Linguaggi di Programmazione
AA 2016-2017
Gennaio 2017 Progetto E1P

Polinomi Multivariati

Marco Antoniotti e Gabriella Pasi
Dipartimento di Informatica, Sistemistica e Comunicazione
Università degli Studi di Milano Bicocca

10 Novembre, 2016

Scadenza

La consegna del progetto è fissata per il giorno 15 gennaio 2017 entro le 23:55 GMT+1.

1 Introduzione

Una delle prime e più importanti applicazioni dei calcolatori fu la manipolazione *simbolica* di operazioni matematiche. In particolare, i sistemi noti come *Computer Algebra Systems* (cfr., Mathematica, Maple, Maxima, Axiom, etc.) si preoccupano di fornire funzionalità per la manipolazione di *polinomi multivariati.*

Lo scopo di questo progetto è la costruzione di due librerie (in Prolog ed in Common Lisp) per la manipolazione – per l'appunto – di polinomi multivariati.

1.1 Polinomi multivariati

Un polinomio multivariato è un'espressione matematica che contiene diverse *variabili* a cui possono essere associati dei valori in un certo *dominio*[1]. Due esempi sono (con le solite regole di associatività):

$$x^2 + y^2,$$

$$42 \times x \times y^3 - z^2 \times y \times w \times x - x^3 \times w^3.$$

Il secondo polinomio viene normalmente riscritto in modo compatto come:

$$42xy^3 - z^2ywx - x^3w^3,$$

omettendo il simbolo di moltiplicazione $\times$.

Un polinomio è composto da *monomi*: i termini corrispondenti alle moltiplicazioni di *coefficienti* (elementi del dominio) e delle variabili (elevate a potenze). Nel secondo esempio qui sopra i monomi sono

$$42xy^3,$$

$$-z^2ywx,$$

$$-x^3w^3.$$

Notate anche che il polinomio qui sopra può anche essere scritto come

$$-w^3x^3 + 42xy^3 - wxyz^2,$$

ovvero *riordinando* i monomi (i quali a loro volta sono ordinati secondo un preciso schema).

Buona parte di questo progetto consiste nel costruire delle procedure di riordinamento delle variabili (con le loro potenze) in un monomio e dei monomi in un polinomio.

[1] Il dominio deve in realtà essere un *campo algebrico* $\mathbf{F} = \langle U, +, \times \rangle$.

2 Operazioni da implementare e rappresentazione

Le librerie che implementerete dovranno contenere alcune operazioni standard per la manipolazione di vari polinomi: estrazione dei coefficienti, calcolo del grado del polinomio, sua valutazione in un punto $\mathbf{v} = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ (dove k è il numero di variabili che compaiono nel polinomio), somma, moltiplicazione, etc, etc.

La rappresentazione di monomi e polinomi dovrà essere la seguente.

Prolog. I monomi devono essere rappresentati da termini siffatti:

```
m(Coefficient, TotalDegree, VarsPowers)
```

per i quali si può scrivere il predicato:

```
is_monomial(m(_C, TD, VPs)) :-
        integer(TD),
        TD >= 0,
        is_list(VPs).
```

Tralasciamo al momento come controllare `Coefficient`. La lista `VarsPowers` contiene termini come il seguente:

```
v(Power, VarSymbol)
```

per i quali possiamo scrivere il predicato:

```
is_varpower(v(Power, VarSymbol)) :-
        integer(Power),
        Power >= 0,
        atom(VarSymbol).
```

Ovvero la query seguente è verificata.

```
?- m(_, _, [v(2, x), v(2, y)] = m(_, _, VPs),
|  foreach(member(VP, VPs), is_varpower(VP)).
true
```

I polinomi sono rappresentati da termini più semplici.

```
poly(Monomials)
```

dove `Monomials` è una lista di monomi. Ovvero possiamo scrivere:

```
is_polynomial(poly(Monomials)) :-
        is_list(Monomials),
        foreach(member(M, Monomials), is_monomial(M)).
```

Common Lisp. I monomi devono essere rappresentati (analogamente al caso del Prolog) con oggetti siffatti:

```
(m coefficient total-degree vars-n-powers)
```

per i quali si può scrivere il predicato:

```
(defun is-monomial (m)
  (and (listp m)
       (eq 'm (first m))
       (let ((mtd (monomial-total-degree m))
             (vps (monomial-vars-and-powers m))
            )
          (and (integerp mtd)
               (>= mtd 0)
               (listp vps)
               (every #'is-varpower vps)))))
```

