第13卷 第1期
1983年3月25日

力学进展
ADVANCES IN MECHANICS

Vol. 13 No. 1
Mar. 25, 1983

流体力学中的有限元法

北京航空学院 李椿萱

有限元法的概念可以回溯到我国南北朝时的祖冲之应用多边形推算圆周率的问题。在流体力学领域里，von Karman的动量积分方法也可被看成是有限元的一种原始形式。但应用现代有限元理论来模拟流体力学问题的历史并不长，*1965*年两位固体力学工作者Zienkiewicz与Cheung在一篇介绍性文章〔*1*〕中提出用有限元法解决位势场问题的可能性。虽然这篇文章没有求解具体的流体力学问题，但可以认为是有限元法应用于流体力学问题的起点。那时有限元法在固体力学上的应用已取得了很大的进展，特别是在结构力学中的应用基本上已达到成熟的阶段。

在〔*1*〕发表以后的几年里，有限元法被迅速地应用到渗流、位势流、低雷诺数流、声学以及润滑等领域中的数值模拟工作。*70*年代初期，由于科研与生产的需要，有关水力资源、环境工程方面的有限元模拟工作取得了较大的进展；在其它领域如低速空气动力学、粘性流等问题的应用也受到了越来越广泛的注意。*1974*年在英国召开的首次专题国际会议中，会议的*85*篇论文包括了自位势流到磁流与分子气体动力学的几乎全部流体力学领域的有限元工作。这些论文被收入会议集〔*2*〕中，其中有关方法以及一般性探讨或个别领域的叙述等部分论文被编成论文集〔*3*〕的第*1*，*2*卷于*1975*年出版。

*1975*年以来，一般性的或个别领域的专题会议相继召开。于*1974*年与*1980*年分别在意大利和加拿大召开的第*2*，*3*届国际会议上所发表的有关方法、一般性探讨与综述的部分论文已被分别收集在〔*3*〕的第*3*，*4*集出版，而第*4*届会议也已于*1982*年在日本召开。在研究活动方面，这时期以计算跨音速流、包括地球流体力学在内的Navier-Stokes方程组以及高Peclet数对流-耗散问题的进展速度较大。此外，有关无粘全速流动（即有关Euler方程组的求解）问题、高雷诺数流以及多相孔隙介质流等难度较大的课题的有限元研究也随着有限元法的发展以及科研与生产的需要开始活跃起来。

另一方面，由于流体力学问题一般都涉及各类非线性现象，在固体力学中得到充分发展的一些传统有限元方法往往无法适用于所考虑的某些类型的问题，特别是可压缩流、高雷诺数流与高Péclet数对流-耗散（包括湍流）问题的模拟工作。因此，随着有关问题的有限元研究工作的开展，有限元的方法与数学理论的研究开始超出了传统的椭圆型问题的范畴，并且也取得了较大的进展。

一、流体力学问题中的有限元法

1.1 边值问题的有限元模拟 传统的有限元法大致可分为三类，即由有限元离散结合Rayleigh-Ritz，加权剩余以及最小二乘方等三种积分形式的古典近似方法。

Rayleigh-Ritz有限元法实际上是变分法的直接有限元离散化。早期的流体力学问题的有限元计算便是以这方法为主〔4-7〕。这些早期的有关工作主要是由固体力学工作者开展的，他们把固体力学中有限元法的研究成果直接用到具有类似控制方程的流体力学的某些问题中，这些问题属于一般存在变分原理的椭圆型流动，以及相应的非定常流动问题(包括Helmholtz问题，如〔7〕等)。但一般流体力学问题的控制方程组不一定存在有相应的变分原理，这使Rayleigh-Ritz法的应用具有很大的局限性。加权剩余法、最小二乘方法以及近年来发展起来的一些伪变分方法弥补了上述方法的缺陷。这里所谓的伪变分方法只是笼统的定义，它包含自受制约的变分形式(包括引入罚函数)以至引入伴随函数的泛函形式（如最小二乘方法）等在内的求极值的一些积分形式。Zienkiewicz〔8〕对有关的工作已作了综述。

在加权剩余法中，较常用的是Galerkin和配置有限元法。其中Galerkin法已广泛应用于低雷诺数流(如〔9,10〕)，孔隙介质流(如〔11,12〕)，以及润滑〔13〕等问题。对一般的对流-耗散问题的应用则可见〔14〕。总的来说，Galerkin法基本上可适用于任何线性或非线性椭圆型方程组（边值问题）的求解。但在计算高雷诺数流、高Péclet数对流-耗散（或弥散）以及类似的问题时，这方法将产生严重困难〔12〕。在解决跨音速问题时，Chan等〔15〕也发现采用Galerikn法计算超临界流无法求得收敛解。这些困难显示了传统的Galerkin方法不适于求解一些流场发生局部退化或呈现混合型特性的问题。

配置有限元法的应用范围较小。早期的应用以结合积分方程法求解气体动力学问题时有较好的效果〔16〕，并可推广到超音速流的应用〔17〕。近年来，这方法在流体力学的其它领域已逐步受到重视，Carey与Finlagson在〔18〕中提出使用正交配置法分析传热问题，Frind与Pinder在〔19〕中利用配置法求解一般位势流问题。采用配置法可得到较Galerkin法为窄的带宽，推导出的有限元类比也较简单〔19〕。它的缺点在于配置的位置是一关键性因素，它对数值计算的稳定性异常敏感，在模拟复杂的几何体形时较困难。数值计算实验表明，对一些问题所需的网格要比用Galerkin法的细，虽然推导出的有限元类比较简单，带宽较小，但从储存的角度上看并没有带来好处。何况所用的元素最低必须是C^1连续〔20〕。

为解决传统的有限元法在模拟各类流体力学问题时所遭遇到的困难，近年来发展了以各类不同的插值函数为测验（权）函数的加权剩余法。自1976年以来，Zienkiewicz等发表了一系列的文章(如〔21,22〕)，参照有限差分法中的迎风格式建立了一类迎风测验函数来解决高Péclet数对流-耗散等问题。〔22〕对这方法及其应用作了综述。事实上，Chan等〔15〕在计算小扰动跨音速流时已应用了类似的概念来处理超音速部分的有限元离散。在处理适度的雷诺数流时，Barrett等〔23〕提出三种新的插值函数作为试探函数与测验函数。此外一些为解决高雷诺数流问题而发展起来的弱型有限元法在近年来陆续出现（如〔24〕等)。

1.2 初、边值问题的弱型有限元法 在流体力学中，初、边值问题不仅包括一些呈均匀抛物型特性的非定常流动，还包括各类非椭圆型，特别是混合型的定常与非定常流动。求解一般初、边值问题的一个常用方法是对给定问题的空间域进行有限元离散，导出对时间（或拟时坐标）的一组常微分矩阵方程，再应用不同的方式对这组矩阵方程进行时间(或拟时坐标)积分。这方法一般称为半离散有限元格式。对于一些简单的问题，时间积分可以通过解析方法直接求得——半解析格式；一般的问题可以采用一般的数值方法(如Runge-Kutta法〔9〕，摄动积分法〔25〕等），有限差分或有限元等方法。

Cheng〔26〕在考虑用非定常涡量流函数方程组计算粘性流动问题时采用了对空间进行Rayleigh-Ritz近似，对时间进行中间差分的格式。同样的方法也可见于〔27,28〕，另外以Di

