

基于多尺度混合有限元的离散裂缝两相渗流数值模拟

张庆福, 黄朝琴*, 姚军*, 王月英, 李阳

中国石油大学(华东)石油工程学院, 青岛 266580

* 联系人, E-mail: emc.group.upc@gmail.com; RCOGFR_UPC@126.com

2016-05-09 收稿, 2016-07-25 修回, 2016-07-25 接受, 2016-11-04 网络版发表

国家自然科学基金(51404292, 51234007, 51490654)、山东省自然科学基金(ZR2014EEQ010)、中央高校基本科研业务费专项(15CX05037A, 14CX05027A)和青岛市博士后项目(2015248)资助

摘要 裂缝性介质通常具有多尺度特征, 离散裂缝模型虽具有计算精度高、拟真性好的优点, 但传统数值方法在解决此类多尺度流动问题时, 难以突破计算量大的瓶颈, 不利于实际应用. 对此, 本文将离散裂缝模型和多尺度混合有限元相结合, 仅需进行宏观大尺度计算, 通过多尺度基函数来刻画小尺度裂缝精细流动特征, 在保证计算精度的同时降低了计算量. 在小尺度上, 采用模拟有限差分法构建离散裂缝模型的多尺度基函数, 该方法不仅具有良好的局部守恒性, 而且适用于任何复杂离散裂缝网格. 文章详细阐述了离散裂缝模型多尺度混合有限元两相流动数值计算格式的建立, 重点介绍了如何使用模拟有限差分法构建离散裂缝模型的多尺度基函数, 并采用超样本技术进一步提高计算准确性. 数值结果表明, 本文计算方法不仅能够准确捕捉离散裂缝性介质中的精细流动特征, 而且具有很高的计算效率.

关键词 裂缝性介质, 多尺度混合有限元法, 离散裂缝模型, 模拟有限差分, 两相渗流

现代很多工程和科学问题都有多尺度解, 如复合材料、非均质多孔介质问题等, 是典型的多尺度问题. 裂缝性油藏中, 裂缝空间尺度跨越大^[1-5], 流体在裂缝性油藏中的流动呈现显著多尺度特征. 目前, 主要采用双重介质、等效连续介质和离散裂缝模型作为裂缝性介质的流动模型.

双重介质模型^[6,7]认为裂缝性介质中存在两个平行的渗流系统: 裂缝系统和基岩系统. 由于双重介质模型中窜流函数难以确定, 很难应用于两相和多相流问题^[8,9]. 等效连续介质模型将介质视为一个假想的连续体, 其操作简单且计算效率高^[10]. 然而, 对于两相或多相流问题, 尚未有成熟的理论和方法获取相应的等效参数^[11]. 离散裂缝模型则对介质中的裂缝予以显示表征, 由于其计算精度高、拟真性好, 该模型越来越受到人们的重视, 本文选取离散裂缝模

型作为流动模型. 裂缝性油藏中, 裂缝具有强烈多尺度性, 为了得到较精细的解, 需要建立高精度的地质模型, 可达数百万甚至数亿个网格单元. 此时, 如果基于传统的数值计算方法求解离散裂缝模型, 巨大的计算量将超出当今计算机的计算能力. 尺度升级方法^[12,13]虽然可以降低计算量, 但浪费了大量的精细模型的数据信息, 无法反映小尺度流动特征. 因为小尺度信息对整体流动模拟有重大影响, 所以尺度升级法模拟精度不高. 因此寻找既能降低计算量又能保证计算精度的新型数值方法势在必行.

近年来, 国内外学者提出一些多尺度数值模拟方法^[14-17], 如多尺度有限元法^[14]、变分多尺度方法^[16]、广义多尺度有限元法^[17]等. 多尺度方法是在粗网格上求解全局流动方程, 并且利用多尺度基函数来捕捉小尺度特征. 通过使用多尺度基函数离散全

引用格式: 张庆福, 黄朝琴, 姚军, 等. 基于多尺度混合有限元的离散裂缝两相渗流数值模拟. 科学通报, 2017, 62: 1392-1401

Zhang Q F, Huang Z Q, Yao J, et al. Two-phase numerical simulation of discrete fracture model based on multiscale mixed finite element method (in Chinese). Chin Sci Bull, 2017, 62: 1392-1401, doi: 10.1360/N972016-00584

局流动方程,可以得到一个规模更小的方程组从而减少计算量,同时可以反映介质内的非均质性.多尺度有限元法虽然可以得到反映小尺度特征的解,但是这些解却并非局部守恒的.Chen等人^[18]进一步提出了多尺度混合有限元法,该方法基于混合有限元来构造多尺度基函数,除了具有多尺度有限元的优点外,同时在粗网格上也满足局部守恒,适于处理多相复杂流动过程.

多尺度方法近年来也开始应用于裂缝性油藏数值模拟中.Gulbransen等人^[19]使用多尺度混合有限元法求解缝洞型油藏单相流问题.其基函数采用Stokes-Brinkman方程计算,导致其难以应用于两相流流动模拟.Zhang等人^[20]将多尺度有限元法应用于离散裂缝模型的研究中,并利用全局信息提高计算精度.最近,广义多尺度有限元法被应用于裂缝性介质页岩气流动模拟中^[21].本文将多尺度混合有限元推广到裂缝性油藏两相流流动模拟中,在减少计算量的同时保证计算精度.文章阐述了多尺度混合有限元的基本原理,建立了离散裂缝模型多尺度基函数的模拟有限差分计算格式,并采用IMPES方法对其两相流问题进行了求解,最后通过对比多尺度解和参考解验证了方法的正确性和程序的鲁棒性.

1 两相渗流数学模型

仅考虑不可压缩流体的等温渗流过程,给出了湿相(下标w)以及非湿相(下标n)的控制方程.如下:

$$\phi \frac{\partial S_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_\alpha = q_\alpha, \quad \alpha = n, w, \quad (1)$$

$$\mathbf{v}_\alpha = -\mathbf{K} \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha} (\nabla p_\alpha + \rho_\alpha g \nabla z), \quad \alpha = n, w, \quad (2)$$

$$S_n + S_w = 1, \quad (3)$$

$$p_c(S_w) = p_n - p_w, \quad (4)$$

式中, ϕ 为孔隙度, p_α 为流体压力, \mathbf{v}_α 为相 α 的速度, ρ_α 是流体密度, \mathbf{K} 为渗透率张量, $k_{r\alpha}$ 为相对渗透率, q_α 为源汇项, S_α 为饱和度, μ_α 是流体黏度, g 是重力加速度, p_c 为毛管力.

