Demostraciones

1. Axiomas de la probabilidad

$\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{P}_2$ medidas de prob.

- $\mathbb{P}_1(A), \mathbb{P}_2(A) \geq 0$

$\mathbb{P} = a_1 \mathbb{P}_1 + a_2 \mathbb{P}_2$ $\quad$ $a_1 + a_2 = 1$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ $\quad$ $\mathbb{P}_1(\Omega) = 1$, $\mathbb{P}_2(\Omega) = 1$

$$a_1 = 1 - a_2$$

$$\mathbb{P} = (1 - a_2)\mathbb{P}_1 + a_2 \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}_1 - a_2 \mathbb{P}_1 + a_2 \mathbb{P}_2 \quad \mathbb{P}_1 + a_2(\mathbb{P}_2 - \mathbb{P}_1)$$

Como sabemos que $\mathbb{P}_1(\Omega)$ y $\mathbb{P}_2(\Omega) = 1$ entonces $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Para ello, se toma el caso para el cual es 1 la probabilidad de $\mathbb{P}_1(A)$ y $\mathbb{P}_2(A)$:

$$1 + a_2(1 - 1) = 1 + a_2(0) = 1$$

Por tanto, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. De igual forma, se toma los valores para los cuales $\mathbb{P}_1(A) = 0$ y $\mathbb{P}_2(A) = 0$

$0 + a_2(0 - 0) = 0$. Ahora, se toman los límites para los cuales $\mathbb{P}_1(A) = 1$ y $\mathbb{P}_2(A) = 0$

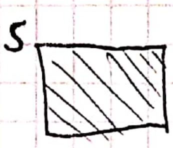
$1 + a_2(0 - 1) = 1 - a_2$ lo cual es un número entre 1 y 0.

Por tanto, $\mathbb{P}(A) \geq 0$

(3) axiomas

(1) $\mathbb{P}(\Omega)=1$
(2) $\mathbb{P}(A)\geq 0$
(3) $\mathbb{P}(A\cup B)=P(A)+P(B)$ si A, B son mutuamente excluyentes

(a) $P(\emptyset)=0$



$S^c=\emptyset$

$\emptyset = S^c$

Se tiene que $P(A^c)=1-P(A)$ por axioma (1) se tiene que $\mathbb{P}(\Omega)=1$

$P(S^c)=1-P(S)$ $\quad P(S^c)=1-1=0 \quad P(\emptyset)=0$

(b) $P(A^c)=1-P(A)$

$P(A)$ es mutuamente excluyente con $P(A^c)$

Por teorema axioma (1) $P(\Omega)=1$

Por axioma 3 $\rightarrow P(A\cup A^c)=P(A)+P(A^c)$

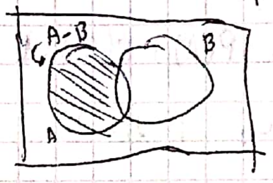
$A\cup A^c=\Omega$

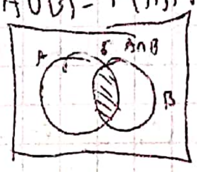
$P(A\cup A^c)=P(\Omega)=1$

$P(A)+P(A^c)=1$

$P(A^c)=1-P(A)$

(c) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

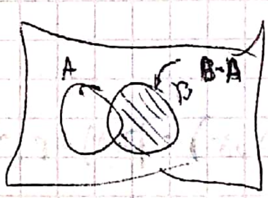




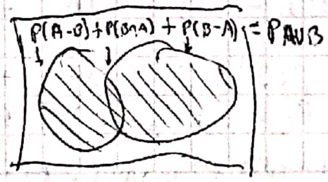
$P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)$

$P(B)=P(B-A)+P(A\cap B)$

$P(A)+P(B)=P(A\cup B)$



$\underbrace{P(A-B)+P(A\cap B)+P(B-A)}_{P(A\cup B)}+P(A\cap B)=P(A)+P(B)$



$P(A\cup B)+P(A\cap B)=P(A)+P(B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$