

Skriti markovski modeli v finančnih časovnih vrstah

Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

12. december 2018

Martin Praček

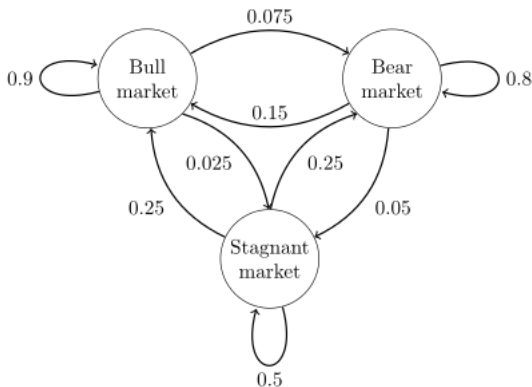
Mentor: izr. prof. dr. Damjan Škulj

Markovski model

Skriti
markovski
modeli v
finančnih
časovnih
vrstah

Skriti
markovski
model

- Markovska lastnost je lastnost slučajnega procesa v diskretnem času, da je njegova vrednost v času t odvisna le od njegove vrednosti v času $t - 1$.
- Ločimo v celoti opazovan in delno opazovan ter
- Avtonomen in kontroliran sistem.



Delitev markovskih modelov

Skriti
markovski
modeli v
finančnih
časovnih
vrstah

Skriti
markovski
model

	V celoti opazovan	Le delno opazovan
Avtonomen	Markovska veriga	Skriti markovski model
Kontorliran	Markovski proces odločanja	Delno opazovalen proces odločanja

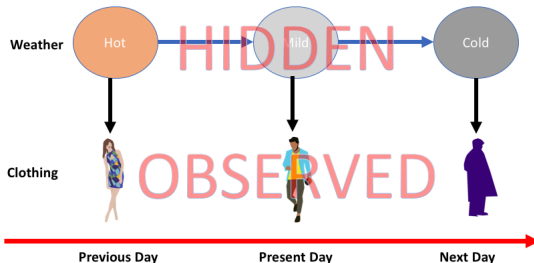
Skriti markovski model

Skriti markovski modeli v finančnih časovnih vrstah

Skriti markovski model

Skriti markovski model je statistični markovski model, kjer predpostavljamo, da je modelirani sistem markovski proces z skritimi stanji.

Gre torej za tip modela, kjer lahko razberemo rezultat, ne moremo pa ugotoviti, kakšna je bila funkcija, ki nam ga je dala.

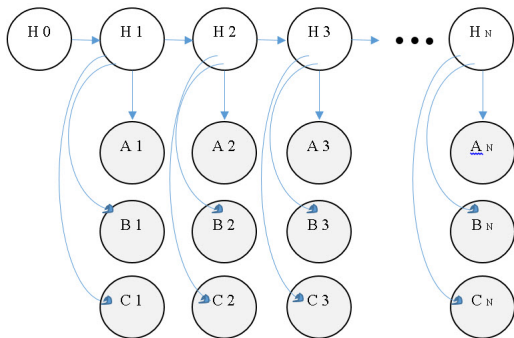


Zahteve

Skriti
markovski
modeli v
finančnih
časovnih
vrstah

Skriti
markovski
model

- Markovska lastnost
- Enakomerno porazdeljeni časi signalov O_t , ki jih poda resnični svet
- Sistem ima N stanj, vsako določa slučajna spremenljivka S



Hidden States:

$$H_t = \{x, y, z, \underline{e}\}$$

Observations:

$$A = \{\text{discrete number from 1 to } U_A\}$$

$$B = \{\text{discrete number from 1 to } U_B\}$$

$$C = \{\text{discrete number from 1 to } U_C\}$$

- Slučajnih spremenljivk skritih skoraj v nobenem času ne poznamo, poznamo pa slučajni proces Q , ki predstavlja signale
- Verjetnostno funkcijo vsakega stanja i označimo z $b_i(x)$
- Vektor začetnih stanj je Π
- Prehodna matrika A , ki je neodvisna od časa

Porazdelitveni zakon

Skriti
markovski
modeli v
finančnih
časovnih
vrstah

Skriti
markovski
model

- Gaussova mešanica
- $b_i = \sum_{j=1}^M c_{ij} N(x; \mu_j, \sigma_j^2)$
- Število porazdelitev M
- Matrika Γ , μ_{ij} predstavlja pričakovano vrednost porazdelitve j v stanju i
- Matrika Σ , kjer σ_{ij} predstavlja varianco porazdelitve j v stanju i
- Matrika C , koeficienti c_{ij} iz Gaussove mešanice

Osnovanje modela

Skriti
markovski
modeli v
finančnih
časovnih
vrstah

Skriti
markovski
model

Da bomo lahko delali z našim modelom, moramo najprej izvesti t.i. trening modela.

