

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»**

Кафедра математического моделирования

Курсовая работа

Математическое моделирование движения транспортных потоков
(Направление подготовки магистров 01.04.02 Прикладная математика и информатика)

Научный руководитель

канд. ф-м. н., доцент

_____ И.С. Кащенко

« ____ » _____ 2019 г.

Студент группы ПМИ-11МО

_____ М.А. Погребняк

« ____ » _____ 2019 г.

Ярославль 2019 г.

Содержание

Введение	3
1. Постановка задачи	6
2. Модель следования за лидером	7
2.1. Модель следования за лидером без остановки	8
2.2. Модель следования за лидером с остановкой	10
3. Практическое применение	11
Заключение	14

Введение

Рано или поздно всякая правильная математическая идея находит применение в той или иной мере.

А. Н. Крылов

В современном мире, где технологии и прогресс с огромной скоростью шагают вперёд, трудно представить, как человек смог бы обходиться без мощного инструмента познания окружающей действительности под названием «математическое моделирование». С момента появления человека на земле математическое моделирование стало неотъемлемой частью его жизни. Необходимость в исследовании математических моделей прежде всего влияет на саму жизнь человека. Оно возникает, когда сами объекты или явления недоступны для изучения ввиду опасности, которую они представляют, удалены во времени и в пространстве или исследования связаны с большими материальными потерями и непредвиденными последствиями. Так или иначе математическое моделирование имеет огромную важность в жизни человека и никогда не потеряет свою актуальность.

В настоящее время, в связи с развитием компьютерной техники и постоянным совершенствованием программного обеспечения, математическое моделирование развивается быстрыми темпами. Возрастающие потребности в различных сферах общества, например, разработка и управление техническими устройствами, анализ экономических и социальных процессов, способствуют этому. Все естественные и общественные науки, использующие математический аппарат, по сути занимаются математическим моделированием: заменяют реальный объект его аналогом, отражающим в математической форме важнейшие его свойства, а затем изучают его. Результаты таких исследований очень содержательны и применимы в повседневной жизни. Математическая модель выражает существенные черты объекта или процесса языком уравнений и других математических средств.

Метод математического моделирования занимает одно из ведущих мест в исследованиях сложных явлений и процессов, так как позволяет количественно и качественно описать наиболее существенные связи между переменными в системе и применить достаточно развитый математический аппарат и программные средства для анализа явлений, а также для их прогнозирования и управления этими процессами.

Математическое моделирование очень часто встречается в физике, ведь не зря математику называют языком физики. Эти науки всегда тесно связаны и взаимно обогащают друг друга идеями и методами. Хотя физика и считается наукой о природе, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие свойства материального мира, но она базируется на моделях объектов материального мира. Поэтому метод математического моделирования изначально зародился в физике, точнее, в математической физике, а затем постепенно начал проникать и в другие науки, где со временем стал очень востребован. Раньше из обширного математического аппарата физики применяли в основном аналитические и полуаналитические методы и приёмы. Сейчас все чаще обращаются к математическому моделированию, когда исследуемый физический процесс описывается некоторой математической моделью, представляющей

собой систему дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений математической физики. Изучая какие-либо физические явления, исследователь прежде всего создаёт его математическую идеализацию или, другими словами, математическую модель, то есть, пренебрегая второстепенными характеристиками явления, он записывает основные законы, управляющие этим явлением, в математической форме и очень часто эти законы выражаются в виде дифференциальных уравнений. Для составления математической модели в виде дифференциальных уравнений нужно, как правило, знать только локальные связи и не нужна информация обо всем физическом явлении в целом.

