

# Unidad 5 - Aproximación Polinomial Parte II

## Integración y derivación

Cecilia Rapelli   Marcos Prunello

Año 2019

- Dada la función  $y = f(x)$  definida en forma tabular con a través de  $n + 1$  valores de  $x$  equiespaciados  $x_0, x_1 = x_0 + h, \dots, x_n = x_0 + nh$ , se desea hallar una aproximación de la integral definida:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \quad (1)$$

- Para esto, aproximaremos a  $f(x)$  con el polinomio de Newton:

$$f(x) \cong y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots \quad (2)$$

$$k = \frac{x - x_0}{h}$$

- En (1) la variable es  $x$ , mientras que en (2) la variable está expresada como  $k = (x - x_0)/h$ , por lo tanto para poder reemplazar (2) en (1) se debe realizar un cambio de variables:

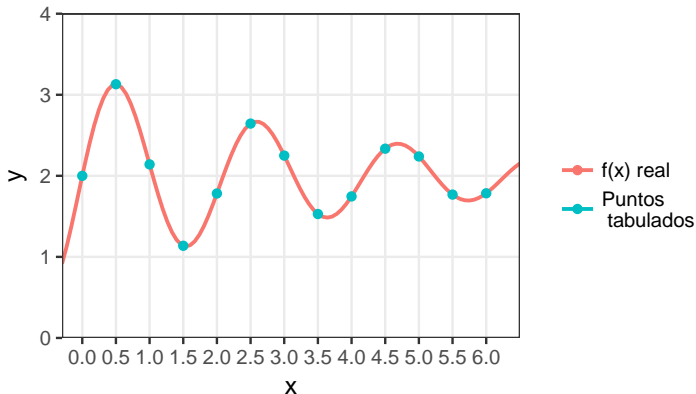
$$k = \frac{x - x_0}{h} \implies \begin{cases} x = x_0 + hk \\ dx = hdk \\ x = x_0 \implies k = \frac{x_0 - x_0}{h} = 0 \\ x = x_n \implies k = \frac{x_n - x_0}{h} = \frac{x_0 + nh - x_0}{h} = n \end{cases}$$

● Luego:

$$\begin{aligned}& \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \\& \cong \int_0^n \left( y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots \right) h dk \\& = h \int_0^n \left[ y_0 + k\Delta y_0 + \left( \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2} \right) \Delta^2 y_0 + \left( \frac{k^3}{6} - \frac{k^2}{2} + \frac{k}{3} \right) \Delta^3 y_0 + \dots \right] dk \\& = h \left[ y_0 k + \frac{k^2}{2} \Delta y_0 + \left( \frac{k^3}{6} - \frac{k^2}{4} \right) \Delta^2 y_0 + \left( \frac{k^4}{24} - \frac{k^3}{6} + \frac{k^2}{6} \right) \Delta^3 y_0 + \dots \right] \Big|_0^n \\& = h \left[ y_0 n + \frac{n^2}{2} \Delta y_0 + \left( \frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{4} \right) \Delta^2 y_0 + \left( \frac{n^4}{24} - \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{6} \right) \Delta^3 y_0 + \dots \right]\end{aligned}$$

**Ejemplo.** Se tienen los siguientes valores tabulados de  $f(x)$  y se desea hallar su integral entre 0 y 6.

$x$	$y = f(x)$
0.0	2.00
0.5	3.13
1.0	2.14
1.5	1.14
2.0	1.78
2.5	2.64
3.0	2.25
3.5	1.53
4.0	1.75
4.5	2.34
5.0	2.24
5.5	1.77
6.0	1.78



La curva roja es la verdadera función  $f(x)$  que originó la tabla, la cual suponemos desconocida o difícil de integrar.

