# Unidad 2: Solución de Ecuaciones No Lineales

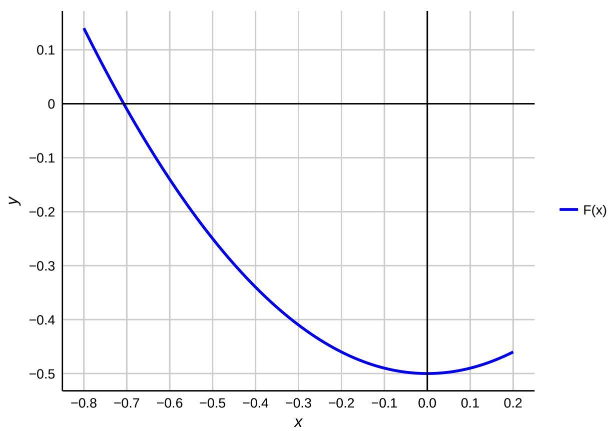
Ejemplos

## Ejemplo: Buscar la raíz negativa de $F(x) = x^2 - 0,5$.

### Aproximaciones sucesivas

1. Buscar un punto inical $x_0$, tabulando y graficando la función $F(x)$. Recordar el Teorema de Bolzano.

| $x$ | $F(x) = x^2 - 0,5$ |
|---|---|
| 0.0 | -0.50 |
| -0.1 | -0.49 |
| -0.2 | -0.46 |
| -0.3 | -0.41 |
| -0.4 | -0.34 |
| -0.5 | -0.25 |
| -0.6 | -0.14 |
| -0.7 | -0.01 |
| -0.8 | 0.14 |




El punto inicial puede ser $x_0 = -0.7$.

2. Reescribir la ecuación en la forma $x = f(x)$:

$$x = x^2 + x - 0,5$$

3. Escribir la fórmula recursiva:

$$x_{i+1} = f(x_i) = x_i^2 + x_i - 0,5$$

4. Realizar las iteraciones, con 6 cifras decimales.

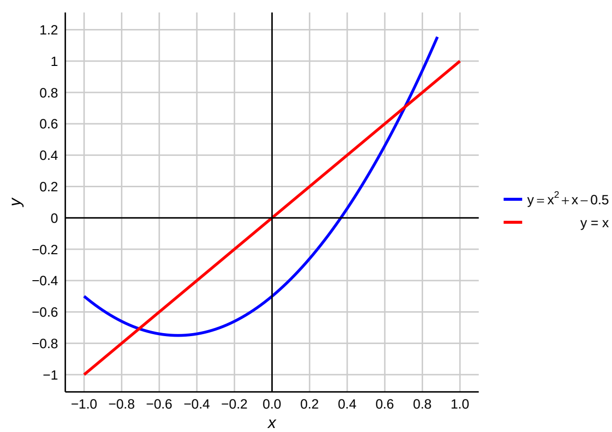
| $i$ | $x_i$ | $x_{i+1} = f(x_i) = x_i^2 + x_i - 0.5$ | Error |
|---|---|---|---|
| 0 | -0.700000 | -0.710000 | -0.010000 |

| $i$ | $x_i$ | $x_{i+1} = f(x_i) = x_i^2 + x_i - 0.5$ | Error |
|---|---|---|---|
| 1 | -0.710000 | -0.705900 | 0.004100 |
| 2 | -0.705900 | -0.707605 | 0.001705 |
| 3 | -0.707605 | -0.706900 | 0.000705 |
| 4 | -0.706900 | -0.707192 | 0.000292 |
| 5 | -0.707192 | -0.707071 | 0.000121 |
| 6 | -0.707071 | -0.707122 | 0.000051 |
| 7 | -0.707122 | -0.707100 | 0.000022 |
| 8 | -0.707100 | -0.707110 | 0.000010 |
| 9 | -0.707110 | -0.707105 | 0.000005 |
| 10 | -0.707105 | -0.707108 | 0.000003 |
| 11 | -0.707108 | -0.707106 | 0.000002 |
| 12 | -0.707106 | -0.707107 | 0.000001 |
| 13 | -0.707107 | -0.707107 | 0.000000 |

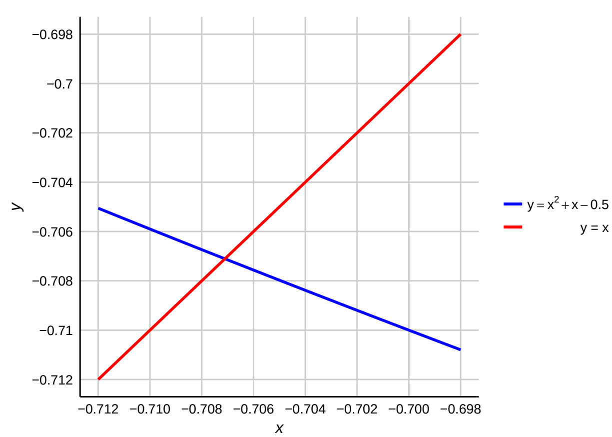
Vemos que $|x_{13} - x_{12}| < 0.000001$, por lo que podemos dejar de iterar e informar como solución a $x = -0,707107$.

