

庆贺薛禹群院士八十华诞暨地下水模拟专栏

## 地下水模拟不确定性分析<sup>\*</sup>

吴吉春<sup>\*\*</sup>, 陆 乐

(南京大学地球科学与工程学院水科学系, 南京, 210093)

**摘 要:** 地下水模拟受到众多不确定性因素的限制, 直接影响了模拟结果的可靠性. 因此, 科学地定量分析地下水模拟的不确定性十分必要. 本文根据地下水模拟不确定性的来源, 将其分为参数不确定性、模型不确定性和资料不确定性三类, 分别进行了阐述和分析, 并且总结了地下水模拟不确定性分析的常用方法和近年来国内在这方面的研究进展. 同时, 针对地下水概念模型的不确定性进行了定量研究, 揭示了模型结构的偏差是造成模拟结果不确定性增加的重要因素.

**关键词:** 地下水模拟, 不确定性, 贝叶斯法, 马尔可夫链蒙特卡罗法

**中图分类号:** P 641

## Uncertainty analysis for groundwater modeling

Wu Ji-Chun, Lu Le

(Department of Hydrosiences, School of Earth Sciences and Engineering,  
Nanjing University, Nanjing, 210093, China)

**Abstract:** The reliability of groundwater modeling is vulnerable to many uncertain factors. Thus, it is necessary to quantify the uncertainties in groundwater modeling. These uncertainties are divided into three categories: parameter uncertainty, model uncertainty and information uncertainty, while each is illustrated and analyzed respectively. Then the common methods of uncertainty analysis for groundwater modeling as well as the recent advances of this topic in China are reviewed. In addition, an example of quantification of uncertainty in conceptual model is presented, which indicates that errors in model structure can result in critical increase of uncertainty in model results.

**Key words:** groundwater modeling, uncertainty, Bayesian method, Markov chain Monte Carlo

<sup>\*</sup> 基金项目: 国家自然科学基金 (40725010, 40672160)

收稿日期: 2010- 11- 22

<sup>\*\*</sup> 通讯联系人, E-mail: jcwu@nju.edu.cn

近年来,地下水模拟技术已得到广泛的发展和运用.不论在地下水科学的理论和方法研究,还是在地下水资源评价、地下水开发利用的管理和规划等方面,地下水模拟都起到了至关重要的作用.如模拟过量开采地下水引起的地面沉降现象<sup>[1]</sup>,重非水相液体在饱和介质中的迁移和分布<sup>[2]</sup>等.然而,由于目前的理论技术水平和计算能力限制、模拟所需资料的缺乏等原因,地下水模型和实际的地下水系统之间始终存在着差异,往往造成长期的模拟预报结果和实际情况的偏差,严重影响了地下水模拟的可靠性.这种差异一般可以归结为地下水模拟的不确定性.

## 1 地下水模拟不确定性的分类

地下水模拟不确定性按照其来源可以分为参数不确定性、模型不确定性和资料不确定性三类.这三者中,目前针对参数不确定性的研究相对较多.由于含水介质一般形成于复杂的地质、地貌和气候条件下,大多数水文地质参数和化学参数(如渗透系数、贮水系数、弥散度、孔隙度、化学反应速率等)都具有空间变异性.以渗透系数为例,已通过实验和地质统计方法做了大量研究,得出了渗透系数服从一定的概率分布,而且一般是对数正态分布的结论<sup>[3~5]</sup>.弥散度则具有明显的尺度效应.这些都将直接导致地下水模拟不同程度的不确定性.

然而,对于地下水模型不确定性的研究相对较少,重视程度也不够.地下水模型不确定性又可以分成以下两类:(1)概念模型的缺陷.地下水模拟首先需要对实际地下水系统进行概化.通常由于对水文地质条件掌握不够充分,使得所建立的概念模型很难完全准确地反映真实情况,主要表现为:模型边界的位置和类型以及各地质单元的厚度不够准确、参数分区不够精细、对含水层的类型判断错误(例如将浅层的微承压含水层当作潜水处理)、对水力联系判断错误等等.此外,如果不能预见未来水文地质条件可能发生的变化(例如水头的降低引起岩层骨架的应力发生变化,进而改变岩层的透水性

能),导致随着模拟时间的延长,模型的可靠性降低;(2)数学模型在概念上和求解过程中产生的误差.例如现有的对流-弥散方程建立在典型单元体(representative element volume, REV)概念基础上,无法在足够细的尺度上刻画介质的非均质性,因此难以适应非均质介质中的溶质运移问题.此外,大多数溶质运移模型的数值解法都很难完全避免截断误差、解的振荡和数值弥散问题.

