

# Unidad 3

## Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

Cecilia Rapelli   Marcos Prunello

Año 2018

- **Objetivo:** examinar los aspectos numéricos que se presentan al resolver sistemas de ecuaciones lineales de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- $n$  ecuaciones,  $n$  incógnitas: sistema de orden  $n \times n$ .
- Los coeficientes  $a_{ij}$  y los términos independientes  $b_i$  son reales fijos.

- Representación matricial:  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , de dimensión  $n \times n$ ,  $n \times 1$  y  $n \times 1$ , respectivamente.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- Llamamos **matriz ampliada** o **aumentada** a:

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

- Un sistema de ecuaciones lineales se clasifica en:
  - **Compatible determinado:** tiene una única solución
  - **Compatible indeterminado:** tiene infinitas soluciones
  - **Incompatible:** no existe solución

**Teorema.** Las siguientes condiciones son equivalentes:

- El sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  tiene solución única (es compatible determinado).
- La matriz  $\mathbf{A}$  es invertible (existe  $\mathbf{A}^{-1}$ ).
- $\det \mathbf{A} \neq 0$ .
- El sistema  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  tiene como única solución  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

- Dos sistemas de orden  $n \times n$  son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto de soluciones.
- Existen ciertas transformaciones sobre las ecuaciones de un sistema que no cambian el conjunto de soluciones (producen un sistema equivalente):
  - **Intercambio**: el orden de las ecuaciones puede cambiarse.
  - **Escalado**: multiplicar una ecuación por una constante no nula.
  - **Sustitución**: una ecuación puede ser reemplazada por una combinación lineal de las ecuaciones del sistema (*teorema fundamental de la equivalencia*)
- Hacer ejemplo 1
- Realizar estas transformaciones sobre las ecuaciones es equivalente a realizar las mismas operaciones sobre las filas de la matriz aumentada.

- Notación que ayuda a expresar algoritmos con operaciones matriciales y facilita la escritura de los programas en IML.
- Dada una matriz  $\mathbf{Z}$  de dimensión  $n \times m$ , anotamos:
  - $z_{ij} = \mathbf{Z}[i, j]$ : elemento en la fila  $i$  y columna  $j$  de la matriz  $\mathbf{Z}$
  - $\mathbf{Z}[i, ]$ : vector fila de dimensión  $1 \times m$  constituido por la  $i$ -ésima fila de la matriz  $\mathbf{Z}$
  - $\mathbf{Z}[, j]$ : vector columna  $n \times 1$  constituido por la  $j$ -ésima columna de la matriz  $\mathbf{Z}$
  - $\mathbf{Z}[i, k : l]$ : matriz de dimensión  $1 \times (l - k + 1)$  constituida con los elementos  $z_{i,k}, z_{i,k+1}, \dots, z_{i,l}$  de la matriz  $\mathbf{Z}$ ,  $l \geq k$ .
  - $\mathbf{Z}[c : d, k : l]$ : matriz de dimensión  $(d - c + 1) \times (l - k + 1)$  constituida por la submatriz que contiene las filas de  $\mathbf{Z}$  desde la  $c$  hasta  $d$  y las columnas de  $\mathbf{Z}$  desde la  $k$  hasta la  $l$ ,  $d \geq c$ ,  $l \geq k$ .
- Dado un vector  $\mathbf{Z}$  de largo  $n$ , anotamos:
  - $\mathbf{Z}[i]$ : elemento  $i$ -ésimo del vector  $\mathbf{Z}$
  - $\mathbf{Z}[k : l]$ : vector de largo  $(l - k + 1)$  constituido con los elementos  $z_k, z_{k+1}, \dots, z_l$  del vector  $\mathbf{Z}$ ,  $l \geq k$ .

- **Métodos exactos:** permiten obtener la solución del sistema de manera directa.
  - Método de Eliminación de Gauss
  - Método de Gauss-Jordan
- **Métodos aproximados:** utilizan algoritmos iterativos que calculan la solución del sistema por aproximaciones sucesivas.
  - Método de Jacobi
  - Método de Gauss-Seidel
- En muchas ocasiones los métodos aproximados permiten obtener un grado de exactitud superior al que se puede obtener empleando los denominados métodos exactos, debido fundamentalmente a los errores de truncamiento que se producen en el proceso.



