

Львівський національний університет імені Івана Франка

Факультет прикладної математики та інформатики

Кафедра обчислювальної математики

Звіт

з курсу "Лінійні інтегральні рівняння"

на тему:

Чисельне розв'язування внутрішньої мішаної задачі для рівняння Клейна-Гордона

Виконали

студенти групи ПМп-41

Лебеденко Надія

Плахтій Мар'ян

Наукові консультанти:

проф. Хапко Р.С.

ст. викл. Гарасим Я.С.

ас. Вавричук В.Г.

Львів - 2015

Зміст

| | |
|---|-----------|
| Вступ | 4 |
| 1 Дослідження задачі | 5 |
| 1.1. Постановка задачі | 5 |
| 1.2. Фундаментальний розв’язок і його властивості | 7 |
| 1.3. Єдиність класичного розв’язку | 9 |
| 2 Чисельне розв’язування | 11 |
| 2.1. Система інтегральних рівнянь | 11 |
| 2.2. Параметризація | 12 |
| 2.3. Виділення логарифмічної особливості | 14 |
| 2.4. Коректність системи інтегральних рівнянь | 15 |
| 2.5. Метод квадратур | 18 |
| 2.6. Наближений розв’язок | 19 |
| 3 Чисельні експерименти | 20 |
| 3.1. Приклад 1 | 20 |
| 3.2. Приклад 2 | 22 |
| 3.3. Приклад 3 | 24 |
| Висновки | 26 |

Вступ

Дослідження крайових задач для рівнянь в частинних похідних є однією з найважливіших сфер застосування методу інтегральних рівнянь. Цей метод має низку незаперечних переваг у порівнянні з іншими методами, а саме: зменшення розмірності задачі на одиницю, застосовність для областей з границями довільної форми і частково необмежених областей тощо. Саме тому цей метод з успіхом використовується для вирішення складних інженерних задач - плоских і просторових, стаціонарних та нестаціонарних, в механіці руйнувань гірських порід, теорії теплопровідності, а також в різних задачах геофізики, електродинаміки тощо.

Ця робота зосереджена на чисельному розв'язуванні крайової задачі для системи рівнянь Клейна-Гордона зі змінними коефіцієнтами. Непрямим методом інтегральних рівнянь зведемо задачу до системи інтегральних рівнянь, параметризуємо її та з допомогою методу квадратур зведемо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь. У останньому розділі продемонструємо чисельні експерименти.

Розділ 1

Дослідження задачі

1.1. Постановка задачі

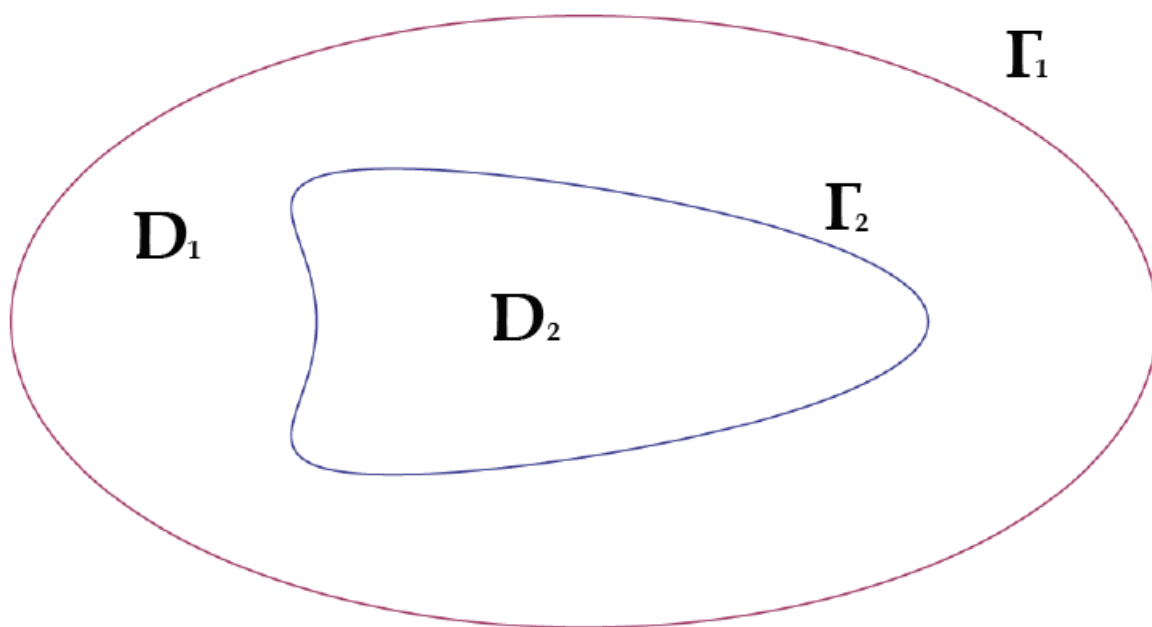


Рис. 1.1: Геометрія області

Нехай $D \subset \mathbb{R}^2$ - обмежена, однозв'язна область з границею

$\Gamma_1 \in C^2$, $\overline{D_2} \subset D$ - однозв'язна область з границею $\Gamma_2 \in C^2$. Позначимо $D_1 := D \setminus \overline{D_2}$. Необхідно знайти функції $u_l : D_l \rightarrow \mathbb{R}$, $l = 1, 2$, які задовольняють рівняння Клейна-Гордона:

$$\Delta u_1 - \kappa_1^2 u_1 = 0 \quad \text{у} \quad D_1, \quad (1.1)$$

$$\Delta u_2 - \kappa_2^2 u_2 = 0 \quad \text{у} \quad D_2, \quad (1.2)$$

умови спряження:

$$u_1 = u_2 \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \quad (1.3)$$

$$\kappa_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = \kappa_2 \frac{\partial u_2}{\partial \nu} \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \quad (1.4)$$

