

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

FAKULTÄT ELEKTROTECHNIK UND  
INFORMATIONSTECHNIK

# Steuerung von Systemen mit örtlich verteilten Parametern

gehalten im SS 2018

Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie

## Inhaltsverzeichnis

<b>2</b>	<b>Modellierung von Systemen mit verteilten Parametern</b>	<b>3</b>
2.1	Modellierung in ortsfesten Koordinaten . . . . .	3
2.1.1	Bilanzgleichungen im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	3
2.1.2	Bilanzgleichungen im $\mathbb{R}^1$ . . . . .	4
2.2	Modellierung in materialfesten Koordinaten . . . . .	4
2.3	Modellierung in raumfesten Koordinaten durch Bilanzierung über materialfestem Volumen . . . . .	4
2.3.1	im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	4
2.3.2	im $\mathbb{R}^1$ . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Klassifikation partieller Differentialgleichungen</b>	<b>7</b>
3.1	Charakteristika von Gleichungen erster Ordnung . . . . .	8
3.2	Charakteristiken und Klassifikation von Gleichungssystemen 1. Ordnung . . . . .	10
3.3	Klassifikation und Charakteristiken von Gleichungen 2. Ordnung . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Steuerungsentwurf</b>	<b>13</b>
4.1	Motivation Steuerungsentwurf . . . . .	13
4.2	(Differentielle) Flachheit konzentriertparametrischer Systeme . . . . .	13
4.3	Flacher Ausgang für eine Klasse von Randwertaufgaben (RWA) . . . . .	14
4.4	Lösung der Cauchy'schen Randwertaufgabe für hyperbolische Systeme . . . . .	16
4.5	Lösung der Cauchy'schen Randwertaufgabe für parabolische Systeme . . . . .	19
4.5.1	Mathematische Vorbereitungen . . . . .	19
4.5.2	Existenz der Lösung . . . . .	19
4.5.3	Numerische Berechnung der Lösung . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Methode der Modaltransformation</b>	<b>22</b>
5.1	Einführung und Motivation . . . . .	22
5.2	Funktionaloperatoren und abstrakte Dgl. . . . .	23
5.2.1	Abstrakte Dgl. für skalare Randwertaufgabe . . . . .	25
5.3	Adjungierter Funktionaloperator . . . . .	25
5.3.1	Innenprodukt (Skalarprodukt) (im $\mathbb{C}^n$ ) . . . . .	25
5.3.2	Adjungierter Differentialoperator . . . . .	26

## 2 Modellierung von Systemen mit verteilten Parametern

### 2.1 Modellierung in ortsfesten Koordinaten

#### 2.1.1 Bilanzgleichungen im $\mathbb{R}^3$

- Medien mit fester Lage und Ausdehnung  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  (Berandung  $\delta\Omega$ ) im Raum
- Addressierung eines Punktes durch Ortsvektor  $\mathbf{z} \in \Omega$
- Bilanzierung der Speichergröße  $S$  mit Dichtefunktion  $s$  über beliebiges raumfestes Volumen  $V \in \Omega$  mit Berandung  $\delta\Omega$

Speichergrößenwert in  $V$ :

$$S_V = \int_V s(\mathbf{z}, t) dV \quad (1)$$

Zeitableitung:

$$\dot{S}_V = \int_V \frac{\partial s(\mathbf{z}, t)}{\partial t} dV \quad (2)$$

Ursache der Änderung von  $S_V$ :

- Quellendichte  $p$  im Inneren von  $V$
- Zustrom über den Rand (gerichtete Flussdichte  $\mathbf{q}$ )

$$\frac{dS_V}{dt} = \int_V p(\mathbf{z}, t) dV - \int_{\delta V} \langle \mathbf{q}(\mathbf{z}, t), \boldsymbol{\nu}_{\delta V}(\mathbf{z}) \rangle d\delta V \quad (3)$$

Aus dem Integralsatz von Gauss folgt:

$$\int_{\delta V} \langle \mathbf{q}(\mathbf{z}, t), \boldsymbol{\nu}_{\delta V}(\mathbf{z}) \rangle d\delta V = \int_V \operatorname{div} \mathbf{q}(\mathbf{z}, t) dV \quad (4)$$

also:

$$\frac{dS_V}{dt} = \int_V p(\mathbf{z}, t) - \operatorname{div} \mathbf{q}(\mathbf{z}, t) dV$$

mit (1) und (2)

$$0 = \int_V \left( \frac{\partial s(\mathbf{z}, t)}{\partial t} - p(\mathbf{z}, t) + \operatorname{div} \mathbf{q}(\mathbf{z}, t) \right) dV \quad (5)$$

Da Volumen beliebig muss der Integrand verschwinden

$$0 = \frac{\partial s(\mathbf{z}, t)}{\partial t} - p(\mathbf{z}, t) + \operatorname{div} \mathbf{q}(\mathbf{z}, t) \quad (6)$$

- Konkrete Aufgabenstellung definiert Zusammenhang zw.  $s$  und  $q$
- Zusätzlich zu stellen: Randbedingungen zur pDgl.
- Klassifikation der Randbedingungen:
  - Vorgabe der Speichergröße auf  $\delta\Omega \rightarrow$  Dirichlet
  - Vorgabe des Flusses auf  $\delta\Omega \rightarrow$  Neumann
  - Funktionaler Zusammenhang von  $s$  und  $q$  auf  $\delta\Omega \rightarrow$  gemischte RB

### 2.1.2 Bilanzgleichungen im $\mathbb{R}^1$

- Flussdichte  $\mathbf{q}(\mathbf{z}, t) \rightarrow$  Skalar  $q(\mathbf{z}, t) \in \mathbb{R}$
- Volumen  $V \rightarrow$  Intervall  $[a, b]$
- Randintegral (4)  $\int_{\delta V} \langle \mathbf{q}(\mathbf{z}, t), \boldsymbol{\nu}_{\delta V}(\mathbf{z}) \rangle d\delta V = q(b, t) - q(a, t) = \int_b^a \frac{\partial q(\mathbf{z}, t)}{\partial z} dz$

also statt (5)

$$\int_b^a \left( \frac{\partial s(\mathbf{z}, t)}{\partial t} - p(\mathbf{z}, t) + \frac{\partial q(\mathbf{z}, t)}{\partial t} \right) dz = 0 \quad (7)$$

pDgl.:

$$\frac{\partial s(\mathbf{z}, t)}{\partial t} - p(\mathbf{z}, t) + \frac{\partial q(\mathbf{z}, t)}{\partial t} \quad (8)$$

Faustregel: Zu einer pDgl.  $n$ -ter Ordnung im Ort müssen  $n$  unabhängige Randbedingungen vorgegeben werden.

## 2.2 Modellierung in materialfesten Koordinaten

- deformierbare Medien in der Mechanik
- materialfestes Koordinatensystem
  - $\rightarrow$  Addressierung eines Materialpunktes  $\mathbf{z}$  durch Ortsvektor  $\mathbf{x}(\mathbf{z}, t_0)$  in Referenzkonfiguration, die zu einem Zeitpunkt  $t_0$  angenommen wird:  $\mathbf{z} = \mathbf{x}(\mathbf{z}, t_0)$
- im deformierten Zustand  $\mathbf{z} \neq \mathbf{x}(\mathbf{z}, t_0)$
- Bilanzierung in materialfesten Volumen (Dichtefunktionen  $p, s, \mathbf{q}$  müssen in materialfesten Koordinaten gegeben sein)
- Gleichungen aus 2.1 gelten in materialfesten Koordinaten

## 2.3 Modellierung in raumfesten Koordinaten durch Bilanzierung über materialfestem Volumen

### 2.3.1 im $\mathbb{R}^3$

Ziel: Modellierung bewegter Medien in raumfestem Bezugssystem (z.B. Fluidmechanik)

