第二章　流体力学控制方程

流体是任何力作用其上均会发生屈服（变形），由于变形从而容易运动的物体。

Isaac Newton, 1687年《自然哲学的数学原理》第二卷第五节

王　娴

西安交通大学航天学院

本章内容

- 简介
- 描写流动换热问题的控制方程
- 控制方程的通用形式
- 控制方程的守恒与非守恒形式
- 单值性条件
- 控制方程的无量纲化

简 介

- 不管是什么形式的CFD，都是基于流体力学基本控制方程：连续方程、动量和能量方程；

- 这些方程表述的是物理原理，它们是所有流体力学都必须遵循的三大基本物理定律的数学表述：

  （1） 质量守恒

  （2） 牛顿第二定律，$\vec{F} = m\vec{a}$

  （3） 能量守恒

简 介

- 将这些物理原理应用于合适的**流动模型**；
- 由此提炼出包含物理原理的**数学方程**。

简 介

本章目的：推导和讨论这些方程

如果你对每个方程中每一项的物理含义和重要性都没有本质的了解，那么你怎能准确地解释通过数值方法求解这些方程而得到的CFD结果呢？？？

连续介质假设

真实流体或固体所占有的空间可以近似地看作连续地无空隙地充满着“质点”。质点所具有的宏观物理量（如质量、速度、压力、温度等）满足一切应该遵循的物理定律，例如质量守恒定律，牛顿运动定律、能量守恒定律、热力学定律以及扩散、粘性及热传导等输运性质。

有了连续介质假设，空间中每个点和每个时刻都有确定的物理量。这些物理量一般说来是空间坐标和时间的连续函数，从而可以利用强有力的数学分析工具。

特征尺寸 >>> 分子平均自由程

连续介质假设

流体质点（Fluid Particle）：在连续介质中，比微观粒子结构尺度大得多而较宏观特征尺度小得多的流体微团，就称为流体质点。流体质点是流体力学研究的最小物质实体，在流体力学中所讨论的流体密度、速度和温度，实际上就是指流体质点的密度、速度和温度。流体质点包含着很多分子，但比起宏观特征尺度来，它又很小很小。概括起来就是，流体质点在微观上充分大，在宏观上充分小。流体质点具有的物理量是均匀的，它是质点中大量流体分子的相应微观物理量的统计平均值。

系统（System）：是指某一确定的流体质点集合的总体。它随流体的运动而运动，且体积和形状可能变化，但包含的流体质点不变。

控制体（Control Volume）：是指流场中某一确定的空间区域。流体质点随时间流入和流出这个空间体积。因此占据控制体的流体质点是随时间改变的。

拉格朗日法（Lagrangian Method）：跟随流体质点去研究流体运动的方法。

欧拉法（Euler Method）：着眼于空间坐标去研究流体运动的方法。

流动模型

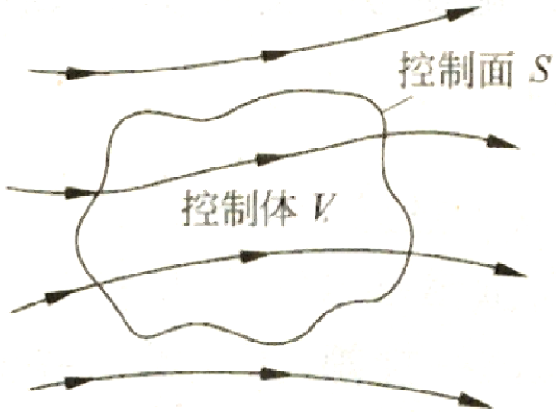
- 固体：容易了解定义。如：平动，每部分速度相同。
- 流体：湿软，难。运动中的流体，不同位置，速度可以不同。

