Курсова робота

на темy:

Методи обчислення періодичних режимів

Нелінійних електронних схем

Студента групи ПМп-31
Плахтія Мар'яна

Нехай задано:

$x' = f(x,t)$ – система звичайних диференціальних рівнянь.

Де x та f – n вимірні вектори; f – нелінійна періодична функція за змінною t з періодом T, неперервна за t і неперервно диференційована за x, $t \in [t_0, t_0 + T]$.

$x(t_0) = x^0$ – початковий стан заданої системи.

Такою системою диференціальних рівнянь можна описати потрібну електричну схему.

Задача пошуку періодичних режимів еквівалентна двоточковій крайовій задачі, в якій розв'язок заданої системи диференціальних рівнянь на інтервалі $[t_0, t_0 + T]$ повинен задовольняти граничну умову

$$x(t_0) = x(t_0 + T).$$

Проінтегрувавши нашу систему на відрізку $[t_0, t_0 + T]$, матимемо

$$x(t_0 + T) = \int_{t_0}^{t_0+T} f(x,\tau)\, d\tau + x(t_0)$$

Перепишемо отримане рівняння у вигляді

$$x_0 = \phi(t_0 + T, t_0; x_0),$$

де $x_0 = x(t_0)$, $\phi(t_0 + T, t_0; x_0) = \int_{t_0}^{t_0+T} f(x,\tau)\, d\tau + x(t_0)$, $x(t)$ задовольняє початкову систему диференціальних рівнянь на відрізку $[t_0, t_0 + T]$.

Метод Ньютона

$$x^{k+1} = x^k - J_F^{-1}(x^k)F(x^k), \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Неявний метод Ейлера

$$u_{j+1} = u_j + hf\left(x_{j+1}, u_{j+1}\right), \quad j = 0,1,2,\ldots$$

Неявний метод Кранка-Ніколсона

$$u_{j+1} = u_j + \frac{h}{2}\left[f\left(x_j, u_j\right) + f\left(x_{j+1}, u_{j+1}\right)\right], \quad j = 0,1,2,\ldots$$

Алгоритм розв’язування задачі пошуку періодичних режимів

1. Для заданого початкового стану x_0^k обчислити розв’язок $x^k(t_j)$ системи задач Коші для кожного вузла сітки $(t_0 < t_j \le t_0 + T)$. Для цього можна застосувати неявний метод Ейлера та неявний метод Кранка-Ніколсона відповідно.

$$x^k(t_j) = x^k(t_{j-1}) + hf\left(x^k(t_j), t_j\right)$$

$$x^k(t_j) = x^k(t_{j-1}) + \frac{h}{2}\left(f\left(x^k(t_{j-1}), t_{j-1}\right) + f\left(x^k(t_j), t_j\right)\right)$$

Оскільки обидва методи неявні то для кожного $j = \overline{1, m}$ потрібно розв’язувати систему нелінійних рівнянь. Відповідні ітераційні процеси набудуть вигляду:

$$x^{k,l+1}(t_j) = x^{k,l}(t_j) - \left[I - hF\left(x^{k,l}(t_j), t_j\right)\right]^{-1} \times$$
$$\times \left[x^{k,l}(t_j) - x^k(t_{j-1}) - hf\left(x^{k,l}(t_j), t_j\right)\right];$$

$$x^{k,l+1}(t_j) = x^{k,l}(t_j) - \left[I - \frac{h}{2}F\left(x^{k,l}(t_j), t_j\right)\right]^{-1} \times$$

$$\times \left[x^{k,l}(t_j) - x^{k}(t_{j-1}) - \frac{h}{2}\left(f\left(x^{k,l}(t_{j-1}), t_{j-1}\right) + f\left(x^{k,l}(t_j), t_j\right)\right)\right];$$

Тут $F(x,t)$ – якобіан $f(x,t)$, або його апроксимація; $l = 0,1,2, \dots$.

2. Обчислити матрицю переходу станів:

$$\Phi^{-1}\left(t_0 + T, t_0; x_0^k\right) \approx \prod_{j=1}^{m}\left[I - hF\left(x^k(t_j)\right)\right],$$

або, розв'язавши задачу

$$\Phi'\left(t, t_0; x_0^k\right) = F(x^k, t)\Phi\left(t, t_0; x_0^k\right), \qquad \Phi\left(t_0, t_0; x_0^k\right) = I$$

3. Обчислити x_0^{k+1} за формулою

$$x_0^{k+1} = x_0^k - \left[I - \Phi\left(t_0 + T, t_0; x_0^k\right)\right]^{-1}\left[x_0^k - \phi\left(t_0 + T, t_0; x_0^k\right)\right],$$

або

$$x_0^{k+1} = [\Phi^{-1}\left(t_0 + T, t_0; x_0^k\right) - I]^{-1} \times$$

$$\times [\Phi^{-1}\left(t_0 + T, t_0; x_0^k\right)x^k(t_0 + T) - x_0^k].$$

4. Повернутися до першого кроку з використанням x_0^{k+1} у разі не виконання умов

