Laboratorium 9 - Równania różniczkowe zwyczajne

Mateusz Podmokły - II rok Informatyka WI

16 maj 2024

1 Treść zadania

Zadanie 1. Przedstaw każde z poniższych równań różniczkowych zwyczajnych jako równoważny układ równań pierwszego rzędu (ang. first-order system of ODEs):

1. równanie Van der Pol'a:
$$y'' = y'(1 - y^2) - y$$

2. równanie Blasiusa:
$$y''' = -yy''$$

3. II zasada dynamiki Newtona dla problemu dwóch ciał:
$$y_1'' = -\frac{GMy_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$y_2'' = -\frac{GMy_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Zadanie 2. Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne
$$y' = -5y$$
z warunkiem początkowym $y(0) = 1$. Równanie rozwiązujemy numerycznie z krokiem $h = 0.5$.

1. Analityczna stabilność. Wyjaśnij, czy rozwiązania powyższego równania są stabilne?

2. Numeryczna stabilność. Wyjaśnij, czy metoda Euler'a jest stabilna dla tego równania z użytym krokiem h?

3. Oblicz numerycznie wartości przybliżonego rozwiązania dla $t = 0.5$ metodą Euler'a.
4. Wyjaśnij, czy niejawna metoda Euler'a jest stabilna dla tego równania z użytym krokiem h?
5. Oblicz numerycznie wartości przybliżonego rozwiązania dla $t = 0.5$ niejawną metodą Euler'a.

Zadanie 3. Model Kermack'a-McKendrick'a przebiegu epidemii w populacji opisany jest układem równań różniczkowych:

$$S' = -\frac{\beta}{N} IS$$
$$I' = \frac{\beta}{N} IS - \gamma I$$
$$R' = \gamma I$$

gdzie
S - liczba osób zdrowych, podatnych na zainfekowanie
I - liczba osób zainfekowanych i roznoszących infekcję
R - liczba osób ozdrowiałych

Liczba N to liczba osób w populacji. Parametr β reprezentuje współczynnik zakaźności. Parametr γ reprezentuje współczynnik wyzdrowień. Wartość $\frac{1}{\gamma}$ reprezentuje średni czas choroby.
Założenia modelu:

- przyrost liczby osób zakażonych jest proporcjonalny do liczby osób zakażonych oraz do liczby osób podatnych,
- przyrost liczby osób odpornych lub zmarłych jest wprost proporcjonalny do liczby aktualnie chorych,
- okres inkubacji choroby jest zaniedbywalnie krótki,
- populacja jest wymieszana.

Jako wartości początkowe ustal:

$$S(0) = 762$$
$$I(0) = 1$$
$$R(0) = 0$$

Przyjmij też $N = S(0) + I(0) + R(0) = 763$ oraz $\beta = 1$. Zakładając, że średni czas trwania grypy wynosi $\frac{1}{\gamma} = 7$ dni, przyjmij $\gamma = \frac{1}{7}$.
Całkując od $t = 0$ do $t = 14$ z krokiem 0.2, rozwiąż powyższy układ równań:

- jawną metodą Euler'a

$$y_{k+1} = y_k + h_k f(t_k, y_k)$$

- niejawną metodą Euler'a

$$y_{k+1} = y_k + h_k f(t_{k+1}, y_{k+1})$$

- metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu (RK4)

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h_k}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_k, y_k) \\ k_2 &= f\left(t_k + \frac{h_k}{2}, y_k + \frac{h_k k_1}{2}\right) \\ k_3 &= f\left(t_k + \frac{h_k}{2}, y_k + \frac{h_k k_2}{2}\right) \\ k_4 &= f(t_k + h_k, y_k + h_k k_3) \end{aligned}$$

Wykonaj następujące wykresy:

- Dla każdej metody przedstaw na wspólnym rysunku wykresy komponentów rozwiązania (S, I, R) jako funkcje t (3 wykresy).
- Na wspólnym rysunku przedstaw wykresy funkcji $S(t)+I(t)+R(t)$ znalezione przez każdą metodę (1 wykres). Czy niezmiennik $S(t)+I(t)+R(t) \equiv N$ jest zachowany?