і крайову умову:

$$u_1 = f \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \quad (1.5)$$

Тут f - задана функція, $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ - відомі сталі, ν - одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ_2

1.2. Фундаментальний розв'язок і його властивості

Зауважимо, що через $|x|$ будемо позначати евклідову норму вектора $x \in \mathbb{R}^m$.

Відомо [1], що фундаментальним розв'язком рівняння Клейна-Гордона є функція вигляду:

$$\Phi(\kappa, x, y) = \frac{1}{2\pi} K_0(\kappa|x - y|), \quad (1.6)$$

де K_0 - модифікована функція Бесселя записується таким чином:

$$K_0(z) = \ln\left(\frac{1}{z}\right) I_0(z) + \Sigma_0(z),$$

де I_0 та Σ_0 - гладкі функції у вигляді рядів

$$I_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2},$$

$$\Sigma_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 2\psi(k+1) \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k!(k+1)!}.$$

Асимптотична поведінка функції $K_0(z)$

$$K_0(z) \sim \ln\left(\frac{1}{z}\right), z \rightarrow 0$$

$$K_0(z) \sim \frac{e^{-z}}{z}, z \rightarrow \infty$$

Відомими є рекурентні співвідношення:

$$K_0'(z) = -K_1(z)$$

Тут K_1 - модифікована функція Бесселя вигляду:

$$K_1(z) = \frac{1}{z} + \ln\left(\frac{1}{z}\right) I_1(z) + \Sigma_1(z),$$

де I_0 та Σ_0 - гладкі функції у вигляді рядів

$$I_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1}}{k!(k+1)!},$$

$$\Sigma_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (\psi(k+1) + \psi(k+2)) \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+1}}{k!(k+1)!}.$$

Значення псі-функції при цілому аргументі:

$$\psi(1) = -\gamma, \quad \psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} k^{-1}, \quad (n \geq 2),$$

де $\gamma \equiv 0.57721566\dots$

1.3. Єдиність класичного розв'язку

Теорема 1.1 *Крайова задача (1.1)-(1.5) має не більше одного розв'язку.*

Доведення:

Доведення проводитимемо від супротивного. Припустимо, що задача (1.1)-(1.5) має 2 розв'язки: u_i^1 та u_i^2 , $i = 1, 2$. Позначимо через

$\tilde{u}^l = u_1^l - u_2^l$, $l = 1, 2$ різницю двох відповідних розв'язків. Для цих функцій отримаємо наступну задачу:

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{u}^1 - \kappa_1^2 \tilde{u}^1 &= 0 \quad \text{у} \quad D_1, \\ \Delta \tilde{u}^2 - \kappa_2^2 \tilde{u}^2 &= 0 \quad \text{у} \quad D_2, \\ \tilde{u}^1 &= \tilde{u}^2 \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \\ \kappa_1 \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial \nu} &= \kappa_2 \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial \nu} \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \\ \tilde{u}^1 &= 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1.\end{aligned}$$

Для доведення скористаємось формулою Гріна:

$$\int_D (u \Delta v + (\operatorname{grad} u)(\operatorname{grad} v)) dx = \int_\Gamma u \frac{\partial v}{\partial \nu} ds(x)$$

Нехай в формулі Гріна $v = \tilde{u}^l = u$.

Для першого рівняння, враховуючи те, що $\tilde{u}^1 = 0$ на Γ_1 та $\Delta \tilde{u}^l = \kappa_l^2 \tilde{u}^l$, $l = 1, 2$ отримуємо:

$$\int_{D_1} (\tilde{u}^1 \kappa_1^2 \tilde{u}^1 + (\operatorname{grad} \tilde{u}^1)^2) dx = \int_{\Gamma_1} 0 ds(x)$$

$$\int_{D_1} ((\tilde{u}^1)^2 \kappa_1^2 + (\operatorname{grad} \tilde{u}^1)^2) dx = \int_{\Gamma_1} 0 ds(x)$$

З останнього співвідношення випливає, що $\tilde{u}^1 \equiv \text{const}$ в D_1 , враховуючи те, що $\tilde{u}^1 = 0$ на Γ_1 , отримаємо, що $\tilde{u}^1 \equiv 0$ в D_1 .

З умов на Γ_2 випливає, що $\frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial \nu} = \frac{\kappa_1^2}{\kappa_2^2} \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial \nu} = 0$ і $\tilde{u}^2 = \tilde{u}^2 = 0$ на Γ_2 . Підставимо останні співвідношення в формулу Гріна та отримаємо:

$$\int_{D_1} ((\tilde{u}^2)^2 \kappa_2^2 + (\text{grad} \tilde{u}^2)^2) dx = \int_{\Gamma_1} 0 ds(x)$$

З цього отримуємо, що $\tilde{u}^2 \equiv \text{const}$ в D_2 , враховуючи те, що $\tilde{u}^2 = 0$ на Γ_1 , отримаємо, що $\tilde{u}^2 \equiv 0$ в D_2 .

