II zestaw zadań - Algorytmy macierzowe

Kacper Kozubowski, Mateusz Podmokły
III rok Informatyka WI

16 październik 2024

1 Treść zadania

Należy wygenerować macierze losowe o wartościach z przedziału otwartego $(10^{-8}, 1.0)$ i zaimplementować

1. Rekurencyjne odwracanie macierzy
2. Rekurencyjna eliminacja Gaussa
3. Rekurencyjna LU faktoryzacja
4. Rekurencyjne liczenie wyznacznika

Proszę zliczać liczbę operacji zmienno-przecinkowych wykonywanych podczas mnożenia macierzy.

2 Specyfikacja użytego środowiska

Specyfikacja:

- Środowisko: Jupyter Notebook,
- Język programowania: Python,
- System operacyjny: Microsoft Windows 11,
- Architektura systemu: x64.

3 Działanie algorytmów

3.1 Wykorzystane biblioteki

W realizacji rozwiązania wykorzystane zostały następujące biblioteki:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import time
from scipy.optimize import curve_fit
```

3.2 Pseudokod

Algorithm 1 Rekurencyjne odwracanie macierzy

```
Input: A
Output: A_inv
function RECURSIVE_INVERSE(A)
    n = size(A)
    if n = 1 then
        return 1 / A[0, 0]
    end if

    A11 = A[1:n/2, 1:n/2] // Górny lewy blok
    A12 = A[1:n/2, n/2+1:n] // Górny prawy blok
    A21 = A[n/2+1:n, 1:n/2] // Dolny lewy blok
    A22 = A[n/2+1:n, n/2+1:n] // Dolny prawy blok

    A11_inv = recursive_inverse(A11)
    S = A22 - A21 * A11_inv * A12
    S_inv = recursive_inverse(S)

    B11 = A11_inv + A11_inv * A12 * S_inv * A21 * A11_inv
    B12 = -A11_inv * A12 * S_inv
    B21 = -S_inv * A21 * A11_inv
    B22 = S_inv

    A_inv[1:n/2, 1:n/2] = B1
    A_inv[1:n/2, n/2+1:n] = B2
    A_inv[n/2+1:n, 1:n/2] = B3
    A_inv[n/2+1:n, n/2+1:n] = B4
    return A_inv
end function
```

Algorithm 2 Rekurencyjna LU faktoryzacja

```
Input: A
Output: L, U
function LU_RECURSIVE(A)
    n = size(A)
    if n = 1 then
        return 1, A[0, 0]
    end if

    A11 = A[1:n/2, 1:n/2] // Lewy górny blok
    A12 = A[1:n/2, n/2+1:n] // Prawy górny blok
    A21 = A[n/2+1:n, 1:n/2] // Lewy dolny blok
    A22 = A[n/2+1:n, n/2+1:n] // Prawy dolny blok

    L11, U11 = lu_recursive(A11)
    U11_inv = recursive_inverse(U11)
    L11_inv = recursive_inverse(L11)

    L21 = A21 * U11_inv
    U12 = L11_inv * A12
    S = A22 - L21 * U12
    Ls, Us = lu_recursive(S)

    L[1:n/2, 1:n/2] = L11 // Lewy górny blok
    L[1:n/2, n/2+1:n] = 0 // Prawy górny blok
    L[n/2+1:n, 1:n/2] = L21 // Lewy dolny blok
    L[n/2+1:n, n/2+1:n] = Ls // Prawy dolny blok

