- sustitución hacia adelante

Partiendo de un sistema de la forma $Ax = b$ donde A es una matriz triangular inferior, se puede decir que los términos del vector x se escriben como

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = b_1 / A_{11}$$

$$X_2 = b_2 - A_{21} X_1 / l_{22}$$

$$X_3 = b_3 - A_{31} X_1 - A_{32} X_2 / A_{33}$$

Para generalizar esto a un sistema donde los vectores x y b tengan n términos. Y L sea una matriz $n \times n$, se puede concluir del sistema anterior que

(1) cada x_i es igual a cierto término dividido entre el término i de la diagonal de la matriz (término i,i)

(2) Cada x_i es igual a una fracción, donde el numerador es la resta entre el término b_i y otro término.

En un sistema $n \times n$, la fila i se vería de la forma

$$\begin{pmatrix} A_{i1} & \cdots & A_{ii} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b_i$$

Al hacer el producto punto entre la fila i y el vector x, el resultado a partir del término i,i serán ceros.

Por tanto, puedo escribir dicho producto punto como

$$A_{ii} X_i + \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} X_j = b_i$$

donde, despejando para X_i, se obtiene

$$X_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij} X_j}{A_{ii}}$$

Al contrastar este resultado con (1) y (2), es evidente que se llega a una expresión general para un sistema $n \times n$.

- Sustitución hacia atrás

Partiendo del razonamiento anterior, la fila i en un sistema $n \times n$ de la forma $Ax = b$, donde A es una matriz triangular superior, se vería como

$$\begin{pmatrix} 0 \dots & 0 & A_{i,i} & A_{i,i+1} & \dots & A_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b_i$$

Al hacer el producto punto entre la fila i y el vector x, el resultado desde el término $1,1$ hasta el término i,i serán ceros.

Por tanto, puedo expresar dicho producto punto como

$$A_{ii} x_i - \sum_{j=1+i}^{n} A_{ij} x_j = b_i$$

donde, al despejar para x_i, se obtiene

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1+i}^{n} A_{ij} x_j}{A_{ii}}$$