**Interpretación gráfica**

Tengo que agregar los pasos del proceso iterativo en el gráfico.




Haciendo zoom:

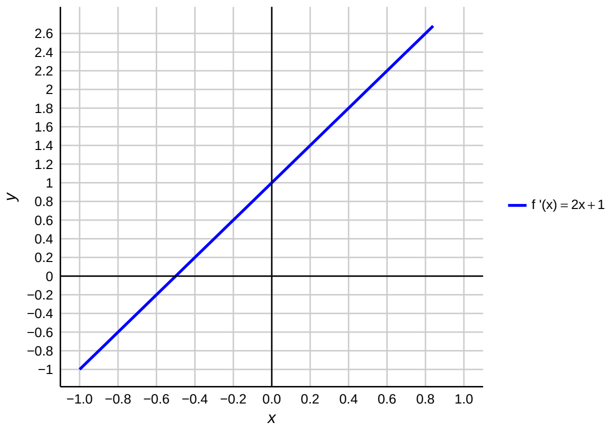



**Evaluación convergencia**

Considerando el intervalo $[a; b] = [-0,8; -0,6]$:

1. La función $f(x) = x^2 + x - 0,5$ es continua en $[a;b]$.
2. $f(x) \in [a;b] \quad \forall x \in [a;b]$ (ver gráfico).
3. $f'$ existe en $(a;b)$ con $|f'(x)| \leq m < 1 \quad \forall x \in (a;b)$:
   - $f'(x) = 2x + 1$
   - $|f'(-0,8)| = 0,6 < 1$
   - $|f'(-0,6)| = 0,2 < 1$

Todo lo anterior lo podemos evaluar gráficamente:




¿Qué sucede con la otra raíz de $F(x)$? Esta función es simétrica alrededor del 0, por lo que la solución aproximada será $x = 0,707107$. Tomando el intervalo $[a;b] = [0,6;0,8]$:

$|f'(x)| \not< 1 \quad \forall x \in (a;b)$

$|f'(0,7)| = 2,4 > 1$

Este método converge para hallar la raíz negativa pero no la positiva.

## Newton-Raphson

1. Buscar un punto inical $x_0$. Elegimos otra vez $x_0 = -0,7$.
2. Hallar las derivadas:

$$F'(x) = 2x$$
$$F''(x) = 2$$

3. Evaluar convergencia:

$$\frac{|F(-0,7)F''(-0,7)|}{[F'(-0,7)]^2} = \frac{|-0,01 \cdot 2|}{1.96} = 0.0102 < 1$$

4. Escribir la fórmula recursiva:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{F(x_i)}{F'(x_i)} = x_i - \frac{x_i^2 - 0,5}{2x_i} = \frac{x_i^2 + 0,5}{2x_i}$$

5. Realizar las iteraciones, con 6 cifras decimales.

| $i$ | $x_i$ | $x_{i+1} = f(x_i) = x_i^2 + x_i - 0.5$ | Error |
|---|---|---|---|
| 0 | -0.700000 | -0.707143 | -0.007143 |
| 1 | -0.707143 | -0.707107 | 0.000036 |
| 2 | -0.707107 | -0.707107 | 0.000000 |

Vemos que con sólo dos iteraciones se logra un error $< 0.000001$, mientras que el método de las aproximaciones sucesivas necesitó 13. Además, también se puede comprobar que N-R converge para hallar la raíz positiva.

**Interpretación gráfica**

Converge tan rápido y son números tan pequeños que no se puede representar. Por eso tomo un valor inicial más alejado: $x_0 = -1.5$

| $i$ | $x_i$ | $x_{i+1} = f(x_i) = x_i^2 + x_i - 0.5$ | Error |
|---|---|---|---|
| 0 | -1.500000 | -0.916667 | 0.583333 |
| 1 | -0.916667 | -0.731061 | 0.185606 |
| 2 | -0.731061 | -0.707499 | 0.023562 |
| 3 | -0.707499 | -0.707107 | 0.000392 |
| 4 | -0.707107 | -0.707107 | 0.000000 |