

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Martin Praček

**Skriti markovski modeli v analizi finančnih časovnih vrst**

Delo diplomskega seminarja

Mentor:izr. prof. dr. Damjan Škulj

Ljubljana, 2019

## KAZALO

1. Uvod	4
Slovar strokovnih izrazov	4
2. Markovski modeli	5
3. Skriti markovski modeli	8
3.1. Zgodovina modela	9
3.2. Zahteve za model	10
3.3. Priprava in trening modela	12
3.4. Natančna določitev začetnih vrednosti	14
3.5. Trenutno stanje	15
3.6. Generiranje poti v skritem markovskem modelu	16
4. Uporaba	16
4.1. Procesiranje govora	17
4.2. Uporaba v biologiji in biokemiji	17
4.3. Ostali načini uporabe	17
5. Časovne vrste	17
5.1. Dodatne lastnosti modela	19
5.2. Finančna časovna vrsta	19
6. Uporaba skritih markovskih modelov v finančnih časovnih vrstah	20
7. Praktični primer	21
7.1. Splošna analiza kakovosti modela	22
8. Zaključek	25
Literatura	26

## Skriti markovski modeli v analizi finančnih časovnih vrst

### POVZETEK

V moji diplomski nalogi sem se ukvarjal z skritimi markovskimi modeli. Gre za vrsto markovskega modela, kjer vseh podatkov ne poznamo. V svojem delu sem opisal osnove teorije skritih markovskih modelov ter nekaj primerov uporabe, obenem pa sem opisal še praktični primer.

## Hidden Markov Models in Financial Time Series Analysis

### ABSTRACT

For my **diploma** I researched hidden markov model, a type of markov model where not all information is known. My paper discusses the base theory behind hidden markov models and some applications. Also, I included my own example.

**Math. Subj. Class. (2010):** 60J05, 60J22, 91B84, 91B74, 91B70, 91G80, 91G70, 65K05

**Ključne besede:** skriti markovski modeli, časovne vrste, slučajni proces

**Keywords:** hidden markov models, time series, stochastic process

## 1. UVOD

Skriti markovski modeli so modelacijsko orodje, ki nam omogoča zelo široko uporabo. V mojem diplomskem seminarju se bom najbolj posvetil uporabi v finančni analizi. V prvem poglavju se bom posvetil različnim načinom uporabe skritih markovskih modelov, v drugem pa bom natančno opisal matematično ozadje le teh. Na koncu bom natančno predstavil še lasten primer uporabe, kjer si bom pomagal z različnimi programskimi jeziki in okolji, od Mathematice do R in MatLaba.

## SLOVAR STROKOVNIH IZRAZOV

**Skriti markovski model** Skriti markovski model je statistični model, prek katerega določimo stanja, v katerih se nahajamo, verjetnost nahajanja v tem stanju, verjetnost prehoda med stanji za nek nabor podatkov.

**Gaussova mešanica** Gaussova mešanica je porazdelitvena funkcija z gostoto, ki jo lahko zapišemo kot tehtano povprečje normalnih gostot;

$$f(x) = \sum_{j=1}^M c_j f_{N,j}(x; \mu_j, \sigma_j^2)$$

. Veljati mora še, da je

$$\sum_{j=1}^M c_j = 1$$

in da je  $f_{N,j}(x; \mu_j, \sigma_j^2)$  gostota verjetnosti normalne porazdelitvene funkcije.

**Verjetnostni grafični model PGM** Verjetnostni grafični model je model, za katere graf prikaže pogojno odvisnost med slučajnimi spremenljivkami.

**Akaikejev informacijski kriterij** Akaikejev informacijski kriterij oziroma AIC je merilo relativne kakovosti modela glede na preostale modele za iste podatke. Naj velja, da imamo podatke s  $k$  ocenjenimi parametri in  $\hat{L}$  maksimalna vrednost funkcije verjetja. AIC izračunamo kot

$$AIC = 2k - 2Ln(\hat{L})$$

AIC primerja več različnih modelov po kakovosti, kjer je najboljši tisti z najmanjšo vrednostjo.

**Baum-Welchov algoritem** Je algoritem, s katerim poiščemo neznane parametre skritih markovskih modelov.

**Dinamična bayesova mreža** Je bayesova mreža, v kateri so povezane spremenljivke, ki ležijo v dveh sosednjih časovnih korakih.

**Pričakovan primankljaj** Naj bo  $X$  donos portfelja nekoč v prihodnosti in naj velja da je  $0 < \alpha < 1$ , kjer je  $\alpha$  stopnja zaupanja. Pričakovan primankljaj  $ES_\alpha$  je definiran kot

$$ES_\alpha = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR_\gamma(x) d\gamma$$

kjer je  $VaR_\gamma$  tvegana vrednost.

## 2. MARKOVSKI MODELI

Skriti markovski modeli so ena izmed vrst bolj splošne skupine modelov, ki jo imenujemo markovski modeli. Gre za modele, kjer se stanja slučajno spreminjajo. Za modele velja, da je njihovo stanje v času  $t$  odvisno le od stanja v času  $t - 1$ . To imenujemo markovska lastnost, po kateri so ti modeli tudi poimenovani.

**Definicija 2.1.** Naj bo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_s)_{s \geq 0})$  verjetnostni prostor s filtracijo za neko urejeno množico  $I$ . Naj velja, da je  $(S, \mathcal{S})$  merljiv prostor na katerem obstaja merljiv slučajni proces  $X = X_{tt \in I}$ , ki je prilagojen na filtracijo.

Potem pravimo da ima slučajni proces markovsko lastnost, če za vsak  $A \in \mathcal{S}$  in vsak par  $s, t \in I$ , kjer velja  $s < t$  velja

$$\mathbb{P}(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in A \mid X_s).$$

Seveda tu velja, da je  $\Omega$  množica,  $\mathcal{F}$  pa  $\sigma$ -algebra na njej.  $\Omega$  je množica vseh možnih stanj, v katerih se lahko nahaja neka slučajna spremenljivka. Če tako na primer velja, da naša slučajna spremenljivka lahko pokaže katero koli naravno število, bo potem  $\Omega = \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{F}$  pa bo enak  $\mathcal{F} = 2^{\mathbb{N}}$ .

Velja še, da je  $\mathbb{P}$  mera na tej množici, kjer velja, da je  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ , torej je ta mera verjetnostna. Za  $(\mathcal{F}_s)_{s \leq 0}$  pravimo, da je filtracija, v posebnem pa je  $\mathcal{F}_T$   $\sigma$ -algebra zgodovine časa  $T$ , torej za vsak dogodek do časa  $T$  vemo, ali se je dogodek zgodil ali ne.

Da je prostor merljiv v našem primeru pomeni, da je  $\Omega$  enaka  $S$ ,  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}$  pa je  $\mathcal{S}$ . Gre torej za par množice in  $\sigma$ -algebre.

Slučajni proces je nabor slučajnih spremenljivk, in si ga navadno predstavljamo kot zaporedje slučajnih spremenljivk skozi čas. Da je slučajni proces filtraciji pomeni, da za vsak  $n$  velja, da je  $X_n$  za  $\mathcal{F}_n$  merljiv.

Sama enakost torej pravi, da je verjetnost, da velja  $X_t \in A$  enaka, ne glede na to, ali gledamo celotno  $\sigma$ -algebro zgodovine časa  $s$ , ali pa pogledamo le, kaj nam pokaže slučajna spremenljivka  $X_s$ .

To definicijo lahko v primeru markovskih verig še dopolnimo, če velja še, da je  $I = \mathbb{N}$ . Potem velja

$$\mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}).$$

Na ta način določimo tudi definicijo markovskih verig.

**Definicija 2.2.** Markovska veriga v diskretnem času je zaporedje slučajnih spremenljivk  $X_1, X_2, X_3, \dots$  z markovsko lastnostjo, torej je stanje v naslednjem času odvisno le od naslednjega stanja. Pri tem mora veljati, da je

$$P(X_{n+1} = x \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x \mid X_n = x_n),$$

če so pogojne verjetnosti dobro definirane, to je,

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) > 0$$

Gre torej za poseben primer, kjer je imamo slučajni proces v diskretnih časih, ki lahko v vsakem času pokaže le neko diskretno vrednost. V pogoju na levi strani enačaja so sedaj podani vsi dogodki, ki so se zares zgodili, markovska lastnost pa nam pove, da nas zanima zgolj zadnji dogodek.

**Primer 2.3.** To si najlažje predstavljamo s pomočjo slučajnih sprehodov. Recimo, da imamo slučajni proces, ki v vsakem času  $t$  z verjetnostjo  $1/3$  pokaže 1, z verjetnostjo  $1/3$  pokaže 0, z verjetnostjo  $1/3$  pa pokaže  $-1$ . Torej velja da je  $X_t \sim X$  za vsak  $t$  in

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Naj bo sedaj  $S_n$  slučajna spremenljivka, ki je definirana kot  $S_n = \sum_{t=1}^n X_t$ . Recimo, da  $S_1 = 0$  pokaže 3. Zanima nas verjetnost, da bo  $S_{11} = 3$ . Očitno vidimo, da je ta verjetnost enaka  $1/3$ , saj velja

$$P(S_{11} = 3) = P(S_{10} + X_{11}) = P(X_{11} = 0) = P(X = 0) = 1/3$$

Torej je vrednost naslednjega odvisna le od sedanjega stanja in tega, kaj bo pokazala  $X_{11}$ , ni pa pomembno, kako smo prišli do tega, da velja  $S_{10} = 3$ , kar je točno to, kar nam pove markovska lastnost.

◇

V posebnem lahko za markovske verige rečemo še, da so homogeni, če velja

$$P(X_n | X_{n-1}) = P(X_1 | X_0).$$

To pomeni, da so vse slučajne spremenljivke v slučajnem procesu enako porazdeljeni.

