UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Martin Praček

Skriti markovski modeli v analizi finančnih časovnih vrst

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izr. prof. dr. Damjan Škulj

Ljubljana, 2019

Kazalo

Skriti markovski modeli v analizi finančnih časovnih vrst

Povzetek

V moji diplomski nalogi sem se ukvarjal z skritimi markovskimi modeli. Gre za vrsto markovskega modela, kjer ne poznamo stanj, v katerih se model nahaja. Ta stanja so torej skrita, od koder tudi izhaja ime skriti markovski modeli. V svojem delu sem opisal osnove teorije skritih markovskih modelov ter nekaj primerov uporabe, obenem pa sem opisal še praktični primer. Posvetil sem se tudi časovnim vrstam in nekaj njihovim posebnim lastnostim.

Hidden Markov Models in Financial Time Series Analysis

Abstract

For my graduate thesis I researched Hidden Markov Models, a type of Markov Models where states of model are not known. This state are therefore hidden, thus naming Hidden Markov Model. My paper discusses the base theory behind hidden markov models and some applications. Also, I included my own example. There is also a part about time series and some of their special properties.

Math. Subj. Class. (2010): 60J05,60J22,91B84, 91B74, 91B70, 91G80,91G70 , 65K05

Ključne besede: skriti markovski modeli, časovne vrste, slučajni proces

Keywords: hidden markov models, time series, stohastic process

Slovar strokovnih izrazov

Skriti markovski model Skriti markovski model je statistični model, prek katerega določimo stanja, v katerih se nahajamo, verjetnost nahajanja v tem stanju, verjetnost prehoda med stanji za nek nabor podatkov.

Gaussova mešanica Gaussova mešanica je porazdelitvena funkcija z gostoto, ki jo lahko zapišemo kot tehtano povprečje normalnih gostot;

$$f(x) = \sum_{j=1}^{M} c_j f_{N,j}(x; \mu_j, \sigma_j^2)$$

. Veljati mora še, da je

$$\sum_{j=1}^{M} c_j = 1$$

in da je $f_{N,j}(x; \mu_j, \sigma_j^2)$ gostota verjetnosti normalne porazdelitvene funkcije.

Verjetnostni grafični model PGM Verjetnostni grafični model je model, za katere graf prikaže pogojno odvisnost med slučajnimi spremenljivkami.

Akaikejev informacijski kriterij Akaikejev informacijski kriterij oziroma AIC je merilo relativne kakovosti modela glede na preostale modele za iste podatke.Naj velja, da imamo podatke s k ocenjenimi parametri in $\hat{L}$ maksimalna vrednost funkcije verjetja. AIC izračunamo kot

$$AIC = 2k - 2ln(\hat{L})$$

AIC primerja več različnih modelov po kakovosti, kjer je najboljši tisti z najmanjšo vrednostjo.

Baum-Welchov algoritem Je algoritem, s katerim poiščemo neznane parametre skritih markovskih modelov.

Dinamična bayesova mreža Je bayesova mreža, v kateri so povezane spremenljivke, ki ležijo v dveh sosednjih časovnih korakih.

Pričakovan primankljaj Naj bo X donos portfelja nekoč v prihodnosti in naj velja da je $0 < \alpha < 1$, kjer je α stopnja zaupanja. Pričakovan primankljaj ES_α je definiran kot

$$ES_\alpha = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR_\gamma(x) d\gamma$$

kjer je VaR_γ tvegana vrednost.

1. Uvod

Skriti markovski modeli so modelacijsko orodje, ki nam omogoča zelo široko uporabo. V mojem diplomskem seminarju se bom najbolj posvetil uporabi v finančni analizi.
V drugem poglavju sem predstavil osnove teorije za markovskimi modeli, ter razlike med različnimi vrstami le teh, bolj podrobno pa sem se posvetil markovskih verigam. Razlike med različnimi vrstami markovskih modelov sem predstavil na primeru.
V tretjem poglavju sem se podrobno posvetil skritim markovskim modelom. Najprej sem motiviral njihovo uporabo ter predstavil osnovno idejo, ki je bila potrebna za vzpostavitev skritih markovskih modelov.V naslednjem delu tretjega poglavja sem se posvetil zgodovini skritih markovskih modelov in osebam, ki so osnovale skrite markovske modele.
Naslednji razdelek sem posvetil zahtevam, ki jim moramo ugoditi, da lahko skrite markovske modele modeliramo. Temu je sledila tudi razlaga priprave in treninga modela ter določitev začetnih vrednosti.
Naslednja dva dela predstavljata zadnji sklop znotraj poglavja o skritih markovskih modelih. Tu sem namreč opisal kako ugotovimo trenutno stanje ter orisal algoritem, ki stoji za tem, na koncu pa sem opisal še, kako generiramo pot v skritem markovskem modelu.
Naslednje poglavje je posvečeno različnim načinom uporabe, kjer sem se najbolj podrobno posvetil procesiranju govora in uporabi v biologiji.
Peto poglavje je posvečeno časovnim vrstam, lastnostim, ki sam poleg tega še lahko zadevajo ter posebej finančnim časovnim vrstam.
Šesto poglavje je posebej posvečeno uporabi skritih markovskih modelov v finančnih časovnih vrstah. To sem še podrobneje predstavil z primerom.
Praktični primer je postavljen v sedmo poglavje in predstavlja analizo skritih markovskih modelov za portfelj 5 posebej izbranih delnic.

2. Markovski modeli

Skriti markovski modeli spadajo v bolj splošno skupino modelov, ki jo imenujemo markovski modeli. Gre za modele, kjer se stanja slučajno spreminjajo. Za modele velja, da je njihovo stanje v času t odvisno le od stanja v času $t-1$. To imenujemo markovska lastnost, po kateri so ti modeli tudi poimenovani.

Definicija 2.1. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_s)_{s\geq 0})$ verjetnostni prostor s filtracijo za neko urejeno množico I. Naj velja, da je $(S, \mathcal{S})-$merljiv prostor na katerem obstaja merljiv slučajni proces $X = (X_t)_{t\in I}$, ki je prilagojen na filtracijo.
Potem pravimo da ima slučajni proces markovsko lastnost, če za vsak $A \in \mathcal{S}$ in vsak par $s, t \in I$, kjer velja $s \leq t$ velja

$$\mathbb{P}(X_t \in A \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(X_t \in A \mid X_s).$$

Tu velja, da je Ω množica, $\mathcal{F}$ pa σ-algebra na njej. Ω je množica vseh možnih stanj, v katerih se lahko nahaja neka slučajna spremenljivka. Če tako na primer velja, da naša slučajna spremenljivka lahko zavzame katero koli naravno število, bo potem $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{F}$ pa bo enak $\mathcal{F} = 2^{\mathbb{N}}$.
Velja še, da je $\mathbb{P}$ mera na tej množici, kjer velja, da je $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, torej je ta mera verjetnostna. Za $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$ pravimo, da je filtracija, v posebnem pa je $\mathcal{F}_T$ σ-algebra zgodovine časa T, torej za vsak dogodek do časa T vemo, ali se je dogodek zgodil ali ne.
Merljivost prostora pomeni, da glede na množico S obstaja množica $\mathcal{S}$, ki zadošča pogojem za obstoj σ-algebre. Potem je par $(S, \mathcal{S})$ merljiv prostor.
Slučajni proces je nabor slučajnih spremenljivk in si ga navadno predstavljamo kot zaporedje slučajnih spremenljivk skozi čas. Da je slučajni proces filtracije pomeni, da za vsak n velja, da je X_n za $\mathcal{F}_n$ merljiv.
Sama enakost torej pravi, da je verjetnost, da velja $X_t \in A$ enaka, ne glede na to, ali gledamo celotno σ-algebro zgodovine časa s, ali pa pogledamo le, kaj nam pokaže slučajna spremenljvika X_s.

To definicijo lahko v primeru markovskih verig še dopolnimo, če velja še, da je $I = \mathbb{N}$. Potem velja

$$\mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}).$$

Na ta način definiramo markovsko verigo.

Definicija 2.2. Markovska veriga v diskretnem času je zaporedje slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, X_3, \ldots$ z markovsko lastnostjo, torej je stanje v naslednjem času odvisno le od naslednjega stanja. Pri tem mora veljati, da je

$$P(X_{n+1} = x | X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x | X_n = x_n),$$

če so pogojne verjetnosti dobro definirane, to je, če velja,

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) > 0$$

Gre torej za poseben primer, kjer je imamo slučajni proces v diskretnih časih, ki lahko v vsakem času zavzame le neko diskretno vrednost. V pogoju na levi strani enačaja so sedaj podani vsi dogodki, ki so se zares zgodili, markovska lastnost pa nam pove, da nas zanima zgolj zadnji dogodek.