Современные компьютерные технологии позволили подойти к решению проблемы математического моделирования транспортных потоков. Основы математического моделирования, закономерностей дорожного движения были заложены в 1912 году русским учёным, профессором Г.Д. Дубелиром. В своей книге «Городские улицы и мостовые» [1] он положил начало развитию такой отрасли как моделирование транспортных потоков. За прошедший век непрерывных исследований выработалось много хороших моделей, которые помогают сегодня строить качественные и быстрые дороги и регулировать транспортные потоки. Но проблема транспортных потоков никуда не уходит, а на оборот только возрастает в связи с увеличением численности людей на земле, строительством и расширением городов и сообщений между ними и как следствие развитием и модернизацией транспорта. Транспорт— одна из ключевых систем городского организма, которую по важности уместно сравнить с кровоснабжением. Именно транспорт позволяет городу в полной мере выполнять связующую, коммуникационную и обеспечивающую функции. Тема транспорта касается практически каждого городского жителя, и тем важнее становятся усилия по систематизации управления дорожным движением на транспортной сети городов, ведь без грамотно проработанной транспортной модели, управлять городскими потоками практически, невозможно. Например, в определённом месте городской магистрали систематически возникают автомобильные пробки. Если модель транспортной системы отсутствует, высока вероятность принятия ошибочного решения, результатом которого станет перенос пробки на новое место или создание новых автомобильных пробок. Создавая подобные модели, можно планировать транспортные системы современных городов. Изменения в одной части такой системы приводят к появлению изменений в других ее частях. Насколько увеличится автомобильный поток, если сделать дорогу более широкой? Почему автомобильная пробка регулярно образуется на конкретном перекрёстке? Какой потенциал создаст развитие системы городского общественного транспорта для изменения застройки в черте города? Что случится, если внести изменения в режим работы определённого светофора? Ответить на все эти, а также многие другие вопросы позволяет моделирование транспортной системы. Одна из наиболее трудных проблем, стоящих перед исследователем организации движения — это превращение реальной дорожно-транспортной обстановки, включающей водителей, автомобили, устройства регулирования движения и дорогу, в набор математических символов и зависимостей, воспроизводящих их поведение. Именно тут математическое моделирование является основой, которая позволяет рассматривать подобные взаимодействия в целом. Решение задач моделирования транспортных потоков и внедрение этих технологий позволяет значительно улучшить ситуацию на проезжей части дороги, снизить тенденцию к образованию транспортных пробок,

перегрузке или недогрузке отдельных линий и узлов транспортной сети, снижению уровня аварийности, а также помогает решать и экологические проблемы.

1. Постановка задачи

Используя теоретические подходы исследования движения транспортных потоков, составить математическую модель для описания движения транспортных потоков. Данная модель должна представлять из себя набор дифференциальных уравнений и иметь практическую значимость. Полученную модель необходимо исследовать, используя компьютерные технологии.

2. Модель следования за лидером

Научное исследование транспортных потоков началось в 1910-х годах прошлого века с применением различных теорий и методов. Было создано множество моделей для описания движения потоков: модели, основанные на теории клеточных автоматов, газокINETические модели, гидродинамические модели и другие. Но основным теоретическим подходом исследования движения транспортных потоков является модель движения транспортных средств друг за другом.

Под **транспортным потоком** будем понимать *количество единиц транспортных средств одного вида транспорта, проследовавших определённый участок пути в течение установленного промежутка времени* [2]. В качестве транспортного средства рассмотрим автомобиль и будем называть его **лидером**, если за ним есть другой автомобиль, или **преследователем**, если перед ним есть другой автомобиль. Причём, один и тот же автомобиль может являться одновременно и преследователем для впереди идущего, и лидером для позади идущего (рис. 1).

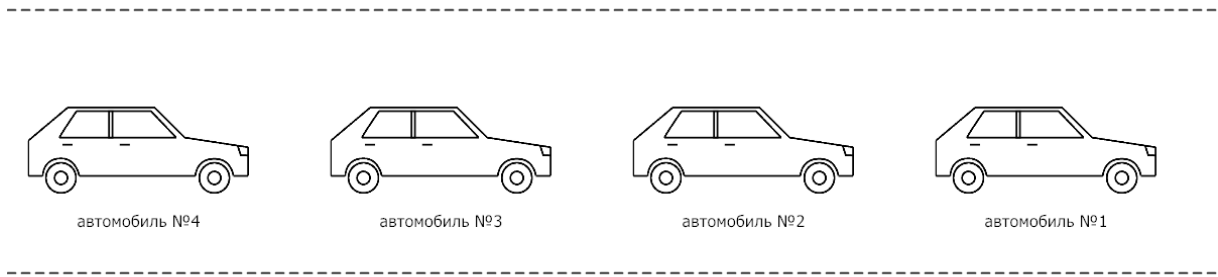


Рис. 1. Автомобили, следующие друг за другом.

