

TD3 - Higher-Order semantics

Christine Tasson

1 Von Neumann

On considère le programme suivant.

```
def FairCoin(p:float) → bool:
  a = sample(Bernoulli(p))
  b = sample(Bernoulli(p))
  if (a != b):
    return a
  else:
    return FairCoin(p)

with ImportanceSampling(num_particles=1000):
  FC: Categorical[bool] = infer(FairCoin, 0.3)
```

Exercice 1.

1. Est-ce qu'une inférence par énumération fonctionnerait ?
2. Traduire ce programme dans pPCF
3. Calculer la sémantique opérationnelle.
4. Utiliser le théorème de correction de la sémantique dénotationnelle par rapport à la sémantique opérationnelle pour montrer que si $e = \text{fix } x.e'$, alors

$$\llbracket e \rrbracket = \sum_a \llbracket e \rrbracket_a \llbracket e' \rrbracket_a$$

5. Calculer la sémantique $\llbracket \text{FairCoin}(p) \rrbracket$, en utilisant les règles simplifiées de la sémantique dénotationnelle :

$$\llbracket \text{sample } (e) \rrbracket_{\gamma, c} = \sum_a \llbracket e \rrbracket_{\gamma, a} \delta_a(c)$$

$$\llbracket \text{let } x = e_1 \text{ in } e_2 \rrbracket_{\gamma, c} = \sum_a \llbracket e_1 \rrbracket_{\gamma, a} \llbracket e_2 \rrbracket_{\gamma + [x \leftarrow a], c}$$

$$\llbracket \text{if } e_1 \text{ then } e_2 \text{ else } e_3 \rrbracket_{\gamma, c} = \llbracket e_1 \rrbracket_{\gamma, \text{True}} \llbracket e_1 \rrbracket + \llbracket e_2 \rrbracket_{\gamma, \text{False}} \llbracket e_2 \rrbracket_{\gamma, c}$$

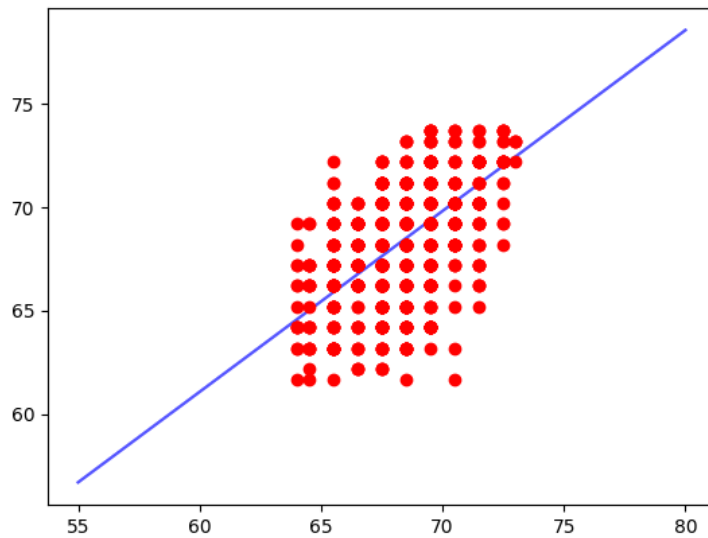
6. Utiliser le théorème de pleine adéquation pour montrer que le programme `Faircoin` se comporte comme une pièce équilibrée.

2 La régression linéaire de Galton

En 1886, Francis Galton mesure le taux de régression de la taille entre les parents et leurs enfants [1].

Il utilise pour cela une table des fréquences *Nombre d'enfants Adultes de tailles variées, nés de 205 parents de tailles variées*. Il divise les données en plusieurs sous-groupes en fonction de la taille moyenne des deux parents. Il calcule alors la médiane des tailles de leurs enfants et la compare à la taille médiane des parents. Il reconnaît une ligne droite.

Voici le nuage de points associant la hauteur des enfants à la hauteur médiane de leur parents, et la droite tracée par Galton :



Voici un programme relatant cette expérience :

```
def model(data):
    a = sample(Gaussian(1, 1), name="a")
    b = sample(Gaussian(1, 5), name="b")
    f = lambda x: a*x + b
    for _, p in data.iterrows():
        observe(Gaussian(f(p["parent"]), 0.5), p["child"])
    return (a, b)

with ImportanceSampling(num_particles=1000):
    dist: Categorical[Tuple[float, float]] = infer(model, data)
```

Exercice 2.

1. Que fait le programme probabiliste ci-dessus ?
2. Transformer ce programme pour qu'il renvoie une fonction.
3. Transformer ce programme pour qu'il infère d'autres types de fonctions.

Références

- [1] Galton *Regression Towards Mediocrity in Hereditary Stature*, Journal of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland, 15, 246-263, 1886.