Markovska lastnost je nam pove, da je slučajni proces "brez spomina". To pomeni, da pot do stanja ni pomembna, pomembno je le stanje, v katerem se nahajamo. Naravno se nam tudi postavi vprašanje, zakaj je ta lastnost koristna. Izkaže se, da nam omogoča reševanje problemov, ki jih drugače v primernem času ne bi mogli rešiti.

Zaradi svoje široke uporabnosti markovske modele lahko ločimo na:

- prediktivno modeliranje, kjer želimo iz statističnih podatkov izračunati najbolj verjeten dogodek glede nanaše podatke. Ta model se lahko uporablja ne glede na čas v katerem se je dogodek zgodil, saj lahko modeliramo prihodnje dogodke ravno tako kot pretekle dogodke, policija npr. uporablja to vrsto modela za določitev osumljencev za storjeni zločin.
- verjetnostno napoved, kjer ne napovemo le najbolj verjetnega dogodka, ampak določimo verjetnosti vseh dogodkov kot popoln sistem dogodkov. Najbolj očiten primer tega so športne stavnice, kjer lahko npr. stavimo za eno izmed ekip stavimo na zmago, remi ali poraz.

Modeliranje markovskih modelov spada pod slučajno programiranje. Gre za sistem, ki nam pomaga pri modeliziranju optimizacije za modele, ki vključujejo negotovost. To pomeni, da nekateri parametri niso znani z gotovostjo, temveč jih predstavimo z nekim slučajnim objektom, pa naj si bo to slučajna spremenljivka za enoobdobne probleme oziroma slučajni proces za večobdobne probleme.

Glede na to, kako je postavljen markovski model pa ločimo:

	V celoti opazovan	Le delno opazovan
Avtonomen	Markovska veriga	Skriti markovski model
Kontorliran	Markovski proces odločanja	Delno opazovan proces

Razlike in podobnosti med vsemi modeli so opisane v spodnjem primeru.

**Primer 2.4. Primer žabe v ribniku.** Zamislimo si, da imamo ribnik z lokvanji, v katerem so se naselile žabe. Vsaka izmed žab je lahko v vsakem trenutku v vodi, na lokvanju ali pa zunaj vode. To imenujemo stanja markovskega modela  $S$ . Poimenujmo vektor stanj

$$S = (Voda, Lokvanj, Zemlja).$$

Na ribnik pogledamo le v nekih diskretnih časih, z enakim razmikom, na primer ob koncu vsake minute. Odločimo se za opazovanje le ene izmed žab, za katero nas zanima, kje se bo nahajala v naslednjem trenutku.

Predstavljajmo si, da lahko vsakič, ko pogledamo, našo žabo poljubno osvetlimo. Naš model je torej kontroliran. Žaba nato poljubno skače naprej. Če poznamo prehodno matriko med stanji bomo v tem primeru imeli markovski proces odločanj. To pomeni, da vemo kako nek zunanji vpliv vpliva na spremembe verjetnosti prehoda med stanji. V nasprotnem primeru imamo delno opazovan proces odločanja. To velja ko vplivamo na spremembe stanj, a prehodne matrike ne poznamo.

Na drugi strani pa imamo avtonomen model, kjer lahko ločimo če je proces v celoti opazen ali so neka stanja skrita. Če stanja niso skrita, tako poznamo prehodno matriko  $A$ , ki nam pove, s kakšno verjetnostjo se premikamo med posamičnimi stanji. V tem primeru imamo markovsko verigo, ki je le poseben primer markovskih procesov odločanja, kjer žabe nikoli ne prestavimo. Preprost primer markovskih verig predstavlja slučajni sprehodi.

Navadno predpostavimo, da se verjetnosti prehoda iz enega stanja v drugega ne spreminjajo. Vsota po vsaki vrstici je vedno enaka ena, to je

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$$

saj predstavlja verjetnosti prehoda iz enega stanja v drugo. Tako je  $a_{ij}$  verjetnost prehoda iz stanja  $j$  v stanje  $i$ . Velja še, da je  $n$  število stanj in je v našem primeru enako 3, očitno pa velja tudi, da je matrika velikost  $n \times n$  in da so vsi elementi  $a_{ij}$  iz intervala  $[0, 1]$ .

V tem primeru lahko torej, v vsakem trenutku predvidimo, kam bo najverjetneje skočila žaba v naslednjem trenutku. Če te matrike ne poznamo imamo skrite markovske modele.

Za skrite markovske modele pa velja, da same prehodne matrike načeloma ne poznamo, jo pa lahko določimo iz podatkov, ki jih imamo za naš problem. Tako bi za našo žabo dovolj dolgo opazovali, in si zapisovali njene pozicije glede v vsakem trenutku opazovanja. Tako bi dobili vektor opazovanj  $O$ . Vektor  $O$  je naš osnovni podatek, iz katerega nato izpeljemo celoten model. Iz tega bi najprej pogledali, kakšna so možna stanja sistema. Iz tega bi nato poizkušili ugotoviti, kako izgleda prehodna matrika. Kako to naredimo, si bomo pogledali v nadaljevanju.

Recimo, da v našem primeru velja, da je prehodna matrika oblike:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

V našem primeru bi to pomenilo, da je verjetnost, da žaba ostane v vodi 0.5, da iz vode skoči na lokvanj 0.3, verjetnost, da pa skoči iz ribnika pa 0.2. Iz te matrike lahko torej ugotovimo verjetnosti, ki nam bodo povedale verjetnosti prehodov, če velja da na naš opazovan sistem, torej žabo, ne vplivamo.

Kot smo prej omenili, pa se ta matrika spremeni, če jo osvetlimo. Tako lahko dobimo matriko, ki govori o verjetnostih prehodov, če na sistem vplivamo.

$$\begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 & 0.05 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le ta nam pove, da je verjetnost da ostane v vodi 0.9, medtem ko je verjetnost, da od zunaj skoči v vodo enaka 1. Tu je matrika torej drugačna, kot je bila za prvi primer. Na vsakem koraku, ko žabo osvetlimo moramo torej upoštevati to drugo matriko.

◇

### 3. SKRITI MARKOVSKI MODELI

Skriti markovski model je statistični markovski model, kjer predpostavljamo, da je modelirani sistem markovski proces z skritimi stanji. Gre torej za tip modela, kjer lahko razberemo rezultat, ne moremo pa ugotoviti, kakšna je bila funkcija, ki nam ga je dala.

Gre za najbolj preprosto vrsto dinamične bayesove mreže. Tu gre za vrsto bayesove mreže, v kateri so povezane spremenljivke, ki ležijo v dveh sosednjih časovnih korakih. Tako lahko vrednost v času  $t$  izračunamo prek vrednosti v času  $t - 1$  ter notranjih regresorjev. Bayesove mreže so verjetnostni grafični model, ki je idealen za to, da za nek dogodek za vsak možen vzrok določimo verjetnost, da ga je ta povzročil.

Skriti markovski modeli uporabljajo idejo bayesianške statistike. Tu uporabljamo Bayesov izrek, ki pravi, da je verjetnost dogodka  $A$ , v primeru da  $B$  velja enaka:

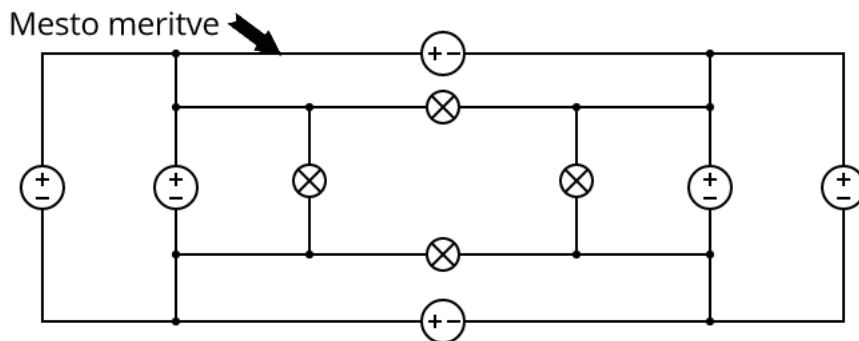
$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)},$$

kjer velja, da dogodek  $A$  predstavlja predlog,  $B$  pa dokaz. Tu torej naša verjetnost izraža stopnjo verjetja v dogodek.

Ideja za delovanje skritih markovskih modelov izhaja iz dela Andrewa Viterbija na področju komunikacije. V komunikacijskih storitvah šumi namreč predstavlja veliko težavo, zato se je ameriško-italijanski elektroinžiner domislil algoritma, s katerimi bi iz seta podatkov izločili šume.

**Primer 3.1.** To si lahko predstavljamo kot da bi si na primer želeli na fiksnem mestu v električnem tokokrogu določiti naboj  $Q(t)$  glede na naboj ob času  $s$ , kjer  $s < t$ . Zaradi napake pri merjenju  $Q(s)$  ne moremo točno določiti, saj zaznamo neko zmoteno različico  $\widehat{Q(s)}$ .





Želimo si torej način, ki bi čim bolj učinkovito izločil te napake. V našem primeru imamo 6 električnih virov in 4 žarnice. Po 30 sekundah, ko zaženemo tokokrog, izmerimo naboj na mestu meritve. Zanima nas, ali je naboj po minuti še vedno enak. ◇

Skrite markovske modele navadno predstavimo na diskretnih množicah in na diskretnem času, a lahko definicijo tako razširimo, da velja tudi za zvezne množice in čas. V tem primeru dobimo tri plasten slučajni proces, katerega največja težava je velika računska zahtevnost, poleg tega pa nam lahko veliko število parametrov prinese nestabilnost. Vendar se s tem v moji diplomski nalogi ne bom ukvarjal.

