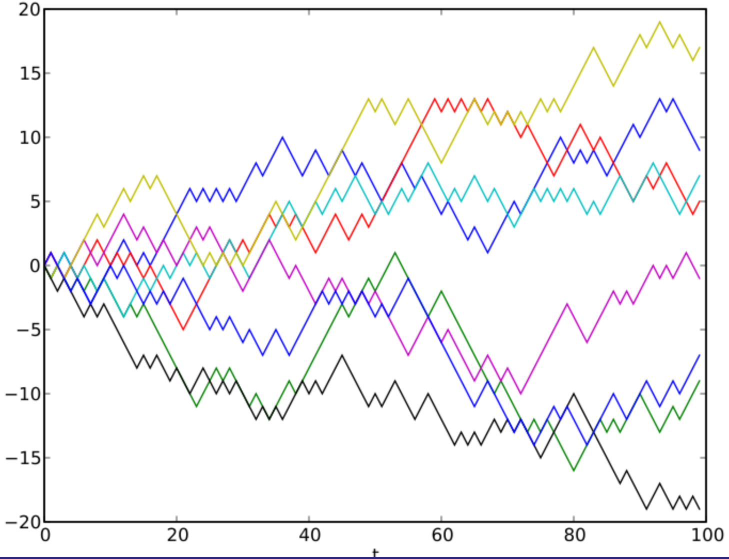

20
15
10
5
0
−5
−10
−15
−20
0
20
40
60
80
100
t

Skriti markovski modeli v finančnih časovnih vrstah

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

2. maj 2019

Martin Praček
Mentor: izr. prof. dr. Damjan Škulj

Markovska lastnost

Definicija

Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_s)$ verjetnostni prostor s filtracijo za neko urejeno množico I. Naj bo $(S, \mathcal{S})$ merljiv prostor. Na $(S, \mathcal{S})$ merljiv slučajni proces $X = \{X_t : \Omega \to S\}_{t \in I}$, ki je prilagojen na filtracijo, ima markovo lastnost, če za vsak $A \in \mathcal{S}$ in vsak par $s, t \in I$, kjer velja $s < t$ velja

$$\mathbb{P}(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in A \mid X_s)$$

Opomba

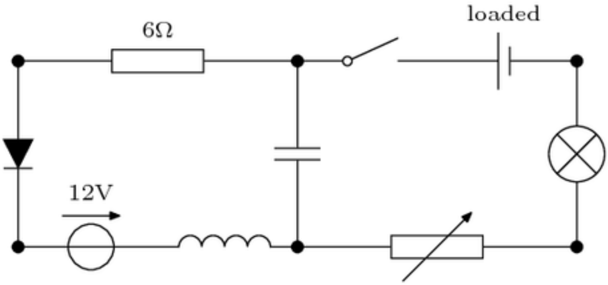
$$\mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1})$$

- Prediktivno modeliranje
- Verjetnostna napoved

	V celoti opazovan	Le delno opazovan
Avtonomen	Markovska veriga	Skriti markovski model
Kontorliran	Markovski proces odločanja	Delno opazovan proces