    U[1:n/2, 1:n/2] = U11
    U[1:n/2, n/2+1:n] = U12
    U[n/2+1:n, 1:n/2] = 0
    U[n/2+1:n, n/2+1:n] = Us
    return L, U
end function
```

Algorithm 3 Rekurencyjne obliczanie wyznacznika macierzy

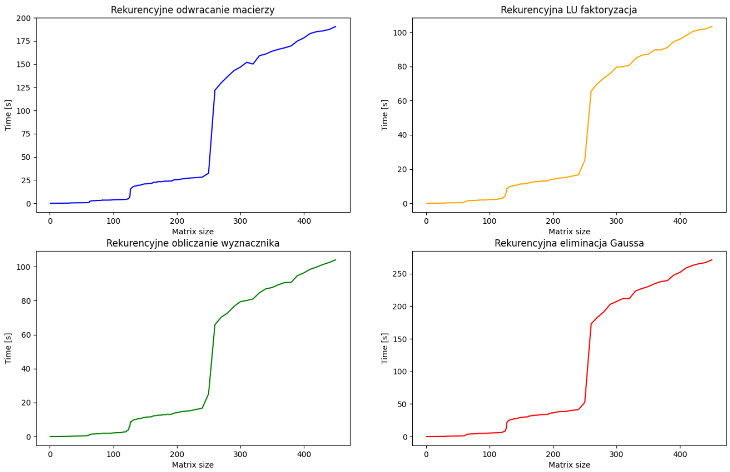
```
Input: A
Output: det
function RECURSIVE_DETERMINANT(A)
    L, U = lu_recursive(A)
    n = size(L)
    m = size(U)
    diagL = array(n)
    diagU = array(m)

    for i from 0 to n - 1 do
        diagL[i] = L[i, i]
    end for
    for i from 0 to m - 1 do
        diagU[i] = U[i, i]
    end for

    det = 1
    for i from 0 to n - 1 do
        det = det * diagL[i]
    end for
    for i from 0 to m - 1 do
        det = det * diagU[i]
    end for
    return det
end function
```

Algorithm 4 Rekurencyjna eliminacja Gaussa

```
Input: A, b
Output: x
function RECURSIVE_GAUSSIAN_ELIMINATION(A, b)
    n = size(A)
    if n = 1 then
        return b[0] / A[0, 0]
    end if

    A11 = A[1:n/2, 1:n/2] // Lewy górny blok
    A12 = A[1:n/2, n/2+1:n] // Prawy górny blok
    A21 = A[n/2+1:n, 1:n/2] // Lewy dolny blok
    A22 = A[n/2+1:n, n/2+1:n] // Prawy dolny blok
    b1 = b[1:n/2]
    b2 = b[n/2+1:n]

    L11, U11 = lu_recursive(A11)
    L11_inv = recursive_inverse(L11)
    U11_inv = recursive_inverse(U11)
    S = A22 - A21 * U11_inv * L11_inv * A12
    Ls, Us = lu_recursive(S)
    Ls_inv = recursiv_inverse(Ls)
    Us_inv = recursive_inverse(Us)

    RHS1 = L1_inv * b1
    RHS2 = Ls_inv * b2 - Ls_inv * A21 * U11_inv * RHS1
    x2 = Us_inv * RHS2
    x1 = U11_inv * RHS1 - U11_inv * L11_inv * A12 * x2

