

Zastosowane metody interpolacji

Michał Plaza

1 Dane techniczne sprzętu

Obliczenia zostały wykonane na komputerze o następujących parametrach:

- Procesor: Apple M1 (8 rdzeni: 4 rdzenie high-performance, 4 rdzenie high-efficiency)
- Pamięć RAM: 16 GB Unified Memory

2 Interpolowana funkcja

2.1 Wzór funkcji

Interpolację przeprowadziłem dla poniższej funkcji

$$f(x) = e^{-k \cdot \sin(mx)} + k \cdot \cos(mx) \quad (1)$$

gdzie

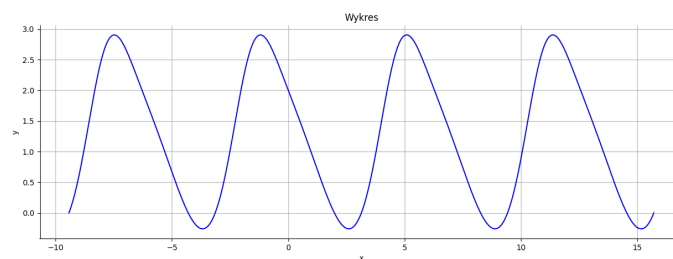
$$k = 1 \quad (2)$$

$$m = 1 \quad (3)$$

na przedziale

$$x \in [-3\pi, 5\pi] \quad (4)$$

2.2 Wykres funkcji



Rys. 2.2. Wykres badanej funkcji

3 Zastosowane metody interpolacji

3.1 Funkcja sklejana 2. stopnia

3.1.1 Sposób wyznaczania funkcji

Równanie funkcji sklejaney 2. stopnia, możemy w ogólności zapisać jako

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^2 + b_i(x - x_i) + c_i, \quad i \in [1, 2, \dots, n - 1] \quad (5)$$

gdzie każdy z segmentów funkcji, określony na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ ($i \in [1, 2, \dots, n - 1]$ – indeksuję węzły od 1 do n , a więc otrzymam $n - 1$ funkcji $S_i(x)$) opisany jest wzorem (5).

Aby (5) była funkcją sklejaną 2. stopnia, musi spełniać następujące warunki:

$$(1) \quad S_i(x_i) = y_i \quad \text{dla } i \in [1, 2, \dots, n - 1]$$

$$(2) \quad S_{i+1}(x_{i+1}) = S_i(x_{i+1}) \quad \text{dla } i \in [1, 2, \dots, n - 2]$$

$$(3) \quad S'_{i+1}(x_{i+1}) = S'_i(x_{i+1}) \quad \text{dla } i \in [1, 2, \dots, n - 2]$$

Z warunku (1) otrzymujemy:

$$S_i(x_i) = a_i(x_i - x_i)^2 + b_i(x_i - x_i) + c_i = c_i \quad (6)$$

$$y_i = c_i \quad (7)$$

Różniczkując wyrażenie (5) względem x , otrzymujemy:

$$S'_i(x) = 2a_i(x - x_i) + b_i \quad (8)$$

To z kolei pozwala nam na wykorzystanie warunku (3):

$$S'_{i+1}(x_{i+1}) = S'_i(x_{i+1}) \quad (9)$$

$$2a_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + b_{i+1} = 2a_i(x_{i+1} - x_i) + b_i \quad (10)$$

$$2a_i(x_{i+1} - x_i) = b_{i+1} - b_i \quad (11)$$

$$a_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{2(x_{i+1} - x_i)} \quad (12)$$

Wykorzystując warunki (1) i (2), a także, korzystając ze wzoru (12), otrzymujemy:

$$S_{i+1}(x_{i+1}) = S_i(x_{i+1}) \quad (13)$$

$$a_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1})^2 + b_{i+1}(x_{i+1} - x_{i+1}) + c_{i+1} = a_i(x_{i+1} - x_i)^2 + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i \quad (14)$$

$$y_{i+1} = a_i(x_{i+1} - x_i)^2 + b_i(x_{i+1} - x_i) + y_i \quad (15)$$

Dzielenie równania (15) na kilka linijek przy użyciu `multiline`:

$$y_{i+1} = (x_{i+1} - x_i) \left(\frac{b_{i+1} - b_i}{2} \right) + b_i(x_{i+1} - x_i) + y_i$$

$$b_i + b_{i+1} = 2 \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (16)$$

Przesuwając indeks o 1 w dół, uzyskujemy:

$$b_{i-1} + b_i = 2 \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (17)$$

$$b_{i-1} + b_i = 2\gamma_i, \quad \gamma_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (18)$$

Jak możemy zauważyć, jedynymi niewiadomymi są teraz wartości współczynników b_i , ponieważ wartości c_i są znane ((7)), a wartości a_i obliczymy, znając wartości b_i ((12)). Otrzymujemy więc układ równań:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 2\gamma_2 \\ b_2 + b_3 = 2\gamma_3 \\ \vdots \\ b_{n-2} + b_{n-1} = 2\gamma_{n-1} \\ b_{n-1} + b_n = 2\gamma_n \end{cases} \quad (19)$$

Układ ten ma n niewiadomych, ale tylko $n - 1$ równań. Jak widzimy, w powyższym układzie równań obliczać także będziemy b_n , mimo, że nie jesteśmy w stanie wyznaczyć $S_n(x)$. Takie podejście ma na celu umożliwienie obliczenia współczynnika a_{n-1} , który obliczamy ze wzoru (12). Musimy więc skorzystać z warunku brzegowego, w celu wyznaczenia brakującego równania.

3.1.2 Warunki brzegowe

Natural Spline (Free Boundary)

$$S'_1(x_1) = 0 \quad \text{lub} \quad S'_{n-1}(x_n) = 0 \quad (20)$$

Ponieważ brakuje nam jednego równania, wystarczy, że uwzględnimy jeden z powyższych warunków, dalsze przekształcenia wykonuję dla $S'_1(x_1) = 0$.