Отже, $u_1^i \equiv u_2^i$ в D_i , $i = 1, 2$.

Теорема доведена.

Розділ 2

Чисельне розв'язування

2.1. Система інтегральних рівнянь

Зведемо задачу (1.1)-(1.5) до системи інтегральних рівнянь, використовуючи при цьому непрямий підхід. Подамо невідомі функції u_1 та u_2 у вигляді таких комбінацій потенціалів:

$$u_1(x) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} \Phi(\kappa_1, x, y) \mu_i(y) ds(y), \quad (2.1)$$

$$u_2(x) = \int_{\Gamma_2} \Phi(\kappa_2, x, y) \mu_3(y) ds(y), \quad (2.2)$$

Тут $\Phi(\kappa_i, x, y)$ - фундаментальний розв'язок рівняння Клейна-Гордона, μ_1, μ_2, μ_3 - невідомі густини.

Зауважимо, що функції (2.1), (2.2) задовольняють рівняння Клейна-Гордона (1.1), (1.2). Підставимо ці функції в крайові умови та умови спряження, при цьому, враховуючи властивості потенціалу простого шару, отримаємо наступну систему інтегральних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} \Phi(\kappa_1, x, y) \mu_i(y) ds(y) = f(x), x \in \Gamma_1, \\ \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} \Phi(\kappa_1, x, y) \mu_i(y) ds(y) - \\ \quad - \int_{\Gamma_2} \Phi(\kappa_2, x, y) \mu_3(y) ds(y) = 0, x \in \Gamma_2, \\ \kappa_1 \left(\frac{1}{2} \mu_2(x) + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} \mu_i(y) \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \Phi(\kappa_1, x, y) ds(y) \right) - \\ - \kappa_2 \left(\frac{1}{2} \mu_3(x) + \int_{\Gamma_2} \mu_3(y) \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \Phi(\kappa_2, x, y) ds(y) \right) = 0, x \in \Gamma_2. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

2.2. Параметризація

Припустимо, що криві Γ_1 та Γ_2 задані в параметричному вигляді:

$$\Gamma_i = \{x_i(s) = (x_{i1}(s), x_{i2}(s)) : 0 \leq s \leq 2\pi\}, \quad i = 1, 2, \quad (2.4)$$

де $x_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, 2π періодична двічі неперервно диференційовна функція з $|x'_i(s)| > 0 \quad \forall s$.

Позначимо ν - одиничний вектор зовнішньої нормалі до кривої Γ_2 , заданий як

$$\nu(x_2(s)) = \left(\frac{x'_{22}(s)}{|x'_2(s)|}, -\frac{x'_{21}(s)}{|x'_2(s)|} \right).$$

Враховуючи параметричне задання кривих та властивості фундаментального розв'язку отримаємо систему вигляду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^2 \int_0^{2\pi} H_{1i}(\kappa_1, s, \sigma) \tilde{\mu}_i(\sigma) d\sigma = \tilde{f}(s), \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^2 \int_0^{2\pi} H_{2i}(\kappa_1, s, \sigma) \tilde{\mu}_i(\sigma) d\sigma - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_{22}(\kappa_2, s, \sigma) \tilde{\mu}_3(\sigma) d\sigma = 0, \\ \kappa_1 \left(\frac{1}{2} \tilde{\mu}_2(s) + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^2 \int_0^{2\pi} \tilde{\mu}_i(\sigma) L_{2i}(\kappa_1, s, \sigma) d\sigma \right) - \\ - \kappa_2 \left(\frac{1}{2} \tilde{\mu}_3(s) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{\mu}_3(\sigma) L_{22}(\kappa_2, s, \sigma) d\sigma \right) = 0, \\ s \in [0; 2\pi], \end{array} \right. \quad (2.5)$$

де ядра та функції з системи (2.5) мають вигляд:

$$\begin{aligned} H_{ij}(\kappa_k, s, \sigma) &= K_0(\kappa_k, x_i(s), x_j(\sigma)) |x'_j(\sigma)|, \\ L_{ij}(\kappa_k, s, \sigma) &= -\kappa_k K_1(\kappa_k, x_i(s), x_j(\sigma)) h_{ij}(\kappa_k, s, \sigma) |x'_j(\sigma)|, \\ h_{ij}(\kappa_k, s, \sigma) &= \frac{\partial(\kappa_k |x_i(s) - x_j(\sigma)|)}{\partial(\nu(x_i(s)))}, \end{aligned}$$

$$\tilde{f}(s) = f(x_1(s)),$$

$$\tilde{\mu}_l(s) = \mu_l(x_j(s)),$$

$$l = 1, 2, 3,$$

$$k, j, i = 1, 2.$$

Зауважимо, що попередні формули подані для випадку $s \neq \sigma$. Також слід врахувати, що на цьому кроці зроблено перехід до нових невідомих функцій - $\tilde{\mu}_i$, отриманих після переходу до нових змінних s, σ .

