Relatório

November 11, 2019

1 Processos Estocásticos - Trabalho de Simulação

Alunos: Matheus Popst e Vitória Guardieiro

[1]:
```python
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as pl
```

1.1 Exercício 1

[2]:
```python
from exercicio1 import exercicio1
```

[3]:
```python
P = np.matrix([[1/3, 0, 2/3, 0, 0],
               [1/4, 1/2, 1/4, 0, 0],
               [1/2, 0, 1/2, 0, 0],
               [0, 0, 0, 0, 1],
               [0, 0, 0, 2/3, 1/3]])
P
```

[3]:
```
matrix([[0.33333333, 0.        , 0.66666667, 0.        , 0.        ],
        [0.25      , 0.5       , 0.25      , 0.        , 0.        ],
        [0.5       , 0.        , 0.5       , 0.        , 0.        ],
        [0.        , 0.        , 0.        , 0.        , 1.        ],
        [0.        , 0.        , 0.        , 0.66666667, 0.33333333]])
```

Todos os estados são recorrentes positivos, exceto o estado 2, que é transiente. Além disso, os estados 1 e 3 formam uma classe de recorrência, assim como 4 e 5.

Para encontrarmos as distribuições estacionárias solucionamos $\pi P = \pi$:

$\frac{\pi_1}{3} + \frac{\pi_2}{4} + \frac{\pi_3}{2} = \pi_1$

$\frac{\pi_2}{2} = \pi_2$

$\frac{2\pi_1}{3} + \frac{\pi_2}{4} + \frac{\pi_3}{2} = \pi_3$

$\frac{2\pi_5}{3} = \pi_4$

$\pi_4 + \frac{\pi_5}{3} = \pi_5$

$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1$

E assim temos que: $\pi_2 = 0$, $\pi_1 = \frac{3\pi_3}{4}$ e $\pi_4 = \frac{2\pi_5}{3}$

Inserindo na última equação temos que $\pi_4 = \frac{6-14\pi_1}{15}$

E então, a distribuição estacionária é da forma $\left[k, 0, \frac{4k}{3}, \frac{6-14k}{15}, \frac{3-7k}{5}\right]$, com k real de forma que $\pi > 0$.

Para a distribuição estacionária quando começamos nos estados 1, 2 ou 3, temos que é impossível chegarmos nos estados 4 ou 5, e então $\pi_4 = \pi_5 = 0$, logo $k = \frac{3}{7}$ e $\pi = \left[\frac{3}{7}, 0, \frac{4}{7}, 0, 0\right]$.

Assim, temos que:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1|\ X_0 = i) = \frac{3}{7}$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2|\ X_0 = i) = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 3|\ X_0 = i) = \frac{4}{7}$$

para i em 1, 2 ou 3, sendo todos iguais a zero caso contrário.

Já para os estados 4 e5, temos que sua distribuição estacionária tem $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 0$, já que é impossível chegarmos em 1, 2 ou 3 saindo de 4 ou 5. Assim, $k = 0$ e $\pi = \left[0, 0, 0, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$.

E então:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 4|\ X_0 = i) = \frac{2}{5}$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 5|\ X_0 = i) = \frac{3}{5}$$

para i em 4 ou 5, sendo todos iguais a zero caso contrário.

Portanto, os valores corretos que esperamos encontrar com a simulação para os limites, considerando as colunas como i e as linhas como j, são:

[4]:
```
Limites = np.matrix([[3/7, 0, 4/7, 0, 0],
                     [3/7, 0, 4/7, 0, 0],
                     [3/7, 0, 4/7, 0, 0],
                     [0, 0, 0, 2/5, 3/5],
                     [0, 0, 0, 2/5, 3/5]])
Limites
```

[4]:
```
matrix([[0.42857143, 0.        , 0.57142857, 0.        , 0.        ],
        [0.42857143, 0.        , 0.57142857, 0.        , 0.        ],
        [0.42857143, 0.        , 0.57142857, 0.        , 0.        ],
        [0.        , 0.        , 0.        , 0.4       , 0.6       ],
        [0.        , 0.        , 0.        , 0.4       , 0.6       ]])
```

Simulando a cadeia de Markov temos:

[5]:
```python
L = np.zeros((5, 5))

for i in range(5):
    for j in range(5):
        L[i,j] = exercicio1(P, i+1, j+1, 100, 100)
```