Prav tako je možno s skritimi markovskimi modeli predstaviti procese, odvisne od več slučajnih spremenljivk. Vendar tak model s seboj prinese več težav. Prve se pokaže v računski zahtevnosti, saj moramo v vsakem koraku določiti inverz in determinanto  $N \cdot M$  matrik  $\Sigma_{ij}$  velikosti  $NA \times NA$ , kjer je  $NA$  število različnih spremenljivk, na primer število vrednostnih papirjev katerih proces aproksimiramo,  $M$  pa število slučajnih spremenljivk. Če je ta  $NA$  velik, je lahko izračun inverza in determinante računsko in časovno zahteven. Drugi problem se pokaže v samem računanju, ki je podrobneje razložen v 3.3. To velja, ker so determinante  $\Sigma_{ij}$  zelo majhne, kar posledično privede do velik verjetnosti  $P(O|\lambda)$ , kjer je  $P(O|\lambda)$  očitno funkcija verjetja. Ob vsakem novem koraku iteracije tako pridobimo nov  $\lambda$  in posledično novo pogojno verjetnost. Ta verjetnost lahko v tem primeru zelo hitro naraste, in tako se iteracija prehitro konča. Če je  $NA$  prevelik, pa se včasih ne da izvesti niti prvega koraka. Modeliranje skritih markovskih modelov z več spremenljivkami je tako v teoriji možno, a ni nujno dobro v praksi.

**3.1. Zgodovina modela.** Ideja skritih markovskih modelov se v svoji prvi fazi začne z ruskim matematikom Andrejem Andrejevičem Markovom, ki je za časa svojega življenja med 1865 – 1922 razvil idejo markovskega procesa in verige. Prve teoretične rezultate markovskih verig je svetu predstavil 1906, 1913 pa je izračunal zaporedje črk ruščine. Slednji izračun je opravil na besedilu Jevgenij Onjegin ruskega pesnika Aleksandra Sergejeviča Puškina. Markov je želel s tem dokazati veljavnost šibkega zakona velikih števil zaradi spora z drugim ruskim matematikom Pavlom Nekrasom, a je na ta način odprl novo vprašanje v matematiki.

Skriti markovski modeli zahtevajo veliko numeričnega računanja, in zato ne preseneča, da se je nadaljni razvoj začel šele z širšo uporabo računalnikov. Po pomembnem delu, ki so ga opravili von Neumann, Turing in Conrad Zuse so se znanstveniki začeli pospešeno ukvarjati z implementacijo primernih algoritmov. Velik korak k temu je pripomogel Claude Shannon s svojim delom Matematična teorija komunikacije.

Za implementacijo skritih markovskih modelov je bilo v začetku potrebnih kar nekaj

razvojev algoritmov. Prvi algoritem je bil algoritem maksimizacije pričakovanega (Expectation-maximization), ali, kot ga med drugim poznamo, EM-algoritem. Tega so uporabljali med drugim že Laplace, Gauss in drugi, vendar je do dokončnega poimenovanja prišlo šele leta 1977. Demster, Laird in Rubin so algoritem poimenovali in razložili splošno teorijo, ki deluje v ozadju procesa. Andrew Viterbi je drugi pomemben del skritih markovskih modelov implementiral leta 1967 kot algoritem za dekodiranje konvolucij čez šume v komunikaciji. Pri tem algoritmu deluje princip dinamičnega programiranja, ki najde najbolj verjetno zaporedje stanj, glede na dano opazovano zaporedje dogodkov. Viterbijev algoritem je podrobneje opisan pod 1. Celotnih modelov pa prav gotovo ne bi bilo brez še enega Rusa, in sicer Ruslana Leontijeviča Stratonoviča, ki je prvi opisal rekurzijo naprej - nazaj leta 1960. To je delal na primeru optimalnega nelinearnega problema filtracije.

Za glavnega avtorja pa velja Leonard E. Baum. Skupaj z Lloyd R. Welchom sta okrog leta 1970 razvila Baum-Welchov algoritem, kjer gre za poseben primer posplošenega EM-algoritma. Prav Baum-Welchov algoritem je tisti korak, pri katerem velja, da je bila dokončno izpeljana teorija za skritimi markovskimi modeli. Algoritem uporablja EM-algoritem da najde cenilko po metodi največjega verjetja glede na dano zaporedje podatkov. Delovanje algoritma je podrobno razloženo v 3.3, njegove zahteve pa v 3.2.

Uporabe skritih markovskih modelov na področju financ in ekonomije pa ne bilo brez dela ameriškega ekonometrista Jamesa Hamiltona, ki je predlagal, da bi model, katerega stanj in prehodov med njimi ne poznamo, opišemo z markovskim modelom.

**3.2. Zahteve za model.** Kot vsak matematični model, ima tudi skriti markovski model svoje zahteve.

- (1) Prva zahteva je, da lahko rezultate, ki jih model producira, opazujemo v ekvidistančnih časih, torej je razlika med dvema poljubnima zaporednima časoma opazovanja  $t - 1$  in  $t$  vedno enaka, na primer  $d$ . Rezultate imenujemo signali ali opazovanja.
- (2) V vsakem izmed časov  $t$  je sistem lahko v enem izmed  $N$  stanj. Ta stanja so  $S_1, S_2, \dots, S_N$ . Vsako izmed stanj  $S_i$  je slučajna spremenljivka, ki je lahko zvezna ali diskretna, a njenega porazdelitvenega zakona ne poznamo. Ta stanja so v času  $t$  neznana, vemo le, kakšni so rezultati našega procesa v tem času. Zato potrebujemo dodatni slučajni proces  $Q = (Q_t)_{t=1,2,\dots}$ , ki nam pove, v kakšno je opazovanje v času  $t$ . Tako velja, da je signal  $O_t$  dan s stanjem slučajnega procesa  $Q$ , v odvisnosti od gostote verjetnostne porazdelitve Gaussove mešanice.
- (3) Vektor verjetnosti začetnih stanj je označen z  $\Pi$ , in vsota njegovih elementov je enaka 1. Dolžina tega vektorja je  $N$ , torej je enaka številu možnih stanj. Seveda velja, da je  $\Pi_i$  verjetnost, da se v začetku nahajamo v stanju  $i$ .
- (4) V vsakem času velja, da bodisi sistem spremeni svoje stanje, bodisi ostane isto. Verjetnost prehoda v vsako stanje je določena s prehodnimi verjetnostmi, podanimi v matriki  $A_t$ , kjer verjetnost prehoda iz stanja  $i$  v času  $t$  v stanje  $j$  v času  $t + 1$  simbolizira element  $a_{ij}^t$ . Vsota vsake vrstice vsake matrike  $A_t$  je enaka 1, saj bo v naslednjem času očitno nekam prešla. Matrika  $A_t$  je velikosti  $N \times N$ , kjer je  $N$  število stanj. To velja, ker nam pove verjetnosti prehodov med poljubnimi stanji.
- (5) Ker govorimo o markovskem modelu, bo stanje v času  $t + 1$  odvisno le od stanja v času  $t$ , ne pa od celotne zgodovine.

S temi predpostavkami bi lahko zmodelirali, a jih imamo še nekaj, ki nam sam model še precej olajšajo.

- (1) Predpostavimo lahko, da so vse prehodne matrike  $A^t$  enake, torej neodvisne od časa  $t$ . Enolično prehodno matriko torej lahko označimo  $A$ .
- (2) Signal v času  $t$  je odvisen le od stanja modela v tem času; torej so slučajne spremenljivke v času  $t$  odvisne le od tega.

Naši signali so torej odvisni od stanja  $S$ . Ta stanja nam vrnejo rezultat v odvisnosti od verjetnostnih porazdelitev podanih z različnimi parametri. Ločimo lahko stanja, ki so porazdeljene kot zvezne slučajne spremenljivke, ter tiste, ki so porazdeljene kot diskretne slučajne spremenljivke.

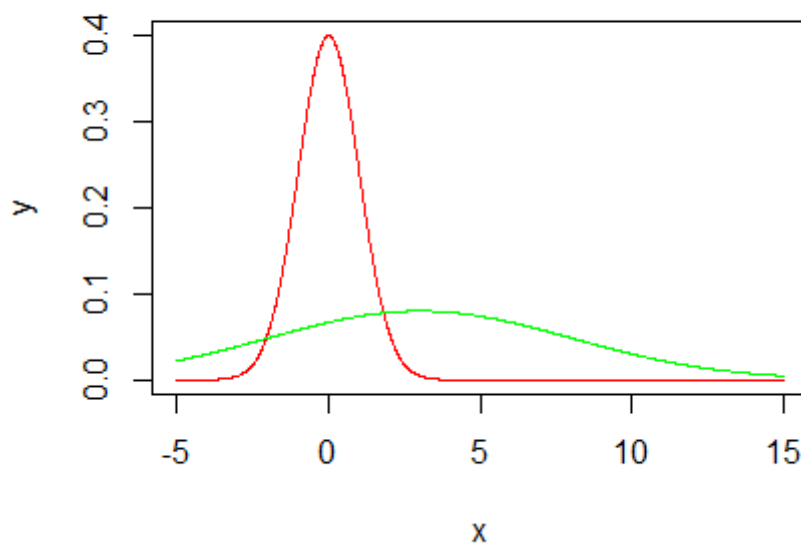
V zveznem primeru bomo predstavili primer, kjer so le te predstavljene kot mešanice normalnih porazdelitev in jih imenujemo tudi Gaussove mešanice.

