Unidad 2

Solución Numérica de Ecuaciones No Lineales

Cecilia Rapelli   Marcos Prunello

Año 2019

Introducción

- En esta unidad estudiaremos uno de los problemas básicos y antiguos de la aproximación numérica: la **solución de ecuaciones**.
- Consiste en obtener una solución de una ecuación $F(x) = O$.
- Se presenta en una gran variedad de problemas.
- Las soluciones de una ecuación se llaman **raíces** o **ceros**.

Introducción

- Una **ecuación lineal** es una igualdad que involucra una o más variables elevadas a la primera potencia y no contiene productos entre las variables (involucra solamente sumas y restas de las variables). Por ejemplo: $3x + 2 = 8$.
- Para este tipo de ecuaciones es posible hallar analíticamente una expresión para su solución.
- En una **ecuación no lineal** las incógnitas están elevadas a potencias distintas de 1, o aparecen en denominadores o exponentes, o están afectadas por funciones no lineales (como el logaritmo o las trigonométricas).

Introducción

- Un tipo de ecuación no lineal es la **ecuación algebraica**, que se trata de un polinomio igualado a cero:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$$

donde $a_0 \neq 0, n \in \mathbb{N}$ y $a_0, \ldots, a_n$ son constantes.

- Ejemplo: $x^3 - x^2 + 5x - 8 = 2x^5$.
- Sabemos que si, por ejemplo, $n = 2$, la solución de $ax^2 + bx + c = 0$ está dada por la resolvente:

$$x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Sin embargo, la solución análitica para este tipo de ecuaciones existe sólo para $n \leq 4$.

Introducción

- Las restantes ecuaciones no lineales se dice que son **trascendentes**, por ejemplo:

$$x^3 - lnx + \frac{3}{x} = 2$$
$$tg(x + 45) = 1 + sen(2x)$$
$$xe^x = 1$$
$$5^x = 9^{x+1}3^x$$

- En general, tampoco es posible hallar de manera análitica una solución exacta para estas ecuaciones.
- Excepto para algunos problemas, las ecuaciones no lineales carecen de solución exacta, por lo que requieren ser resueltas con métodos numéricos.

Métodos iterativos

- Una técnica fundamental de los métodos numéricos es la **ITERACIÓN**.
- Se trata de **repetir un proceso** hasta que se obtiene un resultado para el problema.
- En la unidad se verán distintos métodos iterativos para encontrar las raíces, cada con sus propias ventajas y limitaciones.
- Requieren dos pasos generales:
  1. Determinación de un valor aproximado de la raiz que se busca.
  2. Mejoramiento de la solución hasta lograr un grado de precisión preestablecido.

Definición de Punto Fijo

- Un punto fijo de una función $f(x)$ es un número real P tal que $f(P) = P$.
- Ejemplos:
  - $f(x) = x^2 - 3x + 4$, 2 es un punto fijo de f porque $f(2) = 2$.
  - $f(x) = x^2$, 0 y 1 son puntos fijos de f porque $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.

¿Cómo encontrar un punto fijo de $f(x)$?

Sea f una función continua y $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ una sucesión generada a partir de $p_n = f(p_{n-1})$ con un valor inicial p_0, es decir:

$$
\begin{aligned}
&p_0\\
p_1 &= f(p_0)\\
p_2 &= f(p_1)\\
&\vdots\\
p_n &= f(p_{n-1})\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Si $lim_{n\to\infty} p_n = P$, entonces P es un punto fijo de $f(x)$.

¿Pero para qué todo esto del punto fijo?

Siendo:

$$F(x) = 0 \tag{1}$$

la ecuación a resolver, el **Método de las Aproximaciones Sucesivas** propone reescribirla a través de la ecuación equivalente:

$$f(x) = x$$

de manera que la tarea de hallar un valor de x que satisface (1) es lo mismo que hallar un punto fijo de la función $f(x)$.

