

# Skriti markovski modeli v finančnih časovnih vrstah

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

3. maj 2019

Martin Praček

Mentor: izr. prof. dr. Damjan Škulj

# Markovska lastnost

## Definicija

Naj bo  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_s)_{0 \leq s})$  verjetnostni prostor s filtracijo za neko urejeno množico  $I$ . Naj bo  $(S, \mathcal{S})$  merljiv prostor. Na  $(S, \mathcal{S})$  merljiv slučajni proces  $X(X_t)_{t \in I}$ , ki je prilagojen na filtracijo, ima markovsko lastnost, če za vsak  $A \in \mathcal{S}$  in vsak par  $s, t \in I$ , kjer velja  $s < t$  velja

$$\mathbb{P}(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in A \mid X_s)$$

## Opomba

$$\mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) =$$

$$\mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1})$$

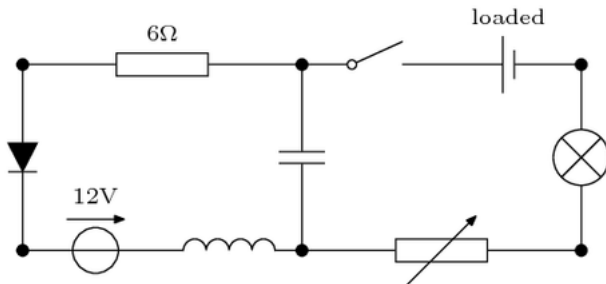
- Prediktivno modeliranje
- Verjetnostna napoved

	V celoti opazovan	Le delno opazovan
Avtonomen	Markovska veriga	Skriti markovski model
Kontorliran	Markovski proces odločanja	Delno opazovan proces



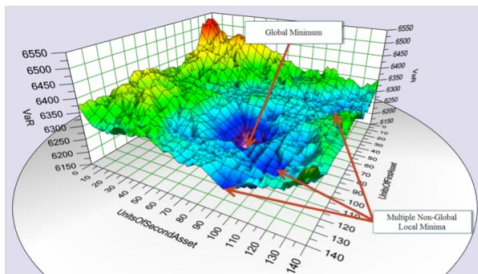
# Skriti markovski model

- Bayesijska mreža
- Viterbi



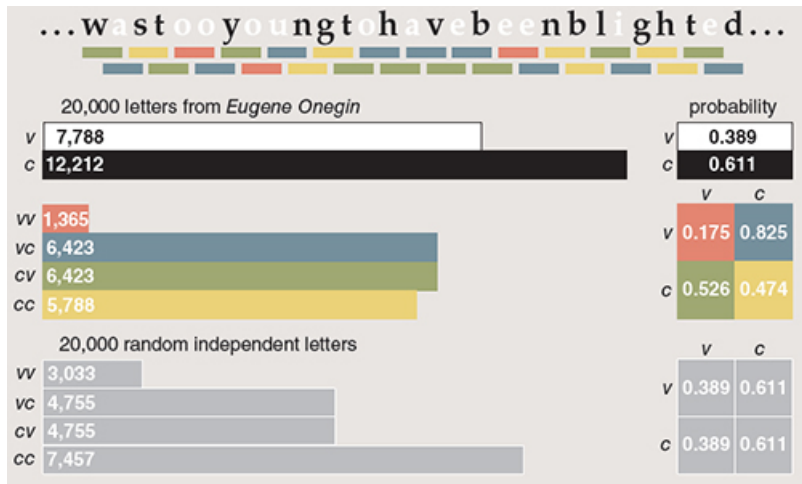
# Druge vrste skritih markovskih modelov

- 1 Zvezni primeri
- 2 Odvisno od več spremenljivk





# Zgodovina



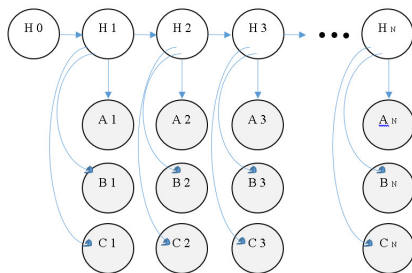


# Zgodovina

- Matematična teorija komunikacije
- EM-algoritem
- Stratonovič
- Viterbi
- Baum-Welch
- James Hamilton

# Zahteve

- Markovska lastnost
- Enakomerno porazdeljeni časi signalov  $O_t$ , ki jih poda resnični svet
- Sistem ima  $N$  stanj, vsako določa slučajna spremenljivka  $S$



Hidden States:

$$H_t = \{x, y, z, \underline{e}\}$$

Observations:

$$A = \{\text{discrete number from 1 to } U_A\}$$

$$B = \{\text{discrete number from 1 to } U_B\}$$

$$C = \{\text{discrete number from 1 to } U_C\}$$

- Slučajnih spremenljivk skoraj v nobenem času ne poznamo, poznamo pa slučajni proces  $Q$ , ki predstavlja signale
- Porazdelitveni zakon vsakega stanja  $i$  označimo z  $b_i(x)$
- Vektor začetnih stanj je  $\pi$
- Prehodna matrika  $A$ , ki je neodvisna od časa

# Porazdelitveni zakon

- Gaussova mešanica
- $b_i = \sum_{j=1}^M c_{ij} N(x; \mu_j, \sigma_j^2)$
- Število porazdelitev  $M$
- Matrika  $\Gamma$ ,  $\mu_{ij}$  predstavlja pričakovano vrednost porazdelitve  $j$  v stanju  $i$
- Matrika  $\Sigma$ , kjer  $\sigma_{ij}$  predstavlja varianco porazdelitve  $j$  v stanju  $i$
- Matrika  $C$ , koeficienti  $c_{ij}$  iz Gaussove mešanice

# Generiranje poti v skitem markovskem modelu

- $O = (O_1, \dots, O_T)$
- $\lambda = (\Pi, A, C, \Gamma, \Sigma)$
- $P(O|\lambda)$
- Začetno stanje

# Uporaba

- Biologija
- Procesiranje govora
- Prepoznavanje akcij
- Kriptoanaliza





# Časovne vrste

## Definicija

Časovna vrsta množica opazovanj  $x_t$ , vsako opazovano ob časih  $t$  znotraj nekega časovnega intervala.