- Razvrščanje v skupine (*k*-means clustering)
- Akaikov informacijski kriterij



Izračun $P(O|\lambda)$

Skriti
markovski
modeli v
finančnih
časovnih
vrstah

Skriti
markovski
model

Z λ označimo vse ostale parametre $\lambda = (\Pi, A, C, \Gamma, \Sigma)$. Za učinkovit izračun le teh si pomagamo z iterativnim postopkom, podobnim sistemu EM, *naprej – nazaj*.

$$\alpha_1(i) = \pi_i b_i(O_1) = \pi_i b_i = \sum_{k=1}^M c_{ik}$$

\Downarrow

$$P(O|\lambda) = \sum_{i=1}^N \alpha_T(i)$$

Trening modela

Skriti
markovski
modeli v
finančnih
časovnih
vrstah

Skriti
markovski
model

Da bomo lahko $P(O|\lambda)$ maksimizirali, potrebujemo začetne ocene parametrov. Za to ne poznamo analitičnega postopka, lahko pa lokalno maksimiziramo, z naprimer, Baum-Welchovim algoritmom. Pri tem nas ne skrbijo ocene za A ter Π , kjer moramo paziti le na neničelnost le teh. Več problemov nam povzročajo C , Σ in Γ .

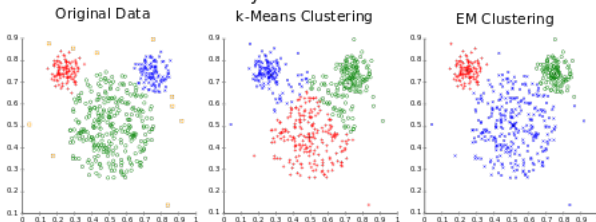
C, Σ in Γ

Skriti
markovski
modeli v
finančnih
časovnih
vrstah

Skriti
markovski
model

Za dobro začetno oceno si lahko pomagamo z razvrščanjem v skupine. Za C to pomeni, da bo element $c_{ij} = 1/M$ za vsak par ij , kjer je M število skupin. Pričakovane vrednosti in variance nato pridobimo iz vrednosti teh skupin.

Different cluster analysis results on "mouse" data set:



Lokalno maksimiziranje

Skriti markovski modeli v finančnih časovnih vrstah

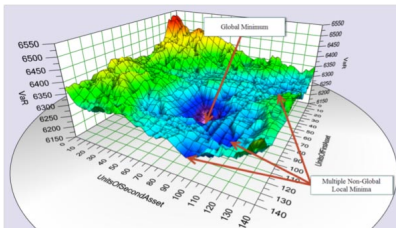
Skriti markovski model

Za potrebe lokalne maksimizacije določimo dodatne funkcije:

$$\xi_t(i, j) = \frac{\alpha_t(i) a_{ij} b_j(O_t) \beta_{t+1}(j)}{P(O|\lambda)}$$

$$\gamma_t(i) = \frac{\alpha_t(i) \beta_t(i)}{P(O|\lambda)}$$

$$\gamma_t(j, k) = \gamma_t(j) \frac{c_{jk} N(x; \mu_{jk}, \sigma_{jk}^2)}{\sum_{m=1}^M c_{jm} N(x; \mu_{jm}, \sigma_{jm}^2)}$$



Lokalno maksimiziranje

Skriti
markovski
modeli v
finančnih
časovnih
vrstah

Skriti
markovski
model

Prek dodatnih funkcij definiramo iteracijske postopke za naše spremenljivke:

$$\overline{\Pi}_i = \gamma_1(i)$$

$$\overline{a}_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \xi_t}{\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(i)}$$

$$\overline{c}_{jk} = \frac{\sum_{t=1}^T \gamma_t(j, k)}{\sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \gamma_t(j, m)}$$

$$\overline{\mu}_{jk} = \frac{\sum_{t=1}^T \gamma_t(j, k) O_t}{\sum_{t=1}^T \gamma_t(j, k)}$$

Tako definiramo večfazni iterativni proces, pri katerem popravljamo vrednosti parametrov do konvergence.

Začetno stanje in Viterbijev algoritem

Skriti
markovski
modeli v
finančnih
časovnih
vrstah

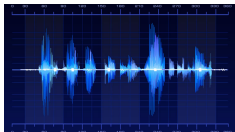
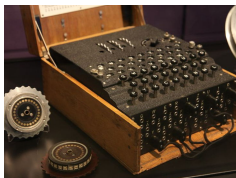
Skriti
markovski
model

Za delo s tem algoritmom moramo definirati $\delta_t(i)$, ki za vsako stanje i vrne največjo verjetnost vzdolž poti v času t . Prek $\delta_t(i)$ nato induktivno izvedemo algoritem.

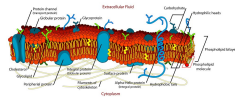
Viterbijev algoritem nam vrne p^* , ki je največja verjetnost in q_{T^*} , ki nam pove stanje v času T , ki nam to verjetnost vrne.

Uporaba

Skriti
markovski
modeli v
finančnih
časovnih
vrstah



I readily see in fig 20 that I missed the property shown in this plot that the property here and location of all structures are mutually share having that a structure located in this property occupies a very adjacent share in property and so that a structure in adjacent property occupies in the previous adjacent property share
Charles E. Whelan



V dolgi predstavitvi se bom bolj posvetil sami finančni analizi, ki sem jo tokrat zaenkrat pustil pri miru. V prihodnje bom tudi sam poizkusil določiti skriti markovski model na svojem setu podatkov.

- 1 I. MacDonald, W. Zucchini. Hidden Markov and Other Models for Discrete-valued Time Series. Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability. Taylor & Francis. (1997)
- 2 D.Roman, G. Mitra,N. Spagnolo. Hidden Markov models for financial optimization problems. IMA Journal of Management Mathematics. 21 (2010).