



Tercera tarea de Métodos Numéricos

ESTEFANÍA ZULUAGA PASTOR,¹ SUSANA TORO CASTAÑO,¹ FELIPE OTÁLVARO AGUDELO,¹ MARÍA PAULA REY^{1, *}

¹Departamento de Ciencias Físicas, Universidad EAFIT, Medellín, Colombia.

*Autor correspondiente: mpreyb@eafit.edu.co

Publicado 01 Octubre 2021

La modelación matemática y computacional actualmente son indispensables para investigar el comportamiento de un sistema, para su entendimiento u optimización. Estas se utilizan en diversos campos como la industria, la ciencia y economía. Constituyen uno de los pilares fundamentales de la ciencia contemporánea. Gracias a ella, los investigadores pueden predecir satisfactoriamente el comportamiento de muchos sistemas desde el clima hasta la interacción de galaxias. En la presente entrega, se estudia la capacitancia de un sistema a partir de un potencial eléctrico, la ecuación de onda para una membrana circular, la ecuación que describe las vibraciones longitudinales y las soluciones computacionales de los ejercicios propuestos.

1. PRIMER PUNTO:

En la presente tarea se discutieron inicialmente los puntos entre los miembros del equipo. Luego, se discutió con estudiantes de la carrera de otros semestres, tales como Esteban Velásquez Agudelo, Luigi Joel Miranda, Andrés Moreno y María José Gil.

2. SEGUNDO PUNTO

Todo el desarrollo matemático y de modelación computacional se encuentra en el Jupyter Notebook que se envía adjunto.

Se tiene la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -8\pi^2 \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$$

Con condiciones en la frontera

$$u(0) = u(1) = 0$$

Se tiene que la solución analítica está dada por:

$$u_e(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$$

Inicialmente se propone una aproximación a la solución de la forma:

$$u_N(x, y) = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N c_i \phi_i(x) \phi_j(y) = x(1-x)y(1-y) \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N c_i$$

La cual satisface las condiciones de frontera dadas. Además, se tiene que el residual está dado por:

$$R = \frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_N}{\partial y^2} - 8\pi^2 \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$$

Al graficar esta solución obtenemos:

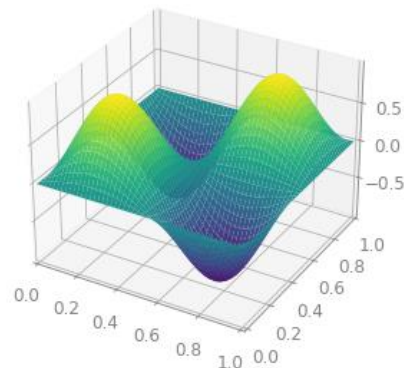


Fig. 1. Gráfica solución analítica

A continuación, se presentan tres soluciones aproximadas obtenidas a través de métodos de residuos ponderados.

a) Método de Garlekin: En este método se tiene que el residual debe ser ortogonal a cada uno de los elementos de la base, es decir:

$$\int_0^1 \int_0^1 R \phi_k dx dy = 0, \forall \phi_k$$

Reemplazando y solucionando la integral, se obtiene un sistema de cuatro ecuaciones, del cual se obtienen los siguientes coeficientes:

Este sistema se resuelve para así obtener la solución aproximada, la cual es representada en la siguiente gráfica:

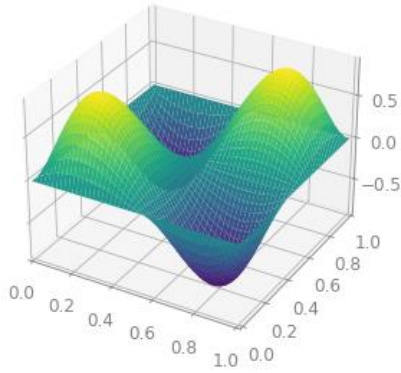


Fig. 2. Gráfica solución método Garlekin

Con este método se obtiene un error residual ponderado de 0.037, por lo que se puede afirmar que es una buena aproximación a la solución analítica del problema. Hecho que además se puede comprobar al ver la similitud de las gráficas.

b) Método de mínimos cuadrados: En este método se busca minimizar el cuadrado de la norma residual, es decir:

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \int_0^1 R^2 dx = 0, \forall i$$