- Addressierung eines Punktes  $P$  des Kontinuums  $\Omega$  durch den Ortsvektor  $\mathbf{r}$  in einer Referenzkonfiguration (Materialkoordinaten)
- Position von  $P$  zum Zeitpunkt  $t$  (Raumkoordinaten):  $\mathbf{z}(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}, t)$

Annahme:  $\phi$  ist zu jedem Zeitpunkt bezüglich  $\mathbf{r}$  umkehrbar (jedem Raumpunkt entspricht eindeutig ein Materialpunkt)

$$\mathbf{r} = \psi(\mathbf{z}, t)$$

Geschwindigkeit des Materialpunktes  $P$ :

$$\dot{\mathbf{z}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{r}, t)$$

Zuordnung der Geschwindigkeiten zu einem Raumpunkt  $\mathbf{z}$ :

$$\mathbf{v}(\mathbf{z}, t) := \dot{\mathbf{z}}(\psi(\mathbf{z}, t), t)$$

- Modellierung durch Bilanzierung einer Speichergröße  $S_{V_t}$  (Dichte:  $s(\mathbf{z}, t)$ ) über ein materialfestes Volumen  $V$ , das zum Zeitpunkt  $t$  das Volumen  $V_t$  einnimmt:

$$S_{V_t} = \int_{V_t} s(\mathbf{z}, t) dV_t$$

Integrationsgebiet  $V_t$  nicht konstant!

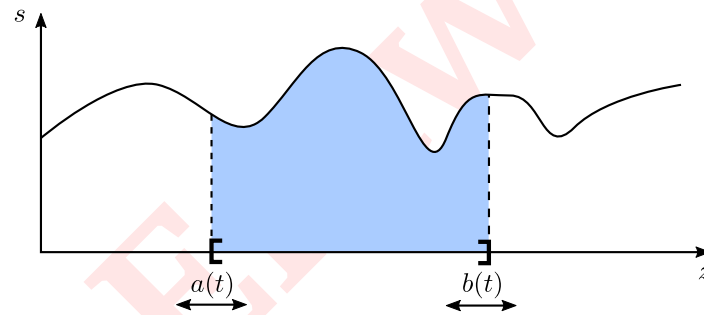
Deshalb wird die zeitliche Änderung von  $S_{V_t}$  mit dem Transportsatz von Reynolds beschrieben:

$$\dot{S}_{V_t} = \int_{V_t} \frac{\partial s(\mathbf{z}, t)}{\partial t} dV_t + \int_{\delta V_t} s(\mathbf{z}, t) \langle \boldsymbol{\nu}_{\delta V_t}(\mathbf{z}, t), \mathbf{v}(\mathbf{z}, t) \rangle d\delta V_t$$

mit der Notation aus 2.1 ergibt sich:

$$\frac{\partial s(\mathbf{z}, t)}{\partial t} - p(\mathbf{z}, t) + \operatorname{div} \mathbf{q}(\mathbf{z}, t) + \operatorname{div} \mathbf{s}(\mathbf{z}, t) \mathbf{v}(\mathbf{z}, t) = 0 \quad (9)$$

### 2.3.2 im $\mathbb{R}^1$



- Wert der Bilanzgröße durch Integration über das mitbewegte Intervall  $V_t = [a(t), b(t)]$

$$S_{V_t} = \int_{a(t)}^{b(t)} s(z, t) dz$$

Ableitung der Grenzen:

$$\frac{\partial a(t)}{\partial t} = v(a(t), t) \quad \frac{\partial b(t)}{\partial t} = v(b(t), t)$$

statt Anwendung des Transportsatzes von Reynolds

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} S_{V_t} &= \frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} s(z, t) dz = s(b(t), t) \dot{b}(t) - s(a(t), t) \dot{a}(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial s(z, t)}{\partial t} dz \\
 &= s(b(t), t) v(b(t), t) - s(a(t), t) v(a(t), t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial s(z, t)}{\partial t} dz \\
 &= \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial z} v(z, t) s(z, t) \frac{\partial s(z, t)}{\partial t} dz
 \end{aligned}$$

mit der Notation aus 2.1 ergibt sich:

$$\frac{\partial s(z, t)}{\partial t} - p(z, t) + \frac{\partial}{\partial z} (v(z, t) s(z, t) + q(z, t)) = 0 \tag{10}$$

### 3 Klassifikation partieller Differentialgleichungen

Erinnerung: Methoden der Charakteristiken zur Lösung pDgl.

**Beispiel 3.1** Gesucht ist  $x(z, t)$   $z, t, x \in \mathbb{R}$

$$(1+x) \frac{\partial x}{\partial t} - (1+z) \frac{\partial x}{\partial z} = z - t$$

$$\Leftrightarrow (1+x) \frac{\partial x}{\partial t} - (1+z) \frac{\partial x}{\partial z} - z + t = 0$$

Ansatz:  $z = z(s)$ ,  $t = t(s)$ ,  $x = x(s) = x(z(s), t(s))$  Es gilt:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{dt}{ds}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial x}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial x}{\partial t} \frac{dt}{ds} - \frac{dx}{ds} = 0$$

Markieren in beiden Gleichungen, was gleichgesetzt wird

Offenbar muss gelten:

$$\frac{dt}{ds} = 1 + t$$

$$\frac{dz}{ds} = -(1+z)$$

$$\frac{dx}{ds} = z - t$$

Dieses Gls. nennt man charakteristisches Dgl. System Lösung (charakteristische Kurven):

$$t(s) = C_1 e^s - 1$$

$$z(s) = C_2 e^{-s} - 1$$

$$x(s) = C_3 - C_2 e^{-s} - C_1 e^s$$

Es gilt:

$$e^s = \frac{t+1}{C_1} = \frac{C_2}{z+1}$$

$$\Leftrightarrow (t+1)(z+1) = C_1 C_2 =: C$$

ferner:

$$x = C_3 - (z+1) - (t+1)$$

$$x + z + t = C_3 - 2 =: d$$

Eine Lösung:

$$x(z, t) = -z - t + d$$

Allgemein:  $x = \phi((z+1)(t+1), x+z+t)$  ist Lösung mit beliebiger

$\underbrace{C^1}_{1\text{-mal stetig diffbar}} \text{-Fkt. : } \phi :$

$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

### 3.1 Charakteristika von Gleichungen erster Ordnung

Ausgangspunkt:

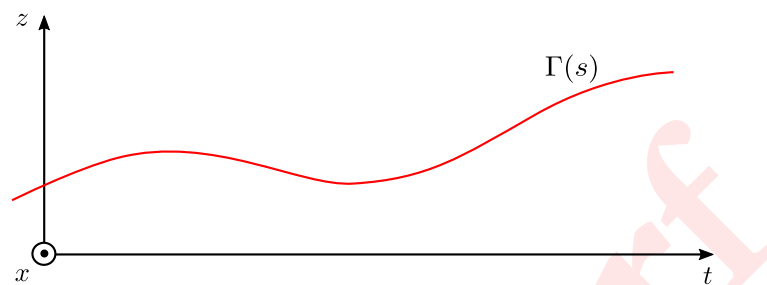
$$a(x(z, t), z, t) \frac{\partial x(z, t)}{\partial z} + b(x(z, t), z, t) \frac{\partial x(z, t)}{\partial t} = c(x(z, t), z, t) \quad (1)$$

Dabei ist  $x$  eine Größe nach der aufgelöst werden muss. Für eine beliebige Kurve

$$\Gamma : s \mapsto (z, t) = (a(s), b(s))$$

wird eine Lösung von (1) vorgegeben:

$$x(a(s), b(s)) = h(s) \quad (2)$$



Frage: Berechnung der Ableitungen  $\frac{\partial x(z, t)}{\partial z}$  und  $\frac{\partial x(z, t)}{\partial t}$  auf  $\Gamma$  aus  $h$  möglich?