对于有连续性的流体，有以下两种流动模型

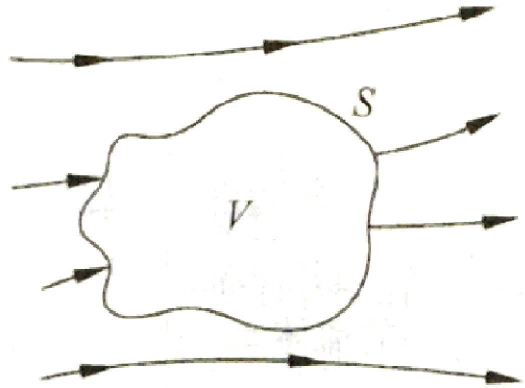
有限控制体模型　　无限小流体微团

我们不是同时观察整个流场，而是将物理学原理用在这些流动模型上，从而得到流体流动方程。

流动模型

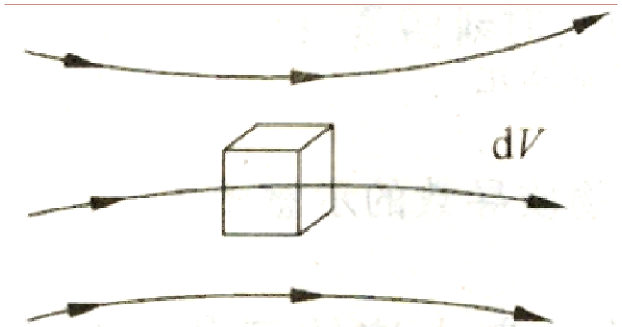


空间固定，有流体通过的有限控制体

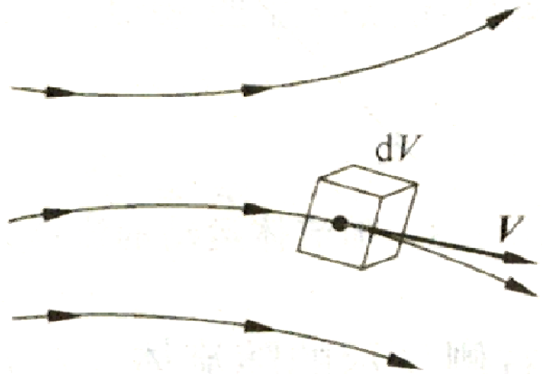