Si se toma la derivada parcial respecto al coeficiente i-ésimo como función de ponderación, esta ecuación puede reescribirse de la forma:

$$\int_0^1 R \frac{\partial R}{\partial c_i} dx = 0, \forall i$$

Se resuelve la integral y se obtiene un sistema de ecuaciones del cual se obtienen los siguientes coeficientes:

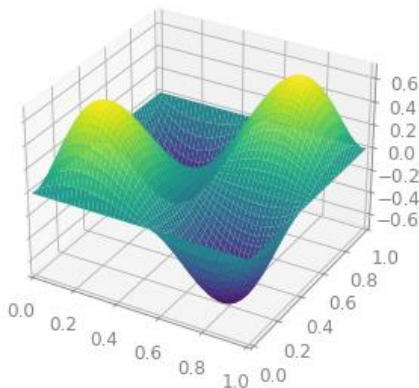


Fig. 3. Gráfica solución mínimos cuadrados

Se resuelve este sistema de soluciones y se obtiene la solución aproximada enseñada en la figura 3:

El error residual ponderado obtenido en este método es de 0.105, por lo que sigue siendo una solución aproximada a la analítica como

se puede observar, pero menos precisa que la obtenida anteriormente por Garlekin.

c) Método de colocación: En este método se tiene que el residual debe ser cero en un conjunto de puntos. Si el delta de Dirac se toma como una función de ponderación, se puede reescribir como un método de residuos ponderados de la forma:

$$\int_0^1 R \delta(x - x_i) dx = 0, \forall x_i$$

O escrito de otra forma:

$$R(x_i) = 0, \forall x_i$$

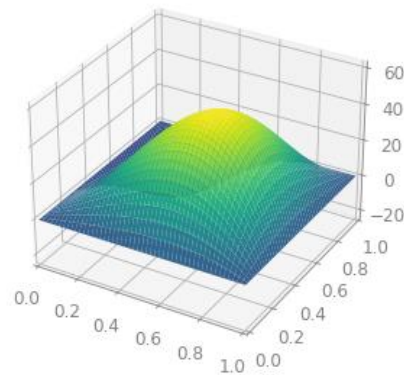


Fig. 4. Gráfica solución método de colocación

Solucionando esta integral y resolviendo el sistema de ecuaciones que quedan, se obtienen la solución que se gráfica a continuación: Con este método se obtuvo un error residual ponderado de 2926.6576 por lo que se puede afirmar, como se observa en la figura 4, que no es un buen método de aproximación para la solución de este problema.

3. TERCER PUNTO

La ecuación diferencial a resolver por elementos finitos es:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - f(x) = 0 \quad (1)$$

Con las condiciones de frontera:

$$u(0) = u(1) = 0$$

Debemos encontrar las matrices y vectores de carga elementales y globales para el método de elementos finitos con elementos cuadráticos de igual tamaño.

Inicialmente se debe discretizar el dominio. Para esto se generan k nodos, donde $k \in N \wedge \text{mod}(k, 3) = 0$ y con ellos $\frac{k}{3}$ elementos (cada uno compuesto de 3 nodos. Cada elemento tiene una longitud de $2h$ con $h = \frac{1}{k}$. Cada nodo x_n tiene asociado un valor u_n que representa el valor que la función solución debería adquirir al ser evaluada en ese nodo, como se puede observar en la Figura 5.

Ahora, se debe proponer una función de prueba con la que se pretende aproximar la solución, la cual corresponde a la Ecuación (2).

$$E_0 \hat{u}(x) = c_1 x^2 + c_2 x + c_3 \quad (2)$$

Esta ecuación está definida de manera continua (a tramos para cada elemento), es decir que se debe cumplir que $x \in x_{n-1} \leq x \leq x_{n+1}$, donde c_1, c_2, c_3 hacen referencia a parámetros independientes de x que pueden variar de intervalo a intervalo y que permiten modificar la función para que se ajuste mejor a la solución.

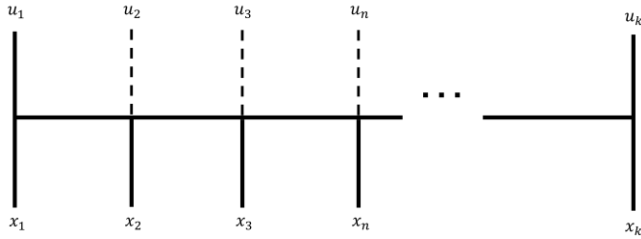


Fig. 5. Valor específico u_n que debe adquirir la función al ser evaluada en cada nodo x_n .

