

Skriti markovski modeli v finančnih časovnih vrstah

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

25. april 2019

Martin Praček

Mentor: izr. prof. dr. Damjan Škulj

Markovska lastnost

Definicija

Markovska lastnost Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_s)$ verjetnostni prostor s filtracijo za neko urejeno množico I . Naj bo (S, \mathcal{S}) merljiv prostor. (S, \mathcal{S}) merljiv slučajni proces $X = \{X_t : \Omega \rightarrow S\}_{t \in I}$, ki je prilagojen na filtracijo, ima markovo lastnost, če za vsak $A \in \mathcal{S}$ in vsak $s, t \in I$, kjer velja s, t velja

$$\mathbb{P}(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in A \mid X_s)$$

Opomba

$$\mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) =$$

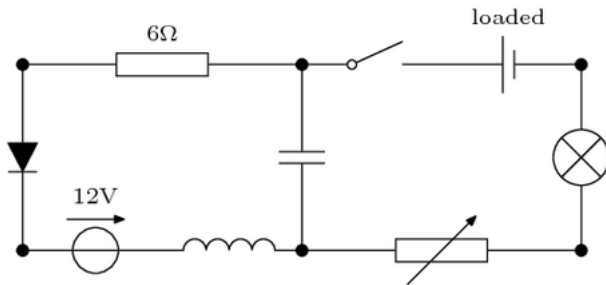
$$\mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1})$$

	V celoti opazovan	Le delno opazovan
Avtonomen	Markovska veriga	Skriti markovski model
Kontorliran	Markovski proces odločanja	Delno opazovan proces



Skriti markovski model

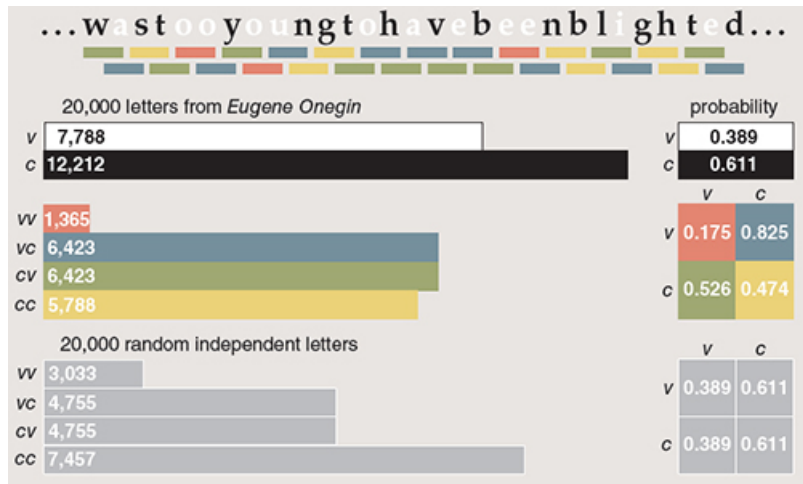
- Bayesijska mreža
- Viterbi



Druge vrste skritih markovskih modelov

- 1 Zvezni primeri
- 2 Odvisno od več spremenljivk

Zgodovina



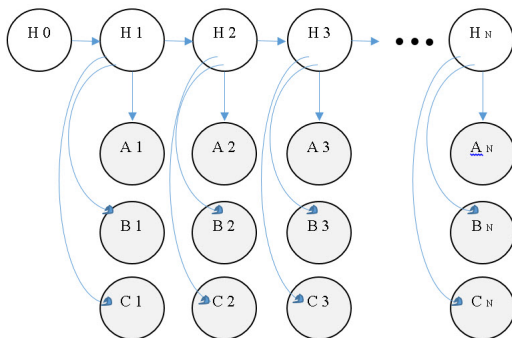
Zgodovina

- Matematična teorija komunikacije
- EM-algoritem
- Stratonovič
- Viterbi
- Baum-Welch
- James Hamilton



Zahteve

- Markovska lastnost
- Enakomerno porazdeljeni časi signalov O_t , ki jih poda resnični svet
- Sistem ima N stanj, vsako določa slučajna spremenljivka S