Korzystając z (8), otrzymujemy:

$$2a_1(x_1 - x_1) + b_1 = 0b_1 = 0 \quad (21)$$

Po uwzględnieniu powyższego warunku brzegowego, otrzymujemy układ równań, przy pomocy którego już jesteśmy w stanie wyliczyć szukane wartości współczynników b_i .

$$\begin{cases} b_1 = 0 \\ b_1 + b_2 = 2\gamma_2 \\ b_2 + b_3 = 2\gamma_3 \\ \vdots \\ b_{n-2} + b_{n-1} = 2\gamma_{n-1} \\ b_{n-1} + b_n = 2\gamma_n \end{cases} \quad (22)$$

Zauważmy, że możemy teraz bardzo łatwo rozwiązać układ równań (22) w sposób iteracyjny. Kolejno przekształcamy równania, korzystając z wyznaczonych w poprzednich równaniach wartości współczynników b_i :

$$b_1 = 0 \quad (23)$$

$$b_1 + b_2 = 2\gamma_2 \implies b_2 = 2\gamma_2 - b_1 = 2\gamma_2 \quad (24)$$

$$b_2 + b_3 = 2\gamma_3 \implies b_3 = 2\gamma_3 - b_2 = 2(\gamma_3 - \gamma_2) \quad (25)$$

$$b_3 + b_4 = 2\gamma_4 \implies b_4 = 2\gamma_4 - b_3 = 2(\gamma_4 - \gamma_3 + \gamma_2) \quad (26)$$

$$\vdots \quad (27)$$

$$b_{n-1} + b_n = 2\gamma_n \implies b_n = 2(\gamma_n - \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} + \gamma_{n-3} - \dots) \quad (28)$$

W ogólności, współczynniki określone są następującymi wzorami:

$$b_1 = 0 \quad (29)$$

$$b_i = 2 \sum_{j=2}^i (-1)^{j+i} \gamma_j, \quad i \in \{2, 3, 4, \dots, n\} \quad (30)$$

Pozostałe współczynniki obliczamy z wyznaczonych wcześniej wzorów (7) oraz (12).

Clamped Boundary W przypadku tego warunku brzegowego, przyjmuje się, że jedna z pierwszych pochodnych na krańcach jest znana lub przybliżona, przy pomocy ilorazów różnicowych, tzn.:

$$S'_1(x_1) = f'_1 \quad \text{lub} \quad S'_{n-1}(x_n) = f'_{n-1} \quad (31)$$

Do wyznaczenia przybliżonej wartości pochodnej (jeżeli dokładna wartość nie jest znana), najlepiej skorzystać z ilorazu różnicowego.

$$S'_1(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (32)$$

Korzystając ze wzoru (8), możemy przekształcić powyższe równanie do następującej postaci:

$$2a_1(x_1 - x_1) + b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \implies b_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \gamma_2 \quad (33)$$

Po uwzględnieniu powyższego warunku brzegowego, otrzymujemy układ równań, przy pomocy którego już jesteśmy w stanie wyliczyć szukane wartości współczynników b_i .

$$\begin{cases} b_1 = \gamma_2 \\ b_1 + b_2 = 2\gamma_2 \\ b_2 + b_3 = 2\gamma_3 \\ \vdots \\ b_{n-2} + b_{n-1} = 2\gamma_{n-1} \\ b_{n-1} + b_n = 2\gamma_n \end{cases} \quad (34)$$

Powyższy układ równań możemy znów obliczyć w sposób iteracyjny, otrzymując równania postaci:

$$b_1 = \gamma_2 \quad (35)$$

$$b_1 + b_2 = 2\gamma_2 \implies b_2 = 2\gamma_2 - b_1 = \gamma_2 \quad (36)$$

$$b_2 + b_3 = 2\gamma_3 \implies b_3 = 2\gamma_3 - b_2 = 2\gamma_3 - \gamma_2 \quad (37)$$

$$b_3 + b_4 = 2\gamma_4 \implies b_4 = 2\gamma_4 - b_3 = 2(\gamma_4 - \gamma_3) + \gamma_2 \quad (38)$$

$$\vdots \quad (39)$$

$$b_{n-1} + b_n = 2\gamma_n \implies b_n = 2(\gamma_n - \gamma_{n-1} + \gamma_{n-2} + \gamma_{n-3} - \dots) \quad (40)$$

W ogólności, współczynniki określone są następującymi wzorami:

$$b_1 = b_2 = \gamma_2 \quad (41)$$

$$b_i = 2 \left(\sum_{j=3}^i (-1)^{j+i} \gamma_j \right) + (-1)^i \gamma_2, \quad i \in \{3, 4, \dots, n\} \quad (42)$$

Pozostałe współczynniki obliczamy z wyznaczonych wcześniej wzorów (7) oraz (12).

3.2 Funkcja sklejana 3. stopnia

3.2.1 Sposób wyznaczania funkcji

Równanie funkcji sklejaney 3. stopnia, możemy w ogólności zapisać jako:

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i, \quad i \in [1, 2, \dots, n-1] \quad (43)$$

gdzie każdy z segmentów funkcji, określony na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$ ($i \in [1, 2, \dots, n-1]$) opisany jest wzorem (43).

Aby (43) była funkcją sklejaną 3. stopnia, musi spełniać następujące warunki:

- (1) $S_i(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$
- (2) $S_i(x_{i+1}) = S_{i+1}(x_{i+1})$
- (3) $S'_i(x_{i+1}) = S'_{i+1}(x_{i+1})$
- (4) $S''_i(x_{i+1}) = S''_{i+1}(x_{i+1})$

Ponieważ funkcja $S_i(x)$ jest funkcją sześcienną, $S''_i(x)$ jest liniowa na przedziale $[x_i, x_{i+1}]$. Wprowadźmy oznaczenia $h_i = x_{i+1} - x_i$. Funkcję $S''_i(x)$ możemy więc zapisać w postaci zależności liniowej:

$$S''_i(x) = S''_i(x_i) \left(\frac{x_{i+1} - x}{h_i} \right) = S''_i(x_{i+1}) \left(\frac{x - x_i}{h_i} \right) \quad (44)$$

Całkując obustronnie funkcję $S''_i(x)$, otrzymujemy:

$$S_i(x) = \frac{S''_i(x_i)}{6h_i} (x_{i+1} - x)^3 + \frac{S''_i(x_{i+1})}{6h_i} (x - x_i)^3 + C(x - x_i) + D(x_{i+1} - x) \quad (45)$$