2 Specyfikacja użytego środowiska

Specyfikacja:

- Środowisko: Visual Studio Code,
- Język programowania: Python,
- System operacyjny: Microsoft Windows 11,
- Architektura systemu: x64.

3 Rozwiązanie problemu

3.1 Biblioteki

W realizacji rozwiązania wykorzystane zostały następujące biblioteki:

```python
import numpy as np
from scipy.optimize import fsolve
from scipy.optimize import minimize
import matplotlib.pyplot as plt
```

3.2 Zadanie 1.

Każde równanie w postaci równania różniczkowego zwyczajnego zostanie przekształcone równoważnie do układu równań pierwszego rzędu.

3.2.1 Równanie 1.

Mamy równanie

$$y'' = y'(1 - y^2) - y$$

Zastosujemy podstawienie

$$z = y'$$

Otrzymuejmy równoważny układ równań

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = z(1 - y^2) - y \end{cases}$$

3.2.2 Równanie 2.

Mamy równanie

$$y''' = -yy''$$

Stosujemy analogiczne podstawienia

$$z = y'$$

$$w = z'$$

Otrzymuejmy układ równań

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = w \\ w' = -yw \end{cases}$$

3.2.3 Równanie 3.

Mamy równanie

$$y_1'' = -\frac{GMy_1}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$y_2'' = -\frac{GMy_2}{(y_1^2 + y_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Stosujemy analogiczne podstawienia

$$z_1 = y_1'$$

$$z_2 = y_2'$$

Otrzymuejmy układ równań

$$\begin{cases} y_1' = z_1 \\ y_2' = z_2 \\ z_1' = -\frac{GMy_1}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\ z_2' = -\frac{GMy_2}{(y_1^2+y_2^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

3.3 Zadanie 2.

3.3.1 Analityczna stabilność

Mamy równanie

$$y' = -5y$$

z warunkiem początkowym

$$y(0) = 1$$

Możemy je rozwiązać analitycznie w prosty sposób metodą separacji zmiennych. Otrzymujemy rozwiązanie

$$y(t) = y_0 e^{-5t}$$

gdzie

$$y_0 = y(0) = 1$$

Teraz sprawdźmy stabilność otrzymanego rozwiązania. Równanie różniczkowe jest stabilne, jeśli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że jeśli początkowe odchylenie

$$|y(0) - y_0| < \delta$$

to

$$|y(t) - \hat{y}(t)| < \epsilon$$

dla każdego $t \geqslant 0$.
Rozważmy zaburzenie początkowego warunku

$$y(0) = y_0$$

Niech

$$\hat{y}(0) = y_0 + \delta$$

Mamy wtedy rozwiązanie równania dla początkowego warunku

$$\hat{y}(t) = (y_0 + \delta)e^{-5t}$$

Możemy podstawić

$$|y(t) - \hat{y}(t)| = |y_0 e^{-5t} - (y_0 + \delta)e^{-5t}| = |\delta e^{-5t}|$$

Wiadomo, że $e^{-5t} \leqslant 1$ dla każdego $t \geqslant 0$, więc

$$|\delta e^{-5t}| \leqslant |\delta|$$

Możemy wtedy wybrać δ takie, że $|\delta| \leqslant \epsilon$. Wtedy

$$|y(t) - \hat{y}(t)| < \epsilon$$

Oznacza to, że rozwiązania tego równania są stabilne.

3.3.2 Numeryczna stabilność

Dla równań różniczkowych postaci

$$y' = \lambda y$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$, warunek stabilności numerycznej metody Euler'a dany jest wzorem

$$|1 + h\lambda| < 1$$

Mamy $\lambda = -5$, więc po przekształceniu równoważnym podanego warunku otrzymujemy

$$0 < h < 0.4$$

Z tego wynika, że dla tego równania z krokiem $h = 0.5$ metoda Euler'a nie jest stabilna numerycznie.

