

Primera Tarea de Métodos Numéricos: Modelación matemática y Elementos de computación científica.

FELIPE OTÁLVARO AGUDELO¹, MARIA PAULA REY BARRERA¹, SUSANA TORO CASTAÑO¹, AND ESTEFANÍA ZULUAGA PASTOR¹

¹Pregrado de Ingeniería Física, Universidad EAFIT, 2021-2

Compiled September 13, 2021

La modelación matemática y computacional actualmente son indispensables, para investigar el comportamiento de un sistema, para su entendimiento u optimización. Estos se utilizan en diversos campos como la industria, la ciencia y economía. Constituye uno de los pilares fundamentales de la ciencia contemporánea. Gracias a ella, los investigadores pueden predecir satisfactoriamente el comportamiento de muchos sistemas desde el clima hasta la interacción de galaxias. En la presente entrega se estudia la ecuación de Poisson, de onda y de calor, así mismo, se muestran los resultados de las funciones con problemas de valores en la frontera y las soluciones computacionales de los ejercicios propuestos.

© 2021 Optical Society of America

<http://dx.doi.org/10.1364/ao.XX.XXXXXX>

1. PRIMER PUNTO

En la presente tarea se discutieron inicialmente los puntos entre los miembros del equipo. Luego, se discutió con estudiantes de la carrera de otros semestres, tales como Adrián Herrera, Juan Pablo Aguilar y Neyder Díaz, los cuáles aportaron conocimientos para el desarrollo y verificación de los resultados.

2. SEGUNDO PUNTO

A continuación se presentan las tablas pedidas en el punto:

A. Ecuación de Poisson

Campo de aplicación	Ecuación	Variable principal (u)	Constante de material (k)	Término fuente (f)	Variable secundaria (q), $(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$
Gravitación Newtoniana	$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$	Φ : potencial gravitacional	G : constante gravitacional	ρ : densidad de masa	No tiene
Electroestática	$\nabla E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	E : campo eléctrico	ϵ_0 : permitividad eléctrica	ρ : densidad de carga	No tiene

Fig. 1. Tabla de aplicaciones ecuación de Poisson.

B. Ecuación de calor

Campo de aplicación	Ecuación	Variable principal (u)	Constante de material (k)	Término fuente (f)	Variable secundaria (q), $(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$
Difusión en materiales homogéneos	$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T + \frac{Q}{cp}$	T : temperatura	α : difusividad térmica	$\frac{Q}{cp}$: calor/ capacidad calorífica por densidad de masa	$\frac{\partial T}{\partial t}$
Difusión de materiales en medios en desequilibrio	$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = D \nabla^2 \Phi$	Φ : concentración	D : coeficiente de difusión	Externo a la ecuación	$\frac{\partial \Phi}{\partial t}$

Fig. 2. Tabla de aplicaciones ecuación de calor.

C. Ecuación de onda

Campo de aplicación	Ecuación	Variable principal (u)	Constante de material (k)	Término fuente (f)	Variable secundaria (q), $(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$
Acústica	$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$	Φ : velocidad potencial	c : velocidad del sonido	Externo a la ecuación	$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$
Electromagnetismo	$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - \nabla^2 B = 0$	B : campo magnético	c_0 : velocidad de luz libre	Externo a la ecuación	$\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$

Fig. 3. Tabla de aplicaciones ecuación de onda.

3. TERCER PUNTO

A. $u(x,y)=\sin(x)\sin(y)$

Verificando la primera condición tenemos:

$$\begin{aligned}\nabla^2 u &= \left(\frac{\partial^2 (\sin(x))(\cos(y))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\sin(x))(\cos(y))}{\partial y^2} \right) \\ \nabla^2 u &= -\sin(x)\cos(y) - \sin(x)\cos(y) \\ \nabla^2 u &= -2\sin(x)\cos(y)\end{aligned}\quad (1)$$

Vemos que esta se cumple. Ahora, verificamos la segunda condición. Esto lo haremos evaluando la función en los 4 bordes:

$$\begin{aligned}u(0,0) &= \sin(0)\cos(0) = 0 \\ u(0,\pi) &= \sin(0)\cos(\pi) = 0 \\ u(\pi,0) &= \sin(\pi)\cos(0) = 0 \\ u(\pi,\pi) &= \sin(\pi)\cos(\pi) = 0\end{aligned}\quad (2)$$

Se puede observar que esta función también cumple las condiciones de frontera, por lo que sí es solución.