Hidden States:

$$H_i = \{x, y, z, \underline{e}\}$$

Observations:

$$A = \{\underline{\text{discrete number from 1 to } U_A}\}$$

$$B = \{\underline{\text{discrete number from 1 to } U_B}\}$$

$$C = \{\underline{\text{discrete number from 1 to } U_C}\}$$

- Slučajnih spremenljivk skritih skoraj v nobenem času ne poznamo, poznamo pa slučajni proces Q , ki predstavlja signale
- Porazdelitveni zakon vsakega stanja i označimo z $b_i(x)$
- Vektor začetnih stanj je π
- Prehodna matrika A , ki je neodvisna od časa

Porazdelitveni zakon

- Gaussova mešanica
- $b_i = \sum_{j=1}^M c_{ij} N(x; \mu_j, \sigma_j^2)$
- Število porazdelitev M
- Matrika Γ , μ_{ij} predstavlja pričakovano vrednost porazdelitve j v stanju i
- Matrika Σ , kjer σ_{ij} predstavlja varianco porazdelitve j v stanju i
- Matrika C , koeficienti c_{ij} iz Gaussove mešanice

Generiranje poti v skitem markovskem modelu

- $O = (O_1, \dots, O_T)$
- $\lambda = (\Pi, A, C, \Gamma, \Sigma)$
- $P(O|\lambda)$
- Začetno stanje

Uporaba

- Biologija
- Procesiranje govora
- Prepoznavanje akcij
- Kriptoanaliza

Časovne vrste

Definicija

Časovna vrsta množica opazovanj x_t , vsako opazovano ob časih t znotraj nekega časovnega intervala.

Definicija

Model časovne vrste za opazovane podatke x_t je slučajni proces X_t , kjer velja, da so x_t realizacije tega slučajnega procesa v časih t .

- Analitična ali prediktivna
- Odvisne od časa
- Odvisnost

- Diskreten čas
- Zvezen čas
- Diskretne vrednosti

Definicija

Finančna časovna vrsta je časovna vrsta, kjer so opazovanja x_t vrednosti finančnega instrumenta v času t .

- Normalna porazdelitev donosov

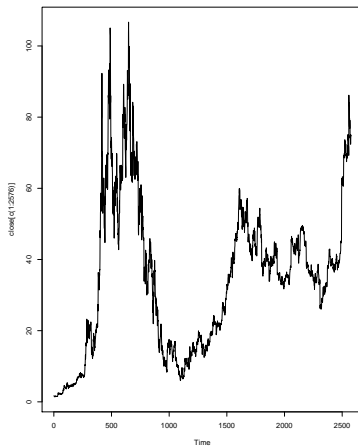
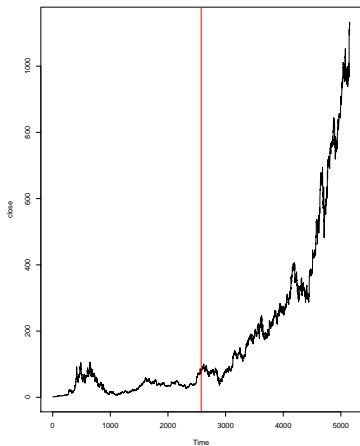
Uporaba skritih markovskih modelov v finančnih časovnih vrstah

- Zaporedje cen O
- Finančna optimizacija

Problem izbire portfelja





- Kapital M
- N vrednostnih papirjev
- Vsak papir ima donos R_j
- $R_x = \sum_{j=1}^N x_j R_j$
- d zahtevan donos
- α stopnja zavrnitve

$$\begin{array}{ll} \min & CVaR_{\alpha}(R_x) \\ \text{p.p.} & E(R_x) \geq d \end{array}$$



- Amazon
- Google
- Tesla
- TripAdvisor
- Starbucks
- Novartis
- Microsoft

- General Motors
- Wells Fargo
- Chevron
- Bitcoin
- Standard & Poor's
- Zlato

-  D. Roman, G. Mitra in N. Spagnolo, *Hidden Markov models for financial optimization problems*, IMA Journal of Management Mathematics **21** (2010) 111–129.
-  I.L. MacDonald in W. Zucchini, *Hidden Markov and Other Models for Discrete- valued Time Series*, Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability **70**, Chapman & Hall, London, 1997.
-  R.S. Mamon in R.J. Elliott *Hidden Markov Models in Finance*, International Series in Operations Research & Management Science **104**, Springer, New York, 2007.
-  P.J. Brockwell, R.A. Davis *Introduction to Time Series and Forecasting*, 2nd edition, Springer, 2002.

Markovski model