地下水模拟除了必要的水文地质调查,还需要用到大量的观测资料,包括初始水头(溶质浓度)分布、用于模型校正的水头(溶质浓度)观测序列、已知水头边界的水位观测序列、抽/注水井和泉流量、降雨量和蒸发量等.由于客观条件的限制,观测资料的时空分布往往比较稀疏,无观测资料的区域就需要用插值等方法来推估;另一方面,观测资料的采集、整理过程中难免产生误差.这些观测资料中的误差对地下水模拟不确定性的影响也不容忽视.

## 2 地下水模拟不确定性的分析方法

只有通过定量分析和评估地下水模拟的不确定性,才能加深对它的认识,进而找到有效减少地下水模拟不确定性的对策措施.地下水模拟不确定性分析方法按照其求解原理可以分为:(1)蒙特卡罗法;(2)矩方程法;(3)贝叶斯法;还有其它一些方法,如条件模拟、敏感度分析、一次二阶矩法等.国外有关地下水模拟不确定性分析研究成果较多,本文不作总结.近年来国内有关地下水模拟不确定性的研究发展迅速,在许多不确定性分析方法上都有所涉足,并且取得了一些成功的案例,此处列出部分以作对比参考.

**2.1 蒙特卡罗法** 蒙特卡罗(Monte Carlo)法是一种被广泛采用的分析复杂数值模型不确定性的方法.它假定随机变量的概率分布函数和协方差函数已知,用伪随机数生成技术产生出多组随机变量,然后把随机变量带入模型求解未知变量(如地下水模拟中的水头或溶质浓度)

的统计值。该方法回避了随机分析中的数学困难, 不管地下水模型是否非线性、随机变量是否非正态, 只要模拟的次数足够多, 就可得到一个比较精确的概率分布, 并且具有收敛速度与问题的维数无关、程序结构简单等优点。但蒙特卡罗法的一些缺点也不容忽视, 主要是收敛速度慢, 以及计算误差难于估计并控制。因此, 目前蒙特卡罗法一般用于计算比较简单的模型或用来验证其它不确定性分析方法。

蒙特卡罗法在地下水模拟不确定性研究方面的应用在中国相对较多。束龙仓等<sup>[6]</sup>以山东省济宁市地下水资源评价为例, 在介绍风险分析的基本概念和风险分析方法的基础上, 用蒙特卡罗法对地下水允许开采量的确定进行了风险分析。陈彦等<sup>[7]</sup>利用随机场生成技术和蒙特卡罗模拟探讨了含水层渗透系数空间变异性对地下水溶质运移数值模拟的影响。束龙仓等<sup>[8]</sup>利用蒙特卡罗方法分析了济宁市潜水含水层给水度空间分布的随机性对地下水库库容计算值的影响。温忠辉等<sup>[9]</sup>运用蒙特卡罗方法, 对开采量不确定条件下数值模拟的结果进行可靠性分析, 并对比计算了不同的给定允许降深条件下, 模拟结果的可靠性。束龙仓等<sup>[10, 11]</sup>用蒙特卡罗法分析了水文地质参数的不确定性对地下水补给量(包括大气降水入渗补给、浅层侧向补给和深层侧向补给)计算结果以及地表水与地下水交换量的影响。陆乐等<sup>[12]</sup>探讨了将蒙特卡罗方法应用于多尺度非均质含水层中溶质运移模拟的方法。上述成果表明蒙特卡罗方法已在中国地下水模拟不确定性研究中得到较好应用和发展。

