

高等学校教材

工 程 数 学

数学物理方程与特殊函数

(第三版)

东南大学数学系  
王元明 编

高等教育出版社

内容提要

本书第三版是在 1982 年出版的第二版的基础上修订的,除保留了第二版原有特色以外,还根据工科各专业发展的需要内容作了增减。全书共分九章,前四章及第七、第八章介绍数学物理方程的基本概念和常用解法;第五、六两章分别讨论了贝塞尔函数与勒让德多项式的基本性质及在求解数学物理方程定解问题中的应用;第九章简要地介绍了物理学、几何学中几个重要的非线性偏微分方程,其中包括激波与孤立波。

本书可作为高等学校理工科各专业的教材,也可供工程技术人员、数学系师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学:数学物理方程与特殊函数 王元明编 .  
3 版 .—北京:高等教育出版社,2004 .1  
ISBN 7 - 04 - 012958 - 2

工 ... 王 ... . 数学物理方程 - 高等  
学校 - 教材 特殊函数 - 高等学校 - 教材  
O175 24 O174 6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 100543 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	网 址	http: www .hep .edu .cn
总 机	010 - 82028899		http: www .hep .com .cn
经 销	新华书店北京发行所		
印 刷			
开 本	850 × 1168 1 32	版 次	1978 年 11 月第 1 版
印 张	6 .75		年 月第 3 版
字 数	170 000	印 次	年 月第 次印刷
		定 价	9 .80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。  
版权所有 侵权必究

策划编辑	李艳馥
责任编辑	高尚华
封面设计	于 涛
责任绘图	吴文信
版式设计	张 岚
责任校对	王效珍
责任印制	

## 第二版前言

本书从 1978 年作为工程数学试用教材出版以来,得到了许多兄弟院校的关心和支持,一些和我们素不相识的同行们出于高度的事业心和责任感,在使用本书的过程中积累了许多宝贵的意见和建议,这些来自教学实践的经验和要求,是我们这次进行修订的主要依据。

全书由“数学物理方程”与“特殊函数”两大部分内容组成。“数理方程”部分,主要是讲了数学物理方程的一些基本概念及三种典型的二阶线性偏微分方程各种定解问题的一些常用解法,其中包括分离变量法、行波法、积分变换法、格林函数法及差分法。在这些解法中,我们把重点放在分离变量法上,较详细地讨论了三种典型方程在直角坐标系、极坐标系、柱面坐标系与球面坐标系中进行分离变量的一般步骤及各种边界条件的处理。“特殊函数”部分,主要是讲了贝塞尔函数及勒让德多项式,其中包括如何从求解数学物理方程的定解问题引出贝塞尔方程与勒让德方程;两个方程通解的表达式;贝塞尔函数及勒让德多项式的一些重要性质以及利用这两种特殊函数来解决数学物理方程的一些定解问题的全过程。这两大部分内容既有一定的相对独立性,但从某种意义上讲又是一个不可分割的有机整体。

不论是数学物理方程,还是特殊函数,它们的内容都是极其丰富的,作为一本工科院校的工程数学的教材,当然不可能把所有主要的内容都包罗无遗地吸收进来。如何根据工科院校的特点,用较少的篇幅把一些最基本的概念和方法讲清楚,并能为较多的要求各不相同的专业所采用,这一直是编者感到棘手的难题。虽然我们也作了一些努力,例如,本书采用了以数学物理方程的常用解法

为安排内容的线索,且在各种解法中只着眼于求出“形式解”,而略去了对定解问题适定性的讨论;又如,尽可能地把各部分内容写得前后呼应,对各种解法的思路和特点都作了一点简要的说明等等。但这些做法是否妥当,还有待于今后教学实践的检验。

使用本书的教学时数,大体为 33 ~ 41,各章学时的分配数可参考下表:

章 数	一	二	三	四	五	六	七
时 数	3 ~ 4	8 ~ 10	4 ~ 5	4 ~ 5	6 ~ 8	4 ~ 5	4

本书的第一版是在我们教研组过去编写的讲义的基础上,根据 1977 年在西安召开的高等学校工科数学教材编写会议通过的大纲编写的,这次又以第一版为基础,参照高等工业学校工程数学教学大纲(草案)和校内外许多同志在使用中所积累的经验和建议修订的。本书主审人浙江大学周茂清教授详细审阅了原稿,并提出了许多宝贵的意见,编者向他表示衷心的感谢。同时,编者还要向以各种方式帮助本书编写与修改的校内外同志,致以诚挚的谢意。

本书的编写与修订工作是由王元明同志执笔完成的。孙家乐、宋柏生两同志在这次修订时提供了一些有益的建议。

由于编者水平所限,书中一定还存在不少错误和缺点,敬请赐教。

编 者

1982 年 3 月

## 第三版前言

自本书第二版问世以来,得到了同行们的理解、关心和支持,二十年内共印刷 33 次,总发行量近 70 万册。书的优点和缺点都非常明显。优点是:文字精炼、思路清晰、重点突出、篇幅适当,在较长时间内满足了工科学生对这门课程的要求;缺点是:二十年没有修订,内容有些陈旧,个别例子及个别地方有错误或表述不准确。

这次修订的基本宗旨就是要保留原书的优点,尽可能地克服其缺点。具体地说,就是:

第一、对第二版前六章除了对少数内容作了更正和文字修改以外,基本上保持不变。

第二、删去了第二版中第七章“数学物理方程的差分解法”。这样做的出发点是:我们认为这个内容放到《数值分析》这类课程内可能更合适一些。

第三、增加了“能量积分法”、“变分方法”及“非线性偏微分方程”三章内容。这三章的写法也力求前后呼应,彼此关联。此外,在“变分方法”和“非线性偏微分方程”两章内,还引入了定解问题“弱解”的概念。

书中各章的内容基本上都是彼此独立的,因此在教学时可根据需要和学时数任意取舍,但从本门课程来讲,前六章无疑是最基础的。为便于组织教学,我们宁愿放弃了从数学物理方程的体系来安排各章顺序的做法,将新增的内容放在书的后三章。对于不要求了解“特殊函数”这部分内容的读者,完全可以跳过第五、六章,直接读后面的内容。

鉴于原南京工学院已于 1988 年更名为现在的东南大学,数学

### 第三版前言

---

教研组已发展成为具有硕士、博士授予点的数学系,故将第二版的署名“南京工学院数学教研组”改为“东南大学数学系王元明”。

高等教育出版社理工分社的领导和张忠月、李艳馥两位编辑对本书的修订工作给予了热情的支持,并付出了辛勤的劳动,编者在此向她们表示衷心的感谢。

编 者

2003 年 6 月

# 目 录

第一章 一些典型方程和定解条件的推导 .....	1
§ 1.1 基本方程的建立 .....	1
§ 1.2 初始条件与边界条件 .....	11
§ 1.3 定解问题的提法 .....	15
习题一 .....	17
第二章 分离变量法 .....	18
§ 2.1 有界弦的自由振动 .....	18
§ 2.2 有限长杆上的热传导 .....	28
§ 2.3 圆域内的二维拉普拉斯方程的定解问题 .....	32
§ 2.4 非齐次方程的解法 .....	36
§ 2.5 非齐次边界条件的处理 .....	41
* § 2.6 关于二阶常微分方程特征值问题的一些结论 .....	49
习题二 .....	52
第三章 行波法与积分变换法 .....	56
§ 3.1 一维波动方程的达朗贝尔公式 .....	56
§ 3.2 三维波动方程的泊松公式 .....	63
3.2.1 三维波动方程的球对称解 .....	63
3.2.2 三维波动方程的泊松公式 .....	64
3.2.3 泊松公式的物理意义 .....	69
§ 3.3 积分变换法举例 .....	72
习题三 .....	81



第四章	拉普拉斯方程的格林函数法 .....	84
§ 4.1	拉普拉斯方程边值问题的提法 .....	84
§ 4.2	格林公式 .....	86
§ 4.3	格林函数 .....	92
§ 4.4	两种特殊区域的格林函数及狄氏问题的解 .....	95
4.4.1	半空间的格林函数 .....	95
4.4.2	球域的格林函数 .....	97
习题四	.....	99
第五章	贝塞尔函数 .....	101
§ 5.1	贝塞尔方程的引出 .....	101
§ 5.2	贝塞尔方程的求解 .....	103
§ 5.3	当 $n$ 为整数时贝塞尔方程的通解 .....	107
§ 5.4	贝塞尔函数的递推公式 .....	109
§ 5.5	函数展成贝塞尔函数的级数 .....	112
5.5.1	贝塞尔函数的零点 .....	112
5.5.2	贝塞尔函数的正交性 .....	115
§ 5.6	贝塞尔函数应用举例 .....	117
* § 5.7	贝塞尔函数的其他类型 .....	122
5.7.1	第三类贝塞尔函数 .....	122
5.7.2	虚宗量的贝塞尔函数 .....	123
5.7.3	开尔文函数(或称汤姆孙函数) .....	124
* § 5.8	贝塞尔函数的渐近公式 .....	125
习题五	.....	127
第六章	勒让德多项式 .....	130
§ 6.1	勒让德方程的引出 .....	130
§ 6.2	勒让德方程的求解 .....	132
§ 6.3	勒让德多项式 .....	135

## 目 录

§ 6.4 函数展成勒让德多项式的级数 .....	138
6.4.1 勒让德多项式的正交性 .....	138
6.4.2 函数展成勒让德多项式的级数 .....	140
* § 6.5 连带的勒让德多项式 .....	146
习题六 .....	149
第七章 能量积分法 .....	152
§ 7.1 一维波动方程初值问题的能量不等式 .....	152
§ 7.2 初值问题解的惟一性与稳定性 .....	158
§ 7.3 初边值问题的能量不等式 .....	160
习题七 .....	162
第八章 变分方法 .....	163
§ 8.1 变分方法的物理背景 .....	163
§ 8.2 变分问题的可解性 .....	165
§ 8.3 吕兹 - 伽辽金方法 .....	168
习题八 .....	172
第九章 非线性偏微分方程 .....	173
§ 9.1 极小曲面问题 .....	173
§ 9.2 非线性偏微分方程举例 .....	176
§ 9.3 单个守恒律 激波 .....	179
§ 9.4 KdV 方程 孤立子 .....	185
习题九 .....	189
附录 A 函数的基本知识 .....	191
附录 B 傅里叶变换与拉普拉斯变换简表 .....	196
习题答案 .....	200

# 第一章 一些典型方程和定解条件的推导

在讨论数学物理方程的解法以前,我们首先要弄清楚数学物理方程所研究的问题的正确提法.为此,我们从两方面来讨论,一方面要建立描述某种物理过程的微分方程,另一方面要把一个特定的物理现象本身所具有的具体条件用数学形式表达出来.

## § 1.1 基本方程的建立

在本节,我们将通过几个不同的物理模型推导出数学物理方程中三种典型的方程,这些方程构成本书的主要研究对象.

### 例 1 弦的振动

弦的振动问题,虽然是一个古典问题,但对于初学者仍然具有一定的启发性.

设有一根均匀柔软的细弦,平衡时沿直线拉紧,而且除受不随时间而变的张力作用及弦本身的重力外,不受外力影响.下面研究弦作微小横向振动的规律.所谓“横向”是指全部运动出现在一个平面上,而且弦上的点沿垂直于  $x$  轴的方向运动(图 1-1).所谓“微小”是指振动的幅度及弦在任意位置处切线的倾角都很小,以致它们的高于一次方的项都可略而不计.

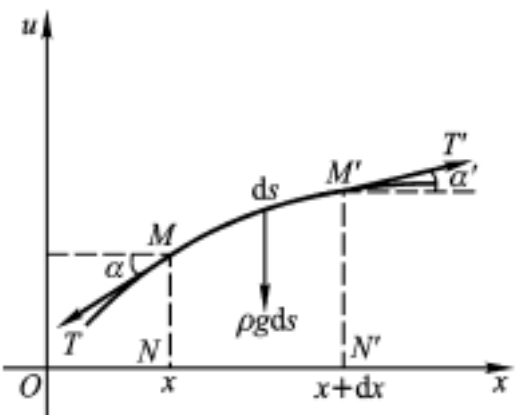


图 1 - 1

设弦上具有横坐标为  $x$  的点在时刻  $t$  时的位置为  $M$ , 位移

$NM$  记作  $u$ . 显然, 在振动过程中位移  $u$  是变量  $x$  与  $t$  的函数  $u(x, t)$ , 现在来建立位移  $u$  满足的方程. 我们把弦上点的运动先看作小弧段的运动, 然后再考虑小弧段趋于零的极限情况. 在弦上任取一弧段  $MM$ , 其长为  $ds$ , 设  $\rho$  是弦的线密度, 弧段  $MM$  两端所受的张力记作  $T$ ,  $T$ . 由于假定弦是柔软的, 所以在任一点处张力的方向总是沿着弦在该点的切线方向. 现在考虑弧段  $MM$  在  $t$  时刻的受力情况. 用牛顿运动定律, 作用于弧段上任一方向上的力的总和等于这段弧的质量乘以该方向上的加速度.

在  $x$  轴方向弧段  $MM$  受力的总和为  $-T \cos \alpha + T \cos \beta$ , 由于弦只作横向振动, 所以

$$T \cos \beta - T \cos \alpha = 0. \quad (1.1)$$

按照上述弦振动微小的假设, 可知在振动过程中弦上  $M$  点与  $M$  点处切线的倾角都很小, 即  $\alpha \approx 0$ ,  $\beta \approx 0$ , 从而由

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \dots$$

可知, 当我们略去  $\alpha^2$  与  $\alpha^4$  的所有高于一次方的各项时, 就有

$$\cos \alpha \approx 1, \quad \cos \beta \approx 1,$$

代入(1.1)式, 便可近似得到

$$T = T.$$

在  $u$  方向弧段  $MM$  受力的总和为  $-T \sin \alpha + T \sin \beta - g ds$ , 其中  $-g ds$  是弧段  $MM$  的重力. 又因当  $\alpha \approx 0$ ,  $\beta \approx 0$  时

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} \quad \tan \alpha = \frac{u(x, t)}{x},$$

$$\sin \beta = \frac{\tan \beta}{\sqrt{1 + \tan^2 \beta}} = \frac{u(x + dx, t)}{x + dx},$$

$$ds = \sqrt{1 + \left[ \frac{u(x, t)}{x} \right]^2} dx \approx dx,$$

且小弧段在时刻  $t$  沿  $u$  方向运动的加速度近似为  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$ , 小弧

段的质量为  $\rho ds$ , 所以

$$-T \sin \theta + T \sin \theta - g ds = ds \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

或

$$T \left[ \frac{u(x+dx, t)}{x} - \frac{u(x, t)}{x} \right] - g dx = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx, \quad (1.2)$$

上式左边方括号内的部分是由于  $x$  产生  $dx$  的变化而引起的  $\frac{u(x, t)}{x}$  的改变量, 可用微分近似代替, 即

$$\frac{u(x+dx, t)}{x} - \frac{u(x, t)}{x} = \frac{d}{dx} \left[ \frac{u(x, t)}{x} \right] dx = -\frac{1}{x^2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx,$$

于是 
$$\left[ T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - g \right] dx = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx$$

或 
$$T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + g.$$

一般说来, 张力较大时弦振动速度变化很快, 即  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  要比  $g$  大得多, 所以又可以把  $g$  略去. 经过这样逐步略去一些次要的量, 抓住主要的量, 在  $u(x, t)$  关于  $x, t$  都是二次连续可微的前提下, 最后得出  $u(x, t)$  应近似地满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.3)$$

这里的  $a^2 = \frac{T}{\rho}$ . (1.3) 式称为一维波动方程.

如果在振动过程中, 弦上另外还受到一个与弦的振动方向平行的外力, 且假定在时刻  $t$  弦上  $x$  点处的外力密度为  $F(x, t)$ , 显然, 在这时 (1.1) 及 (1.2) 分别为

$$T \cos \theta - T \cos \theta = 0,$$

$$F ds - T \sin \theta + T \sin \theta - g ds = ds \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

利用上面的推导方法并略去弦本身的重量, 可得弦的强迫振动方

程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (1.3)$$

其中  $f(x, t) = \frac{1}{\rho} F(x, t)$ , 表示  $t$  时刻单位质量的弦在  $x$  点处所受的外力密度.

方程(1.3)与(1.3)的差别在于(1.3)的右端多了一个与未知函数  $u$  无关的项  $f(x, t)$ , 这个项称为自由项. 包括有非零自由项的方程称为非齐次方程, 自由项恒等于零的方程称为齐次方程. (1.3)为齐次一维波动方程, (1.3)为非齐次一维波动方程.

## 例2 传输线方程

对于直流电或低频的交流电, 电路的基尔霍夫(Kirchhoff)定律指出同一支路中电流相等. 但对于较高频率的电流(指频率还没有高到能显著地辐射电磁波的情况), 电路中导线的自感和电容的效应不可忽略, 因而同一支路中电流未必相等.

今考虑一来一往的高频传输线, 它被当作具有分布参数的导体(图1-2), 我们来研究这种导体内电流流动的规律. 在具有分布参数的导体中, 电流通过的情况, 可以用电流强度  $i$  与电压  $v$  来描述, 此处  $i$  与  $v$  都是  $x, t$  的函数, 记作  $i(x, t)$  与  $v(x, t)$ . 以  $R, L, C, G$  分别表示下列参数:

$R$ ——每一回路单位的串联电阻;

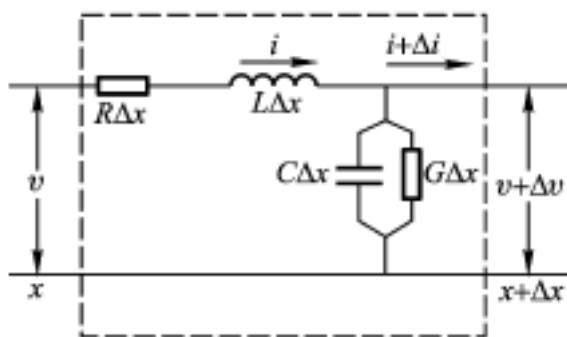


图 1 - 2

$L$ ——每一回路单位的串联电感;

$C$ ——每单位长度的分路电容;

$G$ ——每单位长度的分路电导.

根据基尔霍夫第二定律,在长度为  $x$  的传输线中,电压降应等于电动势之和,即

$$v - (v + \Delta v) = R \Delta x \cdot i + L \Delta x \cdot \frac{di}{dt}.$$

由此可得

$$-\frac{v}{\Delta x} = -Ri - L \frac{di}{dt}. \quad (1.4)$$

另外,由基尔霍夫第一定律,流入节点的电流应等于流出该节点的电流,即

$$i = (i + \Delta i) + C \Delta x \cdot \frac{v}{dt} + G \Delta x \cdot v,$$

或

$$-\frac{i}{\Delta x} = -C \frac{v}{dt} - Gv. \quad (1.5)$$

将方程(1.4)与(1.5)合并,即得  $i, v$  应满足如下方程组:

$$\begin{cases} -\frac{i}{\Delta x} + C \frac{v}{dt} + Gv = 0, \\ -\frac{v}{\Delta x} + L \frac{di}{dt} + Ri = 0. \end{cases}$$

从这个方程组消去  $v$ (或  $i$ ),即可得到  $i$ (或  $v$ )所满足的方程.例如,为了消去  $v$ ,我们将方程(1.5)对  $x$  微分(假定  $v$  与  $i$  对  $x, t$  都是二次连续可微的),同时在方程(1.4)两端乘以  $C$  后再对  $t$  微分,并把两个结果相减,即得

$$-\frac{d^2 i}{dx^2} + G \frac{v}{dx} - LC \frac{d^2 i}{dt^2} - RC \frac{di}{dt} = 0,$$

将(1.4)中的  $-\frac{v}{\Delta x}$  代入上式,得

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (RC + GL) \frac{\partial i}{\partial t} + GRi, \quad (1.6)$$

这就是电流  $i$  满足的微分方程. 采用类似的方法从 (1.4) 与 (1.5) 中消去  $i$  可得电压  $v$  满足的方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + (RC + GL) \frac{\partial v}{\partial t} + GRv, \quad (1.7)$$

方程 (1.6) 或 (1.7) 称为传输线方程.

根据不同的具体情况, 对参数  $R, L, C, G$  作不同的假定, 就可以得到传输线方程的各种特殊形式. 例如, 在高频传输的情况下, 电导与电阻所产生的效应可以忽略不计, 也就是说可令  $G = R = 0$ , 此时方程 (1.6) 与 (1.7) 可简化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} &= \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

这两个方程称为高频传输线方程.

若令  $a^2 = \frac{1}{LC}$ , 这两个方程与 (1.3) 完全相同. 由此可见, 同一个方程可以用来描述不同的物理现象. 一维波动方程只是波动方程中最简单的情况, 在流体力学、声学及电磁场理论中, 还要研究高维的波动方程.

### \* 例 3 电磁场方程

从物理学我们知道, 电磁场的特性可以用电场强度  $E$  与磁场强度  $H$  以及电感应强度  $D$  与磁感应强度  $B$  来描述. 联系这些量的麦克斯韦 (Maxwell) 方程组为

$$\operatorname{rot} H = J + \frac{D}{t}, \quad (1.8)$$

$$\operatorname{rot} E = - \frac{B}{t}, \quad (1.9)$$

$$\operatorname{div} B = 0, \quad (1.10)$$



$$\operatorname{div} D = \quad . \quad (1.11)$$

其中  $J$  为传导电流的面密度,  $\rho$  为电荷的体密度.

这组方程还必须与下述场的物质方程

$$D = \epsilon E, \quad (1.12)$$

$$B = \mu H, \quad (1.13)$$

$$J = \sigma E \quad (1.14)$$

相联立, 其中  $\epsilon$  是介质的介电常数,  $\mu$  是导磁率,  $\sigma$  为导电率, 我们假定介质是均匀而且是各向同性的, 此时  $\epsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  均为常数.

方程(1.8)与(1.9)都同时包含有  $E$  与  $H$ , 从中消去一个变量, 就可以得到关于另一个变量的微分方程. 例如先消去  $H$ , 在(1.8)式两端求旋度(假定  $H$ ,  $E$  都是二次连续可微的)并利用(1.12)与(1.14)得

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} H = -\frac{1}{t} \operatorname{rot} E + \operatorname{rot} E,$$

将(1.9)与(1.13)代入上式得

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} H = -\mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial H}{\partial t},$$

而  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} H = \operatorname{grad} \operatorname{div} H - \Delta H$ , 且  $\operatorname{div} H = \frac{1}{\mu} \operatorname{div} B = 0$ , 所以最后得到  $H$  所满足的方程为

$$\Delta H = \mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial H}{\partial t};$$

同理, 若消去  $H$  即得  $E$  所满足的方程

$$\Delta E = \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial E}{\partial t}.$$

如果介质不导电( $\sigma = 0$ ), 则上面两个方程简化为

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu} \Delta H, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu} \Delta E, \quad (1.16)$$

(1.15)与(1.16)称为三维波动方程.

若将三维波动方程以标量函数的形式表示出来,则可写成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u = a^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right], \quad (1.17)$$

其中  $a^2 = \frac{1}{\mu}$ ,  $u$  是  $E$  (或  $H$ ) 的任意一个分量.

从方程(1.11)与(1.12)还可以推导出静电场的电位所满足的微分方程.事实上,以(1.12)代入(1.11)得

$$\operatorname{div} D = \operatorname{div} E = \operatorname{div} E = \rho,$$

而电场强度  $E$  与电位  $u$  之间存在关系

$$E = -\operatorname{grad} u,$$

所以可得

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = -\frac{\rho}{\epsilon},$$

或

$$\nabla^2 u = -\frac{\rho}{\epsilon}. \quad (1.18)$$

这个非齐次方程称为泊松(Poisson)方程.

如果静电场是无源的,即  $\rho = 0$ ,则(1.18)变成

$$\nabla^2 u = 0, \quad (1.19)$$

这个方程称为拉普拉斯(Laplace)方程.

#### 例4 热传导方程

一块热的物体,如果体内每一点的温度不全一样,则在温度较高的点处的热量就要向温度较低的点处流动,这种现象就是热传导.由于热量的传导过程总是表现为温度随时间和点的位置的变化,所以解决传热问题都要归结为求物体内部温度的分布,现在我们来推导均匀且各向同性的导热体在传热过程中温度所满足的微分方程.与例1类似,我们不是先讨论一点处的温度,而应该先考虑一个区域的温度.为此,在物体中任取一闭曲面  $S$ ,它所包围的区域记作  $V$  (图1-3).假设在时刻  $t$  区域  $V$  内点  $M(x, y, z)$  处的温度为  $u(x, y, z, t)$ ,  $n$  为曲面元素  $S$  的法向(从  $V$  内指向  $V$

外) .

由传热学中傅里叶 (Fourier) 实验定律可知, 物体在无穷小时间段  $dt$  内, 流过一个无穷小面积  $dS$  的热量  $dQ$  与时间  $dt$ , 曲面面积  $dS$ , 以及物体温度  $u$  沿曲面  $dS$  的法线方向的方向导数  $\frac{u}{n}$  三者成正比, 即

$$\begin{aligned} dQ &= -k \frac{u}{n} dS dt \\ &= -k (\text{grad } u)_n dS dt \\ &= -k \text{grad } u \cdot dS dt, \end{aligned}$$

其中  $k = k(x, y, z)$  称为物体的热传导系数, 当物体为均匀且各向同性的导热体时,  $k$  为常数 .

上式中的负号是由于热量的流向和温度梯度的正向, 即  $\text{grad } u$  的方向相反而产生的 . 这就是说, 当  $\frac{u}{n} = \text{grad } u \cdot n > (<) 0$  时, 物体的温度沿  $n$  的方向增加 (减少), 而热流方向却与此相反, 故沿  $n$  的方向通过曲面的热量应该是负 (正) 的 .

利用上面的关系, 从时刻  $t_1$  到时刻  $t_2$ , 通过曲面  $S$  流入区域  $V$  的全部热量为

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_S k \text{grad } u \cdot dS \right] dt .$$

流入的热量使  $V$  内温度发生了变化, 在时间间隔  $[t_1, t_2]$  内区域  $V$  内各点温度从  $u(x, y, z, t_1)$  变化到  $u(x, y, z, t_2)$ , 则在  $[t_1, t_2]$  内  $V$  内温度升高所需要的热量为

$$c \int_V [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)] dV,$$

其中  $c$  为物体的比热,  $\rho$  为物体的密度, 对均匀且各向同性的物体

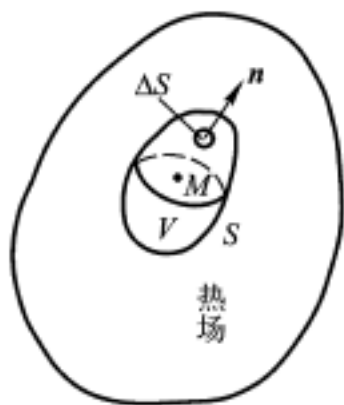


图 1 - 3

来说,它们都是常数.

由于热量守恒,流入的热量应等于物体温度升高所需吸收的热量,即

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_S k \operatorname{grad} u \cdot dS \right] dt \\ &= \int_V c [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)] dV. \quad (1.20) \end{aligned}$$

此式左端的曲面积分中  $S$  是闭曲面,假设函数  $u$  关于  $x, y, z$  具有二阶连续偏导数,关于  $t$  具有一阶连续偏导数,可以利用高斯(Gauss)公式将它化为三重积分,即

$$\int_S k \operatorname{grad} u \cdot dS = \int_V k \operatorname{div} \operatorname{grad} u dV = \int_V k \nabla^2 u dV,$$

同时,(1.20)的右端的体积分可以写成

$$\int_V c \left[ \int_{t_1}^{t_2} \frac{u}{t} dt \right] dV = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_V c \frac{u}{t} dV \right] dt.$$

因此有

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_V k \nabla^2 u dV \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_V c \frac{u}{t} dV \right] dt. \quad (1.20)$$

由于时间间隔  $[t_1, t_2]$  及区域  $V$  都是任意取的,并且被积函数是连续的,所以(1.20)式左右恒等的条件是它们的被积函数恒等,即

$$\frac{u}{t} = a^2 \nabla^2 u = a^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right], \quad (1.21)$$

其中  $a^2 = \frac{k}{c}$ . 方程(1.21)称为三维热传导方程.

若物体内有热源,其强度为  $F(x, y, z, t)$ ,则相应的热传导方程为

$$\frac{u}{t} = a^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + f(x, y, z, t),$$

其中  $f = \frac{F}{c}$  .

作为特例,如果所考虑的物体是一根细杆(或一块薄板),或者即使不是细杆(或薄板)而其中的温度  $u$  只与  $x, t$  (或  $x, y, t$ ) 有关,则方程(1.21)就变成一维热传导方程

$$\frac{u}{t} = a^2 \frac{u}{x^2}$$

或二维热传导方程

$$\frac{u}{t} = a^2 \left[ \frac{u}{x^2} + \frac{u}{y^2} \right] .$$

如果我们考虑稳恒温度场,即在热传导方程中物体的温度趋于某种平衡状态,这时温度  $u$  已与时间  $t$  无关,所以  $\frac{u}{t} = 0$ , 此时方程(1.21)就变成拉普拉斯方程(1.19). 由此可见稳恒温度场内的温度  $u$  也满足拉普拉斯方程.

在研究气体或液体的扩散过程时,若扩散系数是常数,则所得的扩散方程与热传导方程完全相同.

## § 1.2 初始条件与边界条件

上面所讨论的是如何将一个具体问题所具有的物理规律用数学式子表达出来. 除此以外,我们还需要把这个问题所具有的特定条件也用数学形式表达出来,这是因为任何一个具体的物理现象都是处在特定条件之下的. 例如弦振动问题,上节所推导出来的方程是一切柔软均匀的弦作微小横向振动的共同规律,在推导这个方程时没有考虑到弦在初始时刻的状态以及弦所受的约束情况. 如果我们不是泛泛地研究弦的振动,势必就要考虑到弦所具有的特定条件. 因为任何一个振动物体在某时刻的振动状态总是和此时刻以前的状态有关,从而就与初始时刻的状态有关. 另外,弦的两端所受的约束也会影响弦的振动,端点所处的物理条件不同就

会产生不同的影响,因而弦的振动也不同.所以对弦振动问题来说,除了建立振动方程以外,还需列出它所处的特定条件.对热传导方程,拉普拉斯方程也是如此.

提出的条件应该能够用来说明某一具体物理现象的初始状态或者边界上的约束情况.用以说明初始状态的条件称为初始条件;用以说明边界上的约束情况的条件称为边界条件.

下面具体说明初始条件和边界条件的表达形式.先谈初始条件,对于弦振动问题来说,初始条件就是弦在开始时刻的位移及速度,若以  $u(x, 0)$ ,  $u_t(x, 0)$  分别表示初位移和初速度,则初始条件可以表达为

$$\begin{cases} u|_{t=0} = u(x, 0), \\ \left. \frac{u}{t} \right|_{t=0} = u_t(x, 0). \end{cases} \quad (1.22)$$

而对热传导方程来说,初始条件是指在开始时刻物体温度的分布情况,若以  $u(M, 0)$  表示  $t=0$  时物体任一点  $M$  处的温度,则热传导方程的初始条件就是

$$u(M, 0)|_{t=0} = u(M, 0). \quad (1.23)$$

泊松方程与拉普拉斯方程都是描述稳恒状态的,与初始状态无关,所以不提初始条件.