式(1)~(4)可写为

$$\mathbf{v} = -\mathbf{K} \lambda \nabla p + \mathbf{K} (\lambda_w \rho_w + \lambda_n \rho_n) \mathbf{G}, \quad (5)$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{v} = q_t, \quad (6)$$

其中 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_w$ 为总速度, $q_t = q_n + q_w$ 为总源汇项, $\lambda_\alpha = k_{r\alpha} / \mu_\alpha$ 是相 α 的流度, $\lambda_t = \lambda_n + \lambda_w$ 为总流度.

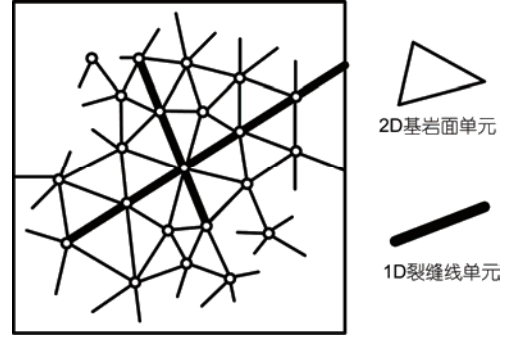


图1 离散裂缝模型

Figure 1 Grid schematics of discrete fracture model

本文在粗网格上使用Darcy方程对速度和压力进行近似,在细网格上基于模拟有限差分法求解离散裂缝模型获得多尺度基函数.在离散裂缝模型中,基于流量等效原理,沿裂缝开度方向流体相关参数不变,因此可对裂缝进行降维处理.对于二维问题,裂缝简化为一维线单元,如图1所示.

2 多尺度混合有限元法

2.1 混合变分形式及离散

在粗网格上,使用混合有限元对Darcy方程进行离散.令 $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ ($d=2,3$) 是有界闭区域, $L^2(\Omega)$ 为 Ω 上的平方可积空间.定义如下函数空间:

$$L_0^2 = \left\{ p \mid p \in L^2(\Omega), \int_\Omega p d\Omega = 0 \right\},$$

$$H^{\text{div}}(\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^d, \nabla \cdot \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \right\},$$

令 U 和 V 是 $L^2(\Omega)$ 和 $H_0^{1,\text{div}}$ 的有限维子空间,式(5)和(6)相应的离散形式为求 $(p, \mathbf{v}) \in U \times V$, 使下述等效积分方程组:

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \left(\mathbf{K} \lambda(S_w) \right)^{-1} \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_\Omega p \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega \\ &= \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \left(f_w(S_w) \rho_w + f_n(S_n) \rho_n \right) \mathbf{G} d\Omega, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\int_\Omega l \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega = \int_\Omega l q_t d\Omega, \quad (8)$$

对所有的 $(\mathbf{u}, l) \in U \times V$ 都成立.

设 $\{\psi_i\}$ 和 $\{\phi_k\}$ 分别是 U 和 V 的一组基函数.压力和速度的单元近似表达式如下:

$$\mathbf{v} = \sum v_i \psi_i, \quad p = \sum p_k \phi_k, \quad (9)$$

为保证 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ 在相邻单元交界面处连续,引入单元表面压力 λ . 把上式代入式(7)和(8)可以得到线性方

程组:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{C}^T & 0 & 0 \\ \mathbf{D}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_c \\ -\mathbf{p}_c \\ \lambda^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{q}_c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

式中, \mathbf{Q}_c 是外向流量向量, \mathbf{p}_c 为单元压力向量, λ^c 为表面压力向量. $B_{ij} = \int \psi_i \cdot [\mathbf{K} \lambda(S_w)]^{-1} \cdot \psi_j d\Omega$, $C_{ij} = \int \phi_j \nabla \cdot \psi_i d\Omega$, $D_{ij} = \int_{\partial\Omega} |\psi_i \cdot \mathbf{n}_j| d\Omega$.

当局部流动问题包含裂缝时, 采用模拟有限差分法对离散裂缝模型的控制方程进行离散^[22]. 基于模拟有限差分法, 可以准确计算基岩-裂缝与裂缝-裂缝之间的流速. 由Darcy定律可知, 对于任一网格单元, 其边界上的法向速度 \mathbf{v}_i 可以写为

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{T}_i \cdot (\mathbf{e}_i p_i - \boldsymbol{\pi}_i), \quad (11)$$

其中, \mathbf{T}_i 为传导矩阵, $\mathbf{v}_i = [v_1, \dots, v_m]^T$, m 为网格单元界面数, $\mathbf{e}_i = [1, \dots, 1]^T$, p_i 为单元压力, $\boldsymbol{\pi}_i$ 为边界面压力. 将基岩系统(下标为m)和裂缝系统(下标为f)耦合在一起可以得到离散裂缝模型的模拟有限差分数值计算格式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_m & -\mathbf{C}_m & \mathbf{D}_m & 0 & 0 \\ \mathbf{C}_m^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{D}_m^T & 0 & 0 & -\mathbf{C}_f^T & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{C}_f & \mathbf{B}_f & \mathbf{D}_f \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{D}_f^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_m \\ \mathbf{p}_m \\ \boldsymbol{\pi}_m \\ \mathbf{v}_f \\ \boldsymbol{\pi}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_m \\ \mathbf{q}_m \\ -\mathbf{q}_f \\ \mathbf{g}_f \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

上述方程的系数矩阵具体如下:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{T}_{N_e}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{e}_{N_e} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{I}_{N_e} \end{pmatrix},$$

其中, N_e 为网格单元总数, $\mathbf{I}_i = \mathbf{E}_m$. 相比于混合有限元法, 模拟有限差分法不仅拥有良好的局部守恒性, 而且对复杂网格有很高的适应性, 适用于任何复杂网络系统.

2.2 多尺度混合有限元基函数

令 $\tau_h = \{\Omega_i\}$ 为区域 Ω 的粗网格部分, $K = \{E_k\}$ 是 Ω 的细网格部分, 只要满足 $E_k \cap \Omega_i \neq \emptyset$, 就有 $E_k \subset \Omega_i$. 定义粗网格交界面 $\Gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$, 每一个

Γ_{ij} 对应一个速度基函数 ψ_{ij} , 每一个粗网格单元 Ω_i 对应一个压力基函数 ϕ_i . 如果区域 $\Omega_{ij} = \Omega_i \cup \Gamma_{ij} \cup \Omega_j$ 内仅包含基岩单元, 速度基函数 ψ_{ij} 满足下面局部流动问题:

$$\psi_{ij} = -\lambda_i \mathbf{K} \nabla \phi_j, \quad (13)$$

$$\nabla \cdot \psi_{ij} = \begin{cases} \omega_i(x), & x \in \Omega_i, \\ -\omega_j(x), & x \in \Omega_j, \\ 0, & x \notin \Omega_{ij}, \end{cases} \quad (14)$$