B. $u(x,y)=\cos(x)\cos(y)$

Empezamos verificando la primera condición:

$$\begin{aligned}\nabla^2 u + v \cdot \nabla u &= \left(\frac{\partial^2 (\cos(x))(\cos(y))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\cos(x))(\cos(y))}{\partial y^2} \right) \\ &\quad + (1,1) \cdot \left(\frac{\partial (\cos(x))(\cos(y))}{\partial x} + \frac{\partial (\cos(x))(\cos(y))}{\partial y} \right) \\ \nabla^2 u + v \cdot \nabla u &= -\cos(x)\sin(y) - \cos(x)\sin(y) \\ &\quad - \sin(x)\cos(y) - \sin(x)\cos(y) \\ \nabla^2 u + v \cdot \nabla u &= -\cos(x)\sin(y) - \cos(x)\sin(y) \\ &\quad - (\sin(x)\cos(y) + \sin(x)\cos(y)) = \\ \nabla^2 u + v \cdot \nabla u &= -\sin(x+y) - 2\cos(x)\sin(y)\end{aligned}\quad (3)$$

Vemos que la función es solución al problema. Ahora veamos si cumple las condiciones de frontera evaluando la función en los bordes:

$$\begin{aligned}u(0,0) &= \cos(0)\cos(0) = 1 \\ u(0,\pi) &= \cos(0)\cos(\pi) = -1 \\ u(\pi,0) &= \cos(\pi)\cos(0) = -1 \\ u(\pi,\pi) &= \cos(\pi)\cos(\pi) = 1\end{aligned}\quad (4)$$

Observamos que esta función no es solución para el problema de valores en la frontera, ya que no se cumple la condición de frontera $u(x,y) = 0, \forall (x,y) \in \partial(0,\pi)^2$.

C. $u(x)=\sqrt{1+x}$

Empezamos viendo la primera condición:

$$\begin{aligned}u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 &= \sqrt{1+x} \left(\frac{\partial^2 (\sqrt{1+x})}{\partial x^2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial (\sqrt{1+x})}{\partial x} \right)^2 \\ u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 &= \sqrt{1+x} \left(\frac{-1}{4(1+x)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{4(1+x)} \right) \\ u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 &= \left(\frac{-1}{4(1+x)} + \left(\frac{1}{4(1+x)} \right) \right) \\ u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 &= 0\end{aligned}\quad (5)$$

Vemos que esta primera condición sí se cumple. Luego, se comprueba la segunda:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{1}{2\sqrt{1+0}} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{1}{2}\end{aligned}\quad (6)$$

Vemos que la segunda condición no se cumple, con lo que no sería esta una función solución para el problema de valores en la frontera. Sin embargo, vamos a comprobar igualmente la tercera condición:

$$\begin{aligned}u(x) &= \sqrt{1+x} \\ u(1) &= \sqrt{1+1} \\ u(1) &= \sqrt{2}\end{aligned}\quad (7)$$

Podemos concluir entonces que $u(x)$ es solución a la ecuación, más no satisface los problemas de condiciones en la frontera.

4. CUARTO PUNTO. VOLUMEN DE UNA PIEZA DE AJEDREZ



Fig. 4. Representación gráfica del caballo de ajedrez.

Primero se importa mediante el paquete *meshio* [1] el archivo con las matrices de nodos y elementos correspondientes, que es la figura 4. Posteriormente se crea una matriz y se llena

con la información de cada tetraedro y sus respectivos nodos, pudiendo así encontrar el volumen del n -ésimo tetraedro. A estos vectores se les determina el valor de su determinante, el cual representará el volumen de un prisma cuadrado. Para obtener el del tetraedro, debemos dividir este valor por 6, como podemos referenciar en la figura 5.

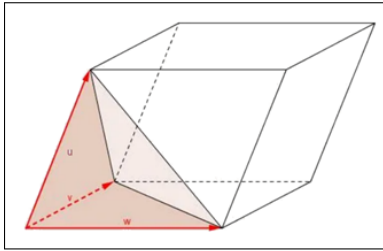


Fig. 5. Vectores de un tetraedro en un prisma rectangular

Finalmente, se sumaron todos los valores de cada tetraedro y se obtuvo el volumen total, el cual corresponde a aproximadamente 40606.38cm^3 .

5. QUINTO PUNTO

En esta sección se realiza un programa en Python para leer una malla con la topografía del Valle de Aburrá. Se hace el gráfico y se calcula su volumen desde el punto más bajo del Valle. Se debe de tener en cuenta que la malla está conformada únicamente por cuadriláteros de 4 nodos.

En primer lugar, al cuadrilátero se le calcula una función general de interpolación con Lagrange. Luego, se hace una aproximación de la integral definida de la función con la cuadratura de Gauss para $n=4$ y 16 puntos. Donde a cada punto, con la función de interpolación, se le calcula el valor de z de la cuadratura de Gauss canónico transformado, y en otro bloque de código se calcula la suma de todos los volúmenes infinitesimales.