Carlo与Piva[29]提出混合型Galerkin法来求解同类的问题。对于一般非线性抛物型问题以及某些双曲型问题来说，对空间进行有限元离散、对时间(或拟时坐标)进行差分离散的有限元-差分格式已被许多数值实验证实为效果较好的方法。但在求解一些较复杂的问题（如混合型问题等）时，要建立适当的有限元-差分格式仍面临一定的困难。

在对时间进行有限元离散的格式中，最常用的是Galerkin加权的形式（如〔30〕等）。为求解更广泛的流体力学问题，〔31,33〕等分别提出各类有限元方案。对时间进行Galerkin加权处理是与中间差分相当的，Kawahara[31]提出，这类格式在求解一般抛物型问题时较稳定。但在处理高雷诺数流或高Péclet数耗散问题，以及其它以对流效应为主的问题时，这类格式必然导致数值解中寄生振荡的产生。应用迎风格式可以比较好地克服这困难[32]。

尽管Lesaint[34]提出对时空进行Galerkin加权来处理双曲型方程；Chan等[15]结合迎风格式，以及Glowinski等[35]采用优化理论较成功地计算了跨音速流问题；但对存在有强激波的混合型问题，这类方法具有一定的局限性。在分析高速碰撞问题时，Chan等[36]曾应用Galerkin与最小二乘方法计算轴向碰撞问题的Euler方程组，但都导致发散的结果。为解决混合型问题，出现了两类有限元方法：第一类为双曲型法。一个典型的格式是首先对给定问题的控制方程进行时间（或拟时坐标）的Lax-Wendroff二阶近似展开，再对所导出的方程进行Galerkin加权。Kawahara[37]应用这方法分析了浅水波问题。另一个格式是以人工耗散项替代上述的Lax-wendroff格式中的二阶偏导项。Jamet等[38]便是采用这概念来求解守恒型Euler方程组的。但在〔36〕中，Chan等却采用不同的概念，直接导出不含人工粘性项的、守恒型Euler方程组的时空弱型有限元格式。第二类方法是混合型法。这类格式在一定程度上是以跨音速问题的物理意义为依据的，〔15〕与〔39,40〕为其中的典型。但这些格式都仅适用于小扰动跨音速流，要把它们直接扩展用到全位势方程或Euler方程组还存在一定的困难。

1.3 初、边值问题的有限元最小二乘方法 从二乘方误差最优化的意义上考虑，最小二乘方法可以适用于任何型的问题。因此，近年来受到了广泛的注意。Lynn与Arya[41]首先提出以这方法计算不可压缩流的问题。他们的格式已被尝试应用到流体力学中的各类问题上去(见〔42〕的总结)。作者指出，在求解边界层问题时，若沿拟时坐标(平行于壁面的坐标)采用最小二乘方法将比用Galerkin法优越。最近，Kanarachos[43]在考虑不可压缩的粘性流时提出一个结合加权剩余与最小二乘方的有限元格式——离散最小二乘方法。作者建议通过加权剩余法首先求出控制方程的有限元模拟(类比)方程，再对这模拟方程进行最小二乘方的优化。

在计算跨音速流动中，最小二乘方法已被证实为一个较为成功的方法。(见〔15〕与〔35〕)最近，Carey等[44]利用与〔43〕相类似的格式求解了Tricomi方程。作者首先以配置法导出元素的矩阵方程。再以最小二乘方法将余函数（局部）最小化，此外，在求解定常Euler方程组时，Fletcher[45]提出另一类有限元最小二乘方格式。这格式的特点是将连续方程与动量方程的二乘方误差分别乘上可调的纯量系数以后求和，再进行最小化。然而，正如〔36〕所指出的，最小二乘方法不能适用于具有强激波的流动问题。这结果说明，虽然从二乘方误差的定义来看，最小二乘方法可被应用到任何型的流动问题，但在实际计算中，这方法仍存在一定的局限性。

1.4 弱解形式的对称性 在早期有关流体力学问题的有限元模拟的研究工作中已经发现，应用Rayleigh-Ritz与Galerkin有限元法求解非椭圆型流动问题往往面临一些带根本性的困难。因而导致一些空气动力学工作者对有限元法用于流体力学的可能性持保留态度。1975年Chan等[15]成功地以最小二乘方法计算小扰动跨音速问题，推动了有关的研究工作。但就一

般的有限元理论而言，有关的问题还并没有得到澄清。在最近的一篇文章〔46〕中，Barrett与Morton通过求解高Péclet数对流-耗散问题系统地探讨了这一问题。作者指出，对一给定问题，适当的（可行的）有限元格式必须建立在如下的基础上：寻求合适的测验空间让所给定问题的控制方程的双线性形式（即弱解形式）确切地或近似地对称。由于测验空间实际上是试探空间的对偶空间，对椭圆型问题来说，Galerkin法显然能保证这个对称性；对存在变分原理的流动问题来说，双线性形式的对称性也是可以保证的。但对不存在变分原理或非椭圆型问题（如高Péclet数问题），Rayleigh-Ritz法或Galerkin加权便不一定能保证双线性形式的对称性。

Lesaint在〔34〕中关于对称双曲型方程的Galerkin有限元解的探讨已间接说明了这一事实。1975年Chan等[36]应用了对称性的概念，通过对守恒型Euler方程组进行时空有限元离散导出相当于后退差分格式的测验空间，并建立了计算全速流动的激波逮捕格式。随后，Zienkiewicz等[21,22]也以类似的概念导出了包括后退格式为其特例的一组测验函数，建立迎风格式来解决高Péclet数对流-耗散问题。事实上，对称性的要求已出现在不少的有关工作中（如〔47〕等）。但〔46〕第一次系统地探讨了对给定问题的双线性形式（弱解形式）的对称性和求解这问题的有限元格式的合理性之间的关系，并正式提出通过双线性形式的对称性导出最优化有限元格式的可能性。作者以一维热方程为实例，提出两个求导测验（权）函数的方法，使给定问题的双线性形式分别保持确切的与近似的对称性。然而，实例的计算结果表明，保证近似对称的格式比确切对称的优越。也就是说，对一给定问题，能保证它的双线性形式确切地对称的有限元格式不一定就是最优化格式。

由此看来，如何推导最优化格式，为什么能保证确切对称的格式不如近似对称的格式，以及有关的一些数学问题还有待于澄清。当前，以下的结论似乎可以得到肯定：对给定的问题，可用的（适当的）有限元格式是建立在它的双线性形式的对称性基础上的。同时，对给定问题的双线性形式来说，对称性显然不存在唯一性。事实上，任何控制方程组的二乘方形式就是对称的双线性形式。只是在这里，试探函数必须具有较高阶的连续性。

二、不可压缩流的有限元模拟

不可压缩流的有限元模拟工作是在所有领域中取得较快发展的一个领域。由于存在有变分原理，位势流（Laplace方程）与蠕流（Stokes方程）的有限元模拟在早期工作中就已有了较大的进展。当前这方面的工作已进入成熟的阶段，并被实际应用到海洋、环境与化学等工程领域。在一般的粘性流问题中，低雷诺数流的有关工作起步较早。到70年代初，开始了以Galerkin有限元法为主的、对低和适量雷诺数问题的模拟工作。随着研究工作的开展，一些求解Navier-Stokes方程组的新的有限元格式相继出现，高雷诺数流的模拟也受到了越来越广泛的注意。近年来，研究工作已延伸到湍流的计算。

2.1 无粘流问题 不可压缩的位势流问题是由位势函数或流函数的Laplace方程来制导的，所以Rayleigh-Ritz有限元法可直接应用于这类问题的计算。早期的有关活动基本上就是用这方法进行的（见〔4,5〕）。70年代初，Doctors[48]第一次尝试用非变分原理来建立位势流的有限元格式。随后，有限元法被迅速用到包括绕多物体（如叶栅）以及非定常的流动问题[49-55]。此外，Fortin[56]建立了非连续元的迎风格式来模拟不可压缩的Euler方程组。

