Teoremas útiles para recordar

Taller de Métodos Numéricos

Año 2018

1 Teorema del Valor Intermedio o de Bolzano

Sea f una función real continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ con $f(a)$ y $f(b)$ de signos contrarios, es decir, $f(a) \cdot f(b) < 0$. Entonces existe al menos un punto c del intervalo abierto (a, b) con $f(c) = 0$.

2 Teorema del Valor Medio

Dada cualquier función f continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe al menos algún punto c en el intervalo (a, b) tal que la tangente a la curva en c es paralela a la recta secante que une los puntos $(b, f(b))$ y $(a, f(a))$. Es decir:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

3 Teorema de Taylor

Sea $k \geq 1$ un entero y la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable k veces en el punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces existe una función $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{\text{Polinomio de Taylor de orden } n} + \underbrace{h_n(x)(x - x_0)^{n+1}}_{\text{resto}}$$

y $\lim_{x \to x_0} h_n(x) = 0$. Esta es la llamada **forma de Peano del resto**.

El polinomio que aparece en el teorema de Taylor se denomina **polinomio de Taylor de orden** n.

Existen diversas fórmulas explícitas para el resto. Una de ellas es la **forma de Lagrange**:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

para algún número real ξ entre x_0 y x, siendo f diferenciable $n + 1$ veces.