Laboratorium 5 - Aproksymacja

Mateusz Podmokły - II rok Informatyka WI

4 kwiecień 2024

1 Treść zadania

Zadanie 1. Wykonaj aproksymację średniokwadratową punktową populacji Stanów Zjednoczonych w przedziale $[1900, 1980]$ wielomianami stopnia m dla $0 \leqslant m \leqslant 6$.
Dla każdego m dokonaj ekstrapolacji wielomianu do roku 1990. Porównaj otrzymaną wartość z prawdziwą wartością dla roku 1990 wynoszącą 248 709 873.
Wyznacz optymalny stopień wielomianu za pomocą kryterium informacyjnego Akaikego (ang. Akaike information criterion):

$$AIC = 2k + nln\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}[y_i - \hat{y}(x_i)]^2}{n}\right),$$

gdzie y_i $(i = 1, \ldots, n)$ oznacza prawdziwą liczbę osób w roku x_i, k to liczba parametrów wielomianu $(k = m + 1)$, natomiast $\hat{y}(x_i)$ liczbę osób przewidywaną przez model, tzn. wartość wielomianu $\hat{y}(x)$. Ponieważ rozmiar próbki jest niewielki (dane z dziewięciu lat, $n - 9$), $\frac{n}{k} < 40$, należy użyć wzoru ze składnikiem korygującym:

$$AIC_c = AIC + \frac{2k(k+1)}{n-k-1}$$

Mniejsze wartości kryterium Akaikego oznaczają lepszy model.

Zadanie 2. Wykonaj aproksymację średniokwadratową ciągłą funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ w przedziale $[0, 2]$ wielomianem drugiego stopnia, używając wielomianów Czebyszewa.

2 Specyfikacja użytego środowiska

Specyfikacja:

- Środowisko: Visual Studio Code,
- Język programowania: Python,

- System operacyjny: Microsoft Windows 11,
- Architektura systemu: x64.

3 Rozwiązanie problemu

3.1 Zadanie 1.

Mamy n punktów, dla których chcemy wyznaczyć wielomian aproksymacyjny stopnia m. Aby wyznaczyć współczynniki wielomianu obliczamy macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{bmatrix}$$

Przyjmujemy

$$y = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

oraz jako wektor współczynników

$$c = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

Obliczamy c z równania normalnego:

$$A^T A c = A^T y$$

$$c = (A^T A)^{-1} A^T y$$

Otrzymujemy wielomian aproksymacyjny postaci

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j$$

3.2 Zadanie 2.

Mamy funkcję

$$f(x) = \sqrt{x}, x \in [0, 2]$$

Aproksymacja tej funkcji wielomianem drugiego stopnia wymaga trzech pierwszych wielomiagów Czebyszewa:

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

Wielomian aproksymacyjny jest postaci

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \phi_k$$

gdzie

$$\phi_k = T_k(x)$$

czyli w naszym przypadku

$$p(x) = c_0 T_0(x) + c_1 T_1(x) + c_2 T_2(x)$$

Zdefiniujmy iloczyn skalarny funkcji w następujący sposób:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) w(x) dx$$

W powyższym wzorze $w(x)$ to funkcja wagowa, która w przypadku wielomianów Czebyszewa dana jest wzorem:

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in [-1, 1]$$

Dla wielomianów ortogonalnych $\phi_0, \ldots, \phi_n$ problem sprowadza się do znalezienia współczynników $c_0, \ldots, c_n$ kombinacji liniowej. Możemy je wyznaczyć z następującej zależności:

$$\begin{bmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle \phi_n, \phi_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \phi_0 \rangle \\ \langle f, \phi_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, \phi_n \rangle \end{bmatrix} \Rightarrow c_k = \frac{\langle f, \phi_k \rangle}{\langle \phi_k, \phi_k \rangle}$$

Musimy zastosować podstawienie

$$t = x + 1$$