满足 $\psi_{ij} \cdot \mathbf{n} = 0$, $\forall x \in \partial\Omega_{ij}$. $\omega_i(x)$ 相当于 Ω_i 上的加权函数, 将 $\text{div}(\mathbf{v})$ 分布到细网格上, 满足 $\int_{\Omega_i} \omega_i(x) ds = 1$. $\omega_i(x)$ 通常取为

$$\omega(x)_i = \begin{cases} 1/|\Omega_i|, & \int_{\Omega_i} q dx = 0, \\ q(x)/\int_{\Omega_i} q(\xi) d\xi, & \int_{\Omega_i} q dx \neq 0, \end{cases} \quad (15)$$

但这种取值会导致低渗透区域计算的流速偏高, 本文选取

$$\omega(x)_i = \begin{cases} \sigma(x)/\int_{\Omega_i} \sigma(\xi) d\xi, & \int_{\Omega_i} q dx = 0, \\ q(x)/\int_{\Omega_i} q(\xi) d\xi, & \int_{\Omega_i} q dx \neq 0, \end{cases} \quad (16)$$

其中 $\sigma(x) = \text{trace}(\mathbf{K}(x))/d$, $\text{trace}(\mathbf{A})$ 表示矩阵 \mathbf{A} 的特征值的和. 这种选取方法可以有效避免均一化产生的误差, 提高基函数计算精度. 然后通过上面介绍的混合有限元法对式(13)和(14)进行求解.

如果粗网格包含裂缝单元时, 使用离散裂缝模型表征裂缝, 多尺度基函数满足局部流动问题

$$\psi_{a,ij} = -\lambda_i \mathbf{K} \nabla \phi_j, \quad (17)$$

$$\psi_{c,ij} = -\lambda_n \mathbf{K} \nabla \phi_{c,ij}, \quad (18)$$

$$\nabla \cdot (\psi_{a,ij} + \psi_{c,ij}) = \begin{cases} \omega_i(x), & x \in \Omega_i, \\ -\omega_j(x), & x \in \Omega_j, \\ 0, & x \notin \Omega_{ij}, \end{cases} \quad (19)$$

使用前面介绍的模拟有限差分法对上述方程组进行数值求解, 基函数满足 $\psi_{ij} \cdot \mathbf{n} = 0$, $\forall x \in \partial\Omega_{ij}$.

2.3 超样本技术

为了避免封闭边界影响基函数计算的精确性, 采用超样本技术计算多尺度基函数. 超样本技术就是在计算多尺度基函数时, 使目标区域包含更多的小尺度网格, 即在更大的区域上计算多尺度基函数, 如图2所示. 超样本技术可以明显提高强非均质性油藏数值模拟的精确性.

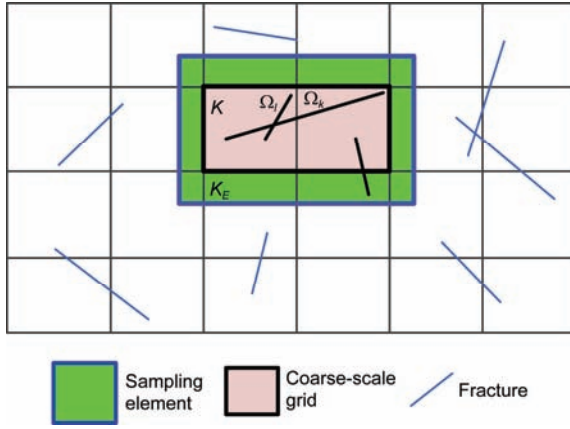


图2 (网络版彩色)超样本单元示意图

Figure 2 (Color online) Schematic description of oversampled region

多尺度方法计算时, 裂缝性介质内的流体流动特征主要通过多尺度基函数体现出来. 当裂缝穿过粗网格边界或者裂缝端点靠近粗网格顶点时, 由于封闭边界的影响, 基函数对裂缝附近流体流动的代表效果较差. 此时在超样本单元 K_E 上计算基函数, 计算得到的基函数可以充分考虑裂缝导流作用, 提高多尺度数值模拟的精确性. 但是, 使用超样本技术时, 随着超样本单元体积的增大, 精度的提升会变缓, 同时计算量会越来越大. 因此在处理裂缝性介质时, 应综合考虑计算精度与计算量, 结合裂缝分布, 选择合适的超样本单元.

2.4 全局大尺度方程

由于多尺度基函数是在相邻粗网格上计算, 因此为了建立大尺度方程, 首先将局部流动问题求解得到的多尺度基函数分为两部分

$$\psi_{ij} = \psi_{ij}^H - \psi_{ji}^H, \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} \psi_{ij}^H(E) &= \begin{cases} \psi_{ij}(E), & E \in \Omega_{ij} / \Omega_j, \\ 0, & E \notin \Omega_i, \end{cases} \\ \psi_{ji}^H(E) &= \begin{cases} -\psi_{ij}(E), & E \in \Omega_j, \\ 0, & E \notin \Omega_j, \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

令 Ψ 是以所有基函数 ψ_{ij}^H 作为列向量的矩阵, I 是粗网格到细网格的变换矩阵(若第 j 个粗网格包含第 i 个细网格, $I_{ij} = 1$, 否则 $I_{ij} = 0$). 根据多尺度方法原理, 小尺度速度和压力场可由相应的基函数近似表示出来, 那么 \mathbf{v}^f , \mathbf{p}^f 可近似表示为

$$\mathbf{v}^f \approx \Psi \mathbf{Q}^c, \mathbf{p}^f \approx I \mathbf{p}^c, \quad (22)$$

粗网格表面压力 λ^c 可表示为

$$\lambda^c = \{\lambda_i\}, \lambda_i^c = \int_{\Gamma_{ij}} \lambda^f \psi_{ij} \cdot \mathbf{n} \, ds, \quad (23)$$

令 J 是粗网格表面到细网格表面的变换矩阵(若第 j 个粗网格表面包含第 i 个细网格表面, $J_{ij} = 1$, 否则 $J_{ij} = 0$). 根据式(22), 对小尺度方程进行组装得到大尺度方程组

$$\begin{bmatrix} \Psi^T & 0 & 0 \\ 0 & I^T & 0 \\ 0 & 0 & J^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & C & D \\ C^T & 0 & 0 \\ D^T & 0 & 0 \end{bmatrix}^f \begin{bmatrix} \mathbf{v}^f \\ -\mathbf{p}^f \\ \lambda^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I^T \mathbf{q}^f \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

综合式(22)和(23), 大尺度方程组可写为

$$\begin{bmatrix} B^c & C^c & D^c \\ C^{cT} & 0 & 0 \\ D^{cT} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^c \\ -\mathbf{p}^c \\ \lambda^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{q}^c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

其中, $B^c = \Psi^T B^f \Psi$, $C^c = \Psi^T C^f I$, $\mathbf{q}^c = I^T \mathbf{q}^f$, $D^c = \Psi^T C^f J$. 小尺度速度可由相应的基函数表示出来, 即 $\mathbf{v}^f \approx \Psi \mathbf{Q}^c$.