Korzystając z warunków interpolacji, możemy wyznaczyć wartości stałych całkowania. Po ich wyznaczeniu, otrzymujemy wzór postaci:

$$S_i(x) = \frac{S''_i(x_i)}{6h_i} (x_{i+1} - x)^3 + \frac{S''_i(x_{i+1})}{6h_i} (x - x_i)^3 + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{S''_i(x_i)h_i}{6} \right) (x_{i+1} - x) + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{S''_i(x_{i+1})h_i}{6} \right) (x - x_i) \quad (46)$$

Zauważmy, że w powyższym wzorze jedynie nie znamy $S''_i(x)$. W celu jego wyznaczenia, korzystamy z warunków interpolacji:

$$S'_i(x) = \frac{h_i}{3} S''_i(x_i) - \frac{h_i}{6} S''_i(x_{i+1}) - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i} \quad (47)$$

Dla przejrzystości wprowadzamy symbole $\sigma_i = \frac{1}{6} S''_i(x_i)$ oraz $\Delta_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}$.

$$S'_i(x) = \Delta_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i) \quad (48)$$

Natomiast, z drugiej strony:

$$S'_{i-1}(x) = \Delta_{i-1} + h_{i-1}(2\sigma_i + \sigma_{i-1}) \quad (49)$$

Z warunku ciągłości $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$ otrzymujemy finalną postać równania:

$$\begin{aligned} \Delta_i - h_i(\sigma_{i+1} + 2\sigma_i) &= \Delta_{i-1} + h_{i-1}(2\sigma_i + \sigma_{i-1}) \\ h_{i-1}\sigma_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)\sigma_i + h_i\sigma_{i+1} &= \Delta_i - \Delta_{i-1}, \quad i \in \{2, 3, \dots, n-1\} \end{aligned} \quad (50)$$

Jak możemy zauważyć, mamy n niewiadomych σ_i , ale tylko $n-2$ równań. Musimy więc określić dwa dodatkowe warunki.

3.2.2 Warunki brzegowe

Cubic Function Przyjmujemy, że:

- $C_1(x)$ – funkcja sześcienna przechodząca przez pierwsze 4 punkty
- $C_n(x)$ – funkcja sześcienna przechodząca przez pierwsze 4 punkty

Z powyższych założeń wynika więc, że:

$$S'''(x_1) = C_1''' \quad \text{oraz} \quad S'''(x_n) = C_n''' \quad (51)$$

Korzystając z metody ilorazów różnicowych, możemy wyznaczyć przybliżoną wartość 3. pochodnych funkcji $C_1(x)$ i $C_n(x)$:

$$\Delta_i^{(1)} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (52)$$

$$\Delta_i^{(2)} = \frac{\Delta_{i+1}^{(1)} - \Delta_i^{(1)}}{x_{i+2} - x_i} \quad (53)$$

$$\Delta_i^{(3)} = \frac{\Delta_{i+1}^{(2)} - \Delta_i^{(2)}}{x_{i+3} - x_i} \quad (54)$$

**Uwaga: W powyższych wzorach Δ oznacza co innego niż we wzorach z podpunktu (48).*

Przybliżenie pochodnej $f_i^{(n)}$ otrzymujemy mnożąc $n! \cdot \Delta_i^{(n)}$, więc:

$$S'''(x_1) = C_1''' = 3! \cdot \Delta_1^{(3)} = 6 \cdot \Delta_1^{(3)} \quad (55)$$

$$S'''(x_n) = C_n''' = 3! \cdot \Delta_{n-3}^{(3)} = 6 \cdot \Delta_{n-3}^{(3)} \quad (56)$$

Przekształcając powyższe równania, otrzymujemy 2 brakujące warunki:

$$\begin{cases} -h_1\sigma_1 + h_1\sigma_2 = h_1^2\Delta_1^{(3)} \\ h_{n-1}\sigma_{n-1} + h_{n-1}\sigma_n = -h_{n-1}^2\Delta_{n-3}^{(3)} \end{cases} \quad (57)$$

Finalnie, układ równań, który otrzymujemy, po uwzględnieniu powyższego warunku brzegowego, ma następującą postać macierzową:

$$\begin{bmatrix} -h_1 & h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-1} & -h_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^2 \Delta_1^{(3)} \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ -h_{n-1}^2 \Delta_{n-3}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (58)$$

Natural Spline (Free Boundary)

$$S''(x_1) = S''(x_n) = 0 \quad (59)$$

Korzystając z (48), mamy $\sigma_i = \frac{1}{6} S_i''(x_i)$. Uwzględniając powyższe równanie, otrzymujemy: $S''(x_1) = 0 \implies \sigma_1 = 0$
 $S''(x_n) = S_n''(x_n) = 0 \implies \sigma_n = 0$ (60)

Znamy więc już 2 wartości niewiadomych ($\sigma_1 = \sigma_n = 0$). Po dodaniu powyższych 2 równań do $n - 2$ równań z punktu (50), otrzymujemy układ równań postaci:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

Clamped Boundary

$$S'(x_1) = f'_1 S'(x_n) = f'_{n-1} \quad (62)$$

Korzystając z (48), mamy:

$$S'(x_1) = S'_1(x_1) = \Delta_1 - h_1(\sigma_2 + 2\sigma_1) = f'_1 \quad (63)$$

$$S'(x_n) = S'_{n-1}(x_n) = \Delta_{n-1} - h_{n-1}(\sigma_n + 2\sigma_{n-1}) = f'_{n-1} \quad (64)$$

Przekształcając powyższe równania, otrzymujemy:

$$2\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\Delta_1 - f'_1}{h_1} \quad (65)$$

$$2\sigma_{n-1} + \sigma_n = \frac{\Delta_{n-1} - f'_{n-1}}{h_{n-1}} \quad (66)$$