# Integración numérica: fórmula trapezoidal

- Si la interpolación se limita al primer orden y la integral sólo se calcula entre los dos primeros valores de  $x$ , se obtiene:

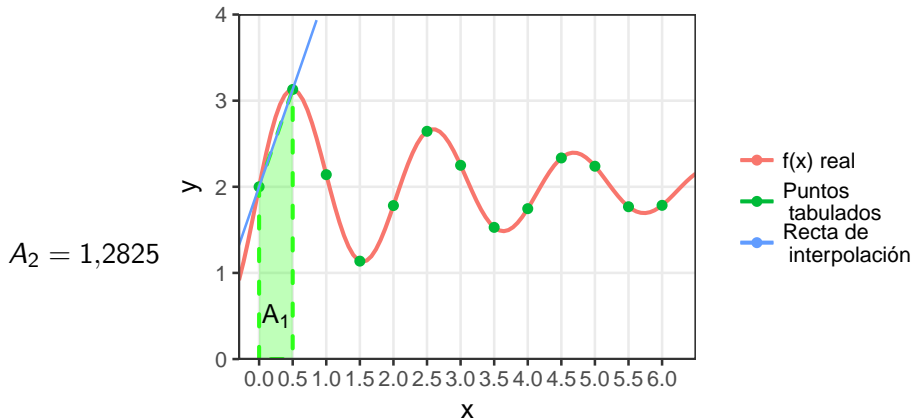
$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx &\cong \int_0^1 (y_0 + k\Delta y_0) h dk = h \left( y_0 k + \frac{k^2}{2} \Delta y_0 \right) \Big|_0^1 \\ &= h \left( y_0 + \frac{\Delta y_0}{2} \right) = h \left( y_0 + \frac{y_1 - y_0}{2} \right) = \frac{h}{2} (y_0 + y_1)\end{aligned}$$

- En el ejemplo:

$$\int_0^{0,5} f(x) dx \cong \frac{0,5}{2} (3,13 + 2) = 1,2825$$

# Integración numérica: fórmula trapezoidal

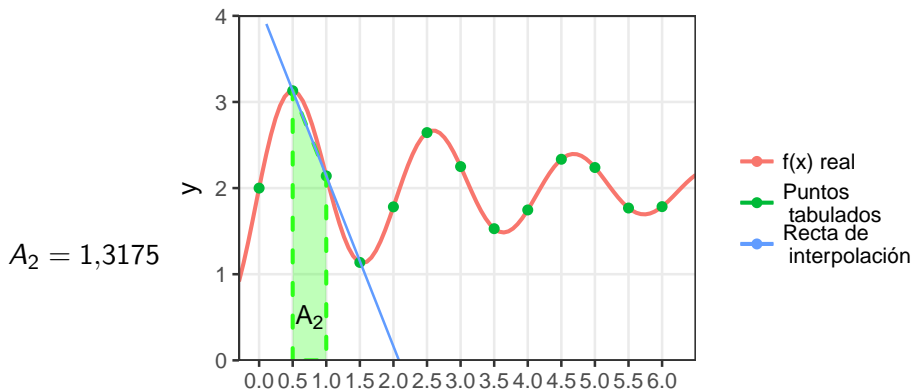
- Geométricamente, esto equivale al área  $A_1$  del trapecio formado por la recta de interpolación y el eje de las abscisas, entre  $x_0$  y  $x_1$ :



# Integración numérica: fórmula trapezoidal

- De manera semejante, se puede emplear la interpolación lineal de Newton para obtener una aproximación de la integral entre  $x_1$  y  $x_2$ :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \cong A_2 = \frac{h}{2}(y_1 + y_2)$$





# Integración numérica: fórmula trapezoidal

- Y sucesivamente para todos los intervalos:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \cong A_i = \frac{h}{2}(y_{i-1} + y_i) \quad i = 1, \dots, n$$

- De modo que la suma de las áreas de los trapecios  $A_i$  resulta ser la aproximación para la integral entre  $x_0$  y  $x_n$ :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \frac{h}{2}(y_{i-1} + y_i) = \frac{h}{2} \left( y_0 + y_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

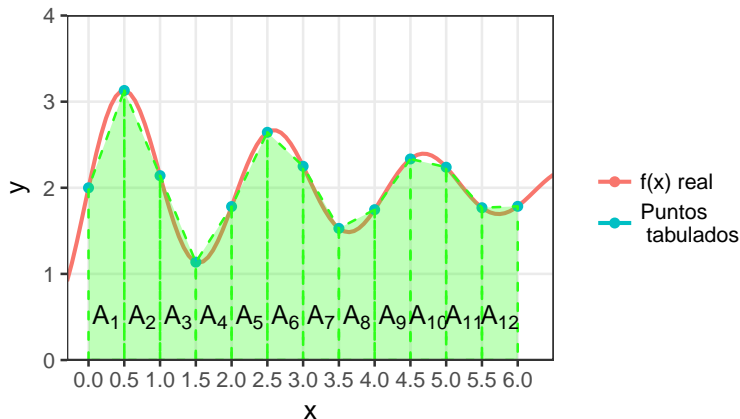
- La fórmula hallada se conoce como **fórmula trapezoidal** y se la simboliza con:

$$A_{1/2} = \frac{h}{2} \left( y_0 + y_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right)$$

- Cuanto menor sea el ancho de los intervalos  $h$  y más se acerque  $f(x)$  a una recta, mejor será la aproximación así obtenida.