Рассмотрим парадигму автомобиля, которая основана на очень простом правиле и уже довольно давно известна в литературе. Так как автомобили следуют друг за другом, преследователь всегда пытается максимизировать свою скорость с двумя ограничениями: ограничением ускорения и ограничением безопасности. Впервые данная парадигма была высказана ещё в 1975 [3] и математически выглядит следующим образом:

$$v_f(t) = \min(v_f^d(t), v_f^s(t)), \quad (2.1)$$

где $v_f(t)$ - скорость преследователя в момент времени t , $v_f^d(t)$ - максимальная возможная скорость с **ограничением ускорения** (demand speed), $v_f^s(t)$ - максимальная возможная скорость с **ограничением безопасности** (supply speed).

Под ограничение ускорения стоит понимать физические ограничения скорости и ускорения транспортного средства, а также условия комфорта, необходимые водителю. Оно описывает траекторию транспортного средства, которое свободно разгоняется до максимальной желаемой скорости при отсутствии впереди идущих транспортных средств. Это не всегда постоянное значение: например, оно может зависеть от скорости автомобиля. Ограничение безопасности - это то, как траектория транспортного средства зависит от впереди идущего транспортного средства (лидера).

2.1. Модель следования за лидером без остановки

Рассмотрим дифференциальное уравнение, которое описывает ускорение транспортного средства:

$$\ddot{x}(t) = d(\dot{x}(t - \tau) - \dot{x}(t)), \quad (2.2)$$

где d - мощность двигателя, а τ - время реакции водителя.

Уравнение (2.2) зависит от скорости движения двух соседних автомобилей, то есть водитель автомобиля должен смотреть только на впереди идущий автомобиль. Конечно, в реальной жизни, водитель следит за движением большего количества транспортных средств, окружающих его, например, справа и слева, но при движении по прямой и без перестроений их влияние минимально.

Проинтегрировав уравнение (2.2) получаем следующее уравнение:

$$\dot{x}(t) = d(x(t - \tau) - x(t) - \lambda), \quad (2.3)$$

где под λ будем понимать безопасное расстояние между автомобилями.

Уравнение (2.3) служит для описания скорости транспортного средства и зависит от положения самого транспортного средства, положения впереди идущего транспортного средства и расстояния между ними.

Дифференциальное уравнение (2.3) описывает лишь одно транспортное средство. Для описания всего потока запишем (2.3) в виде разностного уравнения:

$$\dot{x}_n(t) = d_n(x_{n-1}(t - \tau_n) - x_n(t) - \lambda_n). \quad (2.4)$$

Без потери общности считаем, что все автомобили имеют одинаковые технические характеристики, а все водители одинаково оценивают дорожную ситуацию и реагируют на её изменения с одинаковой скоростью. Таким образом считаем, что $d_n = d$, $\tau_n = \tau$, $\lambda_n = \lambda$. Перепишем разностное уравнение (2.4) в виде развёрнутой системы разностных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = d(v_{\max}t - x_1(t) - \lambda), \\ x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2(t) = d(x_1(t - \tau) - x_2(t) - \lambda), \\ x_2(t) = -\lambda \quad t \in [-\tau, 0], \\ \dot{x}_3(t) = d(x_2(t - \tau) - x_3(t) - \lambda), \\ x_3(t) = -2\lambda \quad t \in [-2\tau, 0], \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = d(x_{n-1}(t - \tau) - x_n(t) - \lambda), \\ x_n(t) = -(n-1)\lambda \quad t \in [-(n-1)\tau, 0], \\ \dots \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Обозначения, используемые в системе (2.5), приведены в таблице 1.

Каждое отдельное уравнение системы (2.5) соответствует автомобилю в потоке. На графиках (2) и (3) изображены графики длины пути и скорости для нескольких автомобилей.

Таблица 1. Физическое значение параметров уравнения (2.5)

Параметр	Физическое значение
n	порядковый номер автомобиля в потоке
d	мощность двигателя автомобиля
v_{max}	максимальная возможная (допустимая) скорость
τ	время реакции водителя
λ	безопасное расстояние между автомобилями

