong et al., 2009; Iturriamedina et al., 2008*), sulla covarianza strutturale (*He et al., 2007*), e sulla connettività funzionali (*Fornito et al., 2010; Hayasaka and Laurienti, 2010; Lynall et al., 2010*) hanno dimostrato che i brain networks sono **broad-scale**.

→ Su1 notebook jupyter

# Proprietà 1 – Hubs

Un'analisi di Sporns e colleghi (2007) suggerisce che gli hub nei brain network hanno diverse caratteristiche topologiche:

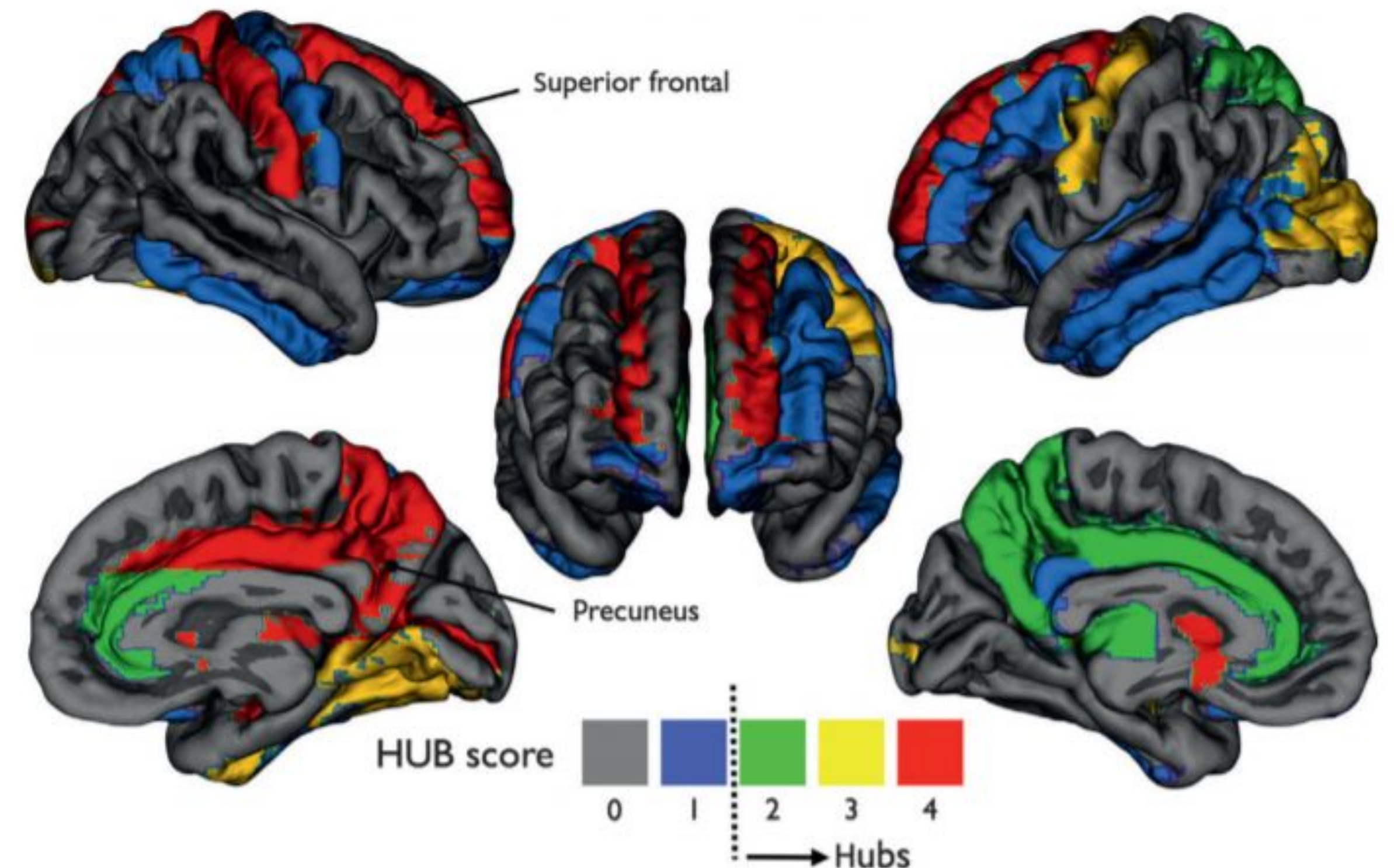
- . Degree alto
- . Alta closeness centrality
- . Alta betweenness centrality
- . Low clustering