有限控制体积法

随流体一起运动的控制体，控制体中总是包含同样的流体质点



空间固定的无穷小流体元，流体通过它



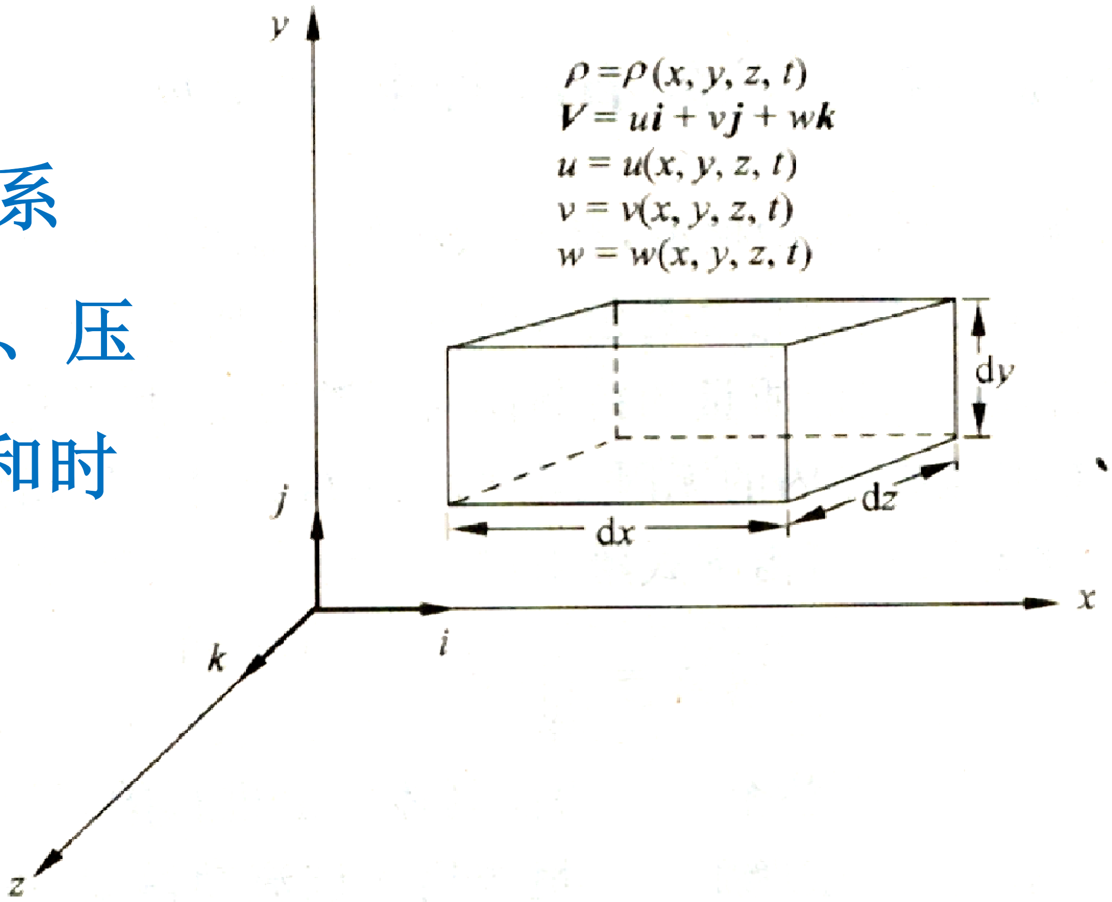
无限小流体元方法

沿流体运动的无穷小流体元，其上各点的速度矢量与当地流动速度相同

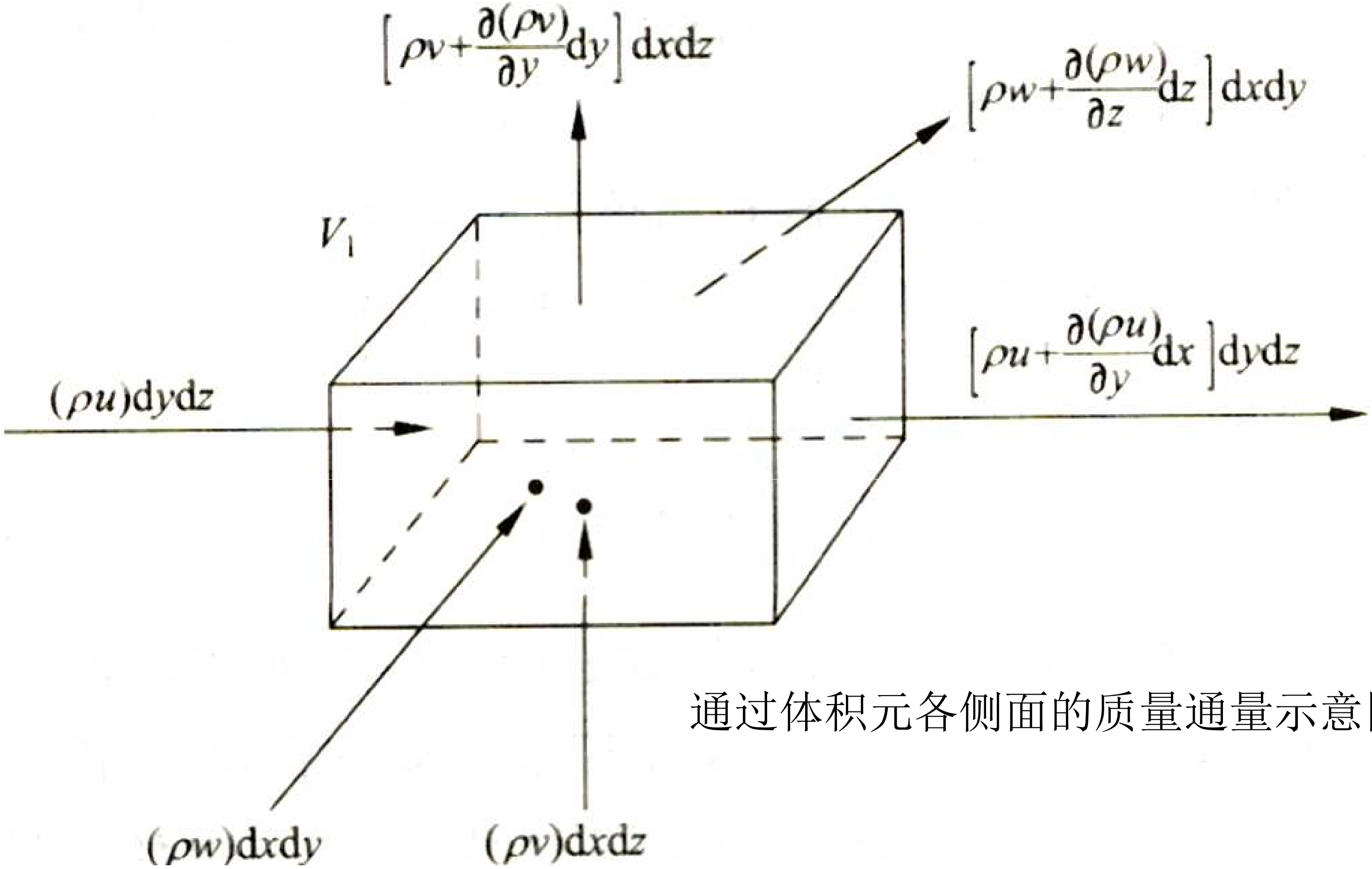
推导前提

空间固定的无穷小体积元模型

- 笛卡尔坐标系