再谈边界条件.还是先从弦振动问题说起,从物理学得知,弦在振动时,其端点(以  $x=a$  表示这个端点)所受的约束情况,通常有以下三种类型:

第一,固定端,即弦在振动过程中这个端点始终保持不动.对应于这种状态的边界条件为

$$u|_{x=a} = 0, \quad (1.24)$$

或  $u(a, t) = 0$ .

第二,自由端,即弦在这个端点不受位移方向的外力,从而在这个端点弦在位移方向的张力应该为零.由 §1.1 中例 1 的推导过程可知,此时所对应的边界条件为

$$T \frac{u}{x} \Big|_{x=a} = 0,$$

$$\text{即} \quad \frac{u}{x} \Big|_{x=a} = 0, \quad (1.25)$$

$$\text{或} \quad u_x(a, t) = 0.$$

第三, 弹性支承端, 即弦在这个端点被某个弹性体所支承. 设弹性支承原来的位置为  $u = 0$ , 则  $u|_{x=a}$  就表示弹性支承的应变, 由虎克(Hooke)定律可知, 这时弦在  $x = a$  处沿位移方向的张力

$$T \frac{u}{x} \Big|_{x=a} \text{ 应该等于 } -ku|_{x=a}, \text{ 即}$$

$$T \frac{u}{x} \Big|_{x=a} = -ku|_{x=a}$$

或

$$\left[ \frac{u}{x} + u \right] \Big|_{x=a} = 0, \quad (1.26)$$

其中  $k$  为弹性体的倔强系数,  $k = T/a$ .

对热传导方程来说, 也有类似的情况. 以  $S$  表示某物体  $V$  的边界, 如果在导热过程中边界  $S$  的温度为已知的函数  $f(x, y, z, t)$ , 则这时的边界条件为

$$u|_S = f, \quad (1.27)$$

这里的  $f$  是定义在  $S$  上(一般依赖于  $t$ )的函数.

如果在导热过程中, 物体  $V$  与周围的介质处于绝热状态, 或者说, 在  $S$  上的热量流速始终为零, 这时从例 4 的推导过程可知, 在边界  $S$  上必满足

$$\frac{u}{n} \Big|_S = 0. \quad (1.28)$$

如果物体的内部和周围的介质通过边界  $S$  有热量交换, 以  $u_1$  表示和物体接触处的介质温度, 这时利用另一个热传导实验定律: 从一介质流入另一介质的热量和两介质间的温度差成正比

$$dQ = k_1(u - u_1) dS dt,$$

其中  $k_1$  是两介质间的热交换系数. 在物体内部任取一个无限贴近于边界  $S$  的闭曲面, 由于在  $S$  内侧热量不能积累, 所以在  $S$  上的热量流速应等于边界  $S$  上的热量流速, 而在  $S$  外的热量流速为  $\left. \frac{dQ}{dS dt} \right| = -k \frac{u}{n}$ , 所以, 当物体和外界有热交换时, 相应的边界条件为

$$-k \frac{u}{n} \Big|_S = k_1 (u - u_1) \Big|_S,$$

即 
$$\left[ \frac{u}{n} + u \right] \Big|_S = u_1 \Big|_S, \quad (1.29)$$

其中  $k_1 = k$ .

综合上述可知, 不论对弦振动问题, 还是对热传导问题, 它们所对应的边界条件, 从数学角度看不外有三种类型:

一是在边界  $S$  上直接给出了未知函数  $u$  的数值, 即

$$u \Big|_S = f_1. \quad (1.30)$$

这种形式的边界条件称为第一类边界条件.

二是在边界  $S$  上给出了未知函数  $u$  沿  $S$  的外法线方向的方向导数, 即

$$\frac{u}{n} \Big|_S = f_2. \quad (1.31)$$

这种形式的边界条件称为第二类边界条件.

三是在边界  $S$  上给出了未知函数  $u$  及其沿  $S$  的外法线方向的方向导数某种线性组合的值, 即

$$\left[ \frac{u}{n} + u \right] \Big|_S = f_3. \quad (1.32)$$

这种形式的边界条件称为第三类边界条件.

需要注意的是(1.30), (1.31), (1.32)右端的  $f_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 都是定义在边界  $S$  上(一般说来, 也依赖于  $t$ )的已知函数. 不论哪一类型的边界条件, 当它的数学表达式中的自由项(即不依赖于  $u$



的项)恒为零时,则这种边界条件称为是齐次的,否则称为非齐次的.

## § 1.3 定解问题的提法

前面两节我们推导了三种不同类型的偏微分方程并讨论了与它们相应的初始条件与边界条件的表达方式.由于这些方程中出现的未知函数的偏导数的最高阶都是二阶,而且它们对于未知函数及其各阶偏导数来说都是线性的,所以这种方程称为二阶线性偏微分方程.在工程技术上二阶线性偏微分方程遇到最多.

如果一个函数具有某偏微分方程中所需要的各阶连续偏导数,并且代入该方程中能使它变成恒等式,则此函数称为该方程的解(古典解).由于每一个物理过程都处在特定的条件之下,所以我们的任务是要求出偏微分方程的适合某些特定条件的解.初始条件和边界条件都称为定解条件.把某个偏微分方程和相应的定解条件结合在一起,就构成了一个定解问题.

只有初始条件,没有边界条件的定解问题称为始值问题(或柯西(Cauchy)问题);反之,没有初始条件,只有边界条件的定解问题称为边值问题.既有初始条件也有边界条件的定解问题称为混合问题.

一个定解问题提得是否符合实际情况,当然必须靠实践来证实.然而从数学角度来看,可以从三方面加以检验:

- 1) 解的存在性,即看所归结出来的定解问题是否有解;
- 2) 解的惟一性,即看是否只有一个解;

3) 解的稳定性,即看当定解条件有微小变动时,解是否相应地只有微小的变动,如果确实如此,此解便称为稳定的,否则所得的解就无实用价值,因为定解条件通常总是利用实验方法获得的,因而所得到的结果,总有一定的误差,如果因此而解的变动很大,那么这种解显然不能符合客观实际的要求.

如果一个定解问题存在惟一且稳定的解,则此问题称为适定的.在以后讨论中我们把着眼点放在讨论定解问题的解法上,而很少讨论它的适定性,这是因为讨论定解问题的适定性往往十分困难,而本书所讨论的定解问题都是经典的,它们的适定性都是经过证明了的.

最后,我们对线性偏微分方程再多说几句.由前面的定义可知,一个含  $n$  个自变量的二阶线性偏微分方程的最一般的形式应该是

$$Lu = \sum_{i,k=1}^n A_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = f, \quad (1.33)$$

其中  $A_{ik}, B_i, C, f$  都只是  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的已知函数,与未知函数无关.在两个自变量的情形, (1.33) 可写为

$$\begin{aligned} A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \\ + E(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + F(x, y) u = f(x, y). \end{aligned} \quad (1.34)$$

线性偏微分方程 (1.33) 具有一个非常重要的特性,称为叠加原理,即若  $u_i$  是方程

$$Lu_i = f_i \quad (i = 1, 2, \dots)$$

的解,而且级数

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i$$

收敛,并且能够逐项微分两次,其中  $C_i (i = 1, 2, \dots)$  为任意常数,则  $u$  一定是方程

$$Lu = \sum_{i=1}^{\infty} C_i f_i$$

的解(当然要假定这个方程右端的级数是收敛的).特别是,如果  $u_i (i = 1, 2, \dots)$  是二阶线性齐次方程

$$Lu = 0$$

的解,则只要  $u = \sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i$  收敛,并且可以逐项微分两次,  $u$  一定也是此方程的解. 这个结论的证明是非常容易的(留作练习),但它却是下一章要讲的分变量法的出发点.

## 习 题 一

1. 长为  $l$  的均匀杆,侧面绝缘,一端温度为零,另一端有恒定热流  $q$  进入(即单位时间内通过单位面积流入的热量为  $q$ ),杆的初始温度分布是  $\frac{x(l-x)}{2}$ ,试写出相应的定解问题.

2. 长为  $l$  的弦两端固定,开始时在  $x=c$  受到冲量  $k$  的作用,试写出相应的定解问题.

3. 有一均匀杆,只要杆中任一小段有纵向位移或速度,必导致邻段的压缩或伸长,这种伸缩传开去,就有纵波沿着杆传播.试推导杆的纵振动方程.

4. 一均匀杆原长为  $l$ ,一端固定,另一端沿杆的轴线方向被拉长  $e$  而静止,突然放手任其振动,试建立振动方程与定解条件.

5. 若  $F(z)$ ,  $G(z)$  是任意两个二次连续可微函数,验证

$$u = F(x + at) + G(x - at)$$

满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

6. 验证线性齐次方程的叠加原理,即若  $u_1(x, y)$ ,  $u_2(x, y)$ ,  $\dots$ ,  $u_n(x, y)$ ,  $\dots$  均为线性二阶齐次方程

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0$$

的解,其中  $A, B, C, D, E, F$  都只是  $x, y$  的函数.而且级数  $u = \sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i(x, y)$  收敛,其中  $C_i (i=1, 2, \dots)$  为任意常数,并对  $x, y$  可以逐项微分两次,求

证  $u = \sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i(x, y)$  仍是原方程的解.

## 第二章 分离变量法

物理学、力学和工程技术等方面的许多问题都可归结为偏微分方程的定解问题,上一章我们已初步看到怎样把具体的物理问题表达为定解问题.下面一个重要任务是怎样去解决这些定解问题,也就是说在已经列出的方程与定解条件之后,怎样去求既满足方程又满足定解条件的解.

从微积分学得知,在计算诸如多元函数的微分及重积分时总是把它们转化为单元函数的相应问题来解决.与此类似,求解偏微分方程的定解问题也是要设法把它们转化为常微分方程问题,分离变量法就是常用的一种转化手法.本章我们将通过实例来说明分离变量法的步骤与实质.在 § 2.1 我们考虑最简单的情况,即两个边界条件都是第一类齐次边界条件;在 § 2.2 我们讨论了如何处理第三类齐次边界条件(当然也包括第二类边界条件);在 § 2.3 说明如何在极坐标系下使用分离变量法;在 § 2.4 及 § 2.5 我们讨论了如何处理非齐次方程及非齐次边界条件的问题.在 § 2.6 中我们概述了二阶常微分方程固有值(特征值)问题的一些结论.这些结论提供了分离变量法的理论基础.

### § 2.1 有界弦的自由振动

为了使读者了解什么是分离变量法以及使用分离变量法应该具备什么条件,我们选取两端固定的弦的自由振动问题为例,通过具体地求解逐步回答这些问题.

根据第一章所得的结论,讨论两端固定的弦的自由振动,就归结为求解下列定解问题:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0, \end{array} \right. \quad (2.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0, t > 0, \end{array} \right. \quad (2.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u|_{t=0} = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), 0 \leq x \leq l. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

这个定解问题的特点是:偏微分方程是线性齐次的,边界条件也是齐次的.求解这样的问题,可以运用叠加原理.我们知道,在求解常系数线性齐次常微分方程的初值问题时,是先求出足够多个特解(它们能构成通解),再利用叠加原理作这些特解的线性组合,使满足初始条件.这就启发我们,要解问题(2.1), (2.2), (2.3), 先寻求齐次方程(2.1)的满足齐次边界条件(2.2)的足够多个具有简单形式(变量被分离的形式)的特解,再利用它们作线性组合使满足初始条件(2.3).

这种思想方法,还可以从物理模型得到启示.从物理学知道乐器发出的声音可以分解成各种不同频率的单音,每种单音,振动时形成正弦曲线,其振幅依赖于时间  $t$ , 即每个单音可表示成

$$u(x, t) = A(t) \sin x$$

的形式,这种形式的特点是:  $u(x, t)$  中的变量  $x$  与  $t$  被分离出来了.

根据上面的分析,现在我们试求方程(2.1)的变量分离形式

$$u(x, t) = X(x) T(t)$$

的非零解,并要求它满足齐次边界条件(2.2),式中  $X(x)$ ,  $T(t)$  分别表示仅与  $x$  有关及仅与  $t$  有关的待定函数.

$$\text{由} \quad u(x, t) = X(x) T(t)$$

$$\text{得} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x) T(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x) T''(t),$$

代入方程(2.1)得

$$X''(x) T(t) = -a^2 X(x) T(t)$$

$$\text{或} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{T''(t)}{a^2 T(t)}.$$

这个式子左端仅是  $x$  的函数,右端仅是  $t$  的函数,一般情况下二者不可能相等,只有当它们均为常数时才能相等.令此常数为  $-\lambda$ ,则有

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda,$$

这样我们得到两个常微分方程:

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (2.4)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \quad (2.5)$$

再利用边界条件(2.2),由于  $u(x, t) = X(x) T(t)$ ,故有

$$X(0) T(t) = 0, \quad X(l) T(t) = 0.$$

但  $T(t) \not\equiv 0$ ,因为如果  $T(t) \equiv 0$ ,则  $u(x, t) \equiv 0$ ,这种解称为平凡解,显然不是我们所要求的.所以

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (2.6)$$

因此,要求方程(2.1)满足条件(2.2)的变量分离形式的解,就先要从下列常微分方程的边值问题

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

中解出  $X(x)$ .

现在我们就来求非零解  $X(x)$ ,但要求出  $X(x)$ 并不是一个简单的问题,因为方程(2.5)中含有一个待定常数  $\lambda$ ,所以我们的任务既要确定  $\lambda$ 取何值时方程(2.5)才有满足条件(2.6)的非零解,又要求出这个非零解  $X(x)$ .这样的问题称为常微分方程(2.5)在条件(2.6)下的特征值问题,使问题(2.5),(2.6)有非零解的  $\lambda$ 称为该问题的特征值,相应的非零解  $X(x)$ 称为它的特征函数.下面我们对  $\lambda$ 分三种情况来讨论.

1° 设  $\lambda < 0$ ,此时方程(2.5)的通解为

$$X(x) = A e^{\sqrt{-\lambda} x} + B e^{-\sqrt{-\lambda} x}.$$

由条件(2.6)得

$$A + B = 0,$$

$$Ae^{\sqrt{-\lambda}l} + Be^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0.$$

解出  $A, B$  得

$$A = B = 0.$$

即  $X(x) \equiv 0$ , 不符合非零解的要求, 因此  $\lambda$  不能小于零.

2° 设  $\lambda = 0$ , 此时方程(2.5)的通解为

$$X(x) = Ax + B,$$

由条件(2.6)还是得  $A = B = 0$ , 所以  $\lambda$  也不能等于零.

3° 设  $\lambda > 0$ , 并令  $\lambda = \frac{n^2}{l^2}$ ,  $n$  为非零实数. 此时方程(2.5)的通解为

$$X(x) = A \cos \frac{n}{l}x + B \sin \frac{n}{l}x,$$

由条件(2.6)得

$$A = 0,$$

$$B \sin \frac{n}{l}l = 0.$$

由于  $B$  不能为零(否则  $X(x) \equiv 0$ ), 所以  $\sin \frac{n}{l}l = 0$ , 即

$$\frac{n}{l}l = n = 1, 2, 3, \dots,$$

( $n$  为负整数可以不必考虑, 因为例如  $n = -2$ ,  $B \sin \frac{-2}{l}x$  实际上还是  $B \sin \frac{2}{l}x$  的形式) 从而

$$\lambda = \frac{n^2}{l^2}, \quad (2.7)$$

这样, 我们就求出了特征值问题(2.5), (2.6)的一系列特征值及相应的特征函数:

$$\lambda_n = \frac{n^2}{l^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n}{l}x \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.8)$$

确定了  $\lambda$  的值后, 现在再来求函数  $T(t)$ , 以(2.7)式中的  $\lambda$  值代入方程(2.4)中得

$$T_n(t) + \frac{a^2 n^2}{l^2} T_n(t) = 0,$$

显然,其通解为

$$T_n(t) = C_n \cos \frac{n a t}{l} + D_n \sin \frac{n a t}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.9)$$

于是由(2.8), (2.9)得到满足方程(2.1)及边界条件(2.2)的一组变量被分离的特解

$$u_n(x, t) = \left[ C_n \cos \frac{n a t}{l} + D_n \sin \frac{n a t}{l} \right] \sin \frac{n x}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (2.10)$$

其中  $C_n = B_n C_n$ ,  $D_n = B_n D_n$  是任意常数.至此,我们的第一步工作已经完成了,求出了既满足方程(2.1)又满足边界条件(2.2)的无穷多个特解.为了求原定解问题的解,还需要满足条件(2.3).由(2.10)式所确定的一组函数虽然已经满足方程(2.1)及条件(2.2),但不一定满足初始条件(2.3).为了求出原问题的解,首先我们将(2.10)中所有函数  $u_n(x, t)$  叠加起来:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ C_n \cos \frac{n a}{l} t + D_n \sin \frac{n a}{l} t \right] \sin \frac{n}{l} x, \quad (2.11) \end{aligned}$$

由叠加原理可知,如果(2.11)右端的无穷级数是收敛的,而且关于  $x, t$  都能逐项微分两次,则它的和  $u(x, t)$  也满足方程(2.1)和条件(2.2).现在我们要适当选择  $C_n, D_n$ , 使函数  $u(x, t)$  也满足初始条件(2.3), 为此必须有

$$\begin{aligned} u(x, t) \Big|_{t=0} &= u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n}{l} x = f(x), \\ \frac{u}{t} \Big|_{t=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{n a}{l} \sin \frac{n}{l} x = g(x). \end{aligned}$$

因为  $f(x), g(x)$  是定义在  $[0, l]$  上的函数,所以只要选取  $C_n$  为



$(x)$  的傅里叶正弦级数展开式的系数,  $\frac{n}{l}aD_n$  为  $(x)$  的傅里叶正弦级数展开式的系数, 也就是

$$\begin{cases} C_n = \frac{2}{l} \int_0^l (x) \sin \frac{n}{l} x dx, \\ D_n = \frac{2}{n} \int_0^l (x) \sin \frac{n}{l} x dx. \end{cases} \quad (2.12)$$

初始条件(2.3)就能满足. 以(2.12)所确定的  $C_n, D_n$  代入(2.11)式, 即得原定解问题的解.

当然, 如上所述, 要使(2.11)式所确定的函数  $u(x, t)$  确实是问题(2.1), (2.2), (2.3)的解, 除了其中的系数  $C_n, D_n$  必须由(2.12)确定以外, 还要求这样得到的级数收敛, 并且能够对  $x, t$  逐项微分两次. 这些要求只要对函数  $(x)$  及  $(x)$  加一些条件就能满足. 可以证明(参阅复旦大学数学系编《数学物理方程》1979年版第一章 § 3), 如果  $(x)$  三次连续可微,  $(x)$  二次连续可微, 且  $(0) = (l) = (0) = (l) = (0) = (l) = 0$ , 则问题(2.1), (2.2), (2.3)的解存在, 并且这个解可以用(2.11)给出, 其中  $C_n, D_n$  由(2.12)式确定.

需要指出的是, 当  $(x)$  与  $(x)$  不满足这里所述的条件时, 由(2.11), (2.12)所确定的函数  $u(x, t)$  不具备古典解的要求, 它只能是原定解问题的一个形式解. 由实变函数的理论可知, 只要  $(x)$  与  $(x)$  在  $[0, l]$  上是  $L^2$  可积的, 函数列

$${}_n(x) = \sum_{k=1}^n C_k \sin \frac{k}{l} x,$$

$${}_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{l} a D_k \sin \frac{k}{l} x$$

分别平均收敛[即按  $L^2$  中的“距离”(范数)收敛]于  $(x)$  与  $(x)$ , 其中  $C_k, D_k$  由(2.12)确定.

如果将初始条件(2.3)代之以

$$u \Big|_{t=0} = u_n(x), \quad \frac{u}{t} \Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$$

则相应的定解问题的解为

$$S_n(x, t) = \sum_{k=1}^n \left[ C_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + D_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \right] \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

当  $n \rightarrow \infty$  时, 它平均收敛于 (2.11) 所给的形式解  $u(x, t)$ . 由于  $S_n(x, t)$  既满足方程 (2.1) 及边界条件 (2.2), 又近似地满足初始条件 (2.3), 所以, 当  $n$  很大时, 可以把  $S_n(x, t)$  看成是原问题的近似解. 作为近似解平均收敛的极限  $u(x, t)$ , 当然也是很有实际意义的.

此外, 从求解偏微分方程的方法来看, 在大多数情况下, 也都是先求形式解, 然后在一定条件下验证这个形式解就是古典解, 这个验证的过程常称为综合工作. 鉴于本书受到篇幅和讲授课时的限制, 在今后的叙述中, 都不去做综合工作, 也不逐个去讨论所求形式解就是古典解时需加的条件, 只要求得了形式解, 就认为定解问题得到了解决.

从前面的运算过程可以看出, 用分离变量法求解定解问题的关键步骤是确定特征函数与运用叠加原理, 这些运算之所以能够进行, 就是因为偏微分方程与边界条件都是齐次的, 这一点希望读者一定要注意.

例 1 设有一根长为 10 个单位的弦, 两端固定, 初速为零, 初位移为  $u(x) = \frac{x(10-x)}{1000}$ , 求弦作微小横向振动时的位移.

解 设位移函数为  $u(x, t)$ , 它是定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < 10, t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, u|_{x=10} = 0, t > 0, \\ u|_{t=0} = \frac{x(10-x)}{1000}, \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, 0 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

的解. 这时  $l=10$ , 并给定  $a^2=10000$  (这个数字与弦的材料、张力

有关) .

显然,这个问题的傅里叶级数形式解可由(2.11)给出.其系数按(2.12)式为

$$\begin{aligned} D_n &= 0, \\ C_n &= \frac{1}{5000} \int_0^{10} x(10-x) \sin \frac{n}{10} x dx \\ &= \frac{2}{5n^3} (1 - \cos n) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数,} \\ \frac{4}{5n^3}, & \text{当 } n \text{ 为奇数.} \end{cases} \end{aligned}$$

因此,所求的解为

$$u(x, t) = \frac{4}{5^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \sin \frac{(2n+1)}{10} x \cos 10(2n+1)t.$$

## 例 2 解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, & -\frac{u}{x} \Big|_{x=l} = 0, t > 0, \\ u \Big|_{t=0} = x^2 - 2lx, & -\frac{u}{t} \Big|_{t=0} = 0, 0 < x < l. \end{cases}$$

解 这里所考虑的方程仍是(2.1),所不同的只是在  $x=l$  这一端的边界条件不是第一类齐次边界条件  $u|_{x=l} = 0$ ,而是第二类

齐次边界条件  $-\frac{u}{x} \Big|_{x=l} = 0$ .因此,通过分离变量的步骤后,仍得到

方程(2.4)与(2.5),但条件(2.6)应代之以

$$X(0) = X(l) = 0. \quad (2.6)$$

相应的特征值问题为求

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

的非零解.

重复前面的讨论可知, 只有当  $\lambda = \lambda_n^2 > 0$  时, 上述特征值问题才有非零解, 此时(2.5)的通解仍为

$$X(x) = A \cos \lambda_n x + B \sin \lambda_n x,$$

代入条件(2.6) 得

$$\begin{cases} A = 0, \\ B \cos \lambda_n l = 0. \end{cases}$$

由于  $B \neq 0$ , 故  $\cos \lambda_n l = 0$ , 即

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

从而求得了一系列特征值与特征函数:

$$\lambda_n^2 = \frac{((2n+1)\pi)^2}{4l^2},$$

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

与这些特征值相对应的方程(2.4)的通解为

$$T_n(t) = C_n \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l} a t + D_n \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} a t \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

于是, 所求定解问题的解可表示为

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ C_n \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l} a t + D_n \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} a t \right] \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x.$$

利用初始条件确定其中的任意常数  $C_n, D_n$  得

$$D_n = 0,$$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{l} \int_0^l (x^2 - 2lx) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x dx \\ &= -\frac{32l^2}{(2n+1)^3 \pi^3}, \end{aligned}$$

故所求的解为

$$u(x, t) = - \frac{32 l^2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l} t \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x.$$

为了加深理解,下面我们扼要地分析一下级数形式解(2.11)的物理意义.先分析一下级数中每一项

$$u_n(x, t) = \left[ C_n \cos \frac{n\pi}{l} t + D_n \sin \frac{n\pi}{l} t \right] \sin \frac{n\pi}{l} x$$

的物理意义.分析的方法是:先固定时间  $t$ ,看看在任一指定时刻波是什么形状;再固定弦上一点,看看该点的振动规律.

把括号内的式子改变一下形式,可得

$$u_n(x, t) = A_n \cos(n\pi t - \phi_n) \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

其中  $A_n = \sqrt{C_n^2 + D_n^2}$ ,  $\phi_n = \frac{n\pi}{l} t$ ,  $\phi_n = \arctan \frac{D_n}{C_n}$ .

当时间  $t$  取定值  $t_0$  时,得

$$u_n(x, t_0) = A_n \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

其中  $A_n = A_n \cos(n\pi t_0 - \phi_n)$  是一个定值.这表示在任一时刻,波  $u_n(x, t_0)$  的形状都是一些正弦曲线,只是它的振幅随着时间的改变而改变.

当弦上点的横坐标  $x$  取定值  $x_0$  时,得

$$u_n(x_0, t) = B_n \cos(n\pi t - \phi_n),$$

其中  $B_n = A_n \sin \frac{n\pi}{l} x_0$  是一个定值.这说明弦上以  $x_0$  为横坐标的点作简谐振动,其振幅为  $B_n$ ,角频率为  $n\pi$ ,初位相为  $\phi_n$ .若  $x$  取另外一个定值时,情况也一样,只是振幅  $B_n$  不同罢了.所以  $u_n(x, t)$  表示这样一个振动波:在考察的弦上各点以同样的角频率  $n\pi$  作简谐振动,各点处的初位相也相同,而各点的振幅则随点的位置改变而改变,此振动波在任一时刻的外形是一正弦曲线.

这种振动波还有一个特点,即在  $[0, l]$  范围内还有  $n+1$  个点

(包括两个端点)永远保持不动,这是因为在  $x_m = \frac{ml}{n}$  ( $m = 0, 1, 2, \dots, n$ ) 那些点上,  $\sin \frac{n}{l} x_m = \sin m\pi = 0$  的缘故. 这些点在物理上称为节点. 这就说明  $u_n(x, t)$  的振动是在  $[0, l]$  上的分段振动, 其中有  $n + 1$  个节点, 人们把这种包含节点的振动波叫做驻波. 另外驻波还在  $n$  个点处振幅达到最大值 (读者可自己讨论), 这种使振幅达到最大值的点叫做腹点. 图 2 - 1 画出了在某一时刻  $n = 1, 2, 3$  的驻波形状.



图 2 - 1

综合上述, 可知  $u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_n(x, t), \dots$  是一系列驻波, 它们的频率、位相与振幅都随  $n$  不同而不同. 因此我们可以说, 一维波动方程用分离变量法解出的结果  $u(x, t)$  是由一系列驻波叠加而成的, 而每一个驻波的波形由特征函数确定, 它的频率由特征值确定. 这完全符合实际情况, 因为人们在考察弦的振动时, 就发现许多驻波, 它们的叠加又可以构成各种各样的波形, 因此很自然地会想到用驻波的叠加表示弦振动方程的解. 这就是分离变量法的物理背景, 所以分离变量法也称为驻波法.

## § 2.2 有限长杆上的热传导

设有一均匀细杆, 长为  $l$ , 两端点的坐标为  $x = 0$  与  $x = l$ , 杆的侧面是绝热的, 且在端点  $x = 0$  处温度是零摄氏度, 而在另一端

$x = l$  处杆的热量自由发散到周围温度是零度的介质中去(参考第一章 § 1.2 中第三类边界条件, 并注意在杆的  $x = l$  端的截面上, 外法线方向就是  $x$  轴的正方向), 已知初始温度分布为  $\varphi(x)$ . 求杆上的温度变化规律, 也就是要考虑下列定解问题:

$$\begin{cases} \frac{u}{t} = a^2 \frac{u}{x^2}, 0 < x < l, t > 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \frac{u(l, t)}{x} + hu(l, t) = 0, t > 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (2.15)$$

我们仍用分离变量法来解这个问题. 首先求出满足边界条件而且是变量被分离形式的特解, 设

$$u(x, t) = X(x) T(t),$$

代入方程(2.13)得

$$\frac{T(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X(x)}{X(x)}.$$

上式左端不含有  $x$ , 右端不含有  $t$ , 所以只有当两端均为常数时才可能相等. 令此常数为  $-\lambda^2$  (为什么取为  $-\lambda^2$ , 读者可以从方程  $X(x) = -\lambda^2 X(x)$ , 结合边界条件按  $\lambda$  取值的三种不同情况象 § 2.1 那样讨论后得出), 则有

$$\frac{T(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X(x)}{X(x)} = -\lambda^2, \quad (2.16)$$

从而得到两个线性常微分方程

$$T(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0, \quad (2.16)$$

$$X(x) + \lambda^2 X(x) = 0. \quad (2.16)$$

解方程(2.16)得

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x,$$

由边界条件(2.14)可知

$$X(0) = 0, \quad X(l) + hX(l) = 0. \quad (2.17)$$

从  $X(0) = 0$  得  $A = 0$ , 从  $X(l) + hX(l) = 0$  得

$$\cos \lambda l + h \sin \lambda l = 0. \quad (2.17)$$

为了求出  $\lambda$ , 方程(2.17) 可改写成

$$\tan \gamma = -\frac{1}{\alpha l}, \tag{2.18}$$

其中  $\gamma = l\sqrt{\lambda}$ ,  $\alpha = -\frac{1}{hl}$ . 方程(2.18)的根可以看作是曲线  $y_1 = \tan \gamma$  与直线  $y_2 = -\frac{1}{\alpha l}$  交点的横坐标(图 2 - 2), 显然它们的交点有无穷多个, 于是方程(2.18)有无穷多个根, 由这些根可以确定出特征值  $\lambda_n$ . 设方程(2.18)的无穷多个正根(不取负根是因为负根与正根只差一个符号(图 2 - 2), 再根据 § 2.1 中所述的同样理由)为

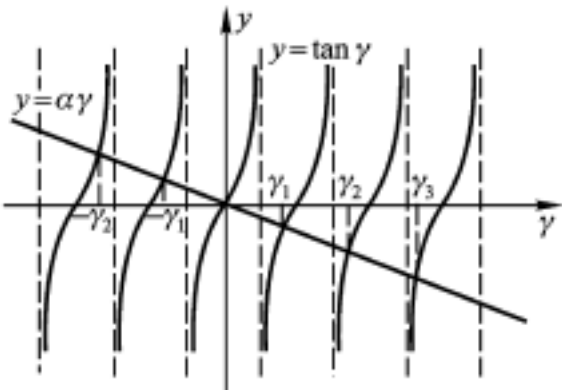


图 2 - 2

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n, \dots$$

于是得到特征值问题(2.16) , (2.17)的无穷多个特征值

$$\lambda_1^2 = \frac{\gamma_1^2}{l^2}, \lambda_2^2 = \frac{\gamma_2^2}{l^2}, \dots, \lambda_n^2 = \frac{\gamma_n^2}{l^2}, \dots$$

及相应的特征函数

$$X_n(x) = B_n \sin \gamma_n x. \tag{2.19}$$

再由(2.16) 解得

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{\gamma_n^2 a^2}{l^2} t}. \tag{2.20}$$

由(2.19) , (2.20)两式, 我们得到方程(2.13)满足边界条件(2.14)的一组特解

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t)$$



$$= C_n e^{-\frac{2}{n} a^2 t} \sin n x \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (2.21)$$

其中

$$C_n = A_n B_n.$$

由于方程(2.13)与边界条件(2.14)都是齐次的,所以

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{2}{n} a^2 t} \sin n x \quad (2.22)$$

仍满足方程与边界条件.最后考虑  $u(x, t)$  是否能满足初始条件(2.15),从(2.22)式得

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n x.$$

现在希望它等于已知函数  $(x)$ , 那么首先要问在  $[0, l]$  上定义的函数  $(x)$  是否能展开为  $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n x$  级数形式,其次要问系数  $C_n$  如何确定.关于前者,只要  $(x)$  在  $[0, l]$  上满足可以展成傅里叶级数的条件就行了,现在主要谈求系数的问题.回忆傅里叶系数公式的得来是根据函数系的正交性,所以现在也要考察函数系  $\{\sin n x\}$  在  $[0, l]$  上的正交性.不难证明(也可以从 § 2.6 中的一般结论得知)

$$\int_0^l \sin m x \sin n x dx = 0, \quad m \neq n.$$

令

$$L_n = \int_0^l \sin^2 n x dx,$$

于是在

$$(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n x \quad (2.23)$$

的两端乘上  $\sin k x$ , 然后在  $[0, l]$  上积分得

$$\int_0^l (x) \sin k x dx = L_k C_k,$$

即

$$C_k = \frac{1}{L_k} \int_0^l (x) \sin k x dx. \quad (2.24)$$

把(2.24)代入(2.22)式即得原定解问题的解.