Primer 2.3. Markovsko verigo si najlažje predstavljamo s pomočjo slučajnih sprehodov. Recimo, da imamo slučajni proces, ki v vsakem času t z verjetnostjo 1/3 zavzame 1, z verjetnostjo 1/3 zavzame 0, z verjetnostjo 1/3 pa zavzame -1. Torej velja da je $X_t \sim X$ za vsak t in

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Naj bo sedaj S_n slučajna spremenljivka, ki je definirana kot $S_n = \sum_{t=1}^{n} X_t$. Recimo, da S_{10} pokaže 3. Zanima nas verjetnost, da bo $S_{11} = 3$. Očitno vidimo, da je ta verjetnost enaka 1/3, saj velja

$$P(S_{11} = 3) = P(S_{10} + X_{11} = 3 | S_{10} = 3) = P(X_{11} = 0) = P(X = 0) = 1/3$$

. Torej je vrednost naslednjega odvisna le od sedanjega stanja in vrednosti X_{11}, ni pa pomembno, kako smo prišli do $S_{10} = 3$, kar je točno to, kar nam pove markovska lastnost.
$\diamondsuit$

V posebnem lahko za markovske verige rečemo še, da so časovno homogene, če velja

$$P(X_n | X_{n-1}) = P(X_1 | X_0).$$

To pomeni, da so vse slučajne spremenljivke v slučajnem procesu enako porazdeljene.
Markovska lastnost nam pove, da je slučajni proces "brez spomina". To pomeni, da pot do stanja ni pomembna, pomembno je le stanje, v katerem se nahajamo. Naravno se nam tudi postavi vprašanje, zakaj je ta lastnost koristna. Izkaže se, da nam omogoča reševanje problemov, ki jih drugače v primernem času ne bi mogli rešiti.

Zaradi svoje široke uporabnosti markovske modele lahko ločimo na:

- prediktivno modeliranje, kjer želimo iz statističnih podatkov izračunati najbolj verjeten dogodek glede nanaše podatke. Ta model se lahko uporablja ne glede na čas v katerem se je dogodek zgodil, saj lahko modeliramo prihodnje dogodke ravno tako kot pretekle dogodke, policija npr. uporablja to vrsto modela za določitev osumljencev za storjeni zločin.
- verjetnostno napoved, kjer ne napovemo le najbolj verjetnega dogodka, ampak določimo verjetnosti vseh dogodkov kot popoln sistem dogodkov. Primer tega so športne stavnice, kjer lahko npr. stavimo za eno izmed ekip stavimo na zmago, remi ali poraz.

Modeliranje markovskih modelov je primer slučajnega programiranja Gre za sistem, ki nam pomaga pri optimizacije za modele, ki vključujejo negotovost. To pomeni, da nekateri parametri niso znani z gotovostjo, temveč jih predstavimo z nekim slučajnim objektom, pa naj si bo to slučajna spremenljivka za enoobdobne probleme oziroma slučajni proces za večobdobne probleme.

Glede na to, kako je postavljen markovski model razdelimo, kot kaže tabela 1. Razlike in podobnosti med vsemi modeli so opisane v spodnjem primeru.

Tabela 1. Razdelitev markovskih procesov

	V celoti opazovan	Le delno opazovan
Avtonomen	Markovska veriga	Skriti markovski model
Kontorliran	Markovski odločitveni proces	Delno opazovan proces

Primer 2.4. Primer žabe v ribniku. Zamislimo si, da imamo ribnik z lokvanji, v katerem so se naselile žabe. Vsaka izmed žab je lahko v vsakem trenutku v vodi, na lokvanju ali pa zunaj vode. To imenujemo stanja markovskega modela S. Poimenujmo vektor stanj

$$S = (Voda, Lokvanj, Zemlja).$$

Na ribnik pogledamo le v nekih diskretnih časih, z enakim razmikom, na primer ob koncu vsake minute. Na ta način naš proces disktretiziramo. Odločimo se za opazovanje le ene izmed žab, za katero nas zanima, kje se bo nahajala v naslednjem trenutku.
Predstavljajmo si, da lahko vsakič, ko pogledamo, našo žabo poljubno osvetlimo z lučjo in tako vplivamo na njeno obnašanje. Naš model je torej kontroliran. Žaba nato poljubno skače naprej. Če poznamo prehodno matriko med stanji, bomo v tem primeru imeli markovski odločitveni proces. To pomeni, da vemo kako nek zunanji vpliv vpliva na spremembe verjetnosti prehoda med stanji. V nasprotnem primeru imamo delno opazovan proces odločanja. To velja ko vplivamo na spremembe stanj, a prehodne matrike ne poznamo.
Če se nikoli ne odločimo, da bi žabo osvetlili, pa imamo avtonomen model. Kot pri kontroliranem lahko tu ločimo, ali je proces v celoti opazen ali so neka stanja skrita. Če stanja niso skrita, imamo markovsko verigo, ki je torej le poseben primer markovskih odločitvenih procesov, kjer žabe nikoli ne prestavimo. Pri markovskih verigah poznamo tudi prehodno matriko A, katere elementi a_{ij} predstavljajo verjetnosti prehoda iz stanja i v stanje j. Preprost primer markovskih verig predstavljajo slučajni sprehodi.
Navadno predpostavimo, da se verjetnosti prehoda iz enega stanja v drugega ne spreminjajo. Vsota po vsaki vrstici je vedno enaka ena, to je

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

saj predstavlja verjetnosti prehoda iz enega stanja v drugo. Elementi Tako je a_{ij} verjetnost prehoda iz stanja j v stanje i. Velja še, da je n število stanj in je v našem primeru 3, očitno pa velja tudi, da je matrika velikost $n \times n$ in da so vsi elementi a_{ij} iz intervala $[0, 1]$.
V tem primeru lahko torej, v vsakem trenutku predvidimo, kam bo skočila žaba v naslednjem trenutku. Če stanj in prehodov med njimi ne poznamo imamo skrite markovske modele.
Za skrite markovske modele pa velja, da same prehodne matrike ne poznamo, jo pa lahko določimo iz podatkov, ki jih imamo za naš problem. Tako bi našo žabo dovolj dolgo opazovali, in si zapisovali njene pozicije v vsakem trenutku opazovanja. Tako bi dobili vektor opazovanj O. Vektor O je naš osnovni podatek, iz katerega nato izpeljemo celoten model, torej poiščemo skrita stanja in nato verjetnosti prehodov med njimi. Iz tega bi najprej pogledali, kakšna so možna stanja sistema. Iz tega

bi nato poizkusili ugotoviti, kako izgleda prehodna matrika. Kako to naredimo, si bomo pogledali v nadaljevanju.
Recimo, da prehodna matrika enaka:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

V našem primeru bi to pomenilo, da je verjetnost, da žaba ostane v vodi 0.5, da iz vode skoči na lokvanj 0.3, verjetnost, da pa skoči iz ribnika pa 0.2. Iz te matrike lahko torej ugotovimo verjetnosti, ki nam bodo povedale verjetnosti prehodov, če velja da na naš opazovan sistem, torej žabo, ne vplivamo.
Kot smo prej omenili, pa se ta matrika spremeni, če jo osvetlimo. Tako lahko dobimo matriko, ki govori o verjetnostih prehodov, če na sistem vplivamo.

$$\begin{bmatrix} 0.9 & 0.05 & 0.05 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le ta nam pove, da je verjetnost da ostane v vodi enaka 0.9, medtem ko je verjetnost, da od zunaj skoči v vodo enaka 1. Tu je matrika torej drugačna, kot je bila za prvi primer. Na vsakem koraku, ko žabo osvetlimo moramo torej upoštevati to drugo matriko.
Kontroliran sistem torej pomeni, da lahko z nekim znanim dejanjem vplivamo na prehodne verjetnosti.

$\diamondsuit$

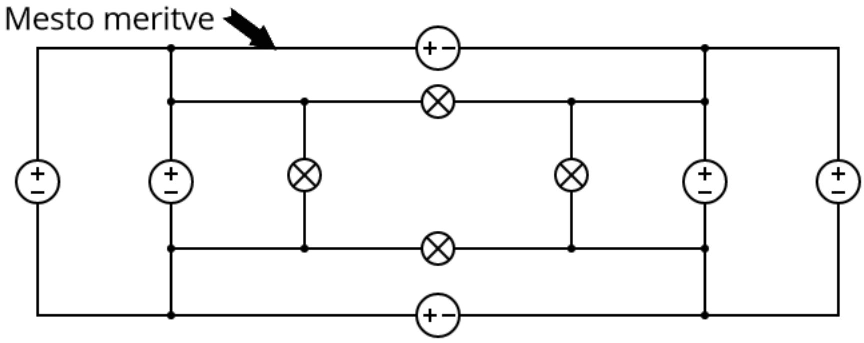
3. Skriti markovski modeli

Skriti markovski model je statistični markovski model, kjer predpostavljamo, da je modelirani sistem markovski proces s skritimi stanji. Gre torej za tip modela, kjer lahko vidimo signal, ne moremo pa ugotoviti, kakšna je bila funkcija, ki nam ga je dala.
Skrit markovski model je končno učljiv slučajen avtomat. Lahko ga opišemo kot dvojni slučajni proces prek dveh pogledov. Prvi proces ima končno število stanj, kjer je vsako izmed teh povezano z večdimenzionalno verjetnostno porazdelitvijo. Med temi prehode opazujemo prek prehodnih verjetnosti. Pri drugem slučajnem procesu lahko v vsakem stanju opazujemo dogodek. Ker te dogodke opazujemo brez tega, da bi vedeli, v kakšnem stanju so se zgodili, imenujemo ta stanja skrita.
Gre za najbolj preprosto vrsto dinamične Bayesove mreže. Tu gre za vrsto Bayesove mreže, v kateri so povezane spremenljivke, ki ležijo v dveh sosednjih časovnih korakih. Tako lahko vrednost v času t izračunamo prek vrednosti v času $t-1$ ter notranih regresorjev. Bayesove mreže so verjetnostni grafični model, ki je idealen za to, da za nek dogodek za vsak možen vzrok določimo verjetnost, da ga je ta povzročil.
Skriti markovski modeli uporabljajo idejo bayesianske statistike. Tu uporabljamo Bayesov izrek, ki pravi, da je verjetnost dogodka A, v primeru da B velja enaka:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)},$$

kjer velja, da dogodek A predstavlja našo hipotezo, B pa znan dogodek. Prek te enačbe izračunamo posteriorne verjetnosti. Tu torej naša verjetnost izraža stopnjo verjetja v dogodek. Pri skritih markovskih modelih se nam pokaže problem ocenjevanja parametrov iz podatkov. Iz podatkov moramo namreč sklepati o porazdelitvi parametrov.
Ideja za delovanje skritih markovskih modelov izhaja iz dela Andrewa Viterbija na področju komunikacije. V komunikacijskih storitvah šumi namreč predstavljajo veliko težavo, zato se je ameriško-italijanski elektroinžiner domislil algoritma, s katerimi bi iz seta podatkov izločili šume.