Pierwsze pochodne f'_1 oraz f'_n możemy przybliżyć, przy pomocy metody ilorazów różnicowych, a więc finalnie otrzymujemy:

$$f'_1 = \Delta_1 \quad (67)$$

$$f'_{n-1} = \Delta_{n-1} \quad (68)$$

Wstawiając do równań (66), otrzymujemy:

$$2\sigma_1 + \sigma_2 = 0, 2\sigma_{n-1} + \sigma_n = 0 \quad (69)$$

Otrzymane w ten sposób równania (69) pozwolą na wyznaczenie interpolacyjnej funkcji sklejaną 3. stopnia. Po uwzględnieniu powyższego warunku brzegowego, układ n równań wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_{n-1} \\ \sigma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta_2 - \Delta_1 \\ \Delta_3 - \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (70)$$

4 Wyznaczanie dokładności przybliżenia interpolowanej funkcji przez funkcję sklejaną

W celu wyznaczenia dokładności, z jaką funkcja sklejana przybliża zadaną funkcję $f(x)$ (daną wzorem (1)), skorzystałem z wymienionych niżej wskaźników, pozwalających na określenie dokładności. Pomiar dokładności przeprowadzałem, porównując wartości interpolowanej funkcji z wartościami wyznaczonego wielomianu interpolującego dla 1000 równoodległych punktów, rozmieszczonych na całym przedziale $x \in [-\pi, 2\pi]$.

4.1 Norma z różnicy wartości interpolowanej funkcji i interpolacyjnej funkcji sklejaną

Norma z różnicy między wartościami funkcji $f(x)$ (1) a wartościami wyznaczonej interpolacyjnej funkcji sklejaną $S(x)$.

$$||f(x) - S(x)|| \quad (71)$$

Powyższy wzór wykorzystałem przy rysowaniu wykresów błędów przybliżenia interpolowanej funkcji przez wielomian.

4.2 Największa różnica wartości interpolowanej funkcji i interpolacyjnej funkcji sklejaney

Największa różnica między wartością przyjmowaną przez interpolowaną funkcję $f(x)$ a wartością funkcji sklejaney $S(x)$.

$$\max_k \{|f(x_k) - S(x_k)|\} \quad (72)$$

4.3 Suma kwadratów różnic interpolowanej funkcji i interpolacyjnej funkcji sklejaney

Suma kwadratów różnic między wartościami funkcji $f(x)$ a wartościami interpolacyjnej funkcji sklejaney $S(x)$.

$$\sum_{i=1}^N (f(x_i) - S(x_i))^2 \quad (73)$$

5 Rezultaty dla wybranych liczb węzłów

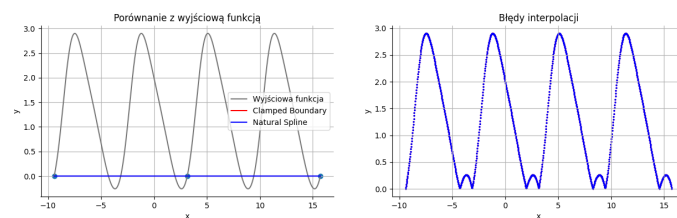
W poniższych przykładach, jeżeli nie zostało to wyraźnie zaznaczone, zawsze wykorzystuję rozkład jednostajny węzłów (węzły równoodległe). Zdecydowałem się na taki rozkład, ponieważ interpolacja, przy pomocy funkcji sklejaney, powinna być bardziej dokładna niż interpolacja pojedynczym wielomianem.

5.1 Funkcja sklejana 2. stopnia

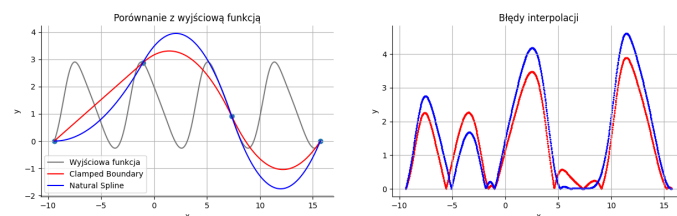
5.1.1 Dla 3, 4 oraz 7 węzłów

Sytuacja jest analogiczna jak w przypadku interpolacji Lagrange'a, Newtona oraz Hermite'a. Wynika to stąd, że przy liczbie węzłów równej 3, 4 lub 7, wszystkie węzły znajdują się w punktach, w których interpolowana funkcja osiąga minima lokalne (więc pochodna funkcji jest równoległa do osi OX) oraz w każdym z tych punktów funkcja przyjmuje taką samą wartość.

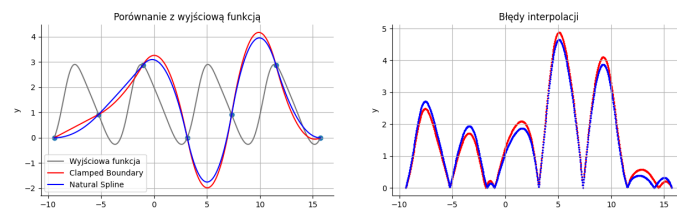
- Dla 3, 4 oraz 7 węzłów



Rysunek 1: Wykres interpolacyjnej funkcji sklejanej 2. stopnia oraz błędów przybliżenia dla 3 węzłów



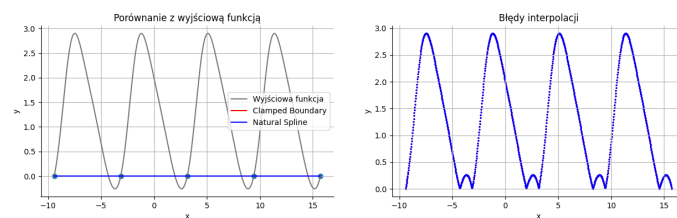
Rysunek 2: Wykres interpolacyjnej funkcji sklejanej 2. stopnia oraz błędów przybliżenia dla 4 węzłów



Rysunek 3: Wykres interpolacyjnej funkcji sklejanej 2. stopnia oraz błędów przybliżenia dla 7 węzłów

5.1.2 Dla 5 węzłów

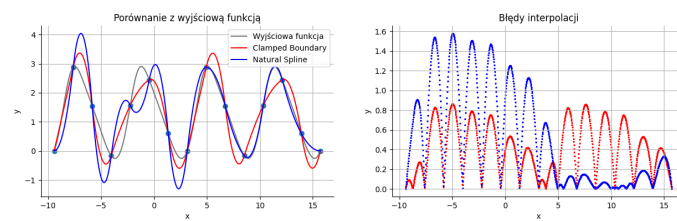
Dla 5 węzłów możemy zauważyć, że przybliżenie funkcji jest bardzo niedokładne. Widać również, że przybliżenie zależy od wykorzystywanego warunku brzegowego.