- 速度、密度、压力是空间坐标和时间的函数



质量守恒方程（连续方程）

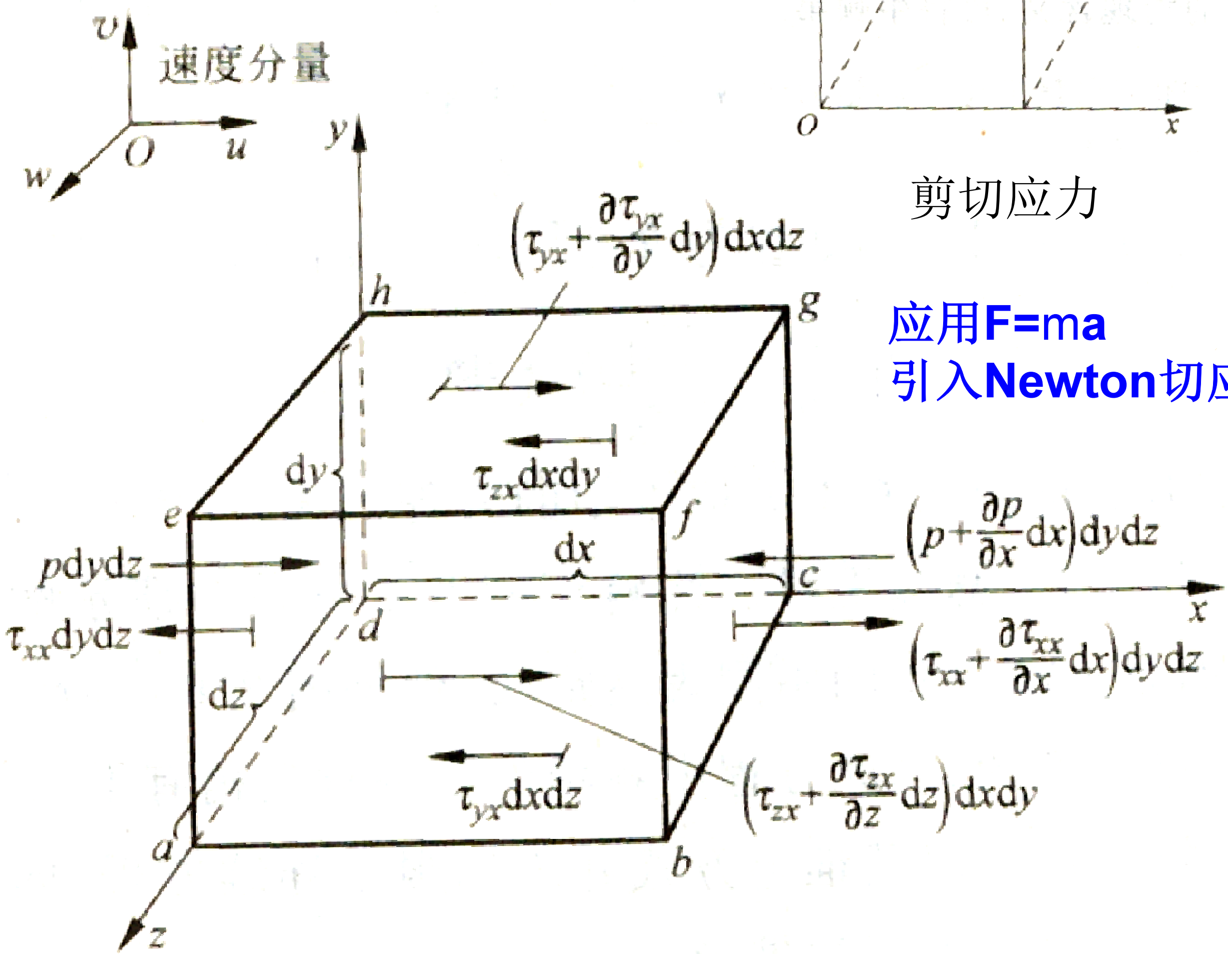


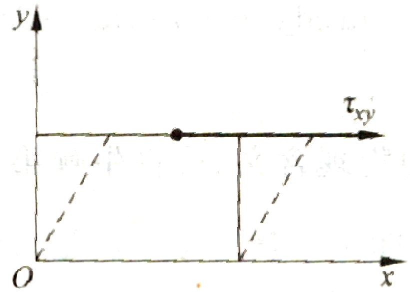
通过体积元各侧面的质量通量示意图

[单位时间内微元体中流体质量的增加] =

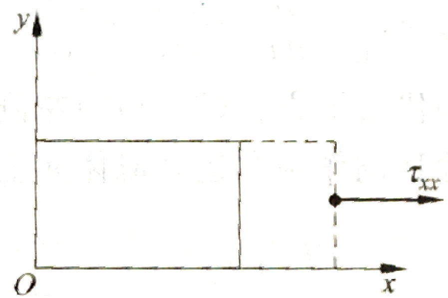
[同一时间间隔内流入该微元体的净质量]

