

# Skriti markovski modeli v analizi finančnih časovnih vrst

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

26. avgust 2019

Martin Praček

Mentor: izr. prof. dr. Damjan Škulj

# Markovska lastnost

## Definicija

Naj bo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_s)_{0 \leq s})$  verjetnostni prostor s filtracijo za neko urejeno množico  $I$ . Naj bo  $(S, \mathcal{S})$  merljiv prostor. Na  $(S, \mathcal{S})$  merljiv slučajni proces  $X(X_t)_{t \in I}$ , ki je prilagojen na filtracijo, ima markovsko lastnost, če za vsak  $A \in \mathcal{S}$  in vsak par  $s, t \in I$ , kjer velja  $s < t$  velja

$$\mathbb{P}(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in A \mid X_s)$$

Tabela: Razdelitev markovskih procesov

	V celoti opazovan	Le delno opazovan
Avtonomen	Markovska veriga	Skriti markovski model
Kontorliran	Markovski odločitveni proces	Delno opazovan proces

# Primer

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$S_n = \sum_{t=1}^n X_t$$

$$P(S_{11} = 3) = P(S_{10} + X_{11} = 3 | S_{10} = 3) =$$

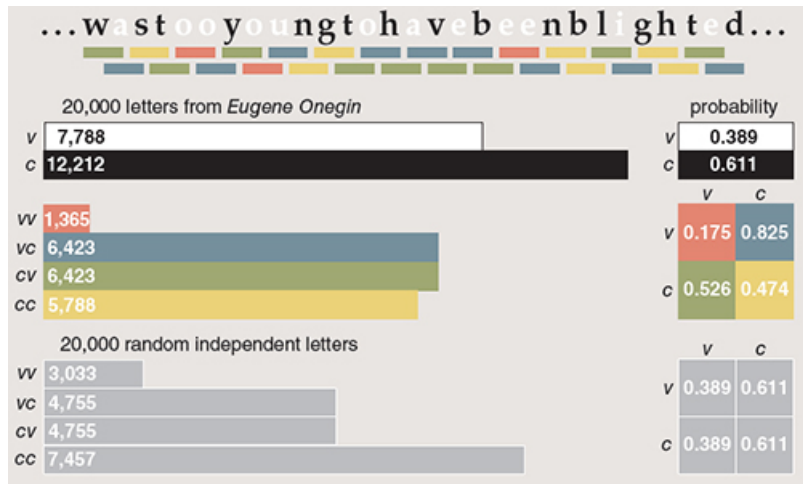
$$P(X_{11} = 0) = P(X = 0) = 1/3$$

# Skriti markovski model

Skriti markovski model je statistični markovski model, kjer predpostavljamo, da je modelirani sistem markovski proces s skritimi stanji. Gre torej za tip modela, kjer lahko vidimo le signal.

- Stanja so neznana
- Dinamična Bayesova mreža
- Bayesova statistika

# Zgodovina





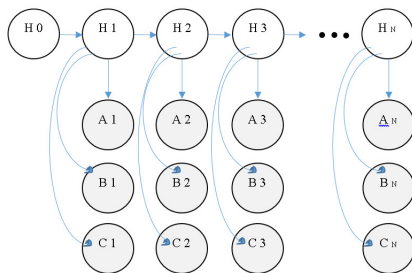
# Zgodovina

- Matematična teorija komunikacije
- EM-algoritem
- Stratonovič
- Viterbi
- Baum-Welch
- James Hamilton



# Zahteve

- Markovska lastnost
- Enakomerno porazdeljeni časi signalov  $O_t$ , ki jih poda resnični svet
- Sistem ima  $N$  stanj, vsako določa slučajna spremenljivka  $S$



Hidden States:

$$H_i = \{x, y, z, \underline{e}\}$$

Observations:

$$A = \{\underline{a} \text{ discrete number from 1 to } U_A\}$$

$$B = \{\underline{b} \text{ discrete number from 1 to } U_B\}$$

$$C = \{\underline{c} \text{ discrete number from 1 to } U_C\}$$

- Slučajnih spremenljivk skoraj v nobenem času ne poznamo, poznamo pa slučajni proces  $Q$ , ki predstavlja signale
- Porazdelitveni zakon vsakega stanja  $i$  označimo z  $b_i(x)$
- Vektor začetnih stanj je  $\pi$
- Prehodna matrika  $A$ , ki je neodvisna od časa

# Porazdelitveni zakon

- Gaussova mešanica
- $b_i = \sum_{j=1}^M c_{ij} N(x; \mu_j, \sigma_j^2)$
- Število porazdelitev  $M$
- Matrika  $\Gamma$ ,  $\mu_{ij}$  predstavlja pričakovano vrednost porazdelitve  $j$  v stanju  $i$
- Matrika  $\Sigma$ , kjer  $\sigma_{ij}$  predstavlja varianco porazdelitve  $j$  v stanju  $i$
- Matrika  $C$ , koeficienti  $c_{ij}$  iz Gaussove mešanice

# Generiranje poti v skitem markovskem modelu

- $O = (O_1, \dots, O_T)$
- $\lambda = (\Pi, A, C, \Gamma, \Sigma)$
- $P(O|\lambda)$
- Začetno stanje

# Uporaba

- Biologija
- Procesiranje govora



# Časovne vrste

## Definicija

Časovna vrsta množica opazovanj  $x_t$ , vsako opazovano ob časih  $t$  znotraj nekega časovnega intervala.

## Definicija

Model časovne vrste za opazovane podatke  $x_t$  je slučajni proces  $X_t$ , kjer velja, da so  $x_t$  realizacije tega slučajnega procesa v časih  $t$ .