# Integración numérica: fórmula trapezoidal

- Gráficamente:



- En el ejemplo:  $A_{1/2} = 12,3000$ .
- El valor exacto es:  $\int_0^6 f(x)dx = 12,2935$ , con lo cual el error relativo de la aproximación con la fórmula trapezoidal fue: 0,05 %.

# Integración numérica: fórmula de Simpson de 1/3

- Si la interpolación es de segundo orden y la integral sólo se calcula entre los tres primeros valores de  $x$ , se obtiene:

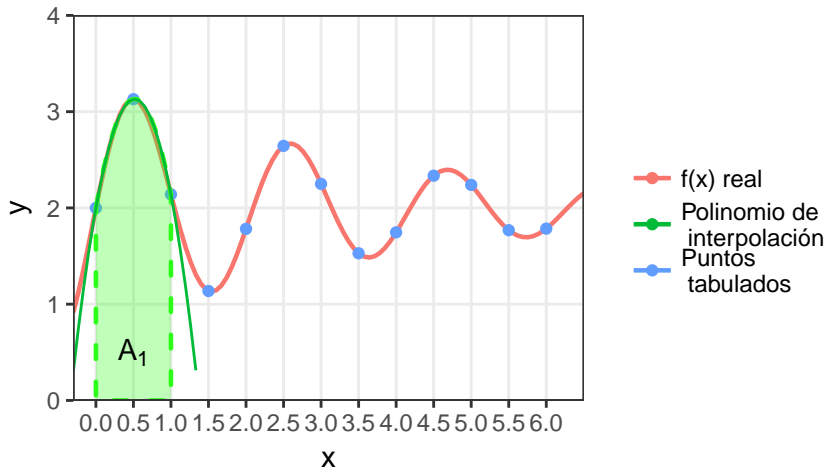
$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &\cong \int_0^2 \left[ y_0 + k\Delta y_0 + \left( \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2} \right) \Delta^2 y_0 \right] h dk \\ &= h \left[ y_0 k + \frac{k^2}{2} \Delta y_0 + \left( \frac{k^3}{6} - \frac{k^2}{4} \right) \Delta^2 y_0 \right] \bigg|_0^2 \\ &= h \left[ 2y_0 + 2\Delta y_0 + \frac{1}{3} \Delta^2 y_0 \right]\end{aligned}$$

- Dado que  $\Delta y_0 = y_1 - y_0$  y  $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$ , nos queda:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &\cong h \left[ 2y_0 + 2(y_1 - y_0) + \frac{1}{3}(y_2 - 2y_1 + y_0) \right] \\ &= \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)\end{aligned}$$

# Integración numérica: fórmula de Simpson de 1/3

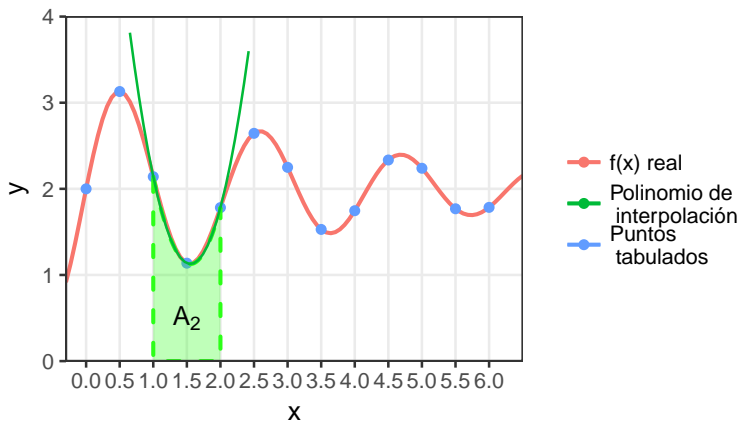
- Geométricamente, esto equivale al área  $A_1$  encerrada entre el eje de las abscisas,  $x_0$  y  $x_2$  y el polinomio integrador que pasa por  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ :  
$$A_1 = 2,7766$$