Слід звернути увагу на те, що у функції $h_{ii}(\kappa, s, s)$ особливості не має. Знайшовши границю цієї функції при $\sigma \rightarrow s$ отримаємо:

$$h_{ii}(\kappa, s, s) = \kappa \frac{x'_{i2}(s)x''_{i1}(s) - x''_{i2}(s)x'_{i1}(s)}{2|x'_i(s)|^2}$$

2.3. Виділення логарифмічної особливості

Враховуючи вигляд модифікованих функцій Бесселя, можна бачити, що ядра $H_{ij}(\kappa, s, \sigma)$ та $L_{ij}(\kappa, s, \sigma)$ містять логарифмічні особливості при $\sigma \rightarrow s$ та $i = j$

Щоб виділити особливість, подамо ядра $H_{ii}(\kappa, s, \sigma)$ та $L_{ii}(\kappa, s, \sigma)$ у вигляді:

$$H_{ii}(\kappa, s, \sigma) = H_{ii}^1(\kappa, s, \sigma) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \left(\frac{s - \sigma}{2} \right) \right) H_{ii}^2(\kappa, s, \sigma),$$

$$L_{ii}(\kappa, s, \sigma) = L_{ii}^1(\kappa, s, \sigma) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \left(\frac{s - \sigma}{2} \right) \right) L_{ii}^2(\kappa, s, \sigma),$$

де

$$H_{ii}^2(\kappa, s, \sigma) = -\frac{1}{2} I_0(\kappa, s, \sigma) |x'_i(\sigma)|,$$

$$H_{ii}^1(\kappa, s, \sigma) = H_{ii}(\kappa, s, \sigma) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \left(\frac{s - \sigma}{2} \right) \right) H_{ii}^2(\kappa, s, \sigma),$$

$$L_{ii}^2(\kappa, s, \sigma) = -\kappa I_1(\kappa, s, \sigma) h_{ii}(\kappa, s, \sigma)$$

$$L_{ii}^1(\kappa, s, \sigma) = L_{ii}(\kappa, s, \sigma) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \left(\frac{s - \sigma}{2} \right) \right) L_{ii}^2(\kappa, s, \sigma).$$

При $\sigma = s$ ядра мають вигляд:

$$H_{ii}^2(\kappa, s, s) = -\frac{1}{2} |x'_i(s)|,$$

$$L_{ii}^2(\kappa, s, s) = 0.$$

$$H_{ii}^1(\kappa, s, s) = -\frac{1}{2} (\ln \kappa^2 e |x'_i(s)| - \gamma) |x'_i(s)|,$$

$$L_{ii}^1(\kappa, s, s) = -\kappa h_{ii}(\kappa, s, s).$$

Зауважимо те, що тепер ядра $H_{ii}^1(\kappa, s, \sigma)$, $L_{ii}^1(\kappa, s, \sigma)$, $H_{ii}^2(\kappa, s, \sigma)$ та $L_{ii}^2(\kappa, s, \sigma)$ особливостей не мають.

Система з виділеною особливістю матиме вигляд:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(H_{11}^1(\kappa_1, s, \sigma) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \left(\frac{s-\sigma}{2} \right) \right) H_{11}^2(\kappa_1, s, \sigma) \right) \tilde{\mu}_1(\sigma) d\sigma + \\ \quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_{12}(\kappa_1, s, \sigma) \tilde{\mu}_2(\sigma) d\sigma = \tilde{f}(s), \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (H_{21}(\kappa_1, s, \sigma) \tilde{\mu}_1(\sigma) d\sigma + \\ \quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(H_{22}^1(\kappa_1, s, \sigma) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \left(\frac{s-\sigma}{2} \right) \right) H_{22}^2(\kappa_1, s, \sigma) \right) \tilde{\mu}_2(\sigma) d\sigma - \\ \quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(H_{22}^1(\kappa_2, s, \sigma) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \left(\frac{s-\sigma}{2} \right) \right) H_{22}^2(\kappa_2, s, \sigma) \right) \tilde{\mu}_3(\sigma) d\sigma = 0, \\ \kappa_1 \left(\frac{1}{2} \tilde{\mu}_2(s) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{\mu}_1(\sigma) L_{21}(\kappa_1, s, \sigma) d\sigma \right) + \\ \quad + \kappa_1 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(L_{22}^1(\kappa_1, s, \sigma) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \left(\frac{s-\sigma}{2} \right) \right) L_{22}^2(\kappa_1, s, \sigma) \right) \tilde{\mu}_2(\sigma) d\sigma \right) - \\ \quad - \kappa_2 \left(\frac{1}{2} \tilde{\mu}_3(s) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(L_{22}^1(\kappa_1, s, \sigma) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \left(\frac{s-\sigma}{2} \right) \right) L_{22}^2(\kappa_2, s, \sigma) \right) \tilde{\mu}_3(\sigma) d\sigma \right) = 0, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} s \in [0; 2\pi]. \\ (2.6) \end{array}$$

2.4. Коректність системи інтегральних рівнянь

Теорема 2.1 Для будь-якої правої частини $f \in C^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ існує єдиний розв'язок системи (2.6) $\mu \in C^{0,\alpha}[0, 2\pi]$.