Ahora, vemos que independientemente del intervalo en que esté definida la función de prueba, esta debe estar ajustada apropiadamente a la función solución; lo que implica, que para cualquier intervalo dentro del dominio, se cumple la Ecuación (3), (4) y (5).

$$\hat{u}(x_{n-1}) = u_{n-1} = c_1 x_{n-1}^2 + c_2 x_{n-1} + c_3 \quad (3)$$

$$\hat{u}(x_n) = u_n = c_1 x_n^2 + c_2 x_n + c_3 \quad (4)$$

$$\hat{u}(x_{n+1}) = u_{n+1} = c_1 x_{n+1}^2 + c_2 x_{n+1} + c_3 \quad (5)$$

Por lo tanto, se puede obtener la Ecuación (6).

$$\hat{u}(x) = |x^2 \times 2| \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} \quad (6)$$

Resolviendo se tiene que:

$$\begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{n-1}^2 & x_{n-1} & 1 \\ x_n^2 & x_n & 1 \\ x_{n+1}^2 & x_{n+1} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{n-1} \\ u_n \\ u_{n+1} \end{vmatrix} \quad (7)$$

$$\hat{u}(x) = |x^2 \times 2| \begin{vmatrix} x_{n-1}^2 & x_{n-1} & 1 \\ x_n^2 & x_n & 1 \\ x_{n+1}^2 & x_{n+1} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{n-1} \\ u_n \\ u_{n+1} \end{vmatrix} \quad (8)$$

La función de prueba reescribirse como la Ecuación (9), donde ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 se conocen como funciones base y son fundamentales para el método de elementos finitos.

$$\hat{u}(x) = \phi_1 u_{n-1} + \phi_2 u_n + \phi_3 u_{n+1} \quad (9)$$

En cada elemento existen tres contribuciones asociadas a cada función base, y cada contribución corresponde a una función cuadrática definida en un intervalo finito de longitud $2h$, siendo h la

separación entre nodos para cuando se tiene un problema con particiones equidistantes.

Tabla 1. Representación matemática de la equivalencia de ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 y para las mallas equiespaciales.

		Para mallas equiespaciales
ϕ_1 =	$\frac{(x - x_n)(x - x_{n+1})}{(x_{n-1} - x_n)(x_{n-1} - x_{n+1})} =$	$\frac{(x - x_n)(x - x_{n+1})}{2h^2}$
ϕ_2 =	$\frac{(x - x_{n-1})(x - x_{n+1})}{(x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n+1})} =$	$-\frac{(x - x_{n-1})(x - x_{n+1})}{h^2}$
ϕ_3 =	$\frac{(x - x_{n-1})(x - x_n)}{(x_{n+1} - x_{n-1})(x_{n+1} - x_n)} =$	$\frac{(x - x_{n-1})(x - x_n)}{2h^2}$

Con base en la literatura se tiene que el residuo R es equivalente a la Ecuación (10) y el promedio de residuo I en su forma fuerte esta expresado con la Ecuación (11), donde ω es la función de peso y la integración se realiza sobre todo el dominio

$$R = \frac{d^2 \hat{u}(x)}{dx^2} - f(x) \quad (10)$$

$$I_f = \int \omega \frac{d^2 \hat{u}(x)}{dx^2} - f(x) dx - \int \omega f(x) dx \quad (11)$$

Ahora, realizando integración por partes se lleva I a su forma débil, la cual se puede expresar como la Ecuación 12.

$$I_d = \frac{d\hat{u}(x)}{dx} \omega \int \frac{d\hat{u}(x)}{dx} \frac{d\omega}{dx} dx - \int \omega f(x) dx \quad (12)$$

Ahora, se dará un enfoque al valor de ω , donde la función de peso según Galerkin se define como $\omega_i = \frac{\partial \hat{u}}{\partial c_i}$, donde c_i es el i -ésimo parámetro libre en \hat{u} .

