UNIWERSYTET GDAŃSKI

WYDZIAŁ MATEMATYKI, FIZYKI I INFORMATYKI
Kierunek: Informatyka Praktyczna
Rok II Semestr 4
Algorytmy Numeryczne

Konrad Kreczko, Michał Pomirski

NIEZDECYDOWANY WĘDROWIEC

Gdańsk 2024

Spis treści

1 Opis problemu

1.1 Wersja uproszczona

Niezdecydowany wędrowiec spacerując parkową aleją położoną w linii NS porusza się jeden krok na północ z prawdopodobieństwem 1/2 i z prawdopodobieństwem 1/2 jeden krok na południe. Przyjmujemy, że wędrowiec robi równe kroki w obu kierunkach, a kolejne losowania są niezależne.

W odległości n kroków na północ od początkowego położenia (start) wędrowca znajduje się odkryta studzienka kanalizacyjna (OSK) do której niezdecydowany wędrowiec z pewnością wpadnie, złamie nogę i tak skończy się ten spacer, jeśli tylko do niej dotrze.

W odległości s kroków na południe od początkowego położenia wędrowca znajduje się wyjści z parku. Po dojściu do wyjścia wędrowiec przestaje być niezdecydowany i dalej pewnym krokiem bezpiecznie wraca do domu.

Interesuje nas prawdopodobieństwo, że wędrowiec bezpiecznie wróci do domu.

1.2 Wersja podstawowa

Park składa się z m alejek, które krzyżują się w punktach $v_1, v_2, ..., v_n$. Początek i koniec alejki uważamy za skrzyżowanie. Jest co najwyżej jedna alejka łącząca v_i z v_j o długości d_{ij} kroków, $d_{ij} \in \mathbb{N}^+$.

Niezdecydowany wędrowiec spacerując parkową aleją porusza się podobnie jak w wersji uproszczonej z prawdopodobieństwem 1/2 w jedną lub drugą stronę. Jeśli trafi na skrzyżowanie, to wybiera z równym prawdopodobieństwem jedną z alejek (łącznie z tą z której trafił na skrzyżowanie).
Jedno ze skrzyżowań jest punktem startowym, jedno ze skrzyżowań jest wyjściem.
W jednym ze skrzyżowań znajduje się OSK (ale nie w wyjściu i nie w punkcie startowym).
Podobnie jak w wersji uproszczonej, interesuje nas prawdopodobieństwo, że wędrowiec bezpiecznie wróci do domu.
Dodatkowo, możliwe są poniższe rozszerzenia danego problemu:

- $R0$: Może się zdarzyć, że w parku jest więcej niż jedno wyjście.
- $R1$: Może się zdarzyć, że w parku jest więcej niż jedna OSK.
- $R2$: W parku może być dwóch wędrowców, należy wyznaczyć prawdopobieństwo, że oboje wrócą do domu. W trakcie wędrówki, jeśli oboje miną się w tej samej alejce, staną w tym samym miejscu alejki lub na tym samym skrzyżowaniu, dochodzi do awantury i incydentu, który nie kończy się bezpiecznym powrotem do domu.
- $R3$: Może się zdarzyć, że kilka alejek, być może różnej długości, łączy te same dwa skrzyżowania.
- $R4$: Przy wybranych skrzyżowaniach stoją pojemniki na śmieci. Wędrowiec nie lubi śmietników i prawdopodobieństwo, że zrobi krok do miejsca, gdzie pojemnik się znajduje jest dwa razy mniejsze niż w stronę, gdzie pojemnika nie ma. Należy uwzględnić przypadek bardzo krótkich alejek, np. o długości jednego lub dwóch kroków.