[6]:
```python
L ##resultado estimado
```

[6]:
```
array([[0.42, 0.  , 0.61, 0.  , 0.  ],
       [0.43, 0.  , 0.52, 0.  , 0.  ],
       [0.34, 0.  , 0.57, 0.  , 0.  ],
       [0.  , 0.  , 0.  , 0.37, 0.63],
       [0.  , 0.  , 0.  , 0.44, 0.59]])
```

1.2 Exercício 2

[7]:
```python
from exercicio2 import exercicio2
```

Dada a matriz de probabilidades:

[8]:
```python
P = np.matrix([[1/3, 0, 0, 2/3],
               [1/4, 1/2, 1/4, 0],
               [1/2, 0, 1/2, 0],
               [0, 1/3, 0, 2/3]])
```

Estimo numericamente $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ através das simulações:

[9]:
```python
exercicio2(P, 1, 1000, 100) ##estimativa numérica
```

[9]:
```
8.907189999999998
```

Já o valor correto, temos que, pelo Teorema ergódico:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2\pi_i$$

Resolvendo a equação $\pi P = \pi$, temos que $\pi = \left[\frac{3}{15}, \frac{4}{15}, \frac{2}{15}, \frac{6}{15}\right]$, e então:

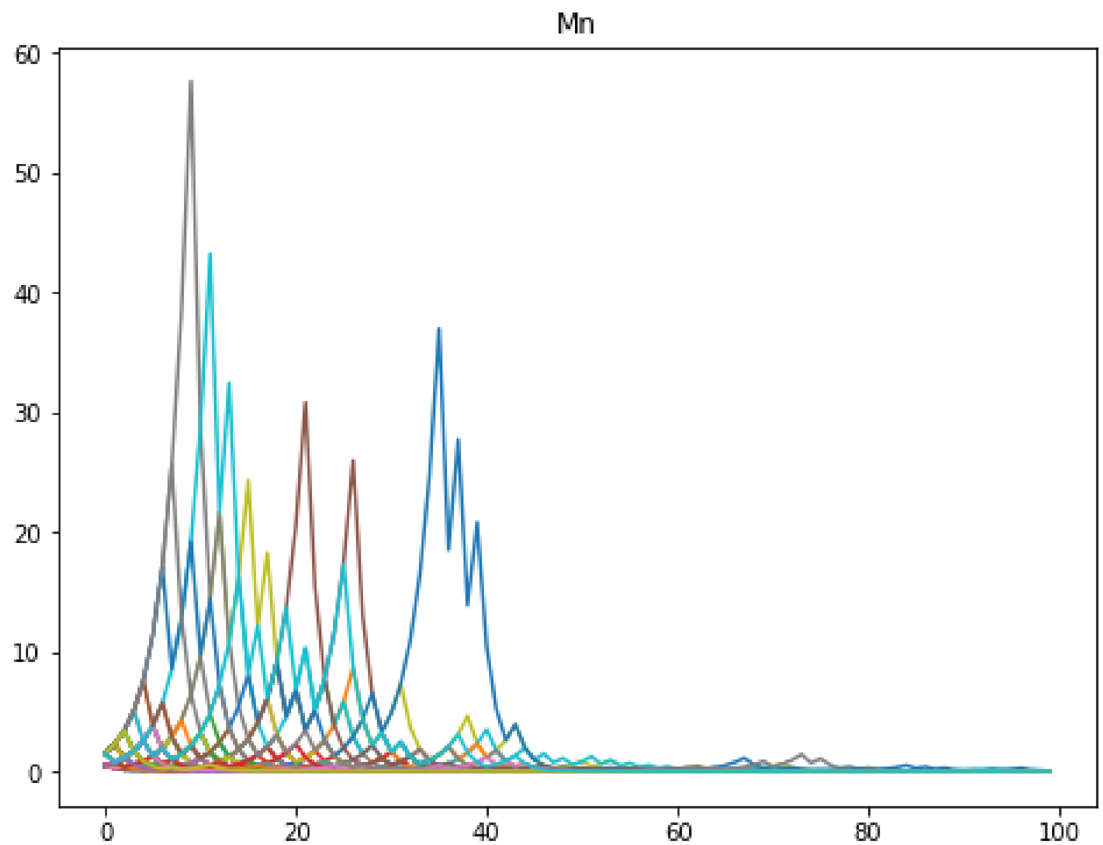
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2\pi_i = 1\cdot\frac{3}{15} + 4\cdot\frac{4}{15} + 9\cdot\frac{2}{15} + 16\cdot\frac{6}{15} = \frac{133}{15} \approx 8,666$$

