Teoremas

Taller de Métodos Numéricos

Año 2019

1 Teorema del Valor Intermedio o de Bolzano

Sea f una función real continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ con $f(a)$ y $f(b)$ de signos contrarios, es decir, $f(a) \cdot f(b) < 0$. Entonces existe al menos un punto c del intervalo abierto (a, b) con $f(c) = 0$.

2 Teorema del Valor Medio

Dada cualquier función f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe al menos algún punto c en el intervalo (a, b) tal que la tangente a la curva en c es paralela a la recta secante que une los puntos $(b, f(b))$ y $(a, f(a))$. Es decir:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

3 Teorema de Taylor

Sea $k \geq 1$ un entero y la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable k veces en el punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces existe una función $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{\text{Polinomio de Taylor de orden } n} + \underbrace{h_n(x)(x - x_0)^{n+1}}_{\text{resto}}$$

y $\lim_{x \to x_0} h_n(x) = 0$. Esta es la llamada **forma de Peano del resto**.

El polinomio que aparece en el teorema de Taylor se denomina **polinomio de Taylor de orden** n.

Existen diversas fórmulas explícitas para el resto. Una de ellas es la **forma de Lagrange**:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

para algún número real ξ entre x_0 y x, siendo f diferenciable $n + 1$ veces.

4 Teorema del Punto Fijo

Dadas las siguientes condiciones:

(a) f es una función continua en el intervalo $[a, b]$

(b) $f(x) \in [a, b] \quad \forall x \in [a, b]$

(c) f' existe en (a, b) con $|f'(x)| \leq m < 1 \quad \forall x \in (a, b)$

Si x_0 es cualquier número en $[a, b]$, entonces la sucesión definida por

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n \geq 1,$$

converge al único punto fijo que f posee en $[a, b]$.

Demostración

1. **Existencia de un punto fijo**
   - Si $f(a) = a$ o $f(b) = b$, la existencia del punto fijo es obvia.
   - Entonces suponemos que $f(a) \neq a$ y $f(b) \neq b \implies f(a) > a$ y $f(b) < b$ por (b). Definimos $h(x) = f(x) - x$, continua en $[a; b]$ tal que:

     $$h(a) = f(a) - a > 0 \text{ y } h(b) = f(b) - b < 0$$

     Por el Teorema del Valor Intermedio:

     $$\exists \quad p \in (a; b) \text{ tal que } h(p) = 0 \implies f(p) - p = 0 \implies p = f(p) \implies p \text{ es un punto fijo de } f$$

   - Por lo tanto, f tiene al menos un punto fijo.
2. **Unicidad del punto fijo**

   Sean p y q dos puntos fijos de f, $p \neq q$, $p, q \in [a; b]$:

   $$|p-q| \overset{\text{puntos fijos}}{=} |f(p)-f(q)| \overset{\text{T Valor Medio, } \xi \text{ entre } p \text{ y } q}{=} |f'(\xi)(p-q)| \overset{\text{Val abs de un prod}}{=}$$

   $$|f'(\xi)||p-q| \overset{\text{(c)}}{\leq} m|p-q| \overset{\text{(c)}}{\leq} |p-q| \implies |p-q| < |p-q|$$

   Lo cual es una contradicción que proviene de la única suposición: $p \neq q$. Por lo tanto $p = q$ y el punto fijo es único.
3. **Convergencia del proceso iterativo**

   Por (b), dado que $f : [a; b] \to [a; b]$, la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ está definida $\forall n \geq 0$ y $x_n \in [a; b] \quad \forall n$.

   $$|x_n-p| \overset{\text{p es punto fijo}}{=} |x_n-f(p)| \overset{x_n=f(x_{n-1})}{=} |f(x_{n-1})-f(p)| \overset{\text{T Valor Medio, } \xi \text{ entre } p \text{ y } x_{n-1}}{=}$$

   $$|f'(\xi)||x_{n-1} - p| \overset{\text{(c)}}{\leq} m|x_{n-1} - p| \implies |x_n - p| \leq m|x_{n-1} - p|$$

   Del mismo modo podríamos ver que $|x_{n-1} - p| \leq m|x_{n-2} - p|$. Aplicando dicha desigualdad inductivamente resulta:

   $$|x_n - p| \leq m|x_{n-1} - p| \leq m^2|x_{n-2} - p| \leq \ldots \leq m^n|x_0 - p| \implies |x_n - p| \leq m^n|x_0 - p|$$

   Como $0 < m < 1$, el segundo miembro decrece a medida que n aumenta, sin importar cuál es x_0:

   $$\lim_{n\to\infty} |x_n - p| \leq \lim_{n\to\infty} m^n|x_0 - p| = 0$$

   Entonces $|x_n - p| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, es decir el método converge hacia el punto fijo p.