由于有限元法可以处理任意几何性质的边界，应用有限元模拟自由面问题具有独特的优越性。有关无粘流自由面问题的有限元工作始于60年代末。其中第一类自由面问题，包括气蚀区、射流、分离、尾流与开式管等的理想流问题，其模拟主要采用变分法[57-60]。其中，Chan在他的博士论文[57]里，推导出包括重力因素与自由面的位势流有限元格式。随后，一些工作者将这格式进行了一系列的延伸，成为适用范围较广的格式。最近，O'Carroll[61]以流函数为场变量，导出包括气蚀区、分离包与开式管流等第一类自由面问题的变分原理，并对这方向的有限元工作作了综述。

无粘流的第二类自由面问题是表面波的传播问题。为了减少计算强度，Berkhoff[62]，Chen与Mei[63]等分别提出杂交法处理近场有限元解和远场解析解的衔接。在计算海波和离岸人造港口的相互作用时，Chen与Mei[63]用浅水波理论直接导出线性波方程的变分原理，并将远、近场衔接条件作为变分原理的自然条件包括到有限元的形式中。此外，Bettess与Zienkiewicz[64]引用无限元的概念来模拟远场的流动，并通过同近场有限元的结合，计算了各种表面波的传播、折射和衍射问题。在考虑船舶在水面上的运动，以及离岸结构受海波诱导所产生的运动时，表面波理论仍然成立。Rayleigh-Ritz和Galerkin法成功地模拟了这方面的问题[65,66]。另外，Ziankiewicz与Bettess[67]采用有限元-无限元的格式计算了流体、固体相互干扰的问题。随着造船和海上采油等方面的生产需要，近年来这方面的研究工作受到了更广泛的注意。*1978*年，在Int.J.Numer.Meth.in Eng.第*13*卷的一期有关流体、固体相互作用的特刊中，有限元法占了较大的比重。在特刊中，Zienkiewicz与Bettess[68]系统地阐述了所提出的流体、固体耦合有限元格式。文中还探讨了有关问题的边界积分（边界元）方法。实例的计算表明，有限元法的精确度高于边界元法。

2.2 蠕流问题 由于定常的Stokes方程组以及相应的流函数重调方程都存在变分原理，有关这类问题的有限元分析基本上都可以采用Rayleigh-Ritz法[6,69]。但Zienkiewicz与Taylor[70]提出以Galerkin法求解Stokes方程。由于Stokes方程中速度场含有二阶导数，而压力项仅含一阶偏导，若对速度场采用k次元素，则压力项只能采用$k-1$次近似。Crouseix与Raviart[71]从数学分析上对这混合型有限元格式进行了严格的证明。

2.3 Navier-Stokes方程组的有限元模拟 （可压缩与不可压缩的）粘性流问题是流体力学中较困难的课题。它的非线性现象随着雷诺数的增加而复杂化。有关适量雷诺数流的有限元模拟的研究工作，近年来已取得较大的进展。但对高雷诺数流的模拟却存在一定的困难，成为当前计算流体力学的重点研究领域之一。按控制方程的形式，计算粘性流的有限元法可分为三类：原始变量格式、涡量流函数格式与流函数格式。

1．*原始变量格式* 原始变量格式是以速度场与压强作为场变量对Navier-Stokes方程组直接进行有限元模拟的方法。Oden等[6,9]开创了这方面的工作。在这些文章里，作者们分别采用变分与Galerkin有限元法计算了包括定常和非定常流的各类实例。Taylor与Hood[10]进一步探讨了Galerkin有限元法在粘性流计算中有关的各方面问题。在次年的一篇报告[72]中他们指出，若速度场与压强用同次元素进行近似，则虽可得到较精确的速度解，但压强解将产生较大的误差，因而提出混合插值格式，即在有限元的近似中，用于速度场的元素应比用于压力场的高一次。此后，Navier-Stokes方程的模拟工作便主要集中了混合型有限元格式的应用与发展。

以原始变量为场变量的有限元形式大致上又可以分成如下几类：（*1*）整体格式——同时求解速度与压力场的格式；（2）分凝格式——速度场与压力场通过迭代法交替求解的格

式；（3）螺线速度格式——（对速度场）所采用的元素中须满足连续方程的格式；以及（4）罚函数格式——连续方程以罚函数的形式置入动量方程的弱解形式里的格式。绝大部分求解Navier-Stokes方程组的有限元格式都属于整体格式。除上述一些文章外，应用这类格式处理较低雷诺数流的还有〔73〕等；适量雷诺数流的有〔74〕等。虽然一般来说高雷诺数层流问题的有限元计算仍面临一定的困难，但近年来整体格式已开始被用来模拟一些湍流问题（见〔75—77〕等）。分凝格式的提出是为了克服应用整体格式时往往需要过大的电子计算机存储空间而引起的困难。Olson与Tuann[78]对这格式已作了系统的探讨，并指出它的计算效果还是较好的。Fortin[79]，Crouseix与Raviart[70]在70年代初提出了螺线速度格式。这方法的特点是运算较简单。但由于元素的试探函数必须满足连续方程，对不同的问题往往必须推导不同的“螺线元素”，所以不易把计算机程序标准化。罚函数有限元格式原是由Zienkiewicz与Godbole[80]提出来分析非牛顿流问题的。这方法已成功地应用到低与适量雷诺数流的模拟。Hughes等[81]，Bercovier与Engelman[47]等尝试以这类方法结合迎风格式来模拟高雷诺数流。Heinrich与Marshall在最近的一篇文章〔82〕中对这类格式又作了进一步的伸展。计算结果显示，这类迎风格式可适用于模拟雷诺数高达10^6量阶的绕方形气泡的流动；在其它一些问题中，这格式也可应用到较高的雷诺数流场。但对一般高雷诺数流的解算，这格式仍面临一定的困难。数值实验表明，类比方程迭代解的收敛性以及迭代格式本身对雷诺数都具有相当大的敏感性。另外，从理论上说，随着罚参数的增加，这格式所计算出的解应逼近确切解。但当罚参数增至某一量阶时，舍入误差将开始影响计算的精确度。Bercovier与Engelman[47]对这参数的数值影响作了一些探讨。但在给定雷诺数的情况下如何选择适当的格式，以至如何选择适当的罚参数还有待进一步的研究工作。

2．*涡量流函数格式* 这格式是以涡量流函数方程组作为控制方程的。这方程组的解算一般都采用分凝格式。早期的有关工作以传统的Galerkin有限元法为主（如〔83〕等）。但Cheng[26]则通过拟变分原理结合对时间的中间差分计算了非定常变截面管流的流场。1973，1974年间，Bratanow等发表了一系列的文章（见〔84〕等），开创了用有限元法计算绕振荡翼型的非定常流的研究。这些工作以涡量流函数方程组和压力Poisson方程为控制方程，并对这些方程进行变分处理。控制方程的边界条件通过Lagrange乘式分别置入相应的泛函里，再建立各自方程的有限元模拟方程。在求解涡函数时，时间积分是按中间差分格式来进行的。若对涡量采用C^0插值，流函数采用C^1插值，Bratanow等的这个格式可适用于计算雷诺数高达10^5量阶的问题。1975年，Bratanow等[85]对这方法又作了进一步的发展。他们对涡量使用了二次三角元，对流函数则以所导出的三角形C^2元素来进行近似。这一改进可使格式的应用范围达到$\mathrm{Re}=O(10^6)$。