    x[1:size(x1)] = x1 // Lewa połowa
    x[size(x1) + 1:size(x1) + size(x2)] = x2 // Prawa połowa
    return x
end function
```

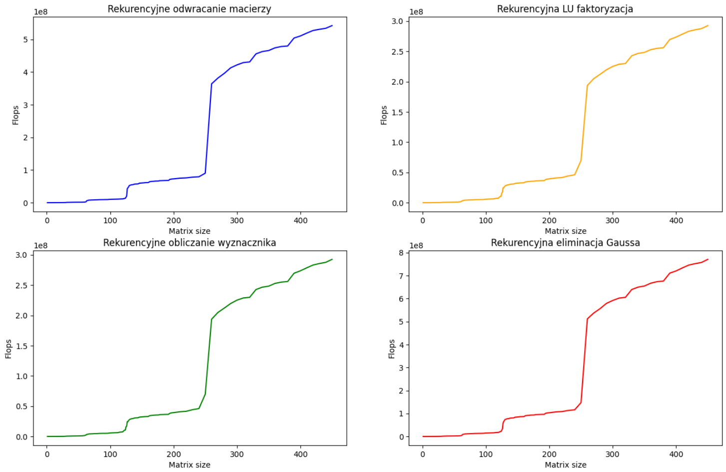
4 Porównanie działania algorytmów

4.1 Czas działania



Rysunek 1: Porównanie czasu działania każdego algorytmu.

4.2 Liczba operacji zmienno-przecinkowych



Rysunek 2: Porównanie liczby operacji zmienno-przecinkowych każdego algorytmu.

5 Oszacowanie złożoności obliczeniowej

W przypadku każdego algorytmu zmierzony został czas obliczeń dla

$$n \in [8, 100]$$

dla 40 równoodległych od siebie wartości oraz dopasowana krzywa złożoności obliczeniowej metodą `curve_fit` z pakietu `scipy.optimize`.

5.1 Rekurencyjne odwracanie macierzy

Dopasowana krzywa:

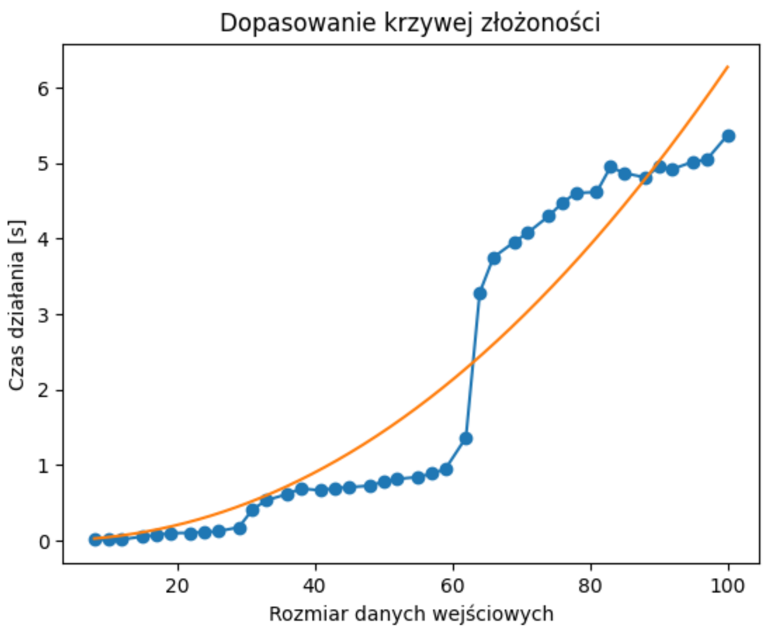
$$y = 3.7 \cdot 10^{-4} \cdot x^{2.12}$$

Zatem oszacowana złożoność obliczeniowa wynosi:

$$O(n) = n^{2.12}$$

a teoretyczna złożoność:

$$O(n) = n^{2.81}$$



Rysunek 3: Krzywa złożoności dla rekurencyjnego odwracania macierzy.

5.2 Rekurencyjna LU faktoryzacja

Dopasowana krzywa:

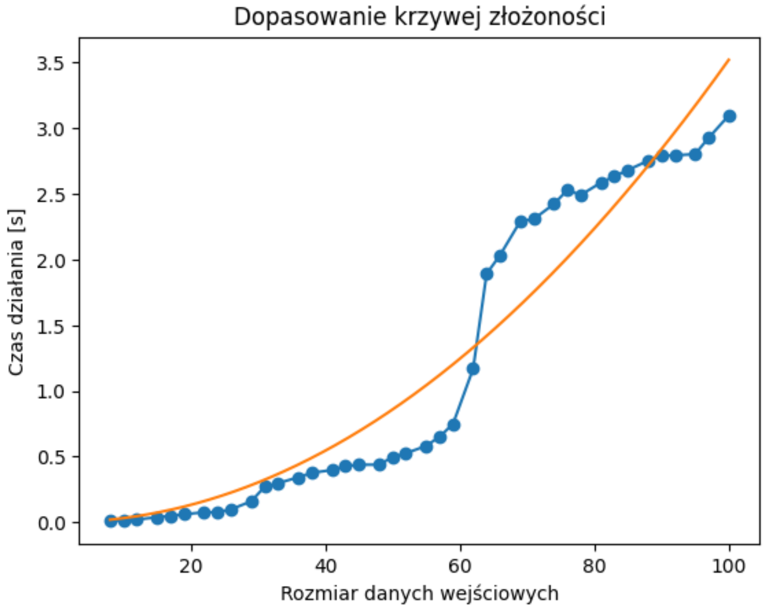
$$y = 3 \cdot 10^{-4} \cdot x^{2.04}$$

Zatem oszacowana złożoność obliczeniowa wynosi:

