Львівський національний університет

імені Івана Франка

кафедра обчислювальної математики

Курсова робота

на тему:

Методи обчислення періодичних режимів Нелінійних електронних схем

Студента 3-го курсу групи ПМп-31

Напрямку підготовки

6.040301 ”Прикладна математика”

Плахтія М.Т.

Керівник:

ас. Ярмола Г.П

Національна шкала ___________

Кількість балів: ______ Оцінка ECTS______

Члени комісії ___________ ____________________

___________ ____________________

___________ ____________________

Львів – 2015

Зміст

Вступ **3**

1. Постановка задачі **4**

2. Методи розв'язування систем нелінійних алгебраїчних рівнянь та систем задач Коші **6**

2.1. Метод Ньютона 6

2.2. Метод Ейлера та Кранка-Ніколсона 9

3. Методи обчислення періодичних режимів нелінійних електронних схем **11**

4. Чисельні експерименти **15**

Висновки **19**

Список літератури **20**

Вступ

Задача обчислення періодичного режиму нелінійної електричної схеми найчастіше виникає при моделюванні пристроїв радіофізики, радіоелектроніки, механіки чи інших.

У роботі буде розглянуто метод Ньютона для розв’язування систем нелінійних алгебраїчних рівнянь, метод Ейлера та метод Кранка-Ніколсона для розв’язування систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку з початковими умовами.

Метою цієї курсової роботи є вивчення методів для розв’язування задач обчислення періодичного режиму та демонстрація результатів на тестовій задачі.

Розділ 1

Постановка задачі

Задача обчислення періодичного режиму нелінійної електричної схеми

Нехай задано:

$x' = f(x, t)$ – система звичайних диференціальних рівнянь.

Де x та f – n вимірні вектори; f – нелінійна періодична функція за змінною t з періодом T, неперервна за t і неперервно диференційована за x, $t \in [t_0, t_0 + T]$.

$x(t_0) = x^0$ – початковий стан заданої системи.

Такою системою диференціальних рівнянь можна описати потрібну електричну схему.

Задача пошуку періодичних режимів еквівалентна двоточковій крайовій задачі, в якій розв'язок заданої системи диференціальних рівнянь на інтервалі $[t_0, t_0 + T]$ повинен задовольняти граничну умову $x(t_0) = x(t_0 + T)$.

Проінтегрувавши нашу систему на відрізку $[t_0, t_0 + T]$, матимемо

$$x(t_0 + T) = \int_{t_0}^{t_0+T} f(x, \tau)\, d\tau + x(t_0)$$

Перепишемо отримане рівняння у вигляді

$$x_0 = \phi(t_0 + T, t_0; x_0),$$

де $x_0 = x(t_0)$, $\phi(t_0 + T, t_0; x_0) = \int_{t_0}^{t_0+T} f(x, \tau)\, d\tau + x(t_0)$, $x(t)$ задовольняє початкову систему диференціальних рівнянь на відрізку $[t_0, t_0 + T]$.

Найефективнішим методом розв'язування поставленої задачі є метод Ньютона.

Розділ 2

Методи розв’язування систем нелінійних алгебраїчних рівнянь та систем задач Коші

2.1 Метод Ньютона

Постановка задачі

Сформулюємо постановку задачі розв’язування **системи нелінійних алгебраїчних рівнянь**(СНАР).В загальному випадку її записують таким чином:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases};$$

Де $f_i(x_1, \dots, x_n)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, \dots , n$ – неперервні, нелінійні функції, визначені в деякій області $G \subset \mathbb{R}^n$, або у векторному вигляді:

$$F(x) = 0;$$

Де $x = (x_1, \dots, x_n)^T, F(x) = [f_1(x), \dots, f_n(x)]^T$.

Потрібно знайти такий вектор $x_* = (x_{*1}, \dots, x_{*n})$ такий що при підстановці в систему рівнянь кожне рівняння перетворював у числову рівність.

Метод Ньютона

Ітераційний процес методу Ньютона для розв'язування СНАР записується у наступному вигляді:

$$x^{k+1} = x^k - J_F^{-1}(x^k)F(x^k), \quad k = 0,1,2, \dots$$

Де J_F^{-1} – обернена матриця Якобі .

$$F'(x) = J_F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Оскільки процес обчислення оберненої матриці є трудомісткою операцією, то перетворимо цей ітераційний процес наступним чином:

$$\Delta x^k = -J_F^{-1}(x^k)F(x^k), \quad k = 0,1,2, \dots$$

Де $\Delta x^k = x^{k+1} - x^k$ поправка до поточного наближення x^k.