Gaussovo mešanico definiramo kot tehtano povprečje normalnih porazdelitvenih funkcij, glej slovar strokovnih izrazov. Vsako stanje  $i$  iz nabora vseh stanj je torej podano z porazdelitveno gostoto

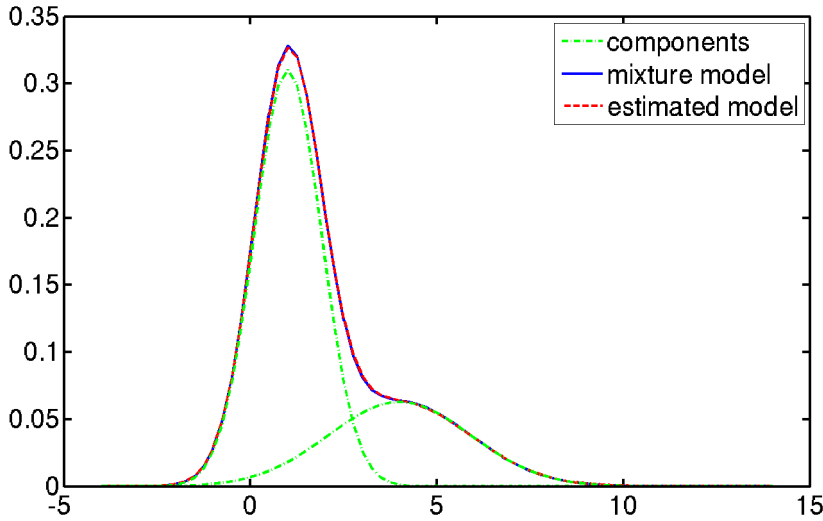
$$b_i(x) = \sum_{j=1}^M c_{ij} N(x; \mu_{ij}, \sigma_{ij}^2)$$

, kjer je so Gaussova mešanica tudi funkcije nekega  $x$ , za katerega velja da je  $x \in (-\infty, \infty)$ .

**Primer 3.2.** Gaussovo mešanico lahko vidimo na naslednjih dveh slikah.



Na prvi sliki imamo dve gostoti normalne porazdelitvene funkcije. Prva je standardno normalno porazdeljena, torej  $N(0, 1)$ , druga pa je porazdeljena  $N(3, 5)$ .



Na drugi sliki pa vidimo kako z Gaussovo mešanico ocenimo skupno porazdelitev. Skupna porazdelitev je torej v našem primeru enaka

$$b(x) = c_1 N(x; 0, 1) + c_2 N(x, 3, 5),$$

kjer za  $c_1$  in  $c_2$  velja, da je  $c_1 \geq 0$  in  $c_2 \geq 0$  ter  $c_1 + c_2 = 1$ . Tako dobimo vsoto dveh normalnih porazdelitev in vsoto njunih porazdelitev.  $\diamond$

Gaussove mešanice so primerne, ker lahko zelo dobro aproksimirajo vsako končno zvezno porazdelitev, poleg tega pa se znebimo tveganja, ki nam ga v tem modelu predstavlja normalna porazdelitev. To tveganje predstavlja dejstvo, da je normalna porazdelitev simetrična; to pa pogosto ne drži za procese v realnem svetu, na primer za donose v financah. Za te večkrat drži, da so "left-skewed", torej da je mediana večja od povprečja.

Tako potrebujemo za sestavo modela še:

- število mešanic  $M$
- matriko  $C$ , ki predstavlja koeficiente  $c_{ij}$ , ki so faktorji v Gaussovi mešanici. To matriko imenujemo tudi izhodna matrika. Matrika je velikost  $N \times M$  in element  $ij$  pove relativno težo, ki jo ima mešanica  $j$  v aproksimaciji  $S_i$ .
- matrika  $\Gamma$ , kjer  $\mu_{ij}$  predstavlja pričakovano vrednost mešanice  $j$  v stanju  $i$ , ter
- matriko  $\Sigma$ , kjer  $\sigma_{ij}$  predstavlja varianco mešanice  $j$  v stanju  $i$ .

Vse te matrike so velikosti  $N \times M$  in z njimi opišemo Gaussove mešanice.

Če so slučajne spremenljivke, ki opisujejo stanja diskretne, je opis stanj manj kompleksen. V tem primeru za opis diskretne spremenljivke potrebujemo le eno matriko, katere elementi opišejo vrednosti, ki jih dobimo. To matriko imenujemo izhodna matrika. Ta matrika je velikosti  $N \times N$ , kjer je  $N$  število stanj.

**3.3. Priprava in trening modela.** Ko vemo kaj potrebujemo, lahko začnemo s pripravo naših modelov. Preden začnemo s določanjem parametrov našega modela, moramo najprej dobro preučiti naš problem, saj je to znanje ključno za dobro reševanje problema. Kot prvo stvar moramo najprej izbrati set podatkov, na katerem se bo potekal tako imenovan trening sistema. Ti podatki morajo biti zbrani na

na primerni enoti; na ceno delnic vrednost le te pred 10 leti ne bo vplivala toliko kot cena dan pred meritvijo.

Podatke, ki smo jih zbrali moramo nato urediti; določimo časovne trenutke z enakim razponom, kot ga želimo imeti v našem modelu, in v teh trenutkih  $t \in (1, \dots, T)$  določimo opazovanja  $O$ .

Ko imamo podatke zbrane, moramo najprej določiti število stanj  $N$  ter število mešanic  $M$ . Tu gre tudi za ključna problema priprave skritega markovskega modela. V praksi število stanj včasih določimo v skladu s potrebno aplikacijo, kot na primer v 4.2, oziroma z vizualnim ogledom točk grafa iz zgodovinskih podatkov.

Včasih pa lahko to določimo preko Akaikejevega informacijskega kriterija, ki primerja več različnih modelov, ki lahko določijo z različnim številom stanj  $N$  in izbere najboljšega. AIC ocenjuje relativno kakovost modela. Podobno deluje tudi BIC, to je Bayesianski informacijski kriterij.

Za pravilno določitev števila mešanic  $M$  pa navadno izberemo razvrščanje v skupine ( $k$ -mean clustering). Gre za metodo vektorske kvantitizacije, kjer želimo  $n$  opazovanj razvrstiti v  $k$  skupin, kjer vsako opazovanje razvrstimo v skupino, z najbližjim povprečjem.

Ostale parametre navadno označimo z  $\lambda = (\Pi, A, C, \Gamma, \Sigma)$ . Cilj treninga modela je, da parametre nastavimo tako, da bo verjetnost, da so bila vsa opazovanja določena tudi s strani modela največja,  $P(O|\lambda)$ . Pri tem mora veljati, da sta število mešanic  $M$  ter število stanj  $N$  že znana,  $P(O|\lambda)$  pa je funkcija največjega verjetja.

Naravno se pojavi vprašanje, kako to določimo. Izkaže se, da je učinkovit sistem *naprej – nazaj*. Določimo spremenljivki *naprej*  $\alpha_t(i)$ , ki predstavlja verjetnost, da so se zgodila opazovanja od  $o$  do  $t$  in stanje  $i$ , ter *nazaj*  $\beta_t(i)$ , ki predstavlja verjetnost, da se bodo zgodila opazovanja od  $t$  do  $T$  pri stanju  $i$ . Definirati pa rabimo le eno izmed njiju, saj gre pri  $\beta_t(i)$  le alternativno metodo za  $\alpha_t(i)$ .  $\alpha_t(i)$  definiramo kot:

$$\alpha_1(i) = \pi_i b_i(O_1) = \pi_i b_i = \sum_{k=1}^M c_{ik} N(O_1; \mu_j, \sigma_j^2)$$

Naslednje  $\alpha_{t+1}(j)$  lahko nato induktivno izračunamo kot

$$\alpha_{t+1}(j) = b_j(O_{t+1}) \sum_{i=1}^N \alpha_t(i) a_{ij}$$

Iz tega sledi, da je  $P(O|\lambda) = \sum_{i=1}^N \alpha_T(i)$ . Na podoben način izračunamo tudi  $\beta_t(i)$ .  $\beta$  je inicializirana z

$$\beta_T(i) \forall i \in 1, \dots, N$$

indukcija pa poteka prek

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^N \beta_{t+1}(j) a_{ij} b_j(O_{t+1})$$

$\beta_t(i)$  sicer ni nujen za izračun  $P(O|\lambda)$ , a ga nujno potrebujemo za trening našega modela.

Na ta način smo pokazali Baum-Welchov algoritem, ki je osnova delovanja skritih markovskih modelov.

Skozi celotno točko 3.3 smo se obnašali, kot da lahko vse podatke iz  $\lambda$  kar izračunamo. Vendar to ne drži v popolnosti. Res, ko je enkrat *naprej – nazaj* vzpostavljen, se nam dozdeva, da gre le še za numerično operacijo. Vendar težave nastopijo preden

naš postopek začne z delom. Problem nastopi ko moramo v naprej oceniti začetne parametre  $\lambda$ .

Ne poznamo analitičnega načina, kako bi lahko ta problem rešili, vendar lahko najdemo tak  $\lambda$ , da lahko našo verjetnost  $P(O|\lambda)$  lokalno maksimiziramo, ne moremo pa zagotoviti globalnega maksimuma. Prav tako se lahko zgodi, da predobro opišemo nek set podatkov, to pomeni, da je  $P(O|\lambda_{dejanski}) \leq P(O|\lambda_{zadnji})$ . Tako se lahko zgodi, da svoji oceni preveč zaupamo.

Pri tem moramo vsak paramater  $\lambda$  najprej pogledati posebej. Izkaže se, da začetni vrednosti za prehodno matriko  $A$  in začetni vektor  $\Pi$  nista pomembni, če nista ravno ničelna. Za  $\Pi$  tako lahko vzamemo vektor, kjer so vse vrednosti enake  $1/N$ , kjer je  $N$  število stanj.

Več problemov nam povzročajo tri postavke z zvezno porazdelitvijo, to je  $C$ ,  $\Sigma$  in  $\Gamma$ . Dobra začetna ocena le teh je nujna za kakovost modela. Tudi tu se izkaže, da lahko, podobno kot pri oceni števila mešanic  $M$  ozremo na razvrščanjem v skupine. Ta postopek nam sicer ne da globalnega minimuma, ki bi ga mogoče lahko dobili na drugačen način, a se v praksi izkaže za dobrega. Za  $C$  to pomeni, da bo element  $c_{ij} = 1/k$  za vsak par  $ij$ , kjer je  $k$  število šopov povprečij. Pričakovane vrednosti in variance nato pridobimo iz vrednosti šopov povprečij.

Z znanimi začetnimi vrednostmi se lahko spustimo v maksimiziranje  $P(O|\lambda)$ . Osnovati moramo zaporedje  $\lambda = \lambda_t, t \in 0, \dots$ , da bo veljalo

$$P(O|\lambda_{i+1}) \geq P(O|\lambda_i)$$

Za to zaporedje velja, da konvergira k lokalnemu maksimumu.