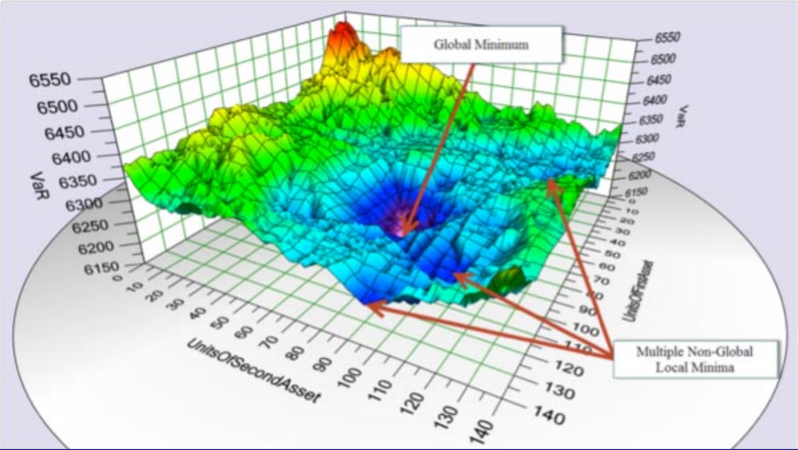
Skriti markovski model

- Bayesianska mreža
- Viterbi

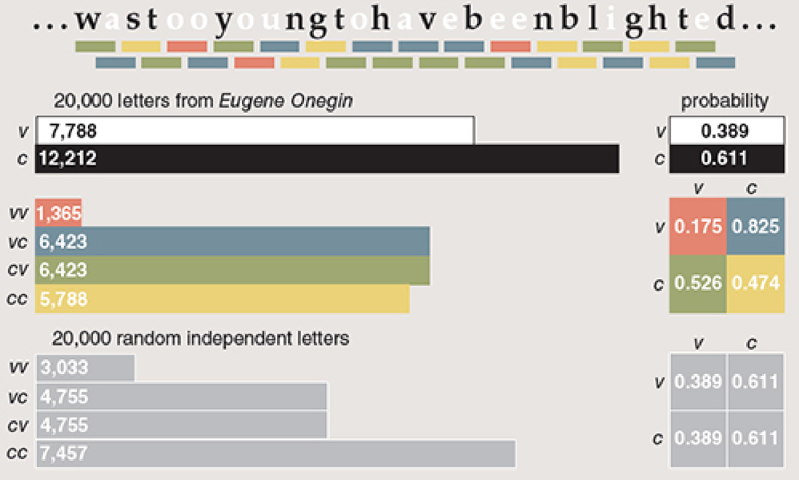


Druge vrste skritih markovskih modelov

1. Zvezni primeri
2. Odvisno od več spremenljivk



Zgodovina



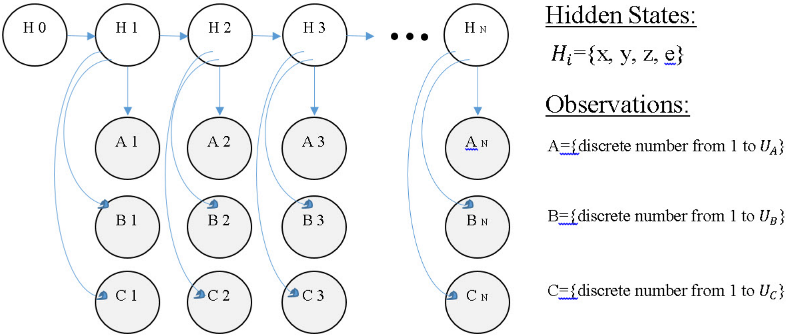
...w a s t o o y o u n g t o h a v e b e e n b l i g h t e d...
20,000 letters from *Eugene Onegin*
v 7,788
c 12,212
vv 1,365
vc 6,423
cv 6,423
cc 5,788
probability
v 0.389
c 0.611
v c
v 0.175 0.825
c 0.526 0.474
20,000 random independent letters
vv 3,033
vc 4,755
cv 4,755
cc 7,457
v c
v 0.389 0.611
c 0.389 0.611

Zgodovina

- Matematična teorija komunikacije
- EM-algoritem
- Stratonovič
- Viterbi
- Baum-Welch
- James Hamilton

Zahteve

- Markovska lastnost
- Enakomerno porazdeljeni časi signalov O_t, ki jih poda resnični svet
- Sistem ima N stanj, vsako določa slučajna spremenjivka S



- Slučajnih spremenljivk skoraj v nobenem času ne poznamo, poznamo pa slučajni proces Q, ki predstavlja signale
- Porazdelitveni zakon vsakega stanja i označimo z $b_i(x)$
- Vektor začetnih stanj je π
- Prehodna matrika A, ki je neodvisna od časa

Porazdelitveni zakon

- Gaussova mešanica
- $b_i = \sum_{j=1}^{M} c_{ij} N(x; \mu_j, \sigma_j^2)$
- Število porazdelitev M
- Matrika Γ, μ_{ij} predstavlja pričakovano vrednost porazdelitve j v stanju i
- Matrika Σ, kjer σ_{ij} predstavlja varianco porazdelitve j v stanju i
- Matrika C, koeficienti c_{ij} iz Gaussove mešanice

Generiranje poti v skritem markovskem modelu

- $O = (O_1, \ldots, O_T)$
- $\lambda = (\Pi, A, C, \Gamma, \Sigma)$
- $P(O|\lambda)$
- Začetno stanje

Uporaba

- Biologija
- Procesiranje govora
- Prepozavanje akcij
- Kriptoanaliza

Časovne vrste

Definicija

Časovna vrsta množica opazovanj x_t, vsako opazovano ob časih t znotraj nekega časovnega intervala.

Definicija

Model časovne vrste za opazovane podatke x_t je slučajni proces X_t, kjer velja, da so x_t realizacije tega slučajnega procesa v časih t.