2 Exercício 3

[10]:
```
from exercicio3 import martingal
```

Simulo 100 martinagales através da função *martingal* e ploto seus resultados:

[11]:
```
pl.figure(figsize=(8,6))
for i in range(100):
    pl.plot(martingal(100))
pl.title("Mn");
```



2.1 Exercício 4

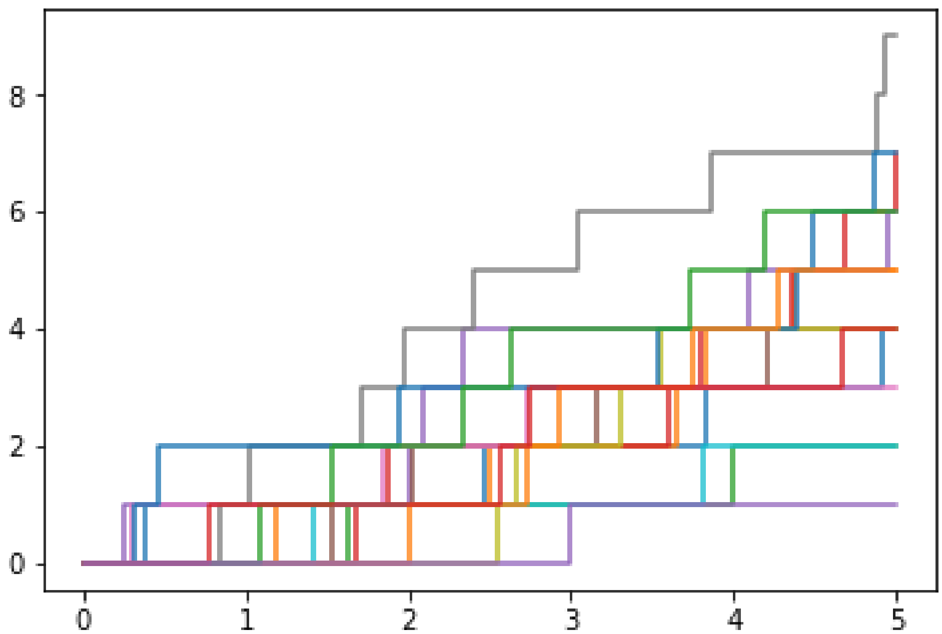
[12]:
```
from exercicio4 import entre_chegadas, teorema448, estima_integral
```

[13]:
```
lamb, T, J = 1, 5, 15
```

[14]:
```
def plot_func_e_estima(lamb, T, J, func):
    guarda_temposMudanca = []
    for k in range(J):
        x = func(lamb,T)
        guarda_temposMudanca.append(x[:])
        y = [i for i in range(len(x))]
        x.append(T)
        y.append(y[-1])
        pl.step(x,y,where="post")
    ##estima integral
    numerador = sum(estima_integral(tempoMudanca,T) for tempoMudanca in␣
 ↪guarda_temposMudanca)
    estimado = numerador / J
    print("A integral estimada para "+ func.__name__ +" é " + str(estimado))
    pl.show()
```

