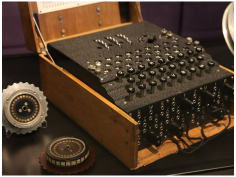
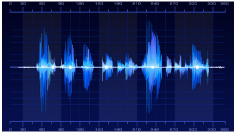
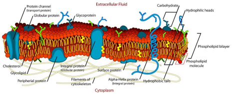
Skriti markovski modeli v finančnih časovnih vrstah







Skriti markovski modeli v finančnih časovnih vrstah

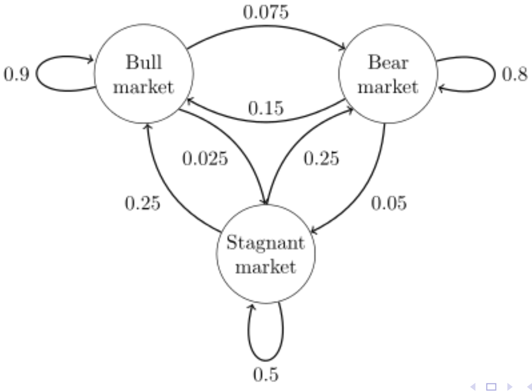
Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani

13. december 2018

Martin Praček
Mentor: izr. prof. dr. Damjan Škulj

Markovski model

- Markovska lastnost je lastnost slučajnega procesa v diksretnem času, da je njegova vrednost v času t odvisna le od njegove vrednosti v času $t-1$.
- Ločimo v celoti opazovan in delno opazovan ter
- Avtonomen in kotroliran sistem.

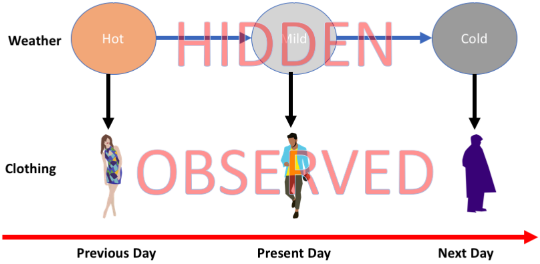


Delitev markovskih modelov

	V celoti opazovan	Le delno opazovan
Avtonomen	Markovska veriga	Skriti markovski model
Kontorliran	Markovski proces odločanja	Delno opazovalen proces odločanja

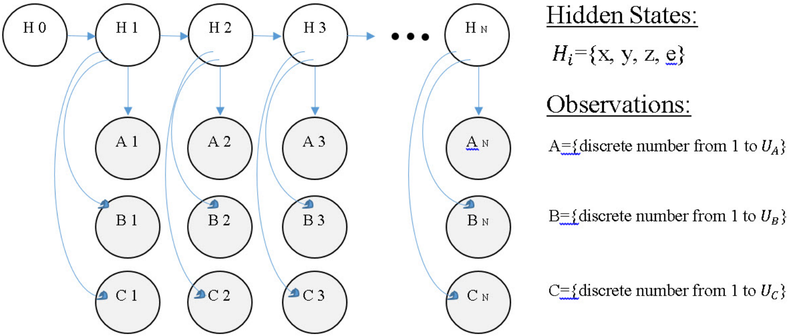
Skriti markovski model

Skriti markovski model je statistični markovski model, kjer predpostavljamo, da je modelirani sistem markovski proces z skritimi stanji.
Gre torej za tip modela, kjer lahko razberemo rezultat, ne moremo pa ugotoviti, kakšna je bila funkcija, ki nam ga je dala.



Zahteve

- Markovska lastnost
- Enakomerno porazdeljeni časi signalov O_t, ki jih poda resnični svet
- Sistem ima N stanj, vsako določa slučajna spremenjivka S



- Slučajnih spremenljivk skritih skoraj v nobenem času ne poznamo, poznamo pa slučajni proces Q, ki predstavlja signale
- Verjetnostno funkcijo vsakega stanja i označimo z $b_i(x)$
- Vektor začetnih stanj je π
- Prehodna matrika A, ki je neodvisna od časa

Porazdelitveni zakon

- Gaussova mešanica
- $b_i = \sum_{j=1}^{M} c_{ij} N(x; \mu_j, \sigma_j^2)$
- Število porazdelitev M
- Matrika Γ, μ_{ij} predstavlja pričakovano vrednost porazdelitve j v stanju i
- Matrika Σ, kjer σ_{ij} predstavlja varianco porazdelitve j v stanju i
- Matrika C, koeficienti c_{ij} iz Gaussove mešanice

Osnovanje modela

Da bomo lahko delali z našim modelom, moramo najprej izvesti t.i. trening modela.