Queste caratteristiche vennero usate da van den Heuvel et al (2010) per formulare una definizione precisa degli hub nei brain network mappati dalle risonanze magnetiche

# Proprietà 1 - Hubs

A ognuna delle 108 regioni del cervello venne assegnato uno score calcolato sulle seguenti condizioni:

- Il nodo si colloca sopra l'80esimo percentile della distribuzione dei gradi dei nodi. Lo stesso per la betweenness centrality
- Il nodo si colloca al di sotto del 20esimo percentile della distribuzione dei coefficienti di clustering. Lo stesso per lowest average path length (1/closeness centrality)



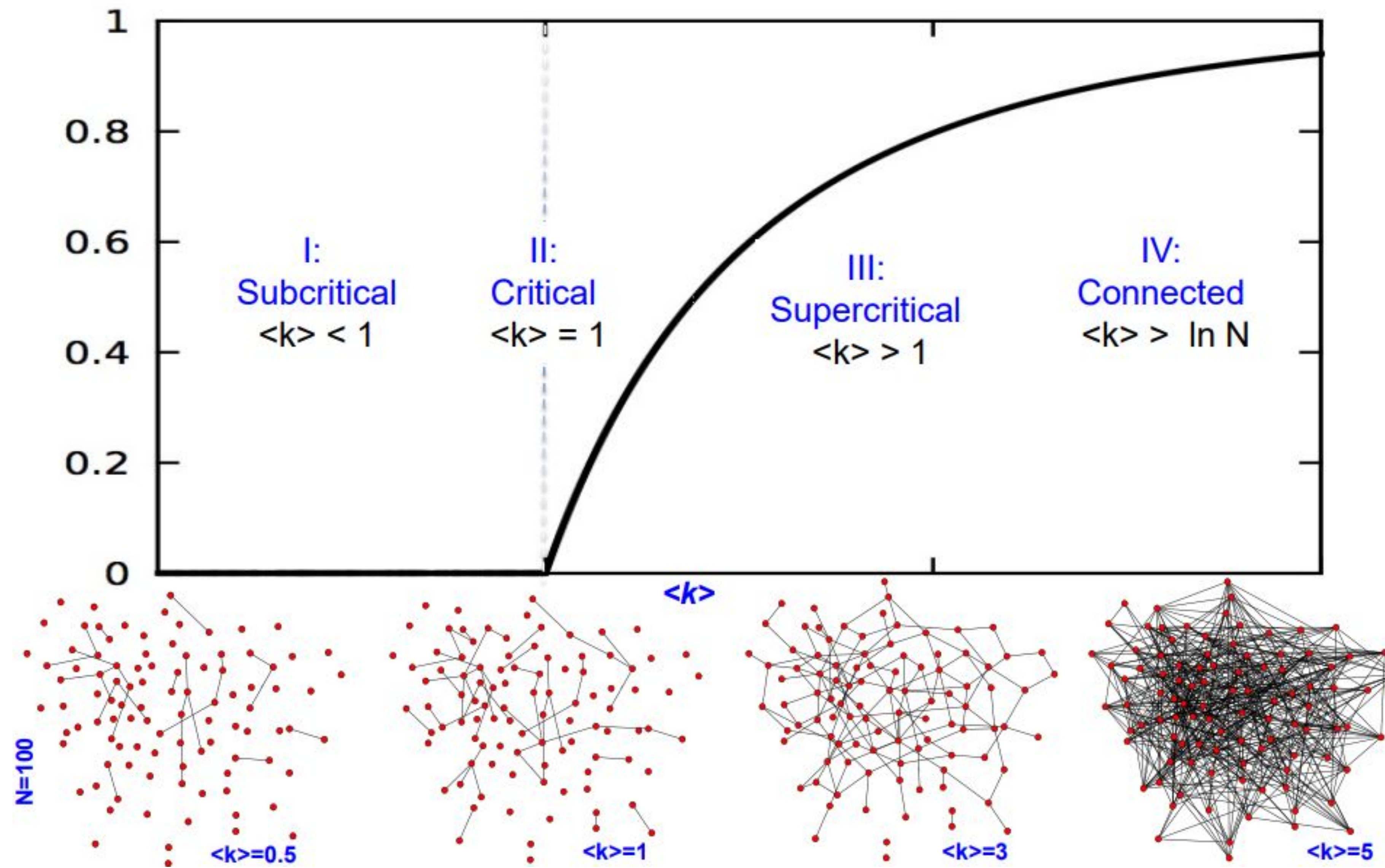


# Proprietà 2 – Connectivity

Si tratta di una proprietà che riguarda l'intera rete. Riferimento solo a grafi non orientati.

Analizzare la connettività di una rete significa individuare le componenti connesse del grafo. Ad esempio si può osservare che:

- . Il grafo è connesso: una sola componente connessa che raccoglie tutti i nodi.
- . Vi è una giant component: una grande componente connessa che racchiude la maggior parte dei nodi (circa il 90%) e altre componenti che comprendono i restanti, di numero variabile
- . Ci sono tante “*piccole*” componenti connesse



## Proprietà 2 - Connettività

# Proprietà 2 - Connectivity

Come abbiamo visto quando abbiamo analizzato la prima proprietà l'average degree era 3.03 quindi ci aspettiamo che ci sia una giant component.

→ `Sul notebook jupyter`



# Proprietà 3 – Small World

Il fenomeno small world si osserva quando il diametro di una rete è molto basso.

Presi due nodi a caso in una rete, quanto distano l'un l'altro?

Sorprendentemente poco: [Six Degrees of Separation di Milgram](#) per le reti di contatto reali e ancora meno per i social network. Infatti è stato osservato dal nostro laboratorio di Algoritmica per il Web (*Vigna, Boldi et al, 2011*) che mediamente la distanza (diametro - 1) è 4.

Colloquium d'Informatique  
de Sorbonne Université

contact : colloquium@lip6.fr  
<http://www.lip6.fr/colloquium/>  
Vidéo disponible sur le site