Доведення: Введемо такі оператори:

$$\begin{aligned}
(T_i^k \phi)(s) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_{ii}^1(\kappa_k, s, \sigma) \phi(\sigma) d\sigma, \\
(S_i^k \phi)(s) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \left(\frac{s-\sigma}{2} \right) \right) H_{ii}^2(\kappa_k, s, \sigma) \phi(\sigma) d\sigma, \\
(P_{ij}^k \phi)(s) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_{ij}(\kappa_k, s, \sigma) \phi(\sigma) d\sigma, \\
(Q_{ij}^k \phi)(s) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_{ij}(\kappa_k, s, \sigma) \phi(\sigma) d\sigma, \\
(Z_i^k \phi)(s) &= -\frac{\kappa_k}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_{ii}^1(\kappa_k, s, \sigma) \phi(\sigma) d\sigma, \\
(B_i^k \phi)(s) &= -\frac{\kappa_k}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \left(\frac{s-\sigma}{2} \right) \right) L_{ii}^2(\kappa_k, s, \sigma) \phi(\sigma) d\sigma, \\
(K_i^k \phi)(s) &= \frac{\kappa_k}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\tilde{\mu}(s)}{\phi(\sigma)} \phi(\sigma) d\sigma,
\end{aligned}$$

Запишемо систему (2.6) в операторному вигляді:

$$U \tilde{\mu} = F, \quad (2.7)$$

де

$$\begin{aligned}
U &= \begin{pmatrix} (S_1^1 - T_1^1) & P_{12}^1 & 0 \\ P_{21}^1 & (S_2^1 - T_2^1) & -(S_2^2 - T_2^2) \\ Q_{21}^1 & (B_2^1 - Z_2^1 + K_2^1) & -(B_2^2 - Z_2^2 + K_2^2) \end{pmatrix}, \\
F &= \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\tilde{\mu} &= (\tilde{\mu}_1; \tilde{\mu}_2; \tilde{\mu}_3)^T
\end{aligned}$$

У [4] показано, що оператори S_i^k та B_i^k є обмежені та мають обмежені обернені оператори $(S_i^k)^{-1}$ та $(B_i^k)^{-1}$. Домножимо рівняння з си-

стеми (2.7) на відповідні обернені оператори, отримаємо систему інтегральних рівнянь другого роду:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} - \tilde{U}\tilde{\mu} &= \tilde{F}, \\ \tilde{U} &= \begin{pmatrix} T_1^1(S_1^1)^{-1} & -P_{12}^1(S_1^1)^{-1} & 0 \\ -P_{21}^1(S_2^1)^{-1} & T_2^1(S_2^1)^{-1} & (S_2^2 - T_2^2)(S_2^1)^{-1} \\ -Q_{21}^1(B_2^2)^{-1} & -(B_2^1 - Z_2^1 + K_2^1)(B_2^2)^{-1} & (-Z_2^2 + K_2^2)(B_2^2)^{-1} \end{pmatrix}, \\ \tilde{F} &= \begin{pmatrix} \tilde{f}(S_1^1)^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

Оператори $T_i^k, P_{ij}^k, Q_{ij}^k, Z_i^k, K_i^k$ є компактними в $C(\Gamma)$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \in C^\infty$ і $F \in C^\infty(\Gamma)$, як інтегральні оператори з неперервними ядрами [4]. Оператори S_i^k, B_i^k є компактними в $C(\Gamma)$ як інтегральні оператори зі слабосингулярними ядрами. Тому всі оператори в матриці \tilde{U} є компактними як композиції компактних та обмежених операторів [4].

Отже, оператор \tilde{U} є компактным як лінійна комбінація компактних операторів.

Відомо [4], що про простір нулів $N(I - \tilde{U}) = \{0\}$, тобто оператор $(I - \tilde{U})$ ін'єктивний. Тоді згідно теорії Рісса $(I - \tilde{U})$ сюр'єктивний, тобто:

$$\forall \tilde{F} \in C(\Gamma) \quad \exists! \tilde{\mu} \in C(\Gamma) : \quad (I - \tilde{U})\tilde{\mu} = \tilde{F}.$$

Більше того, обернений оператор $(I - \tilde{U})^{-1}$ обмежений і розв'язок операторного рівняння (2.8) можна подати у вигляді:

$$\tilde{\mu} = (I - \tilde{U})^{-1}\tilde{F}.$$

Теорема доведена.

Враховуючи те, що всі попередні перетворення є еквівалентними, ми можемо стверджувати, що система (2.3) також має єдиний розв'язок для будь-яких вхідних даних.

2.5. Метод квадратур

Отримана на попередньому етапі система (2.6) не є повністю дискретною. Крім того, вона містить логарифмічну особливість. Для отримання повністю дискретної системи використаємо метод квадратур.

Виберемо точки розбиття

$$s_j = \frac{\pi j}{M}, j = 0, \dots, 2M - 1$$

У [7] виведено та доведено збіжність наступних квадратур:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\sigma) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \left(\frac{s_j - \sigma}{2} \right) \right) d\sigma &\approx \sum_{k=0}^{2M-1} R_{|j-k|} g(s_k), \\ R_j &= -\frac{1}{2M} \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{M-1} \cos(ms_j) + \frac{(-1)^j}{M} \right), \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\sigma) d\sigma &\approx \frac{1}{2M} \sum_{k=0}^{2M-1} g(s_k). \end{aligned}$$

Застосовуючи їх до системи (2.6) та здійснивши колокацію по вузлах квадратурних формул, отримуємо СЛАР:

