Departamento de Ciencias Físicas
Métodos numéricos para ingeniería
Tarea 3

Por favor responda a los siguientes enunciados usando frases completas y mostrando el procedimiento realizado. Digítelo en un documento en formato PDF y con el nombre `tarea3_equipoX.pdf`, en donde `X` representa el número del equipo. Someta este documento y archivos adjuntos en un único archivo comprimido en formato ZIP con el nombre `tarea3_equipoX.zip`.

1. (1.0) Por favor identifique a cualquier persona, esté o no en la clase, con quien discutió su tarea. Este punto afecta la nota en una escala multiplicativa.

2. (15 pts) Encuentre soluciones aproximadas usando los métodos de residuos ponderados vistos en clase (proyección de Galerkin, mínimos cuadrados y colocación) para la siguiente ecuación diferencial

$$\nabla^2 u(x,y) = -8\pi^2 \sin(2\pi x)\sin(2\pi y) \quad \forall (x,y) \in [0,1]^2\,,$$

con condiciones de frontera

$$u(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \partial[0,1]^2\,.$$

Use al menos 4 términos (2 en cada dirección) de una base polinomial. Compare los errores con la solución analítica

$$u_e(x,y) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)\,,$$

usando el error relativo

$$e_\text{rel} = \frac{\|u_e - u\|}{\|u\|}\,,$$

donde

$$\|f\|^2 = \int_\Omega |f|^2 \,\mathrm{d}\Omega\,.$$

3. (10 pts) Dada la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2} = f(x) \quad \forall x \in [0,1]\,,$$

con condiciones de frontera

$$u(0) = u(1) = 0\,.$$

Encuentre la matrices y vectores de carga elementales y globales para el método de elementos finitos con elementos cuadráticos de igual tamaño. Tenga en cuenta que las matrices de rigidez pueden calcularse de forma analítica e incluir en el código de esta forma. Respecto al vector de carga este puede aproximarse con la interpolación e integrar analítica o integrar numéricamente de forma directa.

4. (10 pts) Implemente un código en Python que obtenga las matrices halladas en el problema anterior para funciones f arbitrarias y que resuelva el sistema de ecuaciones resultante, adjunte el código a la tarea en un archivo de nombre `tarea3_equipoX_fem.py` o `tarea3_equipoX_fem.ipynb`

5. (15 pts) Considere un sistema vibratorio que consta de una placa rectangular de dimensiones $L_x \times L_y$ y de masa m suspendida sobre 4 resortes de constantes elásticas k_1, k_2, k_3, k_4. Los grados de libertad a considerar son la *altura* del centro de masa (z) y los ángulos de rotación respecto a los ejes x (α) e y (β). obtenga las ecuaciones demovimiento a partir de un balance de fuerzas en z y un balance momentos respecto a los dos ejes de rotación. Asuma pequeñas oscilaciones, es decir,

   $$\sin\alpha \approx \alpha, \sin\beta \approx \beta \cos\alpha \approx \cos\beta \approx 1\ .$$

   El sistema de ecuaciones que debe obtener es

   $$M\ddot{X} + KX = 0\,,$$

   en donde M es la matriz de masa y está dada por

   $$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & I_y \end{bmatrix}\,,$$

   K es la matriz de rigidez y tiene la forma

   $$K = \begin{bmatrix} 2(k_1+k_2+k_3+k_4) & (k_2+k_3-k_1-k_4)L_y & (k_1+k_2-k_3-k_4)L_x \\ (k_2+k_3-k_1-k_4)L_y & (k_1+k_2+k_3+k_4)L_y^2 & 0 \\ (k_1+k_2-k_3-k_4)L_x & 0 & (k_1+k_2+k_3+k_4)L_x^2 \end{bmatrix}\,,$$

   y

   $$X = \begin{Bmatrix} z \\ \alpha \\ \beta \end{Bmatrix}\,,$$

   es el vector de coordenadas generalizadas.

   Asuma una solución de la forma $X = e^{i\omega t}X_0$ y resuelva el problema de valores propios generalizado para $k_1 = k, k_2 = 2k, k_3 = k, k_4 = 3k$, $L_x = L, L_y = 2L$. Genere animaciones para los modos de vibración y adjúntelas como archivos con nombre `tarea3_equipoX_modoX.gif`.