$\left\|x^{k+1}(t_0 + T) - x_0^k\right\| < \varepsilon$ та $\left\|x^{k+1} - x_0^k\right\| < \delta$

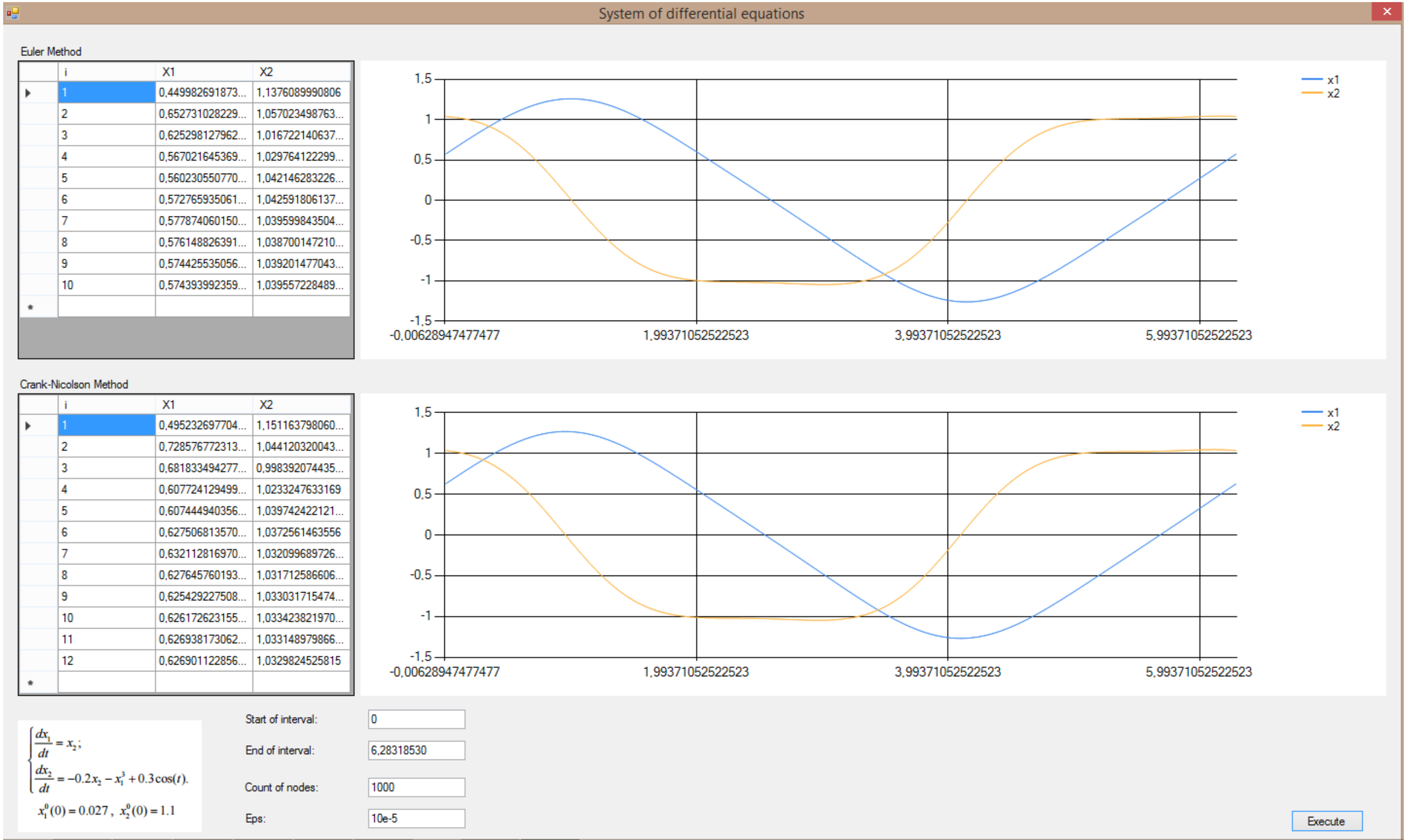
де ε і δ – довільні достатньо малі числа.