- Razvrščanje v skupine (k-means clustering)
- Akaikov informacijski kriterij

Izračun $P(O|\lambda)$

Z λ označimo vse ostale parametre $\lambda = (\pi, A, C, \Gamma, \Sigma)$. Za učinkovit izračun le teh si pomagamo z iterativnim postopkom, podobnim sistemu EM, *naprej – nazaj*.

$$\alpha_1(i) = \pi_i b_i(O_1) = \pi_i b_i = \sum_{k=1}^{M} c_{ik}$$

$$\Downarrow$$

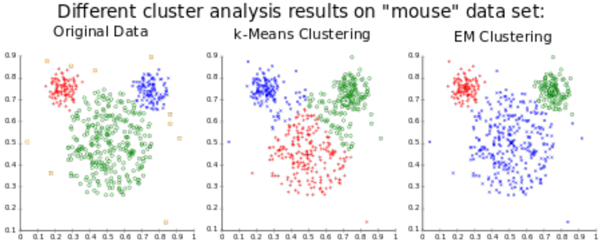
$$P(O|\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_T(i)$$

Trening modela

Da bomo lahko $P(O|\lambda)$ maksimizirali, potrebujemo začetne ocene parametrov. Za to ne poznamo analitičnega postopka, lahko pa lokalno maksimiziramo, z naprimer, Baum-Welchovim algoritmom. Pri tem nas ne skrbijo ocene za A ter π, kjer moramo paziti le na neničelnost le teh. Več problemov nam povzročajo C, Σ in Γ.

C, Σ in Γ

Za dobro začetno oceno si lahko pomagamo z razvrščanjem v skupine. Za C to pomeni, da bo element $c_{ij} = 1/M$ za vsak par ij, kjer je M število skupin. Pričakovane vrednosti in variance nato pridobimo iz vrednosti teh skupin.



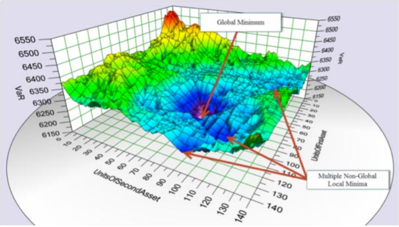
Lokalno maksimiziranje

Za potrebe lokalne maksimizacije določimo dodatne funkcije:

$$\xi_t(i,j) = \frac{\alpha_t(i) a_{ij} b_j(O_t) \beta_{t+1}(j)}{P(O|\lambda)}$$

$$\gamma_t(i) = \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{P(O|\lambda)}$$

$$\gamma_t(j,k) = \gamma_t(j) \frac{c_{jk} N(x; \mu_{jk}, \sigma^2_{jk})}{\sum_{m=1}^{M} c_{jm} N(x; \mu_{jm}, \sigma^2_{jm})}$$



Lokalno maksimiziranje

Prek dodatnih funkcij definiramo iteracijske postopke za naše spremenljivke:

$$\overline{\pi_i} = \gamma_1(i)$$

$$\overline{a_{ij}} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \xi_t}{\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_t(i)}$$

$$\overline{c_{jk}} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \gamma_t(j,k)}{\sum_{t=1}^{T} \sum_{m=1}^{M} \gamma_t(j,m)}$$

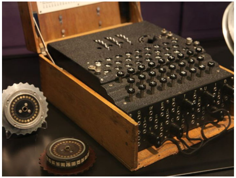
$$\overline{\mu_{jk}} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \gamma_t(j,k) O_t}{\sum_{t=1}^{T} \gamma_t(j,k)}$$

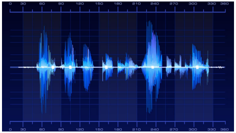
Tako definiramo večfazni iterativni proces, pri katerem popravljamo vrednosti parametrov do konvergence.

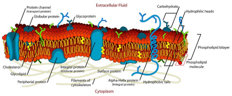
Začetno stanje in Viterbijev algoritem

Za delo s tem algoritmom moramo definirati $\delta_t(i)$, ki za vsako stanje i vrne največjo verjetnost vzdolž poti v času t. Prek $\delta_t(i)$ nato induktivno izvedemo algoritem.
Viterbijev algoritem nam vrne $p*$, ki je največja verjetnost in q_T*, ki nam pove stanje v času T, ki nam to verjetnost vrne.

Uporaba




0 30 60 90 120 150 180 210 240 270 300 330 360


Extracellular Fluid
Protein channel
Globular protein
Glycoprotein
Carbohydrate
Hydrophilic heads
Phospholipid bilayer
Phospholipid molecule
Cholesterol
Glycolipid
Integral protein
Surface protein
Peripherial protein
Filaments of cytoskeleton
Alpha-Helix protein
Hydrophobic tails
Cytoplasm

V dolgi predstavitvi se bom bolj posvetil sami finančni analizi, ki sem jo tokrat zaenkrat pustil pri miru. V prihodnje bom tudi sam poizkusil določiti skriti markovski model na svojem setu podatkov.

Viri

1. I. MacDonald, W. Zucchini. Hidden Markov and Other Models for Discrete-valued Time Series. Chapman & Hall/CRC Monographs on Statistics & Applied Probability. Taylor & Francis. (1997)
2. D.Roman, G. Mitra,N. Spagnolo. Hidden Markov models for financial optimization problems.IMA Journal of Management Mathematics. 21 (2010).