动量方程





剪切应力



正应力

应用F=ma

引入**Newton**切应力公式及**Stokes**表达式

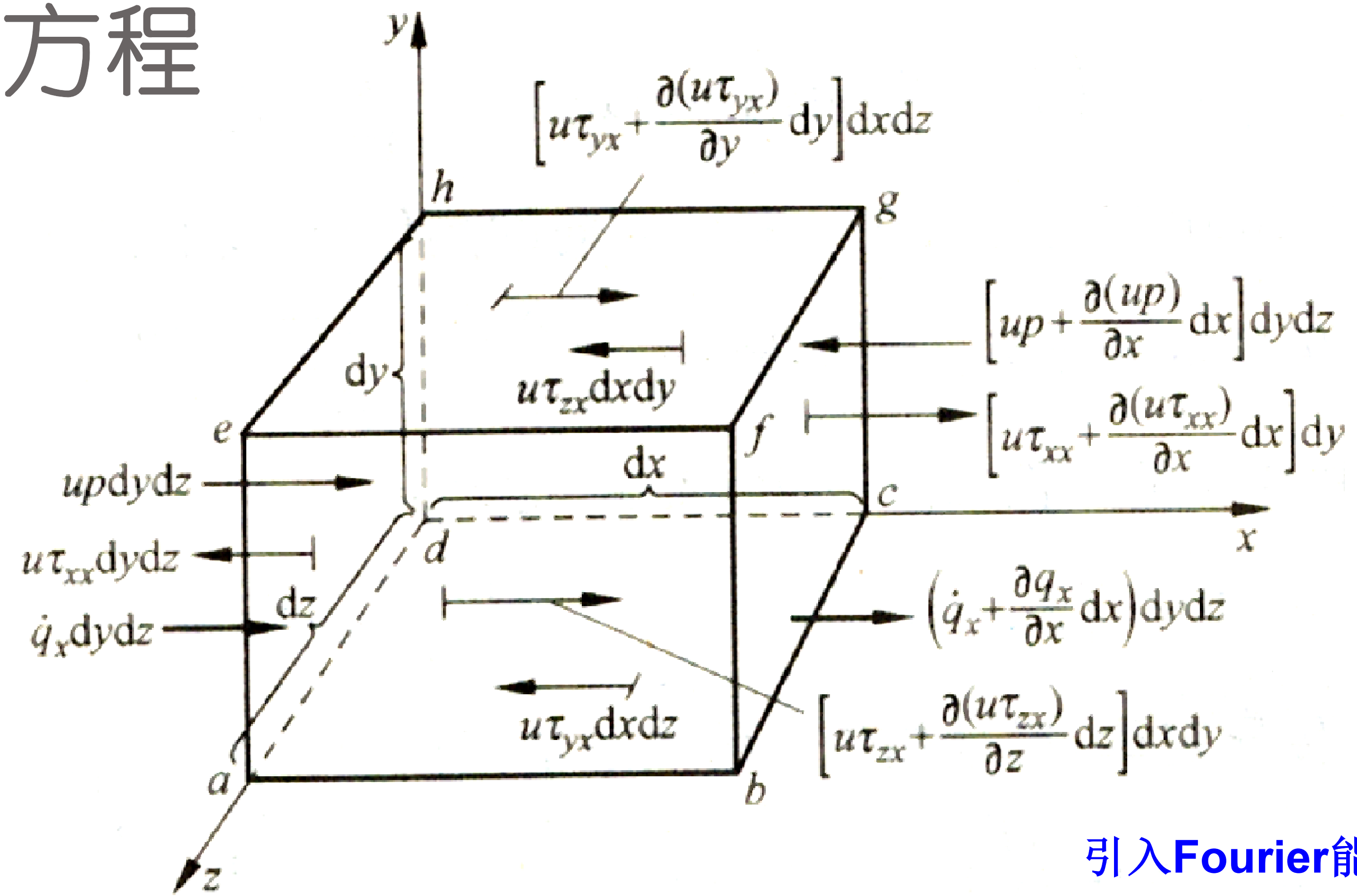
仅显示x方向作用力，模型用于x方向动量方程的推导

[微元体中流体动量的增加率] =

[作用在微元体上各种力之和]

总质量力与作用在表面的总表面力

能量方程



引入Fourier能量定理

仅显示x方向的通量，模型用于能量方程的推导

[微元体中热力学能的增加率] = [进入微元体的净热流量]+[体积力与表面力对微元体做的功]

附加方程

- 五个方程，六个未知变量 （u，v，w，p，T，ρ）
- 还需要补充一个联系压力与密度的方程，方程组才能封闭。 $\rho = f(p,T)$
- 对理想气体

$$p = \rho RT$$ （R为摩尔气体常数）

控制方程的通用形式

在流动与传热问题求解中所需求解的主要变量的控制方程都可以表示成以下通用形式：

$$\boxed{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}} + \boxed{\mathrm{div}(\rho\vec{u}\phi)} = \boxed{\mathrm{div}\left(\Gamma_\phi \,\mathrm{grad}\,\phi\right)} + \boxed{S_\phi}$$

瞬态项　　对流项　　扩散项　　源项

- ϕ: 通用变量，代表u，v，w，T
- Γ_ϕ: 广义扩散系数。（$\vec{u} \to \Gamma_\phi = \mu \quad T \to \Gamma_\phi = \frac{\lambda}{c_p}$）
- S_ϕ：广义源项。（$\vec{u} \to S_\phi = -\frac{\partial p}{\partial x} + F_x \quad T \to S_\phi =$ 热源）
- 令 $\phi = 1$，$S_\phi = 0 \Rightarrow$ 质量守恒方程

控制方程的通用形式

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w\phi)}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+S_\phi$$

对控制方程的两点说明

上述三维非稳态NS（Navier-Stokes）方程，无论对层流或湍流都适用。对湍流，直接模拟 DNS（Direct Numerical Simulation）。DNS对计算机内存速度要求极高，不实际，工程应用很少。一般采用非稳态NS方程组做时间平均，并需要补充能反映湍流特性的其它方程→湍流模型。

对控制方程的两点说明

当流动与换热过程伴随有质交换现象时，控制方程中还应增加组分守恒定律。

设组分l 的质量百分数为m_l，在引入质扩散的Fick定律后，可得：

$$\frac{\partial(\rho m_l)}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho\vec{u}m_l) = \mathbf{div}(\Gamma_l \mathbf{grad} m_l) + S_l$$

S_l： 单位容积内组分 l 的产生率 $kg/(s \cdot m^3)$

Γ_l： 组分l 的扩散系数

控制方程的守恒与非守恒形式

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+\boxed{\mathbf{div}(\rho\vec{u}\phi)}=\mathbf{div}\left(\Gamma_\phi\mathbf{grad}\phi\right)+S_\phi$$

守恒型：

- **对流项都采用散度的形式来表示；**
- **位于散度符号内的，都是通过流动在单位时间内单位面积上进入所研究区域的某个物理量的净值，如：**

  质量流速：$\rho\vec{u}$；动量流密度：$\rho\vec{u}u$，$\rho\vec{u}v$，$\rho\vec{u}w$；

  能量流密度：$\rho c_p\vec{u}T$
- **物理意义明确。**

控制方程的守恒与非守恒形式

守恒型质量方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho\vec{u}) = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boxed{\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}} = 0$$

非守恒型质量方程：

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt}} + \rho\,\mathbf{div}\vec{u} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

控制方程的守恒与非守恒形式

守恒型方程通用形式：

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho\vec{u}\phi) = \mathbf{div}\left(\Gamma_\phi \mathbf{grad}\phi\right) + S_\phi$$

非守恒型方程通用形式：

$$\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} + \rho\mathbf{div}\phi\vec{u} = \mathbf{div}\left(\Gamma_\phi \mathbf{grad}\phi\right) + S_\phi$$

控制方程的守恒与非守恒形式

守恒型方程：

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u\phi)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v\phi)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w\phi)}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+S_\phi$$