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{k=1}^{2M-1} \left(-R_{|j-k|} H_{11}^2(\kappa_1, s_j, s_k) + \frac{H_{11}^1(\kappa_1, s_j, s_k)}{2M} \right) \tilde{\mu}_1(s_k) + \sum_{k=1}^{2M-1} \frac{H_{12}(\kappa_1, s_j, s_k)}{2M} \tilde{\mu}_2(s_k) = \tilde{f}(s), \\ &\sum_{k=1}^{2M-1} H_{21}(\kappa_1, s_j, s_k) \tilde{\mu}_1(s_k) + \sum_{k=1}^{2M-1} \left(-R_{|j-k|} H_{22}^2(\kappa_1, s_j, s_k) + \frac{H_{22}^1(\kappa_1, s_j, s_k)}{2M} \right) \tilde{\mu}_2(s_k) - \\ &- \sum_{k=1}^{2M-1} \left(-R_{|j-k|} H_{22}^2(\kappa_2, s_j, s_k) + \frac{H_{22}^1(\kappa_2, s_j, s_k)}{2M} \right) \tilde{\mu}_3(s_k) = 0, \\ &\kappa_1 \left(\frac{1}{2} \tilde{\mu}_2(s_j) + \sum_{k=1}^{2M-1} \frac{L_{21}(\kappa_1, s_j, s_k)}{2M} \tilde{\mu}_1(s_k) \right) + \\ &\quad \kappa_1 \left(+ \sum_{k=1}^{2M-1} \left(\frac{L_{22}^1(\kappa_1, s_j, s_k)}{2M} - R_{|j-k|} L_{22}^2(\kappa_1, s_j, s_k) \right) \tilde{\mu}_1(s_k) \right) - \\ &- \kappa_2 \left(\frac{1}{2} \tilde{\mu}_3(s_j) + \sum_{k=1}^{2M-1} \left(\frac{L_{22}^1(\kappa_2, s_j, s_k)}{2M} - R_{|j-k|} L_{22}^2(\kappa_2, s_j, s_k) \right) \tilde{\mu}_3(s_k) \right) = 0, \end{aligned} \right. \quad j = 0, \dots, 2M - 1. \quad (2.9)$$

2.6. Наближений розв'язок

Виходячи з подання (2.1)-(2.2) та повторивши для нього всі кроки, виконані для дискретизації системи (2.3) отримуємо наступне:

$$u_1^M(x) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^{2M-1} \frac{H_{0i}(\kappa_1, x, s_k)}{2M} \tilde{\mu}_i(s_k), \quad x \in D_1, \quad (2.10)$$

$$u_2^M(x) = \sum_{k=1}^{2M-1} \frac{H_{02}(\kappa_2, x, s_k)}{2M} \tilde{\mu}_3(s_k), \quad x \in D_2, \quad (2.11)$$

де

$$H_{0i}(\kappa, x, s_k) = \frac{1}{2\pi} K_0(\kappa, |x - x_i(s_k)|).$$

Використовуючи ці наближення, можна обчислити значення функцій-розв'язків $u_1(x)$, $u_2(x)$ в довільних точках з областей D_1, D_2 відповідно.

З теорії колективної компактності операторів та оцінки тригонометричної інтерполяції [4] випливає, що для $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \in C^\infty$ і $F \in C^\infty(\Gamma)$ має місце така оцінка похибки:

$$\|\tilde{\mu}_1^M - \mu_1\|_\infty = O(e^{-M\sigma}),$$

$$\|\tilde{\mu}_2^M - \mu_2\|_\infty = O(e^{-M\sigma}),$$

$$\|\tilde{\mu}_3^M - \mu_3\|_\infty = O(e^{-M\sigma}), \quad \sigma > 0,$$

де $\tilde{\mu}_i^M$ - розв'язок системи (2.7), а μ_i - розв'язок системи (2.3), $i = 1, 2, 3$.

З цього слідує, що порядок похибки наближеного розв'язку задачі той самий, що і при розв'язуванні системи інтегральних рівнянь.

Розділ 3

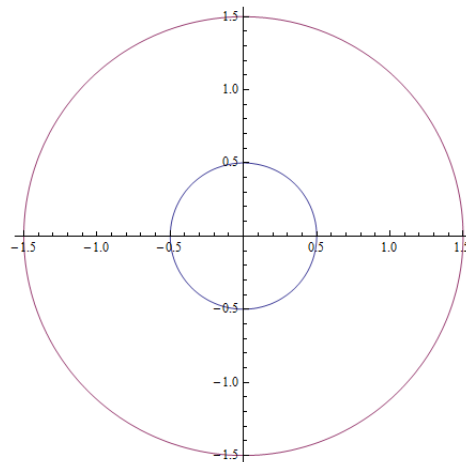
Чисельні експерименти

3.1. Приклад 1

Розв'яжемо задачу (1.1)-(1.5). Виберемо для експерименту кільце у вигляді:

$$\Gamma_1 = \{x_{11}(s) = 0.5 \cos(s); x_{12} = 0.5 \sin(s) : 0 \leq s \leq 2\pi\}$$

$$\Gamma_2 = \{x_{21}(s) = 1.5 \cos(s); x_{22} = 1.5 \sin(s) : 0 \leq s \leq 2\pi\}$$



Геометрія області.

Крайову умову візьмемо у вигляді:

$$f(x) = x^2 + \tilde{y}^2,$$

де $\tilde{y} = (3, 3)$ - точка, яка не належить області D .

Змінні коефіцієнти візьмемо у вигляді: $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$.