## Caso 1: La matriz **A** es diagonal

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- Hacer ejemplo 2
- El sistema se reduce a  $n$  ecuaciones simples y la solución es:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

## Caso 2: La matrix **A** es triangular superior:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- Hacer ejemplo 3
- La solución de  $x_n$  es inmediata y a partir de ella se encuentran las restantes siguiendo el orden inverso  $x_{n-1}, \dots, x_1$ , aplicando el algoritmo de **sustitución regresiva**:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \text{ y } x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}x_j}{a_{kk}} \quad k = n-1, n-2, \dots, 1$$

## Caso 2: La matrix $\mathbf{A}$ es triangular superior:

- Empleando la notación matricial vista, la suma en el algoritmo puede reescribirse con productos matriciales:

$$\mathbf{x}[n] = \frac{\mathbf{b}[n]}{\mathbf{A}[n, n]} \text{ y } \mathbf{x}[k] = \frac{\mathbf{b}[k] - \mathbf{A}[k, k+1:n] \times \mathbf{x}[k+1:n]}{\mathbf{A}[k, k]}$$
$$k = n-1, n-2, \dots, 1$$

- Ver el algoritmo
- Escribir el programa en IML y resolver el ejemplo

## Caso 2: La matrix $\mathbf{A}$ es triangular inferior:

- Obtención de la solución análoga al caso anterior.

## Observación

- En los casos anteriores asumimos  $a_{kk} \neq 0 \forall k$ . De lo contrario el sistema no tiene solución o tiene infinitas.
- Recordar que un sistema lineal  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  tiene solución única si y sólo si  $\det \mathbf{A} \neq 0$  y que si un elemento de la diagonal principal de una matriz triangular es cero, entonces  $\det \mathbf{A} = 0$ .

- Es un método para resolver un sistema lineal general  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas.
- El objetivo es construir un sistema equivalente donde la matriz de coeficientes sea triangular superior para obtener las soluciones con el algoritmo de sustitución regresiva.
- El método consiste en ir eliminando incógnitas en las ecuaciones de manera sucesiva.

# Eliminación gaussiana

- Ejemplo 4: resolver el siguiente sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z + 3t = -8 \\ 2x + 2z - t = 13 \\ -x + y + z - t = 8 \\ 3x + 3y - z + 2t = -1 \end{cases} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -8 \\ 13 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Matriz aumentada:

$$[\mathbf{A} \quad \mathbf{b}] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & -8 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 13 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 8 \\ 3 & 3 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right]$$

# Eliminación gaussiana

- En el primer paso eliminamos la incógnita  $x$  en las ecuaciones 2, 3 y 4, buscando que queden ceros en toda la primera columna excepto en el elemento diagonal.
- La eliminación se hace empleando las transformaciones que producen un sistema equivalente.
- Observando con detenimiento, esto se puede lograr realizando los siguientes reemplazos:

$$\text{Fila 2} = \text{Fila 2} - 2 \times \text{Fila 1}$$

$$\text{Fila 3} = \text{Fila 3} - (-1) \times \text{Fila 1}$$

$$\text{Fila 4} = \text{Fila 4} - 3 \times \text{Fila 1}$$

# Eliminación gaussiana

- A la Fila 1 se le dice **fila pivote** y al elemento  $a_{11} = 1$ , **pivote**.
- A los valores 2,  $-1$  y 3 que multiplican a la fila pivote en los reemplazos se les dice **multiplicadores**.
- Los multiplicadores se simbolizan y obtienen con:  
 $m_{r1} = a_{r1}/a_{11}, \quad r = 2, 3, 4.$
- De esta forma, los reemplazos realizados se generalizan como: Fila  $r =$  Fila  $r - m_{r1} \times$  Fila 1.
- El resultado de los reemplazos anteriores es:

$$\begin{array}{l} \text{pivote} \rightarrow \\ m_{21} = 2 \\ m_{31} = -1 \\ m_{41} = 3 \end{array} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & -8 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 13 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 8 \\ 3 & 3 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & -8 \\ 0 & -4 & 4 & -7 & 29 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -7 & 23 \end{array} \right]$$