**3.4. Natančna določitev začetnih vrednosti.** Zanima nas torej, kako bomo osnovali zaporedje  $\lambda$ , ki ga potrebujemo za maksimizacijo  $P(O|\lambda)$ . Izkaže se, da za maksimizacijo le tega potrebujemo še nekaj dodatnih formul, ki so rezultat Baum-Welchovega algoritma. Z njimi definiramo večfazni iterativni proces, pri katerem popravljamo vrednosti parametrov do konvergence.

Kot prvo potrebujemo  $\xi_t(i, j)$ , ki nam pove verjetnost, da smo v času  $t$  v stanju  $i$  in v času  $t + 1$  v stanju  $j$ .

$$\xi_t(i, j) = \frac{\alpha_t(i) a_{ij} b_j(O_t) \beta_{t+1}(j)}{P(O|\lambda)}.$$

Vsota  $\sum_{t=1}^N \xi_t$  nam pove pričakovano število prehodov iz stanja  $i$  v stanje  $j$ .

Druga je  $\gamma_t(i)$ , ki nam pove verjetnost, da smo v času  $t$  v stanju  $i$ .

$$\gamma_t(i) = \frac{\alpha_t(i) \beta_t(i)}{P(O|\lambda)}$$

Vsota  $\sum_{t=1}^N \gamma_t(i)$  nam pove pričakovano število prehodov iz stanja  $i$ .

Zadnja, tretja pa je  $\gamma_t(j, k)$ , ki nam pove verjetnost, da smo v času  $t$  v stanju  $j$ , in kta mešanica predstavlja  $O_t$ .

$$\gamma_t(j, k) = \gamma_t(j) \frac{c_{jk} N(x; \mu_{jk}, \sigma_{jk}^2)}{\sum_{m=1}^M c_{jm} N(x; \mu_{jm}, \sigma_{jm}^2)}$$

Iz teh podatkov lahko nato popravimo izračun elementov:

$$\bar{\Pi}_i = \gamma_1(i)$$

$$\begin{aligned}\overline{a_{ij}} &= \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \xi_t}{\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(i)} \\ \overline{c_{jk}} &= \frac{\sum_{t=1}^T \gamma_t(j, k)}{\sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \gamma_t(j, m)} \\ \overline{\mu_{jk}} &= \frac{\sum_{t=1}^T \gamma_t(j, k) O_t}{\sum_{t=1}^T \gamma_t(j, k)}\end{aligned}$$

Ko je to določeno, nam zaporedje  $\lambda$ , določenih s temi parametri da lokalni maksimum.

**3.5. Trenutno stanje.** Zadnja stvar, ki jo moramo narediti, preden začnemo z določanjem prihodnjih stanj je določitev trenutnega stanja gospodarstva, torej stanja v zadnjem času, na katerem je naš model treniral. Za določitev le tega uporabimo tako imenovani Viterbijev algoritem. Le ta je oblikovan tako, da nam vrne zaporedje  $Q$ , ki maksimizira  $P(Q|O, \lambda)$ .

---

**Algorithm 1:** Viterbijev algoritem

---

**Input:**

- Prostor opazovanj  $O = \{o_1, o_2, \dots, o_N\}$
- Prostor stanj  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_K\}$
- Nabor začetnih verjetnosti  $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_K)$ ,  
kjer velja da je  $\pi_i == s_i$
- Zaporedje opazovanj  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_T)$ ,  
tako da je  $y_t == i$ , če je opazovanje v času  $t$   $o_i$
- Prehodna matrika  $A$  velikosti  $K \times K$ ,  
kjer stanje  $A_{ij}$  pove verjetnost prehoda iz stanja  $s_i$  v stanje  $s_j$
- Izhodno matriko  $B$  velikosti  $K \times N$ ,  
kjer stanje  $B_{ij}$  pove verjetnost, da opazimo  $o_j$  iz stanja  $s_i$

```

for vsako stanje  $j \in \{1, 2, \dots, K\}$  do
   $T_1[j, 1] \leftarrow \pi B_{jy_1}$ 
   $T_2[j, 1] \leftarrow 0$ 
end
for vsako opazovanje  $i = 2, 3, \dots, T$  do
  for  $j \in \{1, 2, \dots, K\}$  do
     $T_1[j, i] \leftarrow \max_k (T_1[k, i-1] \cdot A_{kj} \cdot B_{jy_i})$ 
     $T_2[j, i] \leftarrow \arg \max_k (T_1[k, i-1] \cdot A_{kj} \cdot B_{jy_i})$ 
  end
end
 $z_T \leftarrow \arg \max_k (T_1[k, T])$ 
 $x_T \leftarrow s_{z_T}$ 
for  $i \leftarrow T, T-1, \dots, 2$  do
   $z_{i-1} \leftarrow T_2[z_i, i]$ 
   $x_{i-1} \leftarrow s_{z_{i-1}}$ 
end

```

**Result:** Najbolj verjetno zaporedje opazovanj  $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$

---

Za delo s tem algoritmom moramo definirati  $\delta_t(i)$ , ki za vsako stanje  $i$  vrne največjo

verjetnost vzdolž poti v času  $t$ . Prek  $\delta_t(i)$  nato induktivno izvedemo algoritem. Viterbijev algoritem nam vrne  $p^*$ , ki je največja verjetnost in  $q_T^*$ , ki nam pove stanje v času  $T$ , ki nam to verjetnost vrne.

**3.6. Generiranje poti v skritem markovskem modelu.** V celoti lahko sedaj predstavimo delovanje skritega markovskega modela na primeru generiranja ene poti. V tem primeru je pot na primer cenovni proces, ki ga bo glede na naš model opravil finančni instrument.

Glede na naše podatke, ki jih označimo kot  $O = (O_1, \dots, O_T)$  ocenimo parametre našega modela  $\lambda = (\Pi, A, C, \Gamma, \Sigma)$ . Začetne vrednosti elementov  $\Pi, A$  in  $C$  predpostavimo kot enake, za  $\Gamma$  in  $\Sigma$  pa ocenimo prek razvrščanja v skupine. Te parametre rekurzivno izboljšujemo, dokler nismo zadovoljni z določeno  $P(O|\lambda)$ . Parametre, ki smo jih dobili na ta način lahko za isti set podatkov uporabimo poljubno mnogokrat. V naslednjem koraku določimo trenutno stanje našega modela, torej stanje iz katerega začeli. V tem trenutku določimo še čas, do katerega želimo oceniti naš proces, naj bo to recimo  $T_T$ .

Naslednji korak si lahko predstavljamo kot zanko. Če predpostavimo, da naš parameter  $t$  teče od časa  $T$  do časa  $T_T$ , v vsakem koraku glede na stanje, v katerem se nahajmo, izberemo stanje, v katerega se bomo premaknili v naslednjem koraku. V vsakem koraku še shranimo stanje, v katerem smo bili. Na ta način dobimo pot, ki jo generira skriti markovski model.

Ta postopek lahko ponovimo večkrat, kar se izkaže precej uporabno v primeru Monte Carlo simulacije.

---

**Algorithm 2:** Monte Carlo simulacija skritih markovskih modelov

---

**Input:** Podatki  $O = (O_1, \dots, O_T)$

Ocenimo parametre  $\lambda$

**while** Dokler  $P(O|\lambda)$  ni dovolj velik **do**

    | Ponovno izračunaj  $P(O|\lambda)$  z novimi parametri  $\lambda$

**end**

Ocenimo stanje v času  $T$  z Viterbijevim algoritmom

**for**  $s = 1, \dots, S$ , kjer je  $S$  število stanj **do**

    Dobimo vzorec iz izhodne porazdelitve stanja  $i$ , kjer je  $t = 1$

**while**  $t \leq TP$ , kjer je  $TP$  zadnji čas, kjer nas vrednost zanima **do**

        |  $t = t + 1$

        | Izberi stanje za čas  $t$  v skladu z prehodno matriko  $A$

        | Generiramo vzorec iz izhodne porazdelitve tega stanja

**end**

**end**

**Result:** Zaporedje stanj

---

## 4. UPORABA

Skriti markovski modeli so zelo široko uporabno orodje za modeliranje. Načini uporabe se zelo razlikujejo, od uporabe v financah do določevanja genoma. Ekonomskim, torej tistim, ki jih delujejo kot napovedovalci cen vrednostnih papirjev v



prihodnosti, se bom najgloblje posvetil v naslednjem delu, zato sedaj raje pogledjmo ostale načine uporabe.

**4.1. Procesiranje govora.** Prva ideja Leonarda E. Bauma za njegov algoritem je bila prav uporaba v procesiranju govora. Ena najbolj široko uporabljenih načinov uporabe pa je procesiranje govora za posamične glasovne enote. Gre za sistem, kjer želimo prepoznati posamične izgovorjene besede, ne moremo pa ga uporabiti za splošen govor, saj algoritem ni implementiran za žvezen govor, le za posamezne enote. Ideja tega algoritma je razviti najboljše možne aproksimacijske algoritme, da lahko skriti markovski model filtrira naključne šume, zvoke na najboljši možen način.

Da bomo procesiranje lahko zmodelirali, moramo najprej določiti slovar glasov, iz katerega vemo, da bo glas prišel. Tu uporabljam besedo glas, ker ni nujno, da bo prepoznan glas dejansko beseda; eden izmed glasov bi lahko bil tudi zgolj črka A. Velja omeniti tudi, da na ta način, le z nekaj adaptacijami, deluje tudi Siri.

**4.2. Uporaba v biologiji in biokemiji.** Gre za eno izmed prvih uporab skritih markovskih modelov. Ker se je uporaba na tem področju začela precej zgodaj tudi ne preseneča, da je uporaba precej široka. Uporaba skritih markovskih modelov se je v razširila zaradi povečanja količine podatkov, ki je znanstvenikom na voljo. Ker so v zadnjem času določili več zaporedij genoma, je tako količino podatkov težko obdelati brez uporabe naprednih računskih metod.

