

# Laboratorium 1 - Analiza błędów

Mateusz Podmokły

29 luty 2024

## 1 Treść zadania

**Zadanie 1.** Oblicz przybliżoną wartość pochodnej funkcji, używając wzoru

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Sprawdź działanie programu dla funkcji  $\tan(x)$  oraz  $x = 1$ . Wyznacz błąd, porównując otrzymaną wartość numerycznej pochodnej z prawdziwą wartością. Na wspólnym rysunku przedstaw wykresy wartości bezwzględnej błędu metody, błędu numerycznego oraz błędu obliczeniowego w zależności od  $h$  dla  $h = 10^{-k}$ ,  $k = 0, \dots, 16$ . Porównaj wyznaczoną wartość  $h_{min}$  z wartością otrzymaną ze wzoru

$$h_{min} \approx 2\sqrt{\frac{\epsilon_{mach}}{M}},$$

$$M \approx |f''(x)|.$$

Powtórz ćwiczenie używając wzoru różnic centralnych

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Porównaj wyznaczoną wartość  $h_{min}$  z wartością otrzymaną ze wzoru

$$h_{min} \approx \sqrt[3]{\frac{3\epsilon_{mach}}{M}},$$

$$M \approx |f'''(x)|.$$

**Zadanie 2.** Napisz program generujący pierwsze  $n$  wyrazów ciągu zdefiniowanego równaniem różnicowym:

$$x_{k+1} = 2.25x_k - 0.5x_{k-1}$$

z wyrazami początkowymi:

$$x_0 = \frac{1}{3},$$

$$x_1 = \frac{1}{12}.$$

Wykonaj obliczenia:

- używając pojedynczej precyzji oraz przyjmując  $n = 225$ ,
- używając podwójnej precyzji oraz przyjmując  $n = 60$ ,
- używając reprezentacji z biblioteki **fractions** oraz przyjmując  $n = 225$ .

Narysuj wykres wartości ciągu w zależności od  $k$ . Następnie narysuj wykres przedstawiający wartość bezwzględnej błędności względnej w zależności od  $k$ .

Dokładne rozwiązanie równania różnicowego:

$$x_k = \frac{4^{-k}}{3}$$

maleje wraz ze wzrostem  $k$ . Czy otrzymany wykres zachowuje się w ten sposób?

## 2 Specyfikacja użytego środowiska

Specyfikacja:

- Środowisko: Visual Studio Code,
- Język programowania: Python,
- System operacyjny: Microsoft Windows 11,
- Architektura systemu: x64.

## 3 Rozwiązanie problemu

W realizacji rozwiązania wykorzystane zostały następujące biblioteki:

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from fractions import Fraction
```

Rysunek 1: Wykorzystane biblioteki.

### 3.1 Zadanie 1.

Prawdziwa wartość  $(\tan(x))'$  obliczona została ze wzoru  $(\tan(x))' = \tan^2(x) + 1$ . Błąd obliczeniowy obliczany jest jako różnica numerycznej i prawdziwej wartości pochodnej w stosunku do wartości prawdziwej.

Dla wzoru różnic w przód mamy

$$\frac{\left| \tan^2(x) + 1 - \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right|}{\tan^2(x) + 1},$$

a dla wzoru różnic centralnych

$$\frac{\left| \tan^2(x) + 1 - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \right|}{\tan^2(x) + 1}.$$

Błąd metody otrzymujemy ze wzoru

$$\frac{Mh}{2},$$

$$M = |f''(x)| = \tan^3(x) + \tan(x)$$

dla różnic w przód oraz

$$\frac{Mh^2}{6},$$

$$M = |f'''(x)| = 6\tan^4(x) + 8\tan^2(x) + 2.$$

dla wzoru różnic centralnych. Natomiast błąd numeryczny ze wzorów

$$\frac{2\epsilon}{h}$$

oraz

$$\frac{\epsilon}{h}.$$

### 3.2 Zadanie 2.

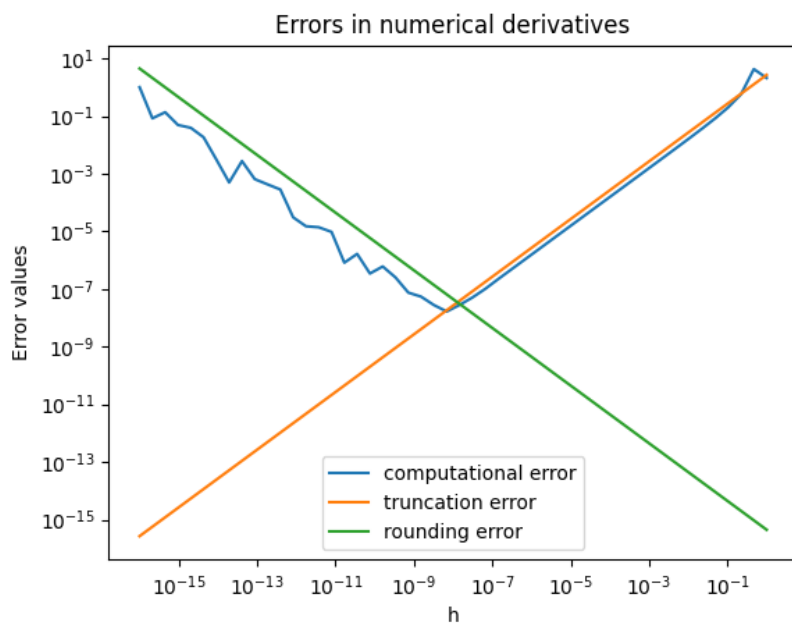
Kolejne elementy ciągu były generowane iteracyjnie na podstawie poprzednich wartości. Pojedyncza precyzja została ustawiona z wykorzystaniem funkcji biblioteki NumPy `np.float32`, a podwójna precyzja `np.float64`.