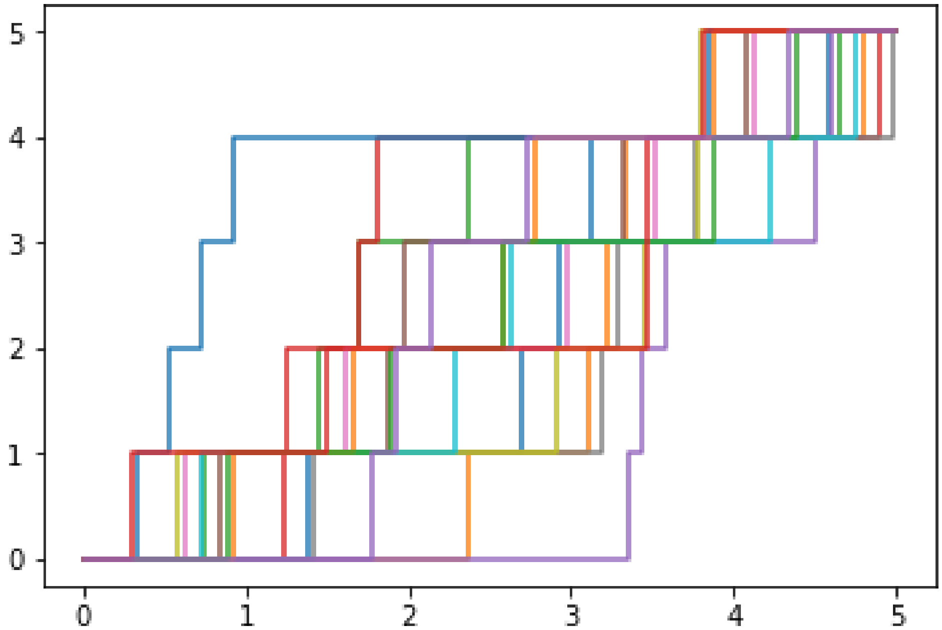
[15]:
```
plot_func_e_estima(lamb,T,J,entre_chegadas)
```

A integral estimada para entre_chegadas é 15.815835009733819



[16]:
```
plot_func_e_estima(lamb,T,J,teorema448)
```

A integral estimada para teorema448 é 30.432211775931652



A integral estimada analiticamente

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T N_t\ dt\right] = \int_0^T \mathbb{E}\left[N_t\right] = \int_0^T \lambda t\ dt = \frac{\lambda T^2}{2}$$

Que nos oferece o resultado de $12,5$ quando colocados os parâmetros do exercício. O fato de termos obtido resultados distintos, nos levantou a dúvida que talvez o enunciado do exercício estivesse errado e devesse ter uma soma em detrimento de uma multiplicação.

2.2 Exercício 5

[17]:
```
from exercicio5 import exercicio5
```

[18]:
```
n, m = 5, 50
```

[19]:
```
sigma2 = 0.16
```

Defino X, Y e X^*:

[20]:
```
X = np.linspace(-np.pi, np.pi, n)
Y = np.sin(X)+np.random.normal(loc = 0, scale = sigma2, size = n)
Xn = np.linspace(-np.pi, np.pi, m)
```

Encontro as médias e variâncias utilizando uma regressão por processo gaussiano:

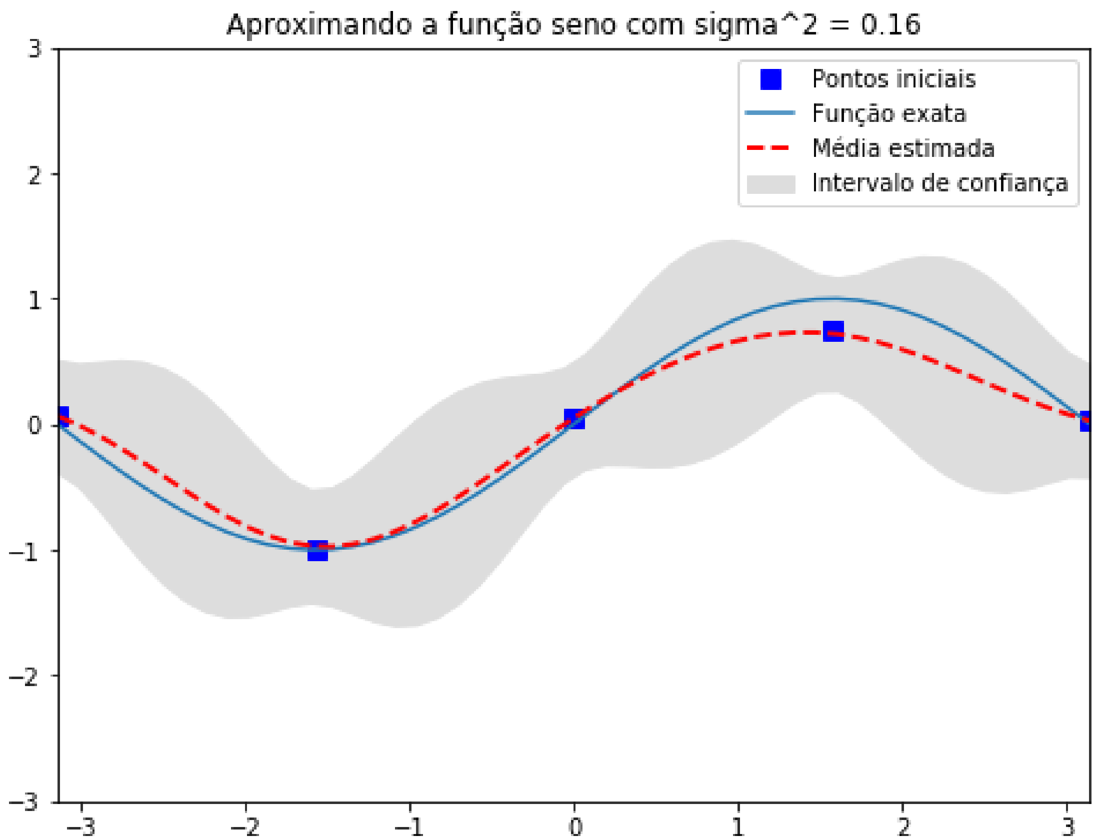
[21]:
```
mu, cov = exercicio5(X, Xn, Y, sigma2);
```

