Laboratorium 7 - Kwadratury adaptacyjne

Mateusz Podmokły - II rok Informatyka WI

18 kwiecień 2024

1 Treść zadania

Zadanie 1. Oblicz wartość całki

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx = \pi$$

korzystając z:

- kwadratur adaptacyjnych trapezów,
- kwadratur adaptacyjnych Gaussa-Kronroda.

Dla każdej metody narysuj wykres wartości bezwzględnej błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji funkcji podcałkowej. Przyjmij wartości tolerancji z zakresu od 10^0 do 10^{-14}.

Zadanie 2. Powtórz obliczenia z poprzedniego oraz dzisiejszego laboratorium dla całek

$$\int_0^1 \sqrt{x} logx dx = -\frac{4}{9}$$

oraz

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{(x-0.3)^2+a} + \frac{1}{(x-0.9)^2+b} - 6\right) dx$$

Przyjmij $a = 0.001$ oraz $b = 0.004$. Wykorzystaj fakt, że

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-x_0)^2+a}dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(arctg\frac{1-x_0}{\sqrt{a}} + arctg\frac{x_0}{\sqrt{a}}\right)$$

2 Specyfikacja użytego środowiska

Specyfikacja:

- Środowisko: Visual Studio Code,
- Język programowania: Python,
- System operacyjny: Microsoft Windows 11,
- Architektura systemu: x64.

3 Rozwiązanie problemu

3.1 Biblioteki

W realizacji rozwiązania wykorzystane zostały następujące biblioteki:

```python
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
from scipy.integrate import quad_vec
from scipy.integrate import trapz
from scipy.integrate import simps
```

3.2 Obliczenie całek

Do obliczenia całki metodą adaptacyjną trapezów i Gaussa-Kronroda wykorzystana została funkcja z biblioteki `SciPy`

`scipy.integrate.quad_vec`

z parametrem `epsrel` $\in [10^0, 10^{-14}]$. Całki z poprzedniego laboratorium uzyskano przy pomocy funkcji z biblioteki `SciPy`

`scipy.integrate.trapz`

oraz

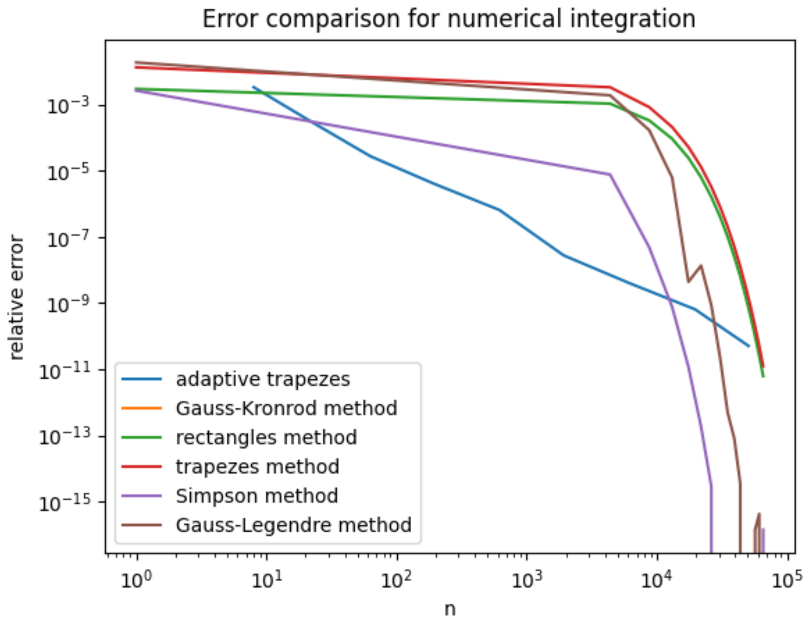
`scipy.integrate.simps`.

Natomiast metoda Gaussa-Legendre'a została uzyskana w analogiczny sposób jak w poprzednim laboratorium, a do wyznaczenia parametrów kwadratury posłużyła funkcja z biblioteki `NumPy`

`np.polynomial.legendre.leggauss`.