Помножимо останній вираз на матрицю Якобі $J_F(x)$:

$$J_F(x)\Delta x^k = -J_F(x)J_F^{-1}(x^k)F(x^k) = -F(x^k), \quad k = 0,1,2, \dots$$

В результаті отримана СНАР відносно поправки Δx^k. Після її обчислення визначається наступне наближення $x^{k+1} = x^k + \Delta x^k$.

Алгоритм методу Ньютона

1. Задати початкове наближення x^0, мале число ε і визначити $k = 0$.
2. Розв'язати СНАР відносно поправки Δx^k: $J_F(x)\Delta x^k = -F(x^k)$.
3. Обчислити наступне наближення: $x^{k+1} = x^k + \Delta x^k$.
4. Якщо $\Delta^{k+1} = \max_i \left| x_i^{k+1} - x_i^k \right| \leq \varepsilon$ то закінчити процес ітерації і визначити $x_* \cong x^{k+1}$, В іншому випадку вернутись на крок 2 визначивши $k = k + 1$.

Локальна збіжність методу Ньютона:

Теорема *Нехай $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ є неперервно диференційована на опуклій множині $D \subset \mathbb{R}^n$, $x_* \in D$. Припустимо, що $J_F^{-1}(x_*)$ існує і, що існують додатні константи R, C, L і $\|J_F^{-1}(x_*)\| \leq C$,*

$$\|J_F(x_*) - J_F(y)\| \leq L\|x - y\|, \forall x, y \in B(x_*, R),$$

де $B(x_*, R) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x_*\| \leq R\}$.

Тоді $\exists r \geq 0$ для $\forall x^0 \in B(x_*, r)$ такий, що послідовність методу Ньютона є однозначно визначена і збіжна до x_* з

$$\left\|x^{k+1} - x_*\right\| \leq CL\left\|x^k - x_*\right\|^2.$$

З теореми бачимо, що метод Ньютона збігається квадратично, але за умови що вибране нами початкове наближення x^0 є достатньо близьким до x_* та якщо матриця Якобі не є виродженою.

З недоліків методу є те, що на кожному кроці k потрібно обчислювати Якобіан і розв'язувати лінійну систему. А також існують задачі для яких цей метод не є глобально збіжним.

2.2 Метод Ейлера та Кранка-Ніколсона

Постановка задачі

Сформулюємо постановку задачі розв'язування системи диференціальних рівнянь Коші.

Нехай $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – деяка область і $f: G \to \mathbb{R}^n$ – задана система функцій. Система функцій $u: [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $u \in C^1[a, b]$ називається розв'язком системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку

$u' = f(x, u)$ або детально:

$$\begin{cases} u_1' = f_1(x, u_1, \dots, u_n) \\ u_2' = f_2(x, u_1, \dots, u_n) \\ \qquad\dots \\ u_n' = f_n(x, u_1, \dots, u_n) \end{cases}$$

якщо $(x, u(x)) \in G$, $u'(x) = f(x, u(x))$, $\forall x \in [a, b]$.

Розв'язування системи задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку $u' = f(x, u)$ полягає у знаходженні неперервно диференційованих функцій u, які задовольняють початкові умови

$u(x_0) = u_0$ для заданих x_0та u_0.

$$\begin{cases} u' = f(x, u) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

Система задач Коші для звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, де u та f – n – вимірні вектори.

Метод Ейлера та Кранка-Ніколсона

Явний метод Ейлера для системи задач Коші полягає у знаходженні наближення u_j до точного розв'язку $u(x_j)$ $[u_j \approx u(x_j)]$ на рівновіддаленому поділі $x_j = x_0 + jh;\ j = 1,2, \dots;\ h > 0$ за формулою:

$$u_{j+1} = u_j + hf(x_j, u_j), \quad j = 0,1,2, \dots$$

Неявний метод Ейлера

$$u_{j+1} = u_j + hf(x_{j+1}, u_{j+1}), \quad j = 0,1,2, \dots$$

Неявний метод Кранка-Ніколсона

$$u_{j+1} = u_j + \frac{h}{2}[f(x_j, u_j) + f(x_{j+1}, u_{j+1})], \quad j = 0,1,2, \dots$$

Ці обидва методи відносяться до неявних тому, що обчислення u_{j+1} передбачає розв'язування нелінійних рівнянь. Метод Ейлера може бути чисельно нестійким, особливо для жорстких систем.