Método de las Aproximaciones Sucesivas o del Punto Fijo

Entonces, el método para resolver $F(x) = 0$ consiste en:

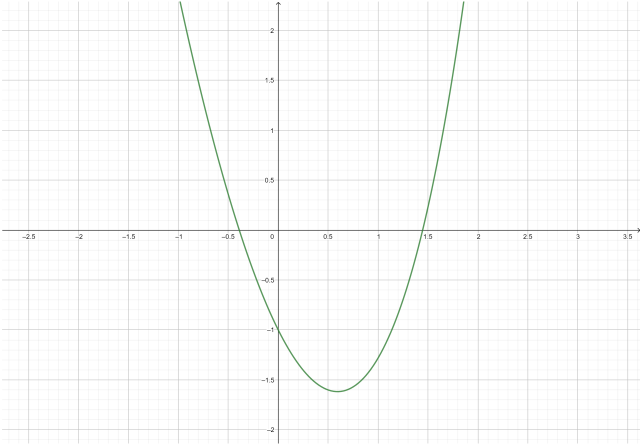
1. Expresar la ecuación en la forma $x = f(x)$.
2. Elegir un valor inicial adecuado x_0.
3. Realizar el siguiente cálculo iterativo:

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0) \\ x_2 &= f(x_1) \\ &\vdots \\ x_n &= f(x_{n-1}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

- Si a medida que n crece los x_n se aproximan a un valor fijo, se dice que el método converge y la iteración se detiene cuando la diferencia entre dos valores consecutivos x_{n-1} y x_n sea tan pequeña como se desee.
- El valor x_n será una raíz aproximada de $F(x)$.

Ejemplo

- Hallar las raíces de la ecuación no lineal: $F(x) = x^2 - 3x + e^x - 2 = 0$
- Graficamos y vemos que las raíces están cercanas a -0.4 y 1.4.



Ejemplo

- Reescribimos $F(x) = 0$ como $f(x) = x$
- Por ejemplo:

$$F(x) = x^2 - 3x + e^x - 2 = 0$$

$$\implies \underbrace{\frac{x^2 + e^x - 2}{3}}_{f(x)} = x$$

$$\implies f(x) = \frac{x^2 + e^x - 2}{3}$$

Ejemplo

- Para $x_0 = -1{,}5$, el proceso converge al valor -0.390271 que consideraremos como la aproximación para la raíz buscada.

Iteracion	x
0	-1.5000000
1	0.1577101
2	-0.2681003
3	-0.3877637
4	-0.3903555
5	-0.3902688
6	-0.3902718
7	-0.3902717

Criterios para detener el proceso iterativo

- **Criterios para convergencia:**

1. Error absoluto: $|x_{j+1} - x_j| < \epsilon$
2. Error relativo: $\left|\frac{x_{j+1}-x_j}{x_j}\right| < \epsilon$
3. Error relativo respecto al valor inicial: $\left|\frac{x_{j+1}-x_j}{x_0}\right| < \epsilon$
4. $|F(x_j)| < \epsilon$

Criterios para detener el proceso iterativo

- **Criterios para divergencia**:

1. $j > r$, r número máximo de iteraciones
2. $|x_j - x_1| > k$
3. $|F(x_j)| > k$
4. $|x_{j+1} - x_j| > k$
5. $\left|\frac{x_j}{x_1}\right| > k$

Ejemplo

- En cada paso calculamos el error relativo y nos detuvimos cuando el mismo fue menor a 1E-6.

Iteracion	x	Error
0	-1.5000000	NA
1	0.1577101	1.105140e+00
2	-0.2681003	2.699957e+00
3	-0.3877637	4.463383e-01
4	-0.3903555	6.684034e-03
5	-0.3902688	2.222629e-04
6	-0.3902718	7.690434e-06
7	-0.3902717	2.657452e-07

WARNING: Teoría...

- Pero esto no funciona siempre, para cualquier f o cualquier x_0...
- ¿Cuándo sí? Cuando se cumplen las condiciones del **Teorema del Punto Fijo**.
- A saber:

Teorema del Punto Fijo

Dadas las siguientes condiciones:

a. f es una función continua en el intervalo $[a, b]$
b. $f(x) \in [a, b] \quad \forall x \in [a, b]$
c. f' existe en (a, b) con $|f'(x)| \leq m < 1 \quad \forall x \in (a, b)$

Si x_0 es cualquier número en $[a, b]$, entonces la sucesión definida por

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n \geq 1,$$

converge al único punto fijo que f posee en $[a, b]$.

Ejemplo

- En el ejemplo anterior, dada la ecuación $F(x) = x^2 - 3x + e^x - 2 = 0$, la reexpresamos como:

$$x = \frac{x^2 + e^x - 2}{3} \implies f(x) = \frac{x^2 + e^x - 2}{3}$$

$$\implies f'(x) = \frac{1}{3}(2x + e^x)$$

- Verificar condiciones del Teorema.
- Si no se cumplen las condiciones, podemos probar con otra expresión para $f(x)$.