Kot že rečeno, je uporaba skritih markovskih modelov v biologiji zelo široka. Uporablja se jih kot že rečeno za obdelave genoma, za določanje genov, za modeliranje procesov v celični membrani. Splošno prepričanje je, da se bo uporaba skritih markovskih modelov v biologiji in ostalih povezanih znanostih še razširila.

Pomemben primer uporabe v primeru določanja **integral membrane protein**, to je protein, ki je stalno pripet v biološko membrano, saj predstavljajo 20–30% proteinov v popolnoma sekvenciranih genomih. Tu ločimo dve vrsti proteinske strukture,  $\alpha$  in  $\beta$ . Določanje  $\alpha$  danes ni več problem, se pa zato pojavljajo precej večji problemi pri  $\beta$  membranskih proteinih. Za ta primer so avtorji [7] razvili poseben primer skritega markovskega modela.

Pomembna je tudi uporaba za lociranje genov, torej iskanje dela genomske deoksiribonukleinske kisline (DNK), ki kodira gene.

**4.3. Ostali načini uporabe.** Skrite markovske modele se uporablja še na precej ostalih primerih. Skrite markovske modele se tako uporablja za

- prevajanje govora oziroma pisave iz enega jezika v drug jezik,
- kriptanaliza, torej omogočanje vdora v zakodirane sisteme,
- prepoznavanje lastnoročne pisave,
- prepoznavanje dejanj,
- napovedovanje prevoza.

Skriti markovski modeli so torej široko uporabno modelacijsko orodje.

## 5. ČASOVNE VRSTE

**Definicija 5.1.** Časovna vrsta množica opazovanj  $x_t$ , vsako opazovano ob časih  $t$  znotraj nekega časovnega intervala.

**Definicija 5.2.** Model časovne vrste za opazovane podatke  $x_t$  je slučajni proces  $X_t$ , kjer velja, da so  $x_t$  realizacije tega slučajnega procesa v časih  $t$ .

Vrednosti delnic po dnevih, število uporabnikov spletne strani po urah, prebivalstvo neke države po letih, ... To je le nekaj izmed mnogih primerov uporabe časovnih vrst. Časovne vrste nam dajo lepšo idejo o trendu podatkov, ki jih želimo analizirati. Enostavno lahko vidimo, ali je npr. cena jagod odvisna od letnega časa ter ali se cena jabolk skozi leta spreminja.

Časovna analiza je lahko analitična, kjer preučujemo podatke iz preteklosti, ter prediktivna, kjer želimo napovedati neke trende. Analize lahko poteka na več načinov, od linearnih in nelinearnih modelov do modelov z eno spremenljivko in modelov z več spremenljivkami. Prav zaradi njihove široke uporabnosti se je razvilo zelo veliko modelov za njihovo analizo, začensi leta 1970 z delom Boxa in Jenkinsa na področju samoregresivnega integriranega tekočega povprečja, danes znanega pod kratico ARIMA.

Časovne vrste so po definiciji odvisne od časa. Prav zato je pomembno, da se opazovanje med seboj medčasovno ne menja. Opazovanja  $x_t$  so tako razporejena po časih, ko so bila zaznana, torej naraščajočem času  $t$ .

V realnosti pogosto velja, da so zaporedna opazovanja med seboj odvisna. To je predvsem očitno, če pomislimo na najbolj tipičen primer finančne časovne vrste, in sicer vrednostnega procesa cene neke delnice. Če vidimo, da ima v času  $t$  delnica ceno  $p$ , si lahko navadno mislimo, da bo v času  $t + 1$  cena blizu  $p$ . Glede na čase, v katerih gledamo rezultate naše časovne vrste v grobem ločimo 3 tipe:

- Časovne vrste v zveznih časih. Tu pridobivamo podatke za vsak trenutek znotraj nekega časovnega intervala. Dober primer je tu EKG, kjer v vsakem trenutku preiskave naprava izrisuje graf električne napetosti proti času. V analizi finančnih časovnih vrst za ta tip uporabljamo Black-Scholesov model. Gre za podvrsto parabolične diferencialne enačbe, katere rešitev nam da predvideno vrednost evropskih opcij *call* in *put* v času, ki nas zanima.
- Časovne vrste z diskretnimi vrednostmi kjer pridobivamo vrednosti, ki lahko zavzamejo le diskretne vrednosti, torej največ števno neskončno različnih možnosti. Tipičen primer bi bil število klicev med 7.00 in 8.00 znotraj Ljubljane oziroma število nesreč znotraj enega dneva na avtocesti med Postojno in Ljubljano.
- Zadnja vrsta so diskretne časovne vrste, torej vrste, ki vrednosti vzamejo le v določenih časovnih trenutkih, npr. konec vsake ure, konec dneva, ... Tukaj lahko vrednosti zavzamejo kakršnokoli vrednost, pomembno je le, da te vrednosti vzamemo ob pravih trenutkih. Te vrste so uporabne tudi za aproksimiranje časovnih vrst v zveznih časih. Prav vrste takega tipa so tiste, ki jih lahko analiziramo z skritimi markovskimi modeli.

S finančnimi vrstami se srečujemo vsak dan in v najrazličnejših oblikah. Zaradi njihove raznolikosti je izbira pravega modela za njihovo analizo ključna. V našem primeru bomo za njihovo analizo uporabili skrite markovske modele.

Navadno je glavni namen analize časovnih vrst napovedovanje trendov, vendar se je to področje z razvojem predvsem podatkovnega rudarjenja razširilo tudi na druga področja.

**5.1. Dodatne lastnosti modela.** Ko imamo opravka z modeli časovnih vrst, je zelo pomembno, da se zavedamo, da na vrednosti vpliva zaporedna odvisnost. To pomeni, da nas zanima odnos, ki ga imajo zaporedna opazovanja. Da lahko o tem govorimo, pa moramo pogledati prvih nekaj momentov. Pri tem privzamemo sintakso iz 3.2.

**Lema 5.3.** *Naj bo  $f$  funkcija, za katero velja, da je  $E(f(X)) < \infty$  za neko slučajno spremenljivko  $X$ . Naj bo  $Q_t$  slučajna spremenljivka, ki nam v času  $t$  pove opazovanje. Naj še velja, da je imamo glede na opazovanje možnih  $m$  opazovanj. Potem najprej velja, da je*

$$E(f(Q_t)) = \sum_{i=1}^m E(f(Q_t)|S_t = i)P(S_t = i)$$

*poleg tega pa velja še*

$$E(f(Q_t, Q_{t+k})) = \sum_{i,j=1}^m E(f(Q_t, Q_{t+k})|S_t = i, S_{t+k} = j)P(S_t = i)\Gamma_{ij}^k$$

*kjer je  $\Gamma_{ij}^k$   $ij$  element matrike  $\Gamma$ .*

Dokaz prvega je enostaven, saj  $E(f(Q_t))$  zgolj pogojimo na  $S_t = i$ . Za drugo enakost pa moramo najprej pogojiti na  $S_{t+k}$ , potem pa upoštevamo, da je to pogojna verjetnost zgolj na  $S_{t+k} = j$  in  $S_t = i$ . Na ta način smo prišli do izračuna drugega momenta, kjer za funkcijo  $f$  v prvem primeru vzamemo kvadriranje. Tako velja  $E(Q_t^2) = \sum_{i=1}^m E(Q_t^2|S_t = i)P(S_t = i)$  in posledično je varianca modela enaka

$$Var(Q_t) = \sum_{i=1}^m E(Q_t^2|S_t = i)P(S_t = i) - \left(\sum_{i=1}^m E(Q_t|S_t = i)P(S_t = i)\right)^2.$$

Po drugi enačbi lahko izračunamo tudi  $E(Q_t Q_{t+1})$ , in sicer velja

$$E(Q_t Q_{t+k}) = \sum_{i,j=1}^m E(Q_t Q_{t+k})|S_t = i, S_{t+k} = j)P(S_t = i)\Gamma_{ij}^k.$$

Tako dobimo kovarianco kot

$$Cov(Q_t, Q_{t+k}) = E(Q_t Q_{t+k}) - E(Q_t)E(Q_{t+k}).$$

Ko imamo vse to podano lahko izračunamo Pearsonov korelacijsko funkcijo PCC za naše podatke. Velja da je PCC enak

$$\rho_k = \frac{Cov(Q_t, Q_{t+k})}{Var(Q_t)}.$$

Vrednost tega se tako nahaja med  $-1$  in  $1$ , ki pomenita popolno koreliranost, oziroma popolno negativno koreliranost v primeru  $\rho_k = -1$ , medtem ko  $\rho_k = 0$  pomeni, da podatki medsebojno niso korelirani.

## 5.2. Finančna časovna vrsta.

**Definicija 5.4.** Finančna časovna vrsta je časovna vrsta, kjer so opazovanja  $x_t$  vrednosti finančnega instrumenta v času  $t$ .