$$O(n) = n^{2.04}$$

a teoretyczna złożoność:

$$O(n) = n^3$$



Rysunek 4: Krzywa złożoności dla rekurencyjnej LU faktoryzacji.

5.3 Rekurencyjne liczenie wyznacznika

Dopasowana krzywa:

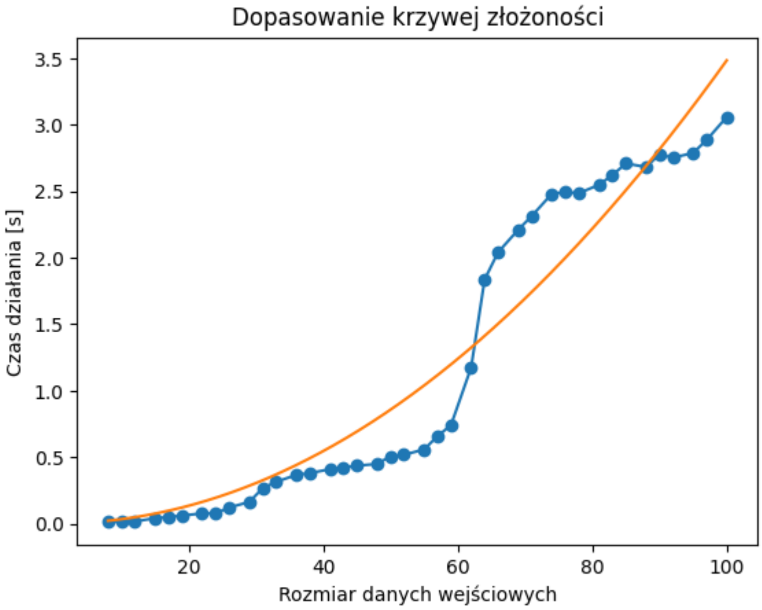
$$y = 3.1 \cdot 10^{-4} \cdot x^{2.02}$$

Zatem oszacowana złożoność obliczeniowa wynosi:

$$O(n) = n^{2.02}$$

a teoretyczna złożoność:

$$O(n) = n^3$$



Rysunek 5: Krzywa złożoności dla rekurencyjnego liczenia wyznacznika macierzy.

5.4 Rekurencyjna eliminacja Gaussa

Dopasowana krzywa:

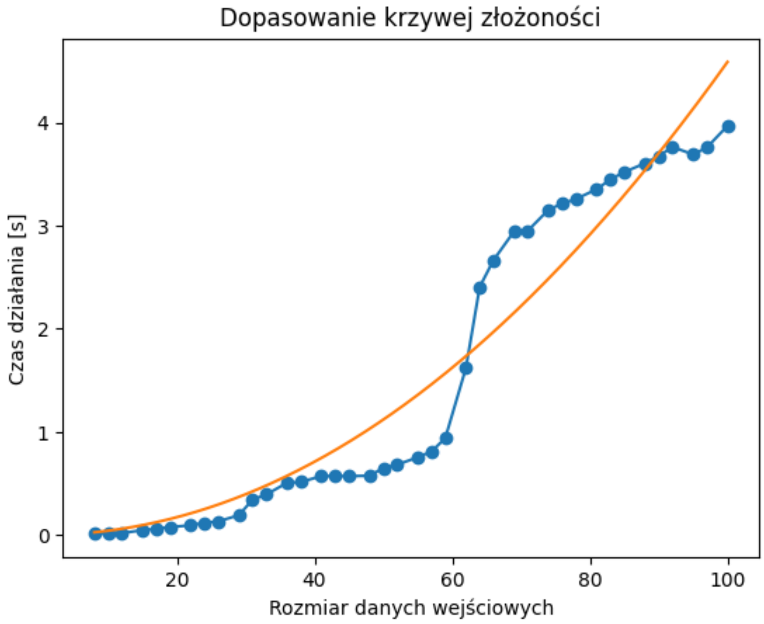
$$y = 3.9 \cdot 10^{-4} \cdot x^{2.03}$$

Zatem oszacowana złożoność obliczeniowa wynosi:

$$O(n) = n^{2.03}$$

a teoretyczna złożoność:

$$O(n) = n^3$$



Rysunek 6: Krzywa złożoności dla rekurencyjnej eliminacji Gaussa.

5.5 Podsumowanie

Oszacowane złożoności obliczeniowej prezentowanych algorytmów odbiegają od złożoności teoretycznych. Może być to spowodowane niewystarczająco stabilną platformą testową, zbyt młym rozmiarem danych wejściowych lub szeregiem usprawnień oferowanych przez biblioteki Pythona.

6 Porównanie obliczeń z biblioteką NumPy

Na wejściu mamy macierz A i wektor b z następującymi wartościami:

