Algorytmy Numeryczne – Zadanie 2
Niezdecydowany wędrowiec

14 marca 2024

1 Wersja uproszczona

Niezdecydowany wędrowiec spacerując parkową aleją położoną w linii NS porusza się jeden krok na północ z prawdopodobieństwem 1/2 i z prawdopodobieństwem 1/2 jeden krok na południe. Proszę przyjąć, że wędrowiec robi równe kroki w obu kierunkach a kolejne losowania są niezależne.

W odległości n kroków na północ od początkowego położenia (start) wędrowca znajduje się odkryta studzienka kanalizacyjna (OSK) do której niezdecydowany wędrowiec z pewnością wpadnie, złamie nogę i tak skończy się ten spacer jeśli tylko do niej dotrze.

W odległości s kroków na południe od początkowego położenia wędrowca znajduje się wyjście z parku. Po dojściu do wyjścia wędrowiec przestaje być niezdecydowany i dalej pewnym krokiem bezpiecznie wraca do domu.

Interesuje nas prawdopodobieństwo, że wędrowiec bezpiecznie wróci do domu.

Przykład

Niech $n = 2$ i $s = 3$, a więc OSK jest 5 kroków od wejścia, a wędrowiec stoi 3 kroki od wejścia.

Rozwiązanie przy pomocy układu równań liniowych

Nazwijmy miejsca, w których może stać wędrowiec: m_0 (wyjście), m_1, m_2, m_3 (start), m_4 i m_5 (OSK). Niech p_i oznacza prawdopodobieństwo bezpiecznego powrotu do domu, gdy wędrowiec stoi w punkcie m_i. Zauważmy, że nie jest istotne, czy wędrowiec zrobił krok na północ i po chwili na południe by stanąć w tym samym miejscu. Losowania są niezależne, proces jest bezpamięciowy, sytuacja w parku się nie zmienia z kolejnymi krokami wędrowca i prawdopodobieństwo zależy tylko od tego, gdzie się on aktualnie znajduje. Możemy więc zapisać następujące równania:

$$p_0 = 1,$$

gdyż wędrowiec od wyjścia wraca bezpiecznie do domu

$$p_5 = 0,$$

gdyż wędrowiec wpada w studzienkę

$$p_1 = 0.5 \cdot p_0 + 0.5 \cdot p_2,$$

gdyż z równym prawdopodobieństwem wędrowiec idzie w stronę wyjścia lub w stronę OSK. Podobne równania możemy zapisać dla innych miejsc, w postaci macierzowej otrzymamy następujący układ równań:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 1 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązaniem tego układu jest wektor prawdopodobieństw P, który dla przypadku powyżej wynosi:

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \\ 0.6 \\ 0.4 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A więc obliczyliśmy, że dla wskazanego w przykładzie punktu startowego wędrowiec wraca bezpiecznie do domu z prawdopodobieństwem 0.4. Zauważmy że, niejako przy okazji, obliczyliśmy prawdopodobieństwa dla wszystkich możliwych punktów startowych.

Metoda Monte Carlo

Stosując metodę Monte Carlo możemy zweryfikować, czy wyniki naszych obliczeń znajdą potwierdzenie w symulacji.

Postąpimy w następująco:

- ustawiamy wędrowca w miejscu startowym
- prowadzimy symulację wędrówki aż wędrowiec trafi w OSK lub do wyjścia
- powyższe powtarzamy N razy zliczając i – ile razy trafiliśmy do wyjścia
- za oszacowanie prawdopodobieństwa powrotu do domu bierzemy iloraz i/N

2 Wersja Podstawowa

Park składa się z m alejek, które krzyżują się w punktach v_1, v_2, $\ldots$, v_n. Początek i koniec alejki uważamy za skrzyżowanie. Jest co najwyżej jedna alejka łącząca v_i z v_j o długości d_{ij} kroków, $d_{ij} \in \mathbb{N}^+$.

Niezdecydowany wędrowiec spacerując parkową aleją porusza się podobnie jak w wersji uproszczonej z prawdopodobieństwem $1/2$ w jedną lub drugą stronę. Jeśli trafi na skrzyżowanie, to wybiera z równym prawdopodobieństwem jedną z alejek (łącznie z tą z której trafił na skrzyżowanie).

Jedno ze skrzyżowań jest punktem startowym, jedno ze skrzyżowań jest wyjściem. W jednym ze skrzyżowań znajduje się OSK (ale nie w wyjściu i nie w punkcie startowym).

Podobnie jak w wersji uproszczonej interesuje nas prawdopodobieństwo, że wędrowiec bezpiecznie wróci do domu.