3.3.3 Metoda Euler'a

Rozwiązanie równania postaci

$$y' = f(y, t)$$

o warunku początkowym $y(t_0) = y_0$ i kroku h, z punktami t_i na osi OX:

$$t_{n+1} = t_n + h, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

za pomocą metody Euler'a możemy otrzymać ze wzoru:

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n, t_n)$$

3.3.4 Stabilność niejawnej metody Euler'a

Dla równań różniczkowych postaci

$$y' = \lambda y$$

gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$, warunek stabilności numerycznej niejawnej metody Euler'a dany jest wzorem

$$\left| \frac{1}{1 - h\lambda} \right| < 1$$

Mamy $\lambda = -5$, więc po przekształceniu równoważnym podanego warunku otrzymujemy

$$h > 0$$

Z tego wynika, że dla dowolnego kroku $h > 0$ niejawna metoda Euler'a jest stabilna numerycznie.

3.3.5 Niejawna metoda Euler'a

Rozwiązanie równania postaci

$$y' = f(y, t)$$

o warunku początkowym $y(t_0) = y_0$ i kroku h, z punktami t_i na osi OX:

$$t_{n+1} = t_n + h, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

za pomocą niejawnej metody Euler'a możemy otrzymać ze wzoru:

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_{n+1}, t_{n+1})$$

Mamy równanie

$$y' = -5y$$

o warunku początkowym $y(0) = 1$ i kroku $h = 0.5$. Podstawiamy $f(y, t)$ do wzoru

$$y_{n+1} = y_n + h(-5y_{n+1})$$

Przekształcając równoważnie otrzymujemy wzór na y_{n+1}

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{5h + 1}$$

3.4 Zadanie 3.

3.4.1 Jawna metoda Euler'a

Układ równań postaci

$$y_1' = f_1(y_1, y_2, y_3, t)$$
$$y_2' = f_2(y_1, y_2, y_3, t)$$
$$y_3' = f_3(y_1, y_2, y_3, t)$$

rozwiązujemy korzystając ze wzoru

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n, t_n)$$

3.4.2 Niejawna metoda Euler'a

Układ równań postaci

$$y_1' = f_1(y_1, y_2, y_3, t)$$
$$y_2' = f_2(y_1, y_2, y_3, t)$$
$$y_3' = f_3(y_1, y_2, y_3, t)$$

rozwiązujemy korzystając ze wzoru

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_{n+1}, t_{n+1})$$

Podstawiamy układ równań do wzoru

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n - h\frac{\beta}{N} I_{n+1} S_{n+1} \\ I_{n+1} = I_n + h\left(\frac{\beta}{N} I_{n+1} S_{n+1} - \gamma I_{n+1}\right) \\ R_{n+1} = R_n + h\gamma I_{n+1} \end{cases}$$

Do rozwiązania układu równań wykorzystałem funkcję z biblioteki `SciPy`

`scipy.optimize.fsolve`

3.4.3 Metoda Rungego-Kutty czwartego rzędu (RK4)

W celu rozwiązanie układu równań postaci

$$y_1' = f_1(y_1, y_2, y_3, t)$$
$$y_2' = f_2(y_1, y_2, y_3, t)$$
$$y_3' = f_3(y_1, y_2, y_3, t)$$

przyjmijmy

$$\mathbf{u} = [y_1, y_2, y_3]$$

korzystamy ze wzoru

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k_1} + 2\mathbf{k_2} + 2\mathbf{k_3} + \mathbf{k_4})$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{k_1} &= \mathbf{F}(\mathbf{u_n}, t_n) \\ \mathbf{k_2} &= \mathbf{F}\left(\mathbf{u_n} + \frac{\mathbf{k_1}}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right) \\ \mathbf{k_3} &= \mathbf{F}\left(\mathbf{u_n} + \frac{\mathbf{k_2}}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right) \\ \mathbf{k_4} &= \mathbf{F}\left(\mathbf{u_n} + \mathbf{k_3}, t_n + h\right) \end{aligned}$$

oraz

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, t) = [f_1(y_1, y_2, y_3, t), f_2(y_1, y_2, y_3, t), f_3(y_1, y_2, y_3, t)]$$

3.4.4 Szacowanie współczynników

Oszacowanie wartości współczynników wykonałem z użyciem jawnej metody Euler'a danej wzorem