**2.2 矩方程法** 矩方程法通过随机偏微分方程直接求解模拟结果的各阶统计矩, 效率比蒙特卡罗法高得多。建立随机有限元方程的方法主要有摄动法、Neumann 展开法和混沌多项式展开法。摄动方法把随机变量分成确定部分(期望值)和由摄动引起的随机部分, 进行展开后代入方程进行求解。摄动法简单易行, 但要求摄动量非常小(一般小于均值的 20%), 而且计算高阶矩很困难。姚磊华<sup>[13]</sup>把 Taylor 展开、摄动技术、待定系数法和有限元法相结合, 提出了待定

系数摄动随机有限元法(PCSFEM), 推导出地下水水头均值和方差的表达式, 并选取二维承压地下水水流进行随机模拟。李森等<sup>[14]</sup>采用待定系数摄动随机有限元法, 在以渗透系数、给水度、边界、源汇项为随机变量的条件下, 建立了二维潜水非稳定流随机模型。通过对太原盆地地下水系统的随机模拟, 分析了渗透系数、给水度、边界、开采量 4 个随机因子对水头模拟值的影响程度。史良胜等<sup>[15]</sup>建立了对随机场进行 Karhunen Loeve(K-L)展开的 Galerkin 有限元方法, 推导出任意区域 K-L 展开和 Fredholm 方程的矩阵形式和变换公式, 研究了 K-L Galerkin 解法的计算性态。上述成果表明矩方程法已在国内地下水模拟不确定性研究中得到初步应用和发展, 由于该方法在应用上还存在一些未解决的难题, 相关研究亟待加强。

**2.3 贝叶斯法** 贝叶斯法是近年来兴起的一种不确定性分析方法。贝叶斯后验分布集抽样和先验两种信息于一身, 包含了所有可供利用的信息, 可以看作是人们用抽样信息对先验分布作调整的结果。这种方法不仅在水文地质参数识别反演方面具有独特的优点<sup>[16]</sup>, 在地下水模拟不确定性分析方面也优势突出。贝叶斯法非常便于尽可能地利用所有的观测资料来修正先验的水文地质参数分布, 从而更加准确地评价地下水模拟的不确定性。梁婕等<sup>[17]</sup>应用贝叶斯推断方法和随机模拟技术, 定量研究了渗透系数的非均质性对地下水溶质运移的影响, 并进行了二维理想算例的分析计算。

国内有关贝叶斯法在地下水模拟不确定性分析中的应用研究刚起步, 相关研究亟待加强。

**2.4 其它不确定性分析方法** 除上述三大类地下水模拟不确定性分析方法的研究与应用外, 国内学者还对其他多种不确定性分析方法进行了尝试, 并将不确定性分析与风险分析相结合, 效果良好。如胡伏生等<sup>[18]</sup>应用区域化变异函数理论和条件模拟, 对内蒙古霍林河主要含水层渗透系数的分布特征进行了分析, 用有限单元法和条件模拟方法模拟计算了研究区地下水的可开采量和水位分布, 并对地下水

开采量的可靠性进行了评价;李如忠等<sup>[19]</sup>在定义了水文地质参数盲数、未确知风险等基本概念的基础上,尝试性地提出了盲信息下地下水资源补给量计算模型和允许开采量的未确知风险分析方法;束龙仓等<sup>[20]</sup>以辽宁省北票市某傍河水源地为例,在分析水文地质条件基础上,建立了相应的数学模型,并选取含水层的给水量、渗透系数、河床沉积物渗透系数、降雨入渗系数、模型边界的水力传导系数进行了灵敏度分析;刘佩贵等<sup>[21]</sup>在阐述模糊概率和截集 $\lambda$ 的概念的基础上,将模糊信息引入确定地下水可开采量的风险分析中,建立了模糊-随机风险估算模型.通过对模型中的参数进行模糊化处理,用改进一次二阶矩法计算了地下水过量开采的模糊风险率;刘佩贵等<sup>[22]</sup>以辽宁省某地下水水源地为例,用随机风险分析方法-JC法对地下水可开采量进行了风险估算,并与传统的确定性模型计算结果进行了对比.

将地下水模拟不确定性分析结果与风险分析相结合,具有重大的实践意义,可极大地推动国内有关地下水模拟的不确定性方法研究.