Rysunek 4: Wykres interpolacyjnej funkcji sklejanej 2. stopnia oraz błędów przybliżenia dla 5 węzłów

5.1.3 Dla 15 węzłów

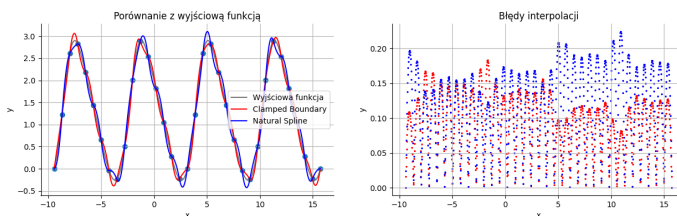
Dla 15 węzłów przybliżenie jest już nieco bardziej dokładne, jednak wciąż znacznie odbiega od interpolowanej funkcji.



Rysunek 5: Wykres interpolacyjnej funkcji sklejanej 2. stopnia oraz błędów przybliżenia dla 15 węzłów

5.1.4 Dla 35 węzłów

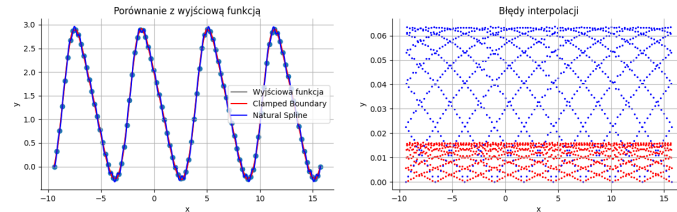
Dla 35 węzłów przybliżenie jest już zadowalające. Widzimy również, że lepsze przybliżenie osiągamy dla warunku brzegowego Natural Spline niż dla Clamped Boundary.



Rysunek 6: Wykres interpolacyjnej funkcji sklejanej 2. stopnia oraz błędów przybliżenia dla 35 węzłów

5.1.5 Dla 100 węzłów

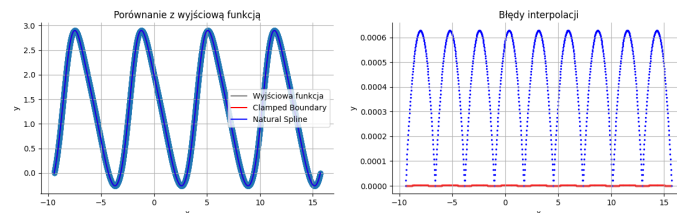
Dla 100 węzłów obserwujemy coraz lepsze przybliżenie interpolowanej funkcji. Wciąż jednak daje się zauważyć dużą niedokładność, w przypadku, gdy wykorzystujemy warunek brzegowy Clamped Boundary.



Rysunek 7: Wykres interpolacyjnej funkcji skleianej 2. stopnia oraz błędów przybliżenia dla 100 węzłów

5.1.6 Dla 10000 węzłów

Widzimy, że dla 10000 węzłów, przybliżenie interpolacyjną funkcją sklejana 2. stopnia, wykorzystującą warunek brzegowy Clamped Boundary, jest również mniej dokładne niż dla warunku Natural Spline. Skorzystanie z warunku brzegowego Natural Spline pozwala już na uzyskanie bardzo dokładnego przybliżenia.



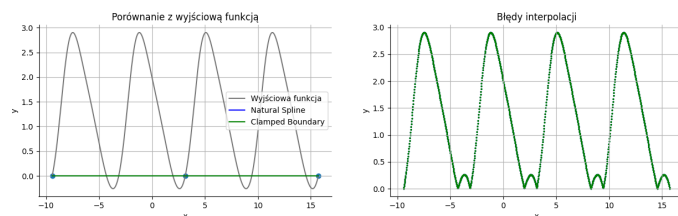
Rysunek 8: Wykres interpolacyjnej funkcji skleianej 2. stopnia oraz błędów przybliżenia dla 10000 węzłów

5.2 Funkcja sklejana 3. stopnia

5.2.1 Dla 3 węzłów

W sytuacji, w której mamy dane tylko 3 węzły, nie możemy skorzystać z warunku brzegowego Cubic Function, ponieważ wymaga on, aby istniały przynajmniej 4 węzły interpolacyjne. Dla pozostałych 2 warunków brzegowych, gdy liczba węzłów wynosi 3, funkcja sklejana 3. stopnia zachowuje się tak samo, jak funkcja sklejana 2. stopnia. W przypadku 2 pozostałych warunków

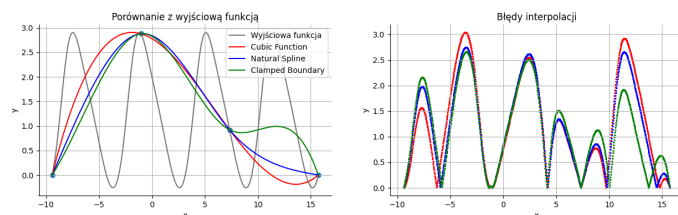
brzegowych, takie samo zjawisko obserwujemy gdy liczba węzłów wynosi 4 lub 7.



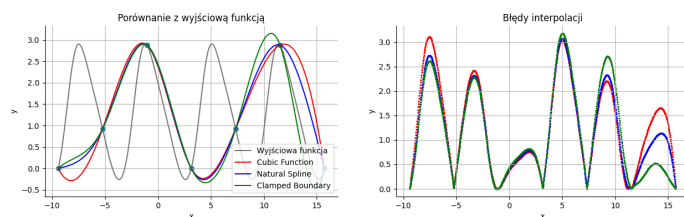
Rysunek 9: Wykres interpolacyjnej funkcji sklejanej 3. stopnia oraz błędów przybliżenia dla 3 węzłów

5.2.2 Dla 4 i 7 węzłów

Dla 5 węzłów możemy zauważyć, że przybliżenie funkcji jest bardzo niedokładne. Widać również, że przybliżenie zależy od wykorzystywanego warunku brzegowego. Sytuacja wygląda identycznie jak w przypadku 3 węzłów.