当然,这样求出的函数  $u(x, t)$  仍是形式解,要想它确实是 (2.13)–(2.15) 的解,还必须对  $u(x, t)$  加上一定的光滑性和相容性条件.

通过上面两节的讨论,我们对分离变量法已经有了一个初步的了解,它的主要步骤大体为:

一、首先将偏微分方程的定解问题通过分离变量转化为常微分方程的定解问题,这对线性齐次偏微分方程来说是可以做到的.

二、确定特征值与特征函数.由于特征函数是要经过叠加的,所以用来确定特征函数的方程与条件,当函数经过叠加之后仍旧要满足.当边界条件是齐次时,求特征函数就是求一个常微分方程满足零边界条件的非零解.

三、定出特征值、特征函数后,再解其他的常微分方程,把得到的解与特征函数乘起来成为  $u_n(x, t)$ ,这时  $u_n(x, t)$  中还包含着任意常数.

四、最后为了使解满足其余的定解条件,需要把所有的  $u_n(x, t)$  叠加起来成为级数形式,这时级数中的一系列任意常数就由其余的条件确定.在这最后的一步工作中,需要把已知函数展开为特征函数项的级数,这种展开的合理性,将在 §2.6 中论述.

由本节的例子还可以看出,用分离变量法求解第三类边界条件的定解问题时,只要边界条件都是齐次的,其过程与解第一类边界条件的定解问题是相同的,但在确定特征值时,一般说来是比较复杂的.

## §2.3 圆域内的二维拉普拉斯方程的定解问题

一个半径为  $a$  的薄圆盘,上下两面绝热,圆周边缘温度分布为已知,求达到稳恒状态时圆盘内的温度分布.

在第一章讲过,热传导问题达到稳恒状态时温度分布与时间

无关,应满足拉普拉斯方程

$$\Delta^2 u = 0.$$

因为边界形状是个圆周,它在极坐标下的方程为  $\rho = \rho_0$ ,所以在极坐标系下边界条件可表为

$$u|_{\rho=\rho_0} = f(\theta),$$

既然边界条件用极坐标系形式表示出来很简单,所以我们就在极坐标系下求解这个定解问题.为此,先将它表示成

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \frac{1}{\rho^2} \left[ -\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = 0, & 0 < \rho < \rho_0, 0 \leq \theta < 2\pi, \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\begin{cases} u(\rho_0, \theta) = f(\theta), & 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases} \quad (2.26)$$

此外,因为自变量  $\rho, \theta$  的取值范围分别是  $[0, \rho_0]$  与  $[0, 2\pi]$ ,而圆盘内部的温度值决不可能是无限的,特别是圆盘中心点的温度值应该是有限的,并且  $(\rho, \theta)$  与  $(\rho, \theta + 2\pi)$  实际上表示同一点,温度应该相同,即应该有

$$|u(0, \theta)| < +\infty, \quad (2.27)$$

$$u(\rho, \theta) = u(\rho, \theta + 2\pi). \quad (2.28)$$

现在来求满足方程(2.25)及条件(2.26), (2.27), (2.28)的解.先令

$$u(\rho, \theta) = R(\rho) \Theta(\theta),$$

代入方程(2.25)得

$$R \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2} R \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} = 0,$$

$$\text{即} \quad \frac{\frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} R + R \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2}}{R} = -\frac{1}{\rho^2}.$$

令比值为常数  $-\lambda^2$  即得两个常微分方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R}{\partial \rho^2} + R &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + \lambda^2 \Theta &= 0. \end{aligned}$$

再由条件(2.27)及(2.28)可得

$$|R(0)| < +\infty,$$

$$(r + 2) = (r). \quad (2.29)$$

这样一来,我们得到了两个常微分方程的定解问题

$$\begin{cases} r + r = 0, \\ (r + 2) = (r), \end{cases} \quad (2.30)$$

与

$$\begin{cases} r^2 R + R - R = 0, \\ |R(0)| < +\infty. \end{cases} \quad (2.31)$$

先解哪一个呢?要看哪一个可以定出特征值.由于条件(2.29)满足可加性(即所有满足(2.29)的函数叠加起来仍旧满足(2.29)),所以只能先解问题(2.30).

采用与 § 2.1 中同样的方法可以得到

当  $\lambda < 0$  时,问题(2.30)无非零解;

当  $\lambda = 0$  时,它的解为  $r_0(r) = a_0$  (常数);

当  $\lambda > 0$  时,取  $\lambda = n^2$ ,这时(2.30)的解为

$$(r) = a \cos nr + b \sin nr,$$

且为使  $(r)$  以  $2\pi$  为周期,  $n$  必须是整数  $n$ , 取  $n = 1, 2, 3, \dots$  (只取正整数的理由与 § 2.1 相同), 则可将上面得到的解表示成

$$r_n(r) = a_n \cos nr + b_n \sin nr.$$

至此,我们已经定出了特征值问题(2.30)的特征值  $\lambda_n = n^2$ , 特征函数  $r_n(r)$ . 接下去是解问题(2.31). 其中的方程是欧拉(Euler)方程, 它的通解为

$$R_0 = c_0 + d_0 \ln r, \text{ 当 } \lambda = 0;$$

$$R_n = c_n r^{-n} + d_n r^n, \text{ 当 } \lambda = n^2 (n = 1, 2, 3, \dots).$$

为了保证  $|R(0)| < +\infty$ , 只有  $d_n = 0 (n = 0, 1, 2, \dots)$ , 即

$$R_n = c_n r^{-n} (n = 0, 1, 2, \dots).$$

因此利用叠加原理, 方程(2.25)满足条件(2.27), (2.28)的解可以表示为级数

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta). \quad (2.32)$$

此式中的  $\frac{a_0}{2}$  就是  $a_0 c_0$ ;  $a_n, b_n$  分别是  $a_n c_n$  与  $b_n c_n$ . 最后为了确定系数  $a_n, b_n$ , 我们利用边界条件(2.26)得

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \quad (2.33)$$

因此,  $a_0, \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  就是  $f(\theta)$  展开为傅里叶级数时的系数, 即有

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta, \\ a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta. \end{cases} \quad (2.34)$$

将这些系数代入(2.32)式即得所求的解.

为了以后应用起来方便, 我们还可以将解(2.32)写成另一种形式. 为此, 将(2.34)式所确定的系数代入(2.32)式经过简化后可得

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^n \cos n(\theta - t) \right] dt, \quad (2.35)$$

利用下面已知的恒等式

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \cos n(\theta - t) = \frac{1}{2} \frac{1 - k^2}{1 - 2k \cos(\theta - t) + k^2} \quad (|k| < 1),$$

这个恒等式的证明如下:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \cos n(\theta - t) &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} k^n [e^{in(\theta - t)} + e^{-in(\theta - t)}] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [k e^{i(\theta - t)}]^n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [k e^{-i(\theta - t)}]^n \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{k e^{i(\theta - t)}}{1 - k e^{i(\theta - t)}} + \frac{1}{2} \frac{k e^{-i(\theta - t)}}{1 - k e^{-i(\theta - t)}} \quad (\text{因 } |k| < 1) \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{k \cos(\theta - t) + i k \sin(\theta - t)}{1 - k \cos(\theta - t) - i k \sin(\theta - t)} + \frac{k \cos(\theta - t) - i k \sin(\theta - t)}{1 - k \cos(\theta - t) + i k \sin(\theta - t)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{2k \cos(\theta - t) - 2k^2}{1 - 2k \cos(\theta - t) + k^2} \right] = \frac{1}{2} \frac{1 - k^2}{1 - 2k \cos(\theta - t) + k^2}. \end{aligned}$$

可将(2.35)中的解  $u(r, t)$  表达为

$$u(r, t) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos(\theta - t)} dt \quad (0 \leq r \leq r_0, 0 \leq t \leq 2\pi). \quad (2.36)$$

公式(2.36)称为圆域内的泊松公式.它的作用在于把解写成了积分形式,这样便于作理论上的研究.

例 解下列定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, & 0 < r < r_0, 0 \leq t \leq 2\pi, \\ u|_{r=r_0} = A \cos \theta, & 0 \leq t \leq 2\pi, A \text{ 为常数.} \end{cases}$$

解 利用公式(2.34)并注意三角函数系的正交性,可得

$$b_n = 0,$$

$$a_1 = \frac{A}{r_0}, \quad a_n = 0 \quad (n \geq 1)$$

代入(2.32)即得所求的解为

$$u(r, t) = \frac{A}{r_0} \cos \theta.$$

## § 2.4 非齐次方程的解法

前面所讨论的偏微分方程都限于齐次的,现在要讨论非齐次方程的解法.为方便起见,以弦的强迫振动为例,所用的方法对其他类型的方程也适用.

我们研究的问题是一根弦在两端固定的情况下,受强迫力作用所产生的振动现象.即要考虑下列定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & 0 < x < l, t > 0, \end{cases} \quad (2.37)$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, & t > 0, \end{cases} \quad (2.38)$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (2.39)$$

在现在的情况,弦的振动是由两部分干扰引起的,一是强迫力,一是初始状态,所以由物理意义可知,此时振动可以看作为仅由强迫力引起的振动和仅由初始状态引起的振动的合成.

由此得到启发,我们可设解为

$$U(x, t) = V(x, t) + W(x, t), \quad (2.40)$$

其中  $V(x, t)$  表示仅由强迫力引起弦振动的位移,它满足

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f(x, t), 0 < x < l, t > 0, \\ V|_{x=0} = V|_{x=l} = 0, t > 0, \\ V|_{t=0} = \frac{\partial V}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, 0 < x < l. \end{cases} \quad (2.41)$$

而  $W(x, t)$  表示仅由初始状态引起弦振动的位移,它满足

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0, \\ W|_{x=0} = W|_{x=l} = 0, t > 0 \\ W|_{t=0} = \frac{\partial W}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, 0 < x < l. \end{cases} \quad (2.42)$$

读者不难验证,若  $V$  是 (2.41) 的解,  $W$  是 (2.42) 的解,则  $U = V + W$  一定就是原定解问题的解.

问题 (2.42) 可直接用分离变量法求解,因此现在的问题只要讨论如何解问题 (2.41) 就行了.

关于问题 (2.41),我们可以采用类似于线性非齐次常微分方程中所常用的参数变易法,并保持如下的设想,即这个定解问题的解可分解为无穷多个驻波的叠加,而每个驻波的波形仍然是由相应齐次方程通过分离变量所得的特征值问题的特征函数所决定.这就是说,我们假设 (2.41) 的解具有如下的形式:

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin \frac{n}{l} x, \quad (2.43)$$

其中  $v_n(t)$  是待定的函数.为了确定  $v_n(t)$ ,将自由项  $f(x, t)$  也

按特征函数系展开成如下的级数:

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n}{l} x, \quad (2.44)$$

其中 
$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{n}{l} x dx.$$

将(2.43)及(2.44)代入(2.41)的第一个式子,得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ v_n(t) + \frac{a^2 n^2}{l^2} v_n(t) - f_n(t) \right] \sin \frac{n}{l} x = 0, \quad (2.45)$$

由此可得

$$v_n(t) + \frac{a^2 n^2}{l^2} v_n(t) = f_n(t).$$

再将(2.43)代入(2.41)中的初始条件得

$$v_n(0) = 0, \quad v_n'(0) = 0.$$

这样一来,确定函数  $v_n(t)$  只需解下列定解问题:

$$\begin{cases} v_n(t) + \frac{a^2 n^2}{l^2} v_n(t) = f_n(t), & t > 0, \\ v_n(0) = 0, \quad v_n'(0) = 0, & (n = 1, 2, \dots). \end{cases} \quad (2.46)$$

用拉普拉斯变换法(或参数变易法)解出(2.46),得到

$$v_n(t) = \frac{l}{n a} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{n a(t-\tau)}{l} d\tau,$$

在方程(2.46)的两端取关于  $t$  的拉普拉斯变换,得

$$p^2 U_n(p) + \frac{a^2 n^2}{l^2} U_n(p) = F_n(p),$$

其中  $U_n(p)$ ,  $F_n(p)$  分别为  $v_n(t)$  与  $f_n(t)$  的拉普拉斯变换.解出

$$U_n(p) = \frac{1}{p^2 + \frac{a^2 n^2}{l^2}} F_n(p),$$

由于  $\frac{1}{p^2 + \frac{a^2 n^2}{l^2}}$  的逆拉普拉斯变换为  $\frac{1}{n a} \sin \frac{n a t}{l}$ , 利用拉普拉斯变换的卷积性质,

即得  $v_n(t)$ .



所以,

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{l}{n a} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{n a(t-\tau)}{l} d\tau \right] \sin \frac{n}{l} x.$$

将这个解与问题(2.42)的解加起来,就得到原定解问题(2.37), (2.38), (2.39)的解.

这里所给的求解问题(2.41)的方法,其实质是将方程的自由项及解都按齐次方程所对应的一族特征函数展开.随着方程与边界条件的不同,特征函数族也就不同,但总是把非齐次方程的解按相应的特征函数展开.所以这种方法也叫特征函数法.

例 在环形域  $a < \sqrt{x^2 + y^2} < b$  ( $0 < a < b$ ) 内求解下列定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12(x^2 - y^2), & a < \sqrt{x^2 + y^2} < b, \\ u \Big|_{\sqrt{x^2 + y^2} = a} = 0, & \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\sqrt{x^2 + y^2} = b} = 0. \end{cases}$$

解 由于求解区域是环形区域,所以我们选用平面极坐标系,利用直角坐标与极坐标系之间的关系

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$

可将上述定解问题用极坐标  $(r, \theta)$  表示出来:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial u}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 12 r^2 \cos 2\theta, & a < r < b, 0 \leq \theta < 2\pi, \end{cases} \quad (2.47)$$

$$\begin{cases} u \Big|_{r=a} = 0, & \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=b} = 0, \end{cases} \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \quad (2.48)$$

这是一个非齐次方程附有齐次边界条件的定解问题.采用特征函数法,并注意到在 § 2.3 中得到的关于圆域内拉普拉斯方程所对应的特征函数,可令问题(2.47), (2.48)的解为

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n(r) \cos n\theta + B_n(r) \sin n\theta],$$

代入(2.47)并整理得到

$$\left\{ \left[ A_n(x) + \frac{1}{n} A_n(x) - \frac{n^2}{2} A_n(x) \right] \cos nx + \left[ B_n(x) + \frac{1}{n} B_n(x) - \frac{n^2}{2} B_n(x) \right] \sin nx \right\} = 12x^2 \cos 2x.$$

比较两端关于  $\cos nx, \sin nx$  的系数可得

$$A_2(x) + \frac{1}{2} A_2(x) - \frac{4}{2} A_2(x) = 12x^2, \quad (2.49)$$

$$A_n(x) + \frac{1}{n} A_n(x) - \frac{n^2}{2} A_n(x) = 0 \quad (n \neq 2), \quad (2.50)$$

$$B_n(x) + \frac{1}{n} B_n(x) - \frac{n^2}{2} B_n(x) = 0. \quad (2.51)$$

再由条件(2.48)得

$$A_n(a) = A_n(b) = 0, \quad (2.52)$$

$$B_n(a) = B_n(b) = 0. \quad (2.53)$$

方程(2.50)与(2.51)都是齐次的欧拉方程,它们的通解分别为

$$A_0(x) = c_0 + d_0 \ln x,$$

$$B_0(x) = c_0 + d_0 \ln x,$$

$$A_n(x) = c_n x^n + d_n x^{-n}, \quad n \neq 2,$$

$$B_n(x) = c_n x^n + d_n x^{-n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

其中  $c_n, d_n$  ( $n \neq 0$  整数,  $n \neq 2$ );  $c_n, d_n$  ( $n = 0$  整数)都是任意常数.由条件(2.52)与(2.53)可得

$$A_n(x) = 0 \quad (n \neq 2),$$

$$B_n(x) = 0.$$

下面的任务就是要确定  $A_2(x)$ .

方程(2.49)是一个非齐次的欧拉方程,利用待定系数法可求得它的一个特解

$$A_2^*(x) = x^4,$$

所以,它的通解为

$$A_2(x) = C_1 x^2 + C_2 x^{-2} + x^4,$$

由条件(2.52)确定  $C_1, C_2$  得

$$C_1 = -\frac{a^6 + 2b^6}{a^4 + b^4},$$

$$C_2 = -\frac{a^4 b^4 (a^2 - 2b^2)}{a^4 + b^4}.$$

因此

$$A_2(x) = -\frac{a^6 + 2b^6}{a^4 + b^4} x^2 - \frac{a^4 b^4 (a^2 - 2b^2)}{a^4 + b^4} x^{-2} + \frac{1}{4},$$

原定解问题的解为

$$u(x, t) = -\frac{1}{(a^4 + b^4)^4} \left[ (a^6 + 2b^6) x^2 + a^4 b^4 (a^2 - 2b^2) x^{-2} - \frac{1}{4} \right] \cos 2t.$$

## § 2.5 非齐次边界条件的处理

前面所讨论的定解问题的解法,不论方程是齐次的还是非齐次的,边界条件都是齐次的.如果遇到非齐次边界条件的情况,应该如何处理?总的原则是设法将边界条件化成齐次的.具体地说,就是取一个适当的未知函数之间的代换,使对新的未知函数,边界条件是齐次的.现在以下列定解问题为例,说明选取代换的方法.

设有定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), 0 < x < l, t > 0, & (2.54) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = u_1(t), u|_{x=l} = u_2(t), t > 0, & (2.55) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x), \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), 0 \leq x \leq l. & (2.56) \end{cases}$$

我们设法作一代换将边界条件化为齐次的,为此令

$$u(x, t) = V(x, t) + W(x, t). \quad (2.57)$$

选取  $W(x, t)$  使  $V(x, t)$  的边界条件化为齐次的,即

$$V|_{x=0} = V|_{x=l} = 0, \quad (2.58)$$

由(2.55)及(2.57)容易看出,要(2.58)成立,只要

$$W|_{x=0} = u_1(t), W|_{x=l} = u_2(t), \quad (2.59)$$

也就是说,只要所选取的  $W$  满足(2.59)就能达到我们的目的.而满足(2.59)的函数是容易找到的,例如取  $W$  为  $x$  的一次式,即设

$$W(x, t) = A(t)x + B(t),$$

用条件(2.59)确定  $A, B$  得

$$A(t) = \frac{1}{l}[u_2(t) - u_1(t)], B(t) = u_1(t).$$

显然,函数  $W(x, t) = u_1(t) + \frac{u_2(t) - u_1(t)}{l}x$  就满足(2.59)式,

因而只要作代换

$$u = V + \left[ u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l}x \right], \quad (2.60)$$

就能使新的未知函数  $V$  满足齐次的边界条件.

经过这个代换后,得到关于  $V$  的定解问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f_1(x, t), 0 < x < l, t > 0, \\ V|_{x=0} = V|_{x=l} = 0, t > 0, \\ V|_{t=0} = \varphi_1(x), \frac{\partial V}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi_1(x), 0 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (2.61)$$

其中

$$\begin{cases} f_1(x, t) = f(x, t) - \left[ u_1(t) + \frac{u_2(t) - u_1(t)}{l}x \right], \\ \varphi_1(x) = \varphi(x) - \left[ u_1(0) + \frac{u_2(0) - u_1(0)}{l}x \right], \\ \psi_1(x) = \psi(x) - \left[ u_1(0) + \frac{u_2(0) - u_1(0)}{l}x \right]. \end{cases} \quad (2.62)$$

问题(2.61)可用上一节的方法解出.将(2.61)的解代入(2.60)即得原问题的解.

上面由(2.59)式定  $W(x, t)$  时, 取  $W(x, t)$  为  $x$  的一次式是为了使(2.62)中几个式子简单一些, 并且  $W(x, t)$  也容易定. 但若  $f, u_1, u_2$  都与  $t$  无关, 则可取适当的  $W(x)$  (也与  $t$  无关), 使  $V(x, t)$  的方程与边界条件同时都化成齐次的, 这样做就可以省掉下面对  $V(x, t)$  要进行解非齐次方程的繁重工作. 这种  $W(x)$  究竟怎么找, 将在后面的例题中说明.

若边界条件不全是第一类的, 本节的方法仍然适用, 不同的只是函数  $W(x, t)$  的形式, 读者可就下列几种边界条件的情况写出相应的  $W(x, t)$  来:

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad & u|_{x=0} = u_1(t), \quad \frac{u}{x} \Big|_{x=l} = u_2(t); \\ 2^\circ \quad & \frac{u}{x} \Big|_{x=0} = u_1(t), \quad u|_{x=l} = u_2(t); \\ 3^\circ \quad & \frac{u}{x} \Big|_{x=0} = u_1(t), \quad \frac{u}{x} \Big|_{x=l} = u_2(t). \end{aligned}$$

以上各节我们说明了如何用分离变量法来解定解问题, 为便于读者掌握此方法, 现将解定解问题的主要步骤简略小结如下:

一、根据边界的形状选取适当的坐标系, 选取的原则是使在此坐标系中边界条件的表达式最为简单. 圆、圆环、扇形等域用极坐标系较方便, 圆柱形域与球域分别用柱坐标系与球坐标系较方便.

二、若边界条件是非齐次的, 又没有其他条件可以用来定特征函数, 则不论方程是否为齐次, 必须先作函数的代换使其化为具有齐次边界条件的问题, 然后再求解.

三、非齐次方程、齐次边界条件的定解问题 (不论初始条件如何) 可以分为两个定解问题, 其一是具有原来初始条件的齐次方程的定解问题, 其二是具有齐次定解条件的非齐次方程的定解问题. 第一个问题用分离变量法求解, 第二个问题按特征函数法求解.

在结束本节之前, 我们再举两个综合性的例子, 目的是帮助读

者掌握分离变量法的全过程.

例 1 求下列定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A, 0 < x < l, t > 0, \end{cases} \quad (2.63)$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = B, t > 0, \end{cases} \quad (2.64)$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, 0 < x < l. \end{cases} \quad (2.65)$$

的形式解,其中  $A, B$  均为常数.

解 这个定解问题的特点是:方程及边界条件都是非齐次的.根据上述原则,首先应将边界条件化成齐次的,由于方程(2.63)的自由项及边界条件都与  $t$  无关,所以我们有可能通过一次代换将方程与边界条件都变成齐次的,具体做法如下:令

$$u(x, t) = V(x, t) + W(x),$$

代入方程(2.63)得

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + W''(x) \right] + A.$$

为了使这个方程及边界条件同时化成齐次的,选  $W(x)$  满足

$$\begin{cases} a^2 W''(x) + A = 0, 0 < x < l, \\ W|_{x=0} = 0, W|_{x=l} = B, t > 0. \end{cases} \quad (2.66)$$

(2.66)是一个二阶常系数线性非齐次方程的边值问题,它的解可以通过两次积分求得

$$W(x) = -\frac{A}{2a^2} x^2 + \left[ \frac{Al}{2a^2} + \frac{B}{l} \right] x.$$

求出函数  $W(x)$  之后,再由(2.65)可知函数  $V(x, t)$  为下列定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0, \end{cases} \quad (2.67)$$

$$\begin{cases} V|_{x=0} = V|_{x=l} = 0, t > 0, \end{cases} \quad (2.68)$$

$$\begin{cases} V|_{t=0} = -W(x), \frac{\partial V}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, 0 < x < l \end{cases} \quad (2.69)$$

的解 .

采用分离变量法, 可得(2.67)满足齐次边界条件(2.68)的解为

$$V(x, t) = \sum_{n=1} \left[ C_n \cos \frac{n}{l} a t + D_n \sin \frac{n}{l} a t \right] \sin \frac{n}{l} x . \quad (2.70)$$

利用(2.69)中第二个条件可得  $D_n = 0$  .

于是定解问题(2.67), (2.68), (2.69)的解可表示为

$$V(x, t) = \sum_{n=1} C_n \cos \frac{n}{l} a t \sin \frac{n}{l} x .$$

代入(2.69)中第一个条件得

$$-W(x) = \sum_{n=1} C_n \sin \frac{n}{l} x ,$$

即

$$\frac{A}{2a^2} x^2 - \left[ \frac{Al}{2a^2} + \frac{B}{l} \right] x = \sum_{n=1} C_n \sin \frac{n}{l} x .$$

由傅里叶级数的系数公式可得

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \left[ \frac{A}{2a^2} x^2 - \left[ \frac{Al}{2a^2} + \frac{B}{l} \right] x \right] \sin \frac{n}{l} x dx \\ &= \frac{A}{a^2 l} \int_0^l x^2 \sin \frac{n}{l} x dx - \left[ \frac{A}{a^2} + \frac{2B}{l^2} \right] \int_0^l x \sin \frac{n}{l} x dx \\ &= -\frac{2Al^2}{a^2 n^3} + \frac{2}{n} \left[ \frac{Al^2}{a^2 n^2} + B \right] \cos n . \end{aligned} \quad (2.71)$$

因此, 原定解问题的解为

$$u(x, t) = -\frac{A}{2a^2} x^2 + \left[ \frac{Al}{2a^2} + \frac{B}{l} \right] x + \sum_{n=1} C_n \cos \frac{n}{l} a t \sin \frac{n}{l} x ,$$

其中  $C_n$  由(2.71)确定 .

例 2 解下列定解问题:

$$\begin{cases} \frac{u}{t} = a^2 \frac{u}{x^2} - b^2 u, 0 < x < l, t > 0, & (2.72) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = u_1, t > 0, & (2.73) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \frac{u_1}{l^2} x^2, 0 \leq x \leq l, & (2.74) \end{cases}$$

其中  $b, u_1$  均为常数.

解 这里所遇到的方程(2.72)比 §2.2 中所讨论的方程(2.13)多了一项  $-b^2 u$ , 但它仍然是线性齐次方程, 故还能用分离变量法求解, 而且从下面的求解过程中可以看到, 方程里多了一项  $-b^2 u$ , 不会给我们带来本质上的困难. 下面我们写出具体的求解过程.

首先, 将边界条件化成齐次的, 为此令

$$u(x, t) = V(x, t) + u_1, \quad (2.75)$$

代入原定解问题得到

$$\begin{cases} \frac{V}{t} = a^2 \frac{V}{x^2} - b^2 V - b^2 u_1, 0 < x < l, t > 0, \\ V_x|_{x=0} = V|_{x=l} = 0, t > 0, \\ V|_{t=0} = \frac{u_1}{l^2} x^2 - u_1, 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

显然这个定解问题可分为如下两个定解问题:

$$\begin{cases} \frac{V^{(1)}}{t} = a^2 \frac{V^{(1)}}{x^2} - b^2 V^{(1)}, 0 < x < l, t > 0, & (2.76) \end{cases}$$

$$( ) \begin{cases} V_x^{(1)}|_{x=0} = V^{(1)}|_{x=l} = 0, t > 0, & (2.77) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V^{(1)}|_{t=0} = \frac{u_1}{l^2} x^2 - u_1, 0 \leq x \leq l, & (2.78) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{V^{(2)}}{t} = a^2 \frac{V^{(2)}}{x^2} - b^2 V^{(2)} - b^2 u_1, 0 < x < l, t > 0, & (2.79) \end{cases}$$

$$( ) \begin{cases} V_x^{(2)}|_{x=0} = V^{(2)}|_{x=l} = 0, t > 0, & (2.80) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V^{(2)}|_{t=0} = 0, 0 \leq x \leq l. & (2.81) \end{cases}$$

对于问题( ), 可以直接用分离变量法求解, 求解步骤与



§2.2中的问题(2.13), (2.14), (2.15)相同, 所不同的只是通过分离变量所得到的常微分方程较(2.16)稍有不同.