### 3 地下水模型不确定性的定量分析算例

国内有关地下水模拟不确定性研究目前主要集中在参数的不确定性方面,对地下水模型本身的不确定性研究很少.但所建地下水模型结构的准确与否,是能否应用该模型对地下水资源和水流动态进行成功评价和预报的关键.这里仅用一个理想算例来分析地下水模型边界条件偏差对模拟结果不确定性的影响.

假设某承压含水层形状为一个边长是 200 m 的正方形,厚度为 10 m,四周边界均为隔水边界.含水层中央位置有一口完整井以 100 m<sup>3</sup>/d 定流量抽水.含水层均质各向同性,渗透系数为 10 m/d,贮水系数为 0.000 1.初始水力坡度为 0.计算区内均匀布置了 9 个观测孔(含抽水井在内),其分布位置如图 1 所示.模拟计算时间为 1.5 d,采用 MODFLOW 模型求解该二维承压水流问题.

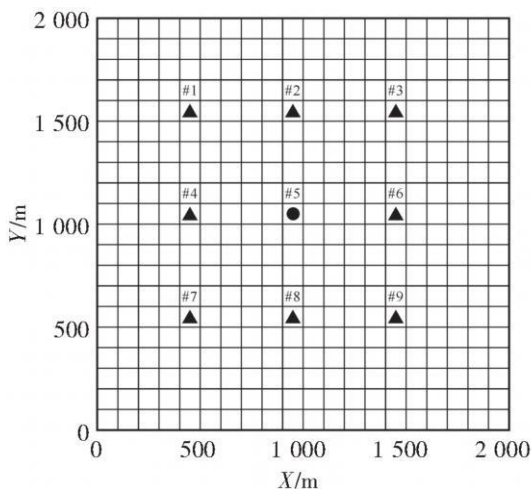


图 1 研究区网格剖分和抽水井、观测孔的位置.实心圆代表抽水井;观测孔用三角形表示,抽水井同时用作观测孔

Fig. 1 Discretization of the flow domain and positions of pumping well and observational wells

首先调用 MODFLOW 程序正演计算一次,得到各观测孔的降深序列,并将其当做作实际的观测资料  $D(x, t)$ . 然后假设在建立地下水模型过程中把北边界误认为是定水头边界的情况,来研究地下水模型边界条件偏差对模拟结果不确定性的影响.将原 MODFLOW 模型的边界条件进行相应的修改后再用于不确定性分析,即可达到这个目的.

本文采用贝叶斯方法定量分析地下水模型的不确定性.根据贝叶斯原理,参数的后验分布可以表示为:

$$p(\theta | D) = \frac{p(\theta)p(D | \theta)}{\int p(\theta)p(D | \theta)d\theta} \quad (1)$$

对该地下水流问题,可将渗透系数和贮水系数看成随机变量  $\theta$  ( $\theta$  为矢量),  $p(\theta)$  为参数  $\theta$  的先验概率密度;  $p(D | \theta)$  体现了在模型参数为  $\theta$  时,模型输出与现有观测资料  $D$  的相似度,通常用似然函数表示;  $p(\theta | D)$  为参数的后验概率密度.由于分析对象是确定性模型,很容易根据参数后验分布求出模拟结果的后验分布.

渗透系数的先验分布采用均值为 2.302 585,方差为 0.3 的对数正态分布,贮水

系数的先验分布采用均值为- 9. 210 340、方差为 0. 5 的对数正态分布. 这里用马尔可夫链蒙特卡罗法( Markov-Chain Monte Carlo, 简称 MCMC) 采集参数和模拟结果后验分布的样本<sup>[16]</sup>, 然后对这些样本进行统计即可分析其不确定性.