3 饱和度方程求解

3.1 有限体积法计算格式

由式(1)和(2)可得湿相饱和度方程

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}_w = q_w, \quad (26)$$

$$\mathbf{v}_w = f_w \left[\mathbf{v} + \mathbf{K} \lambda_n \cdot \nabla p_c + \mathbf{K} \lambda_n (\rho_w - \rho_n) \mathbf{G} \right], \quad (27)$$

本文采用有限体积法对饱和度方程进行离散. 首先在 Ω_i 上对方程进行积分, 可得

$$\int_{\Omega_i} \phi \frac{\partial S}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial \Omega_i} \left\{ f_w \left[\mathbf{v} + \mathbf{K} \lambda_n \cdot \nabla p_c + \mathbf{K} \lambda_n (\rho_w - \rho_n) \mathbf{G} \right] \cdot \mathbf{n}_i d\Gamma \right\} = \int_{\Omega_i} q_w d\Omega. \quad (28)$$

方便起见, 这里省略掉了 S_w 下标 w . 应用 θ 准则可得到下述离散格式:

$$\begin{aligned} & \frac{\phi_i}{\Delta t} (S_i^{k+1} - S_i^k) + \frac{1}{|\Omega_i|} \sum_{\gamma_{ij}} (\theta F_{ij}(S^{k+1}) + (1-\theta) F_{ij}(S^k)) \\ & = q_w(S_i^k), \end{aligned} \quad (29)$$

其中,

$$\begin{aligned} F_{ij}(S) &= \int_{\gamma_{ij}} f_w(S)_{ij} \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{ij} + \mathbf{K} \lambda_n \cdot \nabla p_c \cdot \mathbf{n}_{ij} \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{K} \lambda_n \cdot (\rho_w - \rho_o) \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}_{ij} \right) d\Gamma, \end{aligned} \quad (30)$$

式中, 上标 k 表示第 k 个时间步. 再边界面 A_k 上, 采用上游迎风格式计算, 如下:

$$f_w(S)_{ij} = \begin{cases} f_w(S_i), & \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{ij} \geq 0, \\ f_w(S_j), & \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{ij} < 0, \end{cases} \quad (31)$$

对饱和度方程显示求解, 即 $\theta=0$. 为达到计算稳定性, 时间步长采用CFL条件, 如下:

$$\Delta t \leq \frac{\phi_i |\Omega_i|}{v_i^{\text{in}} \max\{f'_w(S)\}_{0 \leq S \leq 1}}, \quad (32)$$

式中

$$v_i^{\text{in}} = \max(q_i, 0) - \sum_{\gamma_{ij}} \min(v_{ij}, 0),$$

$$\frac{\partial f_w}{\partial S} = \frac{\partial f_w}{\partial S^*} \frac{\partial S^*}{\partial S} = \frac{1}{1 - S_{wc} - S_{or}} \frac{\partial f_w}{\partial S^*}, \quad (33)$$

式中, S^* 为归一化后的水相饱和度; S_{wc} 为束缚水饱和度; S_{or} 为残余油饱和度.

3.2 裂缝交叉处饱和度计算

当裂缝相交时, 关键问题是裂缝交叉处饱和度的计算. 主要有两种处理方法: 一是基于Delta-Star传导率计算的上游迎风格式^[23], 另一种则是上游迎风加权计算格式^[24], 本文采用精度较高的加权格式. 假设有 N_l 个裂缝单元 e_i 相交于 I .

每个裂缝单元相应的分流函数为 f_{w,e_i} , 在交叉处的渗流速度为 v_{f,e_i} ; 定义 I 处的流入和流出如下:

$$\begin{cases} v_{f,e_i} \leq 0, & 0 < i \leq N \text{ (流出)}, \\ v_{f,e_i} \geq 0, & N < i < N_l \text{ (流入)}. \end{cases} \quad (34)$$

由质量守恒定律可知

$$\sum_{i=N+1}^{N_l} v_{f,e_i} = -\sum_{i=1}^N v_{f,e_i}. \quad (35)$$

进一步, 由上游迎风计算格式定义, 可得

$$\sum_{i=N+1}^{N_l} f_{w,i} v_{f,e_i} = -\sum_{i=1}^N f_{w,i} v_{f,e_i} = -f_{w,I} \sum_{i=1}^N v_{f,e_i}, \quad (36)$$

因此, 裂缝交叉处 I 的上游迎风加权分流函数为

$$f_{w,I} = -\frac{\sum_{i=N+1}^{N_l} f_{w,i} v_{f,e_i}}{\sum_{i=1}^N v_{f,e_i}}. \quad (37)$$

4 数值算例

本节首先通过一个数值算例与实验结果的对比验证了程序的正确性; 然后通过复杂离散裂缝模型数

值算例进一步验证了方法的正确性和程序的鲁棒性.

4.1 简单离散裂缝模型算例

考虑图3和4所示的物理模型, 模型大小为 $1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 0.025 \text{ m}$, 内部流动可视为平面流动. 图3中包含一条垂直裂缝, 图4中包含两条交叉裂缝. 物理模型均采用玻璃沙(160~180目)结合环氧树脂胶结压实而成, 然后由透明有机玻璃板封装. 基岩可视为是均质的, 渗透率 $K_m=10 \text{ } \mu\text{m}^2$, 孔隙度 $\phi \approx 0.4$. 裂缝开度均为 1 mm , 渗透率 $K_f=a^2/12=8.33 \times 10^{-4} \text{ } \mu\text{m}^2$. 水的黏度 $\mu_w=1 \text{ mPa s}$, 油的黏度 $\mu_o=5 \text{ mPa s}$, 水的密度 $\rho_w=1000 \text{ kg/m}^3$, 油的密度 $\rho_o=800 \text{ kg/m}^3$.

模型初始时刻饱和油, 油水相的流度为 $\lambda_w = S_w/\mu_w$, $\lambda_o = 1 - S_w/\mu_o$. 针对上述两个物理模型采用本文方法进行数值模拟, 结果如图3和4所示. 通过对比数值模拟结果和实验结果, 可以发现数值计算结果与实验结果基本一致, 验证了本方法的正确性. 通过对比多尺度数值结果与离散裂缝模型的数值结果可以看出, 多尺度结果与完全的离散裂缝模型的结果也基本一致. 图5给出了多尺度方法求解的速度与传统数值方法求解离散裂缝模型得到的速度的对比曲线. 图5(a)表示单裂缝模型中沿 $x=0.5 \text{ m}$ 的速度分布, 图5(b)表示交叉裂缝模型中沿 $y=0.5 \text{ m}$ 的速度分布. 图5说明速度误差较小, 多尺度方法求解的结果较为准确. 同时, 多尺度方法计算时间相比于传统数值方法缩短了40%. 对比结果表明, 多尺度方法在保证计算精度的同时可以大幅缩减计算时间.