# Integración numérica: fórmula de Simpson de 1/3

- De manera semejante, se puede emplear la interpolación cuadrática de Newton para obtener una aproximación de la integral entre  $x_2$  y  $x_4$ :

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x) dx \cong A_2 = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$



$$A_2 = 1,4133$$

# Integración numérica: fórmula de Simpson de 1/3

- Y sucesivamente para todos los intervalos:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx \cong \frac{h}{3} (y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}) \quad i = 1, 3, 5, \dots, n-1$$

- De modo que la suma de estas áreas resulta ser la aproximación para la integral entre  $x_0$  y  $x_n$ :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \cong \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ impar}}}^{n-1} \frac{h}{3} (y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}) = \frac{h}{3} \left( y_0 + y_n + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ i \text{ par}}}^{n-2} y_i + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ impar}}}^{n-1} y_i \right)$$

# Integración numérica: fórmula de Simpson de 1/3

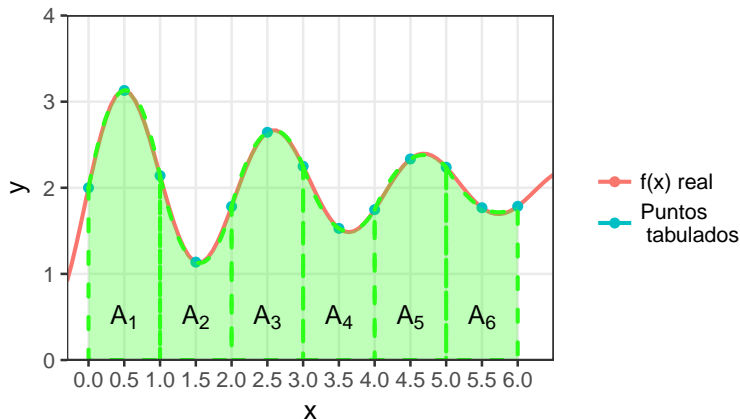
- La fórmula hallada se conoce como **fórmula de Simpson de 1/3** y se la simboliza con:

$$A_{1/3} = \frac{h}{3} \left( y_0 + y_n + 2 \sum_{\substack{i=2 \\ i \text{ par}}}^{n-2} y_i + 4 \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ impar}}}^{n-1} y_i \right)$$

- Para poder aplicarla, es necesario que la cantidad de puntos tabulados sea impar, es decir que la tabla tenga una cantidad par de intervalos.

# Integración numérica: fórmula de Simpson de 1/3

- Gráficamente:



- En el ejemplo:  $A_{1/3} = 12,3833$ .
- El valor exacto es:  $\int_0^6 f(x)dx = 12,2935$ , con lo cual el error relativo de la aproximación con la fórmula trapecial fue: 7,3 %.



# Integración numérica: fórmula de Simpson de 3/8

- Si la interpolación es de tercer orden y la integral sólo se calcula entre los 4 primeros valores de  $x$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx &\cong \int_0^3 \left[ y_0 + k\Delta y_0 + \left( \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2} \right) \Delta^2 y_0 + \left( \frac{k^3}{6} - \frac{k^2}{2} + \frac{k}{3} \right) \Delta^3 y_0 \right] h dk \\ &= h \left[ y_0 k + \frac{k^2}{2} \Delta y_0 + \left( \frac{k^3}{6} - \frac{k^2}{4} \right) \Delta^2 y_0 + \left( \frac{k^4}{24} - \frac{k^3}{6} + \frac{k^2}{6} \right) \Delta^3 y_0 \right] \Big|_0^3 \\ &= h \left[ 3y_0 + \frac{9}{2} \Delta y_0 + \frac{9}{4} \Delta^2 y_0 + \frac{3}{8} \Delta^3 y_0 \right]\end{aligned}$$

