

Skriti markovski modeli v analizi finančnih časovnih vrst

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

9. september 2019

Martin Praček

Mentor: izr. prof. dr. Damjan Škulj

Markovska lastnost

Definicija

Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_s)_{0 \leq s})$ verjetnostni prostor s filtracijo za neko urejeno množico I . Naj bo (S, \mathcal{S}) merljiv prostor. Na (S, \mathcal{S}) merljiv slučajni proces $X(X_t)_{t \in I}$, ki je prilagojen na filtracijo, ima markovsko lastnost, če za vsak $A \in \mathcal{S}$ in vsak par $s, t \in I$, kjer velja $s < t$ velja

$$\mathbb{P}(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in A \mid X_s)$$

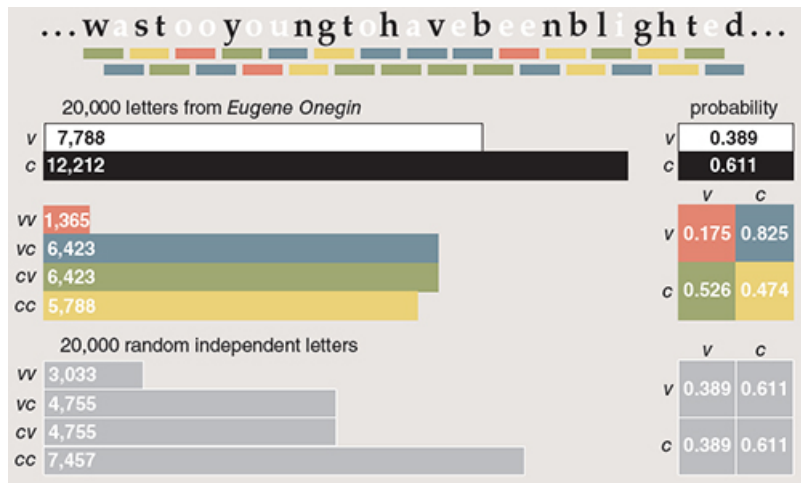
Tabela: Razdelitev markovskih procesov

	V celoti opazovan	Le delno opazovan
Avtonomen	Markovska veriga	Skriti markovski model
Kontorliran	Markovski odločitveni proces	Delno opazovan proces

Skriti markovski model

Skriti markovski model je statistični markovski model, kjer predpostavljamo, da je modelirani sistem markovski proces s skritimi stanji. Gre torej za tip modela, kjer lahko vidimo le signal.

Zgodovina



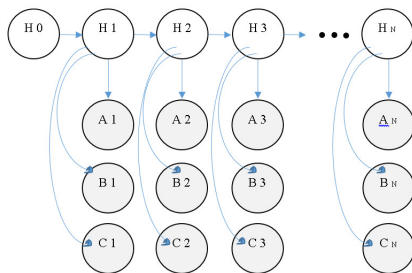


Zgodovina

- Matematična teorija komunikacije
- EM-algoritem
- Stratonovič
- Viterbi
- Baum-Welch
- James Hamilton

Zahteve

- Markovska lastnost
- Enakomerno porazdeljeni časi signalov O_t , ki jih poda resnični svet
- Sistem ima N stanj, vsako določa slučajna spremenljivka S



Hidden States:

$$H_i = \{x, y, z, \underline{e}\}$$

Observations:

$$A = \{\text{discrete number from 1 to } U_A\}$$

$$B = \{\text{discrete number from 1 to } U_B\}$$

$$C = \{\text{discrete number from 1 to } U_C\}$$

- Slučajni proces Q , ki predstavlja signale
- Porazdelitveni zakon vsakega stanja i označimo z $b_i(x)$
- Vektor začetnih stanj je π
- Prehodna matrika A , ki je neodvisna od časa

Porazdelitveni zakon

- Gaussova mešanica
- $b_i = \sum_{j=1}^M c_{ij} N(x; \mu_j, \sigma_j^2)$
- Število porazdelitev M
- Matrika Γ , μ_{ij} predstavlja pričakovano vrednost porazdelitve j v stanju i
- Matrika Σ , kjer σ_{ij} predstavlja varianco porazdelitve j v stanju i
- Matrika C , koeficienti c_{ij} iz Gaussove mešanice

Trening modela

- Podatki O
- Število stanj
- Število mešanic

Maksimizacija $P(O|\lambda)$

- Začetni nabor λ
- $P(O|\lambda_i) \geq P(O|\lambda_{i+1})$

Problemi

- Lokalna maksimizacija
- Overfit
- Občutljivost

Generiranje poti v skitem markovskem modelu

- $O = (O_1, \dots, O_T)$
- $\lambda = (\Pi, A, C, \Gamma, \Sigma)$
- $P(O|\lambda)$
- Začetno stanje

Uporaba

- Biologija
- Procesiranje govora



Časovne vrste

Definicija

Časovna vrsta množica opazovanj x_t , vsako opazovano ob časih t znotraj nekega časovnega intervala.

Definicija

Model časovne vrste za opazovane podatke x_t je slučajni proces X_t , kjer velja, da so x_t realizacije tega slučajnega procesa v časih t .

- Diskreten čas
- Zvezen čas
- Diskretne vrednosti

Definicija

Finančna časovna vrsta je časovna vrsta, kjer so opazovanja x_t vrednosti finančnega instrumenta v času t .