非守恒型方程：

$$\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}+\rho u\frac{\partial\phi}{\partial x}+\rho v\frac{\partial\phi}{\partial y}+\rho w\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+S_\phi$$

对控制方程的评述

- 耦合的非线性偏微分方程组，很难得到解析解，目前为止，没有得到通用闭合形式解的方法；
- 对于动量和能量方程，守恒型和非守恒型方程之间的差别仅在于方程的左端，方程的右端是相同的；
- 守恒型方程左端包含某些量的散度，有时也被称为散度型；

对控制方程的评述

- 从微元体的角度，控制方程的守恒型与非守恒型是等价的，都是物理守恒定律的数学表示；
- 从数值计算的观点，差分法一般用非守恒型控制方程，控制容积积分法用守恒型方程。尤其，空气动力学中守恒型方程特别受到重视。

无黏流动方程（欧拉方程）

- 黏性流动包括摩擦、热传导和/或质量扩散等运输现象的流动，这些流动是耗散的，他们是增加流动的熵。

- 无黏流动是指忽略流动中的黏性耗散和运输现象以及热传导的流动。

质量守恒方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{V})=0$$

动量方程

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho u\mathbf{V})=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho f_x$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho v\mathbf{V})=-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho f_y$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho w\mathbf{V})=-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho f_z$$

自然对流换热方程

由于流体内部存在着温度差，使得各部分流体的密度不同，温度高的流体密度小，必然上升；温度低的流体密度大，必然下降，从而引起流体内部的流动为自然对流。这种没有外部机械力的作用，仅仅靠流体内部温度差，而使流体流动从而产生的换热现象，称为自然对流换热。

自然对流换热方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+g_y$$

浮力项

是密度的函数：

$$g_y=f(\rho)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\lambda}{\rho c_p}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

自然对流换热方程

Boussinesq假设：

① 除密度外，其它物性参数为常数；

② 对密度，仅考虑动量方程中与体积力有关的项，其余各项中密度亦为常数。

$$p = p_0 + p'$$

p_0：温度为 T_0(参考值) 时，静止压力。

p'：流动发生时的压力变动。

自然对流换热方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-g_y\beta_0\left(T-T_0\right)$$

β：流体的膨胀系数

下标0表示为参考温度下的值，参考温度可为

T_c、 T_h 、$(T_h+T_c)/2$

自然对流换热方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)-g_y\beta_0\left(T-T_0\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\lambda}{\rho c_p}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$$

速度场与温度场耦合！

单值性条件

上面所讨论的守恒型与非守恒型的控制方程适合于所有的牛顿流体的流动与换热

绕波音747的流动

绕风车的流动

微型管道内的流动

………

控制方程相同
流场不同

Why？？？

真正导致各种特定形式解的是单值性条件（边界条件+初始条件）

控制方程及相应的初始条件与边界条件的组合构成了对一个物理过程的完整的数学描写。

单值性条件

(1) 初始条件：所研究现象在过程开始时刻（t=0）的各个求解变量的空间分布，必须予以给定。对于稳态问题不需要初始条件。

$$u(0, x, y, z) = f(x, y, z)$$

单值性条件

(2) 物理边界条件：在求解区域的边界上，所求解的变量或其一阶导数随地点及时间的变化规律。

(3) 计算边界：因计算需要而划定，但并不是实际存在的边界。

物理边界条件

- 物面上的边界条件

速度

- ◆ 无滑移边界条件（物体与流体间相对速度为零） $u = u_w$
- ◆ 滑移边界条件 （稀薄气体等） $u = f(u_w, \ \mathrm{Kn}, \mathrm{Re} \ldots)$

温度

- ◆ 无滑移边界条件， 给定壁面温度 $T = T_w$
- ◆ 滑移边界条件 （稀薄气体等） $T = f(T_w, \ \mathrm{Kn}, \mathrm{Re} \ldots)$
- ◆ 给定壁面热流 $\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_w = -\frac{\dot{q}_w}{K}$ 特例：$q_w=0$, 绝热边界条件

物理边界条件

- 具体问题中的边界条件

◆ 进出口边界

◆ 自由界面。。。。。

计算边界条件

因计算需要而划定，但并不是实际存在的边界

- 充分发展的边界
- 周期性边界
- 对称边界
- 外部流动边界。。。。。

单值性条件总结

1. 边界条件

（1）第一类（Dirichlet）：给定了边界上的值 $(\phi)_\Gamma = g(x,y,z,t)$

（2）第二类（Neumann）：给定了边界上一阶导数的值 $\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_\Gamma = g(x,y,z,t)$