4.2 复杂离散裂缝模型算例

考虑一个复杂裂缝介质模型, 研究区域为 $180 \text{ m} \times 180 \text{ m}$, 模型包含10条裂缝, 如图6所示. 基岩为均质各向同性, 孔隙度 $\phi=0.2$, 渗透率 $K_m=1 \text{ } \mu\text{m}^2$. 所有裂缝开度均为 $a=1 \text{ mm}$, 渗透率 $K_f=a^2/12=8.33 \times 10^{-7} (10^{-3} \text{ } \mu\text{m}^2)$. 油水的物性参数与4.1算例一致. 油藏初始含水饱和度为零, 基岩和裂缝的油相流度 $\lambda_o = 1 - S_w/\mu_o$, 水相流度 $\lambda_w = S_w/\mu_w$. 采用 10×10 粗网格划分, 细网格采用三角网格. 采用相对 L^2 范数表示速度相对误差

$$e_v = \frac{\|\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_{ms}\|_2^2}{\|\mathbf{v}_f\|_2^2}, \quad (38)$$

其中, \mathbf{v}_f 表示参考解得到的速度, \mathbf{v}_{ms} 表示多尺度方

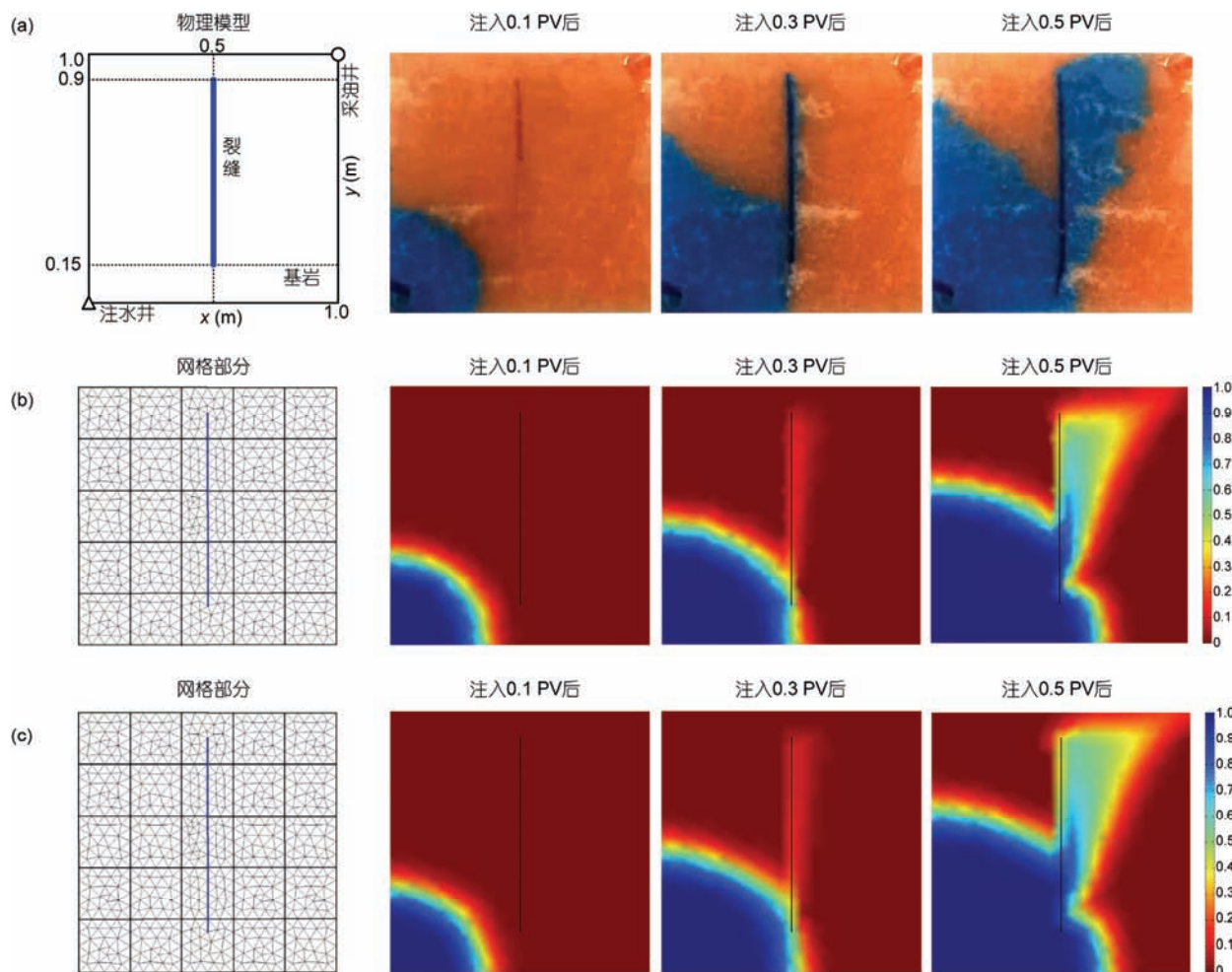


图3 (网络版彩色)单裂缝模型及其含水饱和度结果对比。(a) 物理实验^[22]; (b) 多尺度解; (c) 参考解

Figure 3 (Color online) Comparison of water saturation profiles between experimental results and multiscale results. (a) Physical experimental results^[22]; (b) MsMFEM results; (c) DFN results

法得到的速度。

图7给出了0.5 PV时的含水饱和度分布对比, 其数值计算结果表明, 多尺度混合有限元能够准确描述离散裂缝油藏整体流动特征。图8给出了参考解和多尺度解得含水率曲线对比, 两者基本一致, 进一步验证了多尺度方法的正确性与程序的鲁棒性。针对图6所示的裂缝介质模型, 图9给出了多尺度混合有限元方法在不同粗网格剖分下得到的速度相对误差。从误差分布图可以看出, 粗网格划分对多尺度模拟结果有一定影响, 当 x 方向和 y 方向上的粗网格数量相近时, 速度误差较小, 模拟效果较好。