В таблицях представленні значення абсолютних похибок точного і наближеного розв'язків для різних значень M :

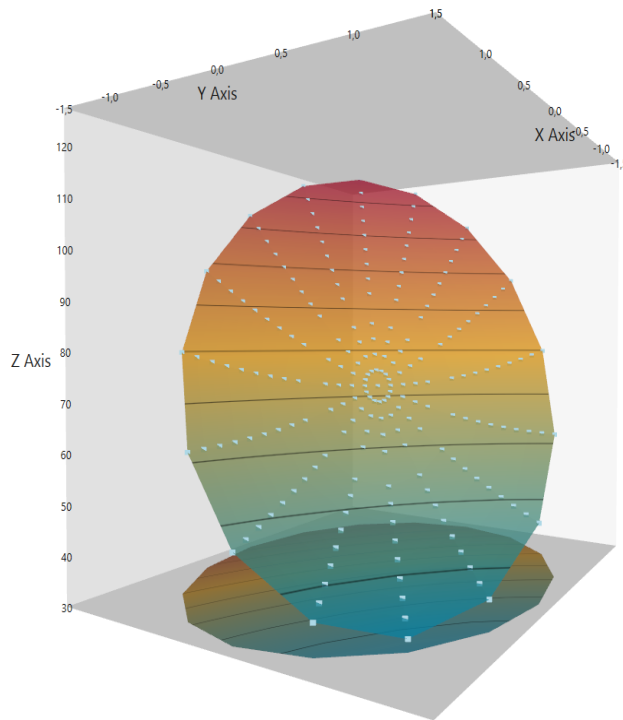
| M | (0.9; 0.6) | (0.6; -0.8) | (-0.7; -0.9) | (-1.2; 0.75) |
|----|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|
| 8 | 0.0024345558513 | 0.0015550123595 | 0.0025982704031 | 0.0051661636525 |
| 16 | 0.0000001657053 | 0.0000012101182 | 0.0000008314434 | 0.0000001347031 |
| 32 | 0.0000000000855 | 0.0000000000118 | 0.0000000000899 | 0.00000000007342 |
| 64 | 0.0000000000005 | 0.0000000000002 | 0.0000000000000 | 0.00000000000014 |

$$\|u_1^M - u_1\|$$

| M | (0; 0.2) | (0.2; 0.4) | (-0.1; 0.3) | (0.3; -0.45) |
|----|-----------------|-----------------|------------------|------------------|
| 8 | 0.0041068583867 | 0.0061181372894 | 0.00269449903893 | 0.00323946638943 |
| 16 | 0.0000003569667 | 0.000000756932 | 0.00000062461584 | 0.00000022055095 |
| 32 | 0.0000000000825 | 0.0000000007203 | 0.0000000000131 | 0.0000000000226 |
| 64 | 0.0000000000003 | 0.0000000000004 | 0.0000000000002 | 0.0000000000000 |

$$\|u_2^M - u_2\|$$

На рисунку представлено графічне зображення розв'язку при $n = 64$.



3.2. Приклад 2

Зображення області та параметричне представлення кривих візьмемо з попереднього прикладу.

Функцію крайової умови візьмемо як звуження фундаментального розв'язку в точці $\tilde{y} = (3, 3)$, вигляду:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} K_0(|x - \tilde{y}|)$$

Змінні коефіцієнти візьмемо у вигляді: $\kappa_1 = \kappa_2 = 3$.

Результати чисельних експериментів представлені в таблицях:

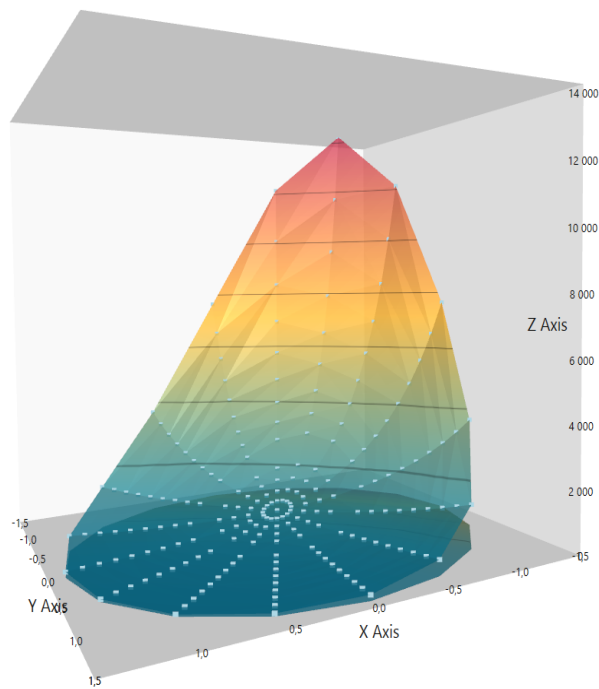
| M | (0.9; 0.6) | (0.6; -0.8) | (-0.7; -0.9) | (-1.2; 0.75) |
|----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 8 | 0.0023061904620 | 0.0018941632759 | 0.0076243711729 | 0.0099413183524 |
| 16 | 0.0000002034649 | 0.0000049681520 | 0.0000001198686 | 0.0000002706669 |
| 32 | 0.0000000000409 | 0.0000000000628 | 0.0000000003102 | 0.0000000000138 |
| 64 | 0.0000000000009 | 0.0000000000008 | 0.0000000000003 | 0.0000000000002 |

$$\|u_1^M - u_1\|$$

| M | (0; 0.2) | (0.2; 0.4) | (-0.1; 0.3) | (0.3; -0.45) |
|----|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 8 | 0,0013989227883 | 0,0017282570414 | 0,0085480440885 | 0,0023922408786 |
| 16 | 0.0000059062291 | 0.0000002062636 | 0.0000009842703 | 0.0000001905734 |
| 32 | 0.00000000000915 | 0.0000000000169 | 0.0000000001102 | 0.0000000000217 |
| 64 | 0.00000000000002 | 0.00000000000002 | 0.00000000000001 | 0.00000000000000 |

$$\|u_2^M - u_2\|$$

На рисунку представлено графічне зображення розв'язку при $n = 64$.