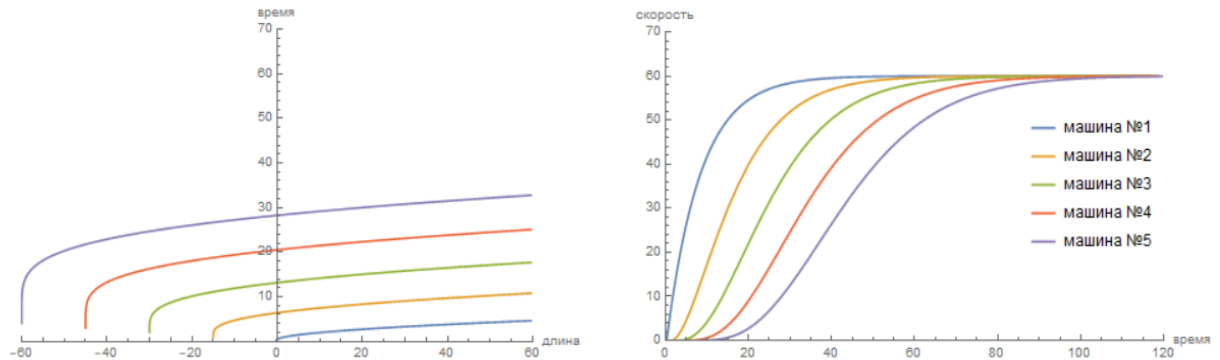


Рис. 2. Графики изменения длин путей (слева) и скоростей (справа) для нескольких автомобилей при движении без остановки с параметрами: $\tau = 1$, $\lambda = 15$, $d = 0,122$.

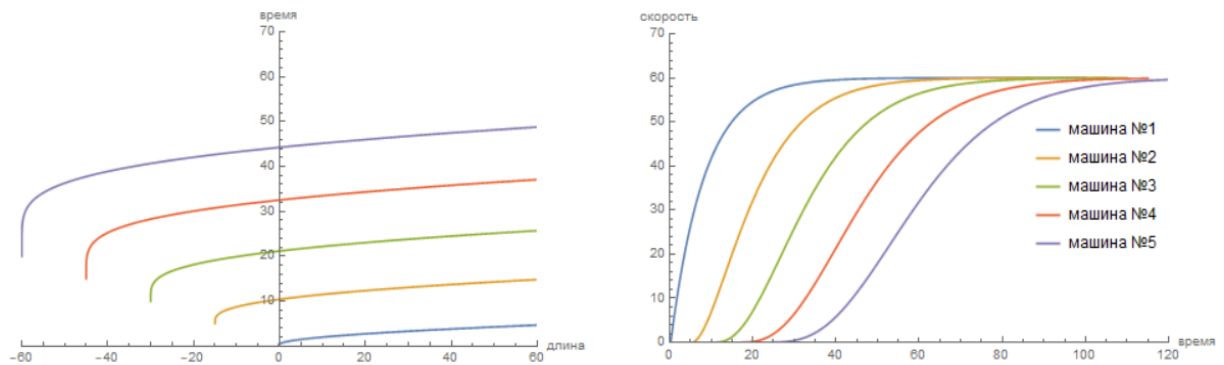


Рис. 3. Графики изменения длин путей (слева) и скоростей (справа) для нескольких автомобилей при движении без остановки с параметрами: $\tau = 5$, $\lambda = 15$, $d = 0,122$.

Как видно из графиков, автомобили, разогнавшись до максимальной допустимой скорости, бесконечно едут на безопасном расстоянии друг от друга. Данная модель отлично подходит, если важен сам момент старта и разгон транспортных средств. В более жизненных ситуациях присутствуют процессы обратные разгону и движению - торможение и остановка.

2.2. Модель следования за лидером с остановкой

Рассмотрим более реалистичную ситуацию, учитывающую торможение и остановку транспортного средства. Транспортные средства аналогично системе (2.5) разгоняются и выходят на свою максимальную допустимую скорость, но через какое-то время им необходимо начать торможение и, в последствии, остановиться. Так как все транспортные средства, кроме самого первого являются преследователями, то торможение стоит рассматривать лишь для первого, остальные сами отрегулируют свою скорость, относительно него. Математически это можно записать следующим образом:

$$S(t) = \begin{cases} v_{max}t & t \leq t_s \\ v_{max}t_s & t > t_s \end{cases}, \quad (2.6)$$

где t_s - время начала остановки.

Так как начало движения и набор скорости происходят аналогично предыдущему случаю, подставим (2.6) в (2.5) и получим модель движения транспортных средств с учётом начала торможения в момент времени t_s и с последующей их остановкой.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = d(S(t) - x_1(t) - \lambda), \\ x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2(t) = d(x_1(t - \tau) - x_2(t) - \lambda), \\ x_2(t) = -\lambda \quad t \in [-\tau, 0], \\ \dot{x}_3(t) = d(x_2(t - \tau) - x_3(t) - \lambda), \\ x_3(t) = -2\lambda \quad t \in [-2\tau, 0], \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = d(x_{n-1}(t - \tau) - x_n(t) - \lambda), \\ x_n(t) = -(n-1)\lambda \quad t \in [-(n-1)\tau, 0], \\ \dots \end{cases} \quad (2.7)$$

В модели (2.7) скорость не зануляет полностью. Конечно, она близка к нулю, но всё же остаётся всегда положительной. При необходимости её можно занулить явно, когда она станет меньше какой-то наперёд заданной минимальной скорости транспортного средства, обусловленной техническими характеристиками.

