Unidad 5

Autovalores y autovectores

Cecilia Rapelli   Marcos Prunello

Año 2018

Introducción

- Los **autovalores** y **autovectores** son esas cosas raras que aparecen por todos lados pero nunca terminamos por entender.
- El objetivo de esta unidad es ver métodos para su cálculo, pero antes vamos a repasar qué son (**informalmente**, **sin rigurosidad**, el que avisa no traiciona...)

Introducción

- En muchas disciplinas los objetos que se estudian se representan con *vectores* (ej. $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$) y las cosas que se hacen con ellos son *transformaciones lineales*, que se representan como *matrices* (ej. $\mathbf{A}$).
- Así, en muchas situaciones las relaciones que importan entre esos objetos/vectores se expresan como:

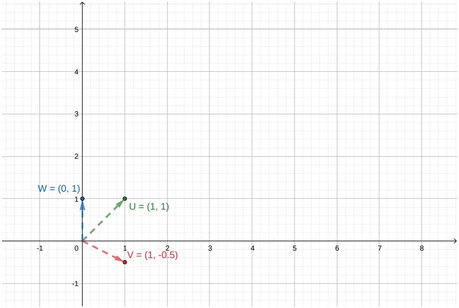
$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

- Esto abarca desde sistemas de ecuaciones lineales (presentes casi en todos lados en ciencia) hasta problemas muy sofisticados en ingeniería.
- Ahora bien, en general no es muy fácil mirar a la matriz $\mathbf{A}$ y directamente darse cuenta qué es lo que va a pasar cuando se la multipliquemos a $\mathbf{x}$.

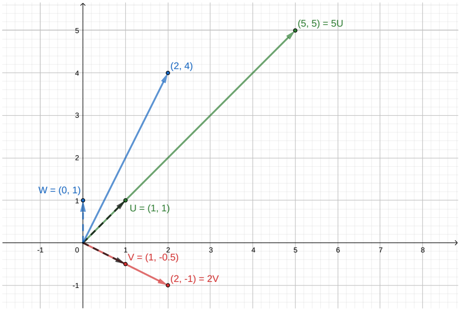
- Sin embargo, podríamos encontrar casos donde haya una relación muy simple entre el vector **x** y el vector resultado **y=Ax**.
- Por ejemplo, si miramos la matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ y se la multiplicamos al vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, ¡nos da como resultado el mismo vector **x**!
- Es decir, que para ese vector, es muy fácil ver qué aspecto tiene **Ax**.
- Se puede generalizar esta observación con el concepto de **autovectores**.
- Un **autovector** de una matriz **A** es cualquier vector **x** para el que sólo cambia su escala cuando se lo multiplica con **A**, es decir: $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$, para algún número λ real o complejo, que recibe el nombre de **autovalor**.

- Entonces si una matriz **A** describe algún tipo de sistema, los autovectores son aquellos vectores que, cuando pasan por el sistema, se modifican en una forma muy sencilla.
- Por ejemplo, si **A** describe operaciones geométricas, en principio **A** podría estirar y rotar a los vectores, sin embargo, a sus autovectores lo único que puede hacerles es estirarlos, no rotarlos.

- Sea: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- En este gráfico podemos ver los vectores antes de transformarlos (multiplicarlos) mediante $\mathbf{A}$:



- Y en este gráfico podemos ver como quedan luego de la transformación:



- **u** y **v** no cambiaron su dirección, sólo su norma: son **autovectores** de **A**, asociados a los autovalores 5 y 2.
- En cambio, la matriz **A** modificó la dirección de **w**, entonces no es un autovector.

Definición

- Dada una matriz **A** cuadradada de orden n, llamamos **autovector** o **vector propio** de **A** a todo vector **x** de orden n cuya dirección no se modifica al transformarlo mediante **A**.
  - Transformarlo mediante **A** significa realizar el producto **Ax** dando como resultado un nuevo vector de orden n.
  - Que la dirección de **x** no se modifique significa que el nuevo vector debe ser múltiplo de **x**, es decir, igual a $\lambda\mathbf{x}$, con $\lambda \in \mathbb{C}$, que recibe el nombre de **autovalor** o **valor propio** de A.
- Lo anterior se resume en la siguiente expresión: **x** es un autovector y λ es un autovalor de **A** si:

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

Definición

Observación

- Se debe observar que si $\mathbf{x}$ es un autovector con el autovalor λ entonces cualquier múltiplo diferente de cero de $\mathbf{x}$ es también un autovector con el autovalor λ.