单值性条件总结

（3）第三类（Rubin）：规定了边界上被求函数的一阶导数与函数之间的关系

$$\left(k\frac{\partial \phi}{\partial n}+h\phi\right)_{\Gamma}=g(x,y,z,t)$$

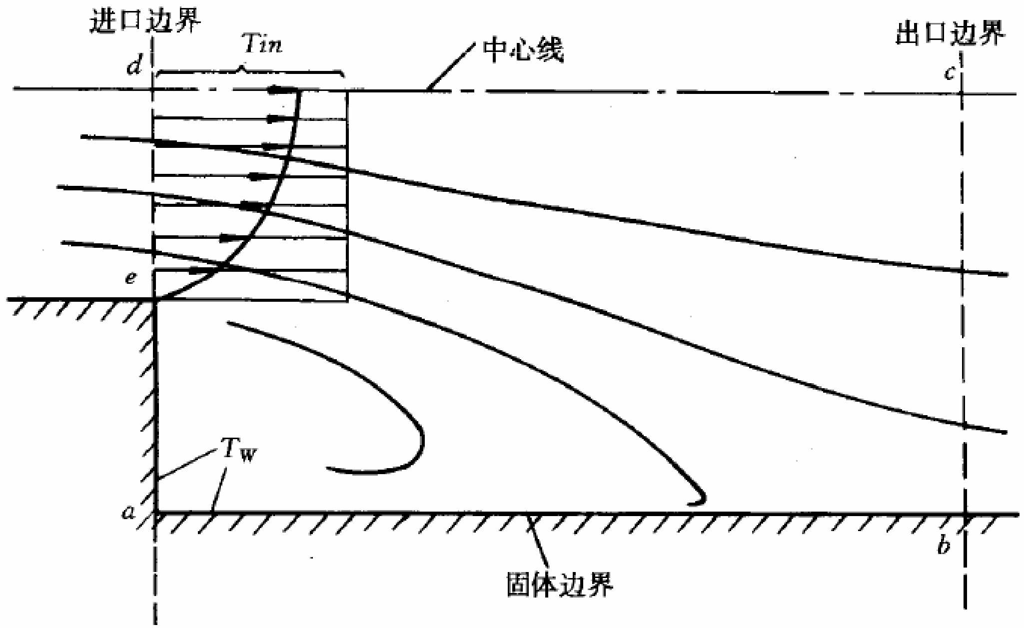
数值计算中计算区域的出口边界条件常常最难确定，要做近似处理。

2. 初始条件 $t=0,\quad \phi=f(x,y,z)$

例

1. 问题与假设条件

突扩区域中的对流传热：二维、稳态、不可压缩、常物性、不计重力与黏性耗散。



例

2. 控制方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial (uu)}{\partial x}+\frac{\partial (vu)}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$$

$$\frac{\partial (uv)}{\partial x}+\frac{\partial (vv)}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})$$

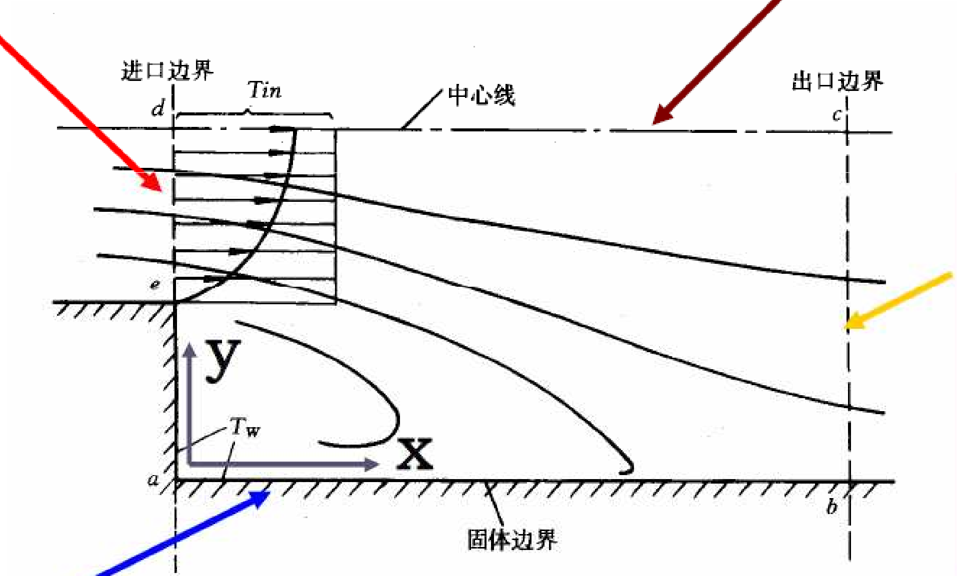
$$\frac{\partial (uT)}{\partial x}+\frac{\partial (vT)}{\partial y}=a(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2})$$

例

3. 边界条件

（1）进口边界条件：给定u,v,T随y 的分布；

（3）中心线：$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial T}{\partial y}=0;\quad v=0$