## Four degrees of separation (and how we did it)

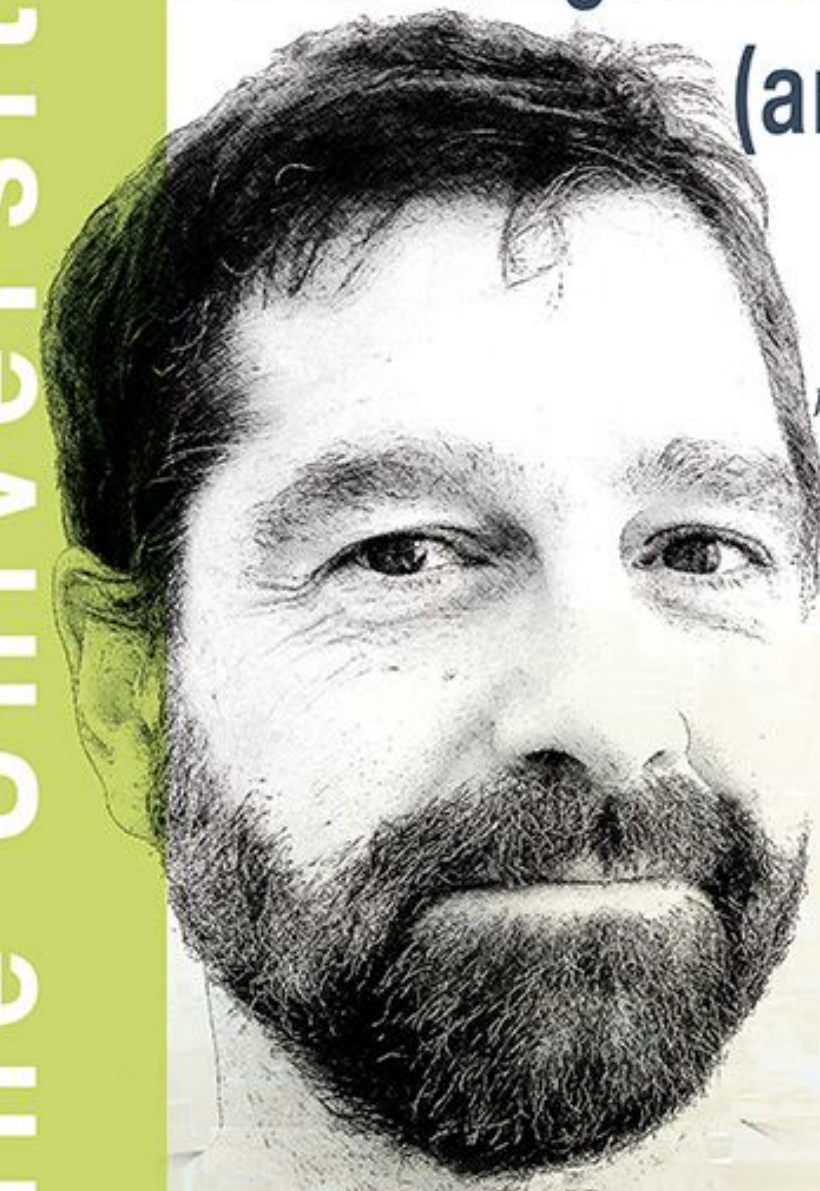
Sebastiano Vigna

Dipartimento di Informatica Laboratory for  
Web Algorithmics Università degli Studi di Milano

Amphi 34B

4, place Jussieu  
75005 Paris  
Metro Jussieu

6 Mai 2019  
à 18h00



Since the 60's, sociologists have been interested in how many friendship links you must traverse in average to get from any person in the world to any other one. Milgram's celebrated experiment, involving a few hundred people, concluded that there were six "degrees of separation". More generally, sociologists were interested in the distance distribution of friendship: how many pairs of people are separated by  $k$  degrees? We will discuss some new, high-performance diffusion-based approximate algorithms that made it possible to conclude that on Facebook there are 3.74 degrees of separation using commodity hardware, and to analyze how this value decreased in time. The same algorithms can be used to compute on very large graphs centrality measures based on distances, such as closeness and harmonic centrality, which provide interesting, high-quality rankings.

Sebastiano Vigna's research focuses on the interaction between theory and practice. He has worked on highly theoretical topics such as computability on the reals, distributed computability, self stabilization, minimal perfect hashing, succinct data structures, query recommendation, algorithms for large graphs, pseudorandom number generation, theoretical/experimental analysis of spectral rankings such as PageRank, and axiomatization of centrality measures, but he is also (co)author of several widely used software tools. In 2011 he collaborated to the first computation of the distance distribution