Primer 3.1. To si lahko predstavljamo kot da bi si na primer želeli na fiksnem mestu v električnem tokokrogu določiti naboj $Q(t)$ glede na naboj ob času s, kjer $s < t$. Zaradi napake pri merjenju $Q(s)$ ne moremo točno določiti, saj zaznamo neko zmoteno različico $\widehat{Q(s)}$.
Želimo si torej način, ki bi čim bolj učinkovito izločil te napake. V načem primeru imamo 6 električnih virov in 4 žarnice. Po 30 sekundah, ko zaženemo tokokrog, izmerimo naboj na mestu meritve. Zanima nas, ali je naboj po minuti še vedno enak.
Neznana stanja so poleg dejanskega naboja, ki ga želimo izmeriti, še šumi, ki se prenašajo po omrežju. Prav ti šumi namreč pripeljejo do napake pri meritvi.
$\diamondsuit$



SLIKA 1. Skica primera električnega tokokroga z mestom meritve

Skrite markovske modele navadno predstavimo na diskretnih množicah in v diskretnem času, a lahko definicijo tako razširimo, da velja tudi za zvezne množice ali zvezen čas. V tem primeru dobimo triplasten slučajni proces, katerega največja težava je velika računska zahtevnost, poleg tega pa nam lahko veliko število parametrov prinese nestabilnost. Vendar se z zveznimi primeri v svojimi diplomski nalogi ne bom ukvarjal.
Prav tako je možno s skritimi markovskimi modeli predstaviti procese, odvisne od več slučajnih spremenljivk. Vendar tak model s seboj prinese več težav. Prve se pokaže v računski zahtevnosti, saj moramo v vsakem koraku določiti inverz in determinanto več matrik, kjer lahko časovno zahtevnost povečuje tudi njihova velikost. Drugi problem se pokaže v samem računanju, ki je podrobneje razloženo v 3.3. Izkaže se, da je v primeru prevelikega števila slučajnih spremenljivk včasih nemogoče izvesti celo prvi korak iteracije. Modeliranje skritih markovskih modelov z več spremenljivkami je tako v teoriji možno, a ni nujno dobro v praksi.

3.1. **Zgodovina modela.** Ideja skritih markovskih modelov se v svoji prvi fazi začne z ruskim matematikom Andrejem Andrejevičem Markovom, ki je za časa svojega življenja med 1865 – 1922 razvil idejo markovskega procesa in verige. Prve teoretične rezultate markovskih verig je svetu predstavil 1906, 1913 pa je izračunal zaporedje črk ruščine. Slednji izračun je opravil na besedilu Jevgenij Onjegin ruskega pesnika Aleksandra Sergejeviča Puškina. Markov je želel s tem dokazati veljavnost šibkega zakona velikih števil zaradi spora z drugim ruskim matematikom Pavlom Nekrasom, a je na ta način odprl novo vprašanje v matematiki.
Skriti markovski modeli zahtevajo veliko numeričnega računanja, in zato ne preseneča, da se je nadaljni razvoj začel šele z širšo uporabo računalnikov. Po pomembnem delu, ki so ga opravili von Neumann, Turing in Conrad Zuse so se znanstveniki začeli pospešeno ukvarjati z implementacijo primernih algoritmov. Velik korak k temu je pripomogel Claude Shannon s svojim delom Matematična teorija komunikacije.
Za implementacijo skritih markovskih modelov je bilo v začetku potrebnih kar nekaj razvojev algoritmov. Prvi algoritem je bil algoritem maksimizacije pričakovane vrednosti (Expectation-maximization), ali, kot ga med drugim poznamo, EM-algoritem. Tega so uporabljali med drugim že Laplace, Gauss in drugi, vendar je do dokončnega poimenovanja prišlo šele leta 1977. Dempster, Laird in Rubin so algoritem poimenovali in razložili splošno teorijo, ki deluje v ozadju procesa. Andrew Viterbi je drugi pomemben del skritih markovskih modelov implementiral leta 1967 kot algoritem

za dekodiranje konvolucij čez šume v komunikaciji. Pri tem algoritmu deluje princip dinamičnega programiranja, ki najde najbolj verjeto zaporedje stanj, glede na dano opazovano zaporedje dogodkov. Viterbijev algoritem je podrobneje opisan v algoritmu 1.

Celotnih modelov pa prav gotovo ne bi bilo brez še enega Rusa, in sicer Ruslana Leontijeviča Stratonoviča, ki je prvi opisal rekurzijo naprej - nazaj leta 1960. To je delal na primeru optimalnega nelinearnega problema filtracije.

Za glavnega avtorja pa velja Leonard E. Baum. Skupaj z Lloyd R. Welchem sta okrog leta 1970 razvila Baum-Welchov algoritem, kjer gre za poseben primer posplošenega EM-algoritma. Prav Baum-Welchov algoritem je tisti korak, pri katerem velja, da je bila dokončno izpeljana teorija za skritimi markovskimi modeli. Algoritem uporablje EM-algoritem da najde cenilko po metodi največjega verjetja glede na dano zaporedje podatkov. Delovanje algoritma je podrobno razloženo v 3.3, njegove zahteve pa v 3.2.

Uporabe skrith markovskih modelov na področju financ in ekonomije pa ne bilo brez dela ameriškega ekonometrista Jamesa Hamiltona, ki je predlagal, da bi model, katerega stanj in prehodov med njimi ne poznamo, opišemo z markovskim modelom.

3.2. **Zahteve za model.** Kot vsak matematični model, ima tudi skriti markovski model svoje zahteve.

(1) Prva zahteva je, da lahko rezultate, ki jih model producira, opazujemo v ekvidistančnih časih, torej je razlika med dvema poljubnima zaporednima časoma opazovanja $t-1$ in t vedno enaka, na primer d. Rezulate imenujemo signali ali opazovanja.
(2) V vsakem izmed časov t je sistem lahko v enem izmed N stanj. Ta stanja so $S_1, S_2, \ldots, S_N$. Vsako stanje S_i je slučajna spremenljivka, ki je lahko zvezna ali diskretna, a njenega porazdelitvenega zakona ne poznamo. Ta stanja so v času t neznana, vemo le, kakšni so rezultati našega procesa v tem času. Zato potrebujemo dodatni slučajni proces $Q = (Q_t)_{t=1,2,\ldots}$, ki nam pove, v kakšno je opazovanje v času t. Tako velja, da je signal O_t dan s stanjem slučajnega procesa Q, v odvistnosti od gostote verjetnostne porazdelitve Gaussove mešanice.
(3) Vektor verjetnosti začetnih stanj je označen z Π, in vsota njegovih elementov je enaka 1. Dolžina tega vektorja je N, torej je enaka številu možnih stanj. Seveda velja, da je Π_i verjetnost, da se v začetku nahajamo v stanju i.
(4) V vsakem času velja, da bodisi sistem spremeni svoje stanje, bodisi ostane v istem. Verjetnost prehoda v vsako stanje je določena s prehodnimi verjetnostmi, podanimi v matriki A_t, kjer verjetnost prehoda iz stanja i v času t v stanje j v času $t+1$ simbolizira element a_{ij}^t. Vsota vsake vrstice vsake matrike A_t je enaka 1, saj bo v naslednjem času očitno nekam prešla. Matrika A_t je velikosti $N \times N$, kjer je N število stanj. To velja, ker nam pove verjetnosti prehodov med poljubnimi stanji.
(5) Ker govorimo o markovskem modelu, bo stanje v času $t+1$ odvisno le od stanja v času t, ne pa od celotne zgodovine.

Za modelacijo te predpostavke zadoščajo, a upoštevamo še nekaj dodatnih, ki nam model še precej olajšajo.