Interpretación gráfica

- Dado que el método plantea encontrar el valor de x que satisface $x = f(x)$, resolver la ecuación original es equivalente a resolver el sistema:

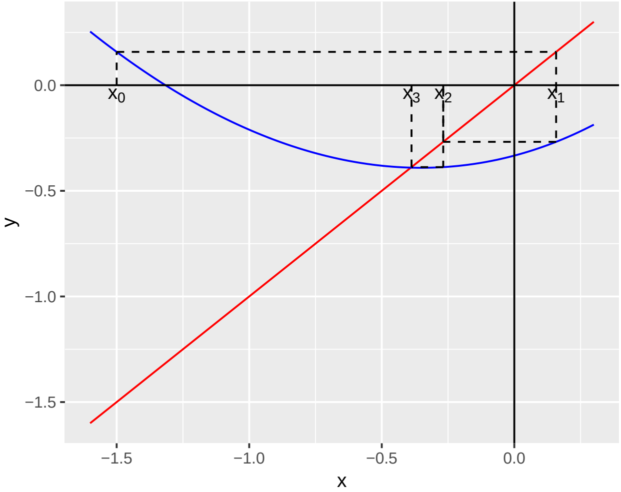
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases} \tag{2}$$

- Es decir, que geométricamente el valor buscado es el punto de intersección de la curva $y = f(x)$ con la recta $y = x$.

Ejemplo

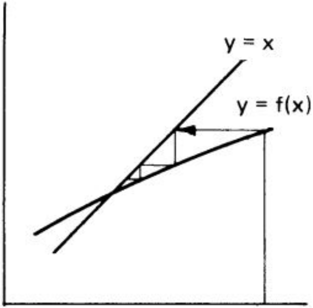
- Para $x_0 = -1{,}5$, el proceso converge en 7 iteraciones a la raíz -0.390271 con un error relativo menor a -1E+6.

Iteracion	x	Error
0	-1.5000000	NA
1	0.1577101	1.105140e+00
2	-0.2681003	2.699957e+00
3	-0.3877637	4.463383e-01
4	-0.3903555	6.684034e-03
5	-0.3902688	2.222629e-04
6	-0.3902718	7.690434e-06
7	-0.3902717	2.657452e-07

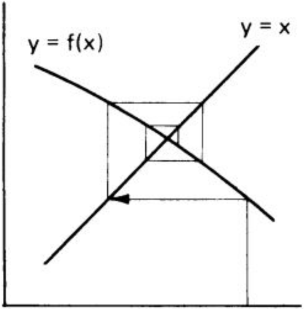


Algunos diagramas

Ejemplos de convergencia:

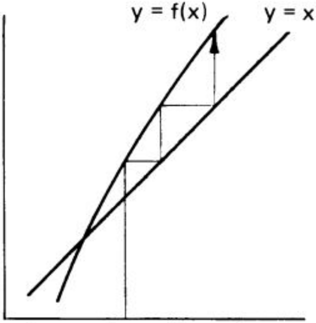


Convergencia monótona: 0<f'<1

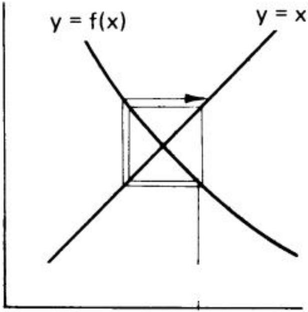


Convergencia oscilante: -1<f'<0

Ejemplos de divergencia:



Divergencia monótona: f' > 1

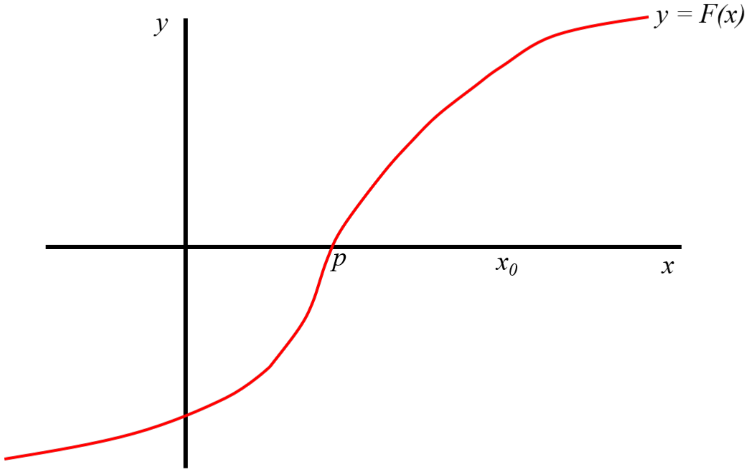


Divergencia oscilante: f' < -1

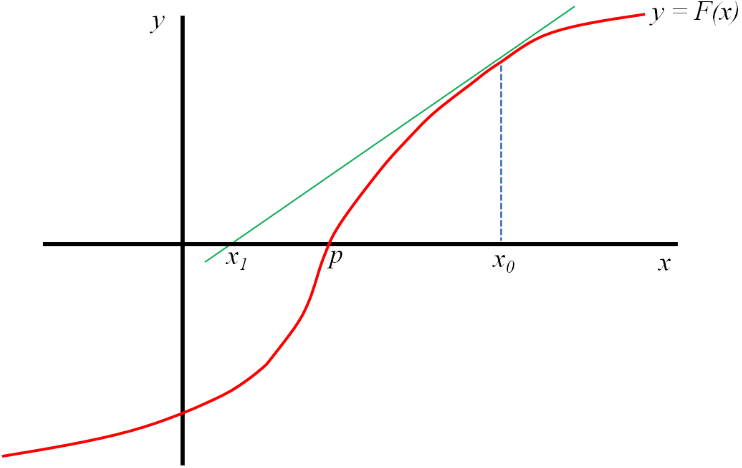
Método de Newton-Raphson

- Si la función F y sus derivadas F' y F'' son continuas cerca de una raíz p, se pueden usar estas características de F para desarrollar algoritmos que produzcan sucesiones $\{x_k\}$ que converjan a p más rápidamente.
- El método de **Newton-Raphson** es uno de los más útiles y conocidos.
- Vamos a introducir este método a partir de su interpretación geométrica y su representación gráfica.
- **Recordar**: La *tangente* a una curva en un punto es una recta que toca a la curva sólo en dicho punto.
- Veamos el siguiente ejemplo donde el objetivo es hallar la raiz de la función F, es decir, el valor p tal que $F(p) = 0$.