近年来，涡量流函数格式有了进一步的发展。在他们的文章〔86〕中，Smith与Brebbia提出时间分凝、半稳式多步法来求解涡量流函数方程组，大大地提高了格式的稳定性和计算效率。这方法较好地模拟了尾流涡泄的状态。此外，Berrett与Demunshi[87]引用迎风格式求解了涡量流函数方程，并通过方形空腔的流场计算同有限差分和有限积分法进行了比较，对高至$\mathrm{Re}=400$的流场计算的结果表明，有限元法较其它两种方法优越。

3．*流函数格式* 求解流函数方程的较常用的方法为各式伪变分法（见〔88,89〕等）．流函数模型方程的优点在于只含有一个场变量，因而相应的有限元运算程序简单，所需要的机时相对最短。Olson与Tuann[78]在比较了以原始变量、流函数和差分格式计算$\mathrm{Re}=100$与400的方形空腔流场之后指出，用流函数格式是最简易与最精确的。但流函数格式仅适用于

二维问题。同时，流函数方程的双线性形式含有二阶偏导项，所以必须采用至少是 C^1 连续的有限元近似。

2.4　**边界层问题**　70年代初，Baker开始通过抛物型化的Navier-Stokes方程探讨了边界层流动的有限元模拟（见〔90〕等）。但应用有限元法求解 Prandtl 边界层方程的工作并不多见。其中，Lynn采用有限元最小二乘方法计算了二维边界层问题，并指出沿壁面方向若采取Galerkin格式，法向坐标采用最小二乘方法，则虽可求得同二维最小二乘方法相当的结果，但收敛速度慢，因而需要较长的机时[91]。事实上这是显然的，因为沿壁面的坐标实际上是拟时坐标，而Galerkin法则适于模拟椭圆型问题。由于湍流边界层涉及复杂的湍流耗散现象。直接求解Navier-Stokes方程组来分析这类问题存在较大的困难，因此，经过简化了的边界层方程组在这方面仍具有重要的意义。Popinski与Baker[92]建议用Galerkin法对垂直于壁面的坐标进行有限元离散，对平行于壁面的坐标则以Crank-Nicolson隐式差分来离散，尝试计算了湍流边界层问题。

2.5　**地球流体力学的有限元模拟**　在粘性不可压缩流的有限元模拟中，进展较大的一个领域是有关地球流体力学的工作。这领域的基本运动方程是包括重力、地球自转以及其它强制因素的非定常Navier-Stokes方程组。显然，在现阶段对这组方程进行直接的数值模拟是不现实的，必须按所考虑的实际问题对它进行不同程度的简化。浅水波理论是当前普遍采用的一个简化理论，它存在有三种不同的模型：第一类是在Navier-Stokes方程中假设垂直于水面的动量方程可被简化成压强与高度的平衡方程；第二类是以第一类模型为前题的将连续方程对深度进行平均，再将结果代入水平方向的动量方程；第三类是对第二类模型作进一步的简化，将水平方向的动量方程也对深度进行平均。其中，潮汐问题的模拟以采用最简易的模型(第三类模型)为最常见（见〔93—95〕等）。在有限元格式方面，一般都采用了半离散形式。浅水波理论的另一应用是估算湖泊、港湾与近海等的环流现象。虽然这方面的工作仍以第三类模型为主（如〔96,97〕等），但也出现第二类模型的工作[98]。为了更精确地计算环流问题，特别是对污染传输的估算，求解三维原始方程组（第一类模型）往往是必要的。最近，Cheng[99]考虑了这问题。

应用有限元模拟气象及其它大气流动问题虽不如对湖泊和海洋的流动问题那么广泛，但也取得了初步的成绩（见〔100,101〕）。在最近一篇文章〔102〕里，Steppeler 指出以有限元法模拟气象问题要较差分与频谱法优越。

地球流体力学的另一类问题是污染或其它物质在湖泊、海洋和大气中的耗散与弥散问题。这方面的有关工作以Galerkin法为主（如〔103—105〕等）。最近，在〔106〕中，Carmichael等建立了包括大气对流、耗散、大气快性与慢性化学反应、污染的清除、污染源的强度与位置等因素在内的一个大气传输模型，并以Galerkin法结合迎风格式模拟了这问题。此外，有关分层流方面的有限元模拟工作也取得了一些成绩（见〔107〕等）。

三、可压缩流的有限元模拟

一般的可压缩流是涉及速度、压力、密度与温度场的高度非线性问题，当前对这领域的问题进行数值模拟仍面临较大的困难。这些困难使这方面的研究工作基本上还停留在无粘流的问题上。其中的大部分工作又仅限于理想气体在等熵过程（至少是局部）的情况下所呈现的流动状态。即使在这种理想化情况下，流动的控制方程仍然是非线性的。

3.1 **亚音速流** 应用传统的Rayleigh-Ritz或Galerkin有限元法求解亚音速位势方程(或相应的二维流函数方程）不存在理论性的困难。它的非线性效应可通过迭代法、摄动法或局部线性化法来处理。亚音速流的模拟工作绝大部分是通过各式迭代过程来完成的。一般来说，可将位势(或流函数)方程中的非线性项看成是强制项，对控制方程先行线性化，再对所导出的Poisson形式进行变分处理或Galerkin加权，建立起相应的迭代有限元格式（见〔50〕等)。另一类迭代过程是先以合适的迭代格式将控制方程线性化，再对这线化形式进行伪变分处理或Galerkin加权（见〔108,109〕）。摄动法是由Carey提出的[110]。作者建议首先以来流马赫数为参数对位函数（或流函数）进行摄动，再对所导出的具有Poisson形式的各阶摄动方程进行变分处理。显然，这方法对低马赫数流具有较好的效果。Shen和他的学生提出了第三类方法。在〔111〕中，Shen与Habashi建议在每一个元素中对位势方程进行线性化。作者首先在元素中取平均流线坐标作为元素的局部坐标，并假设在这局部坐标系中Prandtl-Glauert近似成立。如此，求解位势方程便被简化成求解局部Laplace方程的解。另外，Shen与Chen[112]提出“流函数摄动”的概念对流函数方程进行局部线性化。数值实验表明，这两种局部线性化格式都可被应用到较高的亚音速流的计算。

应用有限元法求解亚音速积分方程的工作始于70年代初。一般来说，加权剩余法可被直接应用于积分方程。但为了减轻数值积分的工作量，有关的工作基本上都采用配置有限元法（见〔17,16〕等）。

3.2 **超音速流** 纯超音速流的有限元模拟工作并不多见。其中，应用有限元求解偏微分方程的工作仅见于〔113—115〕等。而主要的工作集中于求解超音速积分方程问题（见〔116—119〕等）。如同在亚音速流的情况一样，有关积分方程的工作基本都采用了配置法有限元法。在这些工作中值得一提的是Young与Brashears[118]和最近的沈与徐[115]的工作。这些作者采用了特征线作为有限元的网格，所以可以较好地反映双曲型问题的传播特性。