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n, t_n)$$

Do minimalizacji funkcji kosztu metodą Neldera-Meada użyłem funkcji z biblioteki `SciPy`

`scipy.optimize.minimize`

4 Przedstawienie wyników

4.1 Zadanie 2.

4.1.1 Jawna metoda Euler'a

Dla równania

$$y' = -5y$$

oraz $y(0) = 1$ i $h = 0.5$ otrzymujemy wynik

$$y(0.5) = -1.5$$

a więc różni się on znacznie od tego wyznaczonego analitycznie, który wynosi

$$y_{true}(0.5) \approx 0.082$$

Rozbieżność wynika prawdopodobnie z braku stabilności numerycznej tej metody z przyjętym krokiem h. Dla $h = 0.1$ wynik to już

$$y(0.5) \approx 0.031$$

4.1.2 Niejawna metoda Euler'a

Po wykonaniu obliczeń z wykorzystaniem wyprowadzonego wzoru otrzymujemy wynik

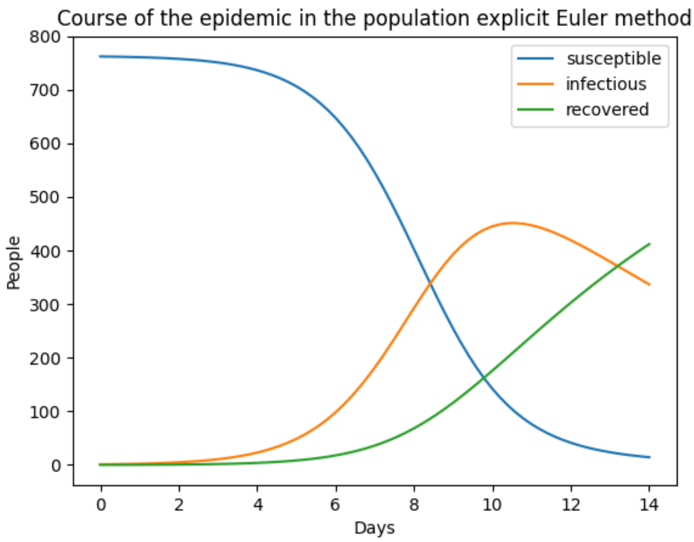
$$y(0.5) \approx 0.286$$

Jest on znacznie lepszy niż w przypadku jawnej metody Euler'a dla kroku $h = 0.5$. Zmieńmy krok na $h = 0.1$. Otrzymujemy wtedy wynik