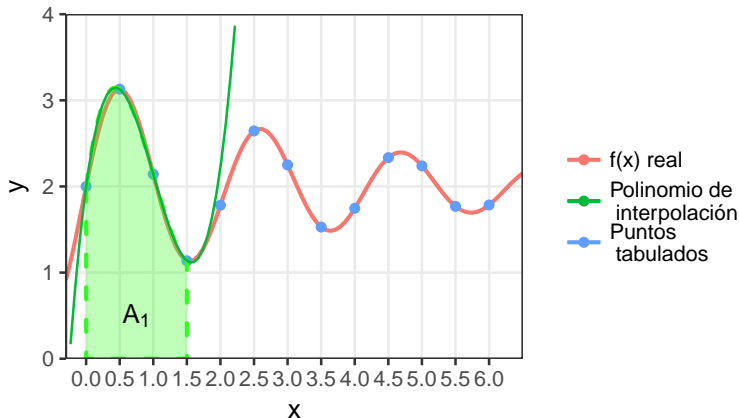
- Dado que  $\Delta y_0 = y_1 - y_0$ ,  $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$ , y  $\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = y_3 - 3y_2 - 3y_1 + y_0$  nos queda:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \cong \frac{3}{8} h (y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)$$

# Integración numérica: fórmula de Simpson de 3/8

- Geométricamente, esto equivale al área  $A_1$  encerrada entre el eje de las abscisas,  $x_0$  y  $x_3$  y el polinomio integrador que pasa por  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  y  $(x_3, y_3)$ :

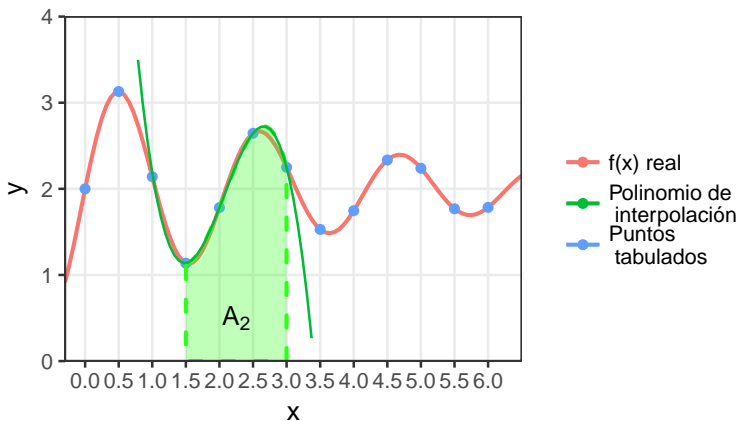
$$A_1 = 3,5531$$



# Integración numérica: fórmula de Simpson de 3/8

- De manera semejante, se puede emplear la interpolación cúbica de Newton para obtener una aproximación de la integral entre  $x_3$  y  $x_6$ :

$$\int_{x_3}^{x_6} f(x) dx \cong A_2 = \frac{3}{8} h (y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6)$$



$$A_1 = 3,1219$$

# Integración numérica: fórmula de Simpson de 3/8

- Y sucesivamente para todos los intervalos:

$$\int_{x_i}^{x_{i+3}} f(x) dx \cong \frac{3}{8} h (y_i + 3y_{i+1} + 3y_{i+2} + y_{i+3}) \quad i = 0, 3, 6, \dots, n-3$$

- De modo que la suma de estas áreas resulta ser la aproximación para la integral entre  $x_0$  y  $x_n$ :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx &\cong \sum_{\substack{i=0 \\ \text{ó } i \text{ múltiplo de } 3}}^{n-3} \frac{3}{8} h (y_i + 3y_{i+1} + 3y_{i+2} + y_{i+3}) \\ &= \frac{3}{8} h \left( y_0 + y_n + 2 \sum_{\substack{i=3 \\ i \text{ múltiplo de } 3}}^{n-3} y_i + 3 \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ no múltiplo de } 3}}^{n-1} y_i \right) \end{aligned}$$