为了区分参数不确定性和模型不确定性对模拟结果的影响, 首先用正确的地下水模型( 以下简称“正确模型”) 进行 MCMC 采样, 两参数后验分布直方图见图 2a 和 2b. 表 1 统计了两参数的后验对数均值、众数、方差. 其中众数是将参数对数空间等分为 50 段, 取样本频率最高的一段的中值近似作为众数. 可见参数的后验方差明显小于先验方差, 表明经过贝叶斯方法利用已知的降深观测值对先验分布的修正, 后

验不确定性要小于先验不确定性. 另外, 参数众数代表使模拟结果和观测值拟合最好的参数值, 和真实的参数值( 对数值分别为 2. 302 585 和- 9. 210 340) 相当接近. 之所以没有完全相等是由采样算法的随机性和上述的众数近似计算方法造成的. 对 MCMC 采样得到的降深样本进行统计分析, 可以计算各位置各时段降深的众数和置信区间. 以抽水井处为例, 降深众数、95% 置信区间和观测值的序列可用图 3a 表示. 因先验分布十分准确而且模型完全正确, 降深众数( 图中虚线) 和观测值( 图中粗实线) 几乎完全重合. 以抽水井 1. 5 d 时刻的降深为例, 表 2 统计了其均值、众数、方差、5% 和 95% 分位点, 其后验分布直方图见图 3b.

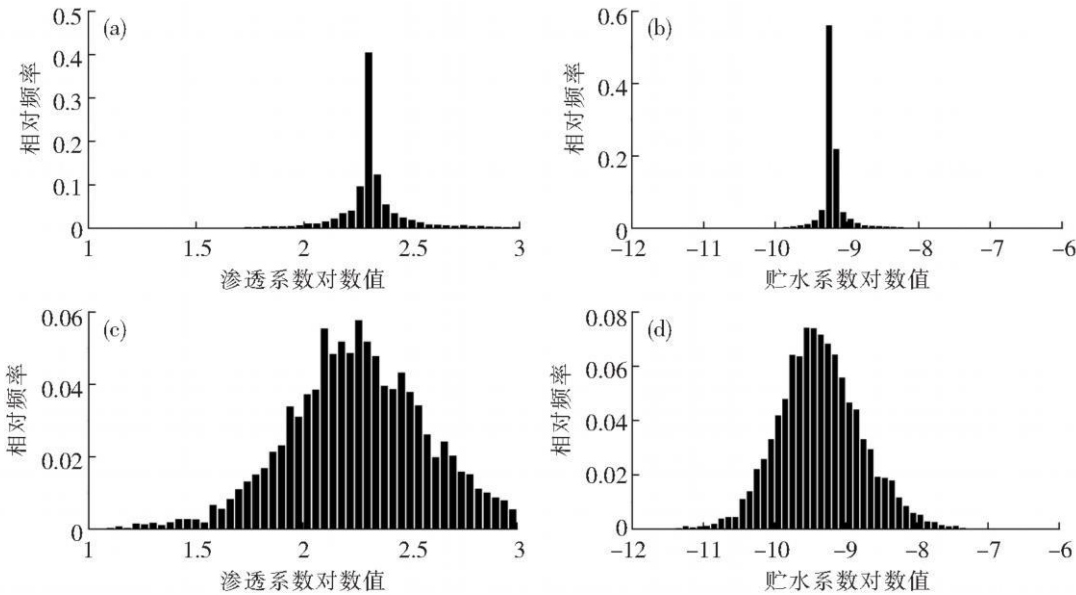


图 2 参数对数值的后验分布直方图:( a) 正确模型的渗透系数;  
( b) 正确模型的贮水系数; ( c) 错误模型的渗透系数; ( d) 错误模型的贮水系数

Fig. 2 Posterior histograms for the log parameters: ( a) hydraulic conductivity in the correct model, ( b) storage coefficient in the correct model, ( c) hydraulic conductivity in the wrong model, ( d) storage coefficient in the wrong model

对于边界条件偏差的模型( 以下简称“错误模型”), 同样用 MCMC 法采样, 两参数的后验分布直方图见图 2c 和 2d, 其对数均值、众数和方差见表 1. 与正确模型的参数后验分布相比,

方差明显增大. 这增加的不确定性是由地下水模型的偏差引起的. 另一方面, 模型不确定性在参数的后验分布中得到体现, 这也是贝叶斯方法的一大特点. 由于模型的偏差, 用同样的参数

值时模型不能再现观测值,造成参数众数和真实值之间出现偏差.对于降深的后验不确定性,为了便于比较,同样可以画出抽水井处的降深众数、95% 置信区间和观测值序列(图 3c)以及抽水井 1.5 d 时刻的降深后验分布直方图(图

3d);其统计值见表 2.可见抽水井处降深模拟不确定性由于地下水模型边界的偏差而大大增大了,表现为置信区间的增大和方差的增大.其它观测孔的情况也类似,限于篇幅这里就不一一列举了.