Propiedades

- Dada una matriz **A** cuadradada de orden n:
  - **A** tiene n autovalores, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, los cuales no necesariamente son todos distintos.
  - $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.
  - $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.
  - Los autovalores de $\mathbf{A}^k$ son $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k$.
  - Si $\mathbf{A}^k$ es real y simétrica todos sus autovalores son reales y los autovectores correspondientes a distintos autovalores son ortogonales.
  - Si **A** es triangular los valores propios son los elementos diagonales.
  - Los autovalores de una matriz y su transpuesta son los mismos.
  - Si **A** tiene inversa, los autovalores de $\mathbf{A}^{-1}$ son $1/\lambda_1, 1/\lambda_2, \cdots, 1/\lambda_n$.
  - Los valores de $\alpha\mathbf{A}$ son $\alpha\lambda_1, \alpha\lambda_2, \cdots, \alpha\lambda_n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
  - Las matrices **A** y $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}$ (forma cuadrática) tienen los mismos valores propios.

Obtención los autovalores y autovectores

- A partir de la expresión anterior:

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \implies \mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

- Esto es un sistema de ecuaciones lineales con matriz de coeficientes $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ y vector de términos independientes $\mathbf{0}$, es decir, es un **sistema homogéneo** y como tal tiene solución no nula si: $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ (repasar por qué).

- El desarrollo de esta expresión conduce a un polinomio de grado n en la incógnita λ que igualado a cero es llamado **ecuación característica** y su resolución permite hallar los autovalores.

Ejemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda + 6 = 0$$

- Las soluciones de la ecuación característica son $\lambda_1 = 6{,}2899, \lambda_2 = 2{,}2943$ y $\lambda_3 = 0{,}4158$, los cuales son los autovalores de $\mathbf{A}$.
- Hallar la ecuación característica ya es demasiado trabajoso para $n = 3$, y mucho más será para mayor $n \ldots$ por eso veremos métodos que directamente nos den los coeficientes de esta ecuación.

Obtención los autovalores y autovectores

- Pero nos faltan los autovectores!
- Para eso hacemos uso de la definición: **A** es un autovector de **A** asociado al autovalor λ si $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Tomamos uno de los autovalores, por ejemplo, $\lambda_1 = 6{,}2899$ y resolvemos el sistema de ecuaciones que la expresión anterior plantea:

$$(\mathbf{A} - 6{,}2899\,\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \begin{bmatrix} -1{,}2899 & -2 & 0 \\ -2 & -3{,}2899 & -1 \\ 0 & -1 & -5{,}2899 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} -1{,}2899x_1 - 2x_2 & = 0 \\ -2x_1 - 3{,}2899x_2 - x_3 & = 0 \\ -x_2 - 5{,}2899x_3 & = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 8{,}2018x_3 \\ x_2 = -5{,}2899x_2 \\ x_3 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Obtención los autovalores y autovectores

- Como se puede ver la solución de este sistema homogéneo no es única, representando los infinitos autovectores asociados a $\lambda_1 = 6{,}2899$. Por ejemplo, si elegimos $x_3 = 1$, obtenemos el autovector:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 8{,}2018 \\ -5{,}2899 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- En general, se resuelve informando el autovector de norma 1 que sí es único.
- De la misma forma se procede con los restantes autovalores λ_2 y λ_3.