## Definicija

Finančna časovna vrsta je časovna vrsta, kjer so opazovanja  $x_t$  vrednosti finančnega instrumenta v času  $t$ .

# Posebnosti

- Normalna porazdelitev donosov
- Hipoteza o učinkovitem trgu

$$-1 = \frac{0 - P_{t-1}}{P_{t-1}} \leq R_t$$



# Uporaba skritih markovskih modelov v finančnih časovnih vrstah

- Zaporedje cen  $O$
- Finančna optimizacija
- Brownovo gibanje

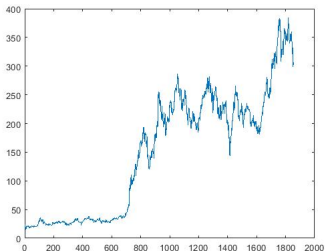
# Problem izbire portfelja

- Kapital  $M$
- $N$  vrednostnih papirjev
- Vsak papir ima donos  $R_j$
- $R_x = \sum_{j=1}^N x_j R_j$
- $d$  zahtevan donos
- $\alpha$  stopnja zavrnitve

$$\begin{array}{ll} \min & CVaR_{\alpha}(R_x) \\ \text{p.p.} & E(R_x) \geq d \end{array}$$

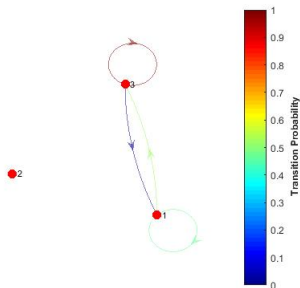
# Praktični primer

- Asimetrija v levo
- Tesla Inc.

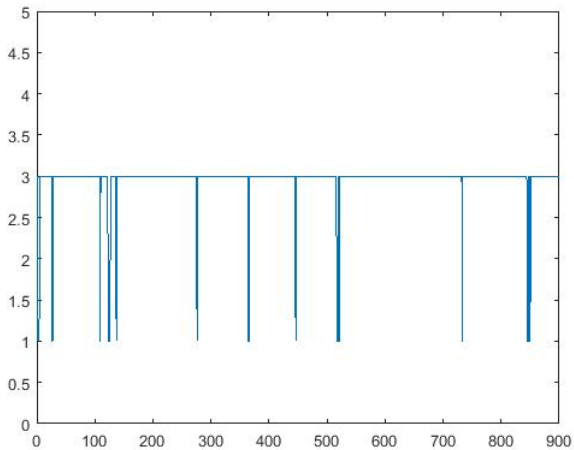


Slika: Cena delnice Tesla, Inc.

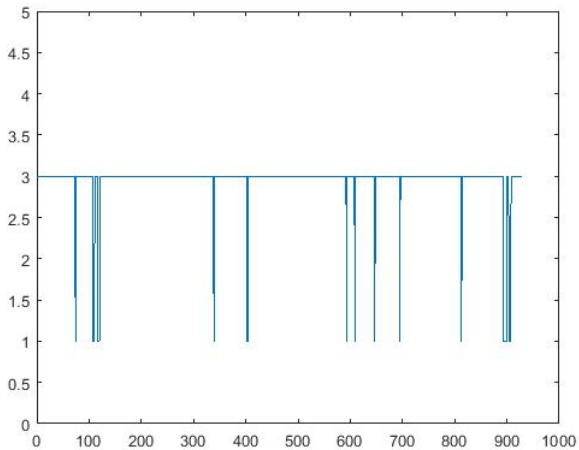
$$\begin{bmatrix} 0.334 & 0 & 0.666 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.001 & 0 & 0.999 \end{bmatrix}$$



Slika: Verjetnosti prehoda med stanji



Slika: Stanja na območju treninga



Slika: Stanja v prihodnosti

# Zaključek




V svoji seminarski nalogi sem opisal delovanje skritih markovskih modelov, pri čemer sem se osredotočil na finančne časovne vrste. Opisal sem osnove teorije in modelacije ter pripravil lastni model.








# Zahvala

Z

ahvalil bi se vsem, ki so mi pomagali na poti do diplome. Svojim stašem, bratu, sestrama, Neži, vsem profesorjem in asistentom na Fakulteti za matematiko in fiziko ter še posebej profesorju doktorju Damjanu Škulju.

-  D. Roman, G. Mitra in N. Spagnolo, *Hidden Markov models for financial optimization problems*, IMA Journal of Management Mathematics **21** (2010) 111–129.
-  I.L. MacDonald in W. Zucchini, *Hidden Markov and Other Models for Discrete- valued Time Series*, Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability **70**, Chapman & Hall, London, 1997.
-  R.S. Mamon in R.J. Elliott *Hidden Markov Models in Finance*, International Series in Operations Research & Management Science **104**, Springer, New York, 2007.

-  P.J. Brockwell, R.A. Davis *Introduction to Time Series and Forecasting*, 2nd edition, Springer, 2002.
-  B.J. Yoon, *Hidden Markov Models and their Applications in Biological Sequence Analysis*, v: Current genomics, 10,6(2009):402-415, [29. 7. 2019], dostopno na <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC2766791/>.
-  *A Hidden Markov Model method, capable of predicting and discriminating  $\beta$ -barrel outer membrane proteins*, BMC Bioinformatics **5** (2004)

-  P.G. Bagos, T.D. Liakopoulos, I.C Spyropoulos, S.J. Hamodrakas, *A Hidden Markov Model method, capable of predicting and discriminating  $\beta$ -barrel outer membrane proteins*, v: BMC Bioinformatics, 5(2004), [30. 7. 2019], dostopno na <https://bmcbioinformatics.biomedcentral.com/articles/10.1186/1471-2105-5-29>.
-  P. Dymarski, *Hidden Markov Models, Theory and Application*, InTech, Rijeka, 2011