На графиках (4) изображены графики длины пути и скорости для нескольких автомобилей.

Как видно из графиков, автомобили, в определённый момент времени t_s , начинают тормозить и останавливаются на безопасном расстоянии друг от друга.

Данная модель отлично подходит, если важен не только момент старта и разгон, но так же торможение и остановка.

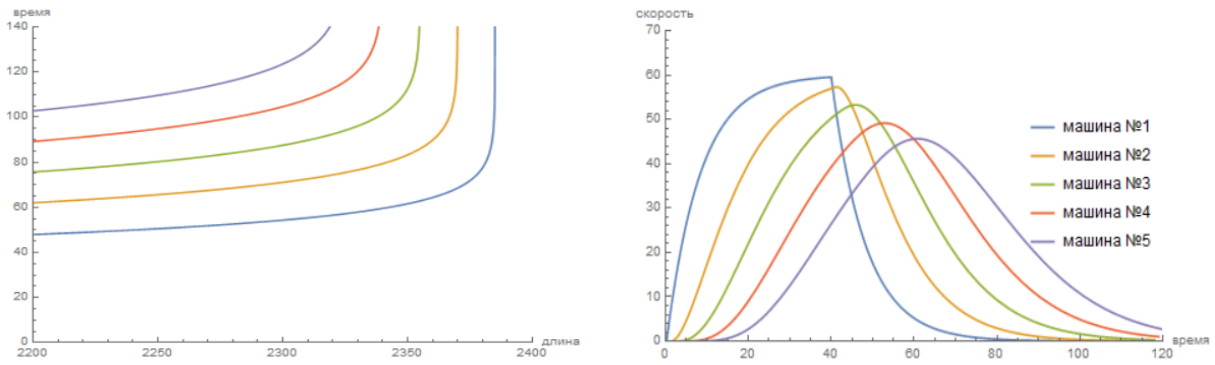


Рис. 4. Графики изменения длин путей (слева) и скоростей (справа) для нескольких автомобилей при движении с остановкой с параметрами: $\tau = 1$, $\lambda = 15$, $d = 0, 122$.

3. Практическое применение

Состояние дел в области моделирования транспортных потоков на сегодняшний день таково, что, не смотря на значительный прогресс, полное понимание природы автомобильных проблем ещё не достигнуто. Учёные говорят, что они пока находятся ближе к пониманию процессов зарождения Вселенной, чем, например, образования автомобильных заторов.

Российское законодательство предусматривает ГОСТ для организации дорожного движения [4]. Но данный ГОСТ не охватывает множество дорожных проблем, например, такую важную проблему как светофорное регулирование, в частности время горения сигналов на светофоре. Пункт 7.4. "Режимы работы светофоров" данного ГОСТа описывает внешний вид светофора, последовательность сигналов и другое, но время горения каждого сигнала регулируется для каждого светофора и перекрёстка самостоятельно дорожными службами на местах. Такое регулирование приводит к множеству проблем, ведь можно не всегда удачно отрегулировать режим работы светофора с первого раза, и это может привести к серьёзным последствиям, таким как пробки и заторы, а в некоторых случаях даже спровоцировать дорожно транспортные происшествия.

В большинстве случаев настройка светофоров производится экспериментальным путём. Такие экспериментальные работы по оптимизации светофорного регулирования привели к настоящему транспортному коллапсу в Ярославле. Утром 28 февраля 2018 года на Московском проспекте, проспекте Фрунзе, Суздальском шоссе и других прилегающих к улицам машины встали в огромную пробку, около пяти километров. Произошло несколько аварий [5]. Такие ситуации не редкость, из чего следует, что технологии управления дорожным движением надо менять на более современные, например, на математическое моделирование движения транспортных потоков, которое можно исследовать использования компьютерные технологии.

Модели (2.5) и (2.7) отлично подходят для моделирования начала движения транспорта со светофора на перекрёстках. С их помощью можно определить оптимальное время и оптимальную проходимость транспорта через светофор.