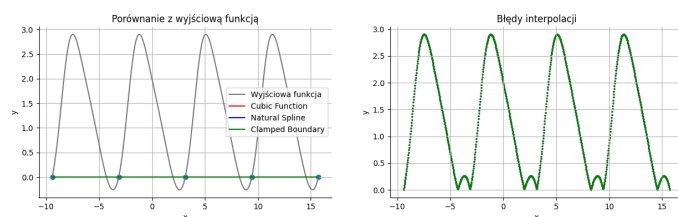
Rysunek 10: Wykres interpolacyjnej funkcji sklejanej 3. stopnia oraz błędów przybliżenia dla 4 węzłów



Rysunek 11: Wykres interpolacyjnej funkcji sklejanej 3. stopnia oraz błędów przybliżenia dla 7 węzłów

5.2.3 Dla 5 węzłów

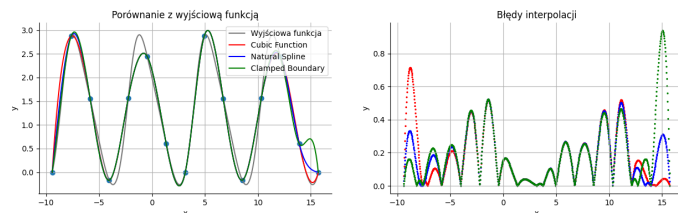
Podobnie jak w przypadku funkcji sklejanej 2. stopnia, przybliżenie interpolowanej funkcji, gdy korzystamy z 5 węzłów, nie jest dokładne. Widzimy także bardzo wyraźnie, że kształt krzywej jest silnie uzależniony od wykorzystanego warunku brzegowego. Na zamieszczonych niżej wykresach, widzimy, że w szczególności dla warunku brzegowego Clamped Boundary krzywa odbiega od pozostałych.



Rysunek 12: Wykres interpolacyjnej funkcji sklejanej 3. stopnia oraz błędów przybliżenia dla 5 węzłów

5.2.4 Dla 15 węzłów

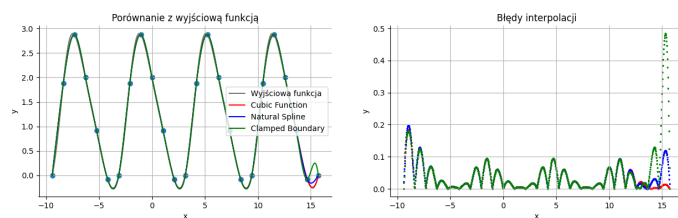
Wraz ze wzrostem liczby węzłów, przybliżenie interpolowanej funkcji (1) staje się coraz bardziej dokładne, co obrazują poniższe wykresy.



Rysunek 13: Wykres interpolacyjnej funkcji sklejanej 3. stopnia oraz błędów przybliżenia dla 15 węzłów

5.2.5 Dla 25 węzłów

Dla 25 węzłów można zauważyć pojawienie się niedokładności przybliżenia dla wartości z końca przedziału. Jest ona szczególnie dobrze widoczna w przypadku, gdy skorzystaliśmy z warunku brzegowego Clamped Boundary.

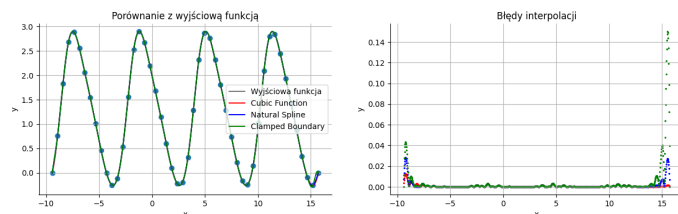


Rysunek 14: Wykres interpolacyjnej funkcji skleianej 3. stopnia oraz błędów przybliżenia dla 25 węzłów

5.2.6 Dla 50 węzłów

- Dla węzłów równoodległych

Dla 50 węzłów obserwujemy dalszy wzrost dokładności przybliżenia interpolowanej funkcji (maleje błąd). Jednocześnie widzimy, że dla warunków brzegowych Cubic Function oraz Natural Spline, otrzymujemy znacznie lepsze przybliżenie niż dla warunku Clamped Boundary, w przypadku którego widoczne jest dalsze nasilanie się niedokładności przy prawym krańcu przedziału.

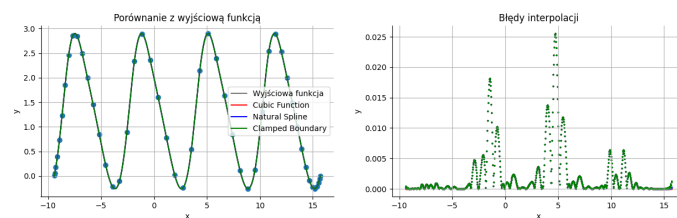


Rysunek 15: Wykres interpolacyjnej funkcji skleianej 3. stopnia oraz błędów przybliżenia dla 50 węzłów

- Dla węzłów rozmieszczonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa

Sprawdzimy, czy podobnie jak w przypadku interpolacji pojedynczym wielomianem, także w tym przypadku, użycie węzłów rozmieszczonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa, poskutkuje zwiększeniem dokładności przybliżenia.

Jak widzimy, skorzystanie z węzłów rozmieszczonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa, pozwala na zwiększenie dokładności przybliżenia. Wówczas dla każdego z warunków brzegowych otrzymujemy prawie identyczny błąd.