令  $V^{(1)}(x, t) = X(x)T(t)$ ,  
代入(2.76)得

$$\frac{T'' + b^2 T}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2,$$

由此得到下列两个常微分方程

$$T'' + (b^2 + a^2 \lambda^2) T = 0, \quad (2.82)$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0. \quad (2.83)$$

由条件(2.77)得

$$X(0) = X(l) = 0, \quad (2.84)$$

容易求得特征值问题(2.83), (2.84)的特征值与特征函数为

$$\lambda^2 = \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4l^2},$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$X_n(x) = B_n \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l} x,$$

将上式中的  $\lambda^2$  代入(2.82)得

$$T'' + \left[ b^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2}{4l^2} \right] T = 0,$$

它的通解为

$$T_n(t) = e^{-\left[ b^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2}{4l^2} \right] t},$$

从而问题( )的解可表示为

$$V^{(1)}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\left[ b^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2}{4l^2} \right] t} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l} x, \quad (2.85)$$

其中常数  $C_n$  由初始条件(2.78)确定为

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \left[ \frac{u_1}{l^2} x^2 - u_1 \right] \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l} x dx$$

$$= (-1)^{n+1} \frac{32 u_1}{(2n+1)^3},$$

故所求的解  $V^{(1)}(x, t)$  为

$$V^{(1)}(x, t) = \frac{32 u_1}{3} e^{-b^2 t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3} e^{-\frac{(2n+1)^2 a^2}{4l^2} t} \cos \frac{(2n+1)}{2l} x. \quad (2.86)$$

对于问题( ), 可以用特征函数法求解, 将方程的自由项  $-b^2 u_1$  及解  $V^{(2)}(x, t)$  都按特征函数系  $\left\{ \cos \frac{(2n+1)}{2l} x \right\} (n=0, 1, 2, \dots)$  展开, 得

$$-b^2 u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4b^2 u_1}{2n+1} \cos \frac{(2n+1)}{2l} x, \quad (2.87)$$

$$V^{(2)}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t) \cos \frac{(2n+1)}{2l} x, \quad (2.88)$$

其中  $v_n(t)$  满足

$$\begin{cases} v_n(t) + \left[ \frac{(2n+1)^2 a^2}{4l^2} + b^2 \right] v_n(t) = (-1)^{n+1} \frac{4b^2 u_1}{(2n+1)}, \\ v_n(0) = 0. \end{cases}$$

由此可解得  $v_n(t)$  为

$$v_n(t) = \frac{(-1)^n 16b^2 u_1 l^2}{(2n+1) [4b^2 l^2 + (2n+1)^2 a^2]} \left[ e^{-\left[ b^2 + \frac{(2n+1)^2 a^2}{4l^2} \right] t} - 1 \right],$$

从而问题( )的解为

$$\begin{aligned} V^{(2)}(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16b^2 u_1 l^2}{(2n+1) [4b^2 l^2 + (2n+1)^2 a^2]} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \times \\ &\quad \left[ e^{-\left[ b^2 + \frac{(2n+1)^2 a^2}{4l^2} \right] t} - 1 \right] \cos \frac{(2n+1)}{2l} x, \end{aligned} \quad (2.89)$$

将(2.86)与(2.89)相加起来, 即得  $V(x, t)$ , 将这个  $V(x, t)$  代入(2.75), 即得原定解问题的解.

值得指出的是,方程(2.72)亦可通过下列函数之间的代换:

$$u(x, t) = e^{-b^2 t} V(x, t)$$

化成(2.13)的形式.这样一来,原定解问题就化成了方程(2.13)相应的定解问题,然后用分离变量法求解,请读者自己按这个方法做一遍.

## \* § 2.6 关于二阶常微分方程特征值问题的一些结论

从本章的前三节可以看出,不论对三种类型偏微分方程中的哪一类,也不论在何种坐标系中,采用分离变量法求解定解问题时,总不可避免地要遇到一个常微分方程在某种齐次边界条件下的特征值问题(以后将要看到,有些特征值问题中还包括有自然边界条件,所谓自然边界条件就是指形如  $|y(x_0)| < +\infty$  的条件.),例如,§ 2.1 中的特征值问题(2.5), (2.6); § 2.2 中的特征值问题(2.16), (2.17); § 2.3 中的特征值问题(2.30)等.用分离变量法所得到的定解问题的解,其实就是将所求的解按照特征函数进行傅里叶展开.于是,我们就会产生这样一个问题:这种将解按特征函数系进行展开的依据是什么呢?当特征函数系就是普通的三角函数系(如 § 2.1 与 § 2.3 中那样)时,这种展开的合理性已为我们所熟知,当特征函数系不是普通的三角函数系时(如 § 2.2 中的特征函数系  $\{\sin nx\}$ ),情况会怎样?本节我们就来讨论这个问题.我们将要说明,在一定条件下,求解一个二阶常微分方程的特征值问题所得的特征函数系是一个正交完全(备)系,所以按照这个函数系进行傅里叶展开是可能的.

为了使所得的结论更具有有一般性,我们来考虑如下方程:

$$\frac{d}{dx} \left[ k(x) \frac{dy}{dx} \right] - q(x)y + \lambda(x)y = 0 \quad (a < x < b),$$

(2.90)

不难看出,方程(2.5)(包括(2.16)及(2.30)中的方程)正是它的特例.例如,若取  $k(x) = 1$ ,  $q(x) = 0$ ,  $(x) = 1$ , 则(2.90)即为(2.5)(只是未知函数的符号有所不同).

方程(2.90)通常称为施图姆 - 刘维尔(Sturm-Liouville)型方程(任一个二阶线性常微分方程乘以适当函数后总可以化成这种形式),有关这个方程特征值问题的一些结论,称为施图姆 - 刘维尔理论.

对方程(2.90)中的函数  $k(x)$ ,  $q(x)$ ,  $(x)$  作一些假定.设  $k(x)$  及其一阶导数在闭区间  $[a, b]$  上连续,当  $a < x < b$  时,  $k(x) > 0$ ;  $q(x)$  或者在闭区间  $[a, b]$  上连续,或者在开区间  $(a, b)$  内连续而在区间的端点处有一阶极点,且  $q(x) \neq 0$ ;  $(x)$  在  $[a, b]$  上连续且  $(x) > 0$ .在这些条件下,方程(2.90)的特征值问题就是在一些齐次边界条件或自然边界条件下,求它的非零解.边界条件的提法与  $k(x)$  在区间端点  $x = a$  及  $x = b$  处是否为零以及哪一个端点是  $k(x)$  的零点有关,例如,若  $k(a)k(b) \neq 0$ ,则在  $x = a$  及  $x = b$  处不需要加自然边界条件,这时在这两个端点所加的边界条件或者就是在 § 1.2 中所述的三种类型的齐次边界条件中的一种,或者如同(2.30)中的周期性条件;若  $k(a) = 0$ ,  $k(b) \neq 0$  (对于  $k(a) \neq 0$ ,  $k(b) = 0$ , 或者  $k(a) = k(b) = 0$  两种情况,读者可自己考虑),则在  $x = a$  处要加自然边界条件,在  $x = b$  处不加自然边界条件,此时边界条件的形式为

$$[y(x) + hy'(x)]|_{x=b} = 0, \quad (2.91)$$

$$|y(a)| < +\infty, \quad (2.92)$$

这里的常数  $\infty$ ,  $h$  中可能有一个为零,即条件(2.91)包括了三种类型的边界条件.

对于特征值问题(2.90), (2.91), (2.92), 有以下几点结论:

1. 存在无穷多个实的特征值,适当调换这些特征值的顺序,可使它们构成一个非递减序列,即

$$1 \quad 2 \quad \dots \quad n \quad n+1 \quad \dots,$$

对应于这些特征值有无穷多个特征函数

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots$$

2. 所有特征值均不为负, 即

$$\lambda_n \geq 0, n = 1, 2, \dots$$

3. 设  $\lambda_m, \lambda_n$  是任意两个不同的特征值, 对应于这两个特征值的特征函数记作  $y_m(x), y_n(x)$ , 则

$$\int_a^b y_m(x) y_n(x) dx = 0 \quad (\lambda_m \neq \lambda_n),$$

即对应于不同特征值的特征函数在  $[a, b]$  上带权函数  $y(x)$  互相正交.

4. 特征函数系  $\{y_n(x)\} (n = 1, 2, \dots)$  在区间  $[a, b]$  上构成一个完全(备)系, 即任意一个在  $[a, b]$  上具有一阶连续导数及分段连续的二阶导数的函数  $f(x)$ , 只要它也满足特征函数中每个函数  $y_n(x) (n = 1, 2, \dots)$  所满足的边界条件(例如, 满足(2.91)与(2.92)), 则一定可以将  $f(x)$  按特征函数系展成绝对且一致收敛的级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x),$$

其中

$$f_n = \frac{\int_a^b y_n(x) f(x) dx}{\int_a^b y_n^2(x) dx}.$$

以上四点结论的证明, 有的并不困难, 有的需要用到超出本书范围的一些知识, 所以我们一概从略.

最后, 我们还要指出一点, 上述特征值问题是相当广泛的, 数学物理方程中所出现的特征值问题, 几乎都是它的特例. 在第五、六两章中将要看到, 当我们在球坐标及柱坐标系中用分离变量法解定解问题时, 就要讨论如下两个方程:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0, \quad (2.93)$$

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + y = 0 \quad (2.94)$$

的特征值问题. 这两个方程也是(2.90)的特例, 例如, 若取

$k(x) = x, q(x) = \frac{n^2}{x}, p(x) = x$ , 则(2.90)就变成

$$\frac{d}{dx} \left[ x \frac{dy}{dx} \right] - \frac{n^2}{x} y + xy = 0,$$

即  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ ,

这就是(2.93).

若取  $k(x) = 1 - x^2, q(x) = 0, p(x) = 1$ , 则方程(2.90)变成

$$\frac{d}{dx} \left[ (1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + y = 0,$$

这就是(2.94).

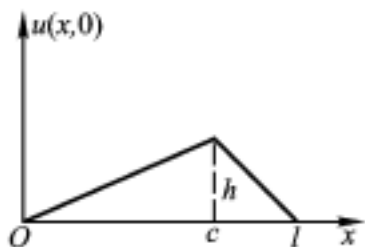
方程(2.93)称为  $n$  阶贝塞尔(Bessel)方程, 方程(2.94)称为勒让德(Legendre)方程. 这两个方程及它们解的一些性质, 我们将在第五、六章分别讨论.

## 习 题 二

1. 设弦的两端固定于  $x=0$  及  $x=l$ , 弦的初始位移如图所示, 初速度为零, 又没有外力作用, 求弦作横向振动时的位移函数  $u(x, t)$ .

2. 就下列初始条件及边界条件解弦振动方程

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, 0 \leq x \leq l, \\ \frac{u(x, 0)}{t} &= x(l-x), 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0, t > 0. \end{aligned}$$



(第1题)

3. 就下列初始条件及边界条件解弦振动方程

$$u|_{t=0} = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1-x, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$

$$\left. \frac{u}{t} \right|_{t=0} = x(x-1), 0 \leq x \leq 1,$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, t > 0.$$

4. 解出习题一中第 2 题.

5. 试求适合于下列初始条件及边界条件的一维热传导方程的解

$$u|_{t=0} = x(l-x), 0 \leq x \leq l,$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, t > 0.$$

6. 解一维热传导方程, 其初始条件及边界条件为

$$u|_{t=0} = x, \left. \frac{u}{x} \right|_{x=0} = 0, \left. \frac{u}{x} \right|_{x=l} = 0.$$

7. 一根长为  $l$  的细杆表面绝缘, 其初始温度分布如图所示, 由  $t=0$  开始两端温度保持于零摄氏度, 求杆上温度分布.

8. 试解出具有放射衰变的热传导方程

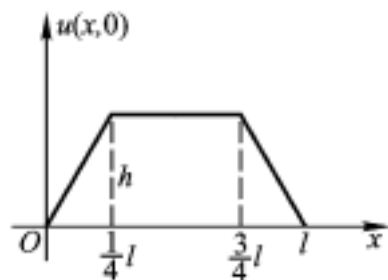
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial u}{\partial t} + Ae^{-x} = 0,$$

已知边界条件为

$$u|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0,$$

初始条件为

$$u|_{t=0} = T(\text{常数}).$$



(第 7 题)

9. 求下列定解问题:

$$\begin{cases} \frac{u}{t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A, 0 < x < l, t > 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

的解.

10. 求满足下列定解条件的一维热传导方程的解:

$$u|_{x=0} = 10, u|_{x=l} = 5,$$

$$u|_{t=0} = kx, k \text{ 为常数}.$$

11. 试确定下列定解问题:

$$\begin{cases} \frac{u}{t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x), 0 < x < l, t > 0, \\ u|_{x=0} = A, u|_{x=l} = B, t > 0, \\ u|_{t=0} = g(x), 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

解的一般形式 .

12 . 求稳恒状态下, 由直线  $x=0, x=l_1, y=0, y=l_2$  所围矩形板内各点的温度, 假设在  $x=0, x=l_1$  及  $y=0$  三边上温度保持为零摄氏度,  $y=l_2$  这边上各点温度为  $(x)$ , 其中  $(0) = (l_1) = 0$  .

13 . 一半径为  $a$  的半圆形平板, 其圆周边界上的温度保持  $u(a, ) = T( - )$ , 而直径边界上温度保持为零摄氏度, 板的侧面绝缘, 试求稳恒状态下的温度分布规律  $u( , )$  .

14 . 一圆环形平板, 内半径为  $r_1$ , 外半径为  $r_2$ , 侧面绝缘, 如内圆温度保持零摄氏度, 外圆温度保持 1 度, 试求稳恒状态下的温度分布规律  $u(r, )$  .

15 . 如何解下列定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x), 0 < x < l, t > 0, \\ u|_{x=0} = M_1(\text{常数}), \quad u|_{x=l} = M_2(\text{常数}), t > 0, \\ u|_{t=0} = (x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = (x), 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

16 . 在矩形域内求下列定解问题:

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f(x, y), 0 < x < a, 0 < y < b, \\ u|_{x=0} = \varphi_1(y), u|_{x=a} = \varphi_2(y), 0 \leq y \leq b, \\ u|_{y=0} = \varphi_1(x), u|_{y=b} = \varphi_2(x), 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

的解 .

17 . 在扇形区域内求下列定解问题:

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0, 0 < \theta < \alpha, 0 < r < a, \\ u|_{\theta=0} = u|_{\theta=\alpha} = 0, \\ u|_{r=a} = f(\theta), 0 \leq \theta \leq \alpha \end{cases}$$

的解 .

18 . 在矩形域  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$  内求拉普拉斯方程的解, 使满足边界条件:

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=a} = Ay, 0 \leq y \leq b, \\ \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=b} = 0, 0 \leq x \leq a. \end{cases}$$

19 . 把高频输电线充电到具有电压  $E$ , 然后一端短路封闭, 另一端仍保持断开, 求以后的电压分布 .



20. 求矩形膜振动的位移, 即解下列定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, 0 < x < a, 0 < y < b, t > 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=a} = 0, t > 0, 0 < y < b, \\ u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0, t > 0, 0 < x < a, \\ u|_{t=0} = xy(x-a)(y-b), \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, 0 < x < a, 0 < y < b. \end{cases}$$

21. 证明 §2.2 中所得的特征函数系  $\{\sin \frac{n\pi x}{l}\} (n=1, 2, \dots)$  在  $[0, l]$  上是正交系, 即

$$\int_0^l \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0 \quad (m \neq n),$$

其中  $\frac{n\pi}{l}$  满足  $\frac{n\pi}{l} \sin \frac{n\pi l}{l} + h \cos \frac{n\pi l}{l} = 0$ ,  $h$  为常数.

22. 求解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin \frac{2a}{l} x \sin \frac{2a}{l} t, 0 < x < l, t > 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, 0 < x < l. \end{cases}$$

23. 在单位圆内求解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -xy, x^2 + y^2 < 1, \\ u|_{x^2 + y^2 = 1} = 0. \end{cases}$$

## 第三章 行波法与积分变换法

在第二章中,我们较为详细地讨论了分离变量法,它是求解有限域内定解问题的一个常用方法,只要求解的区域很规则(其边界在某种坐标系中的方程能用若干个只含有一个坐标变量的方程表示),对三种典型的方程均可运用.本章我们将介绍另外两个求解定解问题的方法,一是行波法,一是积分变换法.行波法只能用于求解无界域内波动方程的定解问题,积分变换法不受方程类型的限制,主要用于无界域,但对有界域也能应用.

### § 3.1 一维波动方程的达朗贝尔公式

我们知道,要求一个常微分方程的特解,惯用的方法是先求出它的通解,然后利用初始条件确定通解中的任意常数得到特解.对于偏微分方程能否采用类似的方法呢?一般说来是不行的,原因之一是在偏微分方程中很难定义通解的概念,原因之二是即使对某些方程能够定义并求出它的通解,但此通解中包含有任意函数,要由定解条件确定出这些任意函数是会遇到很大困难的.但事情总不是绝对的,在少数情况下不仅可以求出偏微分方程的通解(指包含有任意函数的解),而且可以由通解求出特解.本节我们就一维波动方程来建立它的通解公式,然后由它得到初值问题解的表达式.

对于一维波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.1)$$

我们作如下的代换(为什么作这样的代换,学完本节后会明白):

$$\begin{cases} = x + at, \\ = x - at. \end{cases} \quad (3.2)$$

利用复合函数微分法则得

$$\begin{aligned} \frac{u}{x} &= \frac{u}{x} \frac{dx}{dx} + \frac{u}{x} \frac{dx}{dt} = \frac{u}{x} + \frac{u}{x} \frac{dx}{dt}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\left[ \frac{u}{x} + \frac{u}{x} \frac{dx}{dt} \right] \frac{dx}{dx} + -\left[ \frac{u}{x} + \frac{u}{x} \frac{dx}{dt} \right] \frac{dx}{dt} \\ &= -\frac{u}{x^2} + 2 \frac{u}{x} \frac{dx}{dt} + \frac{u}{x^2} \frac{dx^2}{dt^2}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

同理有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left[ -\frac{u}{x^2} - 2 \frac{u}{x} \frac{dx}{dt} + \frac{u}{x^2} \frac{dx^2}{dt^2} \right], \quad (3.4)$$

将(3.3)及(3.4)代入(3.1)得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (3.5)$$

将(3.5)式对  $x$  积分得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f_1(x), \quad (f_1(x) \text{ 是 } x \text{ 的任意可微函数})$$

再将此式对  $t$  积分得

$$\begin{aligned} u(x, t) &= f_1(x)t + f_2(x) \\ &= f_1(x + at) + f_2(x - at), \end{aligned} \quad (3.6)$$

其中  $f_1, f_2$  都是任意二次连续可微函数。(3.6)式就是方程(3.1)的通解(包含有两个任意函数的解)。

在各个具体问题中,我们并不满足于求通解,还要确定函数  $f_1$  与  $f_2$  的具体形式.为此,必须考虑定解条件,下面我们来讨论无限长弦的自由横振动.设弦的初始状态为已知,即已知定解条件

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \phi(x), & -\infty < x < +\infty, \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases} \quad (3.7)$$

将(3.6)中的函数代入(3.7)中,得

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), & (3.8) \\ af_1(x) - af_2(x) = \psi(x). & (3.9) \end{cases}$$

在(3.9)两端对  $x$  积分一次,得

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi + C. \quad (3.10)$$

由(3.8)与(3.10)解出  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  得

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi + \frac{C}{2}, \\ f_2(x) &= \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi - \frac{C}{2}. \end{aligned}$$

把这里确定出来的  $f_1(x)$  与  $f_2(x)$  代回到(3.6)中,即得方程(3.1)在条件(3.7)下的解为

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi. \quad (3.11)$$

(3.11)式称为无限长弦自由振动的达朗贝尔(D'Alembert)公式.

现在来说明达朗贝尔公式的物理意义.由于达朗贝尔公式是由(3.6)式得来的,所以我们只须说明(3.6)式的物理意义.

首先,考虑  $u_2 = f_2(x-at)$  的物理意义.我们来说明这样的函数是代表一个沿  $x$  轴正方向传播的行波,为了讲清这一点,我们不妨考虑一个特例.假定  $f_2(x)$  的图形如图 3-1(a)所示.

则在  $t=0$  时,  $u_2 = f_2(x)$ ; 在  $t = \frac{1}{2}$  时,  $u_2 = f_2\left[x - \frac{a}{2}\right]$ , 其图形如图 3-1(b)所示; 在  $t=1$  时,  $u_2 = f_2(x-a)$ , 其图形如图 3-1(c)所示; 在  $t=2$  时,  $u_2 = f_2(x-2a)$ , 其图形如图 3-1(d)所示. 这些图形说明,随着时间  $t$  的推移,  $u_2 = f_2(x-at)$  的图形以速度  $a$  向  $x$  轴正方向移动.所以,  $u_2 = f_2(x-at)$  表示一个以速度  $a$  沿  $x$  轴正方向传播的行波,称为右行波.同样道理,  $u_1 = f_1(x+at)$

就表示一个以速度  $a$  沿  $x$  轴负方向传播的行波,称为左行波.达朗贝尔公式表明,弦上的任意扰动总是以行波形式分别向两个方向传播出去,其传播速度正好是弦振动方程中的常数  $a$ .基于上述原因,所以本节所用的方法就称为行波法.

从达朗贝尔公式 (3.11) 还可以看出,解在  $(x, t)$  点的数值仅依赖于  $x$  轴上区间  $[x - at, x + at]$  内的初始条件,而与其他点上的初始条件无关.区间  $[x - at, x + at]$  称为点  $(x, t)$  的依赖区间.它是由过  $(x, t)$  点的两条斜率分别为  $\pm \frac{1}{a}$  的直线在  $x$  轴所截得的区间(图 3-2(a)).

对初始轴  $t = 0$  上的一个区间  $[x_1, x_2]$ ,过  $x_1$  点作斜率为  $\frac{1}{a}$  的直线

$x = x_1 + at$ ,过  $x_2$  点作斜率为  $-\frac{1}{a}$

的直线  $x = x_2 - at$ ,它们和区间  $[x_1, x_2]$  一起构成一个三角形区域(图 3-2(b)),此三角形区域中任一点  $(x, t)$  的依赖区间都落在区间  $[x_1, x_2]$  的内部,因此解在此三角形区域中的数值完全由区间  $[x_1, x_2]$  上的初始条件决定,而与此区间外的初始条件无关,这个三角形区域称为区间  $[x_1, x_2]$  的

决定区域,在区间  $[x_1, x_2]$  上给定初始条件,就可以在其决定区域中决定初值问题的解.

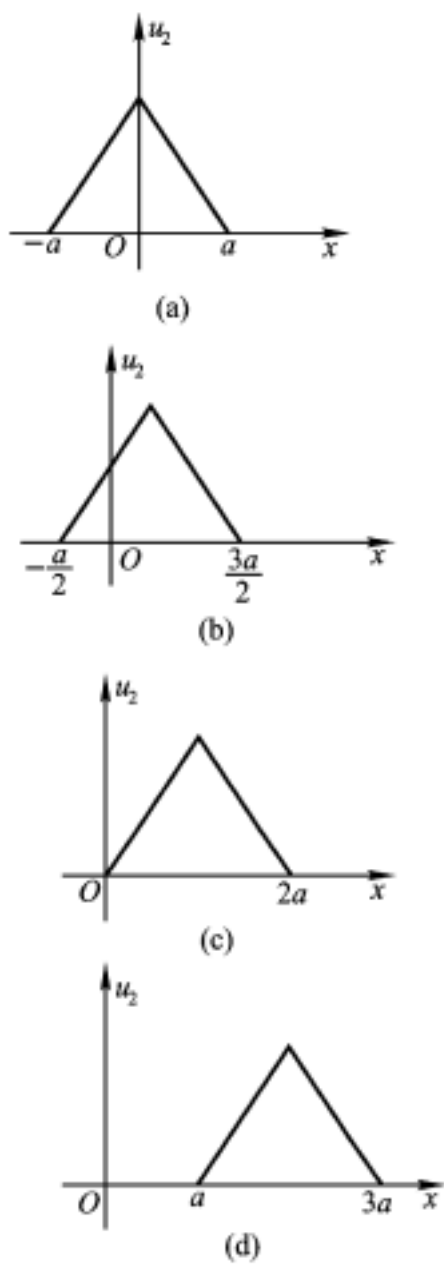


图 3-1

若过点  $x_1, x_2$  分别作直线  $x = x_1 - at, x = x_2 + at$ , 则经过时间  $t$  后受到区间  $[x_1, x_2]$  上初始扰动影响的区域为

$$x_1 - at \leq x \leq x_2 + at \quad (t > 0),$$

在此区域之外的波动则不受  $[x_1, x_2]$  上初始扰动的影响, 称  $x - t$  平面上由上述不等式确定的区域为  $[x_1, x_2]$  的影响区域(如图 3 - 2(c)) .

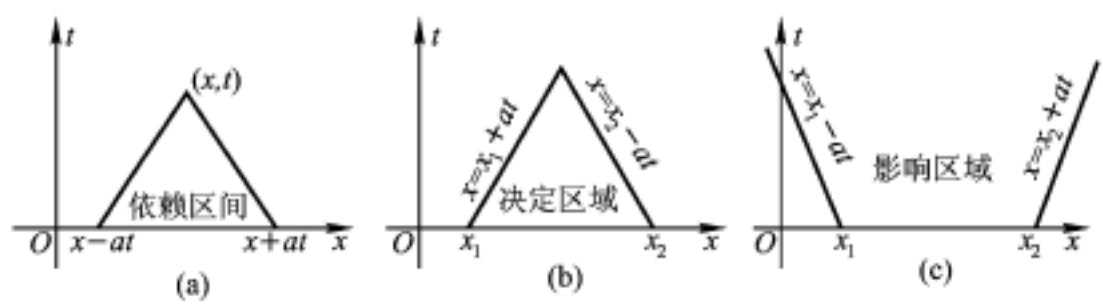


图 3 - 2

从上面的讨论中我们可以看到, 在  $x - t$  平面上斜率为  $\pm \frac{1}{a}$  的两族直线  $x \pm at = \text{常数}$ , 对一维波动方程(3 .1)的研究起着重要的作用, 我们称这两族直线为一维波动方程(3 .1)的特征线. 因为在特征线  $x - at = C_2$  上, 右行波  $u_2 = f_2(x - at)$  的振幅取常数值  $f_2(C_2)$ , 在特征线  $x + at = C_1$  上, 左行波  $u_1 = f_1(x + at)$  的振幅取常数值  $f_1(C_1)$ , 且这两个数值随特征线的移动(即常数  $C_i (i = 1, 2)$  的改变)而改变, 所以, 波动实际上是沿特征线传播的. 变换(3 .2)常称为特征变换, 行波法又称为特征线法 .

注 容易看出, 一维波动方程(3 .1)的两族特征线  $x \pm at = \text{常数}$ , 正好是常微分方程

$$(dx)^2 - a^2 (dt)^2 = 0$$

的积分曲线, 这个常微分方程称为(3 .1)的特征方程. 对于更一般的二阶线性偏微分方程

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0 \quad (3.12)$$

来说,它的特征方程为

$$A(dy)^2 - 2Bdx dy + C(dx)^2 = 0, \quad (3.13)$$

这个常微分方程的积分曲线称为偏微分方程(3.12)的特征曲线. 二阶线性偏微分方程的特征线仅与该方程中的二阶导数项的系数有关,而与其低阶项的系数是无关的.

需要注意的是,并不是任意一个二阶线性偏微分方程(3.12)都有两族实的特征线.例如,若在某一区域内  $B^2 - AC < 0$ ,则过此域内每一点都不存在实的特征线;若在某域内,  $B^2 - AC = 0$ ,则过此域内每一点仅有一条实的特征线;只有在  $B^2 - AC > 0$  的域内,过其中每一点才有两条相异实的特征线.

若在某域内  $B^2 - AC < 0$ ,则在此域内称(3.12)为椭圆型方程,拉普拉斯方程及泊松方程均属于椭圆型;若在某域内  $B^2 - AC = 0$ ,则在此域内称(3.12)为抛物型方程,热传导方程属于抛物型;若在某域内  $B^2 - AC > 0$ ,则在此域内称(3.12)为双曲型方程,波动方程属于双曲型.

不论(3.12)为哪一种类型的方程,都可通过适当的自变量之间的代换将它化简成所谓标准形式.关于如何将二阶线性偏微分方程化成标准形式,我们在这里就不详述了,读者可参阅复旦大学数学系主编《数学物理方程》1979版第四章.下面举一个例子,说明如何通过将方程化简来求解它的定解问题.

例 求下列柯西问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & y > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\begin{cases} u|_{y=0} = 3x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, & -\infty < x < +\infty \end{cases} \quad (3.15)$$

应该注意,上述三种类型的方程并不包括方程(3.12)所有可能的情况,还有这样的方程,它在某个区域的一部分域内是椭圆型的,而在另一部分域内则是双曲型的,这样的方程称为混合型方程.

的解 .

解 先确定所给方程的特征线 .为此, 写出它的特征方程

$$(dy)^2 - 2dx dy - 3(dx)^2 = 0 .$$

它的两族积分曲线为

$$3x - y = C_1 ,$$

$$x + y = C_2 .$$

作特征变换

$$\begin{cases} \xi = 3x - y, \\ \eta = x + y, \end{cases} \quad (3.16)$$

容易验证, 经过变换原方程化成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0 .$$

它的通解为

$$u = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

其中  $f_1, f_2$  是两个任意二次连续可微的函数 .原方程(3.14)的通解为

$$u(x, y) = f_1(3x - y) + f_2(x + y), \quad (3.17)$$

把这个函数代入条件(3.15)得

$$\begin{cases} f_1(3x) + f_2(x) = 3x^2, \\ -f_1(3x) + f_2(x) = 0. \end{cases} \quad (3.18)$$

$$(3.19)$$

从(3.19)得

$$-\frac{1}{3}f_1(3x) + f_2(x) = C, \quad (3.20)$$

从(3.18)与(3.20)可得

$$f_1(3x) = \frac{9}{4}x^2 - C,$$

$$f_2(x) = \frac{3}{4}x^2 + C,$$



$$\text{即} \quad \begin{cases} f_1(x) = \frac{1}{4}x^2 - C, \\ f_2(x) = \frac{3}{4}x^2 + C. \end{cases}$$

代入(3.17)得到所求的解为

$$u(x, y) = \frac{1}{4}(3x - y)^2 + \frac{3}{4}(x + y)^2 = 3x^2 + y^2. \quad (3.21)$$

## § 3.2 三维波动方程的泊松公式

上节我们已经讨论了一维波动方程的始值问题, 获得了达朗贝尔公式. 只研究一维波动方程还不能满足工程技术上的要求, 例如在研究交变电磁场时就要讨论三维波动方程, 本节我们就来考虑在三维无限空间中的波动问题, 即求解下列定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), & -\infty < x, y, z < +\infty, t > 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi_0(x, y, z), \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x, y, z), & -\infty < x, y, z < +\infty. \end{cases} \quad (3.24)$$

这个定解问题仍可用行波法来解, 不过由于坐标变量有三个, 不能直接利用 § 3.1 中所得的通解公式. 下面先考虑一个特例.

### 3.2.1 三维波动方程的球对称解

如果将波函数  $u$  用空间球坐标  $(r, \theta, \varphi)$  来表示, 所谓球对称就是指  $u$  与  $\theta, \varphi$  都无关. 在球坐标系中, 波动方程(3.22)为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

当  $u$  不依赖于  $\theta, \varphi$  时, 这个方程可简化为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

或 
$$r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{r}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} .$$

但 
$$r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} ,$$

所以最后得到方程

$$\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial t^2} .$$

这是关于  $ru$  的一维波动方程,其通解为

$$ru = f_1(r + at) + f_2(r - at),$$

或 
$$u(r, t) = \frac{f_1(r + at) + f_2(r - at)}{r} .$$

这就是三维波动方程的关于原点为球对称的解,其中  $f_1, f_2$  是两个任意二次连续可微的函数,这两个函数可以用指定的初始条件来确定.