# Eliminación gaussiana

- En el segundo paso, eliminamos la incógnita  $y$  en las ecuaciones 3 y 4.
- La fila pivote pasa a ser la segunda y el pivote es  $a_{22} = -4$ .
- Los multiplicadores son  $m_{r2} = a_{r2}/a_{22}$ ,  $r = 3, 4$ , dando lugar a los reemplazos:

$$\text{Fila 3} = \text{Fila 3} - (-3/4) \times \text{Fila 2}$$

$$\text{Fila 4} = \text{Fila 4} - 3/4 \times \text{Fila 2}$$

- El resultado es:

$$\begin{array}{l} \text{pivote} \rightarrow \\ m_{32} = -3/4 \\ m_{42} = 3/4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & | & -8 \\ 0 & -4 & 4 & -7 & | & 29 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -7 & | & 23 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & | & -8 \\ 0 & -4 & 4 & -7 & | & 29 \\ 0 & 0 & -12 & 13 & | & -87 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & | & -5 \end{bmatrix}$$

# Eliminación gaussiana

- Finalmente, eliminamos la incógnita  $z$  en la última ecuación.
- La fila pivote es la 3ª y el pivote es  $a_{33} = -12$ .
- El multiplicador es  $m_{43} = a_{43}/a_{33} = -4/12$ .
- El reemplazo a realizar es Fila 4 = Fila 4 -  $(-4/12) \times$  Fila 3.
- El resultado es:

$$\begin{array}{l} \text{pivote} \rightarrow \\ m_{43} = -4/12 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & | & -8 \\ 0 & -4 & 4 & -7 & | & 29 \\ 0 & 0 & -12 & 13 & | & -87 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & | & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & | & -8 \\ 0 & -4 & 4 & -7 & | & 29 \\ 0 & 0 & -12 & 13 & | & -87 \\ 0 & 0 & 0 & -136 & | & 408 \end{bmatrix}$$

- Hemos llegado a un sistema equivalente cuya matriz de coeficientes es triangular superior, en el que aplicamos el algoritmo de sustitución regresiva:

$$\begin{cases} x + 2y - z - 3t = -8 \\ -4y + 4z - 7t = 29 \\ -12z + 13t = -87 \\ -136t = 408 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 4 \\ t = -3 \end{cases}$$

- Mencionar algoritmo y ver programa.

# Eliminación gaussiana con pivoteo trivial

- **Observación:** en el algoritmo visto es necesario que los pivotes  $a_{qq} \neq 0 \forall q$ .
- Si en uno de los pasos encontramos un  $a_{qq} = 0$ , debemos intercambiar la  $q$ -ésima fila por una cualquiera de las siguientes, por ejemplo la fila  $k$ , en la que  $a_{kq} \neq 0, k > q$ .
- Esta estrategia para hallar un pivote no nulo se llama **pivoteo trivial**.
- Ejemplo 5:

$$\begin{cases} x - 2y + z = -4 \\ -2x + 4y - 3z = 3 \\ x - 3y - 4z = -1 \end{cases}$$

- Resolver ejemplo, mencionar algoritmo y ver programa.

# Estrategias de pivoteo para reducir los errores

- Como ya sabemos, dado que las computadoras usan una aritmética cuya precisión está fijada de antemano, es posible que cada vez que se realice una operación aritmética se introduzca un pequeño error.
- Analizar el ejemplo 6. Los valores  $x = y = 1,000$  son la solución del sistema:

$$\begin{cases} 1,133x + 5,281y = 6,414 \\ 24,14x - 1,210y = 22,93 \end{cases}$$

- Resolver “a mano” con cuatro cifras significativas.
- Se obtiene  $x = 1,001$  y  $y = 0,9956$ .

# Estrategias de pivoteo para reducir los errores

- El error de la solución se debe a la magnitud del multiplicador,  $m_{21} = 24,14/1,133 = 21,31$ .
- Siendo grande en valor absoluto, hace que los elementos del nuevo sistema equivalente difieran bastante en el orden de magnitud con respecto a la matriz original.
- Resolver nuevamente intercambiando el orden de las filas. El multiplicador es  $m_{21} = 1,133/24,14 = 0,04693$  y las soluciones halladas  $x = 1,000$  y  $y = 1,000$ .
- Se puede apreciar cómo emplear un multiplicador de menor magnitud (es decir, un pivote de mayor magnitud) redujo el error.
- Entonces se pueden crear estrategias de pivoteo que no solamente hagan intercambio de filas cuando se tenga un pivote nulo, si no también cuando alguna de las filas posteriores tenga un pivote de mayor valor absoluto.