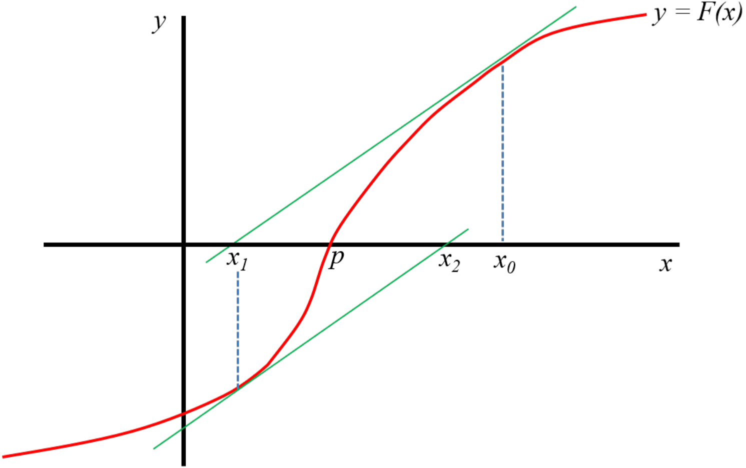
Método de Newton-Raphson



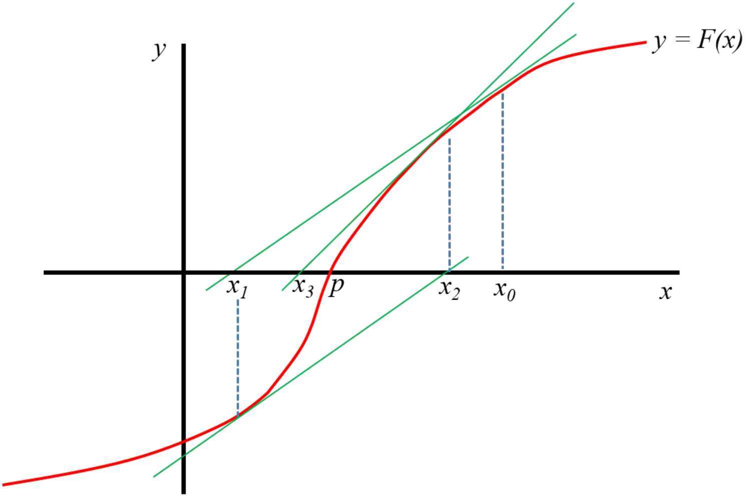
Método de Newton-Raphson



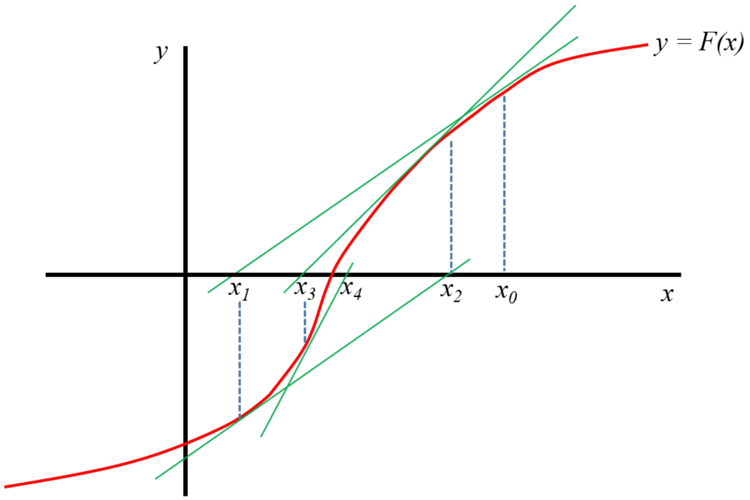
Método de Newton-Raphson



Método de Newton-Raphson



Método de Newton-Raphson



Método de Newton-Raphson

- Supongamos que contamos con una aproximación inicial x_0 cercana a la raiz p.
- Definimos a x_1 como el punto de intersección del eje de las abscisas con la recta tangente a la curva F en x_0.
- En el caso de la figura, se puede observar que x_1 está más cerca de p que x_0.
- Ahora definimos a x_2 como el punto de intersección del eje de las abscisas con la recta tangente a la curva F en x_1.
- Nuevamente, para el caso del ejemplo, podemos ver cómo x_2 está aún más cerca de p.
- Si continuamos repitiendo este proceso, esperamos encontrar un x_n que sea una buena aproximación para p.

Método de Newton-Raphson

- ¿Podemos expresar esto que observamos gráficamente a través de una fórmula?
- Es decir, a partir de x_0, ¿podemos encontrar una fórmula para x_1?
- Sí, para eso hay prestarle atención a la pendiente m de la recta tangente en x_0.
- Por un lado, sabemos que la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto es igual a la derivada de la función en dicho punto:

$$m = F'(x_0) \tag{3}$$

- Pero además sabemos que para cualquier recta, la pendiente es igual a:

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \tag{4}$$

siendo (x_0, y_0) y (x_1, y_1) dos puntos distintos que pertenecen a la misma.

- Para expresar la pendiente de la recta tangente en x_0, podemos tomar los puntos $(x_0, F(x_0))$ y $(x_1, 0)$ (el punto donde la tangente intersecta al eje x), de manera que a partir de la fórmula anterior:

$$m = \frac{0 - F(x_0)}{x_1 - x_0} = -\frac{F(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{5}$$

Método de Newton-Raphson

- Igualando (3) y (5) y despejando x_1 nos queda:

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} \tag{6}$$

- Si repetimos este pensamiento empezando desde x_1 con la recta tangente a F en el punto x_1, vamos a encontrar que:

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)} \tag{7}$$

- De esta manera hemos deducido una fórmula recursiva que nos permitirá hallar una aproximación para el verdadero valor de la raiz de F.

Método de Newton-Raphson

- Las ideas anteriores se formalizan analíticamente a través del siguiente teorema.
- En el mismo se deduce la fórmula recursiva a partir del desarrollo en serie de Taylor de la función F.

