Demostraciones

- Sistema:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \dots a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \dots a_{2n}x_n &= b_2\\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad &\vdots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 \dots a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

4) Sustitución hacia adelante: para poder demostrar la sustitución hacia adelante, se crea un sistema matricial de la siguiente forma

$$
A_a = [a, b] = \left(\begin{array}{ccccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & & a_{nn} & b_n
\end{array}\right)
$$

Posteriormente se pasa a una matriz escalonada inferior, para ello se busca que todos los valores de la última ~~fila~~ columna sean 0, excepto a_{nn}. Es por esto que cada fila se le va a restar $\frac{a_{nn}}{a_{n(n-1)}} E_n$, esto quiere decir que, por ejemplo, a la penúltima fila se le va a restar la última fila multiplicada por un factor de a_{nn}(último valor de la última fila)/a_{n-1}(último valor de la penúltima fila. Este proceso se repite hasta que se llega a la matriz escalonada inferior. Para simplificar la notación se realizó lo siguiente: (además se busca que la diagonal principal sea

$$
A_a^{(inf)} \left(\begin{array}{ccccc|c}
a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & b_1\\
a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 & b_2\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n
\end{array}\right)
\quad
\left\{\begin{array}{ll}
a_{11} \neq & a_{11}\\
\hookrightarrow \in A_a & \hookrightarrow \in A_a^{(int)}
\end{array}\right\}
$$

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{nn} = 1$$

La anterior matriz se pasa a forma de ecuaciones

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + 0 + \dots + 0 &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + 0 &= b_2\\
\vdots \qquad \vdots \qquad &\vdots\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b
\end{aligned}
\quad \rightarrow \quad
\begin{aligned}
x_1 + 0 + \dots + 0 &= b_1\\
a_{21}x_1 + x_2 + \dots + 0 &= b_2\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + x_3 + 0 \dots + 0 &= b_3\\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{n-1}x_{n-1} + x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

~~Se despeja cada X:~~

Se despeja cada X

$$
\begin{aligned}
x_1 &= b\\
x_2 &= b_2 - a_{21}x_1\\
x_3 &= b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2\\
&\vdots\\
x_n &= b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 \dots a_{n-1}x_{n-1}
\end{aligned}
$$

de lo anterior se deduce que $x_i = b_i - \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij} x_j$

5. Para la sustitución hacia atrás se va a hacer uso del mismo sistema de ecuaciones.

- En este caso, se busca transformar la matriz resultante del sistema de ecuaciones a una matriz ~~?~~ triangular superior cuya diagonal puede ser cualquier valor. Para simplificar la notación, la matriz resultante queda así:

$$A_a^{(sup)} = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & a_{nn} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{array}\right)$$

donde $a_{11}, a_{22}, a_{33} \dots a_{jj}$ puede tomar cualquier valor (excepto 0)

A continuación, se pasa la matriz a sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ 0 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ 0 + 0 + a_{33}x_3 + \dots a_{3n}x_n &= b_3 \\ 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Se despeja cada n empezando desde la fila n:

$$a_{nn}x_n = b_n \rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$a_{(n-1)(n-1)}x_{n-1} + a_{nn}x_n = b_{n-1} \rightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{nn}x_n}{a_{(n-1)(n-1)}} \leftarrow a_{ii}$$

$$\vdots$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \rightarrow x_1 = \frac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{n n-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n)}{a_{11}}$$

de lo anterior se deduce que

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$