2 Podejście do problemu

2.1 Wersja uproszczona

Dla $n = 2$ i $s = 3$, oznaczymy miejsca w których może stać wędrowiec jako: m_0 ($wyjcie$), m_1, m_2, m_3 ($start$), m_4 i m_5 (OSK).
Niech p_i oznacza prawdopodbieństwo bezpieczenego powrotu do domu, gdy wędrowiec stoi w punkcie m_i.
Możemy zapisać następujące równania:

$$p_0 = 1, \tag{1}$$
$$p_5 = 0, \tag{2}$$
$$p_1 = 0.5 \cdot p_0 + 0.5 \cdot p_2 \tag{3}$$

W postaci macierzowej, układ równań odzwierciedlający podaną sytuację wygląda tak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Rozwiązaniem tego układu jest wektor prawdopodobieństw P, który dla przypadku powyżej wynosi:

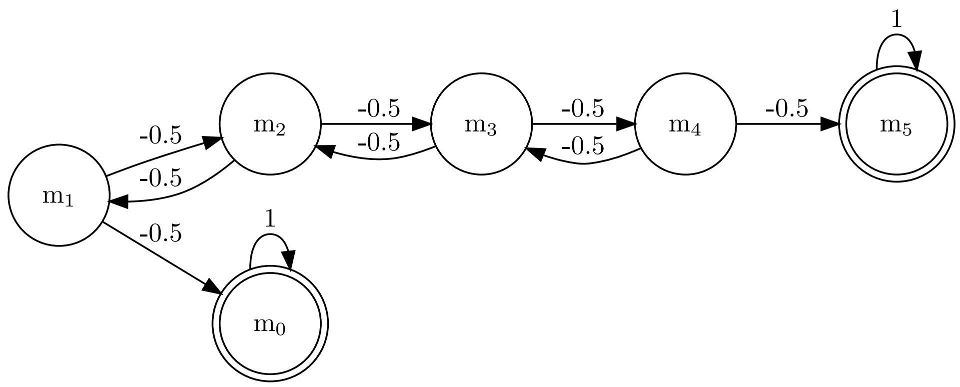
$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \\ 0.6 \\ 0.4 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Zatem, dla danego punktu startowego $s = 3$, prawdopobieństwo bezpieczenego powrotu do domu wynosi 0.4.

2.2 Błądzenie losowe w grafach

Opisany problem wędrowca jest przykładem problemu błędzenia losowego w grafach, związanego z teorią obwodów elektrycznych, czy algorytmu PageRank.

Problem ten można przedstawić w postaci grafu skierowanego, gdzie skrzyżowania przedstawione są jako wierzchołki, a alejki - jako krawędzie z wagami odpowiadającymi prawdopodobieństwu przejścia między skrzyżowaniami.



Rysunek 1: Przedstawienie wersji uproszczonej problemu w postaci grafu skierowanego.

Przedstawiając taki graf jako macierz sąsiedztwa, otrzymujemy tę samą macierz co w (4).

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} m_0 & m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \end{array} \\
\begin{array}{c} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.5 & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0.5 & 1 & -0.5 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -0.5 & 1 & -0.5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 & -0.5 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

3 Algorytmy

3.1 Eliminacja Gaussa bez wyboru elementu podstawowego

Eliminacja Gaussa bez wyboru elementu podstawowego

3.2 Eliminacja Gaussa z częściowym wyborem elementu podstawowego

Eliminacja Gaussa z częściowym wyborem elementu podstawowego

3.3 Metoda iteracyjna Gaussa-Seidela

Metoda iteracyjna Gaussa-Seidela

4 Hipotezy

4.1 Hipoteza 1

Algorytm A2 zwykle daje dokładniejsze wyniki niż A1. Różnica w dokładności rośnie wraz z rozmiarem macierzy i liczbą niezerowych współczynników.

Dowód fajny tak.

4.2 Hipoteza 2

Algorytm A3 zawsze działa dla podstawowego zadania.

Dowód fajny tak.

4.3 Hipoteza 3

Jeśli Algorytm A3 jest zbieżny do rozwiązania, to wyniki otrzymujemy istotnie szybciej niż dla A1 i A2.

Dowód fajny tak.

5 Podsumowanie

Podsumowanie

6 Zakres pracy

Konrad Kreczko: Implementacja algorytmu A1, Metoda Monte Carlo, Implementacja wersji podstawowej

Michał Pomirski: Implementacja algorytmu A2, Metoda Monte Carlo, Sprawozdanie