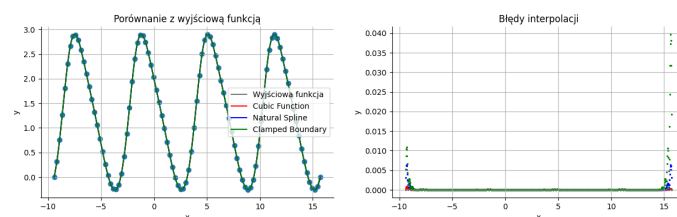


Rysunek 16: Wykres interpolacyjnej funkcji skleianej 3. stopnia oraz błędów przybliżenia dla 50 węzłów

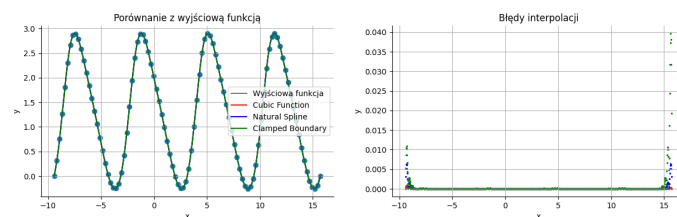
5.2.7 Dla 100 węzłów

- Dla węzłów równoodległych

W przypadku, gdy węzły są równoodległe, widzimy dalszy wzrost jakości przybliżenia, ale także, coraz bardziej nasilający się błąd dla wartości z końca przedziału.



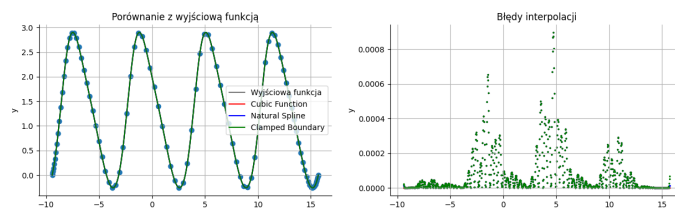
Rysunek 17: Wykres interpolacyjnej funkcji skleianej 3. stopnia oraz błędów przybliżenia dla 100 węzłów



Rysunek 18: Wykres interpolacyjnej funkcji skleianej 3. stopnia oraz błędów przybliżenia dla 100 węzłów (bez Clamped Boundary)

Skoro, w przypadku, gdy wykorzystujemy warunek brzegowy Clamped Boundary, obserwujemy spadek dokładności przybliżenia na krańcu przedziału, zobaczymy, jak wyglądają wykresy funkcji dla innych warunków brzegowych (z pominięciem wykresu dla warunku Clamped Boundary).

Jak widzimy na wykresie poniżej, problem z dokładnością przybliżenia pojawia się w szczególności dla warunku brzegowego Natural Spline, dla którego przybliżenie jest gorsze niż dla warunku Clamped Boundary.



Rysunek 19: Wykres interpolacyjnej funkcji sklejanej 3. stopnia oraz błędów przybliżenia dla 100 węzłów (bez Clamped Boundary)

6 Porównanie funkcji sklejanej 2. i 3. stopnia

6.1 Dla węzłów rozmieszczonych zgodnie z zerami wielomianu Czebyszewa

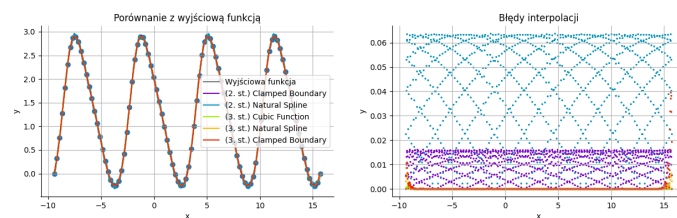
Podobnie jak wcześniej, w przypadku, gdy korzystamy z węzłów Czebyszewa, wzrasta dokładność przybliżenia funkcji przez interpolacyjną funkcję sklejaną 3. stopnia. W tym przypadku również znikają błędy dla węzłów z krańców przedziału.

Rysunek 20: Wykres interpolacyjnej funkcji sklejanej 3. stopnia oraz błędów przybliżenia dla 100 węzłów

6.2 Porównanie funkcji sklejanej 2. i 3. stopnia

6.2.1 Dla 20 węzłów

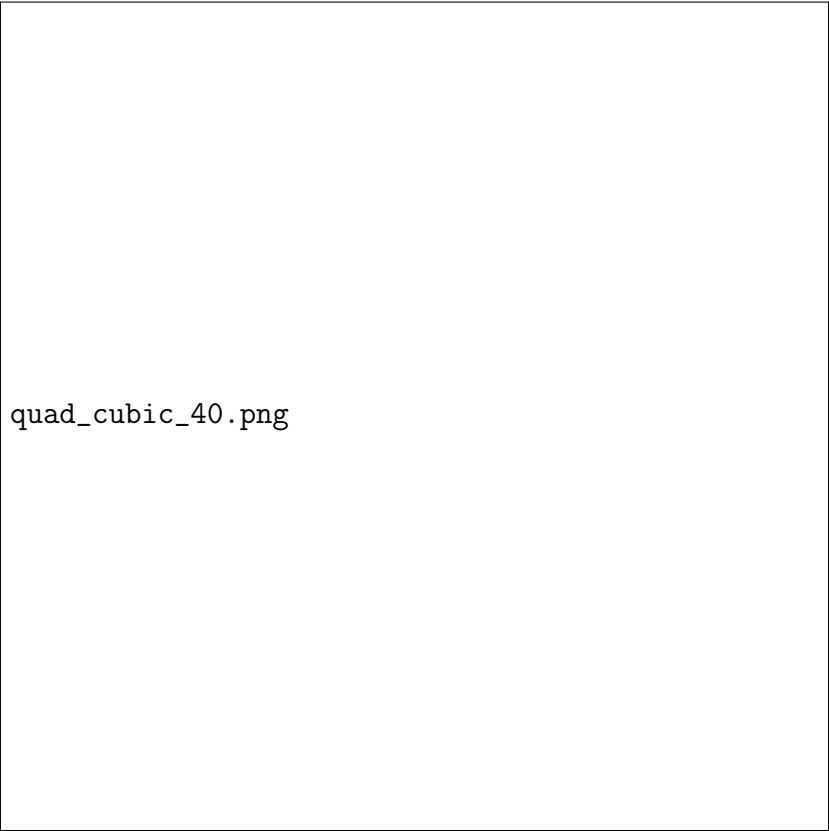
Na zamieszczonym niżej wykresie dokładnie widać, że jakość przybliżenia, w przypadku, gdy korzystamy z funkcji sklejanej 3. stopnia, jest dla każdego z zastosowanych warunków brzegowych lepsza niż jakość przybliżenia interpolowanej funkcji przez funkcję sklejaną 2. stopnia.