Модели можно интерпретировать как реальную ситуацию, в которой в начальный момент времени, все автомобили стоят на безопасном расстоянии друг от

друга перед светофором, на котором горит красный свет (рис. 5). Затем на светофоре загорается зелёный свет и все автомобили начинают движение. Если дальнейшая судьба, уехавших машин не важна, то можно использовать (2.5). В противном же случае (2.7).

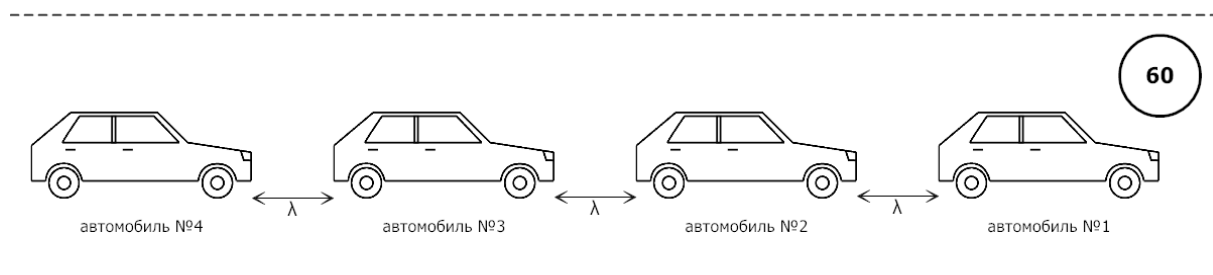


Рис. 5. Автомобили в момент старта.

Наибольшее влияние на проходимость транспортных средств через светофор оказывают мощность транспортного средства d и время реакции водителя τ , поэтому для различных значений этих параметров для системы (2.5). составлена таблица (2). В этой таблице приведено количество транспортных средств, которые пройдут через светофор за время $t = 40$ и будут соблюдать безопасную дистанцию $\lambda = 150$.

Таблица 2. Количество транспортных средств для модели (2.5)

$d \backslash \tau$	1	2	3	4	5
0.1	3	3	3	3	2
0.5	7	6	5	5	4
1	9	7	6	6	5
2	10	8	7	6	5
3	11	9	7	6	5

В таблице (3) приведено количество транспортных средств для системы (2.7), в которой время $t = 40$ безопасная дистанция $\lambda = 150$, а время начала остановки $t_s = 20$.

В таблицах (2) и (3) приведены данные для каких-то значений, не имеющих ничего общего с реальными данными, но и из них отчётливо видно, что проходимость транспортного потока различна при различных параметрах и может быть оптимизирована. Изучение реальных параметров и подстановка их в модели (2.5) и (2.7) даст точный результат, позволит смоделировать реальную жизненную ситуацию и поможет оптимизировать технологии управления транспортными потоками.

Таблица 3. Количество транспортных средств для модели (2.7)

$d \backslash \tau$	1	2	3	4	5
0.1	3	2	2	2	1
0.5	7	5	5	3	2
1	9	6	5	4	2
2	10	7	6	5	3
3	11	10	7	6	4

Заключение

На основе проведённых исследований можно сделать вывод, что теоретический подход, основанный на принципе следования транспортных средств друг за другом, позволяет построить содержательную математическую модель для описания движения транспортных потоков. С использованием этого теоретического подхода было построено две математические модели (2.5) и (2.7), которые имеют большую прикладную значимость. На основе этих моделей можно исследовать различные жизненные ситуации, например, смоделировать начало движения автомобилей, найти оптимальную проходимость транспортных средств через светофор и множество других аналогичных ситуаций. Все исследования можно проводить с использованием компьютерных технологий, что позволит сделать технологии управления дорожным движением более современными.

Список литературы

- [1] Дубелирь Г.Д. "Городскія улицы и мостовыя". 1912
- [2] https://spravochnick.ru/logistika/logisticheskie_potoki/transportnyy_potok/
- [3] Wilson R. E. Gipps' Model of Highway Traffic. 2002.
- [4] "ГОСТ Р 52289-2004. Национальный стандарт Российской Федерации. Технические средства организации дорожного движения. Правила применения дорожных знаков, разметки, светофоров, дорожных ограждений и направляющих устройств" (утв. Приказом Ростехрегулирования от 15.12.2004 N 120-ст) (ред. от 09.12.2013)
- [5] <https://www.yar.kp.ru/daily/26801.4/3835277/>