

Laboratorium 4 - Efekt Rungego

Mateusz Podmokły - II rok Informatyka WI

21 marzec 2024

1 Treść zadania

Zadanie 1. Wyznacz wielomiany interpolujące funkcje:

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, x \in [-1, 1],$$

$$f_2(x) = e^{\cos(x)}, x \in [0, 2\pi],$$

używając:

- wielomianów Lagrange’a z węzłami $x_j = x_0 + jh, j = 0, 1, \dots, n, h = \frac{x_n - x_0}{n}$
- kubicznych funkcji sklejaných z węzłami $x_j = x_0 + jh, j = 0, 1, \dots, n, h = \frac{x_n - x_0}{n}$
- wielomianów Lagrange’a z węzłami Czebyszewa

$$x_j = \cos(\theta_j)$$

$$\theta_j = \frac{2j+1}{2(n+1)}\pi, 0 \leq j \leq n.$$

Dla funkcji Rungego $f_1(x)$ wykonaj interpolację podanymi sposobami z $n = 12$ węzłami interpolacji. Przedstaw na wykresie funkcję $f_1(x)$ oraz wyniki interpolacji.

Wykonaj interpolację funkcji $f_1(x)$ i $f_2(x)$ podanymi sposobami z $n = 4, 5, \dots, 50$ węzłami interpolacji. Przeprowadź ewaluację wyników na zbiorze 500 losowo wybranych punktów. Na wykresie przedstaw normę wektora błędu na tym zbiorze punktów w zależności od liczby węzłów interpolacji dla każdej metody, osobno dla obu funkcji.

2 Specyfikacja użytego środowiska

Specyfikacja:

- Środowisko: Visual Studio Code,
- Język programowania: Python,
- System operacyjny: Microsoft Windows 11,
- Architektura systemu: x64.

3 Rozwiązanie problemu

W realizacji rozwiązania wykorzystane zostały następujące biblioteki:

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
```

Obliczamy wielomian interpolacyjny Lagrange’a ze wzoru

$$w(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \prod_{j=0 \wedge j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Funkcje sklejane (splajny) obliczamy na każdym przedziale oddzielnie wykorzystując wielomiany Lagrange’a. Węzły Czebyszewa na przedziale $[-1, 1]$ obliczamy ze wzoru

$$x_j = \cos(\theta_j)$$

$$\theta_j = \frac{2j+1}{2(n+1)}\pi, 0 \leq j \leq n.$$

Transformacja węzłów Czebyszewa $r \in [-1, 1]$ na punkty $x \in [a, b]$ dana jest wzorem

$$x = a + \frac{(b-a)(r+1)}{2}$$

Punkty do ewaluacji wylosowane zostały z użyciem funkcji `np.random.uniform`, następnie obliczona została norma wektora błędu względnego interpolacji za pomocą funkcji `np.linalg.norm`.

4 Przedstawienie wyników