Vorgehen: Differenzieren von (2) nach  $s$

$$\frac{dh(s)}{ds} = \frac{\partial x(z, t)}{\partial z}(\alpha(s), \beta(s))\alpha'(s) + \frac{\partial x(z, t)}{\partial t}(\alpha(s), \beta(s))\beta'(s)$$

Zusammen mit (1) folgt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial x}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ h' \end{pmatrix} \quad (3)$$

Kann nicht aufgelöst werden (Matrix nicht regulär), nennt man die Kurve  $\Gamma$  charakteristisch.

Prüfung der Singularität von  $\mathbf{C}$  wenn Zeilen linear abhängig sind

$$\alpha' = \frac{dz}{ds} = f_d a|_{\Gamma} \quad \beta' = \frac{dt}{ds} = f_d b|_{\Gamma} \quad (4)$$

mit der beliebigen Funktion  $f_d$ .

**Definition 3.1** Eine nichttriviale Kurve  $\Gamma : s \mapsto (\alpha(s), \beta(s)) \in \mathbb{R}^2$  heißt charakteristische Projektion zur pDgl. (1), wenn (4) mit einer beliebigen Funktion  $f_d$  gilt.

Charakteristiken:

Differenz der Zeilen von (3) ergibt:

$$\frac{dx}{ds} \Big|_{\Gamma} = h' = f_d c|_{\Gamma}$$



Lösung der Kurve  $\Gamma$  (entlang der Projektion) genügt der Dgl. Es folgt mit (4) das charakteristische Dgl.-System zu (1) ( $f_d = 1$ , da beliebig):

$$\frac{dz}{ds} = a \quad \frac{dt}{ds} = b \quad \frac{dx}{ds} = c \quad (5)$$

Lösungen  $s \mapsto (t, z, x)$  des charakteristischen Systems (5) heißen charakteristische Kurven zu (1).

Entwurf

### 3.2 Charakteristiken und Klassifikation von Gleichungssystemen 1. Ordnung

Ausgangspunkt:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}(z, t)) \frac{\partial \mathbf{x}(z, t)}{\partial z} + \mathbf{B}(\mathbf{x}(z, t)) \frac{\partial \mathbf{x}(z, t)}{\partial t} = \mathbf{c}(\mathbf{x}(z, t), z, t) \quad (6)$$

$$\text{kurz: } \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{x}(z, t)}{\partial z} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{x}(z, t)}{\partial t} = \mathbf{c} \quad (6')$$

Annahme:

$$\det(\mu \mathbf{A} + \nu \mathbf{B}) \neq 0$$

$\mu, \nu \in \mathbb{R} \rightarrow$  Regularität von (6). Charakteristiken: Eine Kurve  $\Gamma : s \mapsto (\alpha(s), \beta(s)) = (z, t)$  ist eine charakteristische Projektion zu (6), wenn es nicht möglich ist aus

$$\mathbf{x}(\alpha(s), \beta(s)) =: \mathbf{h}(s) \quad (7)$$

die Ableitungen  $\frac{\partial \mathbf{x}(z, t)}{\partial z}, \frac{\partial \mathbf{x}(z, t)}{\partial t}$  auf  $\Gamma$  zu berechnen. Differenzieren von (7):

$$\frac{\partial \mathbf{x}(\alpha(s), \beta(s))}{\partial z} \alpha'(s) + \frac{\partial \mathbf{x}(\alpha(s), \beta(s))}{\partial t} \beta'(s) = \mathbf{h}'(s)$$

ergibt mit (6')

$$\mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{c} \quad (8a)$$

$$\alpha' \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} + \beta' \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \mathbf{h}' \quad (8b)$$

Beobachtung:  $\alpha', \beta'$  können nicht verschwinden.

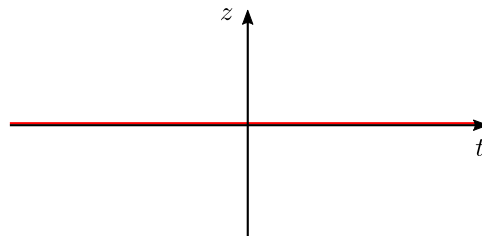
Fall 1:  $\alpha' \neq 0$   $(8a)\alpha - (8b)\mathbf{A} : (\alpha' \mathbf{B} - \beta' \mathbf{A}) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = \alpha' \mathbf{c} - \mathbf{A} \mathbf{h}'$

Fall 2:  $\beta' \neq 0$   $(8a)\beta - (8b)\mathbf{B} : (\beta' \mathbf{A} - \alpha' \mathbf{B}) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} = \beta' \mathbf{c} - \mathbf{B} \mathbf{h}'$

Damit  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}$  bzw.  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$  nicht bestimmt werden können, muss gelten:

$$\det(\beta' \mathbf{A} - \alpha' \mathbf{B}) \stackrel{!}{=} 0 \quad (9)$$

Für Charakterisierung wird folgender Spezialfall betrachtet: Untersuchung der Kurve  $s \mapsto (0, s)$ . Diese Kurve soll keine Charakteristik sein.



Dann folgt für Charakteristik  $\alpha(s) \neq 0 \xrightarrow{(9)} \text{Multiplikation von (6) mit } \mathbf{A}^{-1}$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} = - \underbrace{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}}_{\mathbf{B}^*} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \underbrace{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{c}}_{\mathbf{c}^*}$$

aus (9) folgt:

$$\det(\beta' \mathbf{I}_n - \alpha' \mathbf{B}^*) = 0$$

da  $\alpha' \neq 0$

$$\det \left( \underbrace{\frac{\alpha'}{\beta'}}_{\lambda} \mathbf{I}_n - \mathbf{B}^* \right) = 0 \text{ mit } \beta(s) = t(s) \quad \beta' = \frac{dt}{ds}$$

$$\alpha(s) = z(s) \quad \alpha' = \frac{dz}{ds}$$

$\lambda = \frac{dt}{dz}$  sind somit die Eigenwerte von  $\mathbf{B}^* = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$ . Klassifikation:

- alle Eigenwerte sind komplex  $\rightarrow$  elliptisches System (z.B. örtlich 2-dim stationäre Probleme, d.h.  $t$  ist 2. Ortskoordinate)
- alle Eigenwerte reel, zu jedem Eigenwert existiert ein Eigenvektor,  $\mathbf{B}^*$  ist diagonalisierbar  $\rightarrow$  hyperbolisches System
- $\mathbf{B}^*$  besitzt nur einen reellen Eigenvektor  $\rightarrow$  parabolisches System

parabolisch/hyperbolisch: dynamische Phänomene  
Mischtypen möglich, physikalisch sinnvoll: hyperb.-parab.

### 3.3 Klassifikation und Charakteristiken von Gleichungen 2. Ordnung

Ausgangspunkt: Skalare pDgl. 2. Ordnung (jetzt: Gl. 10)

$$a \frac{\partial^2 x}{\partial^2 z} + 2b \frac{\partial^2 x}{\partial z \partial t} + c \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = d \quad (10)$$

( $a, b, c, d$  hängen von  $z, t, x, \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial t}$  ab)  
Vorgabe von  $x, \frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial t}$  auf

$$\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ mit } s \mapsto (\alpha(s), \beta(s)) = (z, t)$$

mit

$$\alpha(s), \beta(s) = h(s) \quad (11a)$$

$$\frac{\partial x}{\partial z}(\alpha(s), \beta(s)) = \phi(s) \quad (11b)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t}(\alpha(s), \beta(s)) = \psi(s) \quad (11c)$$