Finalmente, se obtuvo el gráfico que se muestra a continuación.

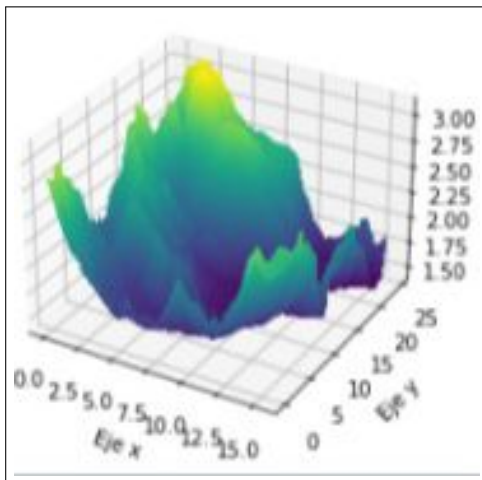


Fig. 6. Gráfico valle de Aburrá

Con un volumen total de 200.54587428Km^3 .

6. SEXTO PUNTO

En primer lugar, usando ParaView, se realiza una visualización para el conjunto de datos del flujo sobre un ala delta, el cual

presenta la geometría del ala, el campo de velocidades del fluido y la magnitud de la vorticidad. Para obtener esta visualización fina, se tomaron diferentes estados y vistas, las cuales representan la información fundamental del sistema.

Teniendo visualizada tanto la geometría del ala en forma de superficie como la magnitud de la vorticidad en renderizado volumétrico, se toma una vista inferior y se obtiene lo observado en la Figura 7. Se puede apreciar que se forman unos remolinos o vórtices de flujo bajo el ala.

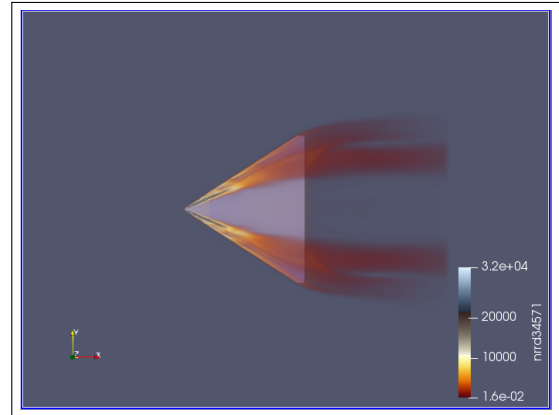


Fig. 7. Vista inferior del ala delta y magnitud de la vorticidad

Ahora, esto mismo tomando una vista superior se puede observar en la Figura 8. La vorticidad se encuentra únicamente por debajo del ala por lo que la vista superior no ofrece mucha información adicional.

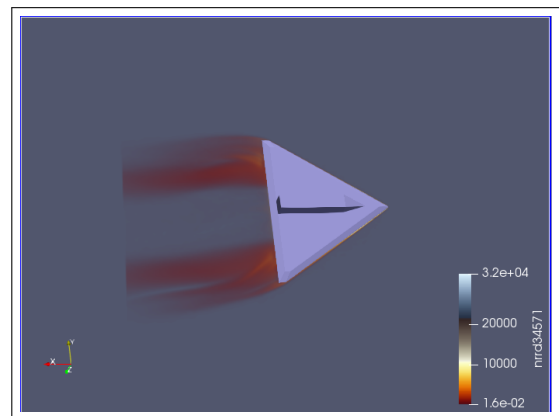


Fig. 8. Vista superior del ala delta y magnitud de la vorticidad

Finalmente, en la Figura 9 se visualizan la geometría del ala junto con el campo de velocidades del fluido, siendo este último renderizado volumétricamente. Se pueden observar estos valores de velocidad.

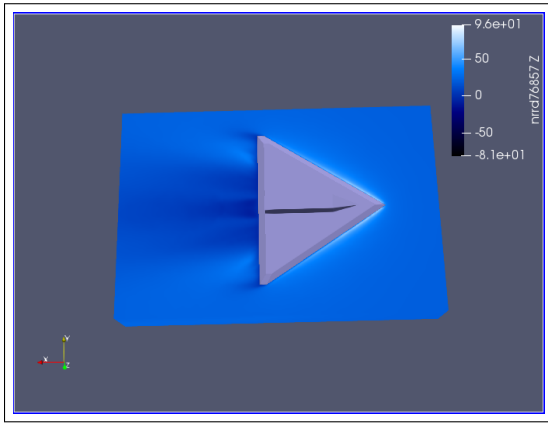


Fig. 9. Vista superior del ala delta y campo de velocidades del fluido

REFERENCES

1. N. Schlömer, "meshio," t.ly/dwGp.