Sorvoliamo anche in questo caso su come controllare `coefficient`. La lista `vars-n-powers` contiene termini come il seguente:

(v *power var-symbol*)

per i quali possiamo scrivere il predicato:

```
(defun is-varpower(vp)
  (and (listp vp)
       (eq 'v (first vp))
       (let ((p (varpower-power vp))
             (v (varpower-symbol vp))
            )
         (and (integerp p)
              (>= p 0)
              (symbolp v)))))
```

Anche nel caso Common Lisp, i polinomi sono rappresentati da termini più semplici.

(poly *monomials*)

Ovvero possiamo scrivere:

```
(defun is-polynomial (p)
  (and (listp p)
       (eq 'poly (first p))
       (let ((ms (poly-monomials p)))
         (and (listp ms)
              (every #'is-monomial ms)))))
```

(Naturalmente possiamo aggiungere atri test di consistenza delle strutture dati).

Rappresentazioni dello zero. Il monomio pari al numero 0 è rappresentato con `m(0, 0, [])` in Prolog e con `(M 0 0 ())` in Common Lisp. Le vostre implementazioni devono normalizzare lo zero a questi casi. Naturalmente, anche il polinomio `poly([])` in Prolog e il polinomio `(POLY ())` in Common Lisp sono rappresentazioni dello 0.

Note. I predicati e le funzioni riportate nel testo sono solo ***esempi***, non necessariamente completi. Le vostre versioni possono essere diverse e tener conto di più casi.

2.1 Operazioni da implementare

Le vostre librerie dovranno implementare le operazioni seguenti.

Prolog. I predicati che dovrete implementare (oltre a quelli descritti sopra) servono a ispezionare le strutture dati e a fare calcoli simbolici con i polinomi.

***Predicate* `coefficients`(*Poly, Coefficients*)**

Il predicato `coefficients` è vero quando *Coefficients* è una lista dei – ovviamente – coefficienti di *Poly*.

***Predicate* `variables`(*Poly, Variables*)**

Il predicato `variables` è vero quando *Variables* è una lista dei simboli di variabile che appaiono in *Poly*.

***Predicate* `monomials`(*Poly, Monomials*)**

Il predicato `monomials` è vero quando *Monomials* è la lista – *ordinata*, si veda sotto – dei monomi che appaiono in *Poly*.

Predicate **`maxdegree`**(***Poly, Degree***)
Il predicato `maxdegree` è vero quando *Degree* è il massimo grado dei monomi che appaiono in *Poly*.

Predicate **`mindegree`**(***Poly, Degree***)
Il predicato `mindegree` è vero quando *Degree* è il minimo grado dei monomi che appaiono in *Poly*.

Predicate **`polyplus`**(***Poly1, Poly2, Result***)
Il predicato `polyplus` è vero quando *Result* è il polinomio somma di *Poly1* e *Poly2*.

Predicate **`polyminus`**(***Poly1, Poly2, Result***)
Il predicato `polyminus` è vero quando *Result* è il polinomio differenza di *Poly1* e *Poly2*.

Predicate **`polytimes`**(***Poly1, Poly2, Result***)
Il predicato `polytimes` è vero quando *Result* è il polinomio risultante dalla moltiplicazione di *Poly1* e *Poly2*.

Predicate **`as_monomial`**(***Expression, Monomial***)
Il predicato `as_monomial` è vero quando *Monomial* è il termine che rappresenta il monomio risultante dal "parsing" dell'espressione *Expression*; il monomio risultante deve essere appropriatamente ordinato (si veda sotto).

Predicate **`as_polynomial`**(***Expression, Polynomial***)
Il predicato `as_polynomial` è vero quando *Polynomial* è il termine che rappresenta il polinomio risultante dal "parsing" dell'espressione *Expression*; il polinomio risultante deve essere appropriatamente ordinato (si veda sotto).

Predicate **`polyval`**(***Polynomial, VariableValues, Value***)
Il predicato `polyval` è vero quanto *Value* contiene il valore del polinomio *Polynomial* (che può anche essere un monomio), nel punto n-dimensionale rappresentato dalla lista *VariableValues*, che contiene un valore per ogni variabile ottenuta con il predicato `variables/2`.