Frage: Wann können  $\frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z \partial t} = \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z \partial z}, \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial t^2}$  auf  $\Gamma$  aus  $h, \phi, \psi$  berechnet werden? Es gilt:

$$(11a) \quad h'(s) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} \alpha' + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \beta' = \varphi(s) \alpha'(s) + \psi(s) \beta'(s)$$

$$(11b) \quad \varphi'(s) = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial z^2} \alpha' + \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial z \partial t} \beta'$$

$$(11c) \quad \psi'(s) = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial z \partial t} \alpha' + \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} \beta'$$

aus (11b), (11c) und (10) folgt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & 2b & c \\ \alpha' & \beta' & 0 \\ 0 & \alpha' & \beta' \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial z \partial t} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ \varphi' \\ \psi' \end{pmatrix} \quad (12)$$

charakteristisch  $\Rightarrow \det(\mathbf{M}) = 0$

$$\Rightarrow a\beta'^2 - 2b\alpha'\beta' + c\alpha'^2 = 0 \quad (13)$$

Spezialfall (wie in 3.2) Betrachtung von Charakteristiken mit  $\alpha'(s) \neq 0$  und zusätzlich  $z = \alpha(s) = s$

$$\Rightarrow a\beta' - 2b\alpha'\beta' + c\alpha'^2 = 0 \mid \cdot \frac{1}{\alpha'} (= 1)$$

$$a \frac{\beta'^2}{\alpha'^2} - 2b \frac{\beta'}{\alpha'} + c = 0$$

$$a\lambda^2 - 2b\lambda + c = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{b}{a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

$$b^2 - ac > 0$$

reelle Lsg., hyperbolisch

$$b^2 - ac < 0$$

konj. kompl. Lsg., elliptisch

$$b^2 = ac$$

parabolisch

## 4 Steuerungsentwurf

### 4.1 Motivation Steuerungsentwurf

⇒ Folien

### 4.2 (Differentialle) Flachheit konzentriertparametrischer Systeme

Modell Feder-Masse-Schwinger

$$m\ddot{x}(t) + \sigma \frac{x(t)}{l} = u(t)$$

Stellgröße  $u$  ergibt sich direkt aus der vertikalen Auslenkung  $x$  und deren zweiter Ableitung  $\ddot{x}$ .  
Damit ist  $x$  ein flacher Ausgang  $y$ . Mithin gilt für die Steuerung:

$$u_{ref}(t) = m\ddot{y}_{ref}(t) + \frac{\sigma}{l}y_{ref}(t)$$

Trajektorienplanung für  $y_{ref} : t \mapsto y_{ref}(t)$  muss zweimal stetig differenzierbar sein.

#### Beispiel 4.1

$$y_{ref}(t) = \begin{cases} y_0 & t < 0 \\ y_0 + (y_1 - y_0)\varphi(t/t^*) & t \in [0, t^*] \\ y_1 & t > t^* \end{cases}$$

mit  $\varphi(\tau) = 10\tau^3 - 15\tau^4 + 6\tau^5$  für Übergang von  $y_0$  auf  $y_1$ , innerhalb der Zeit  $t^*$ .

*Abbildung fehlt*

Reglerentwurf:

1. Vorgabe einer Fehlerdynamik:

$$\ddot{\tilde{y}}(t) + k_1\dot{\tilde{y}}(t) + k_0\tilde{y}(t) = 0, \quad \tilde{y} = y - y_{ref}$$

$$\ddot{y} = \ddot{y}_{ref} - k_1\dot{\tilde{y}} - k_0\tilde{y}$$

2. ins Modell eingesetzt:

$$u = m(\ddot{y}_{ref} - k_1\dot{\tilde{y}} - k_0\tilde{y}) + \frac{\sigma}{l}y$$

Verteiltparametrisches Beispiel:

**Beispiel 4.2** Schwingende Saite (Modellbildung s. Folie)

$$\rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}(z, t) - \sigma \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(z, t) = 0$$

$$\text{mit RB: } x(0, t) = 0, \quad \sigma \frac{\partial x}{\partial z}(l, t) = u(t)$$

Flacher Ausgang:  $y(t) = \frac{\partial x}{\partial z}(0, t)$  aus Grenzübergang Modellbildung (s. Folie)

Weiteres Vorgehen: Wenn  $y$  bekannt ist, können  $x(0, t)$  (aus RB) und  $\frac{\partial x}{\partial z}(0, t)$  (aus Def. von  $y$ ) berechnet werden.

Probleme:

- Rekursion wie im konzentriertparametrischen Fall zur Berechnung der Werte am rechten Rand ( $z = l$ ) nicht möglich
  - stattdessen: Berechnung der Lösung der pDgl. aus bekannten Randtrajektorien für  $t \mapsto x(0, t)$  und  $t \mapsto \frac{\partial x}{\partial z}(0, t)$  nötig.
- $\Rightarrow$  Cauchy'sche Randwertaufgabe (sämtliche RB am gleichen Rand vorgegeben)
- $\Rightarrow$  Lösung der Randwertaufgabe und Auswertung der physikalischen Randbedingungen liefert Stellgrößenverlauf.

Thema im Folgenden: Transformation einer gegebenen RWA auf eine Cauchy'sche RWA durch Einführung eines flachen Ausgangs.

### 4.3 Flacher Ausgang für eine Klasse von Randwertaufgaben (RWA)

Ausgangspunkt:  $n$  pDgl. 1. Ordnung bezüglich  $z$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}(z, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(z, t), \ddot{\mathbf{x}}(z, t), \ddot{\mathbf{x}}(z, t), \dots) \quad (1)$$

$$\hat{=} \frac{\partial^n x}{\partial z^n}(z, t) = f\left(x(z, t), \frac{\partial x}{\partial z}(z, t), \dots, \frac{\partial^{n-1} x}{\partial z^{n-1}}(z, t), \dot{x}(z, t), \ddot{x}(z, t), \dots\right) \quad (1')$$

Randbedingungen: Modell  $n$ -ter Ordnung benötigt  $n$  Randbedingungen (RB)

1. vollständig gesteuerte RB

o.B.d.A. bei  $z = 0$ :

$m$  dieser RB mit  $m$  Stelleingriffen in  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$  bei  $z=0$ :

$\mathbf{R}_0(\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(0, t), \dot{\mathbf{x}}(0, t), \dots) = 0$  mit

$$\mathbf{R}_0 = (R_{0,1}, \dots, R_{0,m})^T \quad (2a)$$

können nach  $\mathbf{u}$  aufgelöst werden, dh.  $\text{rang}(\frac{\partial \mathbf{R}_0}{\partial \mathbf{u}}) = m$

Interpretation:  $\mathbf{x}(0, t)$  ist flacher Ausgang des Systems (2a), denn  $\mathbf{u}$  lässt sich aus  $\mathbf{x}(0, t)$  und dessen Ableitungen integrallos berechnen.

2. vollständig differentiell paramterierbare RB

o.B.d.A. bei  $z = l$ :

$n - m$  RB bei  $z = l$

$\mathbf{R}_l(\mathbf{x}(l, t), \dot{\mathbf{x}}(l, t), \dots) = 0$  mit

$$\mathbf{R}_l = (R_{l,1}, \dots, R_{l,n-m})^T \quad (2b)$$

können nach  $\mathbf{x}$  aufgelöst werden, dh.  $\text{rang}(\frac{\partial \mathbf{R}_l}{\partial \mathbf{x}}) = n - m$

Annahme: es existiert ein  $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t))^T$  mit

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}\left(\mathbf{x}(l, t), \dot{\mathbf{x}}(l, t), \dots\right) \quad (3)$$

sodass gilt:

$$\mathbf{x}(l, t) = \mathbf{h}\left(\mathbf{y}(t), \dot{\mathbf{y}}(t), \dots\right) \quad (4)$$

Interpretation  $\mathbf{y}$  ist flacher Ausgang des konzentriertparametrischen Systems (2b)

Abbildung fehlt

Entwurf

#### 4.4 Lösung der Cauchy'schen Randwertaufgabe für hyperbolische Systeme

Ausgangspunkt:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}(z, t) + \mathbf{B}(z) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(z, t) = \mathbf{C}(z) \mathbf{x}(z, t) \quad (5)$$

mit  $\mathbf{x}(z, t) \in \mathbb{R}^n$  und hyperbolisch, da EW von  $\mathbf{B}(z)$  reell und verschieden.