### 3.2.2 三维波动方程的泊松公式

现在我们来考虑一般的情况,即要求问题(3.22), (3.23), (3.24)的解.从上面对球对称情况的讨论使我们产生这样一个想法:既然在球对称的情况,函数  $ru(r, t)$  满足一维波动方程,可以求出通解,那么在不是球对称的情况能否设法把方程也化成可以求通解的形式?由于在球对称时波函数  $u$  只是  $r$  与  $t$  的函数,在非球对称时  $u$  不能写成  $r$  与  $t$  的函数,而是  $x, y, z, t$  的函数,所以对非球对称情况,  $ru$  不可能满足一维波动方程.但是,如果我们不去考虑波函数  $u$  本身,而是考虑  $u$  在以  $M(x, y, z)$  为球心,以  $r$  为半径的球面上的平均值,则这个平均值当  $x, y, z$  暂时固定之后就只与  $r, t$  有关了.这就启发我们先引入一个函数  $\bar{u}(r, t)$ ,它是函数  $u(x, y, z, t)$  在以点  $M(x, y, z)$  为中心、以  $r$  为半径的球面  $S_r^M$  上的平均值,即

$$\bar{u}(r, t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r^M} u(x, y, z, t) dS$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} \int_{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1} u(x + rx_1, y + ry_1, z + rz_1, t) d \\
 &= \frac{1}{4} \int_{S_1^0} u(x + rx_1, y + ry_1, z + rz_1, t) d, \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

其中  $x = x + rx_1$ ,  $y = y + ry_1$ ,  $z = z + rz_1$  是球面  $S_r^M$  上点的坐标,  $S_1^0$  是以原点为中心的球面,  $d$  是单位球面上的面积元素,  $dS$  是  $S_r^M$  上的面积元素, 显然有  $dS = r^2 d$ . 在球面坐标系中,  $x_1 = \sin \theta \cos \phi$ ,  $y_1 = \sin \theta \sin \phi$ ,  $z_1 = \cos \theta$ ,  $d = \sin \theta d\theta d\phi$ .

从(3.25)及  $u(x, y, z, t)$  的连续性可知, 当  $r \rightarrow 0$  时,  $\lim_{r \rightarrow 0} \overline{u}(r, t) = u(M, t)$ , 即

$$\overline{u}(0, t) = u(M, t),$$

此处  $u(M, t)$  表示函数  $u$  在  $M$  点及时刻  $t$  的值. 下面来推导  $\overline{u}(r, t)$  所满足的微分方程. 对方程(3.22)的两端在  $S_r^M$  所围成的球体  $V_r^M$  内积分(为了区别  $V_r^M$  内的流动点的坐标与球心  $M$  点的坐标  $(x, y, z)$ , 我们以  $(x, y, z)$  表示  $V_r^M$  内流动点的坐标), 并应用高斯 - 奥斯特洛格拉斯基公式(有时称高斯公式)可得

$$\begin{aligned}
 &\int_{V_r^M} \frac{\Delta u(x, y, z, t)}{t^2} dV = a^2 \int_{V_r^M} \left[ \frac{\Delta u(x, y, z, t)}{x^2} + \frac{\Delta u(x, y, z, t)}{y^2} + \frac{\Delta u(x, y, z, t)}{z^2} \right] dV \\
 &= a^2 \int_{V_r^M} \left[ \frac{1}{x} \left[ \frac{u(x, y, z, t)}{x} \right] + \frac{1}{y} \left[ \frac{u(x, y, z, t)}{y} \right] + \frac{1}{z} \left[ \frac{u(x, y, z, t)}{z} \right] \right] dV \\
 &= a^2 \int_{S_r^M} \frac{u(x, y, z, t)}{n} dS
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^2 \int_{S_1^o} \frac{u(x + rx_1, y + ry_1, z + rz_1, t)}{n} r^2 d\Omega \\
&= a^2 r^2 \int_{S_1^o} \frac{u(x + rx_1, y + ry_1, z + rz_1, t)}{n} d\Omega \\
&= a^2 r^2 \int_{S_1^o} u(x + rx_1, y + ry_1, z + rz_1, t) d\Omega \\
&= 4 a^2 r^2 \frac{u(r, t)}{r}, \tag{3.26}
\end{aligned}$$

其中  $n$  是  $S_r^M$  的外法向矢量.

(3.26) 式左端的积分也采用球面坐标表示并交换微分运算和积分运算的次序, 得

$$\begin{aligned}
&\int_{V_r^M} \frac{u(x, y, z, t)}{t^2} dV = \int_{V_r^M} u(x, y, z, t) dV \\
&= \int_{V_r^M} \frac{1}{t^2} u(x, y, z, t) r^2 dr d\theta d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \frac{1}{t^2} u(x + r \sin \theta \cos \varphi, y + r \sin \theta \sin \varphi, z + r \cos \theta, t) \\
&\quad \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.
\end{aligned}$$

代回(3.26)中得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t^2} \int_{S_1^o} \int_0^r u(x + rx_1, y + ry_1, z + rz_1, t) r^2 dr d\Omega \\
&= 4 a^2 r^2 \frac{u(r, t)}{r}.
\end{aligned}$$

在此式两端对  $r$  微分一次, 并利用变上限定积分对上限求导数的规则, 得

$$\frac{1}{t^2} \int_{S_1^o} u(x + rx_1, y + ry_1, z + rz_1, t) r^2 dr d\Omega$$

$$= 4a^2 \frac{1}{r} \left[ r^2 \frac{\overline{u}(r, t)}{r} \right],$$

或

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ r^2 \frac{\overline{u}(r, t)}{r} \right] = \frac{a^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ r^2 \frac{\overline{u}(r, t)}{r} \right].$$

但

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ r^2 \frac{\overline{u}(r, t)}{r} \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \left( r \frac{\overline{u}(r, t)}{r} \right),$$

故得

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( r \frac{\overline{u}(r, t)}{r} \right) = a^2 \frac{\partial}{\partial t} \left( r \frac{\overline{u}(r, t)}{r} \right).$$

这是一个关于  $r \frac{\overline{u}(r, t)}{r}$  的一维波动方程, 它的通解为

$$r \frac{\overline{u}(r, t)}{r} = f_1(r + at) + f_2(r - at), \quad (3.27)$$

其中  $f_1, f_2$  是两个二次连续可微的任意函数.

下面的任务是要从(3.27)及(3.23), (3.24)来确定原柯西问题的解  $u(M, t)$ . 由(3.27)得到

$$f_1(r) + f_2(r) = r \frac{\overline{u}(r, t)}{r} \Big|_{t=0},$$

$$af_1(r) - af_2(r) = \frac{\partial}{\partial t} \left( r \frac{\overline{u}(r, t)}{r} \right) \Big|_{t=0}.$$

但

$$r \frac{\overline{u}(r, t)}{r} \Big|_{t=0} = \overline{r}_0(r),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( r \frac{\overline{u}(r, t)}{r} \right) \Big|_{t=0} = \overline{r}_1(r),$$

其中  $\overline{r}_0(r), \overline{r}_1(r)$  分别是  $\overline{u}_0(x, y, z)$  与  $\overline{u}_1(x, y, z)$  在球面  $S_r^M$  上的平均值. 所以, 可得

$$f_1(r) + f_2(r) = \overline{r}_0(r), \quad (3.28)$$

$$f_1(r) - f_2(r) = \frac{r}{a} \overline{r}_1(r). \quad (3.29)$$

由此可解得

$$f_1(r) = \frac{1}{2} \left[ \overline{r}_0(r) + \frac{1}{a} \int_0^r \overline{r}_1(\rho) d\rho + C \right],$$

$$f_2(r) = \frac{1}{2} \left[ \overline{r}_0(r) - \frac{1}{a} \int_0^r \overline{r}_1(\rho) d\rho - C \right],$$

代回到(3.27)得

$$\begin{aligned} \bar{u}(r, t) = & \frac{(\bar{r} + at) \bar{u}_0(\bar{r} + at) + (\bar{r} - at) \bar{u}_0(\bar{r} - at)}{2r} \\ & + \frac{1}{2ar} \int_{\bar{r}-at}^{\bar{r}+at} \bar{u}_1(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (3.30)$$

此外,还可利用

$$\begin{aligned} \bar{u}(\bar{r}, t) &= \frac{1}{4} \int_{\substack{\bar{r}_1^2 + \bar{r}_2^2 + \bar{r}_3^2 = 1 \\ \bar{z} + r(\bar{r}_3), t}} u(x + r\bar{r}_1, y + r\bar{r}_2, z + r\bar{r}_3, t) d\bar{r}_1 d\bar{r}_2 d\bar{r}_3 \\ &= \frac{1}{4} \int_{\substack{\bar{r}_1^2 + \bar{r}_2^2 + \bar{r}_3^2 = 1}} u(x + r\bar{r}_1, y + r\bar{r}_2, z + r\bar{r}_3, t) d\bar{r}_1 d\bar{r}_2 d\bar{r}_3. \end{aligned}$$

将  $\bar{u}(r, t)$  推广到  $r < 0$  的范围内,并且比较上面两式可知

$$\bar{u}(-r, t) = \bar{u}(r, t),$$

即  $\bar{u}(r, t)$  是  $r$  的偶函数.同理,  $\bar{u}_0(r)$  与  $\bar{u}_1(r)$  也是偶函数.注意到这些事实后,我们可将(3.30)写成

$$\begin{aligned} \bar{u}(r, t) = & \frac{(\bar{r} + at) \bar{u}_0(\bar{r} + at) + (\bar{r} - at) \bar{u}_0(\bar{r} - at)}{2r} \\ & + \frac{1}{2ar} \int_{\bar{r}-at}^{\bar{r}+at} \bar{u}_1(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

令  $r \rightarrow 0$ , 并利用洛必达(L'Hospital)法则得到

$$\begin{aligned} \bar{u}(0, t) &= \bar{u}_0(at) + at \bar{u}_0'(at) + t \bar{u}_1(at) \\ &= \frac{1}{a} \frac{d}{dt} [(at) \bar{u}_0(at)] + t \bar{u}_1(at) \\ &= \frac{1}{4a} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\bar{u}_0(x + at \sin \theta \cos \phi, y + at \sin \theta \sin \phi, z + at \cos \theta)}{at} \\ &\quad \cdot (at)^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &\quad + \frac{t}{4} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\bar{u}_1(x + at \sin \theta \cos \phi, y + at \sin \theta \sin \phi, z + at \cos \theta)}{(at)^2} \\ &\quad \cdot (at)^2 \sin \theta d\theta d\phi, \end{aligned}$$

或简记成

$$u(M, t) = \frac{1}{4a} \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{at}^M} \varphi_0 dS + \frac{1}{4a} \frac{1}{at} \int_{S_{at}^M} \varphi_1 dS. \quad (3.31)$$

(3.31) 式称为三维波动方程的泊松公式. 不难验证, 当  $\varphi_0(x, y, z)$  是三次连续可微的函数,  $\varphi_1(x, y, z)$  是二次连续可微的函数时, 由 (3.31) 所确定的函数确实是原定解问题的解.

下面举一个例子, 说明泊松公式 (3.31) 的用法.

例 设已知  $\varphi_0(x, y, z) = x + y + z$ ,  $\varphi_1(x, y, z) = 0$ , 求方程 (3.22) 相应柯西问题的解.

解 将给定的初始条件  $\varphi_0(x, y, z)$  与  $\varphi_1(x, y, z)$  代入 (3.31), 得到所要求的解为

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \frac{1}{4a} \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \int_{S_{at}^M} (x + y + z + at(\sin^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta)) d\Omega \\ &= \frac{1}{4a} \frac{1}{t} \left[ at(x + y + z) \int_{S_{at}^M} d\Omega \sin^2 \theta \right. \\ &\quad + a^2 t^2 \int_{S_{at}^M} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d\Omega \sin^2 \theta \\ &\quad \left. + a^2 t^2 \int_{S_{at}^M} d\Omega \sin \theta \cos \theta \right] \\ &= x + y + z. \end{aligned}$$

### 3.2.3 泊松公式的物理意义

下面我们来说明解 (3.31) 的物理意义.

从 (3.31) 式可以看出, 为求出定解问题 (3.22), (3.23), (3.24) 的解在  $(x, y, z, t)$  处的值, 只需要以  $M(x, y, z)$  为球心、以  $at$  为半径作出球面  $S_{at}^M$ , 然后将初始扰动  $\varphi_0, \varphi_1$  代入 (3.31) 式进行积分. 因为积分只在球面上进行, 所以只有与  $M$  相距为  $at$  的点上的初始扰动能够影响  $u(x, y, z, t)$  的值. 或者, 换一种说法, 就是

$M_0( , , )$ 处的初始扰动,在时刻  $t$  只影响到以  $M_0$  为球心,以  $at$  为半径的球面  $S_{at}^{M_0}$  上各点,这是因为以  $S_{at}^M$  上任一点为球心,以  $at$  为半径所作的球面都必定经过  $M_0$  点.这就表明扰动是以速度  $a$  传播的.为了明确起见,设初始扰动只限于区域  $T_0$ ,任取一点  $M$ ,它与  $T_0$  的最小距离为  $d$ ,最大距离为

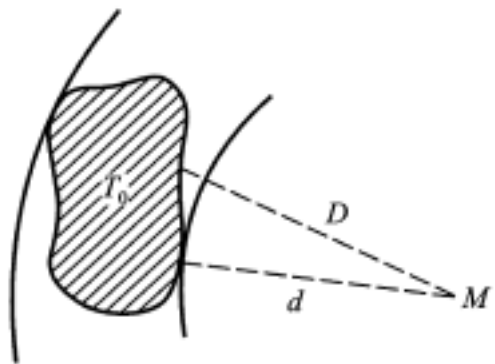


图 3 - 3

$D$ (图 3 - 3),由泊松公式(3.31)可知,当  $at < d$ ,即  $t < \frac{d}{a}$ 时,  $u(x, y, z, t) = 0$ ,这表明扰动的“前锋”还未到达;当  $d < at < D$ ,即  $\frac{d}{a} < t < \frac{D}{a}$ 时,  $u(x, y, z, t) \neq 0$ ,这表明扰动已经到达;当  $at > D$ ,即  $t > \frac{D}{a}$ 时,  $u(x, y, z, t) = 0$ ,这表明扰动的“阵尾”已经过去并恢复了原来的状态.因此,当初始扰动限制在空间某局部范围内时,扰动有清晰的“前锋”与“阵尾”,这种现象在物理学中称为惠更斯(Huygens)原理或无后效现象.由于在点  $( , , )$ 的初始扰动是向各方向传播的,在时间  $t$  它的影响是在以  $( , , )$ 为中心,  $at$  为半径的一个球面上,因此解(3.31)称为球面波.

从(3.31)我们也可以得到二维波动方程始值问题的解.事实上如果  $u$  与  $z$  无关,则  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ ,这时三维波动方程的始值问题就变成二维波动方程的始值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right], & -\infty < x, y < +\infty, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_1(x, y), & -\infty < x, y < +\infty, \end{cases} \tag{3.32}$$



要想从泊松公式 (3.31) 得到问题 (3.32) 解的表达式, 就应将 (3.31) 中两个沿球面  $S_{at}^M$  的积分转化成沿圆域  $C_{at}^M$ ;  $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq (at)^2$  内的积分, 下面以  $\frac{1}{4a} \frac{1}{at} dS$  为例说明这个转化方法. 先将这个积分拆成两部分:

$$\frac{1}{4a} \frac{1}{at} dS = \frac{1}{4a} \frac{1}{at} dS_{S_1} + \frac{1}{4a} \frac{1}{at} dS_{S_2}, \quad (3.33)$$

其中  $S_1, S_2$  分别表示球面  $S_{at}^M$  的上半球面与下半球面.

由于被积函数不依赖于变量  $z$ , 所以 (3.33) 右端两个积分是相等的, 即

$$\frac{1}{4a} \frac{1}{at} dS_{S_1} = \frac{1}{2a} \frac{1}{at} dS_{S_1}.$$

把右端的曲面积分化成二重积分可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4a} \frac{1}{at} dS_{S_1} \\ &= \frac{1}{2a} \frac{1}{at} \frac{at}{\sqrt{a^2 t^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}} d\sigma \\ &= \frac{1}{2a} \frac{1}{\sqrt{a^2 t^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}} d\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{同理有 } & \frac{1}{4a} \frac{1}{at} dS_{S_2} \\ &= \frac{1}{2a} \frac{1}{\sqrt{a^2 t^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}} d\sigma. \end{aligned}$$

将这两个等式代入 (3.31), 即得问题 (3.32) 的解为

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2a} \left\{ -\frac{1}{t} \frac{1}{\sqrt{a^2 t^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}} d\sigma \right.$$

$$+ \left. \frac{1}{\sqrt{a^2 t^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}} \frac{\partial}{\partial t} \right\} . \tag{3.34}$$

从(3.34)可以看出,要计算这个解在 $(x,y,t)$ 处的值,只要以 $M(x,y)$ 为中心、以 $at$ 为半径作圆域 $C_{at}^M$ ,然后将初始扰动代入(3.34)进行积分.为清楚起见,设初始扰动仍限于区域 $T_0$ ,并且 $d,D$ 分别表示点 $M(x,y)$ 与 $T_0$ 的最小和最大距离,则当 $t < \frac{d}{a}$ 时, $u(x,y,t) = 0$ ;当 $\frac{d}{a} < t < \frac{D}{a}$ 时, $u(x,y,t) \neq 0$ ;当 $t > \frac{D}{a}$ 时,由于圆域 $C_{at}^M$ 包含了区域 $T_0$ ,所以 $u(x,y,t)$ 仍不为零,这种现象称为有后效,即在二维情形,局部范围内的初始扰动,具有长期的连续的后效特性,扰动有清晰的“前锋”,而无“阵尾”,这一点与球面波不同.

平面上以点 $(x_0,y_0)$ 为中心的圆周的方程 $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$ 在空间坐标系内表示母线平行于 $z$ 轴的直圆柱面,所以在过 $(x_0,y_0)$ 点平行于 $z$ 轴的无限长的直线上的初始扰动,在时间 $t$ 后的影响是在以该直线为轴, $at$ 为半径的圆柱面内,因此解(3.34)称为柱面波.

§ 3.3 积分变换法举例

我们都知道,傅里叶变换与拉普拉斯变换可以用来解常微分方程.通过取积分变换可将未知函数的常微分方程化成象函数的代数方程,达到了消去对自变量求导数运算的目的.基于这一事实,我们自然会想到积分变换也能用于解偏微分方程,在偏微分方程两端对某个变量取变换就能消去未知函数对该自变量求偏导数的运算,得到象函数的较为简单的微分方程.如果原来的偏微分方程中只包含有两个自变量,通过一次变换就能得到象函数的常微分方程.下面通过例题来说明用积分变换法解定解问题的一般步

骤.

### 例 1 无界杆上的热传导问题

设有一根无限长的杆,杆上具有强度为  $F(x, t)$  的热源,杆的初始温度为  $\varphi(x)$ ,试求  $t > 0$  时杆上温度的分布规律.

解 这个问题可归结为求解下列定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & -\infty < x < +\infty, t > 0, \end{cases} \quad (3.35)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (3.36)$$

其中  $f(x, t) = \frac{1}{c} F(x, t)$ .

由于方程(3.35)是非齐次的,且求解的区域又是无界的,因此用分离变量法来解将导致比较复杂的运算.现在我们用傅里叶变换来解.用记号  $U(\xi, t)$ ,  $G(\xi, t)$  分别表示函数  $u(x, t)$ ,  $f(x, t)$  关于变量  $x$  的傅里叶变换,即

$$U(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-j\xi x} dx,$$

$$G(\xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) e^{-j\xi x} dx.$$

对方程(3.35)的两端取关于  $x$  的傅里叶变换,根据傅里叶变换的微分性质,得到

$$\frac{dU(\xi, t)}{dt} = -a^2 \xi^2 U(\xi, t) + G(\xi, t). \quad (3.37)$$

这是一个含参量  $\xi$  的常微分方程.为了导出方程(3.37)的定解条件,对条件(3.36)式的两端也取傅里叶变换,并且以  $U(\xi, 0)$  表示  $\varphi(x)$  的傅里叶变换,得

$$U(\xi, t)|_{t=0} = U(\xi, 0). \quad (3.38)$$

方程(3.37)是一阶线性常微分方程,它满足初始条件(3.38)的解为

$$U(\xi, t) = U(\xi, 0) e^{-a^2 \xi^2 t} + \int_0^t G(\xi, \tau) e^{-a^2 \xi^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (3.39)$$

为了求出原定解问题 (3.35), (3.36) 的解  $u(x, t)$ , 还需要对  $U(\xi, t)$  取傅里叶逆变换. 由傅里叶变换表可查得

$$F^{-1} [e^{-\frac{a^2}{4} \xi^2 t}] = \frac{1}{2a\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}.$$

再根据傅里叶变换的卷积性质得

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F^{-1} [U(\xi, t)] \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2a\sqrt{t}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \tau)}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi. \end{aligned} \quad (3.40)$$

这样就得到原定解问题的解.

通过这个例子可以看出, 用积分变换法解定解问题的过程大体为:

一、根据自变量的变化范围以及定解条件的具体情况, 选取适当的积分变换. 然后对方程的两端取变换, 把一个含两个自变量的偏微分方程化为含一个参量的常微分方程.

二、对定解条件取相应的变换, 导出新方程的定解条件.

三、解所得的常微分方程, 求得原定解问题解的变换式(即象函数).

四、对所得的变换式取逆变换, 得到原定解问题的解.

当然, 在用傅里叶(或拉普拉斯)变换解定解问题时, 是假定所求的解及定解条件中的已知函数都是能够取傅里叶(或拉普拉斯)变换的, 即假定它们的傅里叶(或拉普拉斯)变换都存在. 一个未知函数当它未求出以前是很难判断它是否存在傅里叶(或拉普拉斯)变换的, 所以, 在未作综合工作之前, 用积分变换法所求的解都只是形式解.

例 2 一条半无限长的杆, 端点温度变化情况为已知, 杆的初始温度为 0, 求杆上温度的分布规律.

解 这个问题可归结为求解下列定解问题:

$$\begin{cases} \frac{u}{t} = a^2 \frac{u}{x^2}, x > 0, t > 0, \end{cases} \quad (3.41)$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = 0, x > 0, \end{cases} \quad (3.42)$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = f(t), t > 0. \end{cases} \quad (3.43)$$

这个问题显然不能用傅里叶变换来解了,因为  $x, t$  的变化范围都是  $(0, +\infty)$ . 下面我们用拉普拉斯变换来解. 从  $x, t$  的变化范围来看,对  $x$  与  $t$  都能取拉普拉斯变换,但由于方程(3.41)中包含有  $\frac{u}{x^2}$ ,而在  $x=0$  处未给出  $\frac{u}{x}$  的值,故不能对  $x$  取拉普拉斯变换. 而对  $t$  来说,由于方程(3.41)中只出现关于  $t$  的一阶偏导数,只要知道当  $t=0$  时  $u$  的值就够了,这个值已由(3.42)给出,故我们采用关于  $t$  的拉普拉斯变换.

用  $U(x, p), F(p)$  分别表示函数  $u(x, t), f(x)$  关于  $t$  的拉普拉斯变换,即

$$U(x, p) = \int_0^\infty u(x, t) e^{-pt} dt,$$

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt.$$

首先,对方程(3.41)的两端取拉普拉斯变换,并利用条件(3.42)则得到新方程

$$\frac{d^2 U(x, p)}{dx^2} - \frac{p}{a^2} U(x, p) = 0. \quad (3.44)$$

再对条件(3.43)取同样变换,得

$$U(x, p)|_{x=0} = F(p). \quad (3.45)$$

方程(3.44)是关于  $U(x, p)$  的线性二阶常系数的常微分方程,它的通解为

$$U(x, p) = C_1 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}, \quad (3.46)$$

由于当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $u(x, t)$  应该有界,所以  $U(x, p)$  也应该有界,故  $C_2 = 0$ . 再由条件(3.45)得  $C_1 = F(p)$ , 从而得

$$U(x, p) = F(p) e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} x}.$$

为了求得原定解问题的解  $u(x, t)$ , 需要对  $U(x, p)$  求拉普拉斯逆变换, 由拉普拉斯变换表查得

$$L^{-1} \left[ \frac{1}{p} e^{-\frac{x}{a} \sqrt{p}} \right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-y^2} dy.$$

再根据拉普拉斯变换的微分性质可得

$$\begin{aligned} L^{-1} \left[ e^{-\frac{x}{a} \sqrt{p}} \right] &= L^{-1} \left[ p \cdot \frac{1}{p} e^{-\frac{x}{a} \sqrt{p}} \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-y^2} dy \right] \\ &= \frac{x}{2a\sqrt{t^3}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}. \end{aligned}$$

最后由拉普拉斯变换的卷积性质得

$$\begin{aligned} u(x, t) &= L^{-1} \left[ F(p) e^{-\frac{x}{a} \sqrt{p}} \right] \\ &= \frac{x}{2a\sqrt{t}} \int_0^t f(\tau) \frac{1}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau. \quad (3.47) \end{aligned}$$

这便是所要求的解.

通过上面两个例子我们对用积分变换法解定解问题的步骤已有所了解, 掌握这些步骤并不困难, 对初学者来说, 使用这个方法时主要困难在于:

(1) 如何选取恰当的积分变换. 对这个问题应从两方面来考虑, 首先要注意自变量的变化范围, 傅里叶变换要求作变换的自变量在  $(-\infty, +\infty)$  内变化, 拉普拉斯变换要求作变换的自变量在

如果采用正弦或余弦傅里叶变换, 自变量的变化范围就是  $(0, +\infty)$ . 关于用正弦或余弦傅里叶变换解数学物理方程, 读者可参阅 C.J. 特兰台尔著《数学物理中的积分变换》(潘德惠译, 高等教育出版社出版) 第三章.

$(0, +\infty)$  内变化. 其次要注意定解条件的形式, 根据拉普拉斯变换的微分性质

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n L[f(t)] - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

可以看出, 要对某自变量取拉普拉斯变换, 必须在定解条件中给出当该自变量等于零时的函数值及有关导数值.

(2) 定解条件中哪些需要取变换, 哪些不需要取变换. 这个问题容易解决, 凡是对方程取变换时没有用到的条件都要对它取变换, 使它转化为新方程的定解条件.

(3) 如何顺利地求出逆变换. 解决这个问题主要是依靠积分变换表(见附录 B), 以及运用积分变换的有关性质, 有时还要用到计算反演积分的留数定理.

注 从例 1 中解的表达式(3.40)及例 2 中解的表达式(3.47)可以看出: 函数  $\frac{1}{2a\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$  对热传导方程的初值问题起着重要的作用, 令

$$K(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2a\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}, & t > 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases} \quad (3.48)$$

利用  $K(x, t)$ , 则(3.40)可以表示为

$$u(x, t) = \int_0^x K(x-\xi, t) f(\xi) d\xi + \int_0^t K(x, t-\tau) f(\tau) d\tau. \quad (3.49)$$

人们通常称(3.49)为 Poisson 公式, 称函数  $G(x, t; \xi, \tau) = K(x-\xi, t-\tau)$  为热传导方程的基本解. 基本解有明确的物理意义, 它表示在杆上  $\xi$  处时刻  $\tau$  的一个瞬时单位热源所引起的杆上的温度分

还有一种双边的拉普拉斯变换, 它的积分区间是  $(-\infty, +\infty)$ . 本书所讲的拉普拉斯变换都限于单边的.

布,有时也将基本解称为瞬时单位点热源的影响函数.

对于高维热传导方程也可以引入基本解的概念,以三维问题为例,令

$$K(x, y, z, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{3/2}} e^{-\frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{4a^2 t}}, & t > 0 \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

则三维热传导方程的基本解就是  $(x, y, z, t; \xi, \eta, \zeta) = K(x - \xi, y - \eta, z - \zeta, t)$ . 利用  $K(x, y, z, t)$  可以将下列问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + f(x, y, z, t), & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, t > 0, \\ u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), & (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

的解表示成

$$u(x, y, z, t) = \int_{\mathbb{R}^3} K(x - \xi, y - \eta, z - \zeta, t) \varphi(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} K(x - \xi, y - \eta, z - \zeta, t - \tau) f(\xi, \eta, \zeta, \tau) d\xi d\eta d\zeta d\tau.$$

**例 3** 设有一长为  $l$  的均匀杆,其一端固定,另一端由静止状态开始受力  $F = A \sin \omega t$  的作用,力  $F$  的方向和杆的轴线一致,求杆作纵振动的规律.

**解** 由习题一中第 3 题可知,杆作纵振动的方程与弦作横振动的方程完全相同,因此这个问题可归结为如下的定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, t > 0, \end{cases} \quad (3.48)$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, & 0 \leq x \leq l, \end{cases} \quad (3.49)$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = \frac{A}{E} \sin \omega t, & t > 0, \end{cases} \quad (3.50)$$

其中  $E$  为杨氏模量.

下面用积分变换法求这个定解问题的解.由于  $x$  的变化范围



是  $0 < x < l$ , 所以只能取关于  $t$  的拉普拉斯变换. 以  $U(x, p)$  表示函数  $u(x, t)$  关于  $t$  的拉普拉斯变换, 在方程 (3.48) 两端取变换得

$$a^2 \frac{d^2 U(x, p)}{dx^2} = p^2 U(x, p). \quad (3.51)$$

在推导方程 (3.51) 时还未用到条件 (3.50), 为了导出方程 (3.51) 的定解条件, 对条件 (3.50) 取相应的变换, 得

$$U(x, p) \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{dU(x, p)}{dx} \Big|_{x=l} = \frac{A}{E} \frac{1}{p^2 + \omega^2}, \quad (3.52)$$

方程 (3.51) 满足条件 (3.52) 的解为

$$U(x, p) = \frac{Aa \operatorname{sh} \frac{p}{a} x}{Ep(p^2 + \omega^2) \operatorname{ch} \frac{p}{a} l}, \quad (3.53)$$

求 (3.53) 的逆变换, 即得原定解问题的解

$$\begin{aligned} u(x, t) &= L^{-1} \left[ \frac{Aa \operatorname{sh} \frac{p}{a} x}{Ep(p^2 + \omega^2) \operatorname{ch} \frac{p}{a} l} \right] \\ &= \sum_i \operatorname{Res}_{p=p_i} \left[ \frac{Aa \operatorname{sh} \frac{p}{a} x}{Ep(p^2 + \omega^2) \operatorname{ch} \frac{p}{a} l} e^{pt} \right], \end{aligned}$$

$p_i$  是  $U(x, p)$  的极点,  $\operatorname{Res}_{p=p_i} [ ]$  表示方括号内函数在  $p_i$  处的留数.