```
sequence3 = np.array([Fraction(1,3), Fraction(1,12)])
for i in range(n - 2):
    sequence3 = np.append(sequence3, Fraction(9,4) * sequence3[-1] - Fraction(1,2) * sequence3[-2])
```

Rysunek 2: Generowanie kolejnych elementów ciągu z użyciem klasy `Fraction` z biblioteki `fractions`.

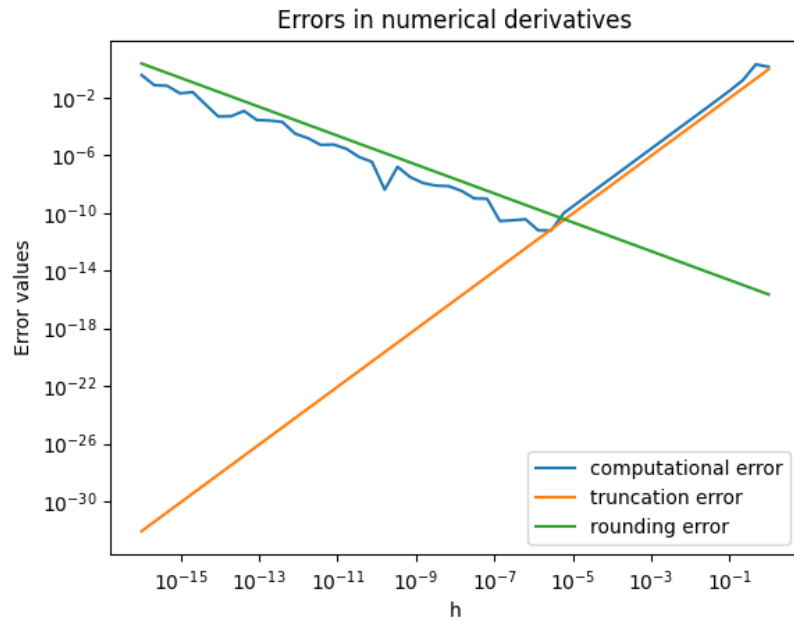
## 4 Przedstawienie wyników

### 4.1 Zadanie 1.



Rysunek 3: Błędy dla wzoru różnic w przód.

$$h_{min} = 6.866488450042998 \cdot 10^{-9}$$
$$h_{min} \approx 2\sqrt{\frac{\epsilon_{mach}}{M}} \approx 1.2902853526408846 \cdot 10^{-8}$$

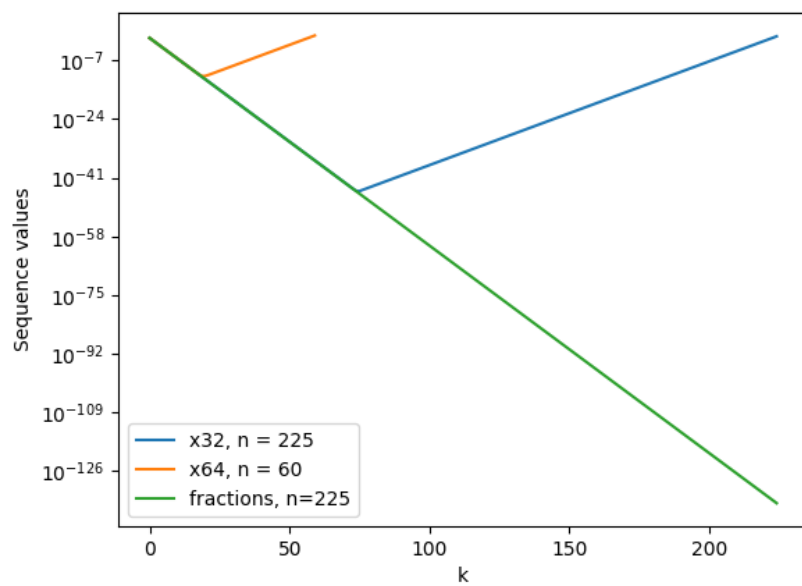


Rysunek 4: Błędy dla wzoru różnic centralnych.

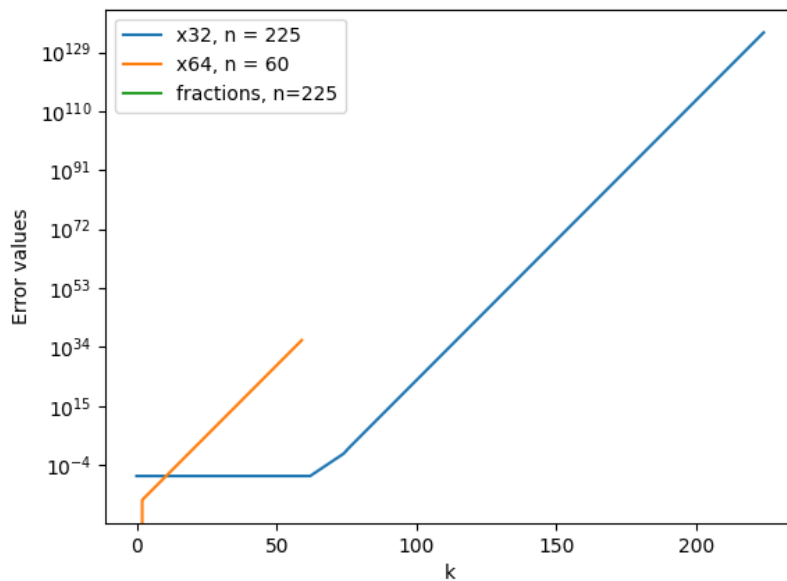
$$h_{min} = 2.811768697974231 \cdot 10^{-6}$$

$$h_{min} \approx \sqrt[3]{\frac{3\epsilon_{mach}}{M}} \approx 2.2732741568390613 \cdot 10^{-6}$$

## 4.2 Zadanie 2.



Rysunek 5: Wartości ciągu generowane różnymi metodami.



Rysunek 6: Wartości błędu względnego generowane różnymi metodami.

W przypadku użycia biblioteki `fractions` wartość błędu dla  $n = 225$  jest stale równa 0.

## 5 Wnioski

### 5.1 Zadanie 1.

W obliczeniach z użyciem wzoru różnic centralnych wartości błędu obliczeniowego mają znacznie większy zakres górny i dolny. Najmniejsza wartość błędu obliczeniowego przyjmowana jest dla  $h_{min} \approx 6.87 \cdot 10^{-9}$  w przypadku wzoru różnic w przód, a dla wzoru różnic centralnych  $h_{min} \approx 2.81 \cdot 10^{-6}$ . Jest ono zbliżone do prawdziwego. Dla mniejszych  $h$  niż  $h_{min}$  wartość błędu obliczeniowego zaczyna rosnąć. Może to być spowodowane zbyt małymi wartościami  $h$  wykraczającymi poza precyzję obliczeń.