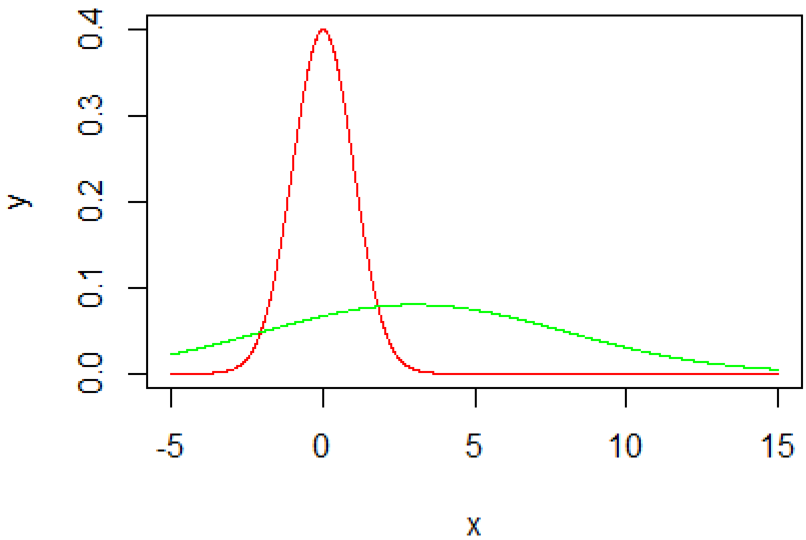
(1) Predpostavimo lahko, da so vse prehodne matrike A^t enake, torej neodvisne od časa t, kar označuje časovno homogenost. Enolično prehodno matriko torej lahko označimo z A.
(2) Signal v času t je odvisen le od stanja modela v tem času; torej so slučajne spremenljivke v času t odvisne le od tega.

Naši signali so torej odvisni od stanja S. Ta stanja nam vrnejo rezultat v odvisnosti od verjetnostnih porazdelitev podanih z različnimi parametri. Ločimo lahko stanja, ki so porazdeljene kot zvezne slučajne spremenljivke, ter tiste, ki so porazdeljene kot diskretne slučajne spremenljivke.
V zveznem primeru bodo le-te predstavljene kot mešanice normalnih porazdelitev in jih imenujemo tudi Gaussove mešanice.
Gaussovo mešanico definiramo kot tehtano povprečje normalnih porazdelitvenih funkcij, glej slovar strokovnih izrazov. Vsako stanje i iz nabora vseh stanj je torej podano z gostoto verjetnosti,

$$b_i(x) = \sum_{j=1}^{M} c_{ij} N(x; \mu_{ij}, \sigma_{ij}^2)$$

Pri nekem stanju i je b_i signal, ki ga prejmemo. V primeru finančnih časovnih vrst bi torej to bila cena finančnega instrumenta. Cena je realna vrednost, ki jo vrne slučajna spremenljivka, odvisna od stanja.

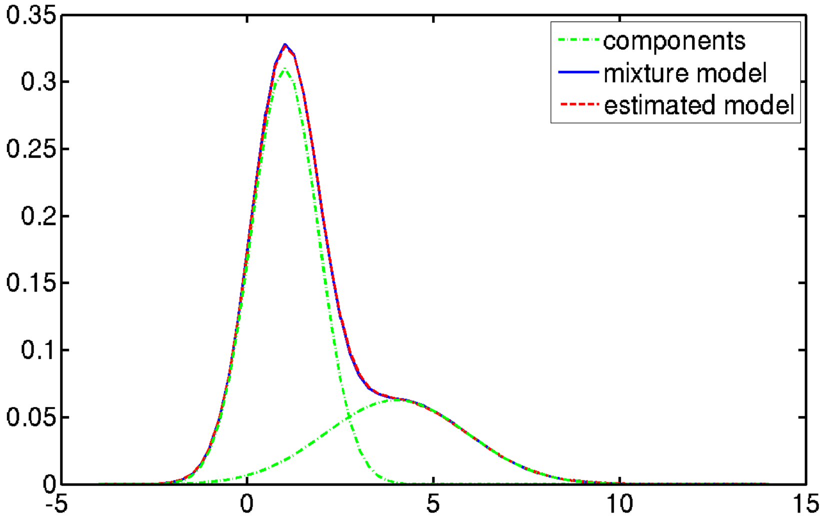
Primer 3.2. Gaussovo mešanico lahko vidimo na spodnjih dveh slikah.
Na prvi sliki imamo dve gostoti normalne porazdelitvene funkcije. Prva je stan-



SLIKA 2. Ločeni normalni porazdelitvi

dardno normalno porazdeljena, torej $N(0,1)$, druga pa je porazdeljena $N(3,5)$.

Na drugi sliki pa vidimo kako z Gaussovo mešanico ocenimo skupno porazdelitev.



SLIKA 3. Ocena z Gaussovo mešanico

Skupna porazdelitev je torej v našem primeru enaka

$$b(x) = c_1 N(x; 0, 1) + c_2 N(x, 3, 5),$$

kjer za c_1 in c_2 velja, da je $c_1 \geq 0$ in $c_2 \geq 0$ ter $c_1 + c_2 = 1$. Tako dobimo vsoto dveh normalnih porazdelitev in vsoto njunih porazdelitev. To je tudi konveksna kombinacija normalnih porazdelitev. $\diamondsuit$

Gaussove mešanice so primerne, ker lahko zelo dobro aproksimirajo vsako končno zvezno porazdelitev, poleg tega pa se znebimo tveganja, ki nam ga v tem modelu predstavlja normalna porazdelitev. To tveganje predstavlja dejstvo, da je normalna porazdelitev simetrična; to pa pogosto ne drži za procese v realnem svetu, na primer za donose v financah. Za te večkrat drži, da so asimetrične v levo, torej da je mediana večja od povprečja.

Tako potrebujemo za sestavo modela še:

- število mešanic M
- matriko C, ki predstavlja koeficiente c_{ij}, ki so faktorji v Gaussovi mešanici. Matrika je velikost $N \times M$ in element ij pove relativno težo, ki jo ima mešanica j v aproksimaciji S_i.
- matrika Γ, kjer μ_{ij} predstavlja pričakovano vrednost b_j v stanju i, ter
- matriko Σ, kjer σ_{ij} predstavlja varianco b_j v stanju i.

Vse te matrike so velikosti $N \times M$ in z njimi opišemo Gaussove mešanice.
Če so slučajne spremenljivke, ki opisujejo stanja diskretne, je opis stanj manj kompleksen. V tem primeru za opis diskretne spremenljivke potrebujemo le eno matriko,

katere elementi opišejo vrednosti, ki jih dobimo. To matriko imenujemo izhodna matrika. Ta matrika je velikosti $N \times N$, kjer je N število stanj.

3.3. **Priprava in trening modela.** Preden začnemo s določanjem parametrov našega modela, moramo najprej dobro preučiti naš problem, saj je to znanje ključno za dobro reševanje problema. Kot prvo stvar moramo najprej izbrati set podatkov, na katerem bo potekal tako imenovan trening sistema. Ti podatki morajo biti zbrani na na primerni enoti; na ceno delnic vrednost le te pred 10 leti ne bo vplivala toliko kot cena dan pred meritvijo.
Podatke, ki smo jih zbrali moramo nato urediti; določimo časovne trenutke z enakim razponom, kot ga želimo imeti v našem modelu, in v teh trenutkih $t \in (1, \ldots, T)$ določimo opazovanja O.
Ko imamo podatke zbrane, moramo najprej določiti število stanj N ter število mešanic M. Tu gre tudi za ključna problema priprave skritega markovskega modela. V praksi število stanj včasih določimo v skladu s potrebno aplikacijo, kot na primer v 4.2, oziroma z vizualnim ogledom točk grafa iz zgodovinskih podatkov.
Včasih pa lahko to določimo z uporabo Akaikejevega informacijskega kriterija, ki primerja več različnih modelov in izbere najboljšega. AIC ocenjuje relativno kakovost modela. Podobno deluje tudi BIC, to je Bayesov informacijski kriterij.
Za pravilno določitev števila mešanic M pa navadno izberemo razvrščanjem v skupine (k-mean clustering). S to metodo želimo n opazovanj razvrstiti v k skupin, kjer upoštevamo, da želimo minimizirati skupno varianco in število skupin.
Ostale parametre navadno označimo z $\lambda = (\Pi, A, C, \Gamma, \Sigma)$. Cilj treninga modela je, da parametre nastavimo tako, da bo verjetnost $P(O|\lambda)$, da so bila vsa opazovanja rezultat modela, največja. Pri tem mora veljati, da sta število mešanic M ter število stanj N že znana, $P(O|\lambda)$ pa je funkcija verjetja.
Naravno se pojavi vprašanje, izbora primernih parametrov. Izkaže se, da je učinkovit sistem *naprej − nazaj*. Določimo spremenljivki *nazaj* $\alpha_t(i)$, ki predstavlja verjetnost, da so se zgodila opazovanja od 0 do t in stanje i, ter *naprej* $\beta_t(i)$, ki predstavlja verjetnost, da se bodo zgodila opazovanja od t do T pri stanju i. Posebej pa se moramo posvetiti le eni izmed njiju, saj gre pri $\beta_t(i)$ le za alternativno metodo za $\alpha_t(i)$.
$\alpha_t(i)$ definiramo kot:

$$\alpha_1(i) = \pi_i b_i(O_1) = \pi_i b_i = \sum_{k=1}^{M} c_{ik} N(O_1; \mu_j, \sigma_j^2)$$