5 结论

(1) 离散裂缝模型对介质中的每条裂缝予以显

示表征, 具有计算精度高、拟真性好的优点。但随着现代地质建模技术的发展, 地质模型可能包含数百万甚至数亿个网格, 采用传统的数值方法对其进行求解, 计算量巨大, 将超出当今计算机的计算能力。本文提出离散裂缝模型的多尺度混合有限元计算格式, 在保证计算精度的同时大幅减小计算量, 非常适合对裂缝性油藏进行精细流动模拟。本文以2D裂缝介质为例, 为了进行3D离散裂缝模型的多尺度模拟, 可以使用自适应的网格剖分技术。这种网格剖分技术使用非结构化的粗网格, 具有较高的灵活性, 可以适应裂缝复杂的几何形态, 进而进行3D的多尺度离散裂缝模拟。

(2) 结合离散裂缝模型和模拟有限差分法构建速度基函数, 可以准确捕捉基岩和裂缝之间的相互

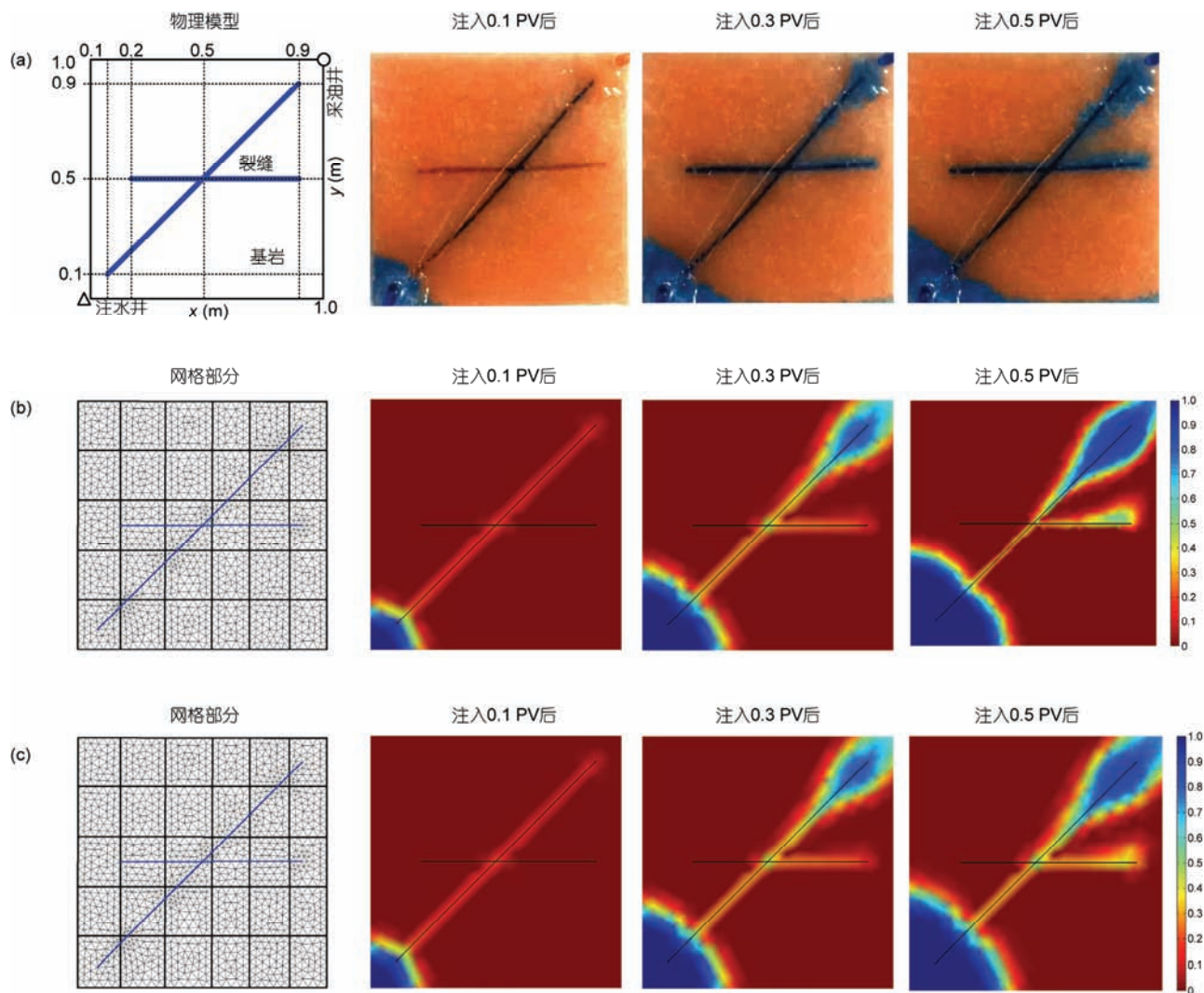


图4 (网络版彩色)交叉裂缝模型及其含水饱和度结果对比。(a) 物理实验^[22]; (b) 多尺度解; (c) 参考解

Figure 4 (Color online) Comparison of water saturation profiles between experimental results and multiscale results. (a) Physical experimental results^[22]; (b) MsMFEM results; (c) DFN results

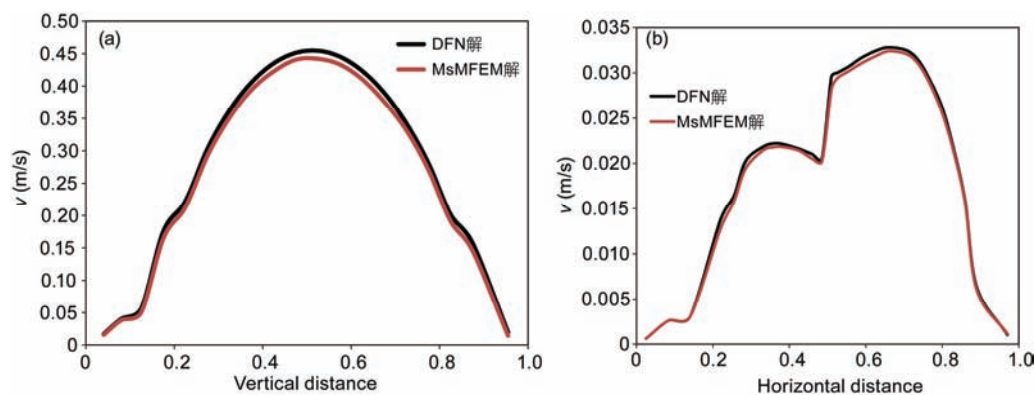


图5 (网络版彩色)多尺度解与参考解速度对比。(a) 单裂缝模型中沿 $x=0.5$ m的速度分布; (b) 交叉裂缝模型中沿 $y=0.5$ m的速度分布

Figure 5 (Color online) Velocity comparison for fine-scale and MsMFEM solutions. (a) Velocity distributions along y -direction on $x=0.5$ m of single fracture model; (b) velocity distributions along x -direction on $y=0.5$ m of cross-fracture model