Ziel: Berechnung einer Lösung  $(z, t) \mapsto \mathbf{x}(z, t)$  aus bekanntem Verlauf  $t \mapsto \mathbf{x}(z_0, t)$  (z.B.  $z_0 = l$ )

Erinnerung: Eigenwerte  $\lambda_1(z), \dots, \lambda_n(z)$  der Matrix  $\mathbf{B}(z)$  mit  $z = [0, l]$  entsprechen Anstiegen der Charakteristiken, da System hyperbolisch  
char. Projektion

Spannen die Eigenvektoren  $\mathbf{r}_1(z), \dots, \mathbf{r}_n(z)$  von  $\mathbf{B}(z)$  den  $\mathbb{R}^n$  auf und  $\mathbf{B}(z)$  ist mittels  $\mathbf{T} = (\mathbf{r}_1(z), \dots, \mathbf{r}_n(z))$  diagonalisierbar:

$$\mathbf{\Lambda}(z) = \mathbf{T}^{-1}(z) \mathbf{B}(z) \mathbf{T}(z) = \begin{pmatrix} \lambda_1(z) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n(z) \end{pmatrix}$$

Transformation von (5) auf hyperbolische Normalform durch Wechsel der abhängigen Veränderlichen

$$\mathbf{x}(z, t) = \mathbf{T}(z) \tilde{\mathbf{x}}(z, t)$$

Einsetzen in (5) liefert die hyperbolische Normalform

$$\begin{aligned} & \mathbf{T}(z) \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial z}(z, t) + \frac{\partial \mathbf{T}(z)}{\partial z} \tilde{\mathbf{x}}(z, t) + \mathbf{B}(z) \mathbf{T}(z) \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial t}(z, t) = \mathbf{C}(z) \mathbf{T}(z) \tilde{\mathbf{x}}(z, t) \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial z}(z, t) + \mathbf{T}^{-1}(z) \frac{\partial \mathbf{T}(z)}{\partial z} \tilde{\mathbf{x}}(z, t) + \underbrace{\mathbf{T}^{-1}(z) \mathbf{B}(z) \mathbf{T}(z)}_{=: \mathbf{\Lambda}(z)} \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial t}(z, t) = \mathbf{T}^{-1}(z) \mathbf{C}(z) \mathbf{T}(z) \tilde{\mathbf{x}}(z, t) \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial z}(z, t) + \mathbf{\Lambda}(z) \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial t}(z, t) = \underbrace{(\mathbf{T}^{-1}(z) \mathbf{C}(z) \mathbf{T}(z) - \mathbf{T}^{-1}(z))}_{=: \tilde{\mathbf{C}}} \tilde{\mathbf{x}}(z, t) \\ \Leftrightarrow & \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial z}(z, t) + \mathbf{\Lambda}(z) \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial t}(z, t) = \tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{x}}(z, t) \end{aligned} \quad (6)$$

schön, weil

$$\begin{aligned} \tilde{x}'_1 + \lambda_1 \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{c}_1^T \tilde{\mathbf{x}} & \tilde{c}_i^T & \text{ i-te Zeile von } \tilde{\mathbf{C}} \\ \tilde{x}'_2 + \lambda_2 \dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{c}_2^T \tilde{\mathbf{x}} \\ & \vdots \\ \tilde{x}'_n + \lambda_n \dot{\tilde{x}}_n &= \tilde{c}_n^T \tilde{\mathbf{x}} \end{aligned}$$



Charakteristik durch  $(z_0, t_0)$ :

$$z \mapsto t_i(z; z_0) + t_0 \quad \text{mit} \quad \frac{dt_i}{dz}(z; z_0) = \lambda_i(z) \quad (7)$$

Ableitung von  $\tilde{x}_i$   $i = 1, \dots, n$  entlang der zugehörigen Charakteristik durch  $(z_0, t_0)$

$$\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial z}(z, t_i(z; z_0) + t_0) + \lambda_i(z) \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial t}(z, t_i(z; z_0) + t_0) = \tilde{c}_i^T(z) \tilde{x}_i(z, t_i(z; z_0) + t_0) - \tilde{x}_i(z_0, t_0) \quad (8)$$

Integration  $\int_{z_0}^z$  liefert:

$$\tilde{x}_i(z, t_i(z; z_0) + t_0) - \tilde{x}_i(z_0, t_0) = \int_{z_0}^z \tilde{c}_i^T(\xi) \tilde{x}_i(\xi, t_i(\xi; z_0) + t_0) - \tilde{x}_i(z_0, t_0) d\xi$$

da  $t = t_i(z; z_0) + t_0$

$$\tilde{x}_i(z, t) - \tilde{x}_i(z_0, t - t_i(\xi; z_0)) = \int_{z_0}^z \tilde{c}_i^T(\xi) \tilde{x}_i(\xi, t) - \tilde{x}_i(z_0, t_0) d\xi \quad (9)$$

**Satz 4.1** (ohne Beweis) Das System (9) von Integralgleichungen besitzt für beliebige beschränkte Randtrajektorien  $t \mapsto \tilde{x}_i(z_0, t)$  eine eindeutige Lösung  $(z, t) \mapsto \tilde{\mathbf{x}}(z, t)$ .

Mit  $\mathbf{x}(z, t) = \mathbf{T}(z) \tilde{\mathbf{x}}(z, t)$  folgt die Lösung der Cauchyschen Randwertaufgabe.

Numerische Lösung durch Diskretisierung des Integrals (Euler-Schema)

1. Zerlegung von  $[0, l]$  in  $N + 1$  Intervalle  $[z_k, z_{k+1}]$  der Länge  $\Delta z$

$$\tilde{x}_i(z_{k+1}, t) - \tilde{x}_i(z_k, t - t_i(z_{k+1}; z_k)) = \int_{z_k}^{z_{k+1}} \tilde{c}_i^T(\xi) \tilde{\mathbf{x}}(\xi, t - t_i(z_{k+1}; \xi)) d\xi$$

2. Approximation  $t_i(z_{k+1}; z_k) \approx \Delta z \lambda_i(z)$

$$\begin{aligned} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \tilde{c}_i^T(\xi) \tilde{\mathbf{x}}(\xi, t - t_i(z_{k+1}; \xi)) d\xi &\approx \Delta z \tilde{c}_i^T(z_k) \tilde{\mathbf{x}}(z_k, t - t_i(z_{k+1}; z_k)) \\ \Rightarrow \tilde{x}_i(z_{k+1}, t) &= \tilde{x}_i(z_k, t - \Delta z \lambda_i(z_k)) + \Delta z \tilde{c}_i^T(z_k) \tilde{\mathbf{x}}(z_k, t - \Delta z \lambda_i(z_k)) \end{aligned} \quad (10)$$

Spezialfall:  $\tilde{c}_i^T = 0$  Lösung ergibt sich durch eine Zeitverschiebung der Randtrajektorie (Totzeiten, Prädiktion)

**Beispiel 4.3** Elektrische Übertragungsleitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z}(z, t) + L \frac{\partial i}{\partial t}(z, t) + Ri(z, t) &= 0 \\ \frac{\partial i}{\partial z}(z, t) + C \frac{\partial u}{\partial t}(z, t) + Gu(z, t) &= 0 \end{aligned}$$

mit  $\mathbf{x}(z, t) = \begin{pmatrix} u(z, t) \\ i(z, t) \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}(z, t) + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(z, t) + \mathbf{C} \mathbf{x}(z, t) = 0$$

mit  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & 0 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & R \\ G & 0 \end{pmatrix}$

Vorgabe  $\mathbf{x}(z_0, t) =: \mathbf{x}_0(t)$

gesucht:  $\mathbf{x}(0, t) =: u_0(t)$

Eigenwerte von  $\mathbf{B}$ :  $\lambda_1 = \tau$   $\lambda_2 = -\tau$  mit  $\tau = \sqrt{LC}$

Eigenvektoren von  $\mathbf{B}$ :  $\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{L} \\ \sqrt{C} \end{pmatrix}$   $\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{L} \\ -\sqrt{C} \end{pmatrix}$