Naslednje $\alpha_{t+1}(j)$ lahko nato induktivno izračunamo kot

$$\alpha_{t+1}(j) = b_j(O_{t+1}) \sum_{i=1}^{N} \alpha_t(i) a_{ij}$$

Iz tega sledi, da je $P(O|\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_T(i)$. Na podoben način izračunamo tudi $\beta_t(i)$. β je inicializirana z

$$\beta_T(i) \forall i \in 1, \ldots, N$$

indukcija pa poteka prek

$$\beta_t(i) = \sum_{i=1}^{N} \beta_{t+1}(j) a_{ij} b_j(O_{t+1})$$

$\beta_t(i)$ sicer ni nujen za izračun $P(O|\lambda)$, a ga nujno potrebujemo za trening našega modela.
Na ta način smo pridobili Baum-Welchov algoritem, ki je osnova delovanja skritih markovskih modelov.
Skozi celotno točko 3.3 smo se obnašali, kot da lahko vse podatke iz λ kar izračunamo. Vendar to ne drži v popolnosti. Res, ko je enkrat $naprej - nazaj$ vzpostavljen, se nam dozdeva, da gre le še za numerično operacijo. Vendar težave nastopijo preden naš postopek začne z delom. Problem nastopi ko moramo vnaprej oceniti začetne parametre λ.
Ne poznamo analitičnega načina, kako bi lahko ta problem rešili, vendar lahko najdemo tak λ, da lahko našo verjetnost $P(O|\lambda)$ lokalno maksimiziramo, ne moremo pa zagotoviti globalnega maksimuma. Prav tako se lahko zgodi, da predobro opišemo nek set podatkov, to pomeni, da je $P(O|\lambda_{dejanski}) \leq P(O|\lambda_{zadnji})$. Tako se lahko zgodi, da svoji oceni preveč zaupamo.
Dejstvo, da nimamo globalnega maksimuma, temveč le lokalni pomeni, da lahko že manjša perturbacija paramterov pomeni spremembo lokalnega maksimuma in tako spremembo končnih rezultatov. Občutljivost sistema je odvisna števila parametrov. Pri tem moramo vsak paramater λ najprej pogledati posebej. Izkaže se, da začetni vrednosti za prehodno matriko A in začetni vektor Π nista pomembni, če nista ničelna, kar pa se ne more zgoditi. Za Π tako lahko vzamemo vektor, kjer so vse vrednosti enake $1/N$, kjer je N število stanj.
Več problemov nam povzročajo tri postavke z zvezno porazdelitivjo, to je C, Σ in Γ. Dobra začetna ocena le teh je nujna za kakovost modela. Tudi tu se izkaže, da lahko, podobno kot pri oceni števila mešanic M obrnemo na razvrščanjem v skupine. Ta postopek nam sicer ne da globalnega minimuma, ki bi ga mogoče lahko dobili na drugačen način, a se v praksi izkaže za dobrega. Za C to pomeni, da bo element c_{ij} $= 1/k$ za vsak par (ij), kjer je k število šopov povprečij. Pričakovane vrednosti in variance nato pridobimo iz vrednosti šopov povprečij.
Z znanimi začetnimi vrednostmi se lahko spustimo v maksimiziranje $P(O|\lambda)$. Osnovati moramo zaporedje $\lambda = \lambda_t, t \in 0, \ldots$, da bo veljalo

$$P(O|\lambda_{i+1}) \geqslant P(O|\lambda_i)$$

Za to zaporedje velja, da konvergira k lokalnemu maksimumu.

3.4. **Natančna določitev začetnih vrednosti.** Zanima nas torej, kako bomo osnovali zaporedje λ, ki ga potrebujemo za maksimizacijo $P(O|\lambda)$. Izkaže se, da za maksimizacijo le tega potrebujemo še nekaj dodatnih formul, ki so rezultat Baum-Welchovega algortma. Z njimi definiramo večfazni iterativni proces, pri katerem popravljamo vrednosti parametrov do konvergence.
Kot prvo potrebujemo $\xi_t(i,j)$, ki nam pove pogojno verjetnost, da smo v času t v stanju i in v času $t+1$ v stanju j, glede na vektor opazovanj O in nabor parametrov λ .

$$\xi_t(i,j) = \frac{\alpha_t(i)a_{ij}b_j(O_t)\beta_{t+1}(j)}{P(O|\lambda)}.$$

Vsota $\sum_{t=1}^{N} \xi_t(i,j)$ nam pove pričakovano število prehodov iz stanja i v stanje j.
Druga je $\gamma_t(i)$, ki nam pove verjetnost, da smo v času t v stanju i.

$$\gamma_t(i) = \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{P(O|\lambda)}$$

Vsota $\sum_{t=1}^{N} \gamma_t(i)$ nam pove pričakovano število prehodov iz stanja i.
Zadnja, tretja pa je $\gamma_t(j,k)$, ki nam pove verjetnost, da smo v času t v stanju j, in k ta mešanica določa O_t.

$$\gamma_t(j,k) = \gamma_t(j)\frac{c_{jk}N(x;\mu_{jk},\sigma_{jk}^2)}{\sum_{m=1}^{M} c_{jm}N(x;\mu_{jm},\sigma_{jm}^2)}$$

Iz teh podatkov lahko nato popravimo izračun elementov:

$$\overline{\Pi_i} = \gamma_1(i)$$

$$\overline{a_{ij}} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \xi_t}{\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(i)}$$

$$\overline{c_{jk}} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \gamma_t(j,k)}{\sum_{t=1}^{T}\sum_{m=1}^{M} \gamma_t(j,m)}$$

$$\overline{\mu_{jk}} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \gamma_t(j,k)O_t}{\sum_{t=1}^{T} \gamma_t(j,k)}$$

Ko je to določeno, nam zaporedje λ, določenih s temi parametri da lokalni maksimum.

3.5. **Trenutno stanje.** Zadnja stvar, ki jo moramo narediti, preden začnemo z določanjem prihodnjih stanj je določitev trenutnega stanja gospodarstva, torej stanja v zadnjem času, na katerem je naš model treniral. Za določitev le tega uporabimo tako imenovani Viterbijev algoritem. Le ta je oblikovan tako, da nam vrne zaporedje Q, ki maksimizira $P(Q|O,\lambda)$.

Za delo s tem algoritmom moramo definirati $\delta_t(i)$, ki za vsako stanje i vrne največjo verjetnost vzdolž poti v času t. Prek $\delta_t(i)$ nato induktivno izvedemo algoritem.
Viterbijev algoritem nam vrne $p*$, ki je največja verjetnost in q_T*, ki nam pove stanje v času T, ki nam to verjetnost vrne.

3.6. **Generiranje poti v skritem markovskem modelu.** V celoti lahko sedaj predstavimo delovanje skritega markovskega modela na primeru generiranja ene poti. V tem primeru je pot na primer cenovni proces, ki ga bo glede na naš model opravil finančni instrument.
Glede na naše podatke, ki jih označimo kot $O = (O_1, \ldots, O_T)$, ocenimo parametre našega modela $\lambda = (\Pi, A, C, \Gamma, \Sigma)$. Začetne vrednosti elementov Π, A in C predpostavimo kot enake, za Γ in Σ pa ocenimo prek razvrščanja v skupine. Te parametre rekurzivno izboljšujemo, dokler nismo zadovoljni z določeno $P(O|\lambda)$. Parametre, ki smo jih dobili na ta način lahko za isti set podatkov uporabimo poljubno mnogokrat. Določiti moramo še trenutno stanje našega modela, torej stanje iz katerega začeli. V tem trenutku določimo še čas, do katerega želimo oceniti naš proces, naj bo to recimo T_T.
Naslednji korak si lahko predstavljamo kot zanko. Če predpostavimo, da naš parameter t teče od časa T do časa T_T, v vsakem koraku glede na stanje, v katerem se nahajmo, izberemo stanje, v katero se bomo premaknili v naslednjem koraku. V vsakem koraku še shranimo stanje, v katerem smo bili. Na ta način dobimo pot, ki jo generira skriti markovski model.
Ta postopek lahko ponovimo večkrat, kar se pomaga pri Monte Carlo simulaciji.

Algorithm 1: Viterbijev algoritem

Input:

- Prostor opazovanj $O = \{o_1, o_2, \ldots, o_N\}$
- Prostor stanj $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_K\}$
- Nabor začetnih verjetnosti $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_K)$, kjer velja da je $\pi_i == s_i$
- Zaporedje opazovanj $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_T)$, tako da je $y_t == i$, če je opazovanje v času t o_i
- Prehodna matrika A velikosti $K \times K$, kjer stanje A_{ij} pove verjetnost prehoda iz stanja s_i v stanje s_j
- Izhodno matriko B velikosti $K \times N$, kjer stanje B_{ij} pove verjetnost, da opazimo o_j iz stanja s_i

for *vsako stanje* $j \in \{1, 2, \ldots, K\}$ **do**
  $T_1[j, 1] \leftarrow \pi B_{jy_1}$
  $T_2[j, 1] \leftarrow 0$
end
for *vsako opazovanje* $i = 2, 3, \ldots, T$ **do**
  for $j \in \{1, 2, \ldots, K\}$ **do**
    $T_1[j, i] \leftarrow \max_k (T_1[k, i-1] \cdot A_{kj} \cdot B_{jy_i})$
    $T_2[j, i] \leftarrow \arg\max_k (T_1[k, i-1] \cdot A_{kj} \cdot B_{jyi})$
  end
end
$z_T \leftarrow \arg\max_k (T_1[k, T])$
$x_T \leftarrow s_{zT}$
for $i \leftarrow T, T-1, ..., 2$ **do**
  $z_{i-1} \leftarrow T_2[z_i, i]$
  $x_{i-1} \leftarrow s_{z(i-1)}$
end
Result: Najbolj verjetno zaporedje opazovanj $X = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$

Algorithm 2: Monte Carlo simulacija skritih markovskih modelov

Input: Podatki $O = (O_1, \ldots, O_T)$
Ocenimo parametre λ
while *Dokler* $P(O|\lambda)$ *ni dovolj velik* **do**
  Ponovno izračunaj $P(O|\lambda)$ z novimi parametri λ
end
Ocenimo stanje v času T z Viterbijevim algoritmom
for $s = 1, \ldots, S$*, kjer je* S *število stanj* **do**
  Dobimo vzorec iz izhodne porazdelitve stanja i, kjer je $t = 1$
  while $t \leq TP$*, kjer je* TP *zadnji čas, kjer nas vrednost zanima* **do**
    $t = t + 1$
    Izberi stanje za čas t v skladu z prehodno matriko A
    Generiramo vzorec iz izhodne porazdelitve tega stanja
  end
end
Result: Zaporedje stanj

4. Uporaba

Skriti markovski modeli so zelo široko uporabno orodje za modeliranje. Načini uporabe se zelo razlikujejo, od uporabe v financah do določevanja genoma. Ekonomskim, torej tistim, ki jih delujejo kot napovedovalci cen vrednostnih papirjev v prihodnosti, se bom najglobje posvetil v nasledenjem delu, zato sedaj raje poglejmo ostale načine uporabe.

