Nombre: Matías Alejandro Jara Vega FECHA: / /

Certamen 3 Cálculo Integral

P1. Álgebra de límites para sucesiones

Calcule los límites de las sucesiones $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas por

a) $S_n = \sqrt{n^2+n} - n$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}-n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$$

b) $S_n = \dfrac{n!}{n^n}$

b) Demuestre que la sucesión definido por

$$a_0 = 2 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3-a_n}$$

es decreciente y que $0 < a_n \leq 2$ para todo n. Deduzca que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y calcule su límite

• Demostrar que es decreciente

$a_n \geq a_{n+1}$ entonces $\{a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \cdot \cdots \geq a_n\}$

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = 2 \\ a_1 = \frac{1}{3-2} = 1 \\ a_2 = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 2 \geq 1 > \frac{1}{2} \geq \cdots \geq \frac{1}{3-a_n} \\ a_n \text{ es decreciente} \end{array}$$

• Demostrar que $0 < a_n \leq 2$

Si $a_n > 0$ entonces $a_{n+1} > 0$

$$0 < a_{n+1} \Rightarrow 0 < \frac{1}{3-a_n}$$

$\Rightarrow 0 < 1$

$a_n > 0$

P3. Series de Potencias. Determine el radio de convergencia de las siguientes series de potencias.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n n^5}$ $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

$= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)^5 \cdot 5^{(n+1)}} \cdot \frac{5^n \cdot n^5}{x^n} \right|$

$= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\cancel{x^n} \cdot x \cdot \cancel{5^n} \cdot n^5}{(n+1)^5 \cdot \cancel{5^n} \cdot 5 \cdot \cancel{x^n}} \right|$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{x \cdot n^5}{(n+1)^5 \cdot 5} = \left| \frac{x}{5} \right| < 1 \Rightarrow \frac{1}{5}|x| < 1 \Rightarrow R = 5$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{\sqrt[4]{n}}$

$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-2)^{n+1} \cdot x^{n+1}}{\sqrt[4]{n+1}} \cdot \frac{\sqrt[4]{n}}{(-2)^n \cdot x^n} \right|$

$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{-2^n \cdot -2 \cdot x^n \cdot x \cdot \sqrt[4]{n}}{\sqrt[4]{n+1} \cdot (-2)^n \cdot x^n} \right|$

$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[4]{n+1}} \cdot 2|x| < 1 \Rightarrow R = 1/2$

P4. Series de Maclaurin. Cálcule la serie de Maclaurin para f(x) (serie de Taylor centrada en 0) Determine también su radio de convergencia

a) $f(x) = xe^{x}$

$f(x) = xe^{x}$
$f^{1}(x) = e^{x} + xe^{x}$
$f^{2}(x) = 2e^{x} + xe^{x}$
$f^{3}(x) = 3e^{x} + xe^{x}$
$f^{4}(x) = 4e^{x} + xe^{x}$

$$e^{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!}$$

$f(0) = 0$
$f^{1}(0) = 1$
$f^{2}(0) = 2$
$f^{3}(0) = 3$
$f^{4}(0) = 4$

$$0 + x + \frac{2}{2!}x^{2} + \frac{3x}{3!} + \frac{4x^{4}}{4!}$$

$$x + x^{2} + \frac{1}{2}x^{3} + \frac{1}{6}x^{4}$$

$$x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$$

FECHA: / /

(b) $f(x) = \sinh x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$

$$f(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$f^{2}(x)^{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$f^{3}(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$f^{4}(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(0)}{n!} x^{n}$$

$$x + \frac{x}{3!} + \frac{x^{3}}{5!}$$

$f(0) = 0$
$f^{1}(0) = 1$
$f^{2}(0) = 0$
$f^{3}(0) = 1$

radio de convergencia

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \left| \frac{x^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}} \right|$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{2n+3}}{x^{2n+1}} \cdot \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{x^{2}}{(2n+3)(2n+2)}$$

$$= x^{2} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} = x^{2} \cdot 0 = 0$$

$$R = \infty$$

RHEIN®