Ahora, se tiene que h, x_{n-1}, x_{n+1} son valores fijos y conocidos. Por lo tanto, los únicos términos cuyo valor es desconocido y que de hecho deben hallarse tal que estos ajusten y acerquen más a la solución exacta de la ecuación diferencial son los de u_{n-1}, u_n, u_{n+1} , es por esto que se puede escribir ω con la Ecuación (13).

$$\omega = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{u}}{\partial u_{n-1}} \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial u_n} \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial u_{n+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Teniendo en cuenta la Ecuación (14), se obtiene la Ecuación (15).

$$\frac{d\omega}{dx} = \begin{bmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \\ \phi'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2x - x_n - x_{n-1})/2h^2 \\ -(2x - x_{n-1} - x_{n+1})/h^2 \\ (2x - x_{n-1} - x_n)/2h^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\frac{d\hat{u}(x)}{dx} = [\phi'_1 \quad \phi'_2 \quad \phi'_3] \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Finalmente, se fragmenta la integral sobre el dominio, de modo que esta se evalúe sobre cada uno de los elementos y luego sume sus contribuciones. Obtenemos así las Ecuaciones (16) y (17).

$$I_d = \sum_{i=2}^{k-1} \left[\left[\frac{d\hat{u}(x)}{dx} \omega(x) \right]_0^1 - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{d\omega(x)}{dx} \frac{d\hat{u}(x)}{dx} dx - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \omega(x) dx \right] \quad (16)$$

$$I_d = \sum_{i=2}^{k-1} - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{d\omega(x)}{dx} \frac{d\hat{u}(x)}{dx} dx - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \omega(x) dx \quad (17)$$

Lo que es equivalente a la Ecuación (18):

$$\sum_{i=2}^{k-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \omega(x) \frac{d^2 \hat{u}(x)}{dx^2} dx - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \omega(x) dx \quad (18)$$

Ahora, se cancelan las dos integrales que contienen a $f(x)w(x)$ y se obtienen las ecuaciones (19) y (20), la cual es equivalente a la ecuación (21).

$$\sum_{i=2}^{k-1} - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{d\omega(x)}{dx} \frac{d\hat{u}(x)}{dx} dx = \sum_{i=2}^{k-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \omega(x) \frac{d^2 \hat{u}(x)}{dx^2} dx \quad (19)$$

$$\sum_{i=2}^{k-1} - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \\ \phi'_3 \end{bmatrix} [\phi'_1 \quad \phi'_2 \quad \phi'_3] \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix} dx \quad (20)$$

$$\sum_{i=2}^{k-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \frac{d^2 \hat{u}(x)}{dx^2} dx \quad (21)$$

Definiendo el producto interno de dW/dX con la ecuación (20), se tiene que:

$$\left\langle \frac{dW}{dx} \middle| \frac{dW}{dx} \right\rangle = \int_0^L \begin{bmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \\ \phi'_3 \end{bmatrix} [\phi'_1 \quad \phi'_2 \quad \phi'_3] dx \quad (22)$$

Es así como se tiene que:

$$\sum_{i=2}^{k-1} - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \\ \phi'_3 \end{bmatrix} [\phi'_1 \quad \phi'_2 \quad \phi'_3] \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix} dx \quad (23)$$

Ahora se define U ,

$$U = \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Como el vector columna U no depende de x , ya que son constantes para cada elemento, entonces se puede sacar de la integral, obteniendo entonces la Ecuación (26).

$$\sum_{i=2}^{k-1} - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \\ \phi'_3 \end{bmatrix} [\phi'_1 \quad \phi'_2 \quad \phi'_3] dx U \quad (25)$$

La cual se puede expresar como:

$$\sum_{i=2}^{k-1} - \left\langle \frac{dW}{dx} \middle| \frac{dW}{dx} \right\rangle U = \sum_{i=2}^{k-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} [\phi'_1 \quad \phi'_2 \quad \phi'_3] \frac{d^2 \hat{u}(x)}{dx^2} dx \quad (26)$$

Donde $\left\langle \frac{dW}{dx} \middle| \frac{dW}{dx} \right\rangle$ es una matriz 3×3 que se define la matriz de rigidez del elemento y se expresa como:

$$\left\langle \frac{dW}{dx} \middle| \frac{dW}{dx} \right\rangle = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} \phi'_1 \phi'_1 & \phi'_1 \phi'_2 & \phi'_1 \phi'_3 \\ \phi'_2 \phi'_1 & \phi'_2 \phi'_2 & \phi'_2 \phi'_3 \\ \phi'_3 \phi'_1 & \phi'_3 \phi'_2 & \phi'_3 \phi'_3 \end{bmatrix} dx \quad (27)$$