Розглянемо систему, яка є математичною моделлю осцилятора Дуффінга

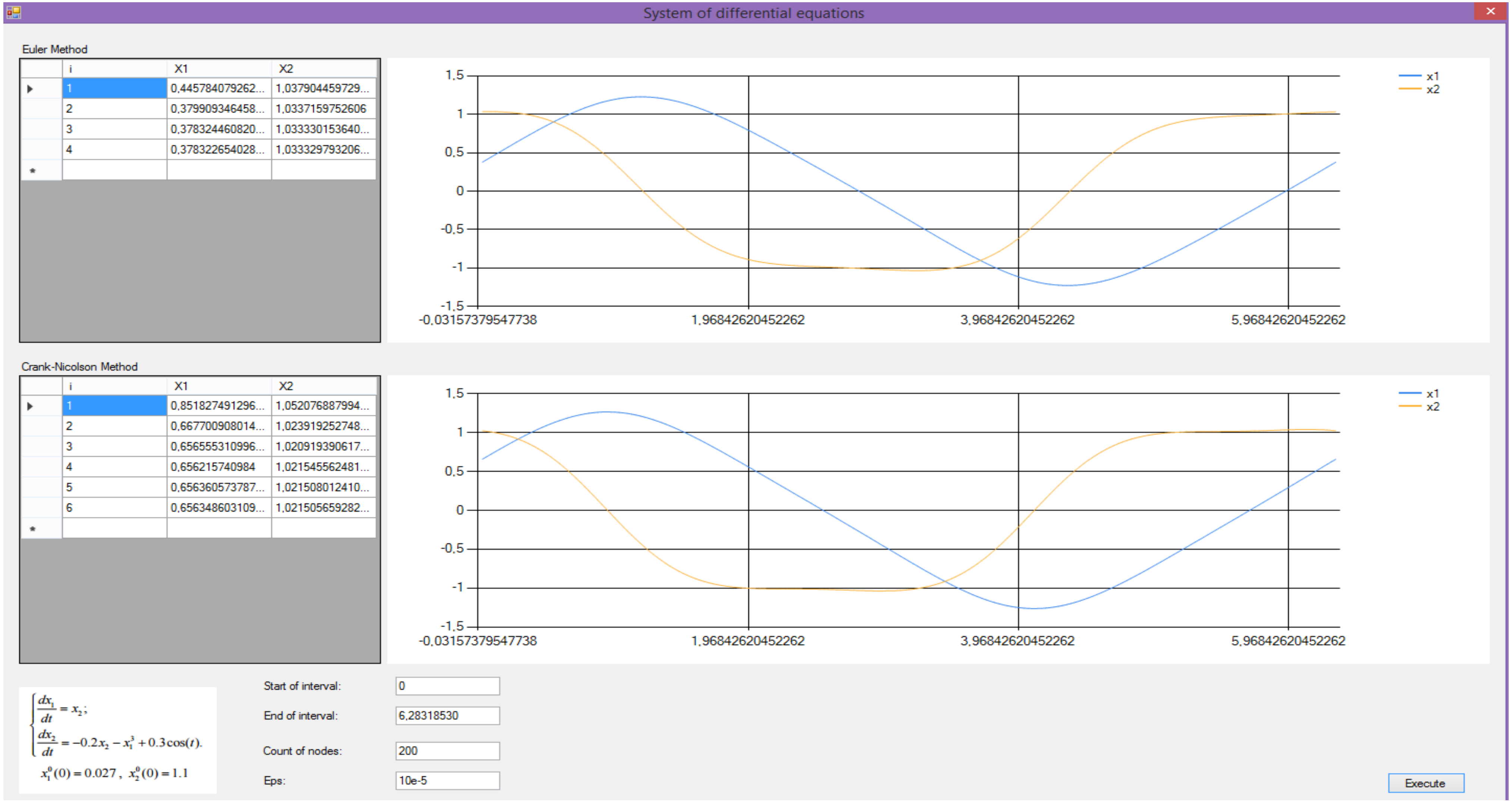
$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1' = x_2 \\ \dfrac{dx_1}{dt} = x_2' = -0.2x_2 - x_1^3 + 0.3\cos t \end{cases}$$

$$x_1^0(0) = 0.027, x_2^0(0) = 1.1$$

Розв'язок задачі періодичного режиму Дуффінга $h = 0.00628, m = 1000, \varepsilon = 10^{-5}$



Розв’язок задачі періодичного режиму Дуффінга $h = 0.00628, m = 200, \varepsilon = 10^{-5}$



Список літератури

[1] Застосування прискореного методу Ньютона та різницевих методів до розв'язування задачі пошуку періодичних режимів у нелінійних динамічних системах / С.Шахно, Д. Убізський, Г.Ярмола /Вісник Львівського університету Серія прикладна математика та інформатика. 2013. Випуск 19. С 39-46

[2] *Эйприлл Т*. Анализ стационарного режима нелинейных цепей с периодическими входными сигналами / Т. Эйприлл, Т. Трик. //ТИИЭР. -1982. – Т.70, №10. – С.148-155.

[3] *Шахно С.М* Чисельні методи лінійної алгебри/ С.М Шахно. - Львів: Видавничий центр ЛНУ імені І. Франка, 2007. – 245 с.

[4] *Kress, Rainer, 1941* – Numerical analysis / Rainer Kress. 1998

[5] *Деннис Дж.* Чисельные методы безусловной оптимизации і решения нелинейных уравнений / Дж. Деннис, Р. Шнабель – пер. С англ. – М.:Мир, 1988. - 440с.

Дякую за увагу!