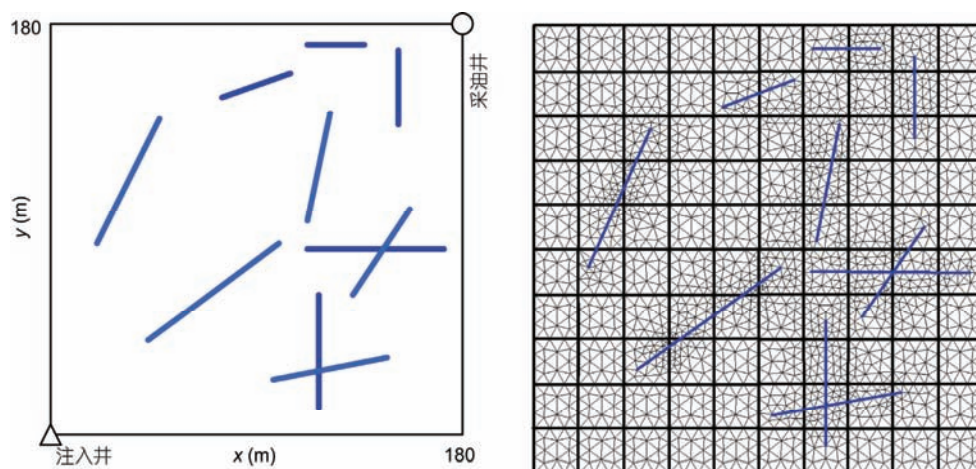


图6 (网络版彩色)离散裂缝模型及多尺度网格剖分

Figure 6 (Color online) Discrete fracture experimental model and the multiscale grid used in numerical simulation

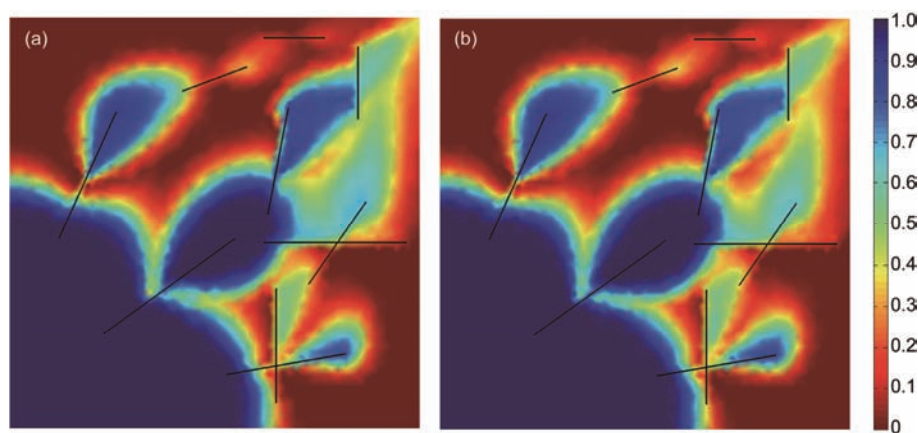


图7 (网络版彩色)注入体积为0.5 PV时饱和度分布图. (a) 参考解; (b) 多尺度解

Figure 7 (Color online) Comparison of injected fluid saturation profiles between fine-scale numerical results and MsMFEM results at 0.5 PV. (a) Reference solution; (b) MsMFEM solution

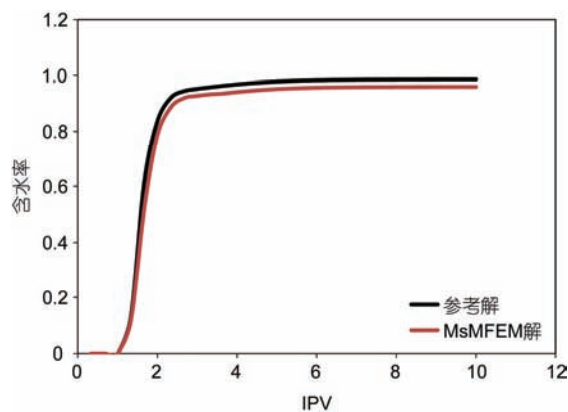


图8 (网络版彩色)含水率曲线对比

Figure 8 (Color online) Water-cut comparison for MsMFEM

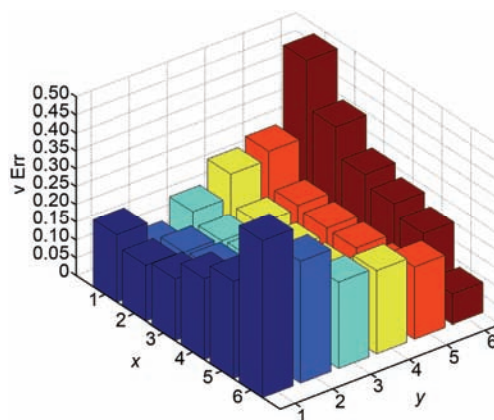


图9 (网络版彩色) MsMFEM在不同粗网格剖分下得到的速度误差

Figure 9 (Color online) MsMFEM velocity error for different coarse meshes

作用,从而可以对离散裂缝油藏进行精细流动模拟.而且模拟有限差分法有很高的灵活性,原则上适用于任意复杂网格,具有明显优势.使用超样本技术计算长裂缝和复杂裂缝基函数,可以提高基函数计算

的精度.

(3) 多尺度混合有限元的基函数可以采用并行计算得到,进一步减少计算量.因此,文章提出的方法对于裂缝性油藏数值模拟有很高的潜在价值.