Transformation:  $\mathbf{x}(z, t) = \mathbf{T}(z)\tilde{\mathbf{x}}(z, t)$

mit  $\mathbf{T}(z) = \begin{pmatrix} \sqrt{L} & \sqrt{L} \\ \sqrt{C} & -\sqrt{C} \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{T}^{-1}(z) = \frac{1}{2\sqrt{LC}} \begin{pmatrix} \sqrt{C} & \sqrt{L} \\ \sqrt{C} & -\sqrt{L} \end{pmatrix}$

hyperbolische Normalform:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial z}(z, t) + \tau \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}}{\partial t} = \frac{\tau}{2} \begin{pmatrix} -\alpha \tilde{x}_1 + \beta \tilde{x}_2 \\ -\beta \tilde{x}_1 + \alpha \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{R}{L} + \frac{G}{C} \quad \beta = \frac{R}{L} - \frac{G}{C}$$

Charakteristiken

$$\begin{aligned} (z_0, t_0) &\mapsto t_1(z; z_0) + t_0 \quad \text{mit} \quad \frac{dt_1}{dz}(z; z_0) = \tau \\ (z_0, t_0) &\mapsto t_2(z; z_0) + t_0 \quad \text{mit} \quad \frac{dt_2}{dz}(z; z_0) = -\tau \end{aligned}$$

auf den Charakteristiken gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(z, t) &= \tilde{x}_1(z_0, t - \tau(z - z_0)) + \int_{z_0}^z (-\alpha \tilde{x}_1(\xi, t - \tau(z - \xi)) + \beta \tilde{x}_2(\xi, t - \tau(z - \xi))) \\ \tilde{x}_2(z, t) &= \tilde{x}_2(z_0, t + \tau(z - z_0)) + \int_{z_0}^z (-\beta \tilde{x}_1(\xi, t + \tau(z - \xi)) + \alpha \tilde{x}_2(\xi, t + \tau(z - \xi))) \end{aligned}$$

## 4.5 Lösung der Cauchy'schen Randwertaufgabe für parabolische Systeme

### 4.5.1 Mathematische Vorbereitungen

$\Gamma$ -Funktion: Verallgemeinerung der Fakultät für nicht ganzzahlige Argumente.

$\Gamma(i+1) = i!$   $i \in \mathbb{N}$  genügt der Funktionalgleichung:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \Gamma(1) = 1$$

**Definition 4.1** *Gevrey-Klasse und -Ordnung.* Die Funktion  $f$  sei auf dem Intervall  $\Omega \in \mathbb{R}$  definiert und dort beliebig oft differenzierbar. Dann gehört  $f$  auf  $\Omega$  zur kleinen Gevrey-Klasse  $G_\alpha(\mathcal{I})$  der Ordnung  $\alpha$ , wenn zu jedem  $\gamma > 0$  eine Konstante  $M$  derart existiert, dass gilt:

$$\sup_{t \in \mathcal{I}} \frac{\partial^i f}{\partial t^i}(t) < M\gamma^i \Gamma(\alpha i + 1)$$

(alle Ableitungen für alle  $t$  dürfen die Schranke (rechte Seite) nicht überschreiten)

### Beispiel 4.4

$$\varphi_\gamma = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{2t-1}{(4t(1-t))^\sigma} \right) \right) & t \in [0, 1] \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

gehört zur kleinen Gevrey-Klasse der Ordnung  $\alpha$  für  $\sigma > \frac{1}{\alpha-1}$

Bei Interpolation treten in den Ableitungen bestimmter Ordnung in den Randpunkten Sprünge auf. Hier muss aber auch bei der  $\infty$ . Ableitung kein Sprung sein.

### 4.5.2 Existenz der Lösung

Ausgangspunkt: homogenes lineares pDgl-System aus  $n$  Gleichungen 1. Ordnung

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}(z, t) + \mathbf{B}(z) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}(z, t) = \mathbf{C}(z) \mathbf{x}(z, t) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (11)$$

Ziel: Berechnung der Lösung  $(z, t) \mapsto \mathbf{x}(z, t)$  aus bekanntem Verlauf  $t \mapsto \tilde{x}(z_0, t)$  mit bspw.  $z_0 = l$

Annahme:  $\mathbf{B}$  hat nur einen Eigenwert  $\lambda = 0$  der algebraischen Vielfachheit  $n$

$\Rightarrow$  parabolisches System

geometrische Vielfachheit des Eigenwertes  $\lambda$  sei  $M = n - \text{rang}(\mathbf{B})$

$\Rightarrow M$  Eigenvektoren zur Matrix  $\mathbf{B}$

Folge: Es existiert eine matrixwertige Funktion

$$z \mapsto \mathbf{T}(z) \quad \mathbf{J}(z) = \mathbf{T}^{-1}(z) \mathbf{B}(z) \mathbf{T}(z)$$

mit  $\mathbf{J}$  in Jordan-Normalform

**Satz 4.2** (11) genügen den obigen Annahmen. Sei  $\hat{m}$  die maximale in  $\mathbf{J}(z)$  auftretende Länge eines Jordan-Blockes  $z \in [0, l]$  und für die Randtrajektorie gelte:

$$(x)(z_0, \bullet) \in G_0(\Gamma) \quad \text{mit} \quad \sigma = \frac{\hat{m}}{\hat{m} - 1}$$

Dann existiert eine eindeutige Lösung der Cauchy'schen Randwertaufgabe zu (11) mit Randbedingung bei  $z = z_0$

1. Abschätzung der maximalen Gevrey-Ordnung sehr konservativ, häufig höhere Ordnungen möglich
2. System der Form

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}(z, t) = \sum_{j=0}^{\beta} A_j(z) \frac{\partial^j \mathbf{x}}{\partial t^j}(z, t) \quad (12)$$

auf (11) zurückführbar

3. Bedingung für skalare Gleichungen der Form

$$\frac{\partial^n x}{\partial z^n}(z, t) = \sum_{i+\sigma_j < n} a_{i,j}(z) \frac{\partial^i}{\partial z^i} \frac{\partial^j x}{\partial t^j}(z, t) \quad (13)$$

$\sigma > 1$  Randtrajektorien aus  $G_\sigma(\Omega)$

Wenn wir die Vorgaben auf dem Rand entsprechender Gevrey-Ordnung wählen, gibt es eine Lösung

#### 4.5.3 Numerische Berechnung der Lösung

**Lösung durch Iteration** Integration von (13):

$$\mathbf{x}(z, t) = \mathbf{x}(z_0, t) + \sum_{j=0}^{\beta} \int_{z_0}^z A_j(\tilde{z}) \frac{\partial^j \mathbf{x}}{\partial t^j}(\tilde{z}, t) d\tilde{z}$$

**Lösung als Grenzwert:**

$$\mathbf{x}(z, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k(z, t)$$

der Iteration:

$$\mathbf{x}_{k+1}(z, t) = \mathbf{x}_k(z_0, t) + \sum_{j=0}^{\beta} \int_{z_0}^z A_j(\tilde{z}) \frac{\partial^j \mathbf{x}_k}{\partial t^j}(\tilde{z}, t) d\tilde{z}$$

**Vorsicht !** Zur Berechnung von  $\mathbf{x}_{k+1}(z, t)$  werden Zeitableitungen von  $\mathbf{x}_k(z, t)$  benötigt. Da  $k \rightarrow \infty$ , hängt Lösung von Ableitungen der Randtrajektorie  $\mathbf{x}(z_0, t)$  beliebig hoher Ordnung ab!