```
A =
[[0.37792419 0.07962609 0.98281711 0.18161286]
 [0.8118587  0.87496165 0.68841326 0.56949442]
 [0.16097145 0.46688003 0.34517206 0.22503997]
 [0.59251187 0.31226984 0.91630555 0.90963553]]
b = [0.25711829 0.1108913  0.19296273 0.49958417]
```

Rysunek 7: Wartości macierzy A i wektora b.

6.1 Rekurencyjne odwracanie macierzy

Wynik zaimplementowanego algorytmu:

```
Recursive matrix inverse:
[[ 0.25937966  2.24335044 -3.92362951 -0.48558875]
 [-0.36655885  0.13950977  2.33953436 -0.59294844]
 [ 1.1739274  -0.73117143  1.22300866 -0.07918347]
 [-1.22565182 -0.77261717  0.52062765  1.69895878]]
```

Rysunek 8: Wynik algorytmu.

Wynik uzyskany za pomocą biblioteki `NumPy`:

```
NumPy matrix inverse:
[[ 0.25937966  2.24335044 -3.92362951 -0.48558875]
 [-0.36655885  0.13950977  2.33953436 -0.59294844]
 [ 1.1739274  -0.73117143  1.22300866 -0.07918347]
 [-1.22565182 -0.77261717  0.52062765  1.69895878]]
```

Rysunek 9: Wynik `NumPy`.

6.2 Rekurencyjna LU faktoryzacja

Wynik zaimplementowanego algorytmu:

```
Recursive L:
[[ 1.          0.          0.          0.        ]
 [ 2.1482052   1.          0.          0.        ]
 [ 0.42593581  0.61508625  1.          0.        ]
 [ 1.56780618  0.26627265 -0.30643925  1.        ]]
Recursive U:
[[ 0.37792419  0.07962609  0.98281711  0.18161286]
 [ 0.          0.70390847 -1.42287958  0.17935273]
 [ 0.          0.          0.80174872  0.03736715]
 [ 0.          0.          0.          0.5885958 ]]
```

Rysunek 10: Wynik algorytmu.

Wbudowane biblioteki Pythona przy dekompozycji LU korzystają z zamiany wierszy przez co wyniki mogą się różnić. Dlatego w celu weryfikacji poprawności algorytmu pomnożymy macierze L i U, co w wyniku powinno dać macierz wejściową A. Wynik uzyskany z pomnożenia macierzy L i U:

```
L * U:
[[0.37792419 0.07962609 0.98281711 0.18161286]
 [0.8118587  0.87496165 0.68841326 0.56949442]
 [0.16097145 0.46688003 0.34517206 0.22503997]
 [0.59251187 0.31226984 0.91630555 0.90963553]]
```

Rysunek 11: Wynik mnożenia.

6.3 Rekurencyjne liczenie wyznacznika

Wynik zaimplementowanego algorytmu:

```
Recursive determinant:
0.12553831950684474
```

Rysunek 12: Wynik algorytmu.

Wynik uzyskany za pomocą biblioteki `NumPy`:

```
NumPy determinant:
0.12553831950684471
```

Rysunek 13: Wynik `NumPy`.

6.4 Rekurencyjna eliminacja Gaussa

Wynik zaimplementowanego algorytmu:

```
Recursive Gaussian elimination:
[-0.68424742  0.07643672  0.41719395  0.54842062]
```

Rysunek 14: Wynik algorytmu.

Wynik uzyskany za pomocą biblioteki `NumPy`:

```
NumPy Gaussian elimination:
[-0.68424742  0.07643672  0.41719395  0.54842062]
```

Rysunek 15: Wynik `NumPy`.

6.5 Podsumowanie

Wyniki uzyskane za pomocą zaimplementowanych algorytmów są prawie identyczne z wynikami uzyskanymi za pomocą biblioteki `NumPy` w Pythonie z dokładnością do bardzo błędu numerycznego. Można wnioskować, że przedstawione algorytmy działają poprawnie.