Finančna časovna vrsta je tako zaporedje opaženih vrednosti nekega finančnega instrumenta. Analiza finančnih časovnih vrst se ukvarja z teorijo in prakso določanja vrednosti finančnih instrumentov skozi čas. Zaradi elementa negotovosti, kot je na primer volatilitnost finančnih instrumentov, jo moramo obravnavati ločeno od vseh ostalih časovnih vrst. Velja namreč da ravno ta negotovost prikaže pomembnost statistične teorije in metod, izpeljanih iz le te, v analizi finančnih časovnih vrst. Z finančnimi časovnimi vrstami se ukvarjajo statistiki ter kvantitativni finančniki. V nasprotju z ostalimi finančnimi vrstami se lahko zaradi mikrostrukture trga zgodi, da imajo finančne časovne vrste posebne lastnosti in obliko. Tako se pogosto predpostavlja, da so donosi  $R$  normalno porazdeljeni z pričakovano vrednostjo  $\mu$  in varianco  $\sigma^2$ ,  $R \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Vendar to ne velja, saj lahko hitro ugotovimo, da donos ne bo nikoli manjši od  $-1$ . Če predpostavimo, da je  $P_t$  cena instrumenta v času  $t$ , potem je očitno, da le ta nikoli ne bo manjša od 0. Potem je donos  $R_t$  definiran kot

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

kar pomeni, da je

$$-1 = \frac{0 - P_{t-1}}{P_{t-1}} \leq R_t.$$

V prvi polovici 20. stoletja se je v povezavi z finančnimi trgi osnovala tako imenovana hipoteza o učinkovitem trgu, ki pravi, da če cene popolnoma predstavljajo pričakovanja in informacije vseh udeležencev trga, potem so njihove spremembe nepričakovane. To lahko povežemo tudi s teorijo slučajnih procesov. Teorija martingalov pravi namreč, da je najboljša ocena jutrišnje cene današnja cena. Zato v finančnih časovnih vrstah večjo težo damo podatkom, ki so nam zgodili kasneje.

## 6. UPORABA SKRITIH MARKOVSKIH MODELOV V FINANČNIH ČASOVNIH VRSTAH

Glavna ideja uporabe skritih markovskih modelov v finančni časovni sledi iz osnovne ideje Andrewa Viterbija 1, in sicer analiziranje signalov, ki jih prejmemo tako, da izločimo šume v prejetem signalu.

Aplikacija skritih markovskih modelov v finančne časovne vrste je sorazmerno enostavna. Naše izbrane podatke o ceni nekega instrumenta določimo kot zaporedje opazovanj  $O$ . Na podlagi tega določimo število stanj ter začetne ocene vseh parametrov.

V zadnjem času se je uporaba skritih markovskih modelov v finančništvu precej povečala zaradi široke uporabnosti, med drugim tudi za problem izbire portfelja. Gre za eno izmed klasičnih vprašanj, ki sem nam postavijo je v finančni optimizaciji. To vprašanje se da rešiti tudi z uporabo linearnega programiranja in skritih markovskih modelov. Uporabnost tega pristopa se pokaže predvsem zaradi možnosti omejevanja tveganja.

### Primer 6.1. Problem izbire portfelja

Eno izmed klasičnih vprašanj, ki sem nam postavijo je v finančni optimizaciji je problem optimalne izbire portfelja. To vprašanje se da rešiti tudi z uporabo linearnega programiranja in skritih markovskih modelov.

Predpostavimo, da imamo v trenutnem času kapital  $M$ , ki ga lahko vložimo v  $N$  različnih vrednostnih papirjev. Odločiti se moramo, kako bomo naš kapital razdelili tako, da bomo maksimizirali svoj donos in hkrati minimizirali tveganje.

Vsak vrednostni papir ima donos  $R_j$ , kjer velja  $j \in 1, \dots, N$ . Za vsak  $j$  je donos slučajna spremenljivka, katere porazdelitev aproksimiramo z diskretno slučajno spremenljivko  $R_j$ . Določimo še vektor  $x = (x_1, \dots, x_N)$ , kjer nam  $x_j$  pove, kakšen delež kapitala smo vložili v posamezen vrednostni papir, to je

$$x_j = \frac{M_j}{M}$$

če velja  $\sum_{j=1}^N M_j = M$ . Ob koncu investicije bomo torej zaslužili

$$R_x = \sum_{j=1}^N x_j R_j$$

kjer je  $R_x$  slučajna spremenljivka.

To nalogo lahko predstavimo kot linearni program s pomočjo pogojne vrednosti ob padcu CVaR. CVaR je mera tveganja, ki nam oceni tržno ali kreditno tveganje portfelja. Tako pridemo do optimizacijskega problema oblike

$$\begin{aligned} \min \quad & CVaR_\alpha(R_x) \\ \text{p.p.} \quad & E(R_x) \geq d \end{aligned}$$

kjer je  $d$  prej določen zahtevan donos,  $\alpha$  pa stopnja zavrnitve.

Skriti markovski modeli se v igro vključijo, ko moramo aproksimirati donose. Kot že vemo, je  $R_j$  diskretna aproksimacija donosa s končnim številom stanj. Ta stanja določimo kot različna možna stanja finančnega instrumenta na naših podatkih. Nato znanih podatkov določimo še vhodne in izhodne matrike za vse slučajne spremenljivke.

Z zbranim znanjem in podatki izvedemo simulacije več različnih scenarijev, čemur na koncu sledi še reševanje dejanskega linearnega programa.  $\diamond$

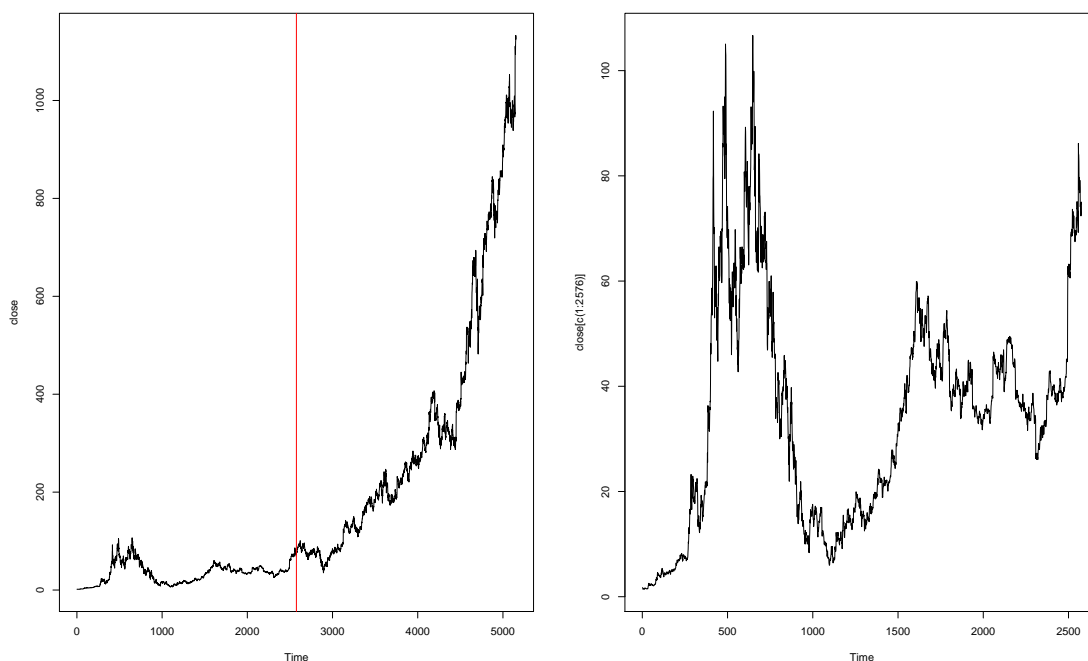
Modeli, ki se jih uporablja v za napovedovanje cen finančnih instrumentov na kratki rok predvidevajo, da model sledi Brownovem gibanju, vendar velja, da ti modeli ne morejo zaznati ekstremnega gibanja cen. Tu je prednost tako imenovanih *regime-switching* modelov, torej modelov pri katerih se zamenjujejo stanja in med katere spadajo tudi skriti markovski modeli.

## 7. PRAKTIČNI PRIMER

Že v 3.2 sem omenil, da so finančni donosi navadno "left-skewed", torej je mediana večja od povprečja. Prav zato naj bi bili skriti markovski modeli, po [1] bolj primerni za ugotavljanje padajočih cen finančnih instrumentov. To bom preveril na več setih podatkov.

Podatki, ki sem jih za to pridobil pokrivajo vrednosti delnic na newyorški borzi NYSE za vse delnice, ki so tu kotirale od 1970 naprej, pa do leta 2016, za analizo pa bom uporabil le nekaj podjetij. Te podatke bom uporabil predvsem v splošni analizi kakovosti modela 7.1, kjer bom nato primerjal cene, ki jih predvideva skriti markovski model z dejanskimi cenami.

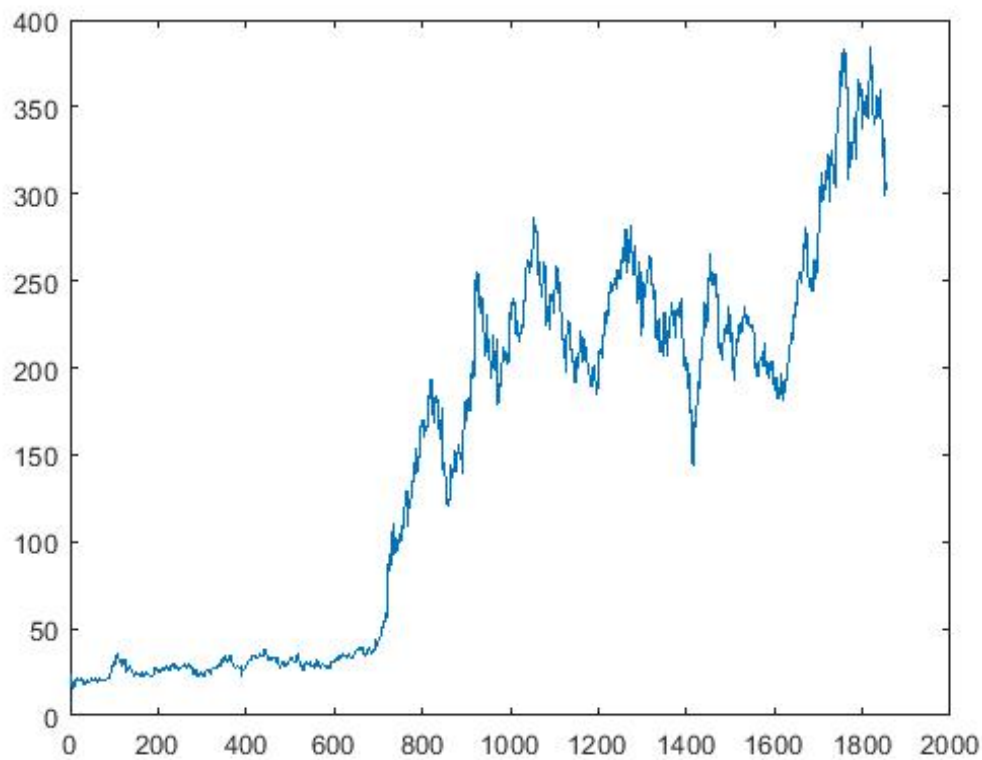
Seveda ne moremo vzeti prevelikega razpona podatkov, saj lahko na dolgi rok cena instrumenta zraste izven ranga, na katerem smo naš model trenirali. To lahko lepo vidimo, ko pogledamo na zaključne cene delnice Amazona, na NYSE označena z AMZN.