# Integración numérica: fórmula de Simpson de 3/8

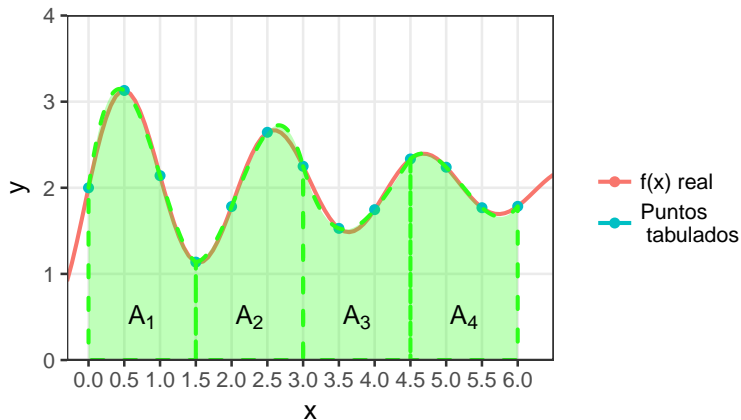
- La fórmula hallada se conoce como **fórmula de Simpson de 3/8** y se la simboliza con:

$$A_{3/8} = \frac{3}{8}h \left( y_0 + y_n + 2 \sum_{\substack{i=3 \\ i \text{ múltiplo de } 3}}^{n-3} y_i + 3 \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ no múltiplo de } 3}}^{n-1} y_i \right)$$

- Para poder aplicarla, es necesario que la cantidad de intervalos en la tabla sea múltiplo de 3.

# Integración numérica: fórmula de Simpson de 3/8

## ● Gráficamente:



- En el ejemplo:  $A_{3/8} = 12,4088$ .
- El valor exacto es:  $\int_0^6 f(x)dx = 12,2935$ , con lo cual el error relativo de la aproximación con la fórmula trapecial fue: 9,4 %.

- Para aproximar la derivada de una función en un punto, nuevamente haremos uso del polinomio interpolador de Newton:

$$\begin{aligned}f(x) &\cong y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \dots \\&= y_0 + k\Delta y_0 + \left(\frac{k^2}{2} - \frac{k}{2}\right)\Delta^2 y_0 + \left(\frac{k^3}{6} - \frac{k^2}{2} + \frac{k}{3}\right)\Delta^3 y_0 + \dots\end{aligned}$$

- Se debe derivar con respecto a  $x$  el miembro derecho de la expresión anterior, aplicando la Regla de la Cadena ya que  $k = (x - x_0)/h$ .
- Por simplicidad, lo mostraremos sólo con el polinomio interpolador cuadrático.

- Aproximación de la derivada con el polinomio interpolador cuadrático de Newton:

$$f(x) \cong y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k^2}{2}\Delta^2 y_0 - \frac{k}{2}\Delta^2 y_0$$

$$k = \frac{x - x_0}{h} \implies \frac{\partial k}{\partial x} = \frac{1}{h}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &\cong \Delta y_0 \frac{1}{h} + \Delta^2 y_0 \left( k \frac{1}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2} \frac{1}{h} \right) \\ &= \frac{1}{h} \left[ \Delta y_0 + \left( k - \frac{1}{2} \right) \Delta^2 y_0 \right] \end{aligned}$$



**Retomando el Ejemplo 1 de la Parte 1 de la Unidad 4:** vamos a aproximar el valor de  $f'(3,4)$ .

$x_k$	$y_k$	$\Delta y_k$	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$	$\Delta^4 y_k$	$\Delta^5 y_k$
2	0,3010	0,1761	-0,0511	0,0230	-0,0127	0,0081
3	0,4771	0,1250	-0,0281	0,0103	-0,0046	-
4	0,6021	0,0969	-0,0178	0,0057	-	-
5	0,6990	0,0791	-0,0121	-	-	-
6	0,7781	0,0670	-	-	-	-
7	0,8451	-	-	-	-	-

- $x = 3,4$

- $x_0 = 3$

- $h = 1$

- $k = \frac{x-x_0}{h} = \frac{3,4-3}{1} = 0,4$

- $\Delta y_0 = 0,1250;$

- $\Delta^2 y_0 = -0,0281$

$$f'(x) \cong \frac{1}{h} \left[ \Delta y_0 + \left( k - \frac{1}{2} \right) \Delta^2 y_0 \right] = 0,1250 + (-0,1)(-0,0281) = 0,12781$$

Nota: esta fórmula se conoce como *aproximación por diferencias hacia adelante*, pero se pueden lograr aproximaciones más precisas de otras formas, por ejemplo, haciendo que el punto de interés  $x$  esté en el centro del rango del polinomio interpolador (*aproximación por diferencias centrales*).