Laboratorium 6 - Kwadratury

Mateusz Podmokły - II rok Informatyka WI

11 kwiecień 2024

1 Treść zadania

Zadanie 1. Wiadomo, że

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx = \pi$$

Oblicz wartość powyższej całki, korzystając ze złożonych kwadratur otwartej prostokątów (ang. mid-point rule), trapezów i Simpsona. Na przedziale całkowania rozmieść $2^m + 1$ równoodległych węzłów. Przyjmij zakres wartości m od 1 do 25. Dla każdej metody narysuj wykres wartości bezwzględnej błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji funkcji podcałkowej n.

Zadanie 2. Oblicz wartość całki

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$$

metodą Gaussa-Legendre'a. Narysuj wykres wartości bezwzględnej błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji funkcji podcałkowej n.

2 Specyfikacja użytego środowiska

Specyfikacja:

- Środowisko: Visual Studio Code,
- Język programowania: Python,
- System operacyjny: Microsoft Windows 11,
- Architektura systemu: x64.

3 Rozwiązanie problemu

3.1 Biblioteki

W realizacji rozwiązania wykorzystane zostały następujące biblioteki:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import trapz
from scipy.integrate import simps
from scipy.stats import linregress
```

3.2 Zadanie 1.

Każda z metod całkowania numerycznego przybliża całkę w nieco inny sposób. Poniżej krótkie wyjaśnienie każdej z użytych metod.

3.2.1 Metoda prostokątów

Całka została obliczona według następującego wzoru:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} hf\left(a + \left(i + \frac{1}{2}\right) \cdot h\right)$$

gdzie

$$h = \frac{b-a}{n}$$

3.2.2 Metoda trapezów

Do obliczenia całki metodą trapezów została wykorzystana funkcja z biblioteki `SciPy`

`scipy.integrate.trapz`

3.2.3 Metoda Simpsona

Do obliczenia całki metodą Simpsona została wykorzystana funkcja z biblioteki `SciPy`

`scipy.integrate.simps`

3.2.4 Rząd zbieżności

Rząd zbieżności to wartość współczynnika nachylenia prostej dopasowanej do wykresu logarytmicznego błędu względnego każdej z metod. Został obliczony w następujący sposób:

$$x_n = log_{10}(2^n)$$

$$y_n = log_{10}\left(\frac{|I_n - \pi|}{\pi}\right)$$

gdzie

$$n = 1, \dots, 10$$

a I_n to wartość całki numerycznej dla danego n.
Następnie wartość współczynnika została uzyskana za pomocą funkcji z biblioteki `SciPy`