Predicate **`pprint_polynomial`**(***Polynomial***)
Il predicato `pprint_polynomial` risulta vedo dopo aver stampato (sullo "standard output") una rappresentazione **tradizionale** del termine polinomio associato a *Polynomial*. Si puó omettere il simbolo di moltiplicazione.

Common Lisp. Le funzioni che dovrete implementare (oltre a quelle descritti sopra) servono a ispezionare le strutture dati e a fare calcoli simbolici con i polinomi.

Si noti che in Common Lisp sarà necessario costruire anche delle funzioni che servono ad estrarre parti delle varie strutture dati he rappresentano monomi e polinomi. In Prolog possiamo usare l'unificazione per ottenere questo risultato, in Common Lisp no[2].

Function **`varpowers`** ***Monomial*** $\rightarrow$ ***VP-list***

Data una struttura *Monomial*, ritorna la lista di *varpowers VP-list*.

Function **`vars-of`** ***Monomial*** $\rightarrow$ ***Variables***

Data una struttura *Monomial*, ritorna la lista di variabili *Variables*.

[2]A meno di implementare un "unificatore" per CL, ovviamente.

Function* `monomial-degree` *Monomial* → *TotalDegree

Data una struttura *Monomial*, ritorna il suo grado totale *TotalDegree*.

Function* `monomial-coefficient` *Monomial* → *Coefficient

Data una struttura *Monomial*, ritorna il suo coefficiente *Coefficient*.

Function* `coefficients` *Poly* → *Coefficients

La funzione `coefficients` ritorna una lista *Coefficients* dei – ovviamente – coefficienti di *Poly*.

Function* `variables` *Poly* → *Variables

La funzione `variables` ritorna una lista *Variables* dei simboli di variabile che appaiono in *Poly*.

Function* `monomials` *Poly* → *Monomials

La funzione `monomials` ritorna la lista – *ordinata*, si veda sotto – dei monomi che appaiono in *Poly*.

Function* `maxdegree` *Poly* → *Degree

La funzione `maxdegree` ritorna il massimo grado dei monomi che appaiono in *Poly*.

Function* `mindegree` *Poly* → *Degree

La funzione `mindegree` ritorna il minimo grado dei monomi che appaiono in *Poly*.

Function* `polyplus` *Poly1 Poly2* → *Result

La funzione `polyplus` produce il polinomio somma di *Poly1* e *Poly2*.

Function* `polyminus` *Poly1 Poly2* → *Result

La funzione `polyplus` produce il polinomio differenza di *Poly1* e *Poly2*.

Function* `polytimes` *Poly1 Poly2* → *Result

La funzione `polytimes` ritorna il polinomio risultante dalla moltiplicazione di *Poly1* e *Poly2*.

Function* `as-monomial` *Expression* → *Monomial

La funzione `as-monomial` ritorna la struttura dati (lista) che rappresenta il monomio risultante dal "parsing" dell'espressione *Expression*; il monomio risultante deve essere appropriatamente ordinato (si veda sotto).

Function* `as-polynomial` *Expression* → *Polynomial

La funzione `as-polynomial` ritorna la struttura dati (lista) che rappresenta il monomio risultante dal "parsing" dell'espressione *Expression*; il polinomio risultante deve essere appropriatamente ordinato (si veda sotto).

Function* `polyval` *Polynomial VariableValues* → *Value

La funzione `polyval` restituisce il valore *Value* del polinomio *Polynomial* (che può anche essere un monomio), nel punto n-dimensionale rappresentato dalla lista *VariableValues*, che contiene un valore per ogni variabile ottenuta con la funzione `variables`.

Function* `pprint-polynomial` *Polynomial* → *NIL

La funzione `pprint-polynomial` ritorna `NIL` dopo aver stampato (sullo "standard output") una rappresentazione **tradizionale** del termine polinomio associato a *Polynomial*. Si puó omettere il simbolo di moltiplicazione.

3 Ordinamento di monomi e polinomi multivariati

Un polinomio univariato è normalmente scritto in ordine decrescente (o crescente) delle potenze della variabile. Ad esempio:

$$y^4 - 3y^2 - 42y + 123.$$

I monomi ed i polinomi multivariati possono essere invece scritti e "ordinati" in molti modi diversi; ognuno di questi ordinamenti ha una sua funzione in *Computer Algebra*. Per questo progetto dovrete implementare il seguente ordinamento.