（4）出口边界：数学上要求给定u,v,T或其导数随y的分布；实际上做不到；数值上近似处理

（2）固体边界条件：速度无滑移，温度无跳跃

不可压缩粘性流动，换热方程组

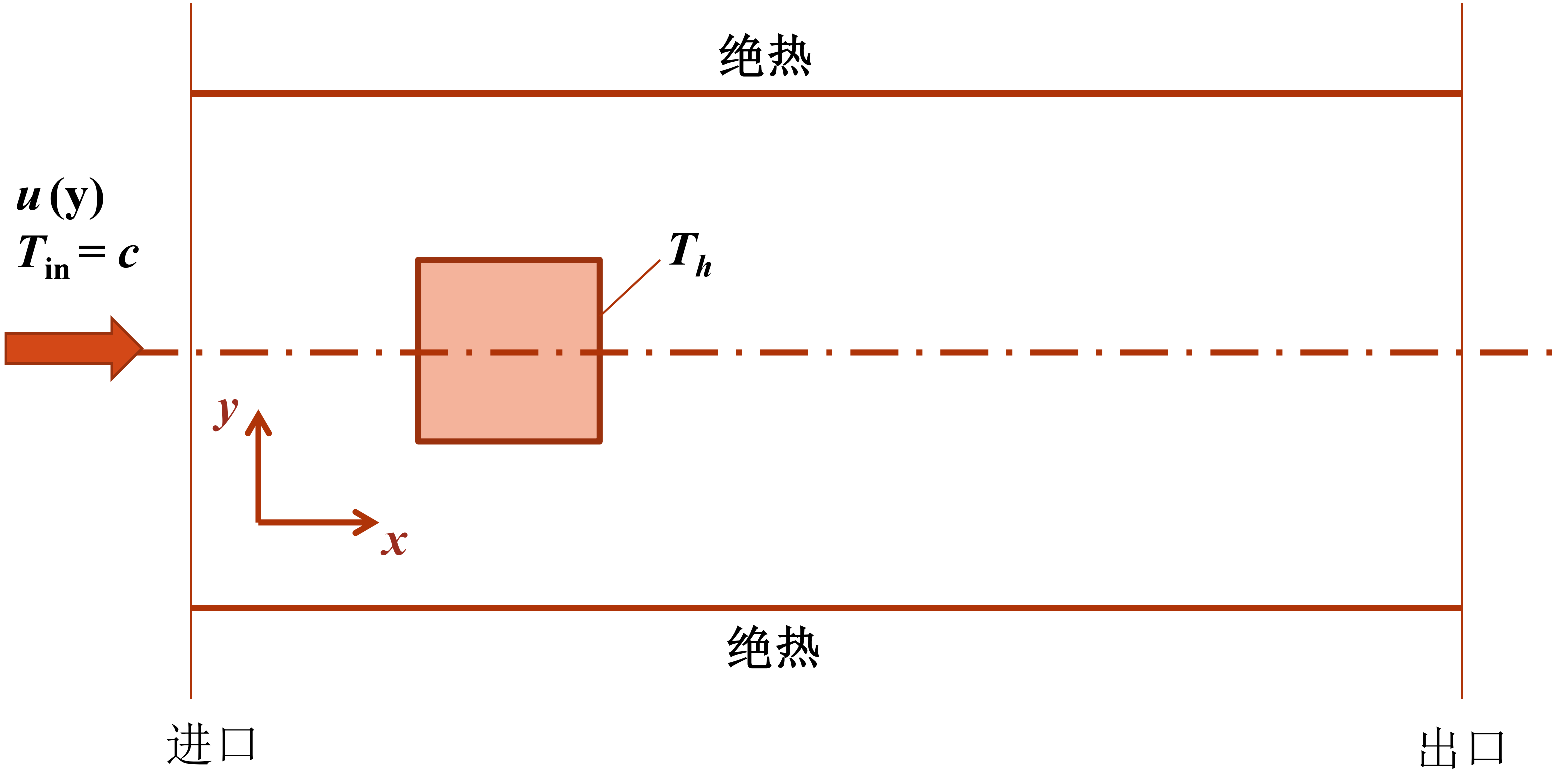
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+g_x \\
\dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}+\dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+g_y \\
\dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}+\dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+g_z
\end{cases}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}=\frac{\lambda}{\rho C_p}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+S$$

作业

如图所示，在一个二维平行板通道内的中心线上置有一个温度均匀的正方形柱体，计算区域入口流体温度为 $T_{in} = c$，流速已达充分发展，上下平板绝热，出口边界离开柱体比较远。试写出层流、稳态对流换热的控制方程组，并对所取定的计算区域写出流速及温度的边界条件。



控制方程的无量纲化

- ❑ 归一化，为了编制程序的时候方便，减少变量数目；
- ❑ 无量纲化是为了计算时候避免过大或者过小的数；
- ❑ 从流动实验的角度来看，模型的缩放，人工流场的实现也离不开这些无量纲参数。无量纲参数决定了流动的性质，很多情况下，只能针对具体关心的问题选择合适的无量纲参数进行模拟，而不可能完全模拟实际的流动状态。

CFD与NHT中常遇到的无量纲数

$$Re = \frac{\rho u L}{\mu}$$ 雷诺数（**Reynolds**）：惯性力 / 粘性力

$$M = \frac{u}{a}$$ 马赫数（**Mach**）：衡量空气压缩性的重要参数

$$Kn = \frac{\lambda}{L}$$ 克努森数（**Knudsen**）：描述气体稀薄程度的指标

λ: 分子平均自由程

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$ 普朗特数（**Prandtl**）：动量扩散 / 热扩散

CFD与NHT中常遇到的无量纲数

$$Fr = \frac{u^2}{gL}$$

佛劳德数（Froude）：惯性力 / 重力

$$Gr = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu^2}$$

格拉晓夫数（Grashof）：浮力 / 粘性力

$$We = \frac{\rho u^2 L}{\sigma}$$

韦伯数（Weber）：惯性力 / 表面张力

举 例

写出下面两种流动的控制方程，并将其无量纲化，包括边界条件。

1. 顶盖驱动流

2. 方腔内由温差引起的自然对流

本章要求

1. 掌握描写流动换热问题的控制方程组及其每一项的含义；

2. 掌握单值性条件；

3. 掌握常用的无量纲数；

4. 掌握简单的控制方程的无量纲化方法。