3.3 **跨音速流** 有限元法在跨音速流的应用最早见于1975年Chan等的工作[15]。随后的几年中，这方面的研究工作取得了较大的进展。

在〔15〕中，Chan等成功地以最小二乘方法求解了二维定常小扰动问题。在建立有限元格式时，作者提出如下的步骤来模拟超音速域的传播特性：在叠加元素矩阵方程的过程中，对超音速域中任一元素的矩阵方程对应于给定节点的方程将不叠加于其上游元素矩阵中该节点的方程以取消下游的扰动对上游的影响。这格式实际上是不连续元迎风格式的一种原始形式。随后，Hafez等[39]延伸了〔15〕的方法，并提出这类格式并非无条件稳定的，必须在格式中加入人工粘性和惯性项。此外，Ecer与Akay[120]导出全位势方程的一个变分泛函，并指出这变分形式在亚、超音速的情况下都能成立，但只有在亚音速时它的驻点才是极值。作者在计算整个流场时采用了这个变分泛函，并在超音速区中使用了〔15〕的概念，即令向上游的传播效应为零。同属这类混合型格式的还有〔40,121〕等。

另一类不同于上述的方法（椭圆型方法）是直接对控制方程进行传统的有限元离散的方法。Glowinski等在一系列的文章中提出几种最优化理论中的最小二乘方格式分析了跨音速流(见〔35,122〕等)。在他们的格式中，熵不等式是作为人工粘性项加入到所导出的泛函中。在〔123〕中，Bristeau以同样的概念建立起不含人工粘性项的格式。作者指出，同Glowinski等的方法相比较，他的方法所需的机时最短。另外，Wellford与Hafez在〔124〕里提出同上述方法等价的概念。在报告中，作者采用位势与纵向速度分量作为场变量，求出小扰动方程的一个含位势与纵向速度的混合变分原理。同类的格式还可见于Carey的工作（如〔125〕）。

3.4　全速流动的模拟　应用有限元法求解Euler方程组的工作虽然也始于70年代中期，但由于难度较高，进展并不大。

在考虑跨音速问题时，Phares与Kneile[126]在二维、非定常、非守恒型的Euler方程组的动量方程中加入人工粘性项，再对这组方程进行Galerkin半离散。文中超临界跨音速流的实例计算显示，这格式需消耗大量的机时。可以想象，在考虑强激波问题时，这方法的收敛性将成为严重的问题。1975年以来还出现一些以特征线与空间线段组成的特殊元素来求解Euler方程的工作（见[38,127]等）。这一类方法基本上仅适用于处理一维和某些二维问题。在模拟三维全速流动的问题时，这类元素的几何特性不易掌握。

在考虑包括强激波的问题时，Chan等[36]建立了三维、非定常、守恒型Euler方程组的弱型有限元激波逮捕格式。这格式的特点是：所选定的测验空间可令Euler方程组的弱解形式在每一元素中近似对称；所导出的有限元模拟方程由多步迭代格式解算；不含人工粘性项。因此，这格式可节约较大的机时。但它并非无条件稳定的。最近，Fletcher[45]提出一个同类的格式来求解定常守恒型的Euler方程，但在建立有限元模拟方程时，作者采用了最小二乘方法，因而也保证了弱解形式的对称性。

3.5　粘性流　1975年，Laskaris[128]以加权剩余法具体计算了二维定常Navier-Stokes方程组。为了适当处理流场和传热的计算，作者建立了如下的一种混合型格式：对体积当量和流函数采用C^1近似，对其它场变量和热力学性质采用C^0近似。在这工作中，由于使用了等参元素，所以这混合格式的推导相当复杂。最近，Cooke与Blanchard[129]以较直接的方法建立了守恒型Navier-Stokes方程组的Galerkin激波逮捕格式。

早在70年代初，Baker和他的同事就已开始通过抛物型化Navier-Stokes方程组的半离散Galerkin格式来分析可压缩的边界层问题[130]。经过十年来的不断改进，当前已可将多种气体混合流动以及湍流等的计算包括到格式中。

由于涉及非线性和较多的场变量，对一般粘性可压缩流的有限元模拟仍面临如何选择或建立可用的格式，电子计算机容量和机时等困难。因此，十年来有关的工作基本上还停留在初始阶段。

本文对流体力学中的有限元法的发展以及在一般不可压缩和可压缩流中的应用已作了简单的叙述。限于篇幅，本文没有包括在孔隙介质流、润滑以及磁流等领域中的有限元工作。总的来说，应用有限元法模拟流体力学问题的早期工作是以古典方法如各类变分形式的Rayleigh-Ritz法、Galerkin法等和有限元离散相结合而建立的一些格式为主。这些格式成功地解决了各类位势流、低雷诺数流以及各类耗散等椭圆型问题；通过这类格式对相应的非定常问题进行半离散解算也取得了一定的成果。但应用这些格式处理混合型与退化型问题时存在有不同程度的困难。随着研究工作的开展，最小二乘方法以及近年来所发展起来的各式弱型格式与伪变分方法逐步克服了其中的一些困难。配置有限元法也较好地解决了积分方程以及其它一些问题。

当前，虽然还存在一些尚待解决的课题，但在地球物理学领域与孔隙介质方面的流体力学问题的有限元工作已进入实际应用与建立生产型电子计算机程序的阶段；在跨音速流、高Péclet数对流-耗散问题等领域中有关数值计算的一些难题也已基本解决。近年来，开始出现有关无粘全速流动问题的有限元模拟（即求解Euler方程组）的工作。在高雷诺数流方面，70年代初Baker等即已开始建立求解三维边界层问题的抛物型化Navier-Stokes方程组的

有限元程序，并在程序中逐步增加解算多类气体混合、化学反应与湍流等问题的性能。近年来还相继出现一些计算高雷诺数流的迎风格式。但有关全速域与高雷诺数流的模拟仍存在不少尚待解决的难题。

（附注：在第1届全国计算流体力学学术会议上分发的本文打印稿的内容更为详细，收集的文献共600多篇，有兴趣的读者可参阅该稿。）

参考文献

1 Zienkiewicz, O. C., Cheung, Y. K., Finite elements in the solution of field problems, The Engineer, 222 (1965): 507-510.

2 Finite Element Methods in Flow Problems (eds., J. T. Oden, O. C. Zienkiewicz, R. H. Gallagher, C. Taylor), UAH Press, Alabama (1974).

3 Finite Elements in Fluids (eds., R. H. Gallagher, J. T. Oden, C. Taylor, O. C. Zienkiewicz), Vol. 1 and Vol. 2, Wiley, London (1975); Vol. 3, Wiley, London (1978); Vol. 4, to appear.

4 Martin, H. C., Finite element analysis of fluid flows, Proc. 2nd Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, AFFDL-TR-68-150 (1968): 517-538.

5 Argyris, J. H., Mareczek, G., Scharpf, D. W., Two and three dimensional flow using finite elements, Aero. J., Roy. Aero. Soc., 73 (1969): 961-964.

6 Oden, J. T., Somogyi, D., Finite-element applications in fluid dynamics, J.Engng.Mech.Div., ASCE, 95 (1969): 821-826.

7 Gladwell, G. M. L., A finite elemlent method in acoustics, 5th Int. Conf. on Acoustics, Leige (1965).

8 Zienkiewicz, O. C., Why finite elements?, Finite Elements in Fluids, Vol. 1 (eds., R. H. Gallagher, et al.), Academic Press, New York (1975): 1-23.

9 Oden, J. T., Wellford, L. C., Jr., Analysis of flow of viscous fluids by the finite element method, AIAA J., 10 (1972): 1590-1599.

10 Taylor, C., Hood, P., A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element technique, Comp. Fluids, 1 (1973): 73-100.

11 Pinder, G. F., A Galerkin-finite element solution of groundwater contamination on Long Island, New York, Water Resources Res., 9 (1973): 1657-1669.