## Definicija

Model časovne vrste za opazovane podatke  $x_t$  je slučajni proces  $X_t$ , kjer velja, da so  $x_t$  realizacije tega slučajnega procesa v časih  $t$ .

- Analitična ali prediktivna
- Odvisne od časa
- Odvisnost



- Diskreten čas
- Zvezen čas
- Diskretne vrednosti

# Kovarianca

## Lema

*Naj bo  $f$  funkcija, za katero velja, da je  $E(f(X)) < \infty$  za neko slučajno spremenljivko  $X$ . Naj bo  $Q_t$  slučajna spremenljivka, ki nam v času  $t$  pove opazovanje. Naj še velja, da je imamo glede na opazovanje možnih  $m$  opazovanj. Potem najprej velja, da je*

$$E(f(Q_t)) = \sum_{i=1}^m E(f(Q_t)|S_t = i)P(S_t = i)$$

*poleg tega pa velja še*

$$E(f(Q_t, Q_{t+k})) = \sum_{i,j=1}^m E(f(Q_t, Q_{t+k})|S_t = i, S_{t+k} = j)P(S_t = i)\Gamma_{ij}^k$$



$$\text{Var}(Q_t) = \sum_{i=1}^m E(Q_t^2 | S_t = i) P(S_t = i) - \left( \sum_{i=1}^m E(Q_t | S_t = i) P(S_t = i) \right)^2.$$

$$E(Q_t Q_{t+k}) = \sum_{i,j=1}^m E(Q_t Q_{t+k} | S_t = i, S_{t+k} = j) P(S_t = i) \Gamma_{ij}^k.$$

$$\text{Cov}(Q_t, Q_{t+k}) = E(Q_t Q_{t+k}) - E(Q_t) E(Q_{t+k}).$$

$$\rho_k = \frac{\text{Cov}(Q_t, Q_{t+k})}{\text{Var}(Q_t)}.$$

## Definicija

Finančna časovna vrsta je časovna vrsta, kjer so opazovanja  $x_t$  vrednosti finančnega instrumenta v času  $t$ .

# Posebnosti

- Normalna porazdelitev donosov
- Hipoteza o učinkovitem trgu

$$-1 = \frac{0 - P_{t-1}}{P_{t-1}} \leq R_t$$

# Uporaba skritih markovskih modelov v finančnih časovnih vrstah

- Zaporedje cen  $O$
- Finančna optimizacija
- Brownovo gibanje

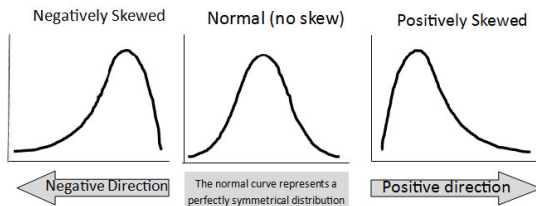


# Problem izbire portfelja

- Kapital  $M$
- $N$  vrednostnih papirjev
- Vsak papir ima donos  $R_j$
- $R_x = \sum_{j=1}^N x_j R_j$
- $d$  zahtevan donos
- $\alpha$  stopnja zavrnitve

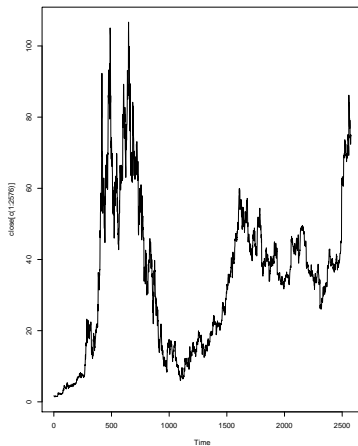
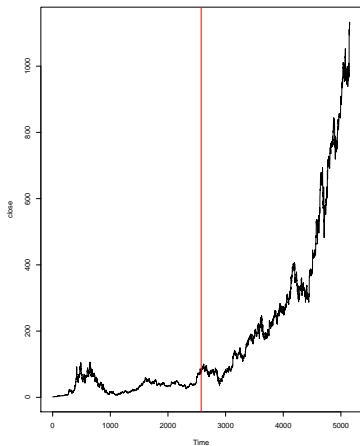
$$\begin{array}{ll} \min & CVaR_{\alpha}(R_x) \\ \text{p.p.} & E(R_x) \geq d \end{array}$$





# Praktični primer



- Amazon
- Google
- Tesla
- TripAdvisor
- Starbucks
- Novartis
- Microsoft

- General Motors
- Wells Fargo
- Chevron
- Bitcoin
- Standard & Poor's
- Zlato



-  D. Roman, G. Mitra in N. Spagnolo, *Hidden Markov models for financial optimization problems*, IMA Journal of Management Mathematics **21** (2010) 111–129.
-  I.L. MacDonald in W. Zucchini, *Hidden Markov and Other Models for Discrete- valued Time Series*, Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability **70**, Chapman & Hall, London, 1997.
-  R.S. Mamon in R.J. Elliott *Hidden Markov Models in Finance*, International Series in Operations Research & Management Science **104**, Springer, New York, 2007.
-  P.J. Brockwell, R.A. Davis *Introduction to Time Series and Forecasting*, 2nd edition, Springer, 2002.

# Markovski model