参考文献

- Huang Z Q, Yao J, Li Y J, et al. Numerical calculation of equivalent permeability tensor for fractured vuggy porous media based on homogenization theory. *Commun Comput Phys*, 2011, 9: 180–204
- Huang Z Q, Yao J, Wang Y Y, et al. Numerical simulation on water flooding development of fractured reservoirs in a discrete-fracture model. *Chin J Comput Phys*, 2011, 28: 41–49
- Yao J, Huang Z Q, Wang Z S, et al. Mathematical model of fluid flow in fractured vuggy reservoirs based on discrete fracture-vug network (in Chinese). *Acta Petrol Sin*, 2010, 31: 815–819 [姚军, 黄朝琴, 王子胜, 等. 缝洞型油藏的离散缝洞网络流动数学模型. *石油学报*, 2010, 31: 815–819]
- Huang Z Q, Yao J, Wang Y Y, et al. Numerical study on two-phase flow through fractured porous media. *Sci China Tech Sci*, 2011, 54: 2412–2420
- Huang Z Q, Yao J, Li Y J, et al. Permeability analysis of fractured vuggy porous media based on homogenization theory. *Sci China Tech Sci*, 2010, 53: 839–847
- Barenblatt G I, Zheltov I P, Kochina I N. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata]. *J Appl Math Mech*, 1960, 24: 1286–1303
- Warren J E, Root P J. The behavior of naturally fractured reservoirs. *Soc Pet Eng J*, 1963, 3: 245–255
- Karimi-Fard M, Gong B, Durlofsky L J. Generation of coarse-scale continuum flow models from detailed fracture characterizations. *Water Resour Res*, 2006, 42: 1–9
- Bourbiaux B. Fractured reservoir simulation: A challenging and rewarding issue. *Oil Gas Sci Tech*, 2010, 65: 227–238
- Zhou Z F. *Theory on Dynamics of Fluids in Fractured Medium* (in Chinese). Beijing: Higher Education Press, 2007 [周志芳. 裂隙介质水动力学原理. 北京: 高等教育出版社, 2007]
- Wang Y Y, Yao J, Huang Z Q. Review on flow models of fractured media (in Chinese). *J Daqing Pet Inst*, 2011, 35: 42–48 [王月英, 姚军, 黄朝琴. 裂隙岩体流动模型综述. *大庆石油学院学报*, 2011, 35: 42–48]
- Christie M A. Upscaling for reservoir simulation. *J Pet Tech*, 1996, 48: 1004–1010
- Durlofsky L J. Numerical calculation of equivalent grid block permeability tensors for heterogeneous porous media. *Water Resour Res*, 1991, 27: 699–708
- Hou T Y, Wu X H. A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media. *J Comput Phys*, 1997, 134: 169–189
- Weinan E, Engquist B. The heterogeneous multi-scale method. *Lecture Notes Comput Sci Eng*, 2002, 347: 89–110
- Juanes R. A variational multiscale finite element method for multiphase flow in porous media. *Finite Elem Anal Des*, 2005, 41: 763–777
- Efendiev Y, Galvis J, Hou T Y. Generalized multiscale finite element methods (GMsFEM). *J Comput Phys*, 2013, 251: 116–135
- Chen Z, Hou T Y. A mixed multiscale finite element method for elliptic problems with oscillating coefficients. *Math Comput*, 2003, 72: 541–576
- Gulbransen A, Hauge V L, Lie K A. A multiscale mixed finite element method for vuggy and naturally fractured reservoirs. *SPE J*, 2009, 15: 395–403
- Zhang N, Yao J, Huang Z Q, et al. Accurate multiscale finite element method for numerical simulation of two-phase flow in fractured media using discrete-fracture model. *J Comput Phys*, 2013, 242: 420–438
- Akkutlu I Y, Efendiev Y, Vasilyeva M. Multiscale model reduction for shale gas transport in fractured media. *Comput Geosci*, 2015, 20: 1–21
- Huang Z Q, Gao B, Wang Y Y. Two-phase flow simulation of discrete fracture model using a novel mimetic finite difference method (in Chinese). *J China Univ Pet*, 2014, 38: 97–105 [黄朝琴, 高博, 王月英. 基于模拟有限差分法的离散裂缝模型两相流动模拟. *中国石油大学学报: 自然科学版*, 2014, 38: 97–105]
- Karimi-Fard M, Durlofsky L J, Aziz K. An efficient discrete-fracture model applicable for general-purpose reservoir simulators. *SPE J*, 2004, 9: 227–236
- Monteagudo J E P, Firoozabadi A. Control-volume method for numerical simulation of two-phase immiscible flow in two-and three-dimensional discrete-fractured media. *Water Resour Res*, 2004, 40: 196–212

Summary for “基于多尺度混合有限元的离散裂缝两相渗流数值模拟”

Two-phase numerical simulation of discrete fracture model based on multiscale mixed finite element method

ZHANG QingFu, HUANG ZhaoQin^{*}, YAO Jun^{*}, WANG YueYing & LI Yang

School of Petroleum Engineering, China University of Petroleum (Huadong), Qingdao 266580, China

^{*} Corresponding authors, E-mail: emc.group.upc@gmail.com; RCOGFR_UPC@126.com

Fractured reservoirs are characterized by complex fractures on multiple scales and are quite difficult to model. Numerical simulation of fractured media is usually done based on dual-porosity model and equivalent continuum model. Dual-porosity model treats matrix system and fracture system as two parallel continuous systems coupled by crossflow function. This model is only valid for reservoirs with highly developed fractures. Equivalent continuum model treats fractured media as a continuum media and equivalent absolute permeability tensors for each grid block are calculated to describe the heterogeneity of the reservoir. This model is efficient only when there exist representative element volume and the equivalent permeability are difficult to decide. Both models treat the fractured media as a simplified model and cannot describe the multiscale flows exactly, because they cannot precisely consider the diversion effect of the fractures. Although the discrete fracture network (DFN) model can provide a detailed representation of flow characteristic, traditional numerical method does not suitable for DFN. The major difficulty is the size of the computation. A tremendous amount of computer memory and CPU time are required, and this can exceed limit of today's computer resources. Upscaling methods are generally used to reduce the computational cost. However, it is not possible to have a priori estimates of the errors that are present when complex flow processes are investigated using coarse models constructed via simplified settings. In this paper, multiscale mixed finite element method (MsMFEM) is proposed to simulate water/oil two phase flow in discrete fracture media. By combining MsMFEM with the discrete fracture model, we aim towards a numerical scheme that facilitates fractured reservoir simulation without upscaling. The MsMFEM uses a standard Darcy model to approximate pressure and fluxes on a coarse grid. The multiscale basis functions are constructed numerically by solving local differential equations on the fine-scale grid. The advantage of MsMFEM is that the basis functions capable of reflecting information about fractures within elements. Therefore, this method can capture the fine-scale effects on the coarse grid, that is, multiscale method can reduce the computational cost and keep high calculation accuracy at the same time. Traditional numerical methods generally difficult to deal with complex grid element, in this paper, mimetic finite difference (MFD) method is used to construct the multiscale basis functions due to its local conservativeness and applicability of complex grids. Compared with traditional multiscale mixed finite element methods, this method is suitable for arbitrary complex grid system. This paper introduced fundamental principles of the multiscale mixed finite element method and described the numerical scheme of discrete fracture model based on MsMFEM in detail. Then we deduced discrete fracture model computing formulate for the multiscale basis function by using mimetic finite difference method. Oversampling technique is applied to get more accurate small-scale details. IMPES scheme is used in the two-phase flow simulation. Physical experiment is used to prove the validity the multiscale method. The numerical results show that compared with traditional numerical method, the MsMFEM can represent the fine-scale flow in fracture networks exactly and meanwhile has a higher computational efficiency.

fractured media, multiscale mixed finite element method, discrete fracture model, mimetic finite difference method, two-phase flow

doi: 10.1360/N972016-00584