12 Lee, C. H., Cheng, R. T., On seawater encroachment in coastal aquifers, ibid, 10 (1974): 1039-1043.

13 Reddi, M. M., Chu, T. Y., Finite element solution of the steady state compressible lubrication problem, ASME Trans., Ser. F, J. Lub. Tech., 92 (1970): 495-503.

14 Cheng, R. T., On the study of the convective dispersion equation, Finite Element Methods in Flow Problems (eds., J. T. Oden, et al.), UAH Press (1974): 29-47.

15 Chan, S. T. K., Brashears, M. R., Young, V. Y. C., Finite element analysis of transonic flow by method of weighted residuals, AIAA Paper 75-79 (1975).

16 Hashimoto, M., Washizu, K., Ikegawa, M., Application of the finite element technique combined with the collocation method to subsonic lifting surface problems, Proc. 2nd Int. Symp. on Finite Element Methods in Flow Problems, St. Margherita Figure, Italy (1976): 149-158.

17 Morino, L., Chen, L. T., Suciu, E. O., Steady and oscillatory subsonic and supersonic aerodynamics around complex configurations, AIAA J., 13 (1975): 368-374.

18 Carey, G. F., Finlayson, B. A., Orthogonal colloca tion on finite elements, Chem. Engng. Sci., 30 (1975): 587-596.

19 Frind, E. O., Pinder, G. F., A collocation finite element method for potential problems in irregular domains, Int. J. Num. Meth. Engng., 14 (1979): 681-701.

20 Finlayson, B. A., Orthogonal collocation on finite elements—Progress and potential, Math. Comp. Simul., 22 (1980): 11-17.

21 Heinrich, J. C., Zienkiewicz, O. C., Quadratic finite element schemes for two-dimensional convective-transport problems, Int. J. Num. Meth. Engng., 11 (1977): 1831-1844.

22 Zienkiewicz, O.C., Heinrich, J. C., The finite element method and convection problems in fluid mechanics, Finite Elements in Fluids, Vol. 3 (eds., R. H. Gallagher, et al.), Wiley, London (1978): 1-22.

23 Barrett, K. E., Demunshi, G., Finite element solutions of convective diffusion problems, Int. J. Num. Meth. Engng., 14 (1979): 1511-1524.

24 Fortin, M., Thomasset, F., Mixed finite element methods for incompressible flow problems, J. Comp. Phys., 31 (1979) : 113−145.
25 Kawahara, M., Yoshimura, N., Nakagawa, K., Ohsaka, H., Steady and unsteady finite element analysis of incompressible viscous fluid, Int. J. Num. Meth. Engng., 10 (1976) : 437−456
26 Cheng, R. T., Numerical solution of the Navier−Stokes equations by the finite element method, Phys. Fluids, 15 (1972) : 2098−2105.
27 Smith, S. L., Brebbia, C. A., Finite element solution of Navier-Stokes equations for transient two-dimensional incompressible flow, J. Comp. Phys., 17 (1975) : 235-245.
28 Tuann, S. -Y., Olson, M. D., A transient finite element solution method for the Navier-Stokes equations, Comp. Fluids, 6 (1978) : 141−152.
29 Di Carlo, A., Piva, P., Finite element simulation of thermally induced flow fields, Computational Methods in Nonlinear Mechanics (eds., J. T. Oden, et al.), TICOM (1974) : 289−298.
30 Bruch, J. C., Jr., Zyvoloski, G., A finite element solution to a general two-dimensional non-symmetric parabolic partial differential equations, Comp. Fluids, 3 (1975) : 217−224.
31 Kawahara, M., Periodic Galerkin finite element method of unsteady periodic flow of viscous fluid, Int. J. Num. Meth. Engng., 11 (1977) : 1093−1105.
32 Huyakorn, P. S., Nilkuha, K., Solution of transient transport equation using upstream finite element scheme, Appl. Math. Modelling, 3 (1979) : 7−17.
33 Varolu, E., Liam Finn, W. D., Finite elements incorporating characteristics for one-dimensional diffusion-convection equation, J. Comp. Phys., 34 (1980) : 371−389.
34 Lesaint, P., Finite element methods for symmetric hyperbolic equations, Num. Math., 21 (1973) : 244−255.
35 Glowinski, R., Periaux, J., Pironneau, O., Transonic flow simulation by the finite element method via optimal control, Proc. 2nd Int. Symp. Finite Element Methods in Flow Problems, St. Margherita Ligure, Italy (1976).
36 Chan, S. T. K., Lee, C. H., Brashears, M. R., Three-dimensional finite element analysis for high velocity impact, NASA CR−134933 (1975).
37 Kawahahara, M., Steady and unsteady flow analysis of fluid by the finite element method, Proc. 2nd Int. Symp. Finite Element Methods in Flow Proplems, St. Margherita Ligure, Italy (1976).
38 Jamet, P., Bonnerot, R., Numerical solution of the Eulerian equations of compressible flow by a finite element method which follows the free boundary and the interfaces, J. Comp. Phys., 18 (1975) : 21−45.
39 Hafez, M. M., Wellford, L. C., Merkle, C. L., Murman, E. M., Numerical computation of transonic flows by finite-element and finite-difference methods, Flow Research Rep. No. 70 (1977).
40 Fix, J., A mixed finite element scheme for transonic flows, I Case Rep. No. 76−25 (1976).
41 Lynn, P. P., Arya, S. K., Use of the least squares criterion in the finite element formulation, Int. J. Num. Meth. Engng., 6 (1973) : 75−88.
42 ——, Alani, K., Efficient least squares finite elements for two-dimensional laminar boundary layer analysis, Int. J. Num. Meth. Engng., 10 (1976) : 809−825.
43 Kanarachos, A., The discrete least squares approach to the mixed finite element solution of viscous-convective type flow, Comp. Fluids, 8 (1980) : 189−198.
44 Carey, G. F., Cheung, Y. K., Lau. S. L., Mixed operator problems using least squares finite element collocation, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 22 (1980) : 121−130.
45 Fletcher, C. A. J., A primative variable finite element formulation for inviscid, compressible flow, J. Comp. Phys., 33 (1979) : 301−312.
46 Barrett, J. W., Morton, K. W., Optimal finite element solutions to diffusion-convection problems in one-dimension, Int. J. Num. Meth. Engng., 15 (1980) : 1457−1474.
47 Bercovier, M., Engelman, M., A finite element for the numerical solution of viscous incompressible flows, J. Comp. Phys., 30 (1979) : 181−201.
48 Doctors, L. J., An application of the finite element techique to boundary value problems of potential flow, Int. J. Num. Meth. Engng., 2 (1970) : 243−253.
49 de Vries, G., Norrie, D. H., The application of the finite element technique to potential flow problems, ASME Trans., Ser. E., J. Appl. Mech., 38 (1971) : 798−802.
50 Argyris, J. H., Mareczek, G., Potential flow analysis by finite elements, Ingen. -Arch.,