5 Teorema de Newton-Raphson

Supongamos que la función F es continua, con derivada segunda continua en el intervalo $[a; b]$, y que existe un número $p \in [a; b]$ tal que $F(p) = 0$. Si $F'(p) \neq 0$, entonces $\exists \quad \delta > 0$ tal que la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ definida por el proceso iterativo:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{F(x_{n-1})}{F'(x_{n-1})} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

converge a p cualquiera sea la aproximación inicial $x_0 \in [p - \delta; p + \delta]$.

Demostración

Aplicamos el **Teorema de Taylor** para la función F en el punto x_0 empleando un polinomio de grado $n = 1$ y el resto en la forma de Lagrange:

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \frac{F''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2$$

donde ξ es un número real entre x y x_0.

Si tomamos $x = p$, sabiendo que $F(p) = 0$, nos queda:

$$0 = F(x_0) + F'(x_0)(p - x_0) + \frac{F''(\xi)}{2!}(p - x_0)^2$$

Si x_0 está suficientemente cerca de p, entonces el último término del segundo miembro en la igualdad anterior será pequeño comparado con los restantes y podemos despreciarlo:

$$0 \approx F(x_0) + F'(x_0)(p - x_0) \implies p - x_0 \approx -\frac{F(x_0)}{F'(x_0)} \implies p \approx x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}. \tag{2}$$

De esta manera podemos llamar

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$$

y hemos obtenido un nuevo valor x_1 más cercano a p que x_0. Pensando del mismo modo, podemos escribir

$$p \approx x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)}$$

de manera que

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)}$$

es aún una mejor aproximación a p. Continuando de esta manera, queda establecida la regla general (1):

$$x_n = x_{n-1} - \frac{F(x_{n-1})}{F'(x_{n-1})} \quad n = 1, 2, \ldots$$

.

Para garantizar la convergencia, debemos darnos cuenta que la iteración de Newton-Raphson es una iteración de punto fijo, por lo cual vale el **Teorema del Punto Fijo**:

$$x_n = \underbrace{x_{n-1} - \frac{F(x_{n-1})}{F'(x_{n-1})}}_{f(x_{n-1})}$$

Por lo tanto, el método será convergente siempre que $|f'(x)|\leq m < 1$:

$$f(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{[F'(x)]^2 - F(x)F''(x)}{[F'(x)]^2} = 1 - 1 + \frac{F(x)F''(x)}{[F'(x)]^2} = \frac{F(x)F''(x)}{[F'(x)]^2}.$$

Es decir, el metodo convergerá si:

$$|f'(x)|= \frac{|F(x)F''(x)|}{[F'(x)]^2} \leq m < 1$$

Por hipótesis, sabemos que $F(p) = 0$; luego $f'(p) = 0$. Como $f(x)$ es continua y $f'(p) = 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|f'(x)|< 1$ se cumple en el intervalo $[p - \delta, p + \delta]$. Por consiguiente, que $x_0 \in [p - \delta, p + \delta]$ es una condición suficiente para que x_0 sea el punto de partida de una sucesión $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ que converge a la única raíz de $F(x) = 0$ en dicho intervalo, siempre que δ sea elegido tal que:

$$\frac{|F(x)F''(x)|}{[F'(x)]^2} < 1 \quad \forall x \in [p - \delta, p + \delta]$$

6 Deducción de la fórmula de recurrencia para el Método de Newton-Raphson de 2º Orden

Una modificación al método de N-R se deriva a partir de la utilización de un término más en el desarrollo por serie de Taylor de la función $F(x)$. Aplicamos el **Teorema de Taylor** para la función F en el punto x_0 empleando un polinomio de grado $n = 2$ y el resto en la forma de Lagrange:

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \frac{F''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{F''(\xi)}{3!}(x - x_0)^3$$

donde ξ es un número real entre x y x_0.

Si tomamos $x = p$, sabiendo que $F(p) = 0$, nos queda:

$$0 = F(x_0) + F'(x_0)(p - x_0) + \frac{F''(x_0)}{2!}(p - x_0)^2 + \frac{F''(\xi)}{3!}(p - x_0)^3$$

Si x_0 está suficientemente cerca de p, entonces el último término del segundo miembro en la igualdad anterior será pequeño comparado con los restantes y podemos despreciarlo:

$$0 \approx F(x_0) + F'(x_0)(p - x_0) + \frac{F''(x_0)}{2!}(p - x_0)^2$$
$$\Longrightarrow\ 0 \approx F(x_0) + (p - x_0)\left[F'(x_0) + \frac{F''(x_0)}{2!}(p - x_0)\right]$$

Si dentro de los corchetes se reemplaza $(p - x_0)$ por $-\frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$ según la relación vista en (2) y se despeja p, se obtiene una expresión para la primera aproximación x_1, dando lugar a la fórmula iterativa:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{F(x_{n-1})F'(x_{n-1})}{[F'(x_{n-1})]^2 - 0,5F(x_{n-1})F''(x_{n-1})} \quad n = 1, 2, \ldots$$