P1) a) $\sqrt{n^2+n}-n = S_n$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n}-n = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt{1+\cancel{\frac{1}{n}}})+1} = \frac{1}{2}$$

b) $S_n = \dfrac{n!}{n^n}$

Si existe un N tal que para toda $n \geq N$, $a_n \neq 0$ y $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left| \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{n!}{n^n}} \right| = \left| \frac{(n+1)! \; n^n}{(n+1)^{(n+1)} \cdot n!} \right|$$

Como $\frac{(n+1)!}{n!} = n+1$ reemplazamos quedando

$$\left| \frac{n^n \cdot \cancel{(n+1)}}{(n+1)^{n+\cancel{1}}} \right| = \left| \frac{n^n}{(n+1)^n} \right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|n^n|}{|(n+1)^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

Aplicamos regla de limites quedando $e^{-1} = \frac{1}{e} = L$

Como $L < 1$ es convergente entonces $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{n^n}\right) = 0$ //

1

P2) a) $a_0 = 1$ $\qquad a_{n+1} = 3 - \frac{1}{a_n}$

$a_{0+1} = 3 - 1 = 2 = a_1$

$a_{1+1} = 3 - 1/2 = 5/2 = a_2$

Puesto que $5/2 > 2$ probamos que $a_2 > a_1$ y para probar que $a_{n+1} > a_n$ reemplazemos a_{n+1}:

$$3 - \frac{1}{a_n} > a_n \Rightarrow \frac{3a_n - 1 - a_n^2}{a_n} > 0 \Rightarrow \frac{a_n^2 - 3a_n + 1}{a_n} < 0$$

$$a_n = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{\left(a_n - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(a_n - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{a_n} < 0$$

a_n	$-\infty$	0		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	∞
$a_n - \frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$a_n - \frac{3-\sqrt{5}}{2}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
a_n	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$

Entonces $a_n < 0$ o $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < a_n < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

notar que $a_n < 0$ se descarta que $a_1 < 0 \Rightarrow 2 < 0$ lo cual es falso

P2) a) Entonces que $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < a_n < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ es equivalente al probar que (a_n) es creciente

i) Para $n=1$ $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,38 < 2 < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2,6$ lo que satisface la ecuación

ii) Para $\forall n \in \mathbb{N}$: supongamos que $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < a_n < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (H.I.)

iii) Debemos probar que $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < a_{n+1} < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ reemplazando a_{n+1} y separando la condición, se tiene:

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} < 3 - \frac{1}{a_n} \quad \wedge \quad 3 - \frac{1}{a_n} < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$0 < 3 - \frac{1}{a_n} - \frac{3\sqrt{5}}{2} \qquad\qquad 3 - \frac{1}{a_n} - \frac{3+\sqrt{5}}{2} < 0$$

$$0 < \frac{3a_n + \sqrt{5}a_n - 2}{a_n} \qquad\qquad \frac{3a_n - \sqrt{5}a_n - 2}{a_n} < 0$$

		0		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	
$3a_n + \sqrt{5}a_n - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
a_n	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{3a_n + \sqrt{5}a_n - 2}{a_n}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

entonces
$a < 0$ o $a > \frac{5\sqrt{5}}{2}$

		0		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	
$3a_n - \sqrt{5}a_n - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
a_n	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{3a_n - \sqrt{5}a_n - 2}{a_n}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

entonces
$0 < a < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Al combinar los intervalos se tiene que $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < a < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, lo que es igual a la hipótesis de inducción (ii) demostrando que $a_{n+1} > a_n$, para $\forall n \in \mathbb{N}$

③

P2) a) • Como $a_{n+1} > a_n$, (a_n) es creciente, para $\forall n \in \mathbb{N}$
• Notar que $\forall a_n < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ y como

$\frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2{,}6 < 3$ podemos afirmar que

$\forall a_n < 3$, y que (a_n) es acotada superiormente por $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

• Al ser creciente y acotada superiormente (a_n) es convergente por el criterio de convergencia para sucesiones monotonas y acotadas.

• Sea $a = \lim_{n \to \infty} a_n$, tomando el limite en la formula de a_{n+1}

$$a_n = \frac{3-1}{a} \to 0 = \frac{a^2 - 3a - 1}{a} \Rightarrow 0 = a^2 - 3a + 1$$

$$a = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

• Como sabemos que el 1er termino con $n \in \mathbb{N}$ es $a_1 = 2$, $a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ se descarta

Por lo tanto $a = \lim_{n \to \infty} a_n = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2{,}6$

(1)

P2) b) $a_0 = 2 \qquad a_{n+1} = \dfrac{1}{3-a_n}$

$a_{0+1} = \dfrac{1}{3-2} = 1 = a_1 \qquad a_{1+1} = \dfrac{1}{3-1} = \dfrac{1}{2} = a_2 \qquad a_3 = \dfrac{2}{5}$

