

# Laboratorium 10 - Równania różniczkowe - spectral bias

Mateusz Podmokły - II rok Informatyka WI

28 maj 2024

## 1 Treść zadania

**Zadanie 1.** Dane jest równanie różniczkowe zwyczajne

$$\frac{du(x)}{dx} = \cos(\omega x), \quad x \in \Omega$$

gdzie:

$x, \omega, u \in \mathbb{R}$ ,

$x$  to położenie,

$\Omega$  to dziedzina, na której rozwiązujemy równanie,  $\Omega = \{x \mid -2\pi \leq x \leq 2\pi\}$ ,

$u(x)$  to funkcja, której postaci szukamy.

Warunek początkowy zdefiniowany jest następująco:

$$u(0) = 0.$$

Analityczna postać rozwiązania równania z warunkiem początkowym jest następująca:

$$u(x) = \frac{\sin(\omega x)}{\omega}$$

Rozwiąż powyższe zagadnienie początkowe. Do rozwiązania użyj sieci neuronowych typu PINN (ang. Physics-informed Neural Network).

Koszt rezydualny zdefiniowany jest następująco:

$$\mathcal{L}_r(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\| \frac{d\hat{u}(x)}{dx} - \cos(\omega x_i) \right\|^2,$$

gdzie  $N$  jest liczbą punktów kolokacyjnych.

Koszt związany z warunkiem początkowym przyjmuje postać:

$$\mathcal{L}_{IC}(\theta) = \|\hat{u}(0) - 0\|^2.$$

Funkcja kosztu zdefiniowana jest następująco:

$$\mathcal{L}(\theta) = \mathcal{L}_r(\theta) + \mathcal{L}_{IC}(\theta).$$

Warstwa wejściowa sieci posiada 1 neuron, reprezentujący zmienną  $x$ . Warstwa wyjściowa także posiada 1 neuron, reprezentujący zmienną  $\hat{u}(x)$ . Uczenie trwa przez 50 000 kroków algorytmem Adam ze stałą uczenia równą 0.001. Jako funkcję aktywacji przyjmij tangens hiperboliczny,  $\tanh(x)$ .

Rozważ następujące przypadki:

1. Przypadek  $\omega = 1$ .

Ustal następujące wartości:

- 2 warstwy ukryte, 16 neuronów w każdej warstwie
- liczba punktów treningowych: 200
- liczba punktów testowych: 1000

2. Przypadek  $\omega = 15$ .

Ustal następujące wartości:

- liczba punktów treningowych:  $200 \cdot 15 = 3000$
- liczba punktów testowych: 5000

Eksperymenty przeprowadź z trzema architekturami sieci:

- 2 warstwy ukryte, 16 neuronów w każdej warstwie
- 4 warstwy ukryte, 64 neurony w każdej warstwie
- 5 warstw ukrytych, 128 neuronów w każdej warstwie

3. Dla wybranej przez siebie sieci porównaj wynik z rozwiązaniem, w którym przyjęto, że szukane rozwiązanie (*ansatz*) ma postać:

$$\hat{u}(x; \theta) = \tanh(\omega x) \cdot NN(x; \theta).$$

Taka postać rozwiązania gwarantuje spełnienie warunku  $\hat{u} = 0$  bez wprowadzania składnika  $\mathcal{L}_{IC}$  do funkcji kosztu.