Departamento de Ciencias Físicas
Métodos numéricos para ingeniería
Tarea 2

Por favor responda a los siguientes enunciados usando frases completas y mostrando el procedimiento realizado. Digítelo en un documento en formato PDF y sométalo a Interactiva Virutal con el nombre `tarea2_equipoX.pdf`, en donde `X` representa el número del equipo.

1. (1.0) Por favor identifique a cualquier persona, esté o no en la clase, con quien discutió su tarea. Este punto afecta la nota en una escala multiplicativa.

2. (25 pts) Realice un programa en Python que permita calcular la capacitancia de un sistema a partir de la solución dada para el potencial eléctrico en una malla no estructurada. La geometría está conformada únicamente por cuadriláteros de 4 nodos.

   La malla se encuentra en formato VTK en el archivo, se sugiere usar meshio para su lectura. Para calcular las integrales use el método de cuadratura gaussiana, tomando 2×2 puntos por cada elemento. Compare los valores obtenidos numéricamente con los valores analíticos. Adjunte los archivos de Python a su entrega.

   Nota: La capacitancia puede calcularse como

   $$C = \frac{2U}{\Delta V^2}\,,$$

   en donde U es la energía potencial eléctrica y ΔV es la diferencia de potencial. La energía potencial eléctrica puede calcularse como

   $$U = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \epsilon \|\mathbf{E}\|^2 \mathrm{d}\Omega\,,$$

   siendo $\mathbf{E}$ el campo eléctrico. Tenga en cuenta que $\mathbf{E} = -\nabla V$

3. (10 pts) La solución de la ecuación de onda para una membrana circular empotrada en su borde puede expresarse como una combinación lineal de los modos de vibración de la misma. Deseamos hacer una visualización en ParaView para estos modos.

   Tomemos los modos de vibración como

   $$u_{mn}(\rho, \phi, t) = \cos(m\phi) J_n(\lambda_{mn}\rho)\sin(\lambda_{mn} t)\,,$$

   en donde $\lambda_{mn} = \alpha_{mn}/a$, α_{mn} es la n-ésima raíz positiva de J_m, y a es el radio del círculo.

   Para realizar la visualización genere una malla en Gmsh formada por al menos 1000 triángulos. Luego, lea esta malla en Python y exporte una serie de archivos VTK para 4 modos de vibración y visualícelos en ParaView.

Adjunte el archivo de geometría de Gmsh, la malla generada. El código de Python y los videos exportados de ParaView para los 4 modos seleccionados. Describa el proceso, así como las decisiones tomadas a lo largo de la actividad y respecto a la visualización.

4. (15 pts) La ecuación que describe las vibraciones longitudinales de una barra de longitud L y sección variable está dada por

$$\frac{\rho A(x)}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[A(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]\, ,$$

en donde $A(x)$ es la sección transversal, ρ la densidad volumétrica de masa, y E el módulo de Young.

Las condiciones de frontera son: Dirichlet homogéneas en el extremo fijo

$$u(x=0) = 0\, ,$$

y Neumann homogéneas en el extremo libre

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0\, .$$

Nota: La solución analítica a este problema puede encontrarse por separación de variables para secciones de la forma $A(x) = A_0 x^n$.

a) (5) Proponga un esquema de diferencias finitas para resolver este problema.

b) (5) Implemente el esquema propuesto en el punto anterior. Adjunte el código.

c) (5) Usando el método de soluciones manufacturadas estime el orden de convergencia del esquema numérico propuesto.

Referencias

Las siguientes referencias pueden ser de utilidad en el desarrollo de la tarea.

- Gaël Varoquaux, Adrien Chauve, Andre Espaze, Emmanuelle Gouillart, Ralf Gommers. Scipy : high-level scientific computing. http://www.scipy-lectures.org/intro/scipy.html.
- Nico Schlömer, 2021. meshio. https://github.com/nschloe/meshio.
- The Scipy community, 2021. Integration and ODEs (scipy.integrate). https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/integrate.html#module-scipy.integrate
- Langtangen, H. P., & Linge, S. (2017). Finite difference computing with PDEs: a modern software approach. Springer Nature.