4.1. Procesiranje govora. Prva ideja Leonarda E. Bauma za njegov algoritem je bila prav uporaba v procesiranju govora. Ena najbolj široko uporabljenih načinov uporabe pa je procesiranje govora za posamične glasovne enote. Gre za sistem, kjer želimo prepoznati posamične izgovorjene besede, ne moremo pa ga uporabiti za splošen govor, saj algoritem ni implementiran za razumevanje tekočega govora, le za posamezne enote. Ideja tega algoritma je razviti najboljše možne aproksimacijske algoritme, da lahko skriti markovski model filtrira naključne šume, zvoke na najboljši možen način.
Da bomo proceiranje lahko zmodelirali, moramo najprej določiti slovar glasov, iz katerega vemo, da bo glas prišel. Tu uporabljam besedo glas, ker ni nujno, da bo prepoznan glas dejansko beseda; eden izmed glasov bi lahko bil tudi zgolj črka A.

4.2. Uporaba v biologiji in biokemiji. Gre za eno izmed prvih uporab skritih markovskih modelov. Ker se je uporaba na tem področju začela precej zgodaj tudi ne preseneča, da je uporaba precej široka. Uporaba skritih markovskih modelov se je v razširila zaradi povečanja količine podatkov, ki je znanstvenikom na voljo. Ker so v zadnjem času določili več zaporedij genoma, je tako količino podatkov težko obdelati brez uporabe naprednih računskih metod.
Kot že rečeno, je uporaba skritih markovskih modelov v biologiji zelo široka. Uporablja se jih kot že rečeno za obdelave genoma, za določanje genov, za modeliranje procesov v celični membrani. Splošno prepričanje je, da se bo uporaba skritih markovskih modelov v biologiji in ostalih povezanih znanostih še razširila.
Pomemben primer uporabe v primeru določanja integralnih membranskih proteinov. To je protein, ki je stalno pripet v biološko membano, saj predstavljajo $20 - 30\%$ proteinov v popolnoma sekvenciranih genomih. Tu ločimo dve vrsti proteinske strukture, α in β. Določanje α danes ni več problem, se pa zato pojavljajo precej večji problemi pri β mebranskih proteinih. Za ta primer so avtorji [7] razvili poseben primer skritega markovskega modela.
Pomembna je tudi uporaba za lociranje genov, torej iskanje dela genomske deoksinukletinske kisline (DNK), ki kodira gene.

4.3. Ostali načini uporabe. Skrite markovske modele se uporablja še na precej ostalih primerih. Skrite markovske modele se tako uporablja za

- prevajanje govora oziroma pisave iz enega jezika v drug jezik,
- kriptoanaliza, torej omogočanje vdora v zakodirane sisteme,
- prepoznavanje lastnoročne pisave,
- prepoznavanje dejanj,
- napovedovanje prevoza.

Skriti markovski modeli so torej široko uporabno modelacijsko orodje.

5. Časovne vrste

Definicija 5.1. Časovna vrsta je množica opazovanj x_t, vsako opazovano ob časih t znotraj nekega časovnega intervala.

Definicija 5.2. Model časovne vrste za opazovane podatke x_t je slučajni proces X_t, kjer velja, da so x_t realizacije tega slučajnega procesa v časih t.

Vrednosti delnic po dnevih, število uporabnikov spletne strani po urah, prebivalstvo neke države po letih, ... To je le nekaj izmed mnogih primerov uporabe časovnih vrst. Časovne vrste nam dajo lepšo idejo o trendu podatkov, ki jih želimo analizirati. Enostavno lahko vidimo, ali je npr. cena jagod odvisna od letnega časa ter ali se cena jabolk skozi leta spreminja.

Časovna analiza je lahko analitična, kjer preučujemo podatke iz preteklosti, ter prediktivna, kjer želimo napovedati neke trende. Analize lahko poteka na več načinov, od linearnih in nelinearnih modelov do modelov z eno spremenljivko in modelov z več spremenljivkami. Prav zaradi njihove široke uporabnosti se je razvilo zelo veliko modelov za njihovo analizo, začenši leta 1970 z delom Boxa in Jenkinsa na področju avtoregresivnega integriranega drsečega povprečja, danes znanega pod kratico ARIMA.

Časovne vrste so po definiciji odvisne od časa. Prav zato je pomembno, da se opazovanj med seboj medčasovno ne menja. Opazovanja x_t so tako razporejena po časih, ko so bila zaznana, torej naraščajočem času t.

V realnosti pogosto velja, da so zaporedna opazovanja med seboj odvisna. To je predvsem očitno, če pomislimo na najbolj tipičen primer finančne časovne vrste, in sicer vrednostnega procesa cene neke delnice. Če vidimo, da ima v času t delnica ceno p, si lahko navadno mislimo, da bo v času $t+1$ cena blizu p. Glede na čase, v katerih gledamo rezultate naše časovne vrste v grobem ločimo 3 tipe:

- Časovne vrste v zveznih časih. Tu pridobivamo podatke za vsak trenutek znotraj nekega časovnega intervala. Dober primer je tu EKG, kjer v vsakem trenutku preiskave naprava izrisuje graf električne napetosti proti času.
  V analizi finančnih časovnih vrst za ta tip uporabljamo Black-Scholesov model. Gre za podvrsto parabolične diferencialne enačbe, katere rešitev nam da predvideno vrednost evropskih opcij *call* in *put* v času, ki nas zanima.
- Časovne vrste z diskretnimi vrednostmi kjer pridobivamo vrednosti, ki lahko zavzamejo le diskretne vrednosti, torej največ števno neskončno različnih možnosti.
  Tipičen primer bi bil število klicev med 7.00 in 8.00 znotraj Ljubljane oziroma število nesreč znotraj enega dneva na avtocesti med Postojno in Ljubljano.
- Zadnja vrsta so diskretne časovne vrste, torej vrste, ki vrednosti vzamejo le v določenih časovnih trenutkih, npr. konec vsake ure, konec dneva, ... Tukaj lahko vrednosti zavzamejo kakršnokoli vrednost, pomembno je le, da te vrednosti vzamemo ob pravilnih trenutkih. Te vrste so uporabne tudi za aproksimiranje časovnih vrst v zveznih časih. Prav vrste takega tipa so tiste, ki jih lahko analiziramo z skritimi markovskimi modeli.

S finančnimi vrstami se srečujemo vsak dan in v najrazličnejših oblikah. Zaradi njihove raznolikosti je izbira pravega modela za njihovo analizo ključna. V našem primeru bomo za njihovo analizo uporabili skrite markovske modele.

Navadno je glavni namen analize časovnih vrst napovedovanje trendov, vendar se je to področje z razvojem predvsem podatkovnega rudarjenja razširilo tudi na druga področja.

5.1. **Dodatne lastnosti modela.** Ko imamo opravka z modeli časovnih vrst, je zelo pomembno, da se zavedamo, da na vrednosti vpliva avtokorelacija. To pomeni, da nas zanima odnos, ki ga imajo zaporedna opazovanja. Da lahko o tem govorimo, pa moramo pogledati prvih nekaj momentov. Pri tem privzamemo sintakso iz 3.2.

Lema 5.3. *Naj bo f funkcija, za katero velja, da je $E(f(X)) < \infty$ za neko slučajno spremenljivko X. Naj bo Q_t slučajna spremenljivka, ki nam v času t pove opazovanje. Naj še velja, da je imamo glede na opazovanje možnih m opazovanj. Potem najprej velja, da je*

$$E(f(Q_t)) = \sum_{i=1}^{m} E(f(Q_t)|S_t = i)P(S_t = i)$$

poleg tega pa velja še

$$E(f(Q_t, Q_{t+k})) = \sum_{i,j=1}^{m} E(f(Q_t, Q_{t+k})|S_t = i, S_{t+k} = j)P(S_t = i)\Gamma_{ij}^k$$

kjer je Γ_{ij}^k ij element matrike Γ, kjer je Γ prehodna matrika med stanji.