Resumen 1: Obtener autovalores y autovectores

- **Paso 1**: desarrollar la expresión de $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ para obtener la ecuación característica (muy engorroso para n > 3):

$$f(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0$$

- **Paso 2**: resolver la ecuación característica para hallar los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. Dependiendo de n, podemos hacerlo a mano, con la calculadora o con los métodos de la Unidad 2.
- **Paso 3**: tomar cada autovalor λ_i y resolver el sistema de ecuaciones lineales $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$. No nos sirven los métodos de la Unidad 3 porque este sistema es compatible indeterminado, realizarlo "a mano" y dar un expresión para los infinitos autovectores o informar el autovector de norma 1.

- Como ya mencionamos, el desarrollo de $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ para obtener la ecuación característica tal como lo vimos en el ejemplo inicial se vuelve engorroso rápidamente.
- El método de Krylov permite obtenerla de manera sencilla, basándose en el siguiente teorema:
- **Teorema de Caylay-Hamilton**: toda matriz cuadrada $\mathbf{A}$ verifica su propia ecuación característica. Es decir, siendo la ecuación característica:

$$f(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0,$$

se verifica que:

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + b_1 \mathbf{A}^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\mathbf{A} + b_n \mathbf{I} = \mathbf{0}_{n \times n},$$

Ejemplo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 29 & -16 & 2 \\ -16 & 14 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 177 & -108 & 18 \\ -108 & 78 & -18 \\ 18 & -18 & 6 \end{bmatrix}$$

$$f(\mathbf{A}) = f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3 + b_1\mathbf{A}^2 + b_2\mathbf{A} + b_3\mathbf{I} = \mathbf{0} \implies$$

$$\begin{bmatrix} 177 & -108 & 18 \\ -108 & 78 & -18 \\ 18 & -18 & 6 \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} 29 & -16 & 2 \\ -16 & 14 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + b_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies$$

$$\begin{bmatrix} 177 + 29b_1 + 5b_2 + b_3 & -108 - 16b_1 - 2b_2 & 18 + 2b_1 \\ -108 - 16b_1 - 2b_2 & 78 + 14b_1 + 3b_2 + b_3 & -18 - 4b_1 - b_2 \\ 18 + 2b_1 & -18 - 4b_1 - 1b_2 & 6 + 2b_1 b_2 + b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Cualquiera de las columnas constituyen un sistema de tres ecuaciones lineales en las incógnitas b_1, b_2 y b_3, los coeficientes de la ecuación característica.

- Podemos usar el siguiente artificio para generar un único sistema de ecuaciones:

$$f(\mathbf{A}_{n\times n}) = \mathbf{0}_{n\times n} \implies f(\mathbf{A})\,\mathbf{y} = \mathbf{0}\,\mathbf{y} = \mathbf{0}_{n\times 1} \quad \forall\, \mathbf{y}_{n\times 1} \in \mathbb{R}^n$$

Método de Krylov

- Por ejemplo, tomando $\mathbf{y} = [1 \quad 0 \quad 0]^t$, nos queda:

$$
\begin{aligned}
& f(\mathbf{A})\,\mathbf{y} = \mathbf{0}\,\mathbf{y} \\
\Longrightarrow\ & (\mathbf{A}^3 + b_1\mathbf{A}^2 + b_2\mathbf{A} + b_3\mathbf{I})\mathbf{y} = \mathbf{0} \\
\Longrightarrow\ & \mathbf{A}^3\mathbf{y} + b_1\mathbf{A}^2\mathbf{y} + b_2\mathbf{A}\mathbf{y} + b_3\mathbf{y} = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \begin{bmatrix} 177 & -108 & 18 \\ -108 & 78 & -18 \\ 18 & -18 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} 29 & -16 & 2 \\ -16 & 14 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} +
$$

$$
b_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\Longrightarrow \begin{bmatrix} 177 \\ -108 \\ 18 \end{bmatrix} + b_1 \begin{bmatrix} 29 \\ -16 \\ 2 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + b_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\Longrightarrow \begin{bmatrix} 29 & 5 & 1 \\ -16 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -177 \\ 108 \\ -18 \end{bmatrix}
$$