Pego os desvios padrões na diagonal da matriz de variâncias:

[22]:
```
stdv = np.sqrt(np.diag(cov))
```

Ploto:

[23]:
```
pl.figure(figsize=(8,6))
pl.plot(X, Y, 'bs', ms=8, label="Pontos iniciais")
pl.plot(Xn, np.sin(Xn), label="Função exata")
pl.gca().fill_between(Xn, mu-2*stdv, mu+2*stdv, color="#dddddd",␣
 ↪label="Intervalo de confiança")
pl.plot(Xn, mu, 'r--', lw=2, label="Média estimada")
pl.axis([-np.pi, np.pi, -3, 3])
pl.title('Aproximando a função seno com sigma^2 = 0.16')
pl.legend()
pl.show()
```



[24]:
```
sigma2 = 0
```

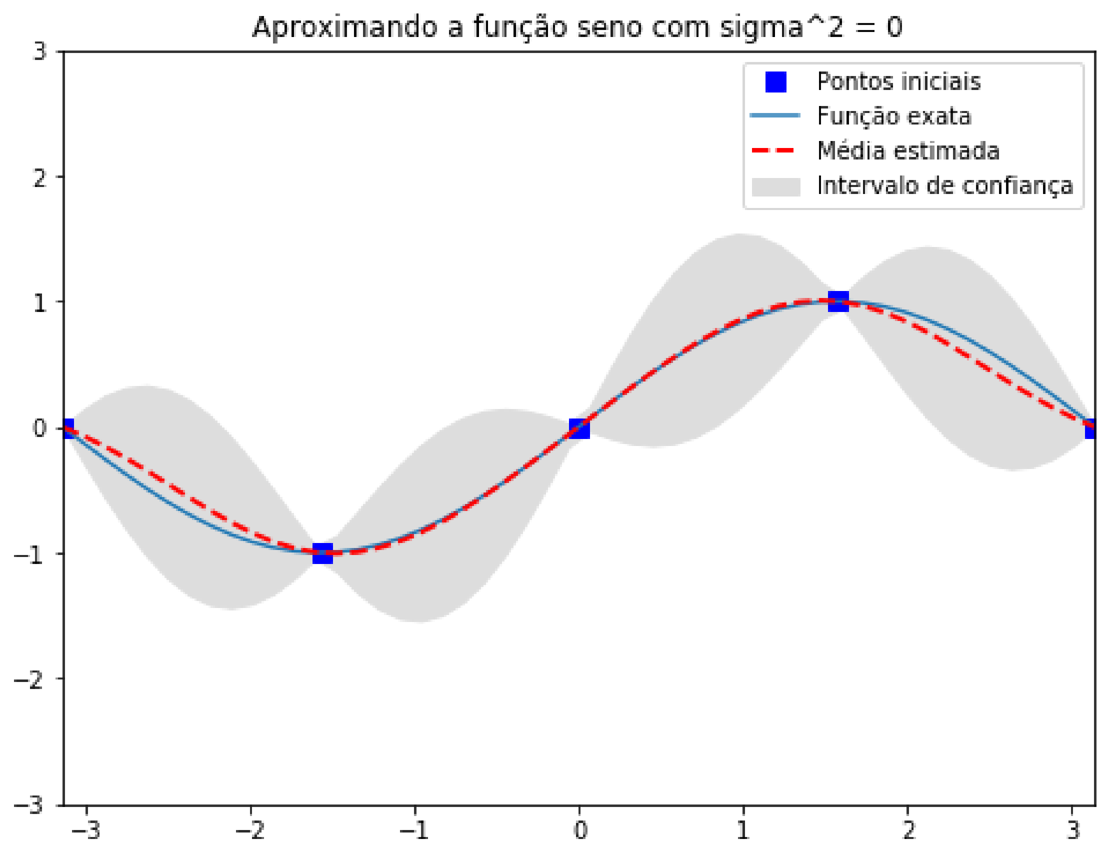
Sigo o mesmo processo que o anterior para o novo valor de σ^2:

[25]:
```
X = np.linspace(-np.pi, np.pi, n)
Y = np.sin(X)+np.random.normal(loc = 0, scale = sigma2, size = n)
Xn = np.linspace(-np.pi, np.pi, m)
```

[26]:
```
mu, cov = exercicio5(X, Xn, Y, sigma2);
```

[27]:
```
stdv = np.sqrt(np.diag(cov))
```

[28]:
```
pl.figure(figsize=(8,6))
pl.plot(X, Y, 'bs', ms=8, label="Pontos iniciais")
pl.plot(Xn, np.sin(Xn), label="Função exata")
pl.gca().fill_between(Xn, mu-2*stdv, mu+2*stdv, color="#dddddd",␣
 ↪label="Intervalo de confiança")
pl.plot(Xn, mu, 'r--', lw=2, label="Média estimada")
pl.axis([-np.pi, np.pi, -3, 3])
pl.title('Aproximando a função seno com sigma^2 = 0')
pl.legend()
pl.show()
```

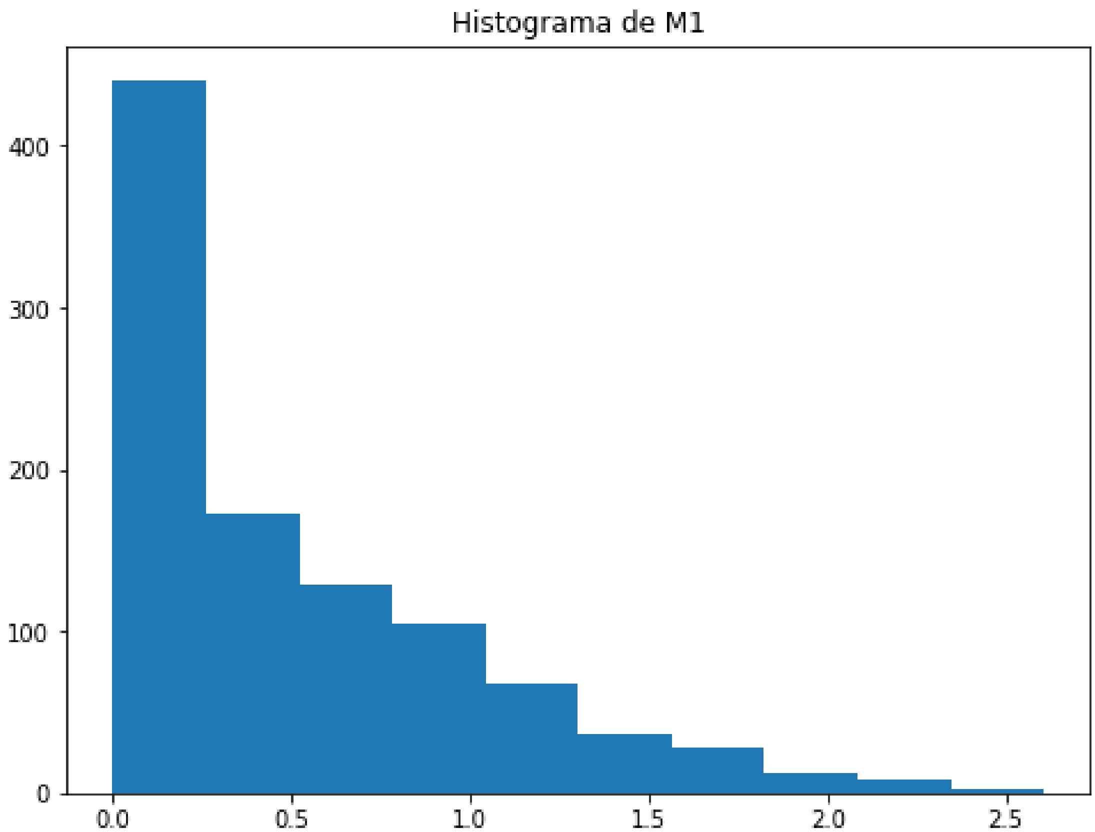


2.3 Exercício 6

[29]:
```
from exercicio6 import exercicio6
```

Definindo $J = 1000$ e utilizo a função $exercicio6$ para simular J vezes e ploto o histograma dos resultados:

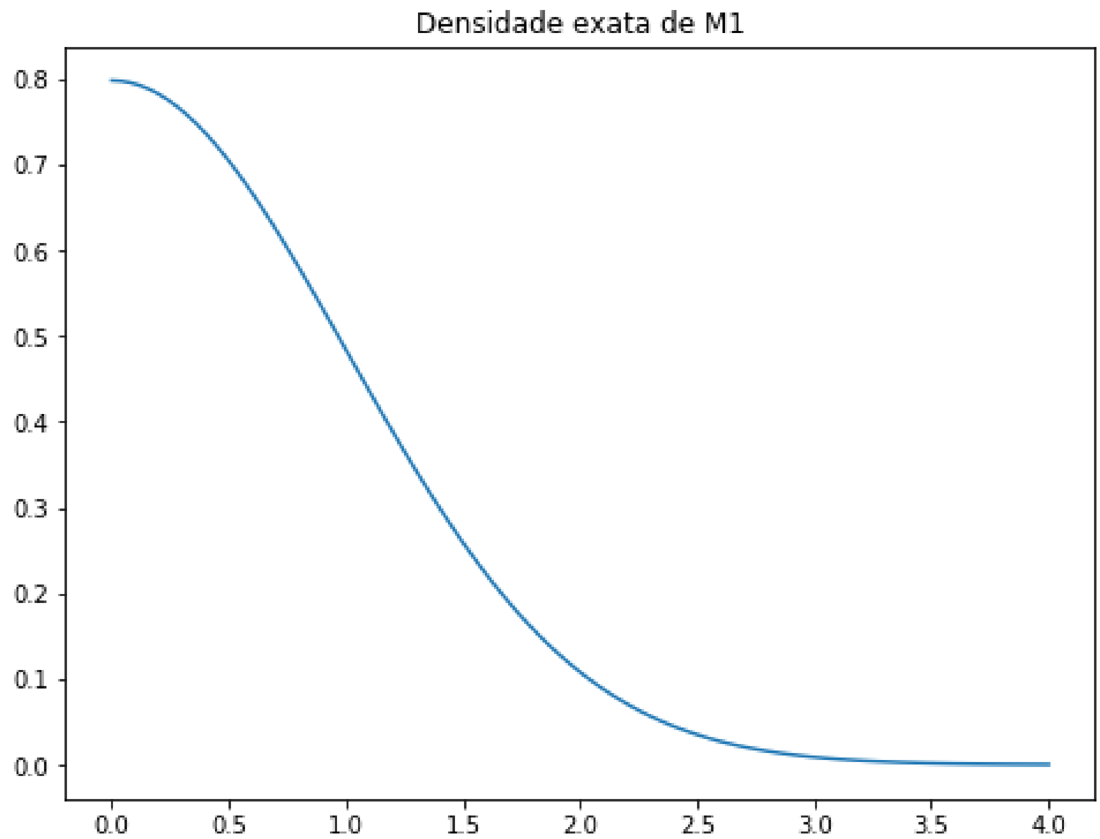
[30]:
```
J = 1000
M = []
for j in range(J):
    M.append(exercicio6(5)[1])
pl.figure(figsize=(8,6))
pl.hist(M)
pl.title("Histograma de M1");
```