由于  $U(x, p)$  的极点是使

$$p(p^2 + \omega^2) \operatorname{ch} \frac{p}{a} l = 0$$

的点, 这些点是

$$p = 0, \pm j\omega, \pm j\omega \left[ k - \frac{1}{2} \right] \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

由于这些极点  $p_i$  都是一阶的, 所以  $u(x, t)$  还可以表示为

$$u(x, t) = \sum_i \left[ \frac{Aa \operatorname{sh} \frac{p}{a} x}{Ep(p^2 + \omega^2) \operatorname{ch} \frac{p}{a} l} \right] e^{pt} \Big|_{p=p_i}$$

$$= \frac{Aa}{E} \sum_i \frac{e^{p_i t} \operatorname{sh} \frac{p_i}{a} x}{(p_i^2 + \omega^2) \operatorname{ch} \frac{p_i}{a} l + 2p_i^2 \operatorname{ch} \frac{p_i}{a} l + p_i(p_i^2 + \omega^2) \frac{l}{a} \operatorname{sh} \frac{p_i}{a} l}.$$

记

$$F(p_i, x, t) = \frac{e^{p_i t} \operatorname{sh} \frac{p_i}{a} x}{(p_i^2 + \omega^2) \operatorname{ch} \frac{p_i}{a} l + 2p_i^2 \operatorname{ch} \frac{p_i}{a} l + \frac{l}{a} p_i (p_i^2 + \omega^2) \operatorname{sh} \frac{p_i}{a} l},$$

则

$$u(x, t) = \frac{Aa}{E} \sum_i F(p_i, x, t).$$

而

$$F(0, x, t) = 0,$$

$$F(j, x, t) = \frac{e^{j t} \operatorname{sh} \frac{j}{a} x}{2(j^2 + \omega^2) \operatorname{ch} \frac{j}{a} l} = -\frac{j \sin \frac{x}{a}}{2 \omega^2 \cos \frac{x}{a} l} e^{j t},$$

$$F(-j, x, t) = \frac{j \sin \frac{x}{a}}{2 \omega^2 \cos \frac{x}{a} l} e^{-j t},$$

$$F\left[j \frac{a}{l} \left(k - \frac{1}{2}\right), x, t\right]$$

$$= \frac{e^{j \frac{(2k-1)a}{2l} t} \operatorname{sh} \frac{j(2k-1)}{2l} x}{j \frac{(2k-1)a}{2l} \left[ \omega^2 - \frac{(2k-1)^2 a^2 \omega^2}{4l^2} \right] \frac{l}{a} \operatorname{sh} \frac{j(2k-1)}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(-1)^k j 8 l^2 \sin \frac{(2k-1)x}{2l}}{(2k-1) [4l^2 - (2k-1)^2 a^2]} e^{j \frac{(2k-1)a}{2l} t}, \\
 &F \left[ -j \frac{a}{l} \left[ k - \frac{1}{2} \right], x, t \right] \\
 &= \frac{(-1)^{k-1} j 8 l^2 \sin \frac{(2k-1)x}{2l}}{(2k-1) [4l^2 - (2k-1)^2 a^2]} e^{-j \frac{(2k-1)a}{2l} t}.
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{Aa}{E} \frac{1}{\cos \frac{l}{a}} \sin \frac{t \sin \frac{x}{a}}{a} \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{16a A l^2}{E} \frac{\sin \frac{(2k-1)x}{2l} \sin \frac{(2k-1)a}{2l} t}{(2k-1) [4l^2 - a^2 (2k-1)^2]},
 \end{aligned} \quad (3.54)$$

这就是所要求的解。

这个定解问题当然也可以用分离变量法求解, 如果用分离变量法解, 需要先将边界条件化成齐次的, 但是用积分变换法来解不必先做这一步工作. 即使是在最复杂的情况——方程及边界条件都是非齐次的, 也可直接使用积分变换法, 这是积分变换法的一个优点。

## 习 题 三

### 1. 求方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y, \quad x > 1, y > 0,$$

满足边界条件

$$u|_{y=0} = x^2, \quad u|_{x=1} = \cos y$$

的解。

### 2. 求解下列定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t \sin x, & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, & -\infty < x < +\infty \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \sin x, & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

[说明:这个问题除了直接用积分变换法求解以外,也可以用下述方法来解. 先将原问题分解成下列两个问题:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \sin x. \end{cases} \\ (2) \quad & \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t \sin x, & -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u|_{t=0} = 0, \\ \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

对于(1),先求

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, t > 0, & -\infty < x < +\infty, \\ W|_{t=0} = 0, \\ \left. \frac{\partial W}{\partial t} \right|_{t=0} = \sin x \end{cases} \quad -\infty < x < +\infty,$$

的解  $W(x, t; )$  然后将  $W(x, t; )$  对  $x$  积分得

$$u(x, t) = \int_0^t W(x, t; \tau) d\tau,$$

这就是问题(1)的解 这种求解问题(1)的方法,称为齐次化原理,它能用于解非齐次波动方程的柯西问题.]

### 3. 证明傅里叶变换的卷积定理

$$F^{-1}[F_1(\omega) F_2(\omega)] = f_1(t) * f_2(t),$$

其中

$$f_1(t) = F^{-1}[F_1(\omega)], f_2(t) = F^{-1}[F_2(\omega)],$$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau.$$

$$4. \text{证明 } F^{-1}[e^{-a^2 \omega^2 t}] = \frac{1}{2a\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}.$$

5. 用积分变换法解下列问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1, x > 0, y > 0, \\ u|_{x=0} = y + 1, y > 0, \\ u|_{y=0} = 1, x > 0. \end{cases}$$

6. 求上半平面内静电场的电位, 即解下列定解问题

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0, y > 0, -\infty < x < +\infty, \\ u|_{y=0} = f(x), -\infty < x < +\infty, \\ \lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} u = 0. \end{cases}$$

7. 用积分变换法解下列定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0, 0 < x < l, \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = u_1, t > 0. \end{cases}$$

8. 用积分变换法求解下列定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

9. 求解下列初值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{xt}{(1+x^2)^2}, -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{1+x^2}, -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

10. 求下列 Goursat 问题的解:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, -t < x < t, t > 0, \\ u|_{t=-x} = \varphi(x), x < 0, \\ u|_{t=x} = \psi(x), x > 0, \end{cases}$$

其中  $\varphi(0) = \psi(0)$ .

# 第四章 拉普拉斯方程的格林函数法

在第二、三两章,我们较系统地介绍了求解数学物理方程的三种常用方法——分离变量法、行波法与积分变换法,本章我们来介绍拉普拉斯方程的格林函数法.先讨论此方程解的一些重要性质,再建立格林函数的概念,然后通过格林函数建立拉普拉斯方程第一边值问题解的积分表达式.

## § 4.1 拉普拉斯方程边值问题的提法

在第一章,我们已从无源静电场的电位分布及稳恒温度场的温度分布两个问题推导出了三维拉普拉斯方程

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

作为描述稳定和平衡等物理现象的拉普拉斯方程,它不能提初始条件.至于边界条件,如第一章所述有三种类型,应用得较多的是如下两种边值问题.

(1) 第一边值问题 在空间  $(x, y, z)$  中某一区域  $\Omega$  的边界  $\Gamma$  上给定了连续函数  $f$ , 要求这样一个函数  $u(x, y, z)$ , 它在闭域  $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$  (或记作  $\overline{\Omega}$ ) 上连续, 在  $\Omega$  内有二阶连续偏导数 且满足拉普拉斯方程, 在  $\Gamma$  上与已知函数  $f$  相重合, 即

$$u|_{\Gamma} = f. \tag{4.1}$$

第一边值问题也称为狄利克莱(Dirichlet)问题, 或简称狄氏问题,

---

这里关于函数  $u$  的光滑性假设, 可简记成

$$u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega).$$

§ 2.3 中所讨论过的问题就是圆域内的狄氏问题.

拉普拉斯方程的连续解,也就是说,具有二阶连续偏导数并且满足拉普拉斯方程的连续函数,称为调和函数.所以,狄氏问题也可以换一种说法:在区域  $D$  内找一个调和函数,它在边界  $\Gamma$  上的值为已知.

(2) 第二边值问题 在某光滑的闭曲面  $S$  上给出连续函数  $f$ ,要求寻找这样一个函数  $u(x, y, z)$ ,它在  $S$  内部的区域  $V$  中是调和函数,在  $S$  上连续,在  $S$  上任一点处法向导数  $\frac{\partial u}{\partial n}$  存在,并且等于已知函数  $f$  在该点的值:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = f, \quad (4.2)$$

这里  $n$  是  $S$  的外法向矢量.

第二边值问题也称牛曼(Neumann)问题.

以上两个边值问题都是在边界  $\Gamma$  上给定某些边界条件,在区域内部求拉普拉斯方程的解,这样的问题称为内问题.

在应用中我们还会遇到狄氏问题和牛曼问题的另一种提法.例如,当确定某物体外部的稳恒温度场时,就归结为在区域  $V$  的外部求调和函数  $u$ ,使满足边界条件  $u|_{\Gamma} = f$ ,这里  $\Gamma$  是  $V$  的边界, $f$  表示物体表面的温度分布.像这样的定解问题称为拉普拉斯方程的外问题.

由于拉普拉斯方程的外问题是在无穷区域上给出的,定解问题的解是否应加以一定的限制?基于在电学上总是假定在无穷远

处的电位为零,所以在外问题中常常要求附加如下条件:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(x, y, z) = 0 \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}). \quad (4.3)$$

(3) 狄氏外问题 在空间  $(x, y, z)$  的某一闭曲面  $S$  上给定连续函数  $f$ , 要找出这样一个函数  $u(x, y, z)$ , 它在  $S$  的外部区域内调和, 在  $S$  上连续, 当点  $(x, y, z)$  趋于无穷远时,  $u(x, y, z)$  满足条件(4.3), 并且它在边界  $S$  上取所给的函数值

$$u|_S = f. \quad (4.4)$$

(4) 牛曼外问题 在光滑的闭曲面  $S$  上给定连续函数  $f$ , 要找出这样一个函数  $u(x, y, z)$ , 它在闭曲面  $S$  的外部区域内调和, 在  $S$  上连续, 在无穷远处满足条件(4.3), 而且它在  $S$  上任一点的法向导数  $\frac{\partial u}{\partial n}$  存在, 并满足

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = f, \quad (4.5)$$

这里  $n$  是边界曲面  $S$  的内法向矢量.

下面我们重点讨论内问题, 所用的方法也可以用于外问题.

## § 4.2 格林公式

为了建立拉普拉斯方程解的积分表达式, 需要先推导出格林公式, 而格林公式则是曲面积分中高斯公式的直接推论.

设  $V$  是以足够光滑的曲面  $S$  为边界的有界区域,  $P(x, y,$

从数学角度讲, 补充了这个条件就能保证外问题的解是惟一的. 如果不具有这个条件, 外问题的解可能不惟一, 例如, 在单位球面  $S$  外求调和函数, 在边界上满足  $u|_S = 1$ . 容易看出,  $u_1(x, y, z) = 1$  及  $u_2(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  都在单位球外满足拉普拉斯方程, 并且在单位球面  $S$  上满足上述边界条件.

需要注意的是, 对于二维拉普拉斯方程来说, 它的外问题中所加的在无穷远点的条件可改为: 当  $r \rightarrow \infty$  时,  $|u(x, y)|$  有界.



$z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  是在  $\Omega$  上连续的, 在  $\Omega$  内具有一阶连续偏导数的任意函数, 则成立如下的高斯公式

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{P}{x} + \frac{Q}{y} + \frac{R}{z} \right] dV \\ &= [P \cos(n, x) + Q \cos(n, y) + R \cos(n, z)] dS, \quad (4.6) \end{aligned}$$

其中  $dV$  是体积元素,  $n$  是  $\Omega$  的外法向矢量,  $dS$  是  $\Sigma$  上的面积元素.

下面来推导公式(4.6)的两个推论.

设函数  $u(x, y, z)$  和  $v(x, y, z)$  在  $\Omega$  上具有一阶连续偏导数, 在  $\Omega$  内具有连续的所有二阶偏导数, 在(4.6)中令

$$P = u \frac{v}{x}, \quad Q = u \frac{v}{y}, \quad R = u \frac{v}{z},$$

则有

$$\begin{aligned} (u \frac{\partial}{\partial x} v) dV + \left[ \frac{u}{x} \frac{v}{x} + \frac{u}{y} \frac{v}{y} + \frac{u}{z} \frac{v}{z} \right] dV \\ = u \frac{v}{n} dS, \end{aligned}$$

或

$$(u \frac{\partial}{\partial x} v) dV = u \frac{v}{n} dS - \text{grad } u \cdot \text{grad } v dV. \quad (4.7)$$

(4.7)式称为第一格林(Green)公式.

在公式(4.7)中交换  $u, v$  位置, 则得

$$(v \frac{\partial}{\partial x} u) dV = v \frac{u}{n} dS - \text{grad } v \cdot \text{grad } u dV. \quad (4.8)$$

将(4.7)与(4.8)式相减得到

$$(u \frac{\partial}{\partial x} v - v \frac{\partial}{\partial x} u) dV = \left[ u \frac{v}{n} - v \frac{u}{n} \right] dS. \quad (4.9)$$

(4.9)式称为第二格林公式.

利用格林公式我们可以推出调和函数的一些基本性质.

(i) 调和函数的积分表达式

所谓调和函数的积分表达式,就是用调和函数及其在区域边界上的法向导数沿 的积分来表达调和函数在 内任一点的值.

设  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  是 内某一固定点,现在我们就来求调和函数在这点的值.为此,构造一个函数

$$v = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}. \quad (4.10)$$

函数  $\frac{1}{r}$  除点  $M_0$  外处处满足拉普拉斯方程,它在研究三维拉普拉斯方程中起着重要的作用,通常称它为三维拉普拉斯方程的基本解.由于  $v = \frac{1}{r}$  在 内有奇异点  $M_0$ ,我们作一个以  $M_0$  为中心,以充分小的正数 为半径的球面 ,在 内挖去 所包围的球域  $K$  得到区域  $-K$  (图 4-1),在  $-K$  内直至边界上  $v = \frac{1}{r}$  是任意次连续可微的.在公式(4.9)中取  $u$  为调和函数,并假定它在  $+$  上有一阶连续偏导数,而取  $v = \frac{1}{r}$ ,并以  $-K$  代替该公式中的 ,得

$$\int_{-K} \left[ u \nabla^2 \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \nabla^2 u \right] dV = \int_{\partial(-K)} \left[ u \frac{\left[ \frac{1}{r} \right]}{n} - \frac{1}{r} \frac{u}{n} \right] dS, \quad (4.11)$$

有的书中把三维拉普拉斯方程的基本解定义为  $\frac{1}{4\pi r}$ ,为表达清楚写成  $\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}$ .

而二维拉普拉斯方程的基本解为  $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}}$ .

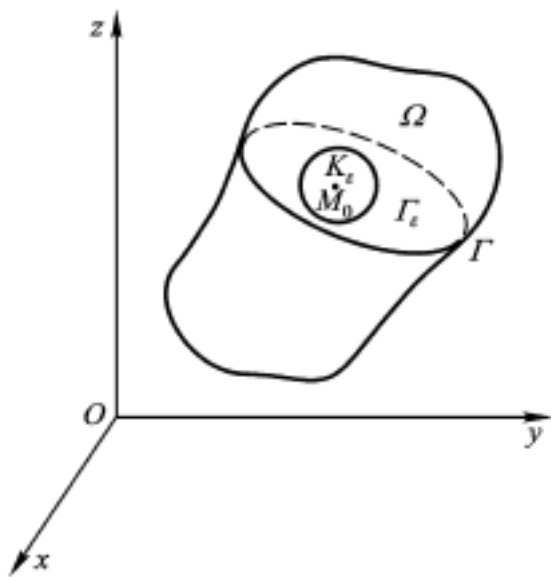


图 4 - 1

因为在  $\Omega - K$  内  $\Delta^2 u = 0$ ,  $\Delta^2 \frac{1}{r} = 0$ . 而在球面  $\Gamma_\epsilon$  上

$$\frac{\left[ \frac{1}{r} \right]}{n} = - \frac{\left[ \frac{1}{r} \right]}{r} = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{\epsilon^2},$$

因此

$$u \frac{\left[ \frac{1}{r} \right]}{n} dS = \frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Gamma_\epsilon} u dS = \frac{1}{\epsilon^2} \bar{u} \cdot 4\pi \epsilon^2 = 4\pi \bar{u},$$

其中  $\bar{u}$  是函数  $u$  在球面  $\Gamma_\epsilon$  上的平均值.

同理可得

$$\frac{1}{r} \frac{u}{n} dS = \frac{1}{n} \int_{\Gamma_\epsilon} u dS = 4\pi \left[ \frac{u}{n} \right],$$

此处  $\left[ \frac{u}{n} \right]$  是  $\frac{u}{n}$  在球面  $\Gamma_\epsilon$  上的平均值. 将此两式代入 (4.11) 可得

$$\left[ u \frac{\left[ \frac{1}{r} \right]}{n} - \frac{1}{r} \frac{u}{n} \right] dS + 4\pi \bar{u} - 4\pi \left[ \frac{u}{n} \right] = 0.$$

现在令  $\epsilon \rightarrow 0$ , 由于  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{u} = u(M_0)$  (因为  $u(x, y, z)$  是连续函数),

$\lim_0 4 \left[ \frac{\overline{u}}{n} \right] = 0$  (因为  $u(x, y, z)$  是一阶连续可微的, 故  $\frac{u}{n}$  有界), 则得

$$u(M_0) = -\frac{1}{4} \left[ u(M) \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{r_{MM_0}} \right] - \frac{1}{r_{MM_0}} \frac{u(M)}{n} \right] dS, \quad (4.12)$$

此处为明确起见, 我们将  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$  记成了  $r_{MM_0}$ .

(4.12)说明, 对于在  $V$  上有连续一阶偏导数的调和函数  $u$ , 它在区域  $V$  内任一点  $M_0$  的值, 可通过积分表达式(4.12)用这个函数在区域边界  $S$  上的值及其在  $S$  上的法向导数来表示.

(ii) 牛曼内问题有解的必要条件

设  $u$  是在以  $S$  为边界的区域  $V$  内的调和函数, 在  $S$  上有一阶连续偏导数, 则在公式(4.9)中取  $u$  为所给的调和函数, 取  $v = 1$ , 就得到

$$-\frac{u}{n} dS = 0, \quad (4.13)$$

由(4.13)可得牛曼内问题  $\left[ \frac{u}{n} \right] = f$  有解的必要条件为函数  $f$  满足

上面的推导是假定点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  在区域  $V$  内, 如果  $M_0$  在  $V$  外或  $M_0$  在边界  $S$  上, 我们也可用同样方法推得另外两个式子, 把它们合并在一起可得

$$-\left[ u \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{r} \right] - \frac{1}{r} \frac{u}{n} \right] dS = \begin{cases} 0, & \text{若 } M_0 \text{ 在 } V \text{ 外,} \\ 2 u(M_0), & \text{若 } M_0 \text{ 在 } S \text{ 上,} \\ 4 u(M_0), & \text{若 } M_0 \text{ 在 } V \text{ 内.} \end{cases}$$

同样, 若  $u$  不是调和函数, 只要它在  $S$  上有一阶连续偏导数, 而在  $V$  内有二阶连续偏导数, 且  $\Delta u = F$ , 我们可以得到类似的公式

$$u(M_0) = -\frac{1}{4} \left[ u(M) \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{r_{MM_0}} \right] - \frac{1}{r_{MM_0}} \frac{u(M)}{n} \right] dS - \frac{1}{4} \frac{F(M)}{r_{MM_0}} dV.$$

$$f dS = 0. \quad (4.14)$$

事实上,这个条件也是牛曼内问题有解的充分条件,证明见 . 吉洪诺夫, . 萨马尔斯基著《数学物理方程》中册(黄克欧等译,人民教育出版社出版) .

### (iii) 平均值公式

设函数  $u(M)$  在某区域  $\Omega$  内是调和的,  $M_0$  是  $\Omega$  内任一点,  $K_a$  表示以  $M_0$  为中心,以  $a$  为半径且完全落在区域  $\Omega$  内部的球面,则成立下列平均值公式

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{K_a} u dS. \quad (4.15)$$

要证明这个公式,只要将公式(4.12)应用于球面  $K_a$ ,并注意在  $K_a$  上  $\frac{1}{r} = \frac{1}{a}$ ,  $-\left[\frac{1}{r}\right]_n = -\left[\frac{1}{r}\right]_r = -\frac{1}{a^2}$ , 以及

$$\int_{K_a} \frac{1}{r} \frac{u}{n} dS = \frac{1}{a} \int_{K_a} \frac{u}{n} dS = 0$$

即可 .

### (iv) 拉普拉斯方程解的惟一性问题

现在我们利用格林公式讨论拉普拉斯方程解的惟一性问题,将证明如下的结论:狄利克莱问题在  $C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  内的解是惟一确定的;牛曼问题的解除了相差一常数外也是惟一确定的 .

以  $u_1, u_2$  表示定解问题的两个解,则它们的差  $v = u_1 - u_2$  必是原问题满足零边界条件的解. 对于狄氏问题,  $v$  满足

$$\begin{cases} \Delta^2 v = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ v|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

对于牛曼问题,  $v$  满足

$$\begin{cases} \Delta^2 v = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 内,} \\ \left| \frac{v}{n} \right| = 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

下面来说明满足条件(4.16)的函数  $v$  若满足  $v|_{\partial D} = C$ , 则在  $D$  内恒为零; 满足条件(4.17)的函数在  $D$  内为一常数.

事实上, 在公式(4.8)中取  $u = v = u_1 - u_2$ , 则得

$$0 = \int_D v \frac{\Delta v}{n} dV - \int_{\partial D} (\text{grad } v)^2 dS.$$

由条件(4.16)或(4.17)得

$$(\text{grad } v)^2 dV = 0,$$

故在  $D$  内必有

$$\text{grad } v = 0,$$

即

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

或

$$v = C.$$

对于狄氏问题, 由  $v|_{\partial D} = 0$ , 得  $C = 0$ , 故  $v = 0$ .

需要注意的是, 这里我们仅证明了狄氏问题在  $C^1(\bar{D}) \cap C^2(D)$  内的解是惟一的, 其所以要假定解  $u \in C^1(\bar{D})$ , 只是为了应用格林公式(4.9). 其实这个要求是多余的, 利用调和函数的极值原理, 可以证明狄氏问题在  $C(\bar{D}) \cap C^2(D)$  内的解是惟一的. 关于这一点, 读者可参阅复旦大学数学系编《数学物理方程》1979年版第3章§2.

### §4.3 格林函数

公式(4.12)说明了一个调和函数可以用这个函数在边界上的值及其在边界上的法向导数来确定它在区域  $D$  内的值. 但这个公式不能直接提供狄氏问题或牛曼问题的解, 因为公式中既包含了  $u|_{\partial D}$  又包含了  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D}$ . 对于狄氏问题而言,  $u|_{\partial D}$  是已知的, 但  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D}$  不知道, 并且由解的惟一性可知, 当给定了  $u|_{\partial D}$  以后就不能再任意给定  $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D}$ . 所以要想从(4.12)得到狄氏问题的解, 就必须消去

$\left. \frac{u}{n} \right|$ , 这就需要引进格林函数的概念.

在格林公式(4.9)中取  $u, v$  均为  $\bar{D}$  内的调和函数, 且在  $\bar{D}$  上有连续的一阶偏导数, 则得

$$0 = \int_D \left[ v \frac{u}{n} - u \frac{v}{n} \right] dS. \quad (4.18)$$

将(4.12)与(4.18)相减得

$$\begin{aligned} u(M_0) = & \int_D \left\{ u \left[ \frac{v}{n} - \frac{1}{4} \frac{1}{r_{MM_0}} \right] + \right. \\ & \left. \left[ \frac{1}{4 r_{MM_0}} - v \right] \frac{u}{n} \right\} dS. \end{aligned} \quad (4.19)$$

如果能选取调和函数  $v$ , 使满足

$$v|_{\partial D} = \frac{1}{4 r_{MM_0}} \Big|_{\partial D}, \quad (4.20)$$

则(4.19)中的  $\left. \frac{u}{n} \right|$  项就消失了, 于是有

$$u(M_0) = - \int_D u \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{4 r_{MM_0}} - v \right] dS. \quad (4.21)$$

令

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4 r_{MM_0}} - v, \quad (4.22)$$

则(4.21)可表为

$$u(M_0) = - \int_D u \frac{G}{n} dS.$$

$G(M, M_0)$  被称为拉普拉斯方程的格林函数. 如果格林函数  $G(M, M_0)$  表达式中的调和函数  $v$  一经求得, 并且它在闭区域  $\bar{D}$  上存在连续的一阶偏导数, 则狄氏问题

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0, & \text{在 } D \text{ 内,} \\ u|_{\partial D} = f(M) \end{cases}$$

的解若存在(且在  $\bar{V}$  上是一次连续可微的), 这个解必然能表示为

$$u(M_0) = - \int_{\partial V} f(M) \frac{G}{n} dS. \quad (4.23)$$

对于泊松方程的狄氏问题

$$\begin{cases} \Delta^2 u = F, & \text{在 } V \text{ 内,} \\ u|_{\partial V} = f \end{cases}$$

而言, 若存在在  $\bar{V}$  上一次连续可微的解, 这个解必能表示为

$$u(M_0) = - \int_{\partial V} f(M) \frac{G}{n} dS - \int_V GF dV.$$

这样一来, 对任意函数  $f$  求解拉普拉斯方程或泊松方程的狄氏问题就转化为求此区域内的格林函数. 从(4.22)可知, 确定格林函数又必须解一个特殊的狄氏问题

$$\begin{cases} \Delta^2 v = 0, & \text{在 } V \text{ 内,} \\ v|_{\partial V} = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} \Big|_{\partial V}. \end{cases} \quad (4.24)$$

虽然对于一般的区域, 求解问题(4.24)也不是一件容易的事, 但公式(4.23)还是有重要意义的, 因为: (1) 格林函数仅依赖于区域, 而与原定解问题中所给的边界条件无关, 只要求得了某个区域的格林函数, 就能一劳永逸地解决这个区域上的一切边界条件的狄氏问题; (2) 对于某些特殊的区域, 如球、半空间等, 格林函数可以用初等方法求得.

格林函数在静电学中有明显的物理意义. 设在闭曲面  $V$  内一点  $M_0$  处放一个单位正电荷, 则它在  $V$  面内侧感应有一定分布密度的负电荷, 而在  $V$  外侧分布有相应的正电荷. 如果曲面  $V$  是导体并接地, 则外侧正电荷就消失, 且电位为零. 这时  $V$  内任意一点  $M$  的电位是由二种电荷产生的, 一是在点  $M_0$  处单位正电荷, 由

---

这里要求解  $u$  在  $\bar{V}$  上一次连续可微, 也只是为了应用格林公式, 不是狄氏问题本身的要求, 因此, 在未做综合工作之前, 这个解只是狄氏问题的形式解.



它产生的电位为  $\frac{1}{4 r_{MM_0}}$  (在有理化单位制中, 这个电位应为  $\frac{1}{4 r_{MM_0}}$ , 此处为了方便, 取介质的介电系数  $= 1$ ), 二是在  $\Omega$  内感应出的负电荷, 由它产生的电位为  $v$ ,  $v$  是定解问题 (4.24) 的解. 因此格林函数就是导电曲面  $\Omega$  内的电位.

## § 4.4 两种特殊区域的格林函数及狄氏问题的解

从 (4.23) 可知, 对于一个由曲面  $\Omega$  所围成的区域  $\Omega$ , 只要求出了它的格林函数, 则在这个区域内狄氏问题的解就能以积分形式表示出来. 对于某些特殊的区域, 它的格林函数可以用电象法求得. 所谓电象法就是在区域  $\Omega$  外找出  $M_0$  关于边界  $\Omega$  的象点  $M_1$ , 然后在这个象点放置适当的负电荷, 由它产生的负电位与  $M_0$  点单位正电荷所产生的正电位在曲面  $\Omega$  上互相抵消, 由于  $M_0$  在  $\Omega$  内部, 它关于  $\Omega$  的象点  $M_1$  则在  $\Omega$  的外部, 所以, 放在  $M_1$  处的点电荷所形成的电场的电位在  $\Omega$  内部是调和函数  $v$ , 而且根据要求, 有  $v|_{\Omega} = \frac{1}{4 r_{MM_0}} \Big|_{\Omega}$ , 故在  $M_0$  与  $M_1$  处两个点电荷所形成电场在  $\Omega$  内的电位就是所要求的格林函数. 下面以半空间、球域为例说明电象法的应用.

### 4.4.1 半空间的格林函数

求解拉普拉斯方程在半空间  $z > 0$  内的狄氏问题, 就是求函数  $u(x, y, z)$  使适合

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, & z > 0, \\ u|_{z=0} = f(x, y), & -\infty < x, y < +\infty. \end{cases} \quad (4.25)$$

首先找格林函数  $G(M, M_0)$ , 在半空间  $z > 0$  的  $M_0(x_0, y_0,$

$z_0$ ) 点置单位正电荷, 并找出  $M_0$  关于  $z=0$  平面的对称点  $M_1(x_0, y_0, -z_0)$  (图 4-2), 在  $M_1$  点置单位负电荷, 则它与  $M_0$  点的单位正电荷所产生的电位在平面  $z=0$  上互相抵消. 由于  $\frac{1}{4} \frac{1}{r_{MM_1}}$  在上半空间  $z>0$  内为调和函数, 在闭域  $z \geq 0$  上具有连续的一阶偏导数, 因此

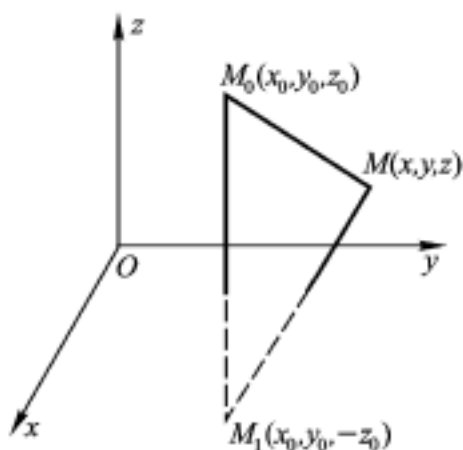


图 4-2

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{1}{r_{MM_1}} \right] \quad (4.26)$$

就是半空间  $z>0$  的格林函数.

为了求得(4.25)的解, 计算  $\left. \frac{G}{n} \right|_{z=0}$ , 由于在平面  $z=0$  上的外法线方向是  $Oz$  轴的负向, 所以有

$$\begin{aligned} \left. \frac{G}{n} \right|_{z=0} &= - \left. \frac{G}{z} \right|_{z=0} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{z - z_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{z + z_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\}_{z=0} \\ &= - \frac{1}{2} \frac{z_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2]^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

将(4.27)代入(4.23)中, 得到问题(4.25)的解为

这里所考虑的区域为无限域, 只要函数  $u(x, y, z)$  在无穷远处满足如下条件: 当  $r \rightarrow \infty$  时,  $|u| < \frac{A}{r}$ ,  $\left| \frac{u}{x} \right| < \frac{A}{r^2}$ ,  $\left| \frac{u}{y} \right| < \frac{A}{r^2}$ ,  $\left| \frac{u}{z} \right| < \frac{A}{r^2}$ , 则公式(4.23)对于包含无穷远点的区域仍成立.