4 Przedstawienie wyników

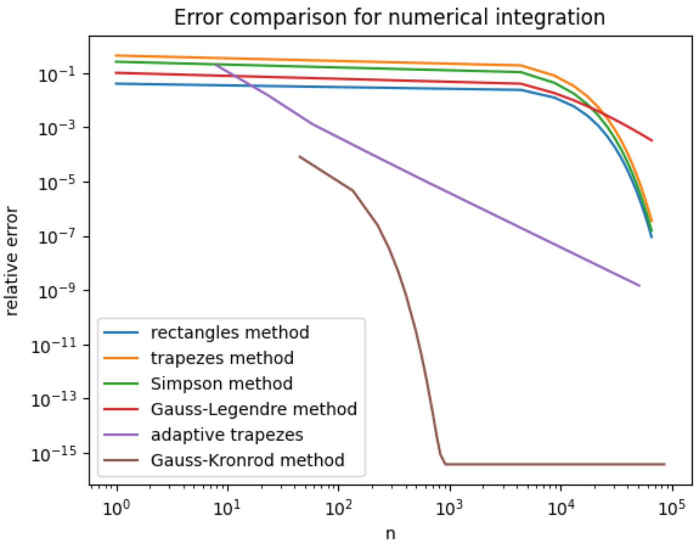
4.1 Zadanie 1.



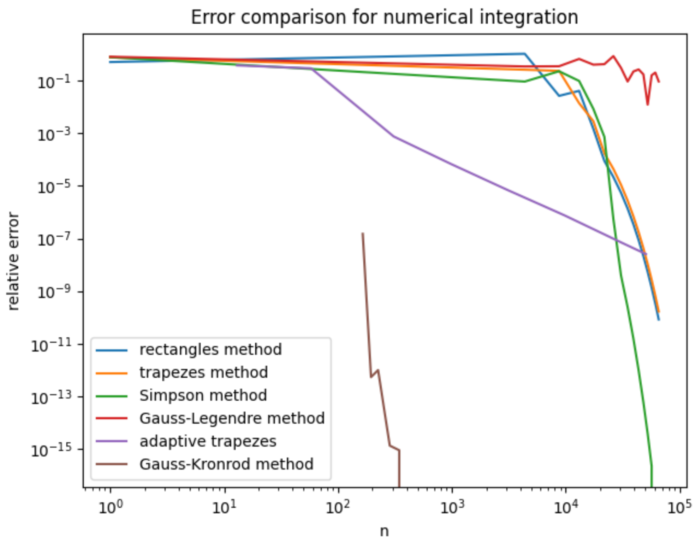
Rysunek 1: Wartości błędu względnego dla różnych metod całkowania.

Najdokładniejszą metodą okazała się metoda adaptacyjna Gaussa-Kronroda, do tego stopnia, że w obliczeniach nie została zarejestrowana żadna wartość błędu. Drugą w kolejności jest metoda adaptacyjna trapezów. Pozostałe zachowywały się podobnie i miały nieco gorszą skuteczność.

4.2 Zadanie 2.



Rysunek 2: Wartości błędu względnego dla różnych metod całkowania funkcji 1.



Rysunek 3: Wartości błędu względnego dla różnych metod całkowania funkcji 2.

Dla obydwu całkowanych funkcji najdokładniejszą metodą ponownie okazała się metoda adaptacyjna Gaussa-Kronroda, a za nią, jednak już nie tak wysoce dokładna, metoda adaptacyjna trapezów.

5 Wnioski

Całkowanie numeryczne przy pomocy kwadratur adaptacyjnych jest znacznie dokładniejsze niż klasyczne kwadratury. Wynika to z odpowiedniego doboru punktów ewaluacji w przedziałach bardziej narażonych na zmienności funkcji. Dzięki temu można dokładnie oraz wydajnie obliczać całki nawet skomplikowanych funkcji. Jest to przydatne narzędzie obliczeniowe, jednak należy pamiętać, że każda metoda numeryczna może byc obarczona błędami.

6 Bibliografia

https://en.wikipedia.org/wiki/Gauss%E2%80%93Kronrod_quadrature_formula
https://en.wikipedia.org/wiki/Adaptive_quadrature