# Laboratorium 11 - Optymalizacja

Mateusz Podmokły - II rok Informatyka WI

6 czerwiec 2024

## 1 Treść zadania

**Zadanie 1.** Wyznacz punkty krytyczne każdej z poniższych funkcji. Scharakteryzuj każdy znaleziony punkt jako minimum, maksimum lub punkt siodłowy. Dla każdej funkcji zbadaj, czy posiada minimum globalne lub maksimum globalne na zbiorze $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
f_1(x, y) &= x^2 - 4xy + y^2 \\
f_2(x, y) &= x^4 - 4xy + y^4 \\
f_3(x, y) &= 2x^3 - 3x^2 - 6xy(x - y - 1) \\
f_4(x, y) &= (x - y)^4 + x^2 - y^2 - 2x + 2y + 1
\end{aligned}$$

**Zadanie 2.** Funkcja celu użyta do optymalizacji $F(x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ zdefiniowana jest jako

$$F(x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) = \lambda_1 \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\epsilon + ||x^{(i)} - r(j)||_2^2} + \lambda_2 \sum_{i=0}^{n-1} ||x^{(i+1)} - x^{(i)}||_2^2$$

## 2 Specyfikacja użytego środowiska

Specyfikacja:

- Środowisko: Visual Studio Code,
- Język programowania: Python,
- System operacyjny: Microsoft Windows 11,
- Architektura systemu: x64.

# 3 Rozwiązanie problemu

## 3.1 Biblioteki

W realizacji rozwiązania wykorzystane zostały następujące biblioteki:

```python
import numpy as np
```

## 3.2 Zadanie 1.

Punkty krytyczne zostały znalezione przy pomocny metody Newtona. Metoda Newtona wybiera punkt startowy $x_0$ i wykonuje kolejne iteracje przybliżające rozwiązanie:

$$x_{k+1} = x_k - H(x_k)^{-1}\nabla f(x_k)$$

gdzie $\nabla f(x,y)$ to gradient funkcji $f$ dany wzorem

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$$

a $H(x,y)$ to macierz Hessego dana wzorem

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}$$

Punkt krytyczny jest minimum, jeżeli wszystkie wartości własne macierzy Hessego są większe od 0, maksimum jeżeli są mniejsze od 0, a punktem siodłowym w każdej innej sytuacji. Wartości własne macierzy $A$ można wyznaczyć z równania

$$det(A - \lambda I) = 0$$

gdzie $det()$ to wyznacznik macierzy, a $I$ to macierz jednostkowa. Do obliczenia wartości własnych wykorzystałem funkcję z biblioteki `NumPy`

`np.linalg.eig`

## 3.3 Zadanie 2.

### 3.3.1 Gradient funkcji celu

Na początku wyprowadzamy wzór na pochodną cząstkową funkcji celu $F$. Dla $i \in [1, n-1]$ mamy

$$\frac{\partial F}{\partial x^{(i)}} = 2\lambda_2(x_{i+1} - x_{i-1}) - \lambda_1 \sum_{j=1}^{k} \frac{2(x_i - r_j)}{\epsilon + ||x_i - r_j||^4}$$

dla $i = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x^{(0)}} = 2\lambda_2(x_1 - x_0) - \lambda_1 \sum_{j=1}^{k} \frac{2(x_0 - r_j)}{\epsilon + ||x_0 - r_j||^4}$$

a dla $i = n$

$$\frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} = 2\lambda_2(x_n - x_{n-1}) - \lambda_1 \sum_{j=1}^{k} \frac{2(x_n - r_j)}{\epsilon + ||x_n - r_j||^4}$$

Zatem, gradient funkcji $F$ dany jest wzorem

$$\nabla F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x^{(0)}} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} \end{bmatrix}$$

### 3.3.2 Algorytm największego spadku

Algorytm iteracyjny polega na przybliżaniu minimum zadanej funkcji celu $F$. Polega na wybraniu punktu początkowego $x_0$ i obliczaniu w kolejnych iteracjach

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

gdzie

$$d_k = -\nabla F(x_k)$$

a $\alpha_k$ to minimum funkcji $F$ wzdłuż kierunku $d_k$.

# 4 Przedstawienie wyników

## 4.1 Zadanie 1.

Zestawienie punktów krytycznych funkcji.
Funkcja $f_1$:

- $(0, 0)$ - punkt siodłowy, $x_0 = (1, 1)$

Funkcja $f_2$:

- $(-1, -1)$ - minimum, $x_0 = (-2, -2)$
- $(1, 1)$ - minimum, $x_0 = (2, 2)$
- $(0, 0)$ - punkt siodłowy, $x_0 = (-0.5, 0)$

Funkcja $f_3$:

- $(-1, -1)$ - maksimum, $x_0 = (-2, -2)$
- $(1, 0)$ - minimum, $x_0 = (2, 0)$
- $(0, -1)$ - punkt siodłowy, $x_0 = (0, -2)$
- $(0, 0)$ - punkt siodłowy, $x_0 = (0, 1)$

Funkcja $f_4$:

- $(1, 1)$ - punkt siodłowy, $x_0 = (0, 0)$

## 5 Wnioski

Metoda Newtona jest skutecznym sposobem znajdowania punktów krytycznych funkcji.
Powinniśmy pamiętać o odpowiednim doborze punktów początkowych $x_0$.
Optymalizacja funkcji celu jest przydatnym zagadnieniem odpowiadającym na szeroki zakres problemów.

## 6 Bibliografia


https://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda_Newtona_(optymalizacja)
https://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda_najszybszego_spadku
https://pl.wikipedia.org/wiki/Gradient_(matematyka)
https://home.agh.edu.pl/~gora/algebra/Wyklad07.pdf
https://pl.wikipedia.org/wiki/Macierz_Hessego
https://pl.wikipedia.org/wiki/Pochodna_cz%C4%85stkowa