Dokaz prvega je enostaven, saj $E(f(Q_t))$ zgolj pogojimo na $S_t = i$. Za drugo enakost pa moramo najprej pogojiti na S_{t+k}, potem pa upoštevamo, da je to pogojna verjetnost zgolj na $S_{t+k} = j$ in $S_t = i$. Na ta način smo prišli do izračuna drugega momenta, kjer za funkcijo f v prvem primeru vzamemo kvadriranje. Tako velja $E(Q_t^2) = \sum_{i=1}^{m} E(Q_t^2|S_t = i)P(S_t = i)$ in posledično je varianca modela enaka

$$Var(Q_t) = \sum_{i=1}^{m} E(Q_t^2|S_t = i)P(S_t = i) - ((\sum_{i=1}^{m} E(Q_t|S_t = i)P(S_t = i)))^2.$$

Po drugi enačbi lahko izračunamo tudi $E(Q_tQ_{t+1})$, in sicer velja

$$E(Q_tQ_{t+k})) = \sum_{i,j=1}^{m} E(Q_tQ_{t+k})|S_t = i, S_{t+k} = j)P(S_t = i)\Gamma_{ij}^k.$$

Tako dobimo kovarianco kot

$$Cov(Q_t, Q_{t+k}) = E(Q_tQ_{t+k})) - E(Q_t)E(Q_{t+k}).$$

Ko imamo vse to podano lahko izračunamo Pearsonov korelacijsko funkcijo PCC za naše podatke. Velja da je PCC enak

$$\rho_k = \frac{Cov(Q_t, Q_{t+k})}{Var(Q_t)}.$$

Vrednost tega se tako nahaja med -1 in 1, ki pomenita popolno koreliranost, oziroma popolno negativno koreliranost v primeru $\rho_k = -1$, medtem ko $\rho_k = 0$ pomeni, da podatki medsebojno niso korelirani.

5.2. **Finančna časovna vrsta.**

Definicija 5.4. Finančna časovna vrsta je časovna vrsta, kjer so opazovanja x_t vrednosti finančnega instrumenta v času t.

Finančna časovna vrsta je tako zaporedje opaženih vrednosti nekega finančnega instrumenta. Analiza finančnih časovnih vrst se ukvarja s teorijo in prakso določanja vrednosti finančnih instrumentov skozi čas. Zaradi elementa negotovosti, kot je na primer volatilnost finančnih instrumentov, jo moramo obravnavati ločeno od vseh ostalih časovnih vrst. Velja namreč da ravno ta negotovost prikaže pomembnost statistične teorije in metod, izpeljanih iz le te, v analizi finančnih časovnih vrst.
Z finančnimi časovnimi vrstami se ukvarjajo statistiki ter kvantitativni finančniki. V nasprotju z ostalimi finančnimi vrstami se lahko zaradi mikrostrukture trga zgodi, da imajo finačne časovne vrste posebne lastnosti in obliko. Tako se pogosto predpostavlja, da so donosi R normalno porazdeljeni z pričakovano vrednostjo μ in varianco σ^2, $R \sim N(\mu, \sigma^2)$. Vendar to ne velja, saj lahko hitro ugotovimo, da donos ne bo nikoli manjši od -1. Če predpostavimo, da je P_t cena instrumenta v času t, potem je očitno, da le ta nikoli ne bo manjša od 0. Potem je donos R_t definiran kot

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

kar pomeni, da je

$$-1 = \frac{0 - P_{t-1}}{P_{t-1}} \leq R_t.$$

Ta problem v ekonomiji pogosto rešujemo z uporabo logaritmiranja.
V prvi polovici 20. stoletja se je v povezavi z finančnimi trgi osnovala tako imenovana hipoteza o učinkovitem trgu, ki pravi, da če cene popolnoma predstavljajo pričakovanja in informacije vseh udeležencev trga, potem so njihove spremembe nepričakovane. To lahko povežemo tudi s teorijo slučajnih procesov. Teorija martingalov pravi namreč, da je najboljša ocena jutrišnje cene današnja cena. Zato v finančnih časovnih vrstah večjo težo damo podatkom, ki so nam zgodili kasneje.

Glavna ideja uporabe skritih markovskih modelov v finančni časovni sledi iz osnovne ideje Andrewa Viterbija 1, in sicer analiziranje signalov, ki jih prejmemo tako, da izločimo šume v prejetem signalu.
Aplikacija skritih markovskih modelov v finančne časovne vrste je sorazmerno enostavna. Naše izbrane podatke o ceni nekega instrumenta določimo kot zaporedje opazovanj O. Na podlagi tega določimo število stanj ter začetne ocene vseh parametrov.
V zadnjem času se je uporaba skritih markovskih modelov v finančništvu precej povečala zaradi široke uporabnosti, med drugim tudi za problem izbire portfelja. Gre za eno izmed klasičnih vprašanj, ki sem nam postavijo je v finančni optimizaciji. To vprašanje se da rešiti tudi z uporabo linearnega programiranja in skritih markovskih modelov. Uporabnost tega pristopa se pokaže predvsem zaradi možnosti omejevanja tveganja.

Primer 6.1. Problem izbire portfelja
Eno izmed klasičnih vprašanj, ki sem nam postavijo je v finančni optimizaciji je problem optimalne izbire portfelja. To vprašanje se da rešiti tudi z uporabo linearnega programiranja in skritih markovskih modelov.
Predpostavimo, da imamo v trenutnem času kapital M, ki ga lahko vložimo v N različnih vrednostnih papirjev. Odločiti se moramo, kako bomo naš kapital razdelili tako, da bomo maksimizirali svoj donos in hkrati minimizirali tveganje.
Vsak vrednostni papir ima donos R_j, kjer velja $j \in 1, \ldots, N$. Za vsak j je donos slučajna spremenljivka, katere porazdelitev aproksimiramo z diskretno slučajno spremenljivko $\widehat{R}_j$. Določimo še vektor $x = (x_1, \ldots, x_N)$, kjer nam x_j pove, kakšen delež kapitala smo vložili v posamezen vrednostni papir, to je

$$x_j = \frac{M_j}{M}$$

če velja $\sum_{j=1}^{N} M_j = M$. Ob koncu investicije bomo torej zaslužili

$$R_x = \sum_{j=1}^{N} x_j R_j$$

kjer je R_x slučajna spremenljivka.
To nalogo lahko predstavimo kot linearni program s pomočjo pogojne vrednosti ob padcu CVaR. CVar je mera tveganja, ki nam oceni tržno ali kreditno tveganje portfelja. Tako pridemo do optimizacijskega problema oblike

$$\begin{aligned} \min \quad & CVaR_\alpha(R_x) \\ \text{p.p.} \quad & E(R_x) \geq d \end{aligned}$$

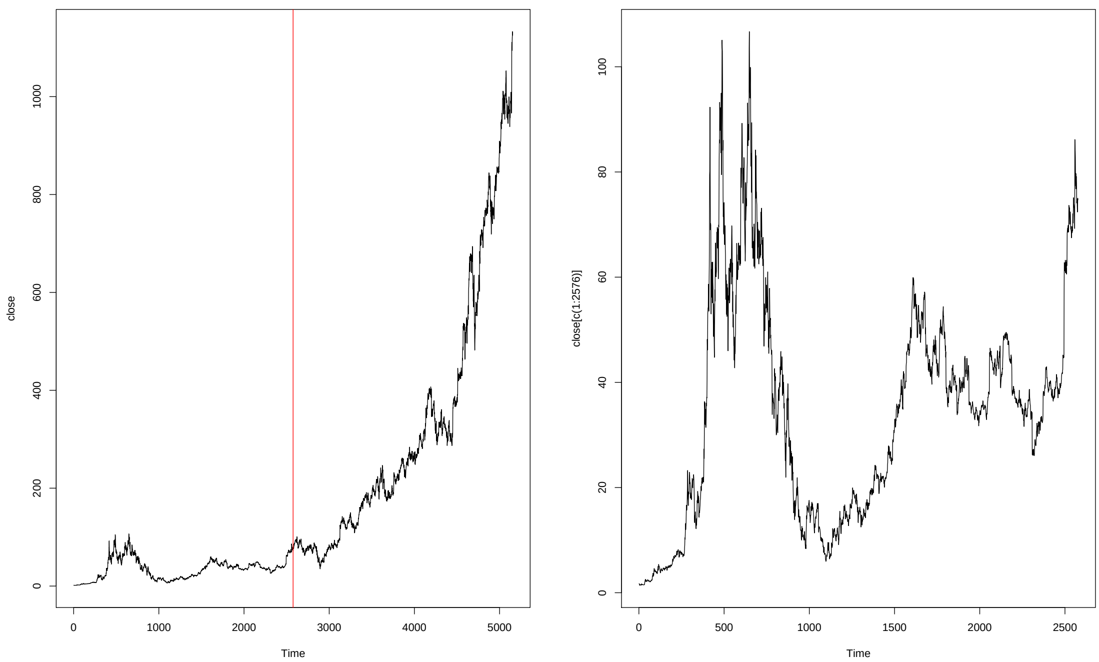
kjer je d prej določen zahtevan donos, α pa stopnja zavrnitve.
Skriti markovski modeli se v igro vključijo, ko moramo aproksimirati donose. Kot že vemo, je $\widehat{R}_j$ diskretna aproksimacija donosa s končnim številom stanj. Ta stanja določimo kot različna možna stanja finančnega instrumenta na naših podatkih. Nato znanih podatkov določimo še vhodne in izhodne matrike za vse slučajne spremenljivke.
Z zbranim znanjem in podatki izvedemo simulacije več različnih scenarijev, čemur

na koncu sledi še reševanje dejanskega linearnega programa. $\diamondsuit$

Modeli, ki se jih uporablja v za napovedovanje cen finačnih instrumentov na kratki rok predvidevajo, da model sledi Brownovem gibanju, vendar velja, da ti modeli ne morejo zaznati ekstremnega gibanja cen. Tu je prednost tako imenovanih *regime-switching* modelov, torej modelov pri katerih se zamenjujejo stanja in med katere spadajo tudi skriti markovski modeli.