Además, se puede definir el lado derecho de la ecuación (26) como:

$$\sum_{i=2}^{k-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \frac{d^2 \hat{u}(x)}{dx^2} dx = \sum_{i=2}^{k-1} c \quad (28)$$

Donde c es la matriz de carga del elemento y finalmente se tiene la ecuación (29), la cual hace referencia a la ecuación global del sistema.

$$\sum_{i=2}^{k-1} - \left\langle \frac{dW}{dx} \middle| \frac{dW}{dx} \right\rangle U = \sum_{i=2}^{k-1} c \quad (29)$$

Para el caso se tienen elementos cuadráticos, y se puede realizar el cálculo de la matriz de rigidez. La matriz de rigidez es invariante para cada elemento ya que todos los elementos son en principio iguales y además están igualmente espaciados. Por lo anterior se puede calcular la matriz de rigidez elemental para elementos cuadráticos como:

$$A = \left\langle \frac{dW}{dx} \middle| \frac{dW}{dx} \right\rangle = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \begin{bmatrix} \phi'_1 \phi'_1 & \phi'_1 \phi'_2 & \phi'_1 \phi'_3 \\ \phi'_2 \phi'_1 & \phi'_2 \phi'_2 & \phi'_2 \phi'_3 \\ \phi'_3 \phi'_1 & \phi'_3 \phi'_2 & \phi'_3 \phi'_3 \end{bmatrix} dx = \frac{1}{6h} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Ahora se define el ensamble de la matriz global. Sabemos que los elementos comparten funciones de forma con sus elementos vecinos. Sea la matriz de rigidez elemental A^k como se muestra a continuación:

$$A^m = \begin{bmatrix} A_{11}^k & A_{12}^k & A_{13}^k \\ A_{21}^k & A_{22}^k & A_{23}^k \\ A_{31}^k & A_{32}^k & A_{33}^k \end{bmatrix} = A|_{\text{elemento } m} \quad (31)$$

Debido a que solo hay contribuciones de varios elementos en los nodos uno y tres, se puede ensamblar la matriz de rigidez global para un sistema con tres elementos:

$$A^m = \begin{bmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 & A_{13}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 & A_{23}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{31}^1 & A_{32}^1 & A_{33}^1 + A_{11}^1 & A_{12}^1 & A_{13}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{21}^2 & A_{22}^2 & A_{23}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{31}^2 & A_{32}^2 & A_{33}^2 + A_{11}^3 & A_{12}^3 & A_{13}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21}^3 & A_{22}^3 & A_{23}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{31}^3 & A_{32}^3 & A_{33}^3 \end{bmatrix} \quad (32)$$

El vector de carga debe seguir la misma estructura de la matriz de rigidez. Sea b el vector de carga para cada elemento, que se expresa como:

$$c^m = \begin{bmatrix} c_1^k \\ c_2^k \\ c_3^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_1 \frac{d^2 \hat{u}(x)}{dx^2} dx \\ \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_2 \frac{d^2 \hat{u}(x)}{dx^2} dx \\ \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_3 \frac{d^2 \hat{u}(x)}{dx^2} dx \end{bmatrix} \quad (33)$$

Luego, el vector de carga global c_G para tres elementos es:

$$c_G = \begin{bmatrix} c_1^1 \\ c_2^1 \\ c_3^1 + c_1^2 \\ c_2^2 \\ c_3^2 + c_1^3 \\ c_2^3 \\ c_3^3 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Finalmente se puede escribir la ecuación del sistema:

$$\begin{bmatrix} A_{11}^1 & A_{12}^1 & A_{13}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21}^1 & A_{22}^1 & A_{23}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{31}^1 & A_{32}^1 & A_{33}^1 + A_{11}^1 & A_{12}^1 & A_{13}^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{21}^2 & A_{22}^2 & A_{23}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{31}^2 & A_{32}^2 & A_{33}^2 + A_{11}^3 & A_{12}^3 & A_{13}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{21}^3 & A_{22}^3 & A_{23}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{31}^3 & A_{32}^3 & A_{33}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1^1 \\ c_2^1 \\ c_3^1 + c_1^2 \\ c_2^2 \\ c_3^2 + c_1^3 \\ c_2^3 \\ c_3^3 \end{bmatrix} \quad (35)$$

3. CUARTO PUNTO

Se implementó un código en Python que obtuviera las matrices de carga elementales y globales para funciones f arbitrarias y que resolviera el sistema de ecuaciones resultante. Se adjuntó el código en un archivo de nombre *tarea3_equipo3_fem.ipynb*.