### 5.2 Zadanie 2.

Kolejne wartości ciągu, wyznaczone z użyciem pojedynczej precyzji, znacznie szybciej zaczynają rosnąć, niż w przypadku podwójnej precyzji. Ze wzoru jawnego ciągu wiemy, że jest on malejący. Zmiana monotoniczności wynika prawdopodobnie z przekroczenia dokładności liczby zmiennoprzecinkowej w języku Python. Użycie klasy `Fraction` z biblioteki `fractions` pozwala na dokładne wyznaczanie wartości ciągu dla  $n = 225$ , ponieważ przechowujemy osobno licznik i mianownik, dzięki czemu możemy uniknąć utraty

precyzji.

Z powyższego wynika błąd względny, który dla obliczeń pojedynczej precyzji znacznie szybciej zaczyna rosnąć niż w przypadku obliczeń podwójnej precyzji. Obliczenia z użyciem biblioteki `fractions` pozwalają na utrzymanie błędu względnego na poziomie 0.

### 5.3 Podsumowanie

Dzięki wykonanym obliczeniom można zauważyć, że arytmetyka zmiennoprzecinkowa w komputerze nie jest idealna. Wykonując obliczenia numeryczne należy pamiętać o ograniczeniach sprzętowych komputerów, ponieważ nierozważne wykonywanie obliczeń może prowadzić do poważnych błędów.

## 6 Bibliografia

[http://heath.cs.illinois.edu/scicomp/notes/cs450\\_chapt01.pdf](http://heath.cs.illinois.edu/scicomp/notes/cs450_chapt01.pdf)

[https://pl.wikipedia.org/wiki/Liczba\\_zmiennoprzecinkowa](https://pl.wikipedia.org/wiki/Liczba_zmiennoprzecinkowa)

[https://pl.wikipedia.org/wiki/B%C5%82%C4%85d\\_przybli%C5%BCenia](https://pl.wikipedia.org/wiki/B%C5%82%C4%85d_przybli%C5%BCenia)