Así probamos que $a_1 > a_2$

Para probar que $a_n > a_{n+1}$, se reemplaza a_{n+1} y se tiene: $a_n > \dfrac{1}{3-a_n}$ $\qquad a_n = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$0 > \dfrac{a_n^2 - 3a_n + 1}{3-a_n}$

$0 > \dfrac{\left(a_n - \frac{3+\sqrt5}{2}\right)\left(a_n - \frac{3-\sqrt5}{2}\right)}{3-a_n}$

		$\frac{3-\sqrt5}{2}$		$\frac{3+\sqrt5}{2}$		3	a_n
$a_n - \frac{3+\sqrt5}{2}$	−		−	0	+		+
$a_n - \frac{3-\sqrt5}{2}$	−	0	+		+		+
$3-x$	+		+		+	0	−
	+	0	−	0	+	∅	−

Entonces $\dfrac{3-\sqrt5}{2} < a_n < \dfrac{3+\sqrt5}{2}$ pdo la 2^{da} condición no se toma en cuenta ya que no es correcta, por ej: $a_1 > 3$; $1 > 3$

Por lo tanto probar que (a_n) es decreciente es equivalente a probar que $\dfrac{3-\sqrt5}{2} < a_n < \dfrac{3+\sqrt5}{2}$

i) Para $n=1$; $\dfrac{3-\sqrt5}{2} \simeq 0,38 < 1 < \dfrac{3+\sqrt5}{2} \simeq 2,6$

lo que satisface la ecuación.

(2)

P2) b) ii) Supongamos que $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < a_n < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

iii) Probaremos que $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < a_n < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

reemplazamos a_{n+1}

$\frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{3-a_n} < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{3-a_n} \wedge \frac{3+\sqrt{5}}{2} > \frac{1}{3-a_n}$

$0 < \frac{1}{3-a_n} - \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$0 < \frac{2-9+3a_n+3\sqrt{5}-\sqrt{5}a_n}{2(3-a_n)}$

$0 < \frac{3a_n-\sqrt{5}a_n+3\sqrt{5}-7}{(3-a_n)}$

$\frac{3a_n-\sqrt{5}a_n+3\sqrt{5}-7}{3-a_n}$ | $-\ 0\ +\ +\ +$ / $+\ +\ +\ 0\ -$ / $-\ 0\ +\ \boxed{\ }\ -$ ($\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, 3)

Entonces $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < a < 3$

$\frac{1}{3} - \frac{3+\sqrt{5}}{2} < 0$

$\frac{3a_n+\sqrt{5}a_n-7-3\sqrt{5}}{2(3-3a_n)} < 0$

$\frac{3a_n+\sqrt{5}a_n-7-3\sqrt{5}}{(3-a_n)} < 0$

$\frac{3a_n+\sqrt{5}a_n-7-3\sqrt{5}}{3}$ | $-\ 0\ +\ +\ +$ / $+\ +\ +\ 0\ -$ / $-\ 0\ +\ \boxed{\ }\ -$ ($\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, 3)

Entonces $a_n < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ o $a > 3$

Al combinar los intervalos se tiene $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < a_n < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, lo que es igual a la hipotesis de induccion (ii), demostrando que $a_n > a_{n+1}$, con $n \in \mathbb{N}$

- Como demostramos que $a_n > a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ sabemos que (a_n) es decreciente

(3)

P2) b) • Notar que como $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < a_n \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

y $0 < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$; (Ademas de ser decreciente y su 1er termino es $a_1 = 1$ (siendo su termino con valor max) Sabemos que $a_n \leq 2$

y podemos afirmar que $0 < a_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Notar que (a_n) es acotada inferiormente por $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, esto y el hecho que sea decreciente nos permite afirmar que es convergente, basandonos en el criterio de convergencia para sucesiones monotonas y acotadas

Sea $a = \lim_{n \to \infty} a_n$ Tomando limite en la formula de a_{n+1}

$a = \frac{1}{3-a} \Rightarrow \frac{3a - a^2 - 1}{3-a} = 0 \Rightarrow a^2 - 3a + 1 = 0$

$a = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

Notar que $\forall n \in \mathbb{N}$, a_1 es el termino mayor siendo $a_1 = 1$, $a = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2,6$

este ultimo valor se descarta debido a que $a < a$ y a que (a_n) decrece,

Por ende $a = \lim_{n \to \infty} a_n = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \simeq 0,38$

P3) a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n n^5}$

$a_n = \frac{x^n}{5^n \cdot n^5}$ $\quad a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)^5}$

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}} \frac{5^n \cdot n^5}{(n+1)^5 \cancel{x^n}}\right| = \left|\frac{x \cdot n^5}{5 \cdot (n+1)^5}\right| = \frac{|x| n^5}{5 \cdot (n+1)^5}$

$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n \to \infty} \frac{n^5}{5(n+1)^5} |x| = |x| \lim_{n \to \infty} \frac{n^5 \cdot 1/n^5}{5(n+1)^5 \cdot 1/n^5} =$