Uporaba skritih markovskih modelov v finančnih časovnih vrstah

- Zaporedje cen O
- Finančna optimizacija
- Brownovo gibanje

Problem izbire portfelja

- Kapital M
- N vrednostnih papirjev
- Vsak papir ima donos R_j
- $R_x = \sum_{j=1}^N x_j R_j$
- d zahtevan donos
- α stopnja zavrnitve

$$\begin{array}{ll} \min & CVaR_{\alpha}(R_x) \\ \text{p.p.} & E(R_x) \geq d \end{array}$$

Primer ocenjevanja prehodnih verjetnosti

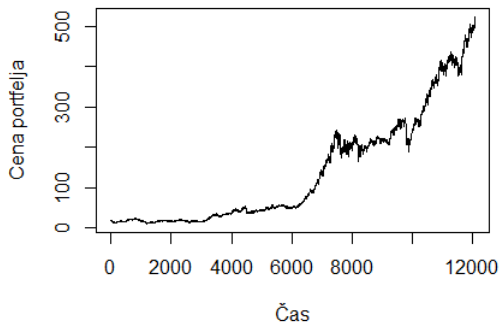
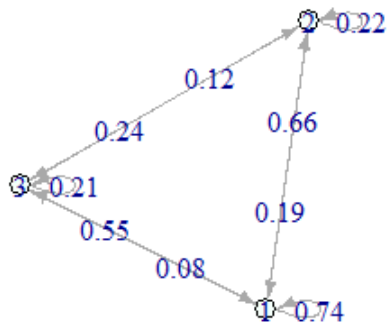





Tabela: Prehodna matrika A




	Normalna	Visoka	Ekstremna
Normalna	0.7350923	0.1872929	0.07761477
Visoka	0.6553579	0.2234175	0.12122466
Ekstremna	0.5453789	0.2447960	0.20982515









Zahvala




Zahvalil bi se vsem, ki so mi pomagali na poti do diplome. Svojim stašem, bratu, sestrama, Neži, vsem profesorjem in asistentom na Fakulteti za matematiko in fiziko ter še posebej profesorju doktorju Damjanu Škulju.





-  D. Roman, G. Mitra in N. Spagnolo, *Hidden Markov models for financial optimization problems*, IMA Journal of Management Mathematics **21** (2010) 111–129.
-  I.L. MacDonald in W. Zucchini, *Hidden Markov and Other Models for Discrete-valued Time Series*, Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability **70**, Chapman & Hall, London, 1997.
-  R.S. Mamon in R.J. Elliott *Hidden Markov Models in Finance*, International Series in Operations Research & Management Science **104**, Springer, New York, 2007.

-  P.J. Brockwell, R.A. Davis *Introduction to Time Series and Forecasting*, 2nd edition, Springer, 2002.
-  B.J. Yoon, *Hidden Markov Models and their Applications in Biological Sequence Analysis*, v: Current genomics, 10,6(2009):402-415, [29. 7. 2019], dostopno na <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC2766791/>.
-  *A Hidden Markov Model method, capable of predicting and discriminating β -barrel outer membrane proteins*, BMC Bioinformatics **5** (2004)

-  P.G. Bagos, T.D. Liakopoulos, I.C Spyropoulos, S.J. Hamodrakas, *A Hidden Markov Model method, capable of predicting and discriminating β -barrel outer membrane proteins*, v: BMC Bioinformatics, 5(2004), [30. 7. 2019], dostopno na <https://bmcbioinformatics.biomedcentral.com/articles/10.1186/1471-2105-5-29>.
-  P. Dymarski, *Hidden Markov Models, Theory and Application*, InTech, Rijeka, 2011
-  A. Geyer, W. T. Ziemba, (2008) *The Innovest Austrian Pension Fund Financial Planning Model InnoALM*. Operations Research 56(4):797-810.

-  C.E. Shannon, *A Mathematical Theory of Communication*. Bell System Technical Journal. 27 (3): 379–423
-  A.A. Markov, (1906) *Extension of the Law of Large Numbers to Dependent Events*. Bulletin of the Society of the Physics Mathematics, Kazan, Russia, 2, 155-156.
-  A.A. Markov, *Primer statisticheskogo issledovaniya nad tekstom "Evgeniya Onegina", illyustriruyuschijsvyaz' ispytanij v cep'*, Izvestiya Akademii Nauk, SPb, VI seriya, tom 7, 9 3, 1913, 153-162.

-  A. Dempster, N. Laird, D. Rubin, (1977). *Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm*. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 39(1), 1-38.
-  A. Viterbi, (1967). *Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm*, IEEE Transactions on Information Theory. 13, Nr. 2, pp.260-269.
-  L.E. Baum et al.(1970). *A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of Markov chains*, The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 41, No. 1, 164–171.

-  R. L. Stratonovich, *Conditional Markov Processes*, Theory Probab. Appl., 5:2 (1960), 156–178.
-  J.D. Hamilton, *A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle*, Econometrica: Journal of the Econometric Society (1989), 357–384.
-  D. Holmes, (2004, 9. 11). *What is Stochastic Programming*, dostopno na <http://users.iems.northwestern.edu/~jrbirge/html/dholmes/StoProIntro.html>.
-  J. Joyce, (2003, 28.6). *Bayes Theorem*, dostopno na <https://stanford.library.sydney.edu.au/entries/bayes-theorem/>.