II zestaw zadań - Algorytmy macierzowe

Kacper Kozubowski, Mateusz Podmokły
III rok Informatyka WI

16 październik 2024

1 Treść zadania

Należy wygenerować macierze losowe o wartościach z przedziału otwartego $(10^{-8}, 1.0)$ i zaimplementować

1. Rekurencyjne odwracanie macierzy
2. Rekurencyjna eliminacja Gaussa
3. Rekurencyjna LU faktoryzacja
4. Rekurencyjne liczenie wyznacznika

Proszę zliczać liczbę operacji zmienno-przecinkowych wykonywanych podczas mnożenia macierzy.

2 Specyfikacja użytego środowiska

Specyfikacja:

- Środowisko: Jupyter Notebook,
- Język programowania: Python,
- System operacyjny: Microsoft Windows 11,
- Architektura systemu: x64.

3 Działanie algorytmów

3.1 Wykorzystane biblioteki

W realizacji rozwiązania wykorzystane zostały następujące biblioteki:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import time
```

3.2 Pseudokod

Algorithm 1 Rekurencyjne odwracanie macierzy

Input: A
Output: A_inv
function RECURSIVE_INVERSE(A)
    n = size(A)
    if n = 1 **then**
        return 1 / A[0, 0]
    end if

    A11 = A[1:n/2, 1:n/2] // Górny lewy blok
    A12 = A[1:n/2, n/2+1:n] // Górny prawy blok
    A21 = A[n/2+1:n, 1:n/2] // Dolny lewy blok
    A22 = A[n/2+1:n, n/2+1:n] // Dolny prawy blok

    A11_inv = recursive_inverse(A11)
    S = A22 - A21 * A11_inv * A12
    S_inv = recursive_inverse(S)

    B11 = A11_inv + A11_inv * A12 * S_inv * A21 * A11_inv
    B12 = -A11_inv * A12 * S_inv
    B21 = -S_inv * A21 * A11_inv
    B22 = S_inv

    A_inv[1:n/2, 1:n/2] = B1
    A_inv[1:n/2, n/2+1:n] = B2
    A_inv[n/2+1:n, 1:n/2] = B3
    A_inv[n/2+1:n, n/2+1:n] = B4
    return A_inv
end function

Algorithm 2 Rekurencyjna LU faktoryzacja

```
Input: A
Output: L, U
function LU_RECURSIVE(A)
    n = size(A)
    if n = 1 then
        return 1, A[0, 0]
    end if

    A11 = A[1:n/2, 1:n/2] // Lewy górny blok
    A12 = A[1:n/2, n/2+1:n] // Prawy górny blok
    A21 = A[n/2+1:n, 1:n/2] // Lewy dolny blok
    A22 = A[n/2+1:n, n/2+1:n] // Prawy dolny blok

    L11, U11 = lu_recursive(A11)
    U11_inv = recursive_inverse(U11)
    L11_inv = recursive_inverse(L11)

    L21 = A21 * U11_inv
    U12 = L11_inv * A12
    S = A22 - L21 * U12
    Ls, Us = lu_recursive(S)

    L[1:n/2, 1:n/2] = L11 // Lewy górny blok
    L[1:n/2, n/2+1:n] = 0 // Prawy górny blok
    L[n/2+1:n, 1:n/2] = L21 // Lewy dolny blok
    L[n/2+1:n, n/2+1:n] = Ls // Prawy dolny blok

    U[1:n/2, 1:n/2] = U11
    U[1:n/2, n/2+1:n] = U12
    U[n/2+1:n, 1:n/2] = 0
    U[n/2+1:n, n/2+1:n] = Us
    return L, U
end function
```

Algorithm 3 Rekurencyjne obliczanie wyznacznika macierzy

```
Input: A
Output: det
function RECURSIVE_DETERMINANT(A)
    L, U = lu_recursive(A)
    n = size(L)
    m = size(U)
    diagL = array(n)
    diagU = array(m)

    for i from 0 to n - 1 do
        diagL[i] = L[i, i]
    end for
    for i from 0 to m - 1 do
        diagU[i] = U[i, i]
    end for

    det = 1
    for i from 0 to n - 1 do
        det = det * diagL[i]
    end for
    for i from 0 to m - 1 do
        det = det * diagU[i]
    end for
    return det
end function
```

Algorithm 4 Rekurencyjna eliminacja Gaussa

```
Input: A, b
Output: x
function RECURSIVE_GAUSSIAN_ELIMINATION(A, b)
    n = size(A)
    if n = 1 then
        return b[0] / A[0, 0]
    end if

    A11 = A[1:n/2, 1:n/2] // Lewy górny blok
    A12 = A[1:n/2, n/2+1:n] // Prawy górny blok
    A21 = A[n/2+1:n, 1:n/2] // Lewy dolny blok
    A22 = A[n/2+1:n, n/2+1:n] // Prawy dolny blok
    b1 = b[1:n/2]
    b2 = b[n/2+1:n]

    L11, U11 = lu_recursive(A11)
    L11_inv = recursive_inverse(L11)
    U11_inv = recursive_inverse(U11)
    S = A22 - A21 * U11_inv * L11_inv * A12
    Ls, Us = lu_recursive(S)
    Ls_inv = recursiv_inverse(Ls)
    Us_inv = recursive_inverse(Us)

    RHS1 = L1_inv * b1
    RHS2 = Ls_inv * b2 - Ls_inv * A21 * U11_inv * RHS1
    x2 = Us_inv * RHS2
    x1 = U11_inv * RHS1 - U11_inv * L11_inv * A12 * x2

    x[1:size(x1)] = x1 // Lewa połowa
    x[size(x1) + 1:size(x1) + size(x2)] = x2 // Prawa połowa
    return x
end function
```

4 Porównanie działania algorytmów

4.1 Czas działania