```
scipy.stats.linregress
```

3.3 Zadanie 2.

3.3.1 Metoda Gaussa-Legendre'a

Metoda oblicza wartość całki na przedziale $[-1, 1]$ w następujący sposób:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i)$$

gdzie w_i to wagi kwadratury, a x_i to pierwiastki i-tego wielomianu Legendre'a. Można je wyznaczyć korzystając z funkcji `np.polynomial.legendre.leggauss`.
Całka w zadaniu zdefiniowana jest na przedziale $[0, 1]$, więc musimy zastosować podstawienie

$$x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}$$

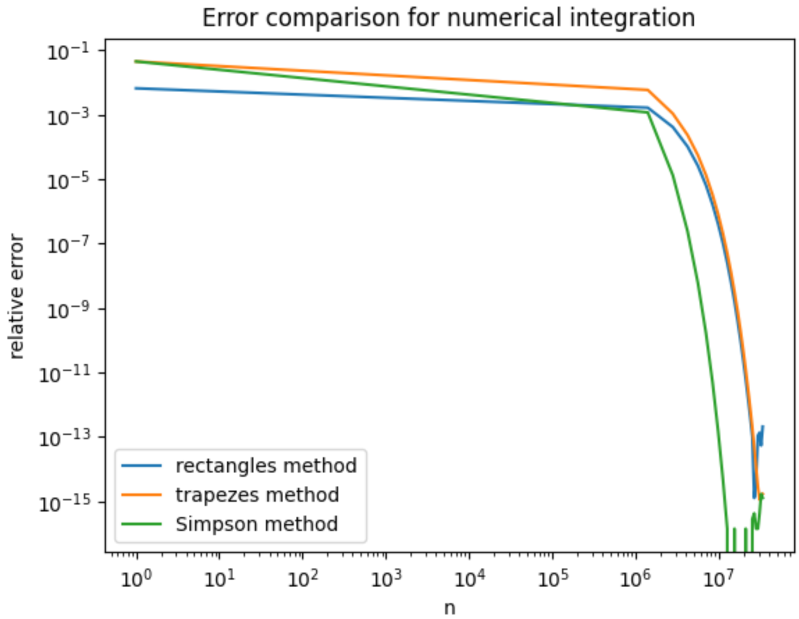
aby uzyskać przedział całkowania $[-1, 1]$. Po obliczeniu całki należy przywrócić początkową szerokość przedziału dzieląc wynik przez 2. Wtedy wzór przyjmuje postać

$$\int_{0}^{1} f(x)dx \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i f\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right)$$

4 Przedstawienie wyników

4.1 Zadanie 1.

4.1.1 Błąd względny dla każdej z metod



Rysunek 1: Wartości błędu względnego dla różnych metod całkowania.

Od $n \approx 10^7$, czyli $h \approx 10^{-7}$, zwiększanie wielkości kroku h nie zmniejsza już błędu kwadratury. Pomiary z Laboratorium 1. wynosiły $h_{min} \approx 10^{-8}$ oraz $h_{min} \approx 10^{-6}$. Wartości h_{min} z obydwu laboratoriów są do siebie zbliżone.

4.1.2 Rząd zbieżności

Wartości rzędu zbieżności wyznaczone dla każdej z metod wynoszą odpowiednio:

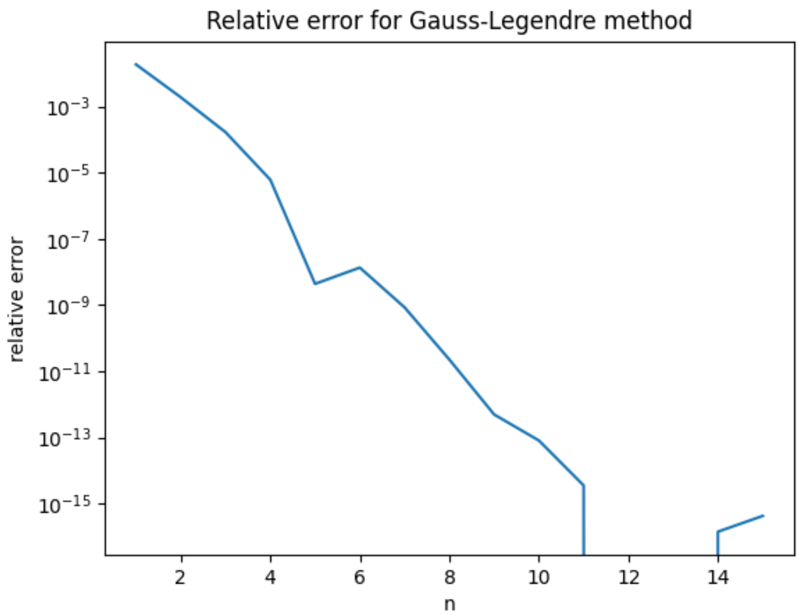
$$p_{rect} \approx 1.55$$
$$p_{trapz} \approx 1.73$$
$$p_{simps} \approx 4.22$$

Warości przewidywane przez teorię:

$$p_{rect} = 2$$
$$p_{trapz} = 2$$
$$p_{simps} = 4$$

Pomiędzy wyznaczonymi wartościami, a teoretycznymi są pewne rozbieżności, jednak w przybliżeniu wyniki się zgadzają.

4.2 Zadanie 2.



Rysunek 2: Wartości błędu względnego dla metody Gaussa-Legendre'a.

5 Wnioski

Najdokładniejsze okazało się całkowanie metodą Simpsona. Przybliża ona funkcję w najdokładniejszy sposób, ponieważ korzysta z dopasowania paraboli do każdego podprzdziału funkcji. Metoda prostokątów i metoda trapezów w tym przypadku zachowywały się w podobny sposób. Być może funkcja była zbyt mało zmienna, żeby zauważyć wyraźną różnicę między tymi dwoma metodami.

Minimalna wartość błędu obliczeniowego z Laboratorium 1. zgadza się z wartością otrzymaną przez całkowanie numeryczne każdą z metod i wynosi $h \approx 10^{-7}$.

Rząd zbieżności wynaczony dla każdej z użytych metod odbiega delikatnie od wartości

przywidywanych przez teorię. Może to w pewnym stopniu wynikać z błędów numerycznych powstałych przy wyznaczaniu wartości całek.
Porównując wykresy trzech użytych metod całkowania z wykresem metody Gaussa-Legendre'a można zauważyć, że jest ona znacznie dokładniejsza (mniejsze wartości błędu względnego). W tym przypadku błąd numeryczny zaczyna przeważać nad błędem metody od wartości $n = 11$.

Podsumowanie

Wybrane metody całkowania numerycznego wydają się być bardzo przydatne w obliczeniach, należy jednak pamiętać o ich ograniczeniach. Mając na uwadze generowane przez nie błędy można korzystać zgodnie z potrzebami.

6 Bibliografia

https://pl.wikipedia.org/wiki/Ca%C5%82kowanie_numeryczne
https://pl.wikipedia.org/wiki/Kwadratury_Gaussa
https://pl.wikipedia.org/wiki/Wielomiany_Legendre%E2%80%99a
https://www.fuw.edu.pl/~jnareb/zajecia/int-gauss.pdf