

Laboratorium 6 - Kwadratury

Mateusz Podmokły - II rok Informatyka WI

11 kwiecień 2024

1 Treść zadania

Zadanie 1. Wiadomo, że

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi$$

Oblicz wartość powyższej całki, korzystając ze złożonych kwadratur otwartej prostokątów (ang. mid-point rule), trapezów i Simpsona. Na przedziale całkowania rozmieść $2^m + 1$ równoodległych węzłów. Przyjmij zakres wartości m od 1 do 25. Dla każdej metody narysuj wykres wartości bezwzględnej błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji funkcji podcałkowej n .

Zadanie 2. Oblicz wartość całki

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$$

metodą Gaussa-Legendre'a. Narysuj wykres wartości bezwzględnej błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji funkcji podcałkowej n .

2 Specyfikacja użytego środowiska

Specyfikacja:

- Środowisko: Visual Studio Code,
- Język programowania: Python,
- System operacyjny: Microsoft Windows 11,
- Architektura systemu: x64.

3 Rozwiązanie problemu

3.1 Biblioteki

W realizacji rozwiązania wykorzystane zostały następujące biblioteki:

```
1 import numpy as np
```

3.2 Zadanie 1.

Każda z metod całkowania numerycznego przybliża całkę w nieco inny sposób. Poniżej krótkie wyjaśnienie każdej z użytych metod.

3.2.1 Metoda prostokątów

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} hf \left(a + \left(i + \frac{1}{2} \right) \cdot h \right)$$
$$h = \frac{b-a}{n}$$

3.2.2 Metoda trapezów

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} h \cdot \frac{f(a + h \cdot i) + f(a + (i+1) \cdot h)}{2}$$
$$h = \frac{b-a}{n}$$

3.2.3 Metoda Simpsona

Dla każdego z n podprzedziałów $[a, b]$ wyznaczamy współczynniki c_1, c_2, c_3 paraboli w punktach a, b oraz

$$c = \frac{x_0 + x_1}{2}$$
$$\begin{bmatrix} a^2 & a & 1 \\ c^2 & c & 1 \\ b^2 & b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(a) \\ f(c) \\ f(b) \end{bmatrix}$$

Znając analityczny wzór na całkę funkcji kwadratowej możemy ją obliczyć:

$$\int_a^b c_1 x^2 + c_2 x + c_3 dx = \frac{1}{3} c_1 b^3 + \frac{1}{2} c_2 b + c_3 b - \frac{1}{3} c_1 a^3 - \frac{1}{2} c_2 a - c_3 a$$

3.3 Zadanie 2.

3.3.1 Metoda Gaussa-Legendre'a

Metoda oblicza wartość całki na przedziale $[-1, 1]$ w następujący sposób:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)$$

gdzie w_i to wagi kwadratury, a x_i to pierwiastki i -tego wielomianu Legendre'a. Można je wyznaczyć korzystając z funkcji `np.polynomial.legendre.leggauss`.

4 Przedstawienie wyników