Laboratorium 6 - Kwadratury

Mateusz Podmokły - II rok Informatyka WI

11 kwiecień 2024

1 Treść zadania

Zadanie 1. Wiadomo, że

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = \pi$$

Oblicz wartość powyższej całki, korzystając ze złożonych kwadratur otwartej prostokątów (ang. mid-point rule), trapezów i Simpsona. Na przedziale całkowania rozmieść $2^m + 1$ równoodległych węzłów. Przyjmij zakres wartości m od 1 do 25. Dla każdej metody narysuj wykres wartości bezwzględnej błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji funkcji podcałkowej n.

Zadanie 2. Oblicz wartość całki

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$$

metodą Gaussa-Legendre'a. Narysuj wykres wartości bezwzględnej błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji funkcji podcałkowej n.

2 Specyfikacja użytego środowiska

Specyfikacja:

- Środowisko: Visual Studio Code,
- Język programowania: Python,
- System operacyjny: Microsoft Windows 11,
- Architektura systemu: x64.

3 Rozwiązanie problemu

3.1 Biblioteki

W realizacji rozwiązania wykorzystane zostały następujące biblioteki:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import trapz
from scipy.integrate import simps
```

3.2 Zadanie 1.

Każda z metod całkowania numerycznego przybliża całkę w nieco inny sposób. Poniżej krótkie wyjaśnienie każdej z użytych metod.

3.2.1 Metoda prostokątów

Całka została obliczona według następującego wzoru:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} hf\left(a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \cdot h\right)$$

gdzie

$$h = \frac{b-a}{n}$$

3.2.2 Metoda trapezów

Do obliczenia całki metodą trapezów została wykorzystana funkcja z biblioteki `SciPy`

`scipy.integrate.trapz`

3.2.3 Metoda Simpsona

Do obliczenia całki metodą Simpsona została wykorzystana funkcja z biblioteki `SciPy`

`scipy.integrate.simps`

3.3 Zadanie 2.

3.3.1 Metoda Gaussa-Legendre'a

Metoda oblicza wartość całki na przedziale $[-1, 1]$ w następujący sposób:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

gdzie w_i to wagi kwadratury, a x_i to pierwiastki i-tego wielomianu Legendre'a. Można je wyznaczyć korzystając z funkcji `np.polynomial.legendre.leggauss`.
Całka w zadaniu zdefiniowana jest na przedziale $[0,1]$, więc musimy zastosować podstawienie

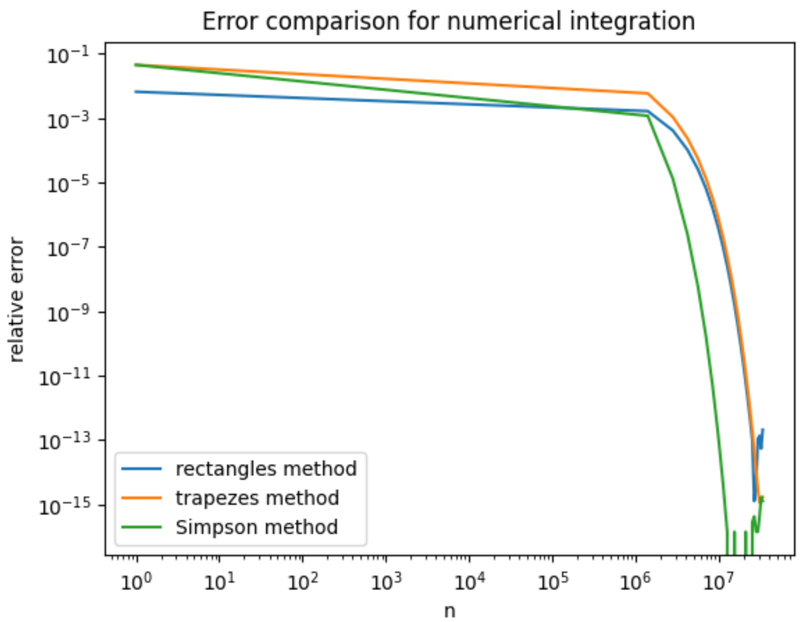
$$x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$$

aby uzyskać przedział całkowania $[-1,1]$. Po obliczeniu całki należy przywrócić początkową szerokość przedziału dzieląc wynik przez 2. Wtedy wzór przyjmuje postać

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i f\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right)$$

4 Przedstawienie wyników

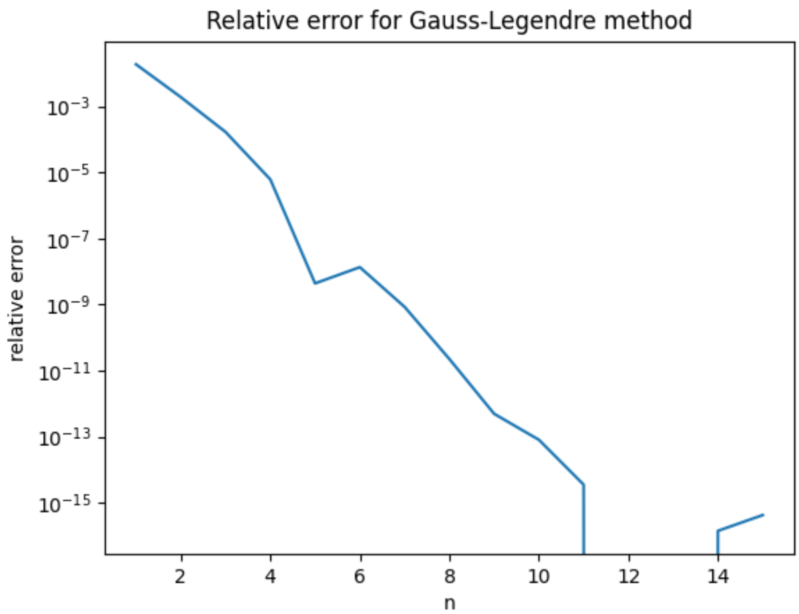
4.1 Zadanie 1.



Rysunek 1: Wartości błędu względnego dla różnych metod całkowania.

Od $n \approx 10^7$, czyli $h \approx 10^{-7}$, zwiększanie wielkości kroku h nie zmniejsza już błędu kwadratury. Pomiary z Laboratorium 1. wynosiły $h_{min} \approx 10^{-8}$ oraz $h_{min} \approx 10^{-6}$. Wartości h_{min} z obydwu laboratoriów są do siebie zbliżone.

4.2 Zadanie 2.



Rysunek 2: Wartości błędu względnego dla metody Gaussa-Legendre'a.

5 Wnioski

6 Bibliografia

https://pl.wikipedia.org/wiki/Ca%C5%82kowanie_numeryczne
https://pl.wikipedia.org/wiki/Kwadratury_Gaussa
https://pl.wikipedia.org/wiki/Wielomiany_Legendre%E2%80%99a
https://www.fuw.edu.pl/~jnareb/zajecia/int-gauss.pdf