# Eliminación gaussiana con pivoteo parcial

- Para reducir la propagación de los errores de redondeo, antes de comenzar una nueva ronda de reemplazos con el pivote  $a_{qq}$  se evalúa si debajo en la misma columna hay algún elemento con mayor valor absoluto y en ese caso se intercambian las respectivas filas.
- Es decir, se busca si existe  $r$  tal que  $|a_{rq}| > |a_{qq}|$ ,  $r > q$  para luego intercambiar las filas  $q$  y  $r$ .
- Este proceso suele conservar las magnitudes relativas de los elementos de la matriz triangular superior en el mismo orden que las de los coeficientes de la matriz original.
- Hacer ejemplo 7, ver algoritmo y correr programa.

# Eliminación gaussiana con pivoteo parcial escalado

- Reduce aún más los efectos de la propagación de los errores.
- Se elige el elemento de la columna  $q$ -ésima, en o por debajo de la diagonal principal, que tiene mayor tamaño relativo con respecto al resto de los elementos de su fila.
- **Paso 1:** buscar el máximo valor absoluto en cada fila:

$$s_r = \max\{|a_{rq}|, |a_{r,q+1}|, \dots, |a_{rn}|\} \quad r = q, q+1, \dots, n$$

- **Paso 2:** elegir como fila pivote a la que tenga el mayor valor de  $\frac{|a_{rq}|}{s_r}$ ,  $r = q, q+1, \dots, n$ .
- **Paso 3:** intercambiar la fila  $q$  con la fila hallada en el paso 2.
- Ejemplo 8 y correr programa.



# Método de eliminación de Gauss-Jordan

- Ya vimos que el método de Gauss transforma la matriz de coeficientes en una matriz triangular superior.
- El método de Gauss-Jordan continúa el proceso de transformación hasta obtener la matriz identidad.
- **Retomar Ejemplo 4:** cuando aplicamos eliminación de Gauss llegamos a la siguiente matriz triangular.

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & -8 \\ 0 & -4 & 4 & -7 & 29 \\ 0 & 0 & -12 & 13 & -87 \\ 0 & 0 & 0 & -136 & 408 \end{array} \right]$$

- Con el método de sustitución regresiva, llegamos a encontrar  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $z = 4$  y  $t = -3$ .

# Método de eliminación de Gauss-Jordan

- En lugar de aplicar sustitución regresiva, seguimos operando por fila hasta lograr una matriz diagonal:

$$\begin{array}{lcl} \text{Fila 2} & = & \text{Fila 2}/(-4) \\ \text{Fila 3} & = & \text{Fila 3}/(-12) \\ \text{Fila 4} & = & \text{Fila 4}/(-136) \end{array} \Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & 7/4 & -29/4 \\ 0 & 0 & 1 & -13/12 & 87/12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Fila 1} & = & \text{Fila 1} - 3 \text{ Fila 4} \\ \text{Fila 2} & = & \text{Fila 2} - 7/4 \text{ Fila 4} \\ \text{Fila 3} & = & \text{Fila 3} + 13/12 \text{ Fila 4} \end{array} \Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right]$$

# Método de eliminación de Gauss-Jordan

$$\begin{array}{l} \text{Fila 1} = \text{Fila 1} + \text{Fila 3} \\ \text{Fila 2} = \text{Fila 2} + \text{Fila 3} \end{array} \Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right]$$

$$\text{Fila 1} = \text{Fila 1} - 2 \text{ Fila 2} \Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 4 \\ t = -3 \end{cases}$$

- Ejemplo. Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x - y + z = -4 \\ 5x - 4y + 3z = -12 \\ 2x + y + z = 11 \end{cases}$$

# Método de eliminación de Gauss-Jordan

- Este método también puede usarse para encontrar la inversa de la matriz  $\mathbf{A}$ , si la misma es no singular ( $\det \mathbf{A} \neq 0$ ).
- Recordar que la inversa de  $\mathbf{A}$  es aquella matriz  $\mathbf{A}^{-1}$  que verifica  $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$
- Ejemplo. Queremos hallar la inversa de la matriz no singular  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Es decir, queremos hallar la matriz  $\mathbf{A}^{-1}$ :