Teorema de Newton-Raphson

Supongamos que la función F es continua, con derivada segunda continua en el intervalo $[a; b]$, y que existe un número $p \in [a; b]$ tal que $F(p) = 0$. Si $F'(p) \neq 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que la sucesión $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ definida por el proceso iterativo

$$x_k = x_{k-1} - \frac{F(x_{k-1})}{F'(x_{k-1})} \quad k = 1, 2, \ldots$$

converge a p cualquiera sea la aproximación inicial $x_0 \in [p - \delta; p + \delta]$

Método de Newton-Raphson

Observación: para garantizar la convergencia, δ debe ser elegido tal que:

$$\frac{|F(x)F''(x)|}{[F'(x)]^2} < 1 \quad \forall x \in [p-\delta, p+\delta]$$

Esto significa que:

- x_0 debe estar suficientemente cerca a la raíz de $F(x) = 0$.
- $F''(x)$ no debe ser excesivamente grande.
- $F'(x)$ no debe estar muy próxima a cero.

Método de Newton-Raphson

Ejemplo:

- Evaluar si Newton-Raphson permite hallar la raíz positiva de $F(x) = x^2 - 3x + e^x - 2$, que no pudo ser hallada con Aproximaciones Sucesivas.

Ventajas

- Aparece F en lugar de f.
- Converge más rápido que el método de las aproximaciones sucesivas.
- En algunos casos en que aproximaciones sucesivas diverge, N-R converge.
- Se puede adaptar para hallar raíces complejas.

Limitaciones

- Si x_0 está demasiado lejos de la raíz deseada, la sucesión $\{x_k\}$ puede converger a otra raíz (la pendiente $F'(x_0)$ es muy pequeña).
- Obtener la derivada primera de la función F puede ser difícil o imposible. En ese caso se podría aproximar $F'(x_{k-1})$ con:

$$F'(x_{k-1}) \approx \frac{F(x_{k-1}+h) - F(x_{k-1})}{h}$$

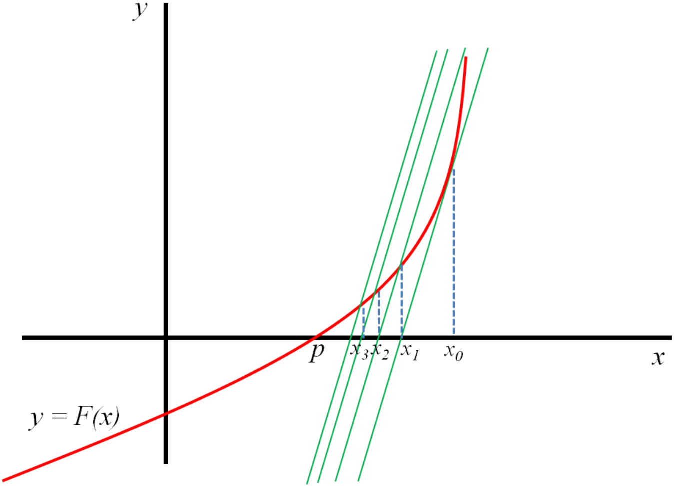
donde h es un valor pequeño, por ejemplo, $h = 0,001$.

Método de von Mises

- En el método de N-R, el denominador $F'(x_k)$ hace que geométricamente se pase de una aproximación a la siguiente por la tangente de la curva $y = F(x)$ en el punto correspondiente a la aproximación presente x_k.
- Esto puede producir problemas cuando se esté en puntos alejados de raíces y cerca de puntos donde el valor de $F'(x)$ sea cercano a 0 (tangentes cercanas a la horizontal).
- Para resolver este problema, von Mises sugirió sustituir $F'(x_k)$ en el denominador por $F'(x_0)$.
- Es decir, obtener geométricamente las siguientes aproximaciones por medio de rectas paralelas siempre a la primera tangente.
- La fórmula de recurrencia resultante es:

$$x_k = x_{k-1} - \frac{F(x_{k-1})}{F'(x_0)} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Método de von Mises



Método de Newton-Raphson de 2º Orden

- Otra modificación al método de N-R se deriva a partir de la utilización de un término más en el desarrollo por serie de Taylor de la función $F(x)$.
- Dada la existencia de las correspondientes derivadas, la fórmula de recurrencia resultante es:

$$x_k = x_{k-1} + \frac{F(x_{k-1})F'(x_{k-1})}{0{,}5F(x_{k-1})F''(x_{k-1}) - [F'(x_{k-1})]^2} \quad k = 1, 2, \ldots$$

- El método de N-R de 2º orden llega más rápidamente a la raíz, aunque la fórmula es más difícil de obtener.