Laboratorium 4 - Efekt Rungego

Mateusz Podmokły - II rok Informatyka WI

21 marzec 2024

1 Treść zadania

Zadanie 1. Wyznacz wielomiany interpolujące funkcje:

$$f_1(x) = \frac{1}{1+25x^2}, x \in [-1, 1],$$

$$f_2(x) = e^{cos(x)}, x \in [0, 2\pi],$$

używając:

– wielomianów Lagrange'a z węzłami $x_j = x_0 + jh, j = 0, 1, \ldots, n, h = \frac{x_n - x_0}{n}$

– kubicznych funkcji sklejancyh z węzłami $x_j = x_0 + jh, j = 0, 1, \ldots, n, h = \frac{x_n - x_0}{n}$

– wielomianów Lagrange'a z węzłami Czebyszewa

$$x_j = cos(\theta_j)$$

$$\theta_j = \frac{2j+1}{2(n+1)}\pi, 0 \leqslant j \leqslant n.$$

Dla funkcji Rungego $f_1(x)$ wykonaj interpolację podanymi sposobami z $n = 12$ węzłami interpolacji. Przedstaw na wykresie funkcję $f_1(x)$ oraz wyniki interpolacji.
Wykonaj interpolację funkcji $f_1(x)$ i $f_2(x)$ podanymi sposobami z $n = 4, 5, \ldots, 50$ węzłami interpolacji. Przeprowadź ewaluację wyników na zbiorze 500 losowo wybranych punktów. Na wykresie przedstaw normę wektora błędu na tym zbiorze punktów w zależności od liczby węzłów interpolacji dla każdej metody, osobno dla obudwu funkcji.

2 Specyfikacja użytego środowiska

Specyfikacja:

- Środowisko: Visual Studio Code,
- Język programowania: Python,
- System operacyjny: Microsoft Windows 11,
- Architektura systemu: x64.

3 Rozwiązanie problemu

W realizacji rozwiązania wykorzystane zostały następujące biblioteki:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Obliczamy wielomian interpolacyjny Lagrange'a ze wzoru

$$w(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \prod_{j=0 \wedge j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Funkcje sklejane (splajny) obliczamy na każdym przedziale oddzielnie wykorzystując wielomiany Lagrange'a. Węzły Czebyszewa na przedziale $[-1, 1]$ obliczamy ze wzoru

$$x_j = cos(\theta_j)$$

$$\theta_j = \frac{2j+1}{2(n+1)}\pi, 0 \leqslant j \leqslant n.$$

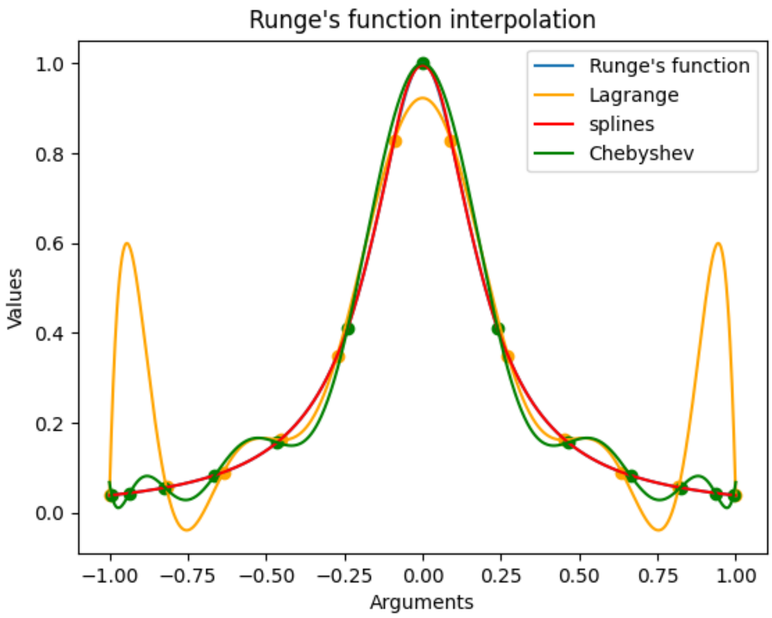
Transformacja węzłów Czebyszewa $r \in [-1, 1]$ na punkty $x \in [a, b]$ dana jest wzorem

$$x = a + \frac{(b-a)(r+1)}{2}$$

Punkty do ewaluacji wylosowane zostały z użyciem funkcji `np.random.uniform`, następnie obliczona została norma wektora błędu względnego interpolacji za pomocą funkcji `np.linalg.norm`.