7. Praktični primer

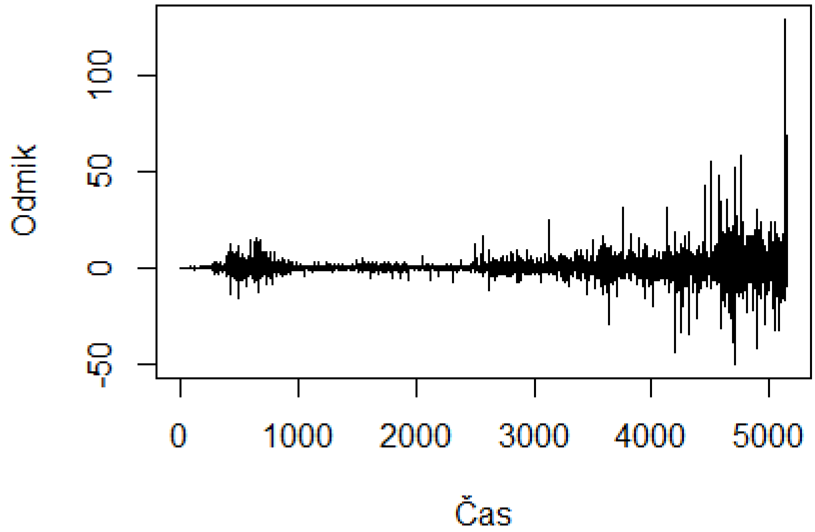
Že v 3.2 sem omenil, da so finančni donosi navadno asimetrični v levo, torej je mediana večja od povprečja. Prav zato naj bi bili skriti markovski modeli, po [1] bolj primerni za ugotavljanje padajočih cen finančnih instrumentov. To bom preveril na več setih podatkov.
Podatki, ki sem jih za to pridobil pokrivajo vrednosti delnic na newyorški borzi NYSE za vse delnice, ki so tu kotirale od 1970 naprej, pa do leta 2016, za analizo pa bom uporabil le nekaj podjetij. Te podatke bom uporabil predvsem v splošni analizi kakovosti modela 7.1, kjer bom nato primerjal cene, ki jih predvideva skriti markovski model z dejanskimi cenami.
Seveda ne moremo vzeti prevelikega razpona podatkov, saj lahko na dolgi rok cena instrumenta ne sledi trendu prvega dela, na katerem smo naš model trenirali. To lahko lepo vidimo, ko pogledamo na zaključne cene delnice Amazona, na NYSE označena z AMZN. Vidimo namreč lahko, da je bila v drugih 10 letih rast cene delnice bolj konstanta kot v prvih 10 letih.
Na levi sliki je z rdečo črto prikazana datum, do katerega so na desni sliki prikazane



Slika 4. Prikaz rasti cene delnic

cene delnic. Očitno je, da vrednosti, ki jih je cena delnice dosegla ob koncu merjenja, ne moremo doseči z našim modelom.
Alternativni pristop pravi, da vzamemo stacionarne vrste, kjer gledamo le relativne razlike med cenami delnic. Tu uporabljamo princip stacionarnosti časovnih vrst.
V tem primeru smo uporabili le odmik od cene prejšnjega dne za isto delnico.

7.1. **Analiza modela.** Za splošno analizo kakovosti modela sem pridobil podatke iz newyorške borze NYSE o ceni 5 delnic. Izbral sem podjetja Consolidated Edison, Johnson & Johnson, Proctor & Gamble, Coca-Cola in International Business

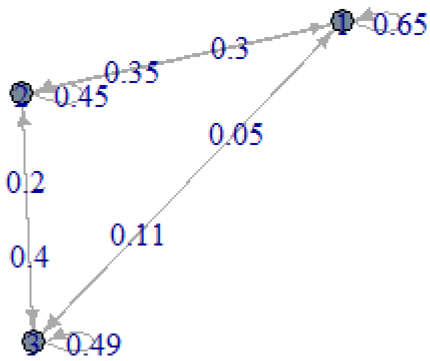


SLIKA 5. Primer stacionarne vrste

Machines, bolj znan kot IBM. Zanje bom analiziral stanja cen ob koncu trgovalnega dne.
Izbrana podjetja spadajo med najstarejša podjetja na newyorški borzi. Tako sem po stacionarizaciji podatkov dobil daljše časovno obdobje, v katerem sem lahko svoj model učil.
Za svoj portfelj sem želel ugotoviti skrita stanja, ki se skrivajo za signali, ki jih prikazujejo cene ob koncu trgovalnih dni. Ta stanja sem podobno kot v [1] ločil glede na volatilnost donosa v tistem obdobju na tri različna stanja. Tako smo dobili normalno stanje, ki velja v 70% časa, stanje visoke volatilnosti, ki velja 20% časa ter ekstremno stanje, ki velja preostalih 10% časa, podobno kot velja v viru [9].
Ko je vprašanje števila stanj odgovorjeno potrebujemo še pravilno število mešanic. Z upoštevanjem Akakijevega informacijskega kriterija se izkaže, da je optimalno število mešanic za ta primer enako 2.

TABELA 2. Prehodna matrika A

	Normalna	Visoka	Ekstremna
Normalna	0.6511804	0.3029273	0.04589235
Visoka	0.3533702	0.4477348	0.19889503
Ekstremna	0.1097778	0.3977778	0.49244444



Slika 6. Grafični prikaz prehodnih verjetnosti

Tabela 3. Vektor začetnih verjetnosti π

Normalna	Visoka	Ekstremna
0.4386546	0.3748654	0.1864800

Tabela 4. Matrika koeficientov mešanic C

	Prva	Druga
Normalna	0.76	0.24
Visoka	0.39	0.61
Ekstremna	0.30	0.70

8. Zaključek

V svoji seminarski nalogi sem opisal delovanje skritih markovskih modelov, pri čemer sem se osredotočil na finančne časovne vrste.
Skriti markovski modeli so spadajo med markovske modele, za katere velja, da velja markovska lastnost, katerih razvoj se je začel z Andrejem Markovom. Z njimi opišemo slučajne procese, pri katerih ne poznamo vseh podatkov, saj so skriti znotaj podatkov.
Za vzpostavitev modela potrebujemo zaporedje opazovanj, iz katerih izvlečemo nabor parametrov λ, s katerimi poizkusimo maksimizirati funkcijo verjetja $P(O|\lambda)$. To funkcijo poizkusimo maksimizirati s pomočjo Baum-Welchovega algoritma, ki je ključni algoritem za delovanje skritih markovskih modelov.
Njihova uporaba je zelo široka, od procesiranje govora prek uporabe v biokemičnih procesih. Sam sem se posvetil uporabi v finančnih časovnih vrstah.
Časovne vrste so časovno urejena zaporedja opazovanj, v finančnih časovnih vrstah

pa so ta opazovanja vrednosti finančnih instrumentov v času. Te vrste obdeljujemo na več načinov, od ARIMA modelov do skritih marskovskih modelov.
Finančne časovne vrste predstavljajo veliko različnih izzivov, med katerimi je med pomembnejšimi problem izbire portfelja, kjer si lahko pomagamo tudi s skritimi markovskimi modeli.
Ob koncu sem si naredil tudi lasten praktični primer na primeru delnice Tesla, Inc. Želel sem ugotoviti, kako se spreminjajo stanja v katerih se nahaja delnica.

Literatura

[1] D. Roman, G. Mitra in N. Spagnolo, *Hidden Markov models for financial optimization problems*, IMA Journal of Management Mathematics **21** (2010) 111–129.

[2] I.L. MacDonald in W. Zucchini, *Hidden Markov and Other Models for Discrete- valued Time Series*, Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability **70**, Chapman & Hall, London, 1997.

[3] R.S. Mamon in R.J. Elliott *Hidden Markov Models in Finance*, International Series in Operations Research & Management Science **104**, Springer, New York, 2007.

[4] P.J. Brockwell, R.A. Davis *Introduction to Time Series and Forecasting*,2nd edition, Springer, 2002.

[5] B.J. Yoon, *Hidden Markov Models and their Applications in Biological Sequence Analysis*, v: Current genomics, 10,6(2009):402-415, [29. 7. 2019], dostopno na `https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC2766791/`.

[6] *A Hidden Markov Model method, capable of predicting and discriminating β-barrel outer membrane proteins*, BMC Bioinformatics **5** (2004)

[7] P.G. Bagos, T.D. Liakopoulos, I.C Spyropoulos, S.J. Hamodrakas, *A Hidden Markov Model method, capable of predicting and discriminating β-barrel outer membrane proteins*, v: BMC Bioinformatics, 5(2004), [30. 7. 2019], dostopno na `https://bmcbioinformatics.biomedcentral.com/articles/10.1186/1471-2105-5-29`.

[8] P. Dymarski, *Hidden Markov Models, Theory and Application*, InTech, Rijeka, 2011

[9] A. Geyer, W. T. Ziemba, (2008) *The Innovest Austrian Pension Fund Financial Planning Model InnoALM.* Operations Research 56(4):797-810.