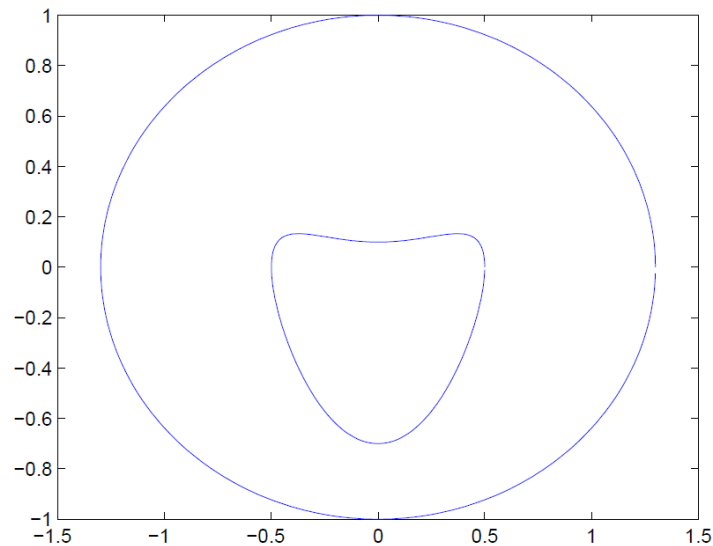


3.3. Приклад 3

Виберемо для експерименту область вигляду:

$$\Gamma_1 = \{x_{11}(s) = 1.3 \cos(s); x_{12} = \sin(s) : 0 \leq s \leq 2\pi\}$$

$$\Gamma_2 = \{x_{21}(s) = 0.5 \cos(s); x_{22} = 0.4 \sin(s) - 0.3 \sin^2 s : 0 \leq s \leq 2\pi\}$$



Геометрія області.

Крайову умову візьмемо у тому ж вигляді, що і в прикладі 2. $\tilde{y} = (3, 3)$ - точка, яка не належить області D .

Змінні коефіцієнти візьмемо у вигляді: $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 2$.

В таблицях представленні значення абсолютних похибок точного і наближеного розв'язків для різних значень M :

| M | (0; 0.3) | (0.6; -0.6) | (-0.7; -0.2) | (-0.5; -0.4) |
|----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 8 | 0.0020392750112 | 0.0021557729701 | 0.0024283101048 | 0.0043699352421 |
| 16 | 0.0000001191043 | 0.000001256807 | 0.0000002097124 | 0.0000002136278 |
| 32 | 0.0000000000569 | 0.0000000000601 | 0.0000000001026 | 0.0000000000862 |
| 64 | 0.0000000000001 | 0.0000000000002 | 0.0000000000003 | 0.0000000000002 |

$$\|u_1^M - u_1\|$$

| M | (0; 0) | (0.1; 0.25) | (-0.1; -0.3) | (-0.1; -0.45) |
|----|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 8 | 0,0065077639397 | 0,0039628780514 | 0,0085480440885 | 0,0031643041962 |
| 16 | 0.000002152892 | 0.0000002255649 | 0.0000004529302 | 0.0000003696523 |
| 32 | 0.0000000000797 | 0.0000000008901 | 0.0000000000183 | 0.0000000000199 |
| 64 | 0.0000000000002 | 0.0000000000002 | 0.0000000000006 | 0.0000000000004 |

$$\|u_2^M - u_2\|$$

Висновки

Отже, у цій роботі ми розглянули наближене розв'язування крайової задачі для системи рівнянь Клейна-Гордона зі змінними коефіцієнтами.

За допомогою непрямого методу інтегральних рівнянь задачу було зведено до системи інтегральних рівнянь. Завдяки параметричному поданню кривих система інтегральних рівнянь була параметризована, для знаходження наближеного розв'язку було застосовано метод квадратур із використанням квадратурних формул без насичення алгебраїчної точності.

Теоретичні результати підтверджено чисельними експериментами.

Список літератури

- [1] *Абрамовиц М.* Справочник по специальным функциям / М.Абрамовиц, И.Стиган. - М.:Наука, 1979. - 830 с.
- [2] *Тихонов А.* Тихонов А.Н Уравнения математической физики/ А.Н. Тихонов, А.А.Самарский. - М.: Наука, 1972. - 736 с.
- [3] *Chapko R., Kress R.* On a quadrature method for a logarithmic integral equation of the first kind// World of Scientific Series in Applicable Analysis -Vol.2 Contributions in Numerical Mathematics (Agarwal, ed.) World Scientific, Singapore, 1993. P.127-140.
- [4] *Kress R.* Linear Integral Equations, 2nd. ed. /R. Kress - New York: Springer-Verlag ,Heidelberg, 1999. - 367 p.