Rysunek 21: Wykres interpolacyjnej funkcji sklepanych 2. i 3. stopnia oraz błędów przybliżenia dla 20 węzłów

6.2.2 Dla 40 węzłów

Przybliżenie się poprawiło zarówno dla funkcji 2., jak i 3. stopnia. Wciąż jednak widać dużą różnicę w dokładności przybliżenia. Możemy zauważyć, że w obu przypadkach, najgorsze przybliżenie otrzymujemy dla warunku brzegowego Clamped Boundary. Nawet funkcja 2. stopnia dla warunku Natural Spline daje lepsze przybliżenie niż funkcja 3. stopnia, którą wyznaczyliśmy, korzystając z warunku brzegowego Clamped Boundary.

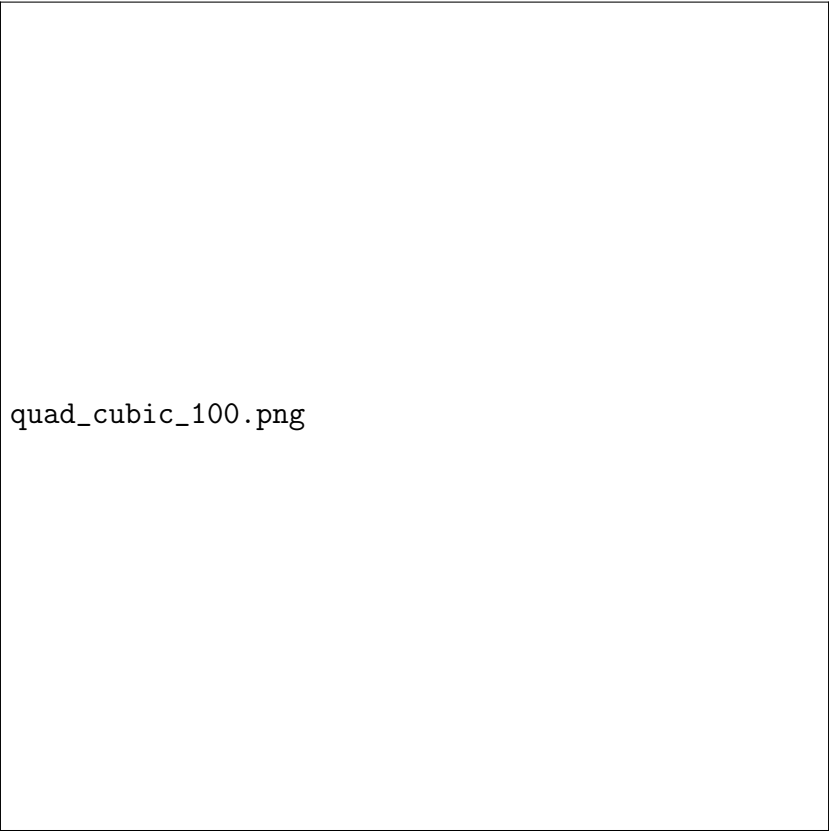


quad_cubic_40.png

Rysunek 22: Wykres interpolacyjnej funkcji sklepanych 2. i 3. stopnia oraz błędów przybliżenia dla 40 węzłów

6.2.3 Dla 100 węzłów

Dla 100 węzłów sytuacja jest analogiczna, jak w przypadku 40 węzłów. Ponownie, najgorsze przybliżenie uzyskujemy, korzystając z warunku Clamped Boundary. Widzimy również, że powiększa się różnica między dokładnością przybliżenia przez funkcję sklejaną 3. stopnia a dokładnością przybliżenia przez funkcję 2. stopnia.



quad_cubic_100.png

Rysunek 23: Wykres interpolacyjnej funkcji sklepanych 2. i 3. stopnia oraz błędów przybliżenia dla 100 węzłów

7 Zestawienie błędów przybliżeń funkcji

W zamieszczonej niżej tabeli, wszystkie wartości błędów są równe sumie kwadratów różnic między wartościami przyjmowanymi przez interpolowaną funkcję a wartościami interpolacyjnej funkcji sklepanej. Do wyznaczenia wartości błędów, wykorzystałem 1000 równoodległych na przedziale $[-3\pi, 5\pi]$ punktów. Funkcje interpolujące również były wyznaczane dla węzłów (punktów) równoodległych.

8 Wnioski

- Przeprowadzona analiza pozwoliła zauważyć różnicę między dokładnością przybliżenia interpolowanej funkcji przez interpolacyjną funkcję sklepaną 2. stopnia a dokładnością przybliżenia dla funkcji interpola-

cyjnej 3. stopnia. W większości sprawdzonych przypadków, funkcja 3. stopnia dawała znacznie lepsze przybliżenie niż funkcja 2. stopnia. Różnice stały się jeszcze bardziej widoczne przy zwiększaniu liczby węzłów.

- Mogliśmy również zauważyć, jak duży wpływ na kształt krzywej interpolacyjnej oraz na wartość błędów przybliżenia miał dobór warunków brzegowych.
- Dla niewielkiej liczby węzłów (kilka / kilkanaście), rozbieżności między różnymi warunkami brzegowymi nie są aż tak znaczące. Wówczas nie obserwujemy także trendu, który pozwalałby jednoznacznie wskazać warunek brzegowy, pozwalający na osiągnięcie najwyższej dokładności.
- Dla dużej liczby węzłów (powyżej 20) widzimy już, że zawsze zwiększenie liczby węzłów, prowadzi nas do osiągnięcia lepszego przybliżenia niż mieliśmy wcześniej. Wówczas da się także zauważyć coraz większą różnicę między dokładnością przybliżenia dla warunków brzegowych Natural Spline (dla funkcji 2. i 3. stopnia) oraz Cubic Function (dla funkcji 3. stopnia) a dokładnością przybliżenia dla warunku brzegowego Clamped Boundary (dla warunku Clamped Boundary otrzymujemy najgorsze przybliżenie).
- Duży błąd dla warunku Clamped Boundary może wynikać stąd, że już dla 25 węzłów obserwujemy pojawienie się zwiększonej niedokładności na krańcach przedziału, co powoduje, że mamy wartości znacznie odbiegające od wartości interpolowanej funkcji.