41 (1972) : 1－25.
51 Schmid, G. , Incompressible flow in multiply connected regions, Proc. Int. Conf. Numerical Methods in Fluid Dynamics (eds. , C. A. Brebbia and J. J. Connor) , Pentech Press (1974) : 153－171.
52 de Vries, G. , Norrie, D. H. , The application of the finite element technique to potential flow problems: Part 3, Dept. of Mechanical Engineering, University of Calgary, M. E. Rep. 9 (1973) .
53 Isaacs, L. T. , A curved cubic triangle finite element for potential flow problems, Int. J. Num. Meth. Engng. , 7 (1973) : 337－344.
54 Awbi, H. B. , Swannell, J. H. , A finite element solution of the confined flow over a circular cylinder, Finite Element Methods in Flow Problems (eds. , J. T. Oden, et al.) , UAH Press (1974) : 209－224.
55 de Vries, G. , Labrujere, T. , Norrie, D. H. , A least-squares finite element solution for potential flow, Dept. Mechanical Engineering, University of Calgary, M. E. Rep. 86 (1976) .
56 Fortin, M. , Resolution numerique des equations de Navier-Stokes par des elements finis de type mixte, Rapport IRIA-LABORIA 76－184 (1976) .
57 Chan, S. T. K. , Finite element analysis of irrotational flows of an ideal fluid, Ph. D. Thesis, University of California at Davis (1971) .
58 Ikegawa, M. , Washizu, K. , Finite element method applied to analysis of flow over a spillway crest, Int. J. Num. Meth. Engng. , 6 (1973) : 179－189.
59 Larock, B. E. , Taylor, C. , Computing three-dimensional free surface flows, Int. J. Num. Meth. Engng. , 10 (1976) : 1143－1152.
60 Bourgat, J. F. , Duvant, G. , Calcul numerique de l'écoulement avec ou sans sillage autour d'un profil bidimensionnel symetrique et sans incidence, Rapport de Recherche no. 145, IRIA, Le Chesnay (1975) .
61 O'Carroll, M. J. , Variational methods for free surfaces of cavitation, jets, open channel flows, separation, and wakes, Finite Elements in Fluids, Vol. 3 (eds. , R. H. Gallagher, et al.) , Wiley, London (1978) : 293－309.
62 Berkhoff, J. C. W. , Linear wave propagation problems and the finite element method, Finite Elements in Flnids, Vol. 1 (eds. , R. H. Callagher, et al.) , Wiley, London (1975) : 251－264.
63 Chen, H. S. , Mei, C. C. , Oscillations and wave forces in a man-made harbor in the open sea, Proc. 10th Symp. on Naval Hydrodynamics, Office of Naval Research (June 1974) .
64 Bettess, P. , Zienkiewicz, O. C. , Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements, Int. J. Num. Meth. Engng. , 11 (1977) : 1271－1290.
65 Chowdhury, P. C. , Fluid finite elements for added mass calculations, Int. Shipb. Progress, 19 (1972) : 302－309.
66 Newton, R. E. , Finite element analysis of two-dimensional added mass and damping, Finite Elements in Fluids, Vol.1 (eds. , R. H. Gallagher, et al.) , Wiley, London (1975) : 219－232.
67 Zienkiewicz, O. C. , Bettess, P. , Infinite elements in the study of fluid-structure interaction problems, 2nd Int. Symp. Computing Methods in Applied Science and Engineering, IRIA, Versailles, France (1975) .
68 ——, ——, Fluid-structure dynamic interaction and wave forces. An introduction to numerical treatment, Int. J. Num. Meth. Engng. , 13 (1978) : 1－16.
69 Atkinson, B. , Card, C. C. H. , Irons, B. M. , Applications of the finite element method to creeping flow problems, Trans. Inst. Chem. Engng. , 48 (1970) : 276－284.
70 Zienkiewicz, O. C. , Taylor, C. , Weighted residual processes in the finite element method with particular reference to some transient and coupled problems, Lectures on Finite Element Methods in Continuum Mechanics (eds. , J. T. Oden, and E. R. A. Oliviera) , UAH Press (1973) : 415－458.
71 Crouzeix, M. , Raviart, P. , Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations, I. Revue Franc. d'Auto. , Inform. et Rech. Oper. , Ser. rouge 7 No. R－3 (1973) : 33－75.
72 Hood, P. , Taylor, C. , Navier-Stokes equations using mixed interpolation, Finite Element Methods in Flow Problems (eds. , J. T. Oden, et al.) , UAH Press (1974) : 121－132.
73 Argyris, J. H. , Maraczek, G. , Finite element analysis of slow incompressible viscous fluid motion, Ingen. -Arch. , 43 (1974) : 92－109.
74 Gartling, D. K. , Becker, E. B. , Finite element analysis of viscous, incompressible fluid flow:

I and II, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. , 8 (1976) : 51—60, 127—138.

75 Taylor, C., Hughes, T. G. , Morgan, K. , A numerical analysis of turbulent flow in pipes, Comp. Fluids, 5 (1977) : 191—204.

76 ——, ——, ——, Finite element solution of one-equation models of turbulent flow, J. Comp. Phys. , 29 (1978) : 163—172.

77 Schamber, D. R. , Larock, B. E. , Computational aspects of modeling turbulent flows by finite elements, Proc. 1st Int. Conf. Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow (eds. , C. Taylor, et al.) , Pentech Pres, London (1978) : 245—256.

78 Olson, M. D. , Tuann, S. Y, Primitive variables versus stream function finite element solutions of the Navier-Stokes equations, Finite Elements in Fluids, Vol. 3 (eds. , R. H. Gallagher, et al.) , Wiley, London (1978) : 73—87.

79 Fortin, M. , Approximation des Fonctions a divergence nulle par la methode des elements finis, Proc. 3rd Int. Conf. Numerical Methods in Fluid Mechanics, Vol. 1 (eds. , H. Cabannes, and R. Temam (1972) : 99—103.

80 Zienkiewicz, O. C. , Godbole, P. N , Viscous, incompressible flow with special reference to non-Newtonian (plastic) fluids, Finite Elements in Fluids, Vol. 1 (eds. , R. H. Gallagher, et al.) , Wiley, London (1975) : 25—55.

81 Hughes, T. J. R. , Liu, W. K. , Brooks, A., Finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation, J. Comp. Phys. , 30 (1979) : 1—60.

82 Heinrich, J. C., Marshall, R. S., Viscous incompressible flow by a penalty function finite element method, Comp. Fluids, 9 (1981) : 73—83.

83 Baker, A. J., A highly-stable explicit integration technique for computational continuum mechanics, Numerical Methods in Fluid Dynamics (eds. , C. Brebbia, and J. J. Connor) , Pentech Press, London (1974) : 99—120.

84 Bratanow, T. , Ecer, A., Kobiske, Numerieal calculations of velocity and pressure distribution around oscillating airfoils, NASA CR—2368 (1974) .

85 ——, Aksu, H. , Spehert, T. , A rigorous solution of the Navier-Stokes equations for unsteady viscous flow at high Reynolds numbers around oscillating airfoils, AIAA Paper No. 75—863 (1975) .

86 Smith, S. L. , Brebbia, C. A. , Improved stability techniques for the solution of Navier-Stokes equations, Appl. Math. Modelling, 1 (1977) : 226—234.

87 Barrett, K. E. , Demunshi, G. , Numerical methods for recirculating flow, Proc. 1st Int. Conf. Numerical Methds in Laminar and Turbulent Flow (eds. , C. Taylor, et al.) , Pentech Press, London (1978) : 159—169.

88 Olson, M. D. , Variational finite element methods for two-dimensional and axi-symmetric Navier-Stokes equations, Finite Elements in Fluids, Vol. 1 (eds. , R. H. Gallagher, et al.) , Wiley, London (1975) : 57—72.

89 Lieber, P. , Wen, K. S. , Armand, V. A., Finite element method as an aspect of the principle of maximum uniformity: Hydrodynamical ramifications, Finite Element Methods in Flow Problems (ed. , J. T. Oden, et al.) , UAH Press (1974) : 85—96.

90 Baker, A. J. , A finite element solution algorithm for the Navier-Stokes equations, NASA CR—2391 (1974) .

91 Lynn, P. P. , Alani, K. , Efficient least squares finite element for two-dimensional laminar boundary layer analysis, Int. J. Num. Meth. Engng. , 10 (1976) : 809—825.