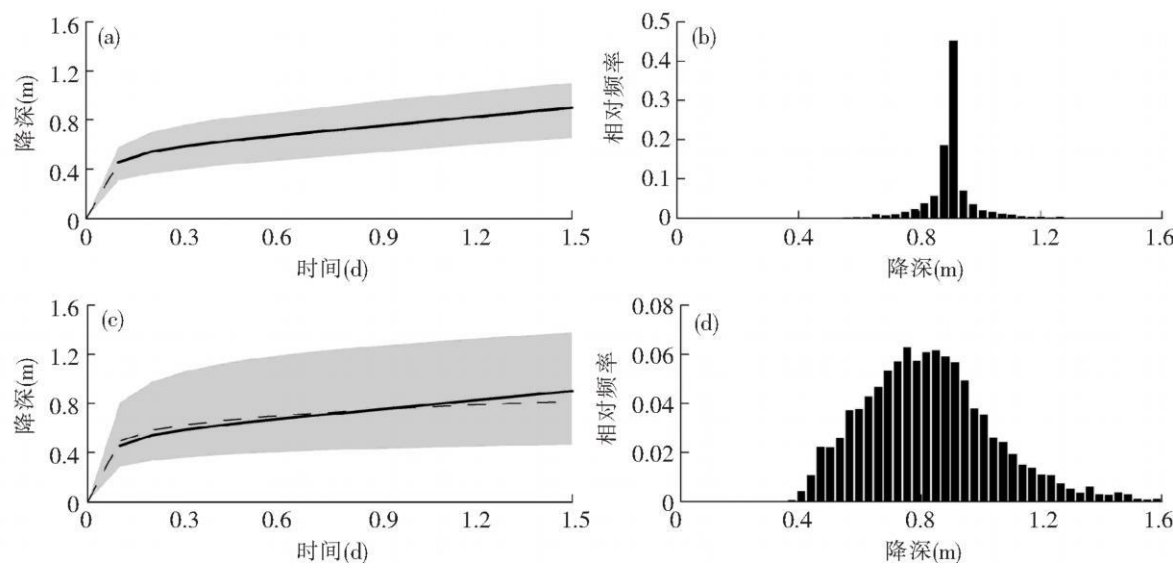


图 3 降深后验分布: (a) 正确模型抽水井降深众数(虚线)、95% 置信区间(阴影区域)和观测值(粗实线)曲线; (b) 正确模型观测井末时段降深的后验分布直方图; (c) 错误模型抽水井降深众数、95% 置信区间和观测值曲线; (d) 错误模型观测井末时段降深的后验分布直方图

Fig.3 Posterior distributions of the drawdowns: (a) statistical mode(in dashed line), 95% confidence interval (in shaded area) and observed value(in solid line) series of drawdown at pumping well in the correct model, (b)posterior histogram for the drawdown at pumping well at the last timestep in the correct model, (c),(d) are the corresponding plots of the wrong model to (a) and (b)

表 1 参数后验分布(渗透系数和贮水系数均为取对数后的数值)

Table 1 Posterior distribution of log parameters

	渗透系数			贮水系数		
	均值	众数	方差	均值	众数	方差
正确模型	2.307 168	2.312 553	0.028 764	- 9.189 341	- 9.202 571	0.036 897
错误模型	2.249 869	2.268 910	0.101 819	- 9.360 434	- 9.526 696	0.335 194

表 2 降深后验分布

Table 2 Posterior distribution of simulated drawdown

	均值/m	众数/m	方差	5% 分位点/m	95% 分位点/m
正确模型	0.91	0.89	0.011 444	0.65	1.10
错误模型	0.83	0.82	0.054 628	0.46	1.38

## 4 结 论

地下水模拟不确定性分析是当前国内外一个比较新的水文地质研究领域, 是水文地质学的一个重要发展方向. 本文从地下水模拟不确定性的来源和影响出发, 探讨了地下水模拟不确定性研究的必要性和研究意义. 总结了国内地下水模拟不确定性方面的主要研究方法和研究进展. 最后用一个算例探讨了目前国内研究相对较少的模型不确定性对地下水模拟结果的影响. 通过采用贝叶斯方法及 MCMC 采样技术, 定量分析了地下水模型边界条件偏差导致的模拟结果不确定性增加, 拟为地下水模型不确定性分析方法的研究起抛砖引玉的作用.