Розділ 3

Методи обчислення періодичних режимів нелінійних електронних схем

Для пошуку періодичного режиму заданої системи задач Коші

$$\begin{cases} x' = f(x,t) \\ x(t_0) = x^0 \end{cases}$$

Де x та f – n вимірні вектори; f – нелінійна періодична функція за змінною t з періодом T, неперервна за t і неперервно диференційована за x, $t \in [t_0, t_0 + T]$,

запишемо ітераційний процес, який ґрунтується на методі Ньютона і виглядає наступним чином:

$$x_0^{k+1} = [\Phi^{-1}(t_0 + T, t_0; x_0^k) - I]^{-1}[\Phi^{-1}(t_0 + T, t_0; x_0^k)x^k(t_0 + T) - x_0^k],$$

$$k = 0,1,2, \ldots$$

Де $\Phi\left(t_0 + T, t_0; x_0^k\right) = \phi'(t_0 + T, t_0; x_0)$ – матриця переходу стану; I – одинична матриця; k – номер ітерації.

Для побудови послідовності наближень вищезгаданим методом потрібно на кожному кроці обчислювати обернену матрицю переходу $\Phi^{-1}\left(t_0 + T, t_0; x_0^k\right)$ та $x^k(t_0 + T)$. Для обчислення $x^k(t_0 + T)$ потрібно розв'язати систему задач Коші.

Скористаємося запропонованими методами Ейлера та Кранка-Ніколсона. Більшість задач пошуку періодичного режиму описують жорсткі системи, тому ми будемо використовувати неявні вигляди цих методів. Оскільки при використанні явних методів часто виникає явище осциляції розв'язку. Також у неявних методів немає обмеження щодо величини кроку.

У випадку методу Ейлера обернену матрицю переходу станів $\Phi^{-1}\left(t_0 + T, t_0; x_0^k\right)$ можна обчислити за такою формулою:

$$\Phi^{-1}\left(t_0 + T, t_0; x_0^k\right) \approx \prod_{j=1}^{m} \left[I - hF\left(x^k(t_j)\right)\right],$$

де $x^k\left(t_j\right), j = \overline{1, m}$ – розв'язки системи задач Коші; $F\left(x^k\left(t_j\right)\right)$ – якобіан $f(x, t)$; $t_j = t_0 + jh, h = \frac{1}{m}$.

Також, обчислити матрицю переходу станів $\Phi\left(t_0 + T, t_0; x_0^k\right)$, можна розв'язавши задачу:

$$\Phi'\left(t, t_0; x_0^k\right) = F(x^k, t)\Phi\left(t, t_0; x_0^k\right), \qquad \Phi\left(t_0, t_0; x_0^k\right) = I.$$

Алгоритм розв'язування задачі пошуку періодичних режимів

1. Для заданого початкового стану x_0^k обчислити розв'язок $x^k(t_j)$ системи задач Коші для кожного вузла сітки ($t_0 < t_j \le t_0 + T$). Для цього можна застосувати неявний метод Ейлера та неявний метод Кранка-Ніколсона відповідно.

$$x^k(t_j) = x^k(t_{j-1}) + hf\left(x^k(t_j), t_j\right)$$

$$x^k(t_j) = x^k(t_{j-1}) + \frac{h}{2}\left(f\left(x^k(t_{j-1}), t_{j-1}\right) + f\left(x^k(t_j), t_j\right)\right)$$

Оскільки обидва методи неявні то для кожного $j = \overline{1, m}$ потрібно розв'язувати систему нелінійних рівнянь. Відповідні ітераційні процеси набудуть вигляду:

$$x^{k,l+1}(t_j) = x^{k,l}(t_j) - \left[I - hF\left(x^{k,l}(t_j), t_j\right)\right]^{-1} \times$$
$$\times \left[x^{k,l}(t_j) - x^k(t_{j-1}) - hf\left(x^{k,l}(t_j), t_j\right)\right];$$

$$x^{k,l+1}(t_j) = x^{k,l}(t_j) - \left[I - \frac{h}{2}F\left(x^{k,l}(t_j), t_j\right)\right]^{-1} \times$$
$$\times \left[x^{k,l}(t_j) - x^k(t_{j-1}) - \frac{h}{2}\left(f\left(x^{k,l}(t_{j-1}), t_{j-1}\right) + f\left(x^{k,l}(t_j), t_j\right)\right)\right];$$

Тут $F(x, t)$ – якобіан $f(x, t)$, або його апроксимація; $l = 0,1,2, \dots$.