- Lo anterior no es más que un sistema de tres ecuaciones lineales, $\mathbf{Cb} = \mathbf{d}$, donde:
  - el vector incógnitas es $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, los coeficientes de la ecuación característica.
  - el vector de términos independientes es $\mathbf{d} = -\mathbf{A}^3\,\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -177 \\ 108 \\ -18 \end{bmatrix}$.
  - la matriz de coeficientes es $\mathbf{C} = [\mathbf{A}^2\,\mathbf{y} \quad \mathbf{A}\,\mathbf{y} \quad \mathbf{y}] = \begin{bmatrix} 29 & 5 & 1 \\ -16 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- Dependiendo de n, podemos resolver este sistema "a mano", con la calcu o con algunos de los métodos de la Unidad 3.
- En el ejemplo, el resultado es: $b_1 = -9, b_2 = 18$ y $b_3 = -6$.

- La ecuación característica entonces es:

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 18\lambda - 6 = 0$$

- Esta ecuación coincide con la que obtuvimos en la sección anterior.
- A partir de aquí, se debe continuar desde el Paso 2 del Resumen 1 para hallar los autovalores y sus respectivos autovectores.

Resumen 2: Método de Krylov

- **Qué necesita**: la matriz $\mathbf{A}$ y un vector $\mathbf{y}$.
- **Qué nos da**: un sistema de ecuaciones para obtener los coeficientes de la ecuación característica.
- **Paso 1**: elegir un vector $\mathbf{y}$ de dimensión $n \times 1$.
- **Paso 2**: crear la matriz de coeficientes
  $\mathbf{C} = [\mathbf{A}^{n-1}\,\mathbf{y} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^2\,\mathbf{y} \quad \mathbf{A}\,\mathbf{y} \quad \mathbf{y}]$.
- **Paso 3**: crear el vector de términos independientes $\mathbf{d} = -\mathbf{A}^n\,\mathbf{y}$, de dimensión $n \times 1$.
- **Paso 4**: resolver el sistema $\mathbf{Cb} = \mathbf{d}$, donde el vector de incógnitas $\mathbf{b}$ son los coeficientes de la ecuación característica.
- **Paso 5**: formar la ecuación característica y continuar desde el Paso 2 del Resumen 1 para hallar los autovalores y sus respectivos autovectores.

Método de Faddeev-LeVerrier

- Este método propone hallar los coeficientes b_k de la ecuación característica:

$$f(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \cdots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0$$

mediante el siguiente cálculo iterativo:

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{A} \qquad b_1 = -tr(\mathbf{M}_1)$$

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{A}(\mathbf{M}_{k-1} + b_{k-1}\mathbf{I}) \qquad b_k = -\frac{tr(\mathbf{M}_k)}{k} \qquad k = 2, 3, \cdots, n$$

- Este método se deriva a partir de propiedades de matrices conjugadas.

Método de Faddeev-LeVerrier

- En nuestro ejemplo, tenemos:

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b_1 = -tr(\mathbf{M}_1) = -9$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{A}(\mathbf{M}_1 + b_1\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -16 & 2 & 2 \\ 2 & -13 & 5 \\ 2 & 5 & -7 \end{bmatrix} \qquad b_2 = -\frac{tr(\mathbf{M}_2)}{2} = 18$$

$$\mathbf{M}_3 = \mathbf{A}(\mathbf{M}_2 + b_2\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad b_3 = -\frac{tr(\mathbf{M}_3)}{3} = -6$$

- La ecuación característica entonces es:

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 18\lambda - 6 = 0$$

- A partir de aquí, otra vez se debe continuar desde el Paso 2 del Resumen 1 para hallar los autovalores y sus respectivos autovectores.