**Potenzreihenansatz** Ansatz für  $\mathbf{x}_k(z, t) = \sum_{i=0}^k C_i(t) \frac{(z-z_0)^i}{i!}$  und  $C_0(t) = \mathbf{x}(z_0, t)$ . Einsetzen in (13) liefert

$$C_k(z, t) = \sum_{j=0}^{\beta} A_j C_{k-1}^{(j)}(t)$$

Diskretisierung von (13) liefert:

$$\mathbf{x}(z + \Delta z, t) = \mathbf{x}(z, t) + \Delta z \sum_{j=0}^{\beta} A_j(z) \frac{\partial^j \mathbf{x}}{\partial t^j}(z, t)$$

In die Lösung gehen prinzipiell beliebig hohe Zeitableitungen der Randtrajektorie ein. Je nach Güte der Approximation (Anzahl der Iterationen, Index für Reihenabbruch, Größe von  $\Delta z$ ) muss nur eine entsprechende (endl.) Anzahl von Ableitungen der Randtrajektorie des flachen Ausgangs berechnet werden.

**Beispiel 4.5** Wärmeleitung

$$\frac{\partial x}{\partial t}(z, t) = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(z, t) \quad x - \text{Temperatur, } z \in [0, 1]$$

$x(0, t) = y(t)$  entspricht flachem Ausgang,  $\frac{\partial x}{\partial z}(0, t) = 0$  ideale Isolierung und Heizer bei  $z = 1$ :  $\frac{\partial x}{\partial z}(1, t) = f(x(1, t), u(t))$ . Rand vollständig aktuiert.

$$\begin{aligned} x(z, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} C_i(t) \frac{z^i}{i!} & \frac{\partial x}{\partial t}(z, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \dot{C}_i(t) \frac{z^i}{i!} \\ \frac{\partial x}{\partial z}(z, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} C_{i+1}(t) \frac{z^i}{i!} & \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(z, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} C_{i+2}(t) \frac{z^i}{i!} \end{aligned}$$

in pDgl. eingesetzt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \dot{C}_i(t) \frac{z^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} C_{i+2}(t) \frac{z^i}{i!}$$

Initialisierung über Randbedingung  $x(0, t) = y(t) \Rightarrow \boxed{C_0(t) = y(t)}$  und  $\frac{\partial x}{\partial z}(0, t) = 0 \Rightarrow \boxed{C_1(t) = 0}$

$$\begin{aligned} C_2(t) &= \dot{y}(t) \quad (i = 0) \\ C_3(t) &= 0 \quad (i = 1) \\ C_4(t) &= \ddot{y}(t) \quad (i = 2) \end{aligned}$$

$x(z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} y^{(i)}(t) \frac{z^{2i}}{(2i)!}$   
Stellgröße bei  $z = 1$ :

$$\begin{aligned} x(1, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y^{(i)}(t)}{(2i)!} \\ \frac{\partial x}{\partial z}(z, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y^{(i+1)}(t) \frac{z^{2i+1}}{(2i+1)!} \\ \frac{\partial x}{\partial z}(1, t) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{y^{(i+1)}(t)}{(2i+1)!} \end{aligned}$$

Diese Lösungen können nun in  $\frac{\partial x}{\partial z}(1, t) = f(x(1, t), u(t))$  eingesetzt werden um  $u(t)$  zu erhalten.

## 5 Methode der Modaltransformation

### 5.1 Einführung und Motivation

Worum geht es?

- lineare Randwertaufgabe  
Darstellung der Lösung als verallgemeinerte Fourierreihe bezüglich des Ortes
  - Koeffizienten der Fourierreihe  
genügen linearen gewöhnlichen Dgl.
  - Approximation der Randwertaufgabe durch Reihenabbruch  
*early lumping* → Untersuchung und Entwurf auf ortsdiskretem Modell
- ⇒ gewöhnliches Dgl. System (pro Koeffizient eine Dgl.)  
nutzbar für Simulation und Untersuchungen zu Stabilität, Steuerbarkeit, etc.

**Wärmeleiter**

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(z, t) + \frac{\partial x}{\partial t}(z, t) - \alpha(x(z, t) - T_u(t)) = 0$$

Randbed.:  $\frac{\partial x}{\partial z}(0, t) = 0 \quad \frac{\partial x}{\partial z}(1, t) = u(t)$   
 $x \hat{=}$  Temperatur

**Operatorformulierung**

$$x^*(t) = x(\cdot, t) \quad u^*(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ T_u(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{x}^*(t) = Ax^*(t) + Bu^*(t) \quad Rx^*(t) = R_u u^*(t)$$

mit

$$Ax^*(t) = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}(\cdot, t) - \alpha x(\cdot, t) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

und

$$Rx^*(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z}(0, t) \\ \frac{\partial x}{\partial z}(1, t) \end{pmatrix} \quad R_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Diagonalisierung gewöhnlicher Dgl.** Ausgangspunkt:

$$D_t x(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \quad (1a)$$

$$D_t := \frac{d}{dt} + \sum_{i=0}^{\gamma-1} c_i \frac{d^i}{dt^i} \quad c_i \in \mathbb{R} \quad (1b)$$

Annahme:  $A$  diagonalisierbar (Eigenvektoren von  $A$  spannen den  $\mathbb{R}^n$  auf)

$$\Lambda = T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad x = T\bar{x}, \bar{x} = T^{-1}x$$

$$D_t \bar{x}(t) = \Lambda \bar{x}(t) + \bar{B}u(t) \quad \bar{B} = TB$$

Dies führt auf System entkoppelter Dgl. in den Komponenten von  $\bar{x}$   
Erinnerung:

- Spalten  $r_1, \dots, r_n$  von  $T$  sind Rechtseigenvektoren von  $A$
- Zeilen  $l_1^T, \dots, l_n^T$  von  $T$  sind Linkseigenvektoren von  $A$

Eigenwertaufgaben

$$Ar_i = \lambda_i r_i \quad A^T = \lambda_i l_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$\text{Orthogonalität: } \langle l_i, r_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Transformation  $x = T\bar{x}$  entspricht Darstellung von  $x$  als Linearkombination der Rechts-Eigenvektoren von  $A$ :

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i(t) r_i \quad (2)$$

**Interpretation der Entkopplung** Ausgangspunkt System (1)

Einsetzen der Zerlegung (2) in (1) und skalare Multiplikation mit Links-Eigenvektoren:

$$\sum_{i=1}^n D_t \bar{x}_i(t) \langle l_j, r_i \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i(t) \langle l_j, Ar_i \rangle + \langle l_j, Bu \rangle \quad j = 1, \dots, n$$

Ausnutzen der Orthogonalität und  $Ar_i = \lambda_i r_i$  liefert:

$$D_t \bar{x}_i(t) = \lambda_i \bar{x}_i(t) + \sum_{j=1}^m \bar{b}_{ij} u_j(t) \quad i = 1, \dots, n$$

$$u = (u_1, \dots, u_m)^T, B = (b_1, \dots, b_m), \bar{b}_{ij} = \langle l_i, b_j \rangle$$

**Modaltransformation im endlichdimensionalen** Koordinatenvektor  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}$   
Transformation  $x_i^* = \langle r_i, x \rangle \quad i = 1, \dots, n$  liefert *neue Koordinaten*  $\underbrace{x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)}_{\text{modale Koord.}} \in \mathbb{R}^n$  bzgl. der

Basis  $r_1, \dots, r_n$ .

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^* &= \lambda_1 x_1^* + f_1(u) \\ \dot{x}_2^* &= \lambda_2 x_2^* + f_2(u) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n^* &= \lambda_n x_n^* + f_n(u) \end{aligned}$$

Möglichkeit zur Approximation: Berücksichtigung von  $n^* < n$  akalaren Dgl., z.B., um nur die langsamen Vorgänge zu untersuchen.

## 5.2 Funktionaloperatoren und abstrakte Dgl.

Ziel: Randwertaufgabe so formulieren, wie im örtlich konzentrierten Fall

$$D_t x(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Was ist dann  $x(t)$ ? Wo ist  $z$ -Abhängigkeit?