2. Обчислити матрицю переходу станів:

$$\Phi^{-1}(t_0 + T, t_0; x_0^k) \approx \prod_{j=1}^{m} \left[I - hF\left(x^k(t_j)\right)\right],$$

або, розв'язавши задачу

$$\Phi'\left(t, t_0; x_0^k\right) = F(x^k, t)\Phi\left(t, t_0; x_0^k\right), \qquad \Phi\left(t_0, t_0; x_0^k\right) = I$$

3. Обчислити x_0^{k+1} за формулою

$$x_0^{k+1} = x_0^k - \left[I - \Phi\left(t_0 + T, t_0; x_0^k\right)\right]^{-1}\left[x_0^k - \phi\left(t_0 + T, t_0; x_0^k\right)\right],$$

   або

$$x_0^{k+1} = [\Phi^{-1}\left(t_0 + T, t_0; x_0^k\right) - I]^{-1} \times$$
$$\times [\Phi^{-1}\left(t_0 + T, t_0; x_0^k\right)x^k(t_0 + T) - x_0^k].$$

4. Повернутися до першого кроку з використанням x_0^{k+1} у разі не виконання умов

   $\left\|x^{k+1}(t_0 + T) - x_0^k\right\| < \varepsilon$ та $\left\|x^{k+1} - x_0^k\right\| < \delta$

   де ε і δ – довільні достатньо малі числа.

Розділ 4

Чисельні експерименти

Розглянемо систему, яка є математичною моделлю осцилятора Дуффінга

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1' = x_2 \\ \dfrac{dx_1}{dt} = x_2' = -0.2x_2 - x_1^3 + 0.3\cos t \end{cases}$$

$$x_1^0(0) = 0.027, x_2^0(0) = 1.1$$

Таблиця 1 Проміжні результати розв’язку системи Коші на відрізку $[0,2\pi]$

$h = 0.0314, m = 200, \varepsilon = 10^{-5}, k = 0.$

l	Метод Ейлера	Метод К.-Н.
0	0,027 1,1	0,027 1,1
25	0,855157317063995 1,00307423102014	0,858863414371828 1,01267326209896
50	1,23577650565302 -0,16812078984002	1,26180931822034 -0,19213651753151
75	0,67730139580511 -0,99535458516374	0,666311611885663 -1,0755152644760
100	-0,15511249456993 -1,0881558507323	-0,22190267358037 -1,1538159312058
125	-0,9834271694962 -0,88459427379501	-1,0828780063612 -0,85867274843718
150	-1,1968019355528 0,389708424164004	-1,2051203331825 0,609560026957188
175	-0,55646725159384 1,00873294497438	-0,43318010049763 1,13333024000038
200	0,304523891252745 1,07864867602449	0,510813208356945 1,16001598899556

Таблиця 2 Перше наближення x_0^{k+1} методом Ньютона $h = 0.0314, m = 200, \varepsilon = 10^{-5}, k = 0.$

x_0^{k+1}	Метод Ньютона, Ейлера	Метод Ньютона, К.-Н.	Розв’язок задачі
x_0^1	0,37578628946 1,04147277335	0,851827491296 1,0520768879	0.82083197 1.04098983

Таблиця 3 Проміжні результати розв'язку системи Коші на відрізку $[0,2\pi]$

$h = 0.0314, m = 200, \varepsilon = 10^{-5}$, (Виведені останні ітерації для кожного методу)

l	Метод Ейлера $k = 4$	Метод К.-Н. $k = 6$
0	0,378322666413874 1,03332979564474	0,65636057378756 1,02150801241015
25	1,08422528957283 0,680285607939478	1,23843722936701 0,303238389071936
50	1,11499881096578 -0,55228076429861	0,95805767028476 -0,85771515546700
75	0,44656044445932 -0,97093759472683	0,186527676427655 -1,0108009813026
100	-0,3442645584490 -1,03044869371432	-0,62225712346301 -1,0244675868622
125	-1,0820142251227 -0,68042212245992	-1,2362270638823 -0,30511548445656
150	-1,1140745898733 0,550191330106869	-0,9580742653278 0,855673049773062
175	-0,4462253605241 0,971527977354992	-0,18658707121136 1,01239609212339
200	0,378322661696197 1,03332979176291	0,656355445126463 1,02150213477987