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

# Método de eliminación de Gauss-Jordan

- Sabiendo que  $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ , planteamos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_{11} - x_{21} + x_{31} & x_{12} - x_{22} + x_{32} & x_{13} - x_{23} + x_{33} \\ 5x_{11} - 4x_{21} + 3x_{31} & 5x_{12} - 4x_{22} + 3x_{32} & 5x_{13} - 4x_{23} + 3x_{33} \\ 2x_{11} + x_{21} + x_{31} & 2x_{12} - x_{22} + x_{32} & 2x_{13} - x_{23} + x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_{11} - x_{21} + x_{31} = 1 \\ 5x_{11} - 4x_{21} + 3x_{31} = 0 \\ 2x_{11} + x_{21} + x_{31} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{12} - x_{22} + x_{32} = 0 \\ 5x_{12} - 4x_{22} + 3x_{32} = 1 \\ 2x_{12} + x_{22} + x_{32} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{13} - x_{23} + x_{33} = 0 \\ 5x_{13} - 4x_{23} + 3x_{33} = 0 \\ 2x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \end{cases}$$

# Método de eliminación de Gauss-Jordan

- Encontrar la inversa de  $\mathbf{A}$  es equivalente a resolver tres sistemas de ecuaciones lineales.
- La solución de cada uno de ellos nos da una de las columnas de  $\mathbf{A}^{-1}$ .
- Los tres sistemas tienen la misma matriz de coeficientes, por lo que podemos resolverlos simultáneamente.
- Colocamos a la derecha de la matriz del sistema la matriz identidad de orden  $n$ .
- Luego aplicamos Gauss-Jordan operando por fila hasta conseguir la matriz identidad en la izquierda.
- Al finalizar, la matriz de la derecha, cuyas columnas son las soluciones de los tres sistemas, es  $\mathbf{A}^{-1}$ .

# Método de eliminación de Gauss-Jordan

- Ejemplo:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \begin{array}{l} F_2 = F_2 - 5F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1 \\ F_1 = F_1 + F_2 \\ F_3 = F_3 - 3F_2 \\ F_1 = F_1 + 1/5F_3 \\ F_2 = F_2 + 2/5F_3 \\ F_3 = F_3/5 \end{array} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7/5 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & -1/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 13/5 & -3/2 & 1/5 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 7/5 & 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -1/5 & 2/5 \\ 13/5 & -3/2 & 1/5 \end{bmatrix}$$



- **Objetivo:** extender a espacios de dimensión mayor que uno las ideas de los métodos iterativos vistos en la unidad 2 para resolver sistemas de ecuaciones lineales.
- Veremos:
  - Método de Jacobi
  - Método de Gauss-Seidel

- Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} 4x - y + z = 7 \\ 4x - 8y + z = -21 \\ -2x + y + 5z = 15 \end{cases} \implies \begin{cases} x = (7 + y - z)/4 \\ y = (21 + 4x + z)/8 \\ z = (15 + 2x - y)/5 \end{cases}$$

- Despejar una incógnita en cada ecuación provee expresiones que sugieren la idea de un proceso iterativo.
- Dado un vector de valores iniciales  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , operar con la siguiente fórmula de recurrencia hasta la convergencia:

$$\begin{cases} x_{k+1} = (7 + y_k - z_k)/4 \\ y_{k+1} = (21 + 4x_k + z_k)/8 \\ z_{k+1} = (15 + 2x_k - y_k)/5 \end{cases}$$

# Método de Jacobi

- Por ejemplo, tomando el valor inicial  $(1, 2, 2)$ , el proceso converge hacia la solución exacta del sistema  $(2, 4, 3)$ .
- Usando 4 posiciones decimales con redondeo luego de la coma:

$k$	$x_k$	$y_k$	$z_k$
0	1	2	2
1	1.7500	3.3750	3.0000
2	1.8438	3.8750	3.0250
3	1.9625	3.9250	2.9625
4	1.9906	3.9766	3.0000
5	1.9942	3.9953	3.0009
6	1.9986	3.9972	2.9986
7	1.9997	3.9991	3.0000
8	1.9998	3.9999	3.0001
9	2.0000	3.9999	2.9999
10	2.0000	4.0000	3.0000