Método de Faddeev-LeVerrier

- Este método también sirve para calcular $\mathbf{A}^{-1}$.
- Por Cayley-Hamilton, ya sabemos que:
$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + b_1\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + b_{n-2}\mathbf{A}^2 + b_{n-1}\mathbf{A} + b_n\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

- Premultiplicando por $\mathbf{A}^{-1}$ nos queda:

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^n + b_1\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + b_{n-2}\mathbf{A}^2 + b_{n-1}\mathbf{A} + b_n\mathbf{I}) = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{0}$$
$$\mathbf{A}^{n-1} + b_1\mathbf{A}^{n-2} + \cdots + b_{n-2}\mathbf{A} + b_{n-1}\mathbf{I} + b_n\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{b_n}\left(\mathbf{A}^{n-1} + b_1\mathbf{A}^{n-2} + \cdots + b_{n-2}\mathbf{A} + b_{n-1}\mathbf{I}\right)$$
$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{b_n}\left(\mathbf{M}_{n-1} + b_{n-1}\mathbf{I}\right)$$

... donde el último reemplazo se deduce a partir de la fórmula iterativa vista antes:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_1 &= \mathbf{A} \\
\mathbf{M}_2 &= \mathbf{A}(\mathbf{M}_1 + b_1\mathbf{I}) = \mathbf{A}(\mathbf{A} + b_1\mathbf{I}) = \mathbf{A}^2 + b_1\mathbf{A} \\
\mathbf{M}_3 &= \mathbf{A}(\mathbf{M}_2 + b_2\mathbf{I}) = \mathbf{A}(\mathbf{A}^2 + b_1\mathbf{A} + b_1\mathbf{I}) = \mathbf{A}^3 + b_1\mathbf{A}^2 + b_2\mathbf{A} \\
\mathbf{M}_4 &= \mathbf{A}(\mathbf{M}_3 + b_3\mathbf{I}) = \mathbf{A}^4 + b_1\mathbf{A}^3 + b_2\mathbf{A}^2 + b_3\mathbf{A} \\
&\vdots \\
\mathbf{M}_{n-1} &= \mathbf{A}(\mathbf{M}_{n-2} + b_{n-2}\mathbf{I}) = \mathbf{A}^{n-1} + b_1\mathbf{A}^{n-2} + b_2\mathbf{A}^{n-3} + \cdots + b_{n-2}\mathbf{A}
\end{aligned}
$$

- **Qué necesita**: la matriz $\mathbf{A}$
- **Qué nos da**: los coeficientes de la ecuación característica.
- **Paso 1**: calcular los coeficientes b_k de la ecuación característica con la fórmula recursiva:

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{A} \qquad b_1 = -tr(\mathbf{M}_1)$$

$$\mathbf{M}_k = \mathbf{A}(\mathbf{M}_{k-1} + b_{k-1}\mathbf{I}) \qquad b_k = -\frac{tr(\mathbf{M}_k)}{k} \qquad k = 2, 3, \cdots, n$$

- **Paso 2**: formar la ecuación característica y continuar desde el Paso 2 del Resumen 1 para hallar los autovalores y sus respectivos autovectores.

Método de Aproximaciones Sucesivas o de las Potencias

- **Definición**: si λ es un autovalor de $\mathbf{A}$ tal que en valor absoluto es mayor que cualquier otro autovalor, se dice que es un **autovalor dominante** y sus autovectores se llaman **autovectores dominantes**.
- El **método de las potencias** dice que si $\mathbf{A}$ tiene un autovalor dominante y $\mathbf{v}$ es su autovector normalizado, la sucesión $\mathbf{x}_k$ a partir de cualquier $\mathbf{x}_0$ no nulo converge a $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}$$

- El autovalor correspondiente está dado por el **cociente de Rayleigh**: si $\mathbf{x}$ es un autovector de $\mathbf{A}$, entonces su correspondiente autovalor es:

$$\lambda = \frac{(\mathbf{A}\mathbf{x})^t\mathbf{x}}{\mathbf{x}^t\mathbf{x}}$$

Método de Aproximaciones Sucesivas o de las Potencias

- Se llama método de las potencias porque:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \\
\mathbf{x}_2 &= \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 \\
\mathbf{x}_3 &= \mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \mathbf{A}^3\mathbf{x}_0 \\
&\vdots \\
\mathbf{x}_k &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_0
\end{aligned}
$$