92 Popinski, Z. , Baker, A. J. , An implicit finite element algorithm for the boundary layer equations, J. Comp. Phys. , 21 (1976) : 55—84.

93 Gray, W. G. , Lynch, D. R. , Time-stepping schemes for finite element tidal model computations, Advances in Water Resources, 1 (1977) : 83—95.

94 ——, ——, On the control of noise in finite element tidal computations: A semi-implicit approach, Comp. Fluids, 7 (1979) : 47—67.

95 Meissner, U. , An explicit-implicit water-level model for tidal computations of rivers, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. , 13 (1978) : 221—232.

96 Cheng, R. T. , Numerical investigation of lake circulation around islands by the finite element method, Int. J. Num. Meth. Engng. , 5 (1972) : 103—112.

97 Hamblin, P. F. , Finite element methods applied to the modelling of the circulation, seiches, tides, and storm surges in large lakes, Finite Elements in Fluids, Vol. 3 (eds. , R. H. Gallagher, et al.) , Wiley, London (1978) : 269—281.

98 Cheng, R. T. , Tung, C. , Wind driven circulation by the finite element methods, Proc. 13th Conf. Great Lakes Research, Int. Ass. Great Lakes Res. (1970) : 891—903.

99 ——, Transient three-dimensional circulation of lakes, J. Eng. Mech. Div., ASCE, 103 (1977): 17-34.
100 Cullen, M. J. P., Application on finite element methods to meteorological problems, Proc. 2nd Int. Symp. Finite Element Methods in Flow Problems, St. Margherita Ligure, Italy (1976): 759-767.
101 Gresho, P. M., Lee, R. L., Sani, R. L., Modelling the planetary boundary layer using Galerkin finite-element method, USERDA Rep. UCRL-78120 (1976).
102 Steppeler, J., On the use of high order finite elements for initial value problems, Proc. 1st Int. Conf. Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow (eds., C. Taylor, et al.), Pentech Press, London (1978): 769-780.
103 Tong, P., Finite element solution of the driven currents and its mass transport in lakes, Numerical Methods in Fluid Dynamics (eds., C. A. Brebbia, and J. J. Connor), Pentech Press, London (1974): 440-453.
104 Taylor, C., Davis, J. M., Tidal propagation and dispersion in estuaries, Finite Element in Fluids, Vol. 1 (eds., R. H. Gallagher, et al.), Wiley, London (1975): 95-118.
105 Brebbia, C. A., Some applications of finite elements for flow problems, Variational Methods in Engineering (eds., C. A. Brebbia, and H. Tottenham), Southampton University Press (1973): 5.1-5.25.
106 Carmichael, G. R., Kitada, T., Peters, L. K., Application of a Galerkin finite element method to atmospheric transport problems, Comp. Fluids, 8 (1980): 155-176.
107 Gallagher, R. H., Liggett, J. A., Young, D. L., Enviromental flow analysis for stratified conditions, Finite Elements in Fluids, Vol. 3 (eds., R. H. Gallagher, et al.), Wiley, London (1978): 255-268.
108 Norrie, D. H., de Vries, G., Applications of the finite element method in fluid dynamics, AGARD Lecture Ser. No. 48, Numerical Methods in Fluid Dynamics (1972).
109 Periaux, J., Three dimensional analysis of compressible potential flows, Int. J. Num. Meth. Engng., 9 (1975): 775-833.
110 Carey, G., A dual perturbation expansion and variational solution for compressible flows using finite elements, Finite Elements in Fluids, Vol. 2 (eds., R. H. Callagher, et al.), Wiley, London (1975): 159—177.
111 Shen, S. F., Habashi, W. G., Local linearization of the finite element method and its applications to compressible flows, Int. J. Num. Meth. Engng., 10 (1976): 565—577.
112 ——, Chen, H. C., Steady high subsonic plane compressible flows: Finite element solution by steamline perturbation, Arch. Mech. Stosowanej (Warsaw), 28(1976): 881—901.
113 Leonard, J. W., Finite element analysis of perturbed compressible flow, Int. J. Num. Meth. Engng., 4 (1972): 123—132.
114 Hirsch, C., Warzee, G., A finite element method for flow calculations in turbomachines, Rep. VUB—STR—5, Vrije Universiteit Brussel, Dept. of Fluid Mechanics (1974).
115 沈慧俐、徐敦镳，超音速引射喷管流场的有限元分析，航空学报，1 (1980):55—67.
116 Appa, K., Smith, G. C. C., Finite element supersonic aerodynamics for oscillating parallel wings, J. Aircraft, 11 (1974):433—434.
117 Giesing, J. P., Kalman, T. P., Oscillatory supersonic lifting surface theory using a finite element doublet representation, AIAA paper, No. 75—761 (1975).
118 Young, V. Y. C., Brashears, M. R., A new finite element supersonic kernel function method in lifting surface theory, AFFDL—TR—76—3, Vol. I and Vol. II (1976).
119 Hashimoto, M., Washizu, K., Application of the finite element technique combined with the collocation method to low subsonic lifting surface problems, Int. J. Num. Meth. Engng., 11 (1977):1559—1577.
120 Ecer, A., Akay, H. U., Application of finite element method for the solution of transonic flow, Proc. 2nd Int. Symp. on Finite Element Methods in Flow Problems, St. Margherita Ligure, Italy (1976):191—201.
121 Chung, T. J., Hooks, C. G., Discontinuous functions in transonic flow, AIAA paper No. 76—329 (1976).
122 Glowinski, R., Pironneau, O., Calcul d'ecoulements transsoniques par des methods d'elements finis et de controle optimal, Computing Methods in Applied Sciences and Engineering (eds., R. Glowinski, and J. L. Lions), Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 134, Springer-Verlag (1976): 276—296.
123 Bristeau, M. O., Application of optimal control theory to transonic flow computations by finite element methods, Proc. 3rd IRIA Symp. on Computing Methods in Applied Sciences and

Engineering, Versailles, France (1977).
124 Wellford, L. C., Hafez, M. M., Mixed finite element models and dual iterative methods for transonic flow, Proc. 2nd Int. Symp. Finite Element Methods in Flow Problems, St. Margherita Ligure, Italy (1976) : 233—245.
125 Carey, G. F., Transonic aerodynamics, Finite Elemets in Fluids, Vol. 3 (eds., R. H. Gallagher, et al.), Wiley, London (1978) : 161—182.
126 Phares, W. J., Kneile, K. R., Solution to the Euler equations by the finite element method with an application to transonic flow, AEDC—TR—76—86 (1976).
127 Cella, A., Lucchesi, M., Pasquinelli, G., Space-time elements for the shock wave propagation problem, Int. J. Num. Meth. Engng., 15 (1980) : 1475—1488.
128 Laskaris, T. E., Finite-element analysis of compressible and incompressible viscous flow and heat transfer problems, Phys. Fluids, 18 (1975) : 1639—1648.
129 Cooke, C. H., Blanchard, D. K., A shock capturing application of the finite element method, Int. J. Num. Meth. Engng., 14 (1979) : 271—286.
130 Baker, A. J., Finite element theory for the mechanics and thermodynamics of a viscous, compressible multispecies, fluid, Bell Aerospace Co., Res. Rep. No. 9500—920200 (1971).

Finite Element Methods in Fulid Mechanics

Li Chun-xuan (C.-H. Lee)
(Beijing Institute of Aeronautics and Astronautics)