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{z_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + z_0^2]^{\frac{3}{2}}} f(x, y) dx dy. \quad (4.28)$$

#### 4.4.2 球域的格林函数

设有一球心在原点, 半径为  $R$  的球面  $\Gamma$ , 在球内任取一点  $M_0$  ( $r_{OM_0} = \rho_0$ ), 连  $OM_0$  并延长至  $M_1$  使  $r_{OM_0} \cdot r_{OM_1} = R^2$ , 点  $M_1$  称为  $M_0$  关于球面  $\Gamma$  的反演点 (图 4-3). 以  $\rho_1$  表示  $r_{OM_1}$ , 则

$$\rho_0 \rho_1 = R^2.$$

在  $M_0$  放置单位正电荷, 在  $M_1$  放置  $q$  单位的负电荷, 我们要适当选择  $q$  的值, 使得这两个电荷所产生的电位在球面  $\Gamma$  上相互抵消, 即

$$\frac{1}{4\pi r_{M_0P}} = \frac{q}{4\pi r_{M_1P}},$$

或

$$q = r_{M_1P} / r_{M_0P},$$

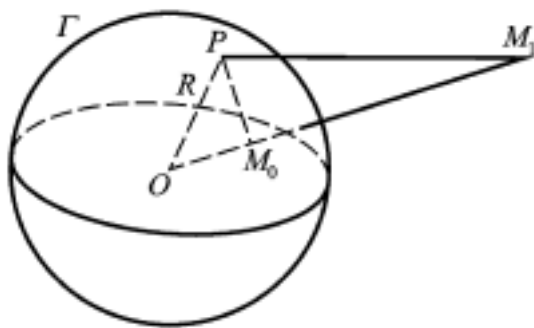


图 4-3

其中  $P$  是球面  $\Gamma$  上任一点. 由

于  $\triangle OM_1P$  与  $\triangle OM_0P$  在点  $O$  它们有公共角, 且夹这角的两边

成比例  $\frac{\rho_1}{R} = \frac{R}{\rho_0}$ , 因此这两个三角形是相似的, 从而有

$$\frac{r_{M_1P}}{r_{M_0P}} = \frac{R}{\rho_0},$$

故

$$q = \frac{R}{\rho_0}.$$

即只要在点  $M_1$  处放置  $R/\rho_0$  单位的负电荷, 由它所形成电场的

电位  $v = \frac{R}{4 r_{M_1 M}}$  不仅在 所围成的球域 的内部是调和函数,

在  $+ \quad$  上一次连续可微, 而且在  $\quad$  上满足

$$\left. \frac{1}{4 r_{M_0 M}} \right| = \left. \frac{R}{4 r_{M_1 M}} \right|,$$

即

$$\frac{1}{4} \left[ \frac{1}{r_{M_0 P}} - \frac{R}{r_{M_1 P}} \right] = 0. \quad (4.29)$$

所以, 球域的格林函数为

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{r_{M_0 M}} - \frac{R}{r_{M_1 M}} \right]. \quad (4.30)$$

现在利用格林函数求球域内的狄氏问题

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0, & \text{在 } \quad \text{内部,} \\ u|_{\quad} = f \end{cases}$$

的解. 为此, 我们要算出  $-\frac{G}{n} \Big|_{\quad}$ , 注意到

$$\frac{1}{r_{M M_0}} = \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2 r_0 r \cos \theta}},$$

$$\frac{1}{r_{M M_1}} = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r^2 - 2 r_1 r \cos \theta}},$$

其中  $r = r_{OM}$ ,  $\theta$  是  $OM_0$  与  $OM$  的夹角 (当然也是  $OM_1$  与  $OM$  的夹角), 于是

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2 r_0 r \cos \theta}} - \frac{R}{\sqrt{r_1^2 + r^2 - 2 r_1 r \cos \theta}} \right] \quad (r_1 = R),$$

在球面  $\quad$  上,

$$-\frac{G}{n} = -\frac{G}{n} \Big|_{r=R} = -\frac{1}{4} \left\{ \frac{-r_0 \cos \theta}{(r_0^2 + R^2 - 2 r_0 R \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \right.$$

$$= - \frac{1}{4R} \frac{R^2 - r_0^2}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} f dS,$$

代入(4.23)可得球内狄氏问题的解为

$$u(M_0) = \frac{1}{4R} \frac{R^2 - r_0^2}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} f dS, \quad (4.31)$$

或写成球坐标的形式

$$u(r_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{R}{4r_0^2} f(R, \theta, \varphi) \frac{R^2 - r_0^2}{(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (4.32)$$

其中 $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ 为点 $M_0$ 的坐标, $(R, \theta, \varphi)$ 是球面上点 $P$ 的坐标, $\cos \theta$ 是 $OM_0$ 与 $OP$ 夹角的余弦.因为向量 $OM_0, OP$ 的方向余弦分别为

$$(\sin \theta_0 \cos \varphi_0, \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \cos \theta_0)$$

$$\text{与 } (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta),$$

所以

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos \theta_0 \cos \varphi_0 + \sin \theta_0 \sin \varphi_0 (\sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \cos \varphi_0) \\ &= \cos \theta_0 \cos \varphi_0 + \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \cos(\varphi - \varphi_0). \end{aligned}$$

公式(4.31)或(4.32)称为球的泊松公式.

以上的推导都是形式上的,即在假定定解问题有解的条件下得到解的表达式,至于(4.28)与(4.32)是否就是相应定解问题的解,还应加以验证.这个验证过程我们就略去了,有兴趣的读者可查阅其他的书籍.

## 习 题 四

### 1. 证明平面上的格林公式

$$\oint_D (v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}) ds = \oint_C \left[ v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right] ds,$$

其中  $C$  是闭区域  $D$  的边界曲线,  $ds$  是弧微分.

2. 验证  $u = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$  是二维拉普拉斯方程的解(称为基本解), 其中

$$= \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}.$$

3. 在二维情况, 建立调和函数类似于公式(4.12)的积分表达式.

4. 试定义二维拉普拉斯方程边值问题的格林函数, 并导出类似于(4.23)的平面上狄氏问题解的表达式.

5. 求证圆域  $x^2 + y^2 = R^2$  的格林函数为

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2} \left[ \ln \frac{1}{r_{MM_0}} - \ln \frac{R}{r_{MM_1}} \right],$$

并由此推出圆内狄氏问题的泊松公式(2.35).

6. 用二维问题的格林函数法求下列上半平面狄氏问题的解:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & -\infty < x < +\infty, y > 0, \\ u|_{y=0} = f(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

## 第五章 贝塞尔函数

在第二章中, 我们用分离变量法求解了一些定解问题. 从 § 2.3 可以看出, 当我们采用极坐标系以后, 经过分离变量就会出现变系数的线性常微分方程. 在那里, 由于我们只考虑圆盘在稳恒状态下的温度分布, 所以得到了欧拉方程. 如果我们不是考虑稳恒状态而是考虑瞬时状态, 就会得到一种特殊类型的常微分方程. 本章我们将通过在柱坐标系中对定解问题进行分离变量, 引出在 § 2.6 中我们曾指出过的贝塞尔方程, 并讨论这个方程解的一些性质. 下面将要看到, 在一般情况下, 贝塞尔方程的解不能用初等函数表出, 从而就导入一类特殊函数, 称为贝塞尔函数. 贝塞尔函数具有一系列性质, 在求解数学物理问题时主要是引用正交完备性.

### § 5.1 贝塞尔方程的引出

下面我们以圆盘的瞬时温度分布为例推导出贝塞尔方程. 设有半径为  $R$  的薄圆盘, 其侧面绝缘, 若圆盘边界上的温度恒保持为零摄氏度, 且初始温度为已知, 求圆盘内的瞬时温度分布规律.

这个问题可以归结为求解下述定解问题:

$$\begin{cases} \frac{u}{t} = a^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right], & x^2 + y^2 < R^2, t > 0, & (5.1) \\ u|_{t=0} = f(x, y), & x^2 + y^2 < R^2, & (5.2) \\ u|_{x^2 + y^2 = R^2} = 0. & & (5.3) \end{cases}$$

用分离变量法解这个问题, 先令

$$u(x, y, t) = V(x, y) T(t),$$

代入方程(5.1)得

$$\nabla^2 T = a^2 \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right] T$$

或

$$\frac{\nabla^2 T}{a^2 T} = \frac{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}}{V} = -\mu^2 \quad (\mu > 0).$$

由此我们得到下面关于函数  $T(t)$  和  $V(x, y)$  的方程

$$T''(t) + a^2 T(t) = 0, \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \mu^2 V = 0. \quad (5.5)$$

从(5.4)得

$$T(t) = A e^{-a^2 t}.$$

方程(5.5)称为亥姆霍兹(Helmholtz)方程.为了求出这个方程满足条件

$$V|_{x^2+y^2=R^2} = 0 \quad (5.6)$$

的非零解,我们引用平面上的极坐标系,将方程(5.5)与条件(5.6)写成极坐标形式得

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \mu^2 V = 0, & r < R, 0 \leq \theta < 2\pi, \end{cases} \quad (5.7)$$

$$\begin{cases} V|_{r=R} = 0, 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases} \quad (5.8)$$

再令  $V(r, \theta) = P(r) Q(\theta)$ ,

代入(5.7)并分离变量可得

$$Q''(\theta) + \mu Q(\theta) = 0, \quad (5.9)$$

$$r^2 P''(r) + r P'(r) + (r^2 \mu^2 - \mu^2) P(r) = 0. \quad (5.10)$$

由于  $u(x, y, t)$  是单值函数,所以  $V(x, y)$  也必是单值的,因此

$Q(\theta)$  应该是以  $2\pi$  为周期的周期函数,这就决定了  $\mu$  只能等于如下的数:

$$0, 1^2, 2^2, \dots, n^2, \dots$$



对应于  $\mu_n = n^2$ , 有

$$P_0(\rho) = \frac{a_0}{2} \text{ (为常数),}$$

$$P_n(\rho) = a_n \cos n\rho + b_n \sin n\rho \quad (n = 1, 2, \dots).$$

以  $\mu_n = n^2$  代入(5.10)得

$$\rho^2 P''(\rho) + \rho P'(\rho) + (\rho^2 - n^2) P(\rho) = 0, \quad (5.11)$$

这个方程与(2.93)相比, 仅仅是两者的自变量和函数的记号有差别, 所以, 它是  $n$  阶贝塞尔方程.

若再作代换

$$r = \sqrt{\rho},$$

并记

$$F(r) = P\left[\frac{r}{\sqrt{\rho}}\right],$$

则得

$$r^2 F''(r) + r F'(r) + (r^2 - n^2) F(r) = 0.$$

这是  $n$  阶贝塞尔方程最常见的形式.

由条件(5.8)及温度  $u$  是有限的, 分别可得

$$\begin{cases} P(R) = 0, \\ |P(0)| < +\infty. \end{cases} \quad (5.12)$$

因此, 原定解问题的最后解决就归结为求贝塞尔方程(5.11)在条件(5.12)下的特征值与特征函数((5.12)中第一个条件是在  $\rho = R$  处的第一类边界条件, 第二个条件是在  $\rho = 0$  处的自然边界条件, 由于  $k(\rho) = \rho^2$  在  $\rho = 0$  处为零, 所以在这一点应加自然边界条件). 在下一节我们先讨论方程(5.11)的解法, 然后在 §5.5 中再回过头来讨论这个特征值问题.

## §5.2 贝塞尔方程的求解

在上一节中, 我们从解决圆盘的瞬时温度分布问题引出了贝塞尔方程, 本节我们来讨论这个方程的解法. 按惯例, 我们仍以  $x$

表示自变量,以  $y$  表示未知函数,则  $n$  阶贝塞尔方程为

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) y = 0, \quad (5.13)$$

其中  $n$  为任意实数或复数.在本书中  $n$  只限于实数,且由于方程的系数中出现  $n^2$  的项,所以在讨论时,不妨暂先假定  $n \neq 0$ .

设方程(5.13)有一个级数解,其形式为

$$y = x^c (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots) \\ = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{c+k}, \quad a_0 \neq 0, \quad (5.14)$$

其中常数  $c$  和  $a_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) 可以通过把  $y$  和它的导数  $y'$ ,  $y''$  代入(5.13)来确定.

将(5.14)及其导数代入(5.13)后得

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{ [(c+k)(c+k-1) + (c+k) + (x^2 - n^2)] a_k x^{c+k} \} = 0.$$

化简后写成

$$(c^2 - n^2) a_0 x^c + [(c+1)^2 - n^2] a_1 x^{c+1} \\ + \sum_{k=2}^{\infty} \{ [(c+k)^2 - n^2] a_k + a_{k-2} \} x^{c+k} = 0,$$

要上式成为恒等式,必须各个  $x$  幂的系数全为零,从而得下列各式:

$$1^\circ a_0 (c^2 - n^2) = 0;$$

方程(5.13)是方程

$$y'' + \frac{a(x)}{x} y' + \frac{b(x)}{x^2} y = 0$$

的一个特例,其中  $a(x)$ ,  $b(x)$  在  $x=0$  处可展开成幂级数,可以证明这个方程至少存在一个形如

$$y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

的解.参阅 . 斯米尔诺夫著《高等数学教程》三卷三分册(叶彦谦译,人民教育出版社出版),第五章.

$$2^\circ a_1 [(c+1)^2 - n^2] = 0;$$

$$3^\circ [(c+k)^2 - n^2] a_k + a_{k-2} = 0 \quad (k=2, 3, \dots).$$

由 1 得  $c = \pm n$ , 代入 2 得  $a_1 = 0$  现暂取  $c = n$ , 代入 3 得

$$4^\circ a_k = \frac{-a_{k-2}}{k(2n+k)}.$$

因为  $a_1 = 0$ , 由 4 知  $a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = \dots = 0$ , 而  $a_2, a_4, a_6, \dots$  都可以用  $a_0$  表示, 即

$$a_2 = \frac{-a_0}{2(2n+2)},$$

$$a_4 = \frac{a_0}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)},$$

$$a_6 = \frac{-a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6(2n+2)(2n+4)(2n+6)},$$

.....

$$\begin{aligned} a_{2m} &= (-1)^m \frac{a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m(2n+2)(2n+4)\dots(2n+2m)} \\ &= \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m! (n+1)(n+2)\dots(n+m)}. \end{aligned}$$

由此知(5.14)的一般项为

$$(-1)^m \frac{a_0 x^{n+2m}}{2^{2m} m! (n+1)(n+2)\dots(n+m)},$$

$a_0$  是一个任意常数, 让  $a_0$  取一个确定的值, 就得(5.13)的一个特解. 我们把  $a_0$  取作

$$a_0 = \frac{1}{2^n (n+1)},$$

这样选取  $a_0$  可使一般项系数中 2 的次数与  $x$  的次数相同, 并可以运用下列恒等式:

$$(n+m)(n+m-1)\dots(n+2)(n+1)(n+1) = (n+m+1)$$

使分母简化,从而使(5.14)中一般项的系数变成

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^{n+2m} m! (n+m+1)}, \quad (5.15)$$

这就比较整齐、简单了.

以(5.15)代入(5.14)得到(5.13)的一个特解

$$y_1 = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m} m! (n+m+1)} \quad (n \geq 0).$$

用级数的比率判别法(或称达朗贝尔判别法)可以判定这个级数在整个数轴上收敛.这个无穷级数所确定的函数,称为  $n$  阶第一类贝塞尔函数,记作

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m} m! (n+m+1)} \quad (n \geq 0). \quad (5.16)$$

至此,我们就求出了贝塞尔方程的一个特解  $J_n(x)$ .

当  $n$  为正整数或零时,  $(n+m+1) = (n+m)!$ ,故有

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m} m! (n+m)!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (5.17)$$

取  $c = -n$  时,用同样方法可得(5.13)的另一特解

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{-n+2m}}{2^{-n+2m} m! (-n+m+1)} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (5.18)$$

比较(5.16)式与(5.18)式可见,只要在(5.16)的右端把  $n$  换成  $-n$ ,即可得到(5.18)式.因此不论  $n$  是正数还是负数,总可以用(5.16)式统一地表达第一类贝塞尔函数.

当  $n$  不为整数时,这两个特解  $J_n(x)$  与  $J_{-n}(x)$  是线性无关的,由齐次线性常微分方程的通解的结构定理知道,(5.13)的通解为

$$y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x), \quad (5.19)$$

其中  $A, B$  为两个任意常数.

当然,在  $n$  不为整数的情况,方程(5.13)的通解除了可以写成(5.19)式以外还可写成其他的形式,只要能够找到该方程另一个与  $J_n(x)$  线性有关的特解,它与  $J_n(x)$  就可构成(5.13)的通解,这样的特解是容易找到的.例如,在(5.19)中取  $A = \cot n$ ,  $B = -\csc n$ ,则得到(5.13)的一个特解

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= \cot n J_n(x) - \csc n J_{-n}(x) \\ &= \frac{J_n(x) \cos n - J_{-n}(x)}{\sin n} \quad (n \text{ 整数}). \end{aligned} \quad (5.20)$$

显然,  $Y_n(x)$  与  $J_n(x)$  是线性无关的,因此,(5.13)的通解可写成

$$y = AJ_n(x) + BY_n(x). \quad (5.21)$$

由(5.20)式所确定的函数  $Y_n(x)$  称为第二类贝塞尔函数,或称牛曼函数.

### §5.3 当 $n$ 为整数时贝塞尔方程的通解

上一节说明,当  $n$  不为整数时,贝塞尔方程(5.13)的通解由(5.19)或(5.21)式确定,当  $n$  为整数时,(5.13)的通解应该是什么样子呢?

首先,我们证明当  $n$  为整数时,  $J_n(x)$  与  $J_{-n}(x)$  是线性相关的.事实上,我们不妨设  $n$  为正整数  $N$  (这不失一般性,因  $n$  为负整数时,会得到同样的结果),则在(5.18)中,  $\frac{1}{(-N+m+1)}$  当  $m=0,1,2,\dots,(N-1)$  时均为零,这时级数从  $m=N$  起才开始出现非零项.于是(5.18)可以写成

$$\begin{aligned} J_{-N}(x) &= \sum_{m=N}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{-N+2m}}{2^{-N+2m} m! (-N+m+1)} \\ &= (-1)^N \left\{ \frac{x^N}{2^N N!} - \frac{x^{N+2}}{2^{N+2} (N+1)!} + \frac{x^{N+4}}{2^{N+4} (N+2)! 2!} + \dots \right\} \\ &= (-1)^N J_N(x). \end{aligned}$$

即  $J_N(x)$  与  $J_{-N}(x)$  线性相关, 这时  $J_N(x)$  与  $J_{-N}(x)$  已不能构成贝塞尔方程的通解了. 为了求出贝塞尔方程的通解, 还要求出一个与  $J_N(x)$  线性无关的特解.

取哪一个特解? 自然我们想到第二类贝塞尔函数. 不过当  $n$  为整数时 (5.20) 的右端没有意义, 要想把整数阶贝塞尔方程的通解也写成 (5.21) 的形式, 必须先修改第二类贝塞尔函数的定义. 在  $n$  为整数的情况, 我们定义第二类贝塞尔函数为

$$Y_n(x) = \lim_n \frac{J_n(x) \cos \frac{\pi}{2} n - J_{-n}(x)}{\sin \frac{\pi}{2} n} \quad (n \text{ 为整数}). \quad (5.22)$$

由于当  $n$  为整数时,  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) = \cos \pi n J_n(x)$ , 所以上式右端的极限是“ $\frac{0}{0}$ ”形式的不定型的极限, 应用洛必达法则并经过冗长的推导(可参阅 . 萨波洛夫斯基著《特殊函数》, 魏执权等译, 中国工业出版社出版), 最后得到

$$\begin{aligned} Y_0(x) &= \frac{2}{\pi} J_0(x) \left[ \ln \frac{x}{2} + c \right] - \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left[ \frac{x}{2} \right]^{2m}}{(m!)^2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k+1}, \\ Y_n(x) &= \frac{2}{\pi} J_n(x) \left[ \ln \frac{x}{2} + c \right] - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left[ \frac{x}{2} \right]^{-n+2m} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left[ \frac{x}{2} \right]^{n+2m}}{m! (n+m)!} \left[ \sum_{k=0}^{n+m-1} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k+1} \right] \\ &\quad (n = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (5.23)$$

其中  $c = \lim_n \left[ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right] = 0.5772\dots$ , 称为欧拉常数.

根据这个函数的定义, 它确是贝塞尔方程的一个特解, 而且与  $J_n(x)$  是线性无关的(因为当  $x=0$  时,  $J_n(x)$  为有限值, 而  $Y_n(x)$  为无穷大).

综合上面所述, 不论  $n$  是否为整数, 贝塞尔方程 (5.13) 的通

解都可表示为

$$y = AJ_n(x) + BY_n(x),$$

其中  $A, B$  为任意常数,  $n$  为任意实数.

## § 5.4 贝塞尔函数的递推公式

不同阶的贝塞尔函数之间不是彼此孤立的,而是有一定的联系,本节我们来建立反映这种联系的递推公式.

先考虑零阶与一阶贝塞尔函数之间的关系.

在(5.17)中令  $n=0$  及  $n=1$  得:

$$\begin{aligned} J_0(x) &= 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4(2!)^2} - \frac{x^6}{2^6(3!)^2} + \dots \\ &\quad + (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} + \dots, \\ J_1(x) &= \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 2!} + \frac{x^5}{2^5 \cdot 2! \cdot 3!} - \frac{x^7}{2^7 \cdot 3! \cdot 4!} + \dots \\ &\quad + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2^{2k+1} k! (k+1)!} + \dots. \end{aligned}$$

取出第一个级数的第  $k+2$  项求导数,得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+2}}{2^{2k+2} [(k+1)!]^2} &= -(-1)^k \frac{(2k+2)x^{2k+1}}{2^{2k+2} [(k+1)!]^2} \\ &= -(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2^{2k+1} k! (k+1)!}. \end{aligned}$$

这个式子正好是  $J_1(x)$  中含  $x^{2k+1}$  这一项的负值,且知  $J_0(x)$  的第一项导数为零,故得关系式

$$\frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x). \quad (5.24)$$

将  $J_1(x)$  乘以  $x$  并求导数,又得

$$\frac{d}{dx} [xJ_1(x)] = \frac{d}{dx} \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2^3 \cdot 2!} + \dots + \right]$$

$$\begin{aligned}
 & (-1)^k \frac{x^{2k+2}}{2^{2k+1} k! (k+1)!} + \dots \Big] \\
 &= x - \frac{x^3}{2^2} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2^{2k} (k!)^2} + \dots \\
 &= x \left[ 1 - \frac{x^2}{2^2} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} + \dots \right],
 \end{aligned}$$

即

$$\frac{d}{dx} [x J_1(x)] = x J_0(x). \quad (5.25)$$

以上结果可以推广, 现将  $J_n(x)$  乘以  $x^n$  求导数, 得

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] &= \frac{d}{dx} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2n+2m}}{2^{n+2m} m! (n+m+1)!} \\
 &= x^n \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{n+2m-1}}{2^{n+2m-1} m! (n+m)!} \\
 &= x^n J_{n-1}(x),
 \end{aligned}$$

即

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x). \quad (5.26)$$

同理可得

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x). \quad (5.27)$$

将(5.26)和(5.27)两式左端的导数求出来, 并经过化简, 则分别得

$$x J_n'(x) + n J_n(x) = x J_{n-1}(x),$$

及

$$x J_n'(x) - n J_n(x) = -x J_{n+1}(x).$$

将这两式相减及相加, 分别得到

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2}{x} n J_n(x), \quad (5.28)$$

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2 J_n(x). \quad (5.29)$$

以上几式便是贝塞尔函数的递推公式, 它们在有关贝塞尔函数的分析运算中甚为有用. 特别值得一提的是, 应用(5.28)式可以



用较低阶的贝塞尔函数把较高阶的贝塞尔函数表示出来, 因此如果我们已有零阶与一阶贝塞尔函数表, 则利用此表和(5.28), 即可计算任意正整数阶的贝塞尔函数的数值.

第二类贝塞尔函数也具有与第一类贝塞尔函数相同的递推公式

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} [x^n Y_n(x)] = x^n Y_{n-1}(x), \\ \frac{d}{dx} [x^{-n} Y_n(x)] = -x^{-n} Y_{n+1}(x), \\ Y_{n-1}(x) + Y_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} Y_n(x), \\ Y_{n-1}(x) - Y_{n+1}(x) = 2 Y_n'(x). \end{cases} \quad (5.30)$$

作为递推公式的一个应用, 我们来考虑半奇数阶的贝塞尔函数, 先计算  $J_{\frac{1}{2}}(x)$ ,  $J_{-\frac{1}{2}}(x)$ . 由(5.16)可得

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \left[ \frac{3}{2} + m \right]} \left( \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{2} + 2m},$$

$$\begin{aligned} \text{而} \quad \left[ \frac{3}{2} + m \right] &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+1)}{2^{m+1}} \left[ \frac{1}{2} \right] \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m+1)}{2^{m+1}} \sqrt{\phantom{x}}, \end{aligned}$$

从而

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} = \sqrt{\frac{2}{x}} \sin x. \quad (5.31)$$

同理, 可求得

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{x}} \cos x. \quad (5.32)$$

利用递推公式(5.28)得到

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{x} J_{\frac{1}{2}}(x) - J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{x}} \left[ -\cos x + \frac{1}{x} \sin x \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= - \sqrt{\frac{2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[ \frac{\sin x}{x} \right] \\
 &= - \sqrt{\frac{2}{x^2}} \left[ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right] \left[ \frac{\sin x}{x} \right].
 \end{aligned}$$

同理可得

$$J_{-\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{x^2}} \left[ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right] \left[ \frac{\cos x}{x} \right].$$

一般言之,有

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{x^{n+\frac{1}{2}}}} \left[ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right]^n \left[ \frac{\sin x}{x} \right]; \quad (5.33)$$

$$J_{-(n+\frac{1}{2})}(x) = \sqrt{\frac{2}{x^{n+\frac{1}{2}}}} \left[ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right]^n \left[ \frac{\cos x}{x} \right].$$

这里为了简便起见,我们采用了微分算子  $\left[ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right]^n$ , 它是算子

$\frac{1}{x} \frac{d}{dx}$  连续作用  $n$  次的缩写,例如,  $\left[ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right]^2 \left[ \frac{\sin x}{x} \right] = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[ \frac{\sin x}{x} \right] \right]$ , 千万不能把它与  $\frac{1}{x^n} \frac{d^n}{dx^n}$  混为一谈.

从(5.33)可以看出,半奇数阶的贝塞尔函数都是初等函数.

## § 5.5 函数展成贝塞尔函数的级数

利用贝塞尔函数求解数学物理方程的定解问题,最终都要把已知函数按贝塞尔方程的特征函数系进行展开.这一节我们先要说明贝塞尔方程的特征函数系是什么样的函数系,然后证明这个特征函数系是一正交系.

### 5.5.1 贝塞尔函数的零点

在§ 5.1中,我们已将求解圆盘的温度分布问题通过分离变量法转化成求解贝塞尔方程的特征值问题:

$$\begin{cases} r^2 P(r) + rP'(r) + (r^2 - n^2)P(r) = 0, \\ 0 < r < R, \end{cases} \quad (5.34)$$

$$P(r)|_{r=R} = 0, \quad (5.35)$$

$$|P(0)| < +\infty \quad (\text{自然边界条件}). \quad (5.36)$$

方程(5.34)的通解为

$$P(r) = AJ_n(\sqrt{r}) + BY_n(\sqrt{r}),$$

由条件(5.36)可得  $B = 0$ , 即

$$P(r) = AJ_n(\sqrt{r}),$$

利用条件(5.35)得

$$J_n(\sqrt{R}) = 0. \quad (5.37)$$

这就说明,为了求出上述特征值问题的特征值,必须要计算  $J_n(x)$  的零点.  $J_n(x)$  有没有实的零点?若存在实的零点,一共有多少个?关于这些问题,有以下几个结论:

1°  $J_n(x)$  有无穷多个单重实零点,且这无穷多个零点在  $x$  轴上关于原点对称分布着的,因而  $J_n(x)$  必有无穷多个正的零点;

2°  $J_n(x)$  的零点与  $J_{n+1}(x)$  的零点是彼此相间分布的,即  $J_n(x)$  的任意两个相邻零点之间必存在一个且仅有一个  $J_{n+1}(x)$  的零点;

3° 以  $\mu_m^{(n)}$  表示  $J_n(x)$  的非负零点 ( $m = 1, 2, \dots$ ), 则  $\mu_{m+1}^{(n)} - \mu_m^{(n)}$  当  $m \rightarrow \infty$  时无限地接近于  $\frac{2}{n}$ , 即  $J_n(x)$  几乎是以  $\frac{2}{n}$  为周期的周期函数.  $J_0(x)$  与  $J_1(x)$  的图形见图 5-1.

为了便于工程技术上的应用,贝塞尔函数正零点的数值已被详细计算出来,并列成表格.下表给出了  $J_n(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, 5$ ) 的前 9 个正零点  $\mu_m^{(n)}$  ( $m = 1, 2, \dots, 9$ ) 的近似值:

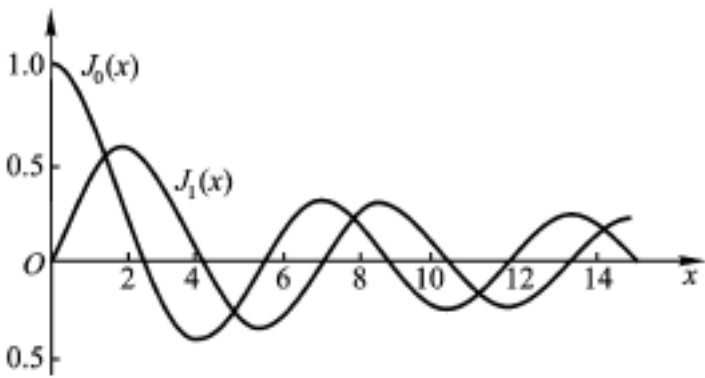


图 5 - 1

$\mu_m^{(n)}$ $m \backslash n$	0	1	2	3	4	5
1	2.405	3.832	5.136	6.380	7.588	8.771
2	5.520	7.016	8.417	9.761	11.065	12.339
3	8.654	10.173	11.620	13.015	14.373	15.700
4	11.792	13.324	14.796	16.223	17.616	18.980
5	14.931	16.471	17.960	19.409	20.827	22.218
6	18.071	19.616	21.117	22.583	24.019	25.430
7	21.212	22.760	24.270	25.748	27.199	28.627
8	24.352	25.904	27.421	28.908	30.371	31.812
9	27.493	29.047	30.569	32.065	33.537	34.989

利用上述关于贝塞尔函数零点的结论,方程(5.37)的解为

$$\sqrt{R} = \mu_m^{(n)} \quad (m = 1, 2, \dots),$$

即

$$\mu_m^{(n)} = \left[ \frac{\mu_m^{(n)}}{R} \right]^2 \quad (m = 1, 2, \dots), \tag{5.38}$$

与这些特征值相对应的特征函数为

$$P_m(r) = J_n \left[ \frac{\mu_m^{(n)}}{R} r \right] \quad (m = 1, 2, \dots). \tag{5.39}$$

## 5.5.2 贝塞尔函数的正交性

现在我们来讨论特征函数系  $\left\{ J_n \left[ \frac{\mu_m^{(n)}}{R} r \right] \right\} (m = 1, 2, \dots)$  的正交性. 我们将要证明

$$\begin{aligned} & \int_0^R r J_n \left[ \frac{\mu_m^{(n)}}{R} r \right] J_n \left[ \frac{\mu_k^{(n)}}{R} r \right] dr \\ &= \begin{cases} 0, & \text{当 } m \neq k, \\ \frac{R^2}{2} J_{n-1}^2(\mu_m^{(n)}) = \frac{R^2}{2} J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)}), & \text{当 } m = k. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.40)$$

由于贝塞尔函数系  $\left\{ J_n \left[ \frac{\mu_m^{(n)}}{R} r \right] \right\} (m = 1, 2, \dots)$  是特征值问题 (5.34), (5.35), (5.36) 的特征函数系, 所以它的正交性由 § 2.6 中的施特姆-刘维尔理论可以直接推出. 不过因为在那里我们并没有就一般情况证明这个结论, 因此, 我们在这里把贝塞尔函数系的正交性详细证明一下, 而且这个证明方法是富有启发性的, 完全可以用类似的步骤来证明 § 2.6 中的结论 3. 下一章将要讲到的勒让德多项式的正交性, 也是施特姆-刘维尔理论的另一个具体例子.