Alternative Interpretation von  $x(z, t)$ :

- verteilte Systemvariablen sind ortsabhängige Funktionen aus einem Funktionenraum  $H$ , keine reellen Zahlen.
- Einträge von  $x(t)$  können jetzt Funktionen sein  

$$x(t) = x(\cdot, t) \hat{=} z\text{-abh. Funktion } x(t)(z).$$
- $x(t) \in \mathcal{X} = H^{n1} \times \mathbb{R}^{n2}$
- $n1$  Fkt.  $x_1(\cdot, t), \dots, x_{n1}(\cdot, t)$
- $n2$  reelle Zahlen  $\xi_1(t), \dots, \xi_{n2}(t)$ , so dass
- $x(t) = (x_1(\cdot, t), \dots, x_{n1}(\cdot, t), \xi_1(t), \dots, \xi_{n2}(t))$

Allgemeine Operatoren:

- $A : X \mapsto X, B : \mathbb{R}^m \mapsto X$
- $A, B$  lineare Abbildungen, allgemeiner als Matrizen.

Bsp. für Funktionenräume:

- stetige Funktionen  $C([a, b], \mathbb{K})$  im Intervall  $[a, b]$  auf dem stetige Fkt. mit Werten aus dem Körper  $\mathbb{K}$  definiert sind

Bsp. für lineare Abbildungen in Funktionenräumen:

- gewichtete Integration  $y(z) = \int_{\Omega} g(z, \xi) x(\xi) d\xi$  (Funktion  $\rightarrow$  Funktion)
- Multiplikation mit Gewichts fkt.  $y(z) = g(z)x$  (Zahl  $\rightarrow$  Funktion)



### 5.2.1 Abstrakte Dgl. für skalare Randwertaufgabe

Abstrakte Dgl. für  $\mathbf{x}(t) := \mathbf{x}(\cdot, t)$

$$D_t \mathbf{x}(t) = A \mathbf{x}(t) + B \mathbf{u}(t) \quad (4a)$$

$$\mathbf{x}(t) \in \underbrace{\mathbf{H}([a, b], \mathbb{R})}_{\mathbf{x}(t) \text{ aus Fkt.raum}}, \underbrace{u(t)}_{\text{reelle Zahl}} \in \mathbb{R}$$

mit den Operatoren

$$D_t \mathbf{x}(t) = \frac{d^\gamma \mathbf{x}}{dt^\gamma} + \sum_{i=0}^{\gamma-1} c_i \frac{d^i \mathbf{x}}{dt^i} \quad (4b)$$

$$A \mathbf{x} = \sum_{i=0}^{\alpha} a_i(\cdot) \frac{\partial^i \mathbf{x}}{\partial z^i}(\cdot, t) \quad c_0, \dots, c_{\lambda-1} \in \mathbb{R} \text{ konst.} \quad a_0, \dots, a_\alpha \text{ hinreichend glatt, } |a_\alpha(z)| > 0$$

Weil  $\mathbf{x}(t)$  eine Funktion ist, heißt die Dgl. abstrakt.

Randoperator:

$$(R\mathbf{x})(t) = R_u u(t) \quad (5a)$$

$$\text{mit } R\mathbf{x} = (R_1 \mathbf{x}, \dots, R_\alpha \mathbf{x})^T$$

$$(R_i \mathbf{x}) = \sum_{j=0}^{\alpha-1} \left( r_{0,i,j} \frac{\partial^j \mathbf{x}}{\partial z^j}(0, t) + r_{l,i,j} \frac{\partial^j \mathbf{x}}{\partial z^j}(l, t) \right) \quad (5b)$$

$$R_u = (r_{u,1}, \dots, r_{u,\alpha})^T \in \mathbb{R}^\alpha$$

## 5.3 Adjungierter Funktionaloperator

### 5.3.1 Innenprodukt (Skalarprodukt) (im $\mathbb{C}^n$ )

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \quad \text{mit } \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{C}^n, \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{C}^n$$

Eigenschaften des Skalarproduktes

1. bilinear

$$\begin{aligned} \langle x_1 + x_2, y \rangle &= \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle \\ \langle x, y_1 + y_2 \rangle &= \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle \\ \langle \alpha x, y \rangle &= \alpha \langle x, y \rangle = \langle x, \bar{\alpha} y \rangle \quad \alpha \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

2. kommutativ

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

3. positiv definit

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &> 0 \quad \forall x \neq 0 \\ \langle \vec{0}, \vec{0} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

**Definition 5.1 (Skalarprodukt)** Sei mit den Eigenschaften 1-3 heißt *Innenprodukt auf  $X$*

**Beispiel 5.1** gewichtetes Innenprodukt  $\in \mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i \bar{y}_i \quad \gamma_i > 0$$

Gewichtetes Innenprodukt im Raum  $H$  der auf  $[0, l]$  definierten komplexwertigen Funktionen:

$$\langle x, y \rangle := \int_0^l g(z) x(z) \bar{y}(z) dz \quad g(z) > 0$$

### 5.3.2 Adjungierter Differentialoperator

Erinnerung(endlichdim. Fall): linearer Operator (Matrix)

$$A : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$$

Standardskalarprodukt in Matrixschreibweise  $\langle x, y \rangle = y^T x$

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= y^T (Ax) \\ &= (y^T A)x \\ &= (A^T y)^T x \\ &= \langle x, A^T y \rangle \end{aligned}$$

Verallgemeinerung auf Funktionaloperatoren: Adjungierter Operator übernimmt die Rolle von  $A^T$

Besonderheit hier: Differentialoperator  $A$  und Randoperator  $R$  werden als Einheit aufgefasst.

**Definition 5.2** Sei  $X$  ein Innenproduktraum. Der *Operator  $(A^*, R^*)$*  heißt der zu  $(A, R)$  *adjungierte Operator* wenn  $\forall x \in X$  mit  $Rx = 0$  und genau alle  $x \in X$  mit  $R^*y = 0$  gilt.

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle \quad (6)$$

Dabei darf (3) für kein  $y$  mit  $R^*y \neq 0$  gelten. Falls  $R = R^*, A = A^* \Rightarrow$  *selbstadjungierter Operator*  $\hat{=}$  *symm. Matrizen*

Bestimmung des Adjungierten Differentialoperators

$$\begin{aligned} Ax &= \sum_{i=0}^{\alpha} a_i(\cdot) \frac{\partial^i x}{\partial z^i} \\ Rx &= \sum_{i=0}^{\alpha-1} r_{0,i,j} \frac{\partial^i x}{\partial z^i}(0) + r_{l,i,j} \frac{\partial^i x}{\partial z^i}(l) \end{aligned}$$

1. Skalare Multiplikation von  $Ax$  mit  $y$

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= \int_0^l \bar{y}(z) (Ax)(z) dz \\ &= \int_0^l \bar{y}(z) \sum_{i=0}^{\alpha} a_i(z) \frac{\partial^i x}{\partial z^i}(z) dz \end{aligned}$$

2. Elimination der Ableitungen der verteilten Größen durch (ggf. mehrfache) partielle Integration (es entstehen zusätzliche Randausdrücke)

$$\langle Ax, y \rangle = \sum_{i=0}^{\alpha} \left[ \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \frac{\partial^j}{\partial z^j} (a_i(z) \bar{y}(z)) \frac{\partial^{i-j-1} x}{\partial z^{i-j-1}}(z) \right]_0^l + \underbrace{\int_0^l \sum_{i=0}^{\alpha} (-1)^i \left( \frac{\partial^i}{\partial z^i} a_i(z) \bar{y}(z) \right) x(z) dz}_{=:\langle x, A^* y \rangle}$$

Es gilt

$$Ay^* = \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{j=0}^i (-1)^i \binom{i}{j} \bar{a}_i^{(i-j)} \frac{\partial^j y}{\partial z^j}$$

Umsortieren und Zusammenfassen:

$$A^* y = \sum_{i=0}^{\alpha} a_i^*(z) \frac{\partial^i y}{\partial z^i}$$

mit  $a_i^*(z) = \sum_{j=i}^{\alpha} (-1)^j \binom{j}{i} \bar{a}_j^{j-i}(z)$