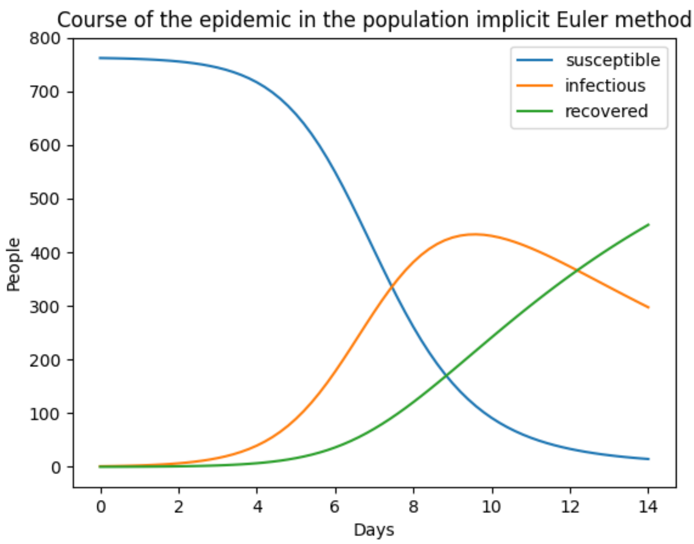
$$h(0.5) \approx 0.132$$

4.2 Zadanie 3.

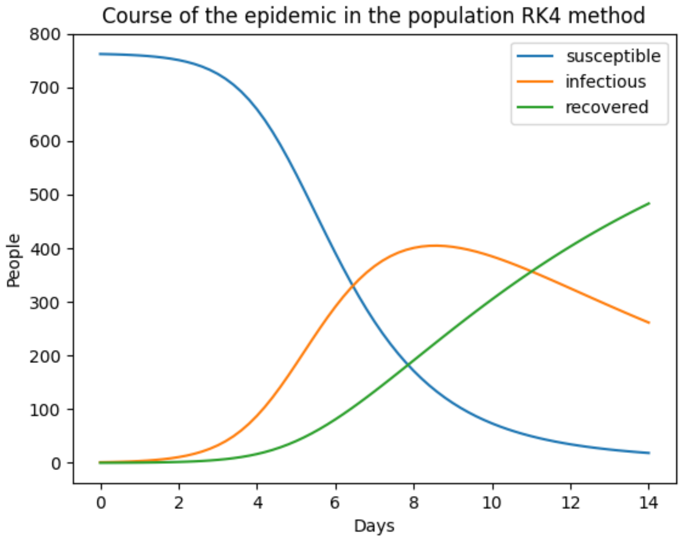
4.2.1 Wykresy przebiegu epidemii



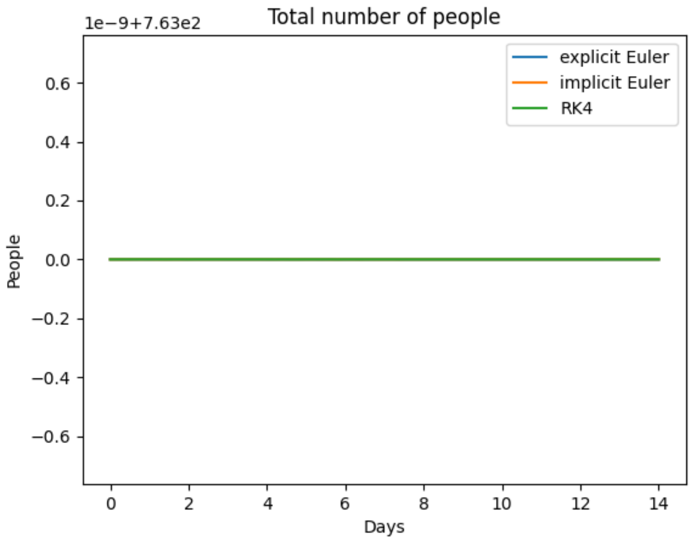
Rysunek 1: Przebieg epidemii w populacji otrzymany jako rozwiązanie układu równań różniczkowych jawną metodą Euler'a.



Rysunek 2: Przebieg epidemii w populacji otrzymany jako rozwiązanie układu równań różniczkowych niejawną metodą Euler'a.



Rysunek 3: Przebieg epidemii w populacji otrzymany jako rozwiązanie układu równań różniczkowych metodą Rungego-Kutty rzędu czwartego (RK4).



Rysunek 4: Łączna wielkość populacji w czasie.

4.2.2 Szacowanie współczynników

Dla funkcji kosztu

$$L(\theta) = \sum_{i=0}^{T} (I_i - \hat{I}_i)^2$$

otrzymane wartości współczynników to:

$$\beta \approx 2.31$$

$$\gamma \approx 0.3$$

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} \approx 7.81$$

a dla funkcji

$$L(\theta) = -\sum_{i=0}^{T} I_i ln \hat{I}_i + \sum_{i=0}^{T} \hat{I}_i$$

współczynniki wynoszą

$$\beta \approx 2.34$$

$$\gamma \approx 0.31$$

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} \approx 7.63$$

5 Wnioski

Niejawna metoda Euler'a okazała się bardziej stabilna niż jawna metoda Euler'a, ale charakteryzuje się mniejszą dokładnością zwracanych wyników. Zarówno metoda Euler'a, jak i metoda Rungego-Kutty czwartego rzędu (RK4), są bardzo skutecznymi narzędziami do rozwiązywania układów równań różniczkowych. Należy jednak pamiętać o odpowiednim doborze kroku h w celu zachowania stabilności metody.

6 Bibliografia

https://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda_Eulera
https://pl.wikipedia.org/wiki/Algorytm_Rungego-Kutty
https://pl.wikipedia.org/wiki/Metody_Lapunowa
https://pl.wikipedia.org/wiki/Metoda_Neldera-Meada