of the whole Facebook graph, from which it was possible to evince that on Facebook there are just 3.74 degrees of separation. Recently, he participated to the analysis of the largest available public web crawl (Common Crawl 2012), which led to the publication of the first open ranking of web sites (<http://wwwranking.webdatacommons.org/>). His work on Elias-Fano coding and quasi-succinct indices is at the basis of the code of Facebook's "folly" library. His pseudorandom number generator xorshift128+ is the current stock generator of Google's V8 JavaScript engine, used by Chrome, Safari, Firefox, Edge, and Node.js; it is also the stock generator of the Erlang language.





# Proprietà 3 - Small World

Le reti small world sono caratterizzate da un alto coefficiente di clustering e un average shortest path basso. Il diametro è direttamente proporzionale al logaritmo del numero dei nodi.

I brain network non matchano perfettamente il modello di rete originario (*Watts e Strogatz, 1998*) che descrive la topologia di uno small world.

→ Su1 notebook jupyter

# Clinical Applications

Studiare il cervello mediante la teoria dei grafi e la network science si è rivelato utile per capire come il cervello cambia da individuo a individuo e come cambia con l'avanzare degli anni di un individuo

Questo approccio è recente, ma nonostante ciò si hanno già risultati: è stato notato che le malattie del cervello cambiano la topologia del grafo (alzheimer, schizofrenia)

Offre inoltre una baseline per definire un cervello sano, “*normale*”, facendo sì che il fatto che il brain network di un individuo si distanzia troppo da essa sia un campanello di allarme per eventuali malattie.



# Grazie :)



<https://github.com/mpindaro/brain-network-analysis>