### References

- [ 1 ] Ye S J, Xue Y Q, Wu J C, *et al.* Land subsidence modeling based on the modified Merchant model: A case study of Shanghai. *Journal of Nanjing University (Natural Sciences)*, 2011, 47(3): 291~ 298. (叶淑君, 薛禹群, 吴吉春等. 基于修正麦钦特模型的地面沉降模拟: 以上海为例. *南京大学学报(自然科学)*: 2011, 47(3): 291~ 298).
- [ 2 ] Shi X Q, Wu J C, Liu D P, *et al.* Numerical simulation of transportation of dense nonaqueous phase liquids in the subsurface environment. *Journal of Nanjing University (Natural Sciences)*, 2011, 47(3): 299~ 307. (施小清, 吴吉春, 刘德朋等. 饱和介质中重非水相液体运移的数值模拟及敏感性分析. *南京大学学报(自然科学)*: 2011, 47(3): 299~ 307).
- [ 3 ] Gelhar L W. *Stochastic subsurface hydrology*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1993.
- [ 4 ] Freeze R A. A stochastic conceptual analysis of one dimensional groundwater flow in nonuniform homogeneous media. *Water Resources Research*, 1975, 11(5): 725~ 741.
- [ 5 ] Sudicky E A. A natural gradient experiment on solute transport in a sand aquifer: spatial variability of hydraulic conductivity and its role in the dispersion process. *Water Resources Research*, 1986, 22(13): 2069~ 2082.
- [ 6 ] Shu L C, Zhu Y S, Sun Q Y, *et al.* Risk analysis of groundwater allowable withdrawal evaluation. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2000(3): 77~ 81. (束龙仓, 朱元生, 孙庆义等. 地下水允许开采量确定的风险分析. *水利学报*, 2000(3): 77~ 81).
- [ 7 ] Chen Y, Wu J C. Effect of the spatial variability of hydraulic conductivity in aquifer on the numerical simulation of groundwater. *Advances in Water Resources*, 2005, 16(4): 482~ 487. (陈彦, 吴吉春. 含水层渗透系数空间变异性对地下水数值模拟的影响. *水科学进展*, 2005, 16(4): 482~ 487).
- [ 8 ] Shu L C, Li W, Li Y G. Uncertainty analysis of groundwater reservoir capacity. *Hydrogeology and Engineering Geology*, 2006(4): 45~ 47. (束龙仓, 李 伟, 李砚阁. 地下水库库容不确定性分析. *水文地质工程地质*, 2006(4): 45~ 47).
- [ 9 ] Wen Z H, Cao Y J. Reliability analysis of numerical simulation results under the condition of groundwater withdrawal uncertainty. *Journal of Jilin University (Earth Science Edition)*, 2007, 37(2): 239~ 242. (温忠辉, 曹英杰. 开采量不确定条件下数值模拟结果的可靠性分析. *吉林大学学报(地球科学版)*, 2007, 37(2): 239~ 242).
- [ 10 ] Shu L C, Tao Y F, Liu P G. Reliability calculation method for groundwater recharge in consideration of uncertainty of hydrogeological parameters. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2008, 39(3): 346~ 350. (束龙仓, 陶玉飞, 刘佩贵. 考虑水文地质参数不确定性的地下水补给量可靠度计算. *水利学报*, 2008, 39(3): 346~ 350).
- [ 11 ] Shu L C, Lu C P, Li W. Calculation method of the exchange volume between surface water and groundwater based on uncertainty of parameters. *Hydrogeology and Engineering Geology*, 2008(5): 68~ 71. (束龙仓, 鲁程鹏, 李 伟. 考虑参数不确定性的地表水与地下水交换量的计算方法. *水文地质工程地质*, 2008(5): 68~ 71).