Ordinamento di un monomio. Un monomio deve essere ordinato in *ordine lessicografico crescente* delle variabili. Ovvero:

$$y^{42}x^4sz^2t^2 \Rightarrow st^2x^4y^{42}z^2.$$

Si noti come l'esponente non modifichi l'ordinamento.

Ordinamento di un polinomio. Dato un insieme di monomi (ordinati), il polinomio risultante sarà ordinato prima in *ordine crescente del grado dei monomi* con spareggi determinati dalle variabili (questa è la ragione per tener traccia del grado complessivo di un monomio). Ad esempio:

$$y^4zx^5 - yzr + y^4rz^5 \Rightarrow -ryz + ry^4z^5 + x^5y^4z.$$

L'ordinamento di due monomi con le stesse variabili va fatto in modo *crescente* rispetto alle combinazioni variabile/esponente. Ad esempio:

$$ac + a^2 + ab + a \Rightarrow a + ab + ac + a^2.$$

Dove $ab \prec a^2$, dato che $a \prec a^2$.

Indicazioni per l'implementazione

I vostri predicati `as_monomial`, `as_polynomial` e le vostre funzioni `as-monomial` e `as-polynomial` dovranno tenere presenti questi ordinamenti. I predicati di libreria SWI `sort/4` e `msort` serviranno a questa bisogna; lo stesso dicasi per la funzione Common Lisp `sort`[3]. La produzione di strutture dati che non rispettano questi ordinamenti risulterà in voti insufficienti.

4 "Parsing" di polinomi

I predicati `as_monomial`, `as_polynomial` e le funzioni `as-monomial` e `as-polynomial` si preoccupano di trasformare un monomio e un polinomio nella rappresentazione canonica interna. Il loro ruolo è quello di fare il *parsing* di una rappresentazione superficiale di monomi e polinomi. Queste rappresentazioni sono diverse per Prolog e Common Lisp.

[3] Attenzione che la `sort` di Common Lisp è una funzione cosiddetta "distruttiva"; è sempre bene *copiare* il suo input prima di invocarla.

Prolog In questo caso la rappresentazione superficiale di monomi e polinomi è quella normale, con moltiplicazioni e potenze esplicite. Per semplicità potete sempre aspettarvi di avere il coefficiente come primo elemento; il coefficiente 1 può sempre essere omesso. Ad esempio:

```
?- as_monomial(3 * y * w * t^3, M).
M = m(3, 5, [v(3, t), v(1, w), v(1, y)]).

?- as_monomial(y * s^3 * t^3, M).
M = m(1, 7, [v(3, s), v(3, t), v(1, y)]).

?- as_polynomial(y * s^3 * t^3 - 4 + x * y, P).
P = poly([m(-4, 0, []),
          m(1, 2, [v(1, x), v(1, y)]),
          m(1, 7, [v(3, s), v(3, t), v(1, y)])])
```

(N.B. L'ultimo esempio è stato indentato manualmente per facilitare la lettura).

Common Lisp In questo secondo caso, la rappresentazione superficiale di monomi e polinomi utilizza la semplice sintassi prefissa Common Lisp. Anche in questo caso, potete sempre aspettarvi che il primo coefficiente di un monomio sia il primo elemento e che il coefficiente 1 può sempre essere omesso. Ad esempio:

```
cl-prompt> (as-monomial '(* 3 y w (expt t 3)))
(M 3 5 ((V 3 T) (V 1 W) (V 1 Y)))

cl-prompt> (as-monomial '(* y (expt s 3) (expt t 3)))
(M 1 7 ((V 3 S) (V 3 T) (V 1 Y)))

cl-prompt> (as-polynomial '(+ (* y (expt s 3) (expt t 3)) -4 (* x y)))
(P ((M -4 0 NIL)
    (M 1 2 ((V 1 X) (V 1 Y)))
    (M 1 7 ((V 3 S) (V 3 T) (V 1 Y)))))
```

(N.B. L'ultimo esempio è stato indentato manualmente per facilitare la lettura).