Na levi sliki je z rdečo črto prikazana datum, do katerega so na desni sliki prikazane cene delnic. Očitno je, da vrednosti, ki jih je cena delnice dosegla ob koncu merjenja, ne moremo doseči z našim modelom. Tako se bomo morali osredotočiti na krajše časovno obdobje.

Analizo bom izvedel tako, da bom poizkusil ugotoviti stanja, v katerih se je delnica nahajala. Ločil sem tri stanja in sicer stagnacija, rast cene ter padec cene. Pri treningu modela bom ceno na dan primerjal z povprečjem prejšnjih 10 dni.

**7.1. Splošna analiza kakovosti modela.** Za splošno analizo kakovosti modela sem pridobil podatke iz newyorške borze NYSE za ceno delnic Tesle, proizvajalca električnih avtomobilov. Zanje bom analiziral stanja cen ob koncu trgovalnega dne. Podjetje Tesla Motors, Inc. sta julija 2003 ustanovila Martin Eberhard in Marc Tarpennig, ki sta za financiranje skrbela v začetku njegovega delovanja, februarja 2004 pa je v podjetje prišel Elon Musk, ki je še ob času pisanja bil 21,9% lastnik podjetja. Tesla, Inc. je svoj IPO, initial public offering ali prva javna ponudba delnic izvedla 29. junija 2010. Od IPO pa do zadnjega dne, ko sem pridobil podatke, je cena delnic z počasi rastla, z vmesnimi obdobji padca cene.

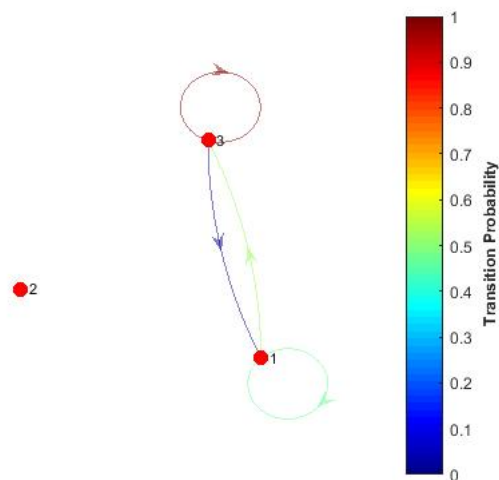


Za to delnico sem torej poizkusil ugotoviti stanja, v katerih so se ob koncu vsakega trgovalnega dneva nahajala delnica.

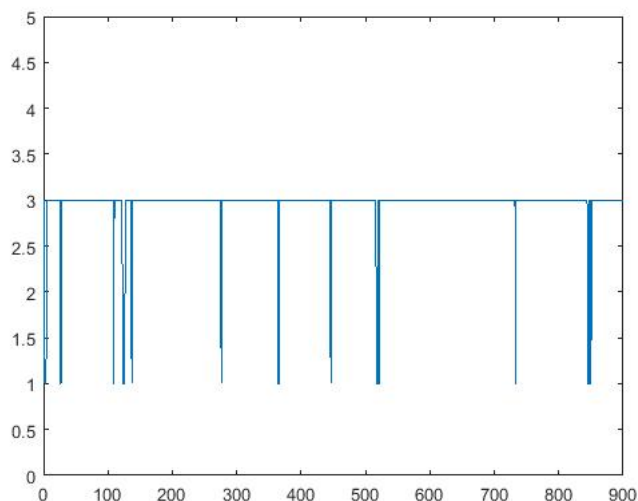
V svojem primeru sem kot rečeno ločil stanje rasti, stagnacije in padca cen. Med stanji sem moral najprej določiti prehodno matriko, in iz podatkov ugotovil, da je oblike

$$\begin{bmatrix} 0.334 & 0 & 0.666 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.001 & 0 & 0.999 \end{bmatrix},$$

torej res zadošča pogojem, da je vsota elementov po vsaki vrstici enaka 1. Torej iz vsakega stanja res izstopimo. To je lepo tudi razvidno iz grafa prehodov.

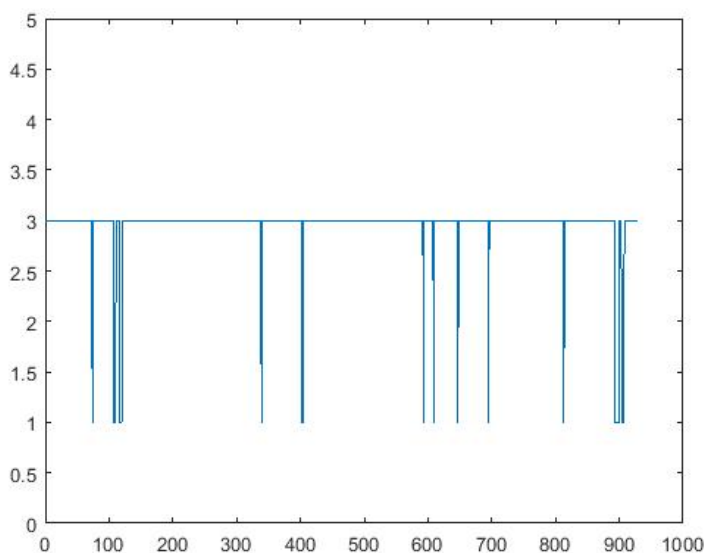


Natančnejši pregled razkriva, da je na območju, na katerem smo model učili navadno prihajalo do rasti. Le v 25 primerih je namreč prišlo do padca cene napram prejšnjemu povprečju, v 905 primerih je prišlo do rasti cene, nikoli pa nismo imeli stagnacije.



To lahko vidimo tudi iz grafa prehodov, kjer 3 pomeni rast, 2 stagnacijo in 1 padec. Točke, ki označujejo tvorijo skoraj konstantno funkcijo za vrednost 3.

Naravno se nam postavi vprašanje, kako bodo ta stanja sledila v prihodnje. S pomočjo prehodne matrike lahko to poizkusimo ugotoviti, in dobimo naslednji rezultat. V 30 primerih predvidevamo stanje padca, v 900 pa predvidevamo stanje rasti.



## 8. ZAKLJUČEK

V svoji seminarski nalogi sem opisal delovanje skritih markovskih modelov, pri čemer sem se osredotočil na finančne časovne vrste.

Skriti markovski modeli so spadajo med markovske modele, za katere velja, da velja markovska lastnost, katerih razvoj se je začel z Andrejem Markovom. Z njimi



opišemo slučajne procese, pri katerih ne poznamo vseh podatkov, saj so skriti znotaj podatkov.

Za vzpostavitev modela potrebujemo zaporedje opazovanj, iz katerih izvlečemo nabor parametrov  $\lambda$ , s katerimi poizkusimo maksimizirati funkcijo verjetja  $P(O|\lambda)$ . To funkcijo poizkusimo maksimizirati s pomočjo Baum-Welchovega algoritma, ki je ključni algoritem za delovanje skritih markovskih modelov.

Njihova uporaba je zelo široka, od procesiranje govora prek uporabe v biokemičnih procesih. Sam sem se posvetil uporabi v finančnih časovnih vrstah.

Časovne vrste so časovno urejena zaporedja opazovanj, v finančnih časovnih vrstah pa so ta opazovanja vrednosti finančnih instrumentov v času. Te vrste obdelujemo na več načinov, od ARIMA modelov do skritih markovskih modelov.

Finančne časovne vrste predstavljajo veliko različnih izzivov, med katerimi je med pomembnejšimi problem izbire portfelja, kjer si lahko pomagamo tudi s skritimi markovskimi modeli.

Ob koncu sem si naredil tudi lasten praktični primer na primeru delnice Tesla, Inc. Želel sem ugotoviti, kako se spreminjajo stanja v katerih se nahaja delnica.

## LITERATURA

- [1] D. Roman, G. Mitra in N. Spagnolo, *Hidden Markov models for financial optimization problems*, IMA Journal of Management Mathematics **21** (2010) 111–129.
- [2] I.L. MacDonald in W. Zucchini, *Hidden Markov and Other Models for Discrete- valued Time Series*, Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability **70**, Chapman & Hall, London, 1997.
- [3] R.S. Mamon in R.J. Elliott *Hidden Markov Models in Finance*, International Series in Operations Research & Management Science **104**, Springer, New York, 2007.
- [4] P.J. Brockwell, R.A. Davis *Introduction to Time Series and Forecasting*, 2nd edition, Springer, 2002.
- [5] B.J. Yoon, *Hidden Markov Models and their Applications in Biological Sequence Analysis*, v: Current genomics, 10,6(2009):402-415, [29. 7. 2019], dostopno na <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC2766791/>.
- [6] *A Hidden Markov Model method, capable of predicting and discriminating  $\beta$ -barrel outer membrane proteins*, BMC Bioinformatics **5** (2004)
- [7] P.G. Bagos, T.D. Liakopoulos, I.C Spyropoulos, S.J. Hamodrakas, *A Hidden Markov Model method, capable of predicting and discriminating  $\beta$ -barrel outer membrane proteins*, v: BMC Bioinformatics, 5(2004), [30. 7. 2019], dostopno na <https://bmcbioinformatics.biomedcentral.com/articles/10.1186/1471-2105-5-29>.