- Analitična ali prediktivna
- Odvisne od časa
- Odvisnost

- Diskreten čas
- Zvezen čas
- Diskretne vrednosti

Kovarianca

Lema

Naj bo f funkcija, za katero velja, da je $E(f(X)) < \infty$ za neko slučajno spremenljivko X. Naj bo Q_t slučajna spremenljivka, ki nam v času t pove opazovanje. Naj še velja, da je imamo glede na opazovanje možnih m opazovanj. Potem najprej velja, da je

$$E(f(Q_t)) = \sum_{i=1}^{m} E(f(Q_t)|S_t = i)P(S_t = i)$$

poleg tega pa velja še

$$E(f(Q_t, Q_{t+k})) = \sum_{i,j=1}^{m} E(f(Q_t, Q_{t+k})|S_t = i, S_{t+k} = j)P(S_t = i)\Gamma_{ij}^{k}$$

$$Var(Q_t) = \sum_{i=1}^{m} E(Q_t^2|S_t = i)P(S_t = i) - (\sum_{i=1}^{m} E(Q_t|S_t = i)P(S_t = i))^2.$$

$$E(Q_t Q_{t+k})) = \sum_{i,j=1}^{m} E(Q_t Q_{t+k})|S_t = i, S_{t+k} = j)P(S_t = i)\Gamma_{ij}^{k}.$$

$$Cov(Q_t, Q_{t+k}) = E(Q_t Q_{t+k})) - E(Q_t)E(Q_{t+k}).$$

$$\rho_k = \frac{Cov(Q_t, Q_{t+k})}{Var(Q_t)}.$$

Definicija

Finančna časovna vrsta je časovna vrsta, kjer so opazovanja x_t vrednosti finančnega instrumenta v času t.

Posebnosti

- Normalna porazdelitev donosov
- Hipoteza o učinkovitem trgu

$$-1 = \frac{0 - P_{t-1}}{P_{t-1}} \leq R_t$$

Uporaba skritih markovskih modelov v finančnih časovnih vrstah

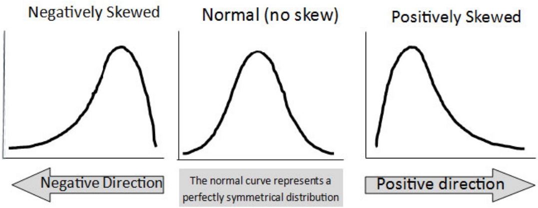
- Zaporedje cen O
- Finančna optimizacija
- Brownovo gibanje

Problem izbire portfelja

- Kapital M
- N vrednostnih papirjev
- Vsak papir ima donos R_j
- $R_x = \sum_{j=1}^{N} x_j R_j$
- d zahtevan donos
- α stopnja zavrnitve

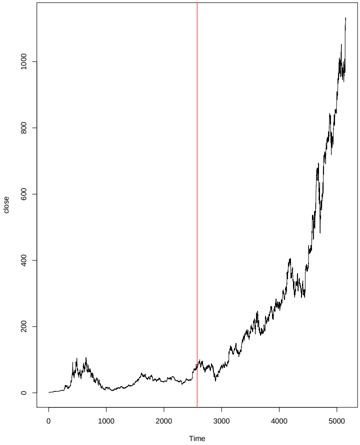
$$\begin{aligned} \min \quad & CVaR_\alpha(R_x) \\ \text{p.p.} \quad & E(R_x) \geq d \end{aligned}$$

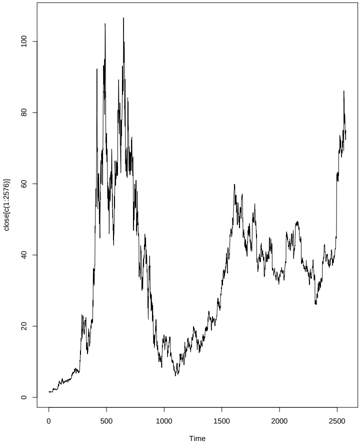
Praktični primer



- Amazon
- Google
- Tesla
- TripAdvisor
- Starbucks
- Novartis
- Microsoft

- General Motors
- Wells Fargo
- Chevron
- Bitcoin
- Standard & Poor's
- Zlato


close
0
200
400
600
800
1000
0
1000
2000
3000
4000
5000
Time


close[c(1:2576)]
0
20
40
60
80
100
0
500
1000
1500
2000
2500
Time

Viri

- D. Roman, G. Mitra in N. Spagnolo, *Hidden Markov models for financial optimization problems*, IMA Journal of Management Mathematics **21** (2010) 111–129.
- I.L. MacDonald in W. Zucchini, *Hidden Markov and Other Models for Discrete- valued Time Series*, Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability **70**, Chapman & Hall, London, 1997.
- R.S. Mamon in R.J. Elliott *Hidden Markov Models in Finance*, International Series in Operations Research & Management Science **104**, Springer, New York, 2007.
- P.J. Brockwell, R.A. Davis *Introduction to Time Series and Forecasting*,2nd edition, Springer, 2002.

Markovski model