Come potete notare i polinomi in sintassi Common Lisp sono molto semplici: hanno un `+` come operatore principale, `expt` per indicare le potenze e l'eventuale segno di sottrazione `-` è inglobato nel coefficiente. La sintassi superficiale dei polinomi è la seguente:

```
polynomial ::= '(' '+' monomial+ ')'

monomial   ::= number
            |   '(' '*' [coefficient] var-expt* ')'

var-expt   ::= variable
            ::= '(' 'expt' variable exponent ')'

variable   ::= symbol

exponent   ::= non-negative integer
```

5 Esempi

Questi sono alcuni esempi di come si può usare questa libreria. NB. Dovete naturalmente essere preparati a calcolare anche altri esempi.

Common Lisp

```
cl-prompt> (setf qd (as-monomial 42))
(M 42 0 NIL)

cl-prompt> (setf m1 (as-monomial '(* y  (expt s 3) (expt t 3))))
(M 1 7 ((V 3 S) (V 3 T) (V 1 Y)))

cl-prompt> (setf p1 (as-polynomial '(+ (* -1 x) (* x w))))
(P ((M -1 1 ((V 1 X))) (M 1 2 ((V 1 W) (V 1 X)))))

cl-prompt> (setf p2 (as-polynomial '(+ (* y (expt s 3) (expt t 3)) -4 (* x y))))
(P ((M -4 0 NIL) (M 1 2 ((V 1 X) (V 1 Y))) (M 1 7 ((V 3 S) (V 3 T) (V 1 Y)))))

cl-prompt> (polytimes m1 p1) ; Output formattato per leggibilità.
(P ((M -1 8 ((V 3 S) (V 3 T) (V 1 X) (V 1 Y)))
    (M 1 9 ((V 3 S) (V 3 T) (V 1 W) (V 1 X) (V 1 Y)))))

cl-prompt> (pprint-polynomial *)
-1 S^3 T^3 X Y + S^3 T^3 W X Y
NIL
```

Prolog

```
?- as_monomial(42, QD).
QD = m(42, 0, []).

?- as_polynomial(-1 * x + x * y, P1).
P1 = poly([m(-1, 1, [v(1, x)]), m(1, 2, [v(1, x), v(1, y)])])

?- as_polynomial(-1 * x + x * y, P1), variables(P1, Vs).
P1 = poly([m(-1, 1, [v(1, x)]), m(1, 2, [v(1, x), v(1, y)])])
Vs = [x, y]

?- as_polynomial(y * s^3 * t^3 - 4 + x * y, P2).
%% Formattato per leggibilità.
P2 = poly([m(-4, 0, []),
           m(1, 2, [v(1, x), v(1, y)]),
           m(1, 7, [v(3, s), v(3, t), v(1, y)])])

?- as_monomial(y * s^3 * t^3, M1),
|  as_polynomial(-1 * x + x * y, P1),
|  polytimes(M1, P1, R),
|  pprint_polynomial(R).

-1 * S^3 * T^3 * X * Y + S^3 * T^3 * X * Y^2

M1 = m(1, 7, [v(3, s), v(3, t), v(1, y)]),
P1 = poly([m(-1, 1, [v(1, x)]), m(1, 2, [v(1, x), v(1, y)])]),
R  = poly([m(-1, 8, [v(3, s) v(3, t) v(1, x) v(1, y)]),
           m(1, 9, [v(3, s), v(3, t), v(1, x), v(2, y)])]).
```

6 Suggerimenti

Si suggerisce di procedere inizialmente con la costruzione dei predicati `as_...` e delle funzioni `as-...` e con il predicato `pprint_polynomial` e la funzione `pprint-polynomial`, al fine di avere una base su cui poi costruire le operazioni successive. Le funzionalità di ordinamento di Prolog, (`sort`, `msort`, `predsort`, ...) e di Common Lisp (`sort`) sono senz'altro utili per il progetto. Per Prolog sarà utile anche `list_to_set`; per Common Lisp potrete anche considerare `remove-duplicates`.

7 Conclusioni

La libreria di funzioni che avrete costruito è un primo passo verso la costruzione di un sistema di *Computer Algebra* quali Mathematica™, Maxima, Axiom etc.