- *Observación:* no siempre este método converge. Es sensible al ordenamiento de las ecuaciones dentro del sistema.
- Ejemplo: tomamos el mismo sistema de antes pero intercambiamos las filas 1 y 3:

$$\begin{cases} 4x - y + z = 7 \\ 4x - 8y + z = -21 \\ -2x + y + 5z = 15 \end{cases} \implies \begin{cases} -2x + y + 5z = 15 \\ 4x - 8y + z = -21 \\ 4x - y + z = 7 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x = (-15 + y + 5z)/2 \\ y = (21 + 4x + z)/8 \\ z = 7 - 4x + y \end{cases} \implies \begin{cases} x_{k+1} = (-15 + y_k + 5z_k)/2 \\ y_{k+1} = (21 + 4x_k + z_k)/8 \\ z_{k+1} = 7 - 4x_k + y_k \end{cases}$$

- Tomando el mismo valor inicial  $(1, 2, 2)$ , esta vez el proceso diverge:

$k$	$x_k$	$y_k$	$z_k$
0	1	2	2
1	-1.5000	3.3750	5.0000
2	6.6875	2.5000	16.3750
3	34.6875	8.0156	-17.2500
4	-46.6172	17.8125	-123.7344
5	-307.9298	-36.1504	211.2813
6	502.6281	-124.9297	1202.5688
7	2936.4572	404.2602	-2128.4421
8	-5126.4752	1204.7983	-11334.5686
9	-27741.5224	-3977.4337	21717.6991
10	52298.0309	-11153.4238	106995.6559

# Método de Gauss-Seidel

- Toma la misma idea que Jacobi, pero con una pequeña modificación para acelerar la convergencia. Retomando el ejemplo inicial:

$$\begin{cases} 4x - y + z = 7 \\ 4x - 8y + z = -21 \\ -2x + y + 5z = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (7 + y - z)/4 \\ y = (21 + 4x + z)/8 \\ z = (15 + 2x - y)/5 \end{cases}$$

**Jacobi:**

$$\begin{cases} x_{k+1} = (7 + y_k - z_k)/4 \\ y_{k+1} = (21 + 4x_k + z_k)/8 \\ z_{k+1} = (15 + 2x_k - y_k)/5 \end{cases}$$

**Gauss-Seidel:**

$$\begin{cases} x_{k+1} = (7 + y_k - z_k)/4 \\ y_{k+1} = (21 + 4x_{k+1} + z_k)/8 \\ z_{k+1} = (15 + 2x_{k+1} - y_{k+1})/5 \end{cases}$$

- La diferencia está en que apenas calcula un nuevo valor de las incógnitas, Gauss-Seidel lo usa inmediatamente en el cálculo de las restantes, en lugar esperar a la próxima ronda.

# Método de Gauss-Seidel

- Tomando otra vez el valor inicial (1, 2, 2) y operando con 4 posiciones decimales con redondeo luego de la coma:

Jacobi				Gauss-Seidel			
$k$	$x_k$	$y_k$	$z_k$	$k$	$x_k$	$y_k$	$z_k$
0	1	2	2	0	1	2	2
1	1.7500	3.3750	3.0000	1	1.7500	3.7500	2.9500
2	1.8438	3.8750	3.0250	2	1.9500	3.9688	2.9862
3	1.9625	3.9250	2.9625	3	1.9957	3.9961	2.9991
4	1.9906	3.9766	3.0000	4	1.9993	3.9995	2.9998
5	1.9942	3.9953	3.0009	5	1.9999	3.9999	3.0000
6	1.9986	3.9972	2.9986	6	2.0000	4.0000	3.0000
7	1.9997	3.9991	3.0000				
8	1.9998	3.9999	3.0001				
9	2.0000	3.9999	2.9999				
10	2.0000	4.0000	3.0000				

- Ahora que sabemos qué hace cada método y en qué se diferencian vamos a:
  - Generalizar las fórmulas recursivas
  - Escribirlas matricialmente
  - Evaluar la convergencia
  - Ver los programas en IML



- Tenemos un sistema de  $n$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas y despejamos una variable en cada ecuación:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_j = \frac{b_j - a_{j1}x_1 - \cdots - a_{j(j-1)}x_{j-1} - a_{j(j+1)}x_{j+1} - \cdots - a_{jn}x_n}{a_{jj}} \\ \vdots \\ x_n = \frac{b_n - a_{n1}x_1 - \cdots - a_{n(n-1)}x_{n-1}}{a_{nn}} \end{cases}$$