Método de Aproximaciones Sucesivas o de las Potencias

- El método de la potencia tiende a producir aproximaciones en donde los elementos de $\mathbf{x}$ tienen gran magnitud, lo cual produce problemas (errores de desbordamiento, *overflow error*).
- Por eso, en la práctica se añade un escalamiento en cada paso iterativo, dividiendo por el elemento de mayor magnitud del paso anterior.
- **Método de las potencias**: si $\mathbf{A}$ tiene un autovalor dominante, la siguiente sucesión c_k converge al mismo mientras que la sucesión $\mathbf{x}_k$ converge a uno de sus autovectores dominantes:

$$\mathbf{x}_k = \frac{1}{c_k}\mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}$$

donde c_k es la coordenada de mayor tamaño de $\mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}$ y $\mathbf{x}_0$ es cualquier vector no nulo.

- Retomando nuestro ejemplo:

k	$\mathbf{x}_k$	$\mathbf{A}\mathbf{x}_k$	c_k	$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k / c_k$	Error (L_2)
0	$[1\ 1\ 1]^t$	$[3\ 0\ 0]^t$	3	$[1\ 0\ 0]^t$	1.4142
1	$[1\ 0\ 0]^t$	$[5\ {-2}\ 0]^t$	5	$[1\ {-0.4}\ 0]^t$	0.4
2	$[1\ {-0.4}\ 0]^t$	$[5.8\ {-3.2}\ 0.4]^t$	5.8	$[1\ {-0.5517}\ 0.0690]^t$	0.1667
3	$[1\ {-0.5517}\ 0.0690]^t$	$[6.1034\ {-3.7241}\ 0.6207]^t$	6.1034	$[1\ {-0.6102}\ 0.1017]^t$	0.0690
4	$[1\ {-0.6102}\ 0.1017]^t$	$[6.2203\ {-3.9322}\ 0.7119]^t$	6.2203	$[1\ {-0.6322}\ 0.1144]^t$	0.0254
...	...	...	...	...	...
16	$[1\ {-0.644972}\ 0.1219239]^t$	$[6.2899\ {-4.0568}\ 0.7669]^t$	6.2899	$[1\ {-0.644972}\ 0.1219241]^t$	3.956E-7

Modificaciones de este método

Método de las potencias inversas

- Permite hallar el menor autovalor de $\mathbf{A}$.
- Consiste en aplicar el $\mathbf{A}^{-1}$ para hallar su mayor autovalor.
- Pero como los autovalores de $\mathbf{A}^{-1}$ son los recíprocos de los de $\mathbf{A}$, el autovalor así hallado es el recíproco del menor autovalor de $\mathbf{A}$.

Método de las potencias con deflación (o de Hotelling)

- Una vez hallado el mayor autovalor λ_1 es posible encontrar el segundo mayor autovalor aplicando el mismo método sobre la matriz $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{u}\mathbf{u}^t$, donde $\mathbf{u} = \mathbf{x}/||\mathbf{x}||$, con $\mathbf{x}$ el autovector hallado para λ_1.
- Si $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ son los autovalores de $\mathbf{A}$, entonces $\{0, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ son los de $\mathbf{A}_2$.
- Repitiendo este proceso se encuentran los restantes autovalores.

Resumen 4: Método de las Aproximaciones Sucesivas o de las Potencias

- **Qué necesita**: la matriz $\mathbf{A}$ y un vector inicial $\mathbf{x}_0$.
- **Qué nos da**: el autovalor dominante de $\mathbf{A}$ y su autovector.
- **Paso 1**: elegir un vector inicial $\mathbf{x}_0$ de dimensión $n \times 1$.
- **Paso 2**: repetir el siguiente proceso iterativo estableciendo un criterio para la convergencia:

$$\mathbf{x}_k = \frac{1}{c_k}\mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}$$

- **Paso 3**: al finalizar, c_k aproxima al autovalor dominante y $\mathbf{x}_k$ a uno de sus autovectores.
- **Modificación 1**: hacer los mismo con $\mathbf{A}^{-1}$ nos da el recíproco del menor autovalor de $\mathbf{A}$ y uno de sus autovectores.
- **Modificación 2**: aplicar sucesivamente este método modificando $\mathbf{A}$ como establece Hotelling para hallar todos los autovalores.