$|x| \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1}{5} =$

$|x| \frac{1}{5} < 1$ para que sea convergente

$|x| < 5$ $\quad \boxed{R = 5}$

$-5 < x < 5$

$x \in]-5, 5[$ centro $x = 0$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{\sqrt[4]{n}}$

$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{\cancel{(-2)}^{n+1} \cancel{x}^{n+1} \cdot \sqrt[4]{n}}{\cancel{(-2)}^n \cdot x^n \cdot \sqrt[4]{n+1}}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\frac{-2x\sqrt[4]{n}}{\sqrt[4]{n+1}}\right|$

$\lim_{n \to \infty} \frac{2n^{1/4} \cdot |x|}{(n+1)^{1/4}} \cdot \frac{1/(n)^{1/4}}{1/(n)^{1/4}} = |x| \cdot 2$

$2|x| < 1$

$|x| < 1/2 \Rightarrow \boxed{R = 1/2}$

$x \in]-1/2, 1/2[\Rightarrow$ centro $x = 0$

P4) a) $f(x) = x\,e^x$

Serie de Maclaurin: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

$f(x) = e^x \qquad f(0) = 1$

$f'(x) = e^x \qquad f'(0) = 1$

$$e^x = \frac{1 \cdot x^0}{0!} + \frac{1 \cdot x^1}{1!} + \frac{1 \cdot x^2}{2!} + \ldots$$

$$e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Como $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ derivando esto queda:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, x^n}{x \cdot n!}$$

$$e^x = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{n!} \Rightarrow \boxed{x e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{n!}}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)\, x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n \cdot x^n}{n!}} \right|$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)\, x^{n+1} \cdot n!}{(n+1)!\; n \cdot x^n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\cancel{(n+1)} \cdot x \cdot \cancel{n!}}{\cancel{(n+1)}\, \cancel{n!} \cdot n} \right|$$

$$|x| \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Como $0 < 1$ entonces converge

$\boxed{R = \infty}$

puesto que el intervalo de convergencia son todos los reales

P4) b) $f(x) = \sin h\,x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$

$$f(x) = \operatorname{senh} x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0} \frac{(-x)^n}{n!}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2x + 2\frac{x^3}{3!} + 2\frac{x^5}{5!} + 2\frac{x^7}{7!} + 2\frac{x^9}{9!} \dots\right]$$

$$= x + \frac{x^3}{3!} + x^5 + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$f(x) = \operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{2(n+1)+1}}{(2(n+1))!+1}}{\frac{x^{2+1}}{(2n+1)!}} \right|$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \cdot \frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^2 \cdot (2n+1)!}{(2n+3)!} \right|$$

$$x^2 \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} \right| = x^2 \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n+1)!}{(2n+3)(2n+2)(2n+1)!} \right|$$

$$x^2 \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1}{(2n+3)(2n+2)} \right| = x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^2 + 4n + 6n + 6}$$

$$x^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n^2 + 10n + 6} = 0$$ Como $\alpha < 1$ entonces converge

$\boxed{R = \infty}$ puesto que el intervalo de convergencia son todos los reales

B) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ satisface $f'(x) = -2x f(x)$, $f(0) = 1$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x)^{n-1} = -2x f(x)$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x)^{n-1} = -2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = -2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)$$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} -2 a_n x^{n+1}$$

$$f(0)' = -2x \cdot 1$$
$$f(0)' = -2 \cdot 0 \cdot f(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Escribiendo los primeros terminos

$$a_1 + (2a_2 + 2a_0) x + (3a_3 + (2a_1)) x^2 + \ldots = 0$$

Para que la serie de potencia del 1er termino de la ecuacion sea 0, se debe verificar que todos los coeficientes sean 0:

$$a_1 = 0 \;;\; 3a_3 + 2a_1 = 0 \;;\; 2a_2 + 2a_0 = 0 \ldots$$

Resolviendo lo anterior resulta

$$a_1 = 0 \;;\; a_2 = -a_0 \;;\; a_3 = \frac{-2}{3} a_1 = 0$$

∴ La serie de potencia adopta la forma

$$f(x) = a_0 - a_0 x^2 + \frac{1}{2} a_0 x^4 + \ldots$$

Tenemos $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} 2 a_{k-1} x^k = 0$

Como la 1^{era} serie empiezo $k=0$ y la 2da en $k=1$ separamos el 1^{ero}:

$$a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(k+1)a_{k+1} + 2a_{k-1}\right] x^k = 0$$

Haciendo todos los coef $= 0$ tenemos una relacion de recurrencia:

$$a_1 = 0$$

$$a_{k+1} = \frac{2}{k+1} a_{k-1}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$$

Se puede comprobar que esta serie tiene radio de convergencia $R = \infty$. Además esta serie recuerda el desarrollo de la f(x) exponencial verificandose que $f(x) = a_0 e^{-x^2}$