# Generalización del Método de Jacobi

- Con los supra índices indicando el número de iteración, la fórmula de recurrencia es:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_j^{(k+1)} = \frac{b_j - a_{j1}x_1^{(k)} - \dots - a_{j(j-1)}x_{j-1}^{(k)} - a_{j(j+1)}x_{j+1}^{(k)} - \dots - a_{jn}x_n^{(k)}}{a_{jj}} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - \dots - a_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k)}}{a_{nn}} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow x_j^{(k+1)} = \frac{b_j - a_{j1}x_1^{(k)} - \dots - a_{j(j-1)}x_{j-1}^{(k)} - a_{j(j+1)}x_{j+1}^{(k)} - \dots - a_{jn}x_n^{(k)}}{a_{jj}}$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

# Generalización del Método de Gauss-Seidel

- Con los supra índices indicando el número de iteración, la fórmula de recurrencia es:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_j^{(k+1)} = \frac{b_j - a_{j1}x_1^{(k+1)} - \dots - a_{j(j-1)}x_{j-1}^{(k+1)} - a_{j(j+1)}x_{j+1}^{(k)} - \dots - a_{jn}x_n^{(k)}}{a_{jj}} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \frac{b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - \dots - a_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k+1)}}{a_{nn}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_j^{(k+1)} = \frac{b_j - a_{j1}x_1^{(k+1)} - \dots - a_{j(j-1)}x_{j-1}^{(k+1)} - a_{j(j+1)}x_{j+1}^{(k)} - \dots - a_{jn}x_n^{(k)}}{a_{jj}}$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

# Expresión matricial para el Método de Jacobi

- Si descomponemos a la matriz **A** como **A** = **D** + **R**, donde **D** es la matriz diagonal formada con la diagonal de **A** y **R** es igual a **A** excepto en la diagonal donde posee todos ceros, tenemos:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$(\mathbf{D} + \mathbf{R})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Dx} = \mathbf{b} - \mathbf{Rx}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{Rx})$$

- Esto da lugar a la siguiente fórmula de recurrencia, que es equivalente a las vistas anteriormente, y facilita la programación del método:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{Rx}^{(k)})$$

- Requisito: ningún elemento en la diagonal de **A** es cero.
- Hacer ejemplo.

# Expresión matricial para el Método de Gauss-Seidel

- Si descomponemos a la matriz **A** como **A** = **L** + **U**, donde **L** es una matriz triangular inferior (incluyendo la diagonal de **A**) y **U** es una matriz triangular superior (con ceros en la diagonal), tenemos:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Lx} = \mathbf{b} - \mathbf{Ux}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{Ux})$$

- Esto da lugar a la siguiente fórmula de recurrencia, que es equivalente a las vistas anteriormente, y facilita la programación del método:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{Ux}^{(k)})$$

- Requisito: ningún elemento en la diagonal de **A** es cero.
- Hacer ejemplo.

# Convergencia

## Definición

Se dice que una matriz **A** de orden  $n \times n$  es **diagonal estrictamente dominante** cuando el elemento diagonal es mayor a la suma del resto de los elementos de su fila en valor absoluto:

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n |a_{kj}| \quad k = 1, 2, \dots, n$$

## Teorema

Si la matriz **A** es diagonal estrictamente dominante, entonces el sistema lineal **Ax = b** tiene solución única y los procesos iterativos de Jacobi y de Gauss-Seidel convergen hacia la misma cualquiera sea el vector de partida **x**<sub>0</sub>.

- Es una condición suficiente pero no necesaria.
- Ver los ejemplos anteriores

## Criterios para la convergencia

- **Norma L1:**

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}| < \epsilon$$

- **Norma L2 (norma euclídea):**

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\|_2 = \sqrt{(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k)'(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k)} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)})^2} < \epsilon$$

- **Norma  $L_\infty$  (máxima diferencia):**

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\|_\infty = \max_j |x_j^{(k+1)} - x_j^{(k)}| < \epsilon$$

- **Establecer un número máximo de iteraciones**

# Ventajas de Gauss-Seidel

- Converge más rápidamente.
- Puede converger cuando Jacobi no lo hace (aunque  $\mathbf{A}$  no sea diagonal estrictamente dominante, por ejemplo si  $\mathbf{A}$  es semidefinida positiva).
- Pero puede haber casos en los que Jacobi converge y Gauss-Seidel no.