- [12] Lu L, Wu J C, Wang J J. Monte Carlo modeling of solute transport in a porous medium with multi scale heterogeneity. *Advances in Water Resources*, 2008, 19(3): 333~ 338. (陆 乐, 吴吉春, 王晶晶. 多尺度非均质多孔介质中溶质运移的蒙特卡罗模拟. *水科学进展*, 2008, 19(3): 333~ 338).
- [13] Yao L H. Perturbation coefficient awaiting determination stochastic finite element method for groundwater flow models. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1999(7): 60~ 64. (姚磊华. 地下水水流模型的摄动待定系数随机有限元法. *水利学报*, 1999(7): 60~ 64).
- [14] Li S, Chen J J, Ye H H, *et al.* Analysis on sensitivity of stochastic factors in numerical simulation of groundwater flow. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2006, 37(8): 977~ 984. (李 森, 陈家军, 叶慧海等. 地下水数值模拟中随机因素的灵敏度分析. *水利学报*, 2006, 37(8): 977~ 984).
- [15] Shi L S, Yang J Z, Li S L, *et al.* Stochastic analysis of subsurface flow based on KL-Galerkin method. *Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition)*, 2005, 37(5): 31~ 35. (史良胜, 杨金忠, 李少龙等. 基于 KL-Galerkin 解法的地下水流动随机分析. *四川大学学报(工程科学版)*, 2005, 37(5): 31~ 35).
- [16] Lu L, Wu J C, Chen J Y. Identification of hydrogeological parameters based on the Bayesian method. *Hydrogeology and Engineering Geology*, 2008(5): 58~ 63. (陆 乐, 吴吉春, 陈景雅. 基于贝叶斯方法的水文地质参数识别. *水文地质工程地质*, 2008(5): 58~ 63).
- [17] Liang J, Zeng G M, Guo S L, *et al.* Effect of hydraulic conductivity heterogeneity on solute transport in groundwater. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2008, 39(8): 900~ 906. (梁 婕, 曾光明, 郭生练等. 渗透系数的非均质性对地下水溶质运移的影响. *水利学报*, 2008, 39(8): 900~ 906).
- [18] Hu F S, Chen L Z, Wan L, *et al.* Uncertainty of aquifer property and assessment of groundwater yield reliability. *Journal of Nanjing University (Natural Sciences)*, 1999, 35(6): 675~ 682. (胡伏生, 陈连竹, 万 力等. 含水层参数不确定性与地下水开采量可靠性评价. *南京大学学报(自然科学)*, 1999, 35(6): 675~ 682).
- [19] Li R Z, Wang J Q, Qian J Z. Unascertained risk analysis of groundwater allowable withdrawal evaluation. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2004(4): 54~ 60. (李如忠, 汪家权, 钱家忠. 地下水允许开采量的未确知风险分析. *水利学报*, 2004(4): 54~ 60).
- [20] Shu L C, Liu P G, Liu B, *et al.* Analysis on sensitivity of parameters of the mathematical model for riverside well field. *Journal of Geotechnical Investigation & Surveying*, 2006(8): 29~ 31. (束龙仓, 刘佩贵, 刘 波等. 傍河水源地数学模型的参数灵敏度分析. *工程勘察*, 2006(8): 29~ 31).
- [21] Liu P G, Shu L C, Shang M T, *et al.* Fuzzy-stochastic method for reliability analysis of groundwater allowable withdrawal. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2008, 39(9): 1141~ 1145. (刘佩贵, 束龙仓, 尚熈廷等. 地下水可开采量可靠性分析的模糊~ 随机方法. *水利学报*, 2008, 39(9): 1141~ 1145).
- [22] Liu P G, Shu L C. Stochastic method of risk analysis for determining groundwater allowable withdrawal. *Journal of Geotechnical Investigation & Surveying*, 2008(8): 26~ 28. (刘佩贵, 束龙仓. 确定地下水可开采量的随机风险分析方法. *工程勘察*, 2008(8): 26~ 28).