Таблиця 4 Метод Ньютона $h = 0.0314, m = 200, \varepsilon = 10^{-5}$,

x_0^{k+1}	Метод Ньютона, Ейлера	Метод Ньютона, К.-Н.	Розв'яз ок задачі
x_0^1	0,375786289468 1,04147277335	0,851827491296 1,05207688799	-
x_0^2	0,378459214164 1,03335883699	0,667700908014 1,02391925274	-
x_0^3	0,378322666413 1,03332979564	0,65655531099 1,020919390617	-
x_0^4	0,378322654026 1,03332979322	0,6562157409 1,0215455624819	-
x_0^5		0,65636057378 1,02150801410	-
x_0^6		0,656348603109 1,02150565928	-

Таблиця 5 Розв'язок задачі періодичного режиму Дуффінга

$h = 0.00628, m = 1000, \varepsilon = 10^{-5}$

x_0^{k+1}	Метод Ньютона, Ейлера	Метод Ньютона, К.-Н.	Розв'язок задачі
x_0^1	0,5869953274 1,02743446	0,4952326977 1,15116379	0.820831 1.040989
x_0^2	0,5648933037 1,03776526	0,7285767723 1,04412032	0.626556 1.042643
x_0^3	0,5691553743 1,04192442	0,6818334942 0,99839207	0.627262 1.032944
x_0^4	0,5757465573 1,04052353	0,6077241294 1,02332476	0.626701 1.033059
x_0^5	0,5764762888 1,03910883	0,6074449403 1,03974242	0.626710 1.033061
x_0^6	0,5750395454 1,03908222	0,6275068135 1,03725614	0.626710 1.033063
x_0^7	0,5744766583 1,03942446	0,6321128169 1,03209968	0.62671045 1.03306133
x_0^8	0,5746819502 1,03952249	0,6276457601 1,03171258	0.62671045 1.03306133
x_0^9	0,5748759406 1,03946402	0,6254292275 1,03303171	
x_0^{10}	0,5748769505 1,03942416	0,6261726231 1,03342382	
x_0^{11}		0,6269381730 1,03314897	
x_0^{12}		0,6269011228 1,03298245	

Висновки

У роботі було розглянуто метод Ньютона для пошуку періодичних режимів нелінійних динамічних систем. Були реалізовані алгоритми методу Ейлера та Кранка-Ніколсона. Також додатково були запрограмовані спеціальні класи для робити з матрицями та векторами. Виконано чисельні дослідження цих методів та зроблено порівняння результатів.

З чисельних експериментів робимо висновок, що зі збільшенням розбиття відрізка кількість ітерацій зростає. Якщо крок обирати надто великим, то можна отримати хибні результати, або метод буде розбігатися. Також якщо обрати дуже малий крок розбиття то це суттєво збільшує кількість обчислень.

Також, слід зазначити, що метод Ейлера хоч і має меншу кількість ітерацій, але в точності поступається методу Кранка-Ніколсона.

Список літератури

[1] Застосування прискореного методу Ньютона та різницевих методів до розв'язування задачі пошуку періодичних режимів у нелінійних динамічних системах / С.Шахно, Д. Убізський, Г.Ярмола /Вісник Львівського університету Серія прикладна математика та інформатика. 2013. Випуск 19. С 39-46

[2] *Эйприлл Т.* Анализ стационарного режима нелинейных цепей с периодическими входными сигналами / Т. Эйприлл, Т. Трик. //ТИИЭР. -1982. – Т.70, №10. – С.148-155.

[3] *Шахно С.М* Чисельні методи лінійної алгебри/ С.М Шахно. - Львів: Видавничий центр ЛНУ імені І. Франка, 2007. – 245 с.

[4] *Kress, Rainer, 1941* – Numerical analysis / Rainer Kress. 1998

[5] *Деннис Дж.* Чисельные методы безусловной оптимизации і решения нелинейных уравнений / Дж. Деннис, Р. Шнабель – пер. С англ. – М.:Мир, 1988. - 440с.