Este código es en un principio idéntico al del punto anterior por claras razones, con la adición al final de la solución del sistema de ecuaciones resultante, que se realizó con *sympy* con ayuda del solucionador de una matriz expandida, y también con *scipy*.

5. QUINTO PUNTO

Se considera un sistema vibratorio que consta de una placa rectangular de dimensiones $L_x * L_y$ y de masa "m" suspendida sobre 4 resortes de constantes elásticas k_1, k_2, k_3, k_4 . Se pide obtener las ecuaciones de movimiento a partir de un balance de fuerzas en z y un balance momentos respecto a los dos ejes de rotación. En la Figura 4 se puede observar un diagrama del sistema.

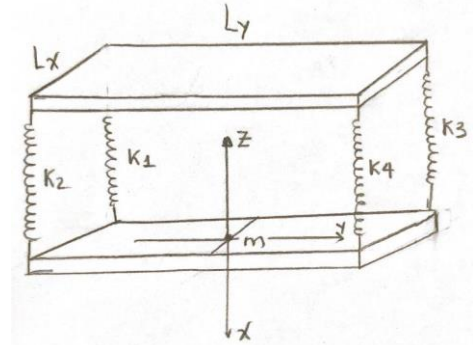


Fig. 4. Diagrama del sistema

Para el balance de fuerzas primero tomamos la segunda ley de Newton.

$$F = ma$$

En este caso las fuerzas corresponden a la de los resortes por lo que se aplica ley de Hooke.

$$F = -kx$$

Asumiendo que las fuerzas van hacia arriba y sólo se mueve el eje z , el balance de fuerzas quedaría como:

$$k_1 z_1 + k_2 z_2 + k_3 z_3 + k_4 z_4 = m \ddot{z}_c$$

Lo cual luego debe traducirse en ángulos.

Para el balance de momentos, es importante tener en cuenta la ecuación del torque e inercia:

$$F_{\perp} * r = I * \ddot{\theta}$$

En las esquinas las fuerzas son siempre perpendiculares al eje x y al eje y. El balance de momentos quedaría como:

$$\frac{L_x}{2} k_1 z_1 + \frac{L_x}{2} k_2 z_2 + \frac{L_x}{2} k_3 z_3 + \frac{L_x}{2} k_4 z_4 = I_x \ddot{\alpha}$$

$$\frac{L_y}{2} k_1 z_1 + \frac{L_y}{2} k_2 z_2 + \frac{L_y}{2} k_3 z_3 + \frac{L_y}{2} k_4 z_4 = I_y \ddot{\beta}$$

Lo cual también debe traducirse en ángulos. Esto tal vez se podría hacer con las ecuaciones

$$L_y * \sin(\alpha) * \cos(\beta)$$

$$L_x * \sin(\beta) * \cos(\alpha)$$

Sin embargo, no se pudo hallar la forma correcta de estos balances.

Lo siguiente que se pide en el punto se puede hacer haciendo una malla rectangular en Gmsh, meterla en Python, calcular los modos con el problema de valores propios que queda de la solución armónica del sistema, y estos modos exportarlos en VTK para visualizarlos usando ParaView.

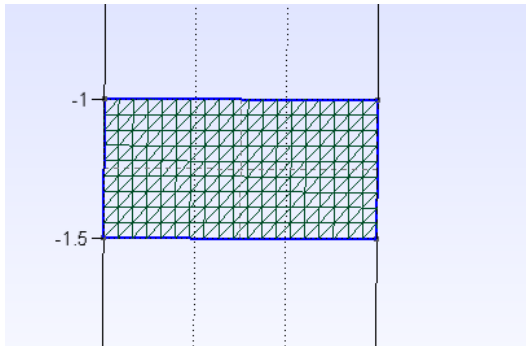


Fig. 5. Malla rectangular hecha con Gmsh

Se tuvieron problemas de hardware por lo que no fue posible completar las animaciones.

Referencias