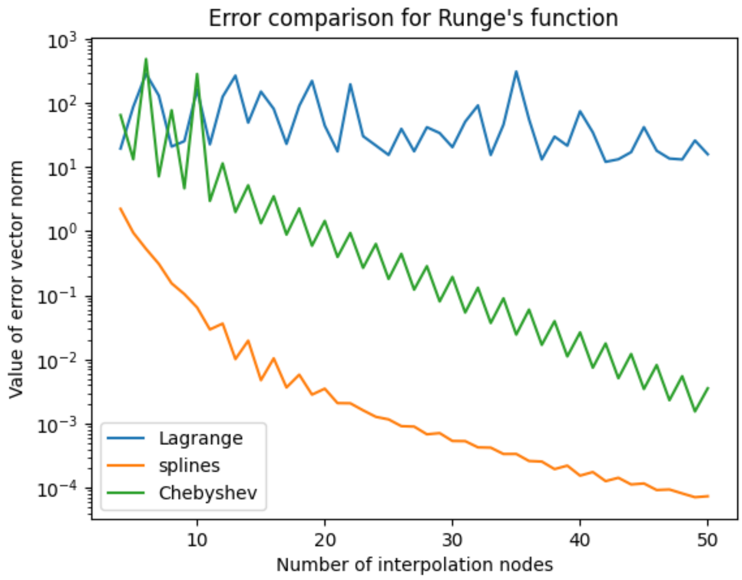
4 Przedstawienie wyników

4.1 Interpolacja funkcji Rungego

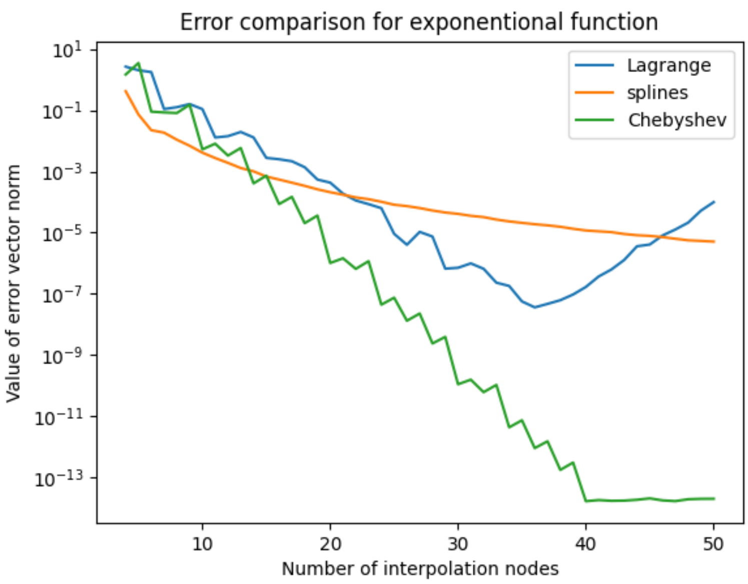


Rysunek 1: Porównanie uzyskanych interpolacji.

4.2 Porównanie dokładności różnych metod interpolacji



Rysunek 2: Wykres błędów interpolacji funkcji Rungego.



Rysunek 3: Wykres błędów interpolacji funkcji eksponencjalnej.

W przypadku funkcji Rungego, najbardziej dokładna jest interpolacja funkcjami sklejanymi (splajnami). Funkcję eksponencjalną najlepiej interpoluje wielomian Lagrange'a z węzłąmi Czebyszewa. Przy zwiększaniu liczby węzłów interpolacji rośnie dokładność, jedynie dla funkcji eksponencjalnej interpolowanej wielomianem Lagrange'a od około 40 węzłów dokładność zaczyna maleć.

5 Wnioski

5.1 Obserwacje

Interpolacja funkcji Rungego wielomianem Lagrange'a z równoodległymi węzłami powoduje duże niedokładności, szczególnie na krańcach przedziału. Wykorzystanie węzłów Czebyszewa znacznie zmniejsza ten efekt, natomiast najwyższą dokładność gwarantuje użycie do tego celu funkcji sklejanych (splajnów). Może to wynikać z faktu, że dla każdego przedziału dobieramy inny wielomian interpolacyjny, co pozwala lepiej dopasować interpolację do funkcji.
Dla funkcji eksponencjalnej natomiast, dokładniejsza okazała się interpolacja Lagrange'a z wykorzystaniem węzłów Czebyszewa, które pozwalają w lepszy sposób dobrać węzły interpolacji i dzięki temu uniknąć dużych niedokładności.
Wyższa dokładność przy większej liczbie węzłów interpolacji jest spowodowana lepiej dopasowanym wielomianem interpolacyjnym do danej funkcji, jedynym wyjątkiem tutaj jest interpolacja Lagrane'a funkcji eksponencjalnej.

5.2 Podsumowanie

W przypadku niektórych funkcji zwykła interpolacja wielomianem Lagrange'a okazuje się bardzo niedokładna, szczególnie na krańcach przedziału. Należy wtedy zastosować inne techniki interpolacji, jak na przykład węzły Czebyszewa, albo funkcje sklejane, tzw. splajny. Pozwala to w takich sytuacjach zachować wyższą dokładność.

6 Bibliografia

https://pl.wikipedia.org/wiki/Funkcja_wyk%C5%82adnicza
https://pl.wikipedia.org/wiki/W%C4%99z%C5%82y_Czebyszewa
https://pl.wikipedia.org/wiki/Funkcja_sklejana
https://pl.wikipedia.org/wiki/Interpolacja_funkcjami_sklejanymi