La rappresentazione di polinomi e monomi non è necessariamente la migliore e sono molte le variazioni sul tema; lo scopo di questa rappresentazione è di coniugare semplicità e flessibilità, oltre ad essere facile da manipolare[4]. Qualora si vogliano fare operazioni più sofisticate sui polinomi, ad esempio, calcolare il `gcd` di due polinomi o calcolare una *base di Gröbner*, allora sarà necessario adottare delle rappresentazioni e degli ordinamenti diversi.

[4]Specie per il correttore.

8 Da consegnare...

LEGGERE ATTENTAMENTE LE ISTRUZIONI QUI SOTTO
(IN ITALIANO!).

PRIMA DI CONSEGNARE, CONTROLLATE **ACCURATAMENTE** CHE TUTTO SIA NEL FORMATO E CON LA STRUTTURA DI CARTELLE RICHIESTI.

Dovete consegnare:

> Uno .zip file dal nome <Cognome>_<Nome>_<matricola>_mvpoli_LP_201701.zip *che conterrà una cartella dal nome* <Cognome>_<Nome>_<matricola>_mvpoli_LP_201701.

Se il vostro nome e cognome sono: Gian Giacomo Pier Carl Luca Serbelloni Lupmann Vien Dal Mare Il nome del file sarà:

> Serbelloni_Lupmann_Vien_Dal_Mare_Gian_Giacomo_Pier_Carl_Luca_123456_mvpoli_LP_201701.zip.

Inoltre...

- Nella cartella dovete avere due sottocartelle: una di nome Lisp e l'altra di nome Prolog.
- Nella directory Lisp dovete avere:
  - un file dal nome mvpoli.lisp che contiene il codice di della libreria.
    - Le prime linee del file **devono essere dei commenti con il seguente formato**, ovvero devono fornire le necessarie informazioni secondo le regole sulla collaborazione pubblicate su Moodle.
      ```
      ;;;; <Matricola> <Cognome> <Nome>
      ;;;; <eventuali collaborazioni>
      ```
      Il contenuto del file deve essere ben commentato.
  - Un file README in cui si spiega come si possono usare le funzioni definite nel programma.
- Nella directory Prolog dovete avere:
  - un file dal nome mvpoli.pl che contiene il codice di della libreria.
    - Le prime linee del file **devono essere dei commenti con il seguente formato**, ovvero devono fornire le necessarie informazioni secondo le regole sulla collaborazione pubblicate su Moodle.
      ```
      %%%% <Matricola> <Cognome> <Nome>
      %%%% <eventuali collaborazioni>
      ```
      Il contenuto del file deve essere ben commentato.
  - Un file README (si! Anche qui anche se è una ripetizione) in cui si spiega come si possono usare i predicati definiti nel programma.

ATTENZIONE! Consegnate solo dei files e directories con nomi costruiti come spiegato. Niente spazi extra **e soprattutto niente .rar or .7z o .tgz – solo .zip**!
Repetita juvant! ***NON CONSEGNARE FILES*** **.rar!!!!**

Esempio:
File `.zip`:

```
Antoniotti_Marco_424242_mvpoli_LP_201701.zip
```

Che contiene:

```
prompt$ unzip -l Antoniotti_Marco_424242_mvpoli_LP_201701.zip
Archive:  Antoniotti_Marco_424242_mvpoli_LP_201701.zip
  Length      Date    Time    Name
 --------    ----    ----    ----
        0  12-02-16 09:59   Antoniotti_Marco_424242_mvpoli_LP_201701/
        0  12-04-16 09:55   Antoniotti_Marco_424242_mvpoli_LP_201701/Lisp/
     4783  12-04-16 09:51   Antoniotti_Marco_424242_mvpoli_LP_201701/Lisp/mvpoli.lisp
    10598  12-04-16 09:53   Antoniotti_Marco_424242_mvpoli_LP_201701/Lisp/README.txt
        0  12-04-16 09:55   Antoniotti_Marco_424242_mvpoli_LP_201701/Prolog/
     4623  12-04-16 09:51   Antoniotti_Marco_424242_mvpoli_LP_201701/Prolog/mvpoli.pl
    10622  12-04-16 09:53   Antoniotti_Marco_424242_mvpoli_LP_201701/Prolog/README.txt
 --------                   -------
    30626                   7 files
```

8.1 Valutazione

Il programma sarà valutato sulla base di una serie di test standard. In particolare si valuterà la copertura e correttezza delle operazione di base sui polinomi.