Já a densidade exata de M_1 é:

[31]:
```
M1 = np.linspace(0, 4, 100)
f = (2/np.pi)**0.5*np.exp(-M1**2/2)
pl.figure(figsize=(8,6))
pl.plot(M1, f)
```

```
pl.title("Densidade exata de M1");
```



2.4 Exercício 7

[32]:
```
from exercicio7 import precifica_call, simula_black_sholes_so_o_final
```

[33]:
```
S_0, r, sigma, T, N = 100, 0.05, 0.4, 1, 10000
K = [80+5*i for i in range(9)]
```

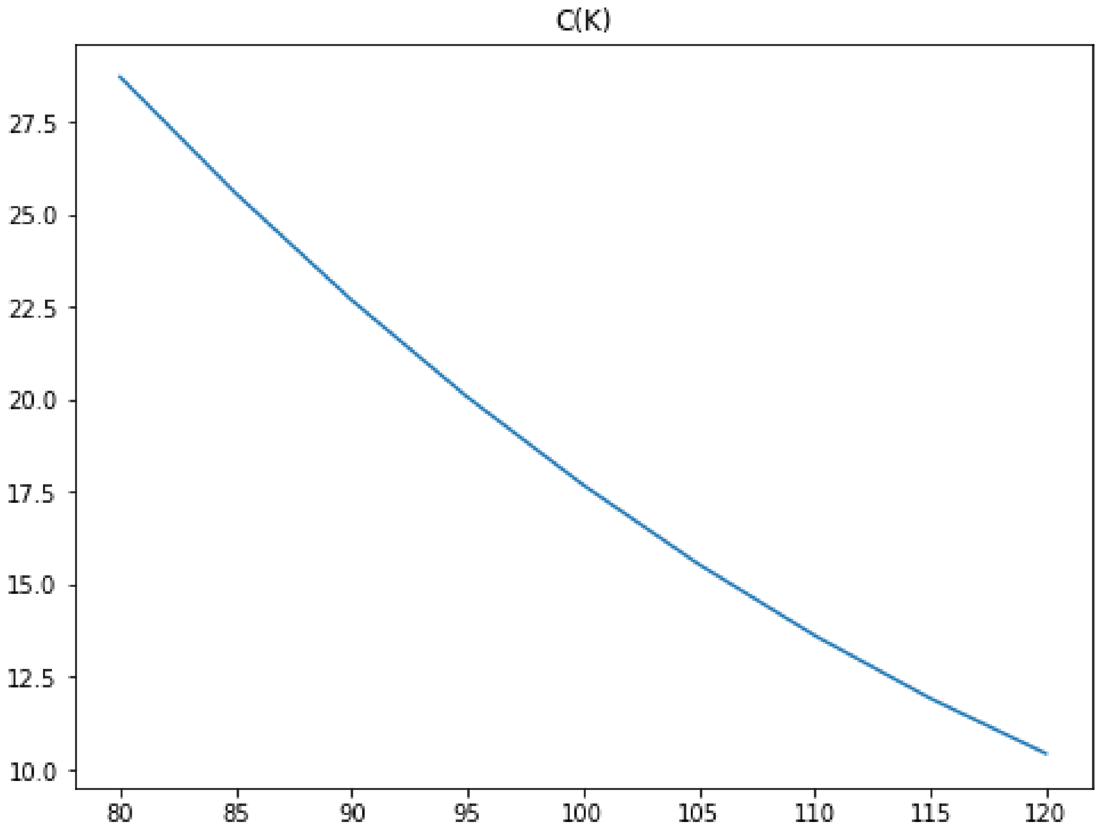
Simulo N vezes o Black-Sholes, armazenando o resultado final em de cada simualação em ST. Em seguida, para k na lista de K definida anteriormente, chamo a função $prcifica\_call$ para calcular $C(k)$.

[34]:
```
C = []
ST = [simula_black_sholes_so_o_final(S_0,r,sigma,T) for n in range(N)]
for k in K:
    C.append(precifica_call(r, T, k, N, ST))
```

O gráfico de $C(K)$ então fica:

[35]:

```
pl.figure(figsize=(8,6))
pl.plot(C)
pl.xticks([i for i in range(9)], K);
pl.title("C(K)");
```



[ ]:

```
```