下面我们就来证 (5.40). 为了书写方便起见, 我们令

$$\begin{aligned} F_1(r) &= J_n \left[ \frac{\mu_m^{(n)}}{R} r \right], \\ F_2(r) &= J_n(r) \quad (\text{为任意参数}), \end{aligned}$$

按定义,  $F_1(r)$ ,  $F_2(r)$  分别满足

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{dF_1(r)}{dr} \right] + \left[ \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{R} \right)^2 r - \frac{n^2}{r} \right] F_1(r) &= 0, \\ \frac{d}{dr} \left[ r \frac{dF_2(r)}{dr} \right] + \left[ r^2 - \frac{n^2}{r} \right] F_2(r) &= 0. \end{aligned}$$

以  $F_2(r)$  乘第一个方程减去以  $F_1(r)$  乘第二个方程, 然后对  $r$  从 0 到  $R$  积分得

$$\left[ \left( \frac{\mu_m^{(n)}}{R} \right)^2 - 1 \right] \int_0^R r F_1(r) F_2(r) dr + \int_0^R F_2(r) \frac{d}{dr} \left[ r \frac{dF_1(r)}{dr} \right] dr -$$

$$\int_0^R F_1(r) \frac{d}{dr} \left[ r \frac{dF_2(r)}{dr} \right] dr = 0,$$

即

$$\left[ \left[ \frac{\mu_m^{(n)}}{R} \right]^2 - \frac{1}{2} \right] \int_0^R r F_1(r) F_2(r) dr + \{ r [F_2(r) F_1(r) - F_1(r) F_2(r)] \}_0^R = 0.$$

由此可得

$$\int_0^R r F_1(r) F_2(r) dr = - \frac{R [F_2(R) F_1(R) - F_1(R) F_2(R)]}{\left[ \frac{\mu_m^{(n)}}{R} \right]^2 - \frac{1}{2}},$$

因  $F_1(R) = J_n(\mu_m^{(n)}) = 0$ , 故上式可写成

$$\begin{aligned} \int_0^R r J_n \left[ \frac{\mu_m^{(n)}}{R} r \right] J_n(r) dr &= - \frac{R F_2(R) F_1(R)}{\left[ \frac{\mu_m^{(n)}}{R} \right]^2 - \frac{1}{2}} \\ &= - \frac{\mu_m^{(n)} J_n(R) J_n(\mu_m^{(n)})}{\left[ \frac{\mu_m^{(n)}}{R} \right]^2 - \frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

若取  $\mu_k^{(n)} = \frac{\mu_k^{(n)}}{R}$ ,  $k \neq m$ , 则

$$J_n(R) = J_n(\mu_k^{(n)}) = 0,$$

从而(5.41)的右端为零, 即(5.40)中第一个式子已得证.

为了证明(5.40)中第二个式子, 在(5.41)两端令  $\frac{\mu_m^{(n)}}{R}$ , 此

时(5.41)右端的极限是“ $\frac{0}{0}$ ”形的不定型的极限, 利用洛必达法则

计算这个极限得

$$\begin{aligned} \int_0^R r J_n^2 \left[ \frac{\mu_m^{(n)}}{R} r \right] dr &= \lim_{\frac{\mu_m^{(n)}}{R}} \frac{- \mu_m^{(n)} J_n(\mu_m^{(n)}) J_n(R) \cdot R}{-2} \\ &= \frac{R^2}{2} [J_n(\mu_m^{(n)})]^2. \end{aligned}$$

由递推公式

$$xJ_n'(x) + nJ_n(x) = xJ_{n-1}'(x), \quad xJ_n'(x) - nJ_n(x) = -xJ_{n+1}'(x),$$

及  $J_n(\mu_m^{(n)}) = 0$  可知

$$J_n(\mu_m^{(n)}) = J_{n-1}(\mu_m^{(n)}) = -J_{n+1}(\mu_m^{(n)}),$$

$$\text{从而} \quad \int_0^R r J_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right) dr = \frac{R^2}{2} J_{n-1}^2(\mu_m^{(n)}) = \frac{R^2}{2} J_{n+1}^2(\mu_m^{(n)}),$$

这就是(5.40)中第二个式子. 通常我们把定积分

$$\int_0^R r J_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right) dr$$

的正平方根, 称为贝塞尔函数  $J_n\left[\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right]$  的模值.

利用 § 2.6 中关于特征函数系的完全(备)性可知, 任意在  $[0, R]$  上具有一阶连续导数及分段连续的二阶导数的函数  $f(r)$ , 只要它在  $r=0$  处有界, 在  $r=R$  处等于零, 则它必能展开成如下形式的绝对且一致收敛的级数

$$f(r) = \sum_{m=1} A_m J_n\left[\frac{\mu_m^{(n)}}{R}r\right]. \quad (5.42)$$

为了确定这个展开式的系数  $A_m$ , 我们在(5.42)的两端同乘以  $rJ_n\left[\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r\right]$ , 并对  $r$  从 0 到  $R$  积分, 由正交关系式(5.40)得

$$\int_0^R r f(r) J_n\left[\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r\right] dr = A_k \int_0^R r J_n^2\left[\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r\right] dr,$$

即

$$A_k = \frac{1}{\frac{R^2}{2} J_{n-1}^2(\mu_k^{(n)})} \int_0^R r f(r) J_n\left[\frac{\mu_k^{(n)}}{R}r\right] dr. \quad (5.43)$$

下一节将通过例子说明贝塞尔函数在求解定解问题时的用法.

## § 5.6 贝塞尔函数应用举例

下面我们举两个例子, 说明用贝塞尔函数求解定解问题的全

过程.

例 1 设有半径为 1 的薄均匀圆盘,边界上温度为零摄氏度,初始时刻圆盘内温度分布为  $1 - r^2$ ,其中  $r$  是圆盘内任一点的极半径,求圆内温度分布规律.

解 由于是在圆域内求解问题,故采用极坐标系较为方便,并考虑到定解条件与  $\theta$  无关,所以温度  $u$  只能是  $r, t$  的函数,于是根据问题的要求,即可归结为求解下列定解问题:

$$\begin{cases} \frac{u}{t} = a^2 \left[ \frac{r^2}{r^2} \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{u}{r} \right], 0 < r < 1, t > 0, \end{cases} \quad (5.44)$$

$$\begin{cases} u|_{r=1} = 0, t > 0, \end{cases} \quad (5.45)$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = 1 - r^2, 0 < r < 1. \end{cases} \quad (5.46)$$

此外,由物理意义,还有条件  $|u| < \infty$ ,且当  $t \rightarrow +\infty$  时,  $u \rightarrow 0$ .

令  $u(r, t) = F(r) T(t)$ ,

代入方程(5.44)得

$$FT = a^2 \left[ F + \frac{1}{r} F \right] T,$$

或

$$\frac{T}{a^2 T} = \frac{F + \frac{1}{r} F}{F} = -\lambda^2,$$

由此得

$$r^2 F'' + rF' + r^2 F = 0, \quad (5.47)$$

$$T' + a^2 T = 0. \quad (5.48)$$

方程(5.48)的解为

$$T(t) = Ce^{-a^2 t},$$

因为  $t \rightarrow +\infty$  时,  $u \rightarrow 0$ ,所以  $C$  只能大于零,令  $C = 1$ ,则

$$T(t) = Ce^{-a^2 t}.$$

此时方程(5.47)的通解为

$$F(r) = C_1 J_0(r) + C_2 Y_0(r).$$



由  $u(r, t)$  的有界性, 可知  $C_2 = 0$ , 再由 (5.45) 得  $J_0(\mu_n^{(0)} r) = 0$ , 即是  $J_0(x)$  的零点. 以  $\mu_n^{(0)}$  表示  $J_0(x)$  的正零点, 则

$$\mu_n^{(0)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

综合以上结果可得

$$F_n(r) = J_0(\mu_n^{(0)} r),$$

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2(\mu_n^{(0)})^2 t}.$$

从而

$$u_n(r, t) = C_n e^{-a^2(\mu_n^{(0)})^2 t} J_0(\mu_n^{(0)} r).$$

利用叠加原理, 可得原问题的解为

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2(\mu_n^{(0)})^2 t} J_0(\mu_n^{(0)} r).$$

由条件 (5.46) 得

$$1 - r^2 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\mu_n^{(0)} r),$$

从而

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{[J_0(\mu_n^{(0)})]^2} \int_0^1 (1 - r^2) r J_0(\mu_n^{(0)} r) dr \\ &= \frac{2}{J_1^2(\mu_n^{(0)})} \left[ \int_0^1 r J_0(\mu_n^{(0)} r) dr - \int_0^1 r^3 J_0(\mu_n^{(0)} r) dr \right]. \end{aligned}$$

因  $d[(\mu_n^{(0)} r) J_1(\mu_n^{(0)} r)] = (\mu_n^{(0)} r) [J_0(\mu_n^{(0)} r) d(\mu_n^{(0)} r)]$ ,

即 
$$d\left[\frac{r J_1(\mu_n^{(0)} r)}{\mu_n^{(0)}}\right] = r J_0(\mu_n^{(0)} r) dr,$$

故得

$$\int_0^1 r J_0(\mu_n^{(0)} r) dr = \left. \frac{r J_1(\mu_n^{(0)} r)}{\mu_n^{(0)}} \right|_0^1 = \frac{J_1(\mu_n^{(0)})}{\mu_n^{(0)}}.$$

另外

$$\begin{aligned} \int_0^1 r^3 J_0(\mu_n^{(0)} r) dr &= \int_0^1 r^2 d\left[\frac{r J_1(\mu_n^{(0)} r)}{\mu_n^{(0)}}\right] \\ &= \left. \frac{r^3 J_1(\mu_n^{(0)} r)}{\mu_n^{(0)}} \right|_0^1 - \frac{2}{\mu_n^{(0)}} \int_0^1 r^2 J_1(\mu_n^{(0)} r) dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{J_1(\mu_n^{(0)})}{\mu_n^{(0)}} - \frac{2}{(\mu_n^{(0)})^2} r^2 J_2(\mu_n^{(0)} r) \Big|_0^1 \\
&= \frac{J_1(\mu_n^{(0)})}{\mu_n^{(0)}} - \frac{2J_2(\mu_n^{(0)})}{(\mu_n^{(0)})^2},
\end{aligned}$$

从而

$$C_n = \frac{4J_2(\mu_n^{(0)})}{(\mu_n^{(0)})^2 J_1(\mu_n^{(0)})}.$$

所以,所求定解问题的解为

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4J_2(\mu_n^{(0)})}{(\mu_n^{(0)})^2 J_1(\mu_n^{(0)})} J_0(\mu_n^{(0)} r) e^{-a^2 (\mu_n^{(0)})^2 t}, \quad (5.49)$$

其中  $\mu_n^{(0)}$  是  $J_0(r)$  的正零点.

例 2 求下列定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right], 0 < r < R, t > 0, \end{cases} \quad (5.50)$$

$$\begin{cases} \frac{u}{r} \Big|_{r=R} = 0, \quad |u|_{r=0} < +\infty, t > 0, \end{cases} \quad (5.51)$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = 0, \quad \frac{u}{t} \Big|_{t=0} = 1 - \frac{r^2}{R^2}, 0 < r < R \end{cases} \quad (5.52)$$

的解.

解 用分离变量法来解,令  $u(r, t) = F(r) T(t)$ , 采用例 1 中类似的运算,可以得到

$$F(r) = C_1 J_0(r) + C_2 Y_0(r), \quad (5.53)$$

$$T(t) = C_3 \cos at + C_4 \sin at. \quad (5.54)$$

由  $u(r, t)$  在  $r=0$  处的有界性,可知  $C_2 = 0$ , 即

$$F(r) = C_1 J_0(r). \quad (5.55)$$

再根据边界条件(5.51)中第一式,得

$$F(R) = C_1 J_0(R) = 0,$$

因  $C_1$  不能为零,故有

$$J_0(R) = 0.$$

利用贝塞尔函数的递推公式(5.24)可得

$$J_1(R) = 0,$$

即  $R$  是  $J_1(x)$  的非负零点, 以  $\mu_1^{(1)}, \mu_2^{(1)}, \dots, \mu_n^{(1)}, \dots$  表示  $J_1(x)$  的所有正零点, 又因  $J_1(0) = 0$ , 所以

$$= 0 \text{ 及 } R = \mu_n^{(1)} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (5.56)$$

当  $\lambda = 0$  时, 由(5.47), (5.48)及(5.51)中第二个条件可知, 方程(5.50)有一个特解

$$u_0(r, t) = C_0 + D_0 t,$$

其中  $C_0, D_0$  是待定常数;

当  $\lambda = \frac{\mu_n^{(1)}}{R} \quad (n = 1, 2, \dots)$  时, 由方程(5.55)及(5.54)得

$$F_n(r) = J_0\left[\frac{\mu_n^{(1)}}{R}r\right]$$

$$T_n(t) = C_n \cos \frac{a\mu_n^{(1)}}{R}t + D_n \sin \frac{a\mu_n^{(1)}}{R}t,$$

即(5.50)有特解

$$u_n(r, t) = \left( C_n \cos \frac{a\mu_n^{(1)}}{R}t + D_n \sin \frac{a\mu_n^{(1)}}{R}t \right) J_0\left[\frac{\mu_n^{(1)}}{R}r\right],$$

其中  $C_n, D_n$  是待定常数,  $n = 1, 2, \dots$ .

利用叠加原理可得原定解问题的解为

$$u(r, t) = C_0 + D_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_n \cos \frac{a\mu_n^{(1)}}{R}t + D_n \sin \frac{a\mu_n^{(1)}}{R}t \right) J_0\left[\frac{\mu_n^{(1)}}{R}r\right],$$

代入条件(5.52)得

$$C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0\left[\frac{\mu_n^{(1)}}{R}r\right] = 0, \quad (5.57)$$

$$D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \mu_n^{(1)} J_0\left[\frac{\mu_n^{(1)}}{R}r\right] = 1 - \frac{r^2}{R^2}. \quad (5.58)$$

由(5.57)得  $C_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$ , 在(5.58)两端同乘以  $r$  并对  $r$  在  $[0, R]$  上积分得

$$D_0 = \frac{1}{R} \int_0^R \left[ 1 - \frac{r^2}{R^2} \right] r dr = \frac{1}{2},$$

由(5.58)并利用下面的结果(见习题五第14题):如果  $\mu_n^{(1)}$  是  $J_1(x)$  的正零点,则

$$\int_0^R r J_0^2 \left[ \frac{\mu_n^{(1)}}{R} r \right] dr = \frac{R^2}{2} J_0(\mu_n^{(1)}) J_1(\mu_n^{(1)}) = \frac{R^2}{2} J_0^2(\mu_n^{(1)}),$$

得到

$$\begin{aligned} D_n &= \frac{2}{a \mu_n^{(1)} R J_0^2(\mu_n^{(1)})} \int_0^R \left[ 1 - \frac{r^2}{R^2} \right] r J_0 \left[ \frac{\mu_n^{(1)}}{R} r \right] dr \\ &= \frac{4 R J_2(\mu_n^{(1)})}{a (\mu_n^{(1)})^3 J_0^2(\mu_n^{(1)})} = - \frac{4 R}{a (\mu_n^{(1)})^3 J_0(\mu_n^{(1)})}, \end{aligned}$$

所以最后得到定解问题的解为

$$u(r, t) = \frac{t}{2} - \frac{4 R}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_n^{(1)})^3 J_0(\mu_n^{(1)})} \sin \frac{a \mu_n^{(1)}}{R} t J_0 \left[ \frac{\mu_n^{(1)}}{R} r \right]. \quad (5.59)$$

## \* § 5.7 贝塞尔函数的其他类型

由于解决某些工程问题的需要,本节引入另外三种形式的贝塞尔函数.

### 5.7.1 第三类贝塞尔函数

第三类贝塞尔函数又名汉克尔(Hankel)函数,它是由下列公式来定义的:

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + j Y_n(x),$$

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - j Y_n(x).$$

其中  $j = \sqrt{-1}$ , 由于汉克尔函数是  $J_n(x)$  与  $Y_n(x)$  的线性组合, 所以, 同样也具有与第一类贝塞尔函数相同的递推公式:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} [x^n H_n^{(i)}(x)] &= x^n H_{n-1}^{(i)}(x), \\
\frac{d}{dx} [x^{-n} H_n^{(i)}(x)] &= -x^{-n} H_{n+1}^{(i)}(x), \\
H_{n-1}^{(i)}(x) + H_{n+1}^{(i)}(x) &= \frac{2n}{x} H_n^{(i)}(x), \\
H_{n-1}^{(i)}(x) - H_{n+1}^{(i)}(x) &= 2 \frac{d}{dx} H_n^{(i)}(x).
\end{aligned} \quad (i=1,2)$$

在下一节将看到这种函数当  $x$  很大时有比较简单的渐近公式.

### 5.7.2 虚宗量的贝塞尔函数

当我们在圆柱形域内求解定解问题, 如果圆柱上下两底的边界条件是齐次的, 侧面的边界条件是非齐次时, 就会遇到形如

$$y + \frac{1}{x}y - \left[1 + \frac{n^2}{x^2}\right]y = 0 \quad (5.60)$$

的方程, 它和贝塞尔方程只有一项的符号有差别, 若令  $x = -jt$  就可将这个方程化成贝塞尔方程, 因为

$$\begin{aligned}
x &= -jt, \quad dx = -jdt, \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{-1}{j} \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d^2y}{dt^2},
\end{aligned}$$

代入(5.60)得到

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dy}{dt} + \left[1 - \frac{n^2}{t^2}\right]y = 0.$$

因此方程(5.60)的通解为

$$y = AJ_n(jx) + BY_n(jx),$$

这里

$$J_n(jx) = j^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m} m! (n+m+1)}.$$

将上式乘以  $j^{-n}$  后, 我们就定义它为第一类虚宗量的贝塞尔函数, 或称第一类变形的贝塞尔函数, 并记作

$$I_n(x) = j^{-n} J_n(jx) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{n+2m}}{2^{n+2m} m! (n+m+1)}.$$

(5.61)

特别,

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^4 (2!)^2} + \frac{x^6}{2^6 (3!)^2} + \dots$$

关于第二类虚宗量贝塞尔函数  $K_n(x)$  定义如下:

当  $n$  是非整数时

$$K_n(x) = \frac{\frac{1}{2} [I_{-n}(x) - I_n(x)]}{\sin n};$$

当  $n$  为整数时

$$K_n(x) = \lim_n \frac{\frac{1}{2} [I_{-n}(x) - I_n(x)]}{\sin n}. \quad (5.62)$$

所以方程(5.60)的通解又可写为

$$y = AI_n(x) + BK_n(x),$$

其中  $A, B$  为任意常数.

$I_n(x)$  与  $K_n(x)$  不存在实的零点, 所以它们的图形不是振荡型曲线, 这一点与  $J_n(x)$  及  $Y_n(x)$  不同.

### 5.7.3 开尔文函数(或称汤姆孙函数)

$n$  阶第一类开尔文(Kelvin)函数有两种形式, 它们分别被定义为  $J_n(x\sqrt{-j})$  的实部与虚部, 记作  $\text{ber}_n x$  和  $\text{bei}_n x$ . 在应用这种函数时, 主要是用零阶和一阶的. 由于

$$J_0(x\sqrt{-j}) = J_0(xj\sqrt{j})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(m!)^2} \left[ \frac{j\sqrt{j}x}{2} \right]^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{j^m \left[ \frac{x}{2} \right]^{2m}}{(m!)^2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^{2k} \left[ \frac{x}{2} \right]^{4k}}{[(2k)!]^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^{2k+1} \left[ \frac{x}{2} \right]^{4k+2}}{[(2k+1)!]^2} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left[ \frac{x}{2} \right]^{4k}}{[(2k)!]^2} + j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left[ \frac{x}{2} \right]^{4k+2}}{[(2k+1)!]^2},$$

所以  $\text{ber}_0 x$  和  $\text{bei}_0 x$  分别为

$$\text{ber}_0(x) = \text{Re}[J_0(x\sqrt{-j})] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left[ \frac{x}{2} \right]^{4k}}{[(2k)!]^2}, \quad (5.63)$$

$$\text{bei}_0(x) = \text{Im}[J_0(x\sqrt{-j})] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left[ \frac{x}{2} \right]^{4k+2}}{[(2k+1)!]^2}. \quad (5.64)$$

用类似的方法可以得到一阶开尔文函数:

$$\text{ber}_1(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{x}{2} + \frac{\left[ \frac{x}{2} \right]^3}{1!2!} - \frac{\left[ \frac{x}{2} \right]^5}{2!3!} - \frac{\left[ \frac{x}{2} \right]^7}{3!4!} + \dots \right], \quad (5.65)$$

$$\text{bei}_1(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ -\frac{x}{2} + \frac{\left[ \frac{x}{2} \right]^3}{1!2!} + \frac{\left[ \frac{x}{2} \right]^5}{2!3!} - \frac{\left[ \frac{x}{2} \right]^7}{3!4!} - \dots \right]. \quad (5.66)$$

## \* § 5.8 贝塞尔函数的渐近公式

在应用贝塞尔函数解决工程技术问题时,常常需要求出这些函数当自变量  $x$  取很大值时的函数值,如果按照级数展开式来计算这些特定值,就要求计算级数很多项的和,这样做非常麻烦,因此想到要用另外的函数来代替收敛很慢的贝塞尔函数的级数表达式,这个函数既要能逼近贝塞尔函数,又要能节约计算的时间。

我们为寻找一些便于计算的公式,引入所谓贝塞尔函数的渐近公式,在这里我们不打算讨论这些公式是如何引出的,因为这些公式的引出是比较复杂的。下面只举出在应用中最常见的渐近公式。

当  $x$  的值很大时

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{x}} \left[ j_n(x) \cos \left[ x - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}n \right] - n(x) \sin \left[ x - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}n \right] \right], \quad (5.67)$$

$$Y_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{x}} \left[ n(x) \sin \left[ x - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}n \right] + j_n(x) \cos \left[ x - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}n \right] \right], \quad (5.68)$$

$$H_n^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{x}} e^{j(x - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}n)} [j_n(x) + j n(x)], \quad (5.69)$$

$$H_n^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{x}} e^{-j(x - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}n)} [n(x) - j n(x)], \quad (5.70)$$

其中

$$j_n(x) = 1 - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2!(8x)^2} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)(4n^2 - 5^2)(4n^2 - 7^2)}{4!(8x)^4} - \dots$$

$$n(x) = \frac{4n^2 - 1^2}{1!(8x)} - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)(4n^2 - 5^2)}{3!(8x)^3} + \dots$$

只要  $x$  的值很大,用这些渐近展开式右端的前面几项来计算左端函数的近似值,就能达到较满意的精确度,例如,我们常取

$$J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{x}} \cos \left[ x - \frac{1}{4} - \frac{n}{2} \right],$$

$$Y_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{x}} \sin \left[ x - \frac{1}{4} - \frac{n}{2} \right],$$

$$H_n^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{x}} e^{j(x - \frac{1}{4} - \frac{n}{2})}, \quad (5.71)$$

$$H_n^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{x}} e^{-j(x - \frac{1}{4} - \frac{n}{2})}$$



来作近似计算 .

## 习 题 五

1 . 当  $n$  为正整数时, 讨论  $J_n(x)$  的收敛范围 .

2 . 写出  $J_0(x), J_1(x), J_n(x)$  ( $n$  是正整数) 的级数表示式的前 5 项 .

3 . 证明  $J_{2n-1}(0) = 0$ , 其中  $n = 1, 2, 3, \dots$  .

4 .  $\frac{d}{dx} J_0(x) = ?$

5 .  $\frac{d}{dx} [xJ_1(x)] = ?$

6 . 计算积分

$$(1) \quad xJ_2(x) dx;$$

$$(2) \quad x^{n+1} J_n(ax) dx .$$

7 . 证明  $y = J_n(x)$  为方程

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0$$

的解 .

8 . 证明

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{x}} \left[ \frac{1}{x} \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) + \sin \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \right],$$

$$J_{\frac{5}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{x}} \left[ \left( 1 - \frac{3}{x^2} \right) \sin \left( x - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{3}{x} \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \right] .$$

9 . 试证  $y = x^{\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{2}}(x)$  是方程

$$x^2 y'' + (x^2 - 2) y = 0$$

的一个解 .

10 . 试证  $y = xJ_n(x)$  是方程

$$x^2 y'' - xy' + (1 + x^2 - n^2) y = 0$$

的一个解 .

11 . 设  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) 是方程  $J_1(x) = 0$  的正根, 将函数

$$f(x) = x \quad (0 < x < 1)$$

展开成贝塞尔函数  $J_1(\alpha_i x)$  的级数 .

12. 设  $\alpha_i (i = 1, 2, 3, \dots)$  是  $J_0(x) = 0$  的正根, 将函数  $f(x) = x^2 (0 < x < 1)$  展开成贝塞尔函数  $J_0(\alpha_i x)$  的级数.

13. 设  $\alpha_i (i = 1, 2, 3, \dots)$  是方程  $J_0(2x) = 0$  的正根, 将函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

展开成贝塞尔函数  $J_0(\alpha_i x)$  的级数.

14. 把定义在  $[0, a]$  上的函数展开成贝塞尔函数  $J_0\left[\frac{\alpha_i x}{a}\right]$  的级数, 其中  $\alpha_i$  是  $J_0(x)$  正零点.

15. 若  $\alpha_i (i = 1, 2, 3, \dots)$  是  $J_1(x)$  正零点, 证明

$$\int_0^R x J_0\left[\frac{\alpha_i}{R} x\right] J_0\left[\frac{\alpha_j}{R} x\right] dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \frac{R^2}{2} J_0^2(\alpha_i), & i = j. \end{cases}$$

16. 利用递推公式证明

$$(1) J_2(x) = J_0(x) - \frac{1}{x} J_1(x);$$

$$(2) J_3(x) + 3 J_1(x) + 4 J_0(x) = 0.$$

17. 试证

$$x^n J_0(x) dx = x^n J_1(x) + (n-1) x^{n-1} J_0(x) - (n-1)^2 x^{n-2} J_0(x) dx.$$

18. 试解下列圆柱区域的边值问题: 在圆柱内  $u = 0$ , 在圆柱侧面  $u|_{r=a} = 0$ , 在下底  $u|_{z=0} = 0$ , 在上底  $u|_{z=h} = A$ .

19. 解下列定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right], & t > 0, 0 < r < R, \\ u|_{t=0} = 1 - \frac{r^2}{R^2}, \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, & 0 < r < R, \\ u|_{r=0} < \infty, u|_{r=R} = 0, & t > 0. \end{cases}$$

若上述方程换成非齐次的, 即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = -B (B \text{ 为常数}),$$

而所有定解条件均为零,试求其解.

20. 证明整数阶贝塞尔函数的母函数为

$$W(x, t) = e^{\frac{x}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right)},$$

即

$$W(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n.$$

[提示:分别将  $e^{\frac{x}{2}t}$  与  $e^{-\frac{x}{2t}}$  展成  $t$  的幂级数.]

## 第六章 勒让德多项式

在这一章,我们将通过在球坐标系中对拉普拉斯方程进行分离变量,引出 § 2.6 中曾指出过的勒让德方程,并讨论这个方程的解法及解的有关性质. 勒让德方程在区间  $[-1, 1]$  上的有界解构成了另一类正交函数系——勒让德多项式.

### § 6.1 勒让德方程的引出

现在我们对球坐标系中的拉普拉斯方程进行分离变量,在球坐标系中拉普拉斯方程为

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0. \quad (6.1)$$

令  $u(r, \theta, \phi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\phi)$ ,

代入(6.1)得

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + R \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \\ + R \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0, \end{aligned}$$

以  $\frac{r^2}{R}$  乘上式各项得

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0,$$

或

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) = - \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2},$$

上式左端只与  $r$  有关,右端只与  $\theta, \phi$  有关,要它们相等只有当它

们都是常数时才有可能.为了以后的需要,我们把这个常数写成  $n(n+1)$  的形式(这是可以做到的,因为任何一个实数总可以写成这种形式,这里的  $n$  可能为实数,也有可能为复数),则得

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{dR}{dr} \right] = n(n+1), \quad (6.2)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \right] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2}{d\theta^2} = -n(n+1). \quad (6.3)$$

将方程(6.2)左端的导数计算出来,即有

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0.$$

这是一个欧拉方程,它的通解为

$$R(r) = A_1 r^n + A_2 r^{-(n+1)},$$

其中  $A_1, A_2$  为任意常数.

以  $\sin^2 \theta$  乘方程(6.3)的两端得

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \right] + n(n+1) \sin^2 \theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2}{d\theta^2} = 0,$$

即

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \right] + n(n+1) \sin^2 \theta = -\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2}{d\theta^2}.$$

此式的左端只与  $\theta$  有关,而右端只与  $\frac{1}{\sin^2 \theta}$  有关,因此只有当它们均为常数时才可能相等.和在 § 5.1 中对方程(5.9)的讨论一样,可知这个常数必须等于  $m^2$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ),从而得

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \right] + n(n+1) \sin^2 \theta = m^2, \quad (6.4)$$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2}{d\theta^2} = -m^2. \quad (6.5)$$

由方程(6.5)得

$$(\ ) = B_1 \cos m\theta + B_2 \sin m\theta.$$

至于  $(\ )$  所满足的微分方程可写为

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{d}{d\theta} \right] - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} + n(n+1) = 0.$$

把上式第一项中的导数计算出来,并化简得

$$\frac{d^2}{d^2} + \cot \frac{d}{d} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2} \right] = 0, \quad (6.6)$$

这个方程称为连带的勒让德(Legendre)方程.

如果引用  $x = \cos$  为自变量 ( $-1 \leq x \leq 1$ ), 并将 ( ) 改记成  $P(x)$ , 则 (6.6) 变成

$$(1-x^2) \frac{d^2 P}{dx^2} - 2x \frac{dP}{dx} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0. \quad (6.7)$$

若  $u(r, \theta)$  与  $\theta$  无关, 则从 (6.5) 可知  $m=0$ , 这时 (6.7) 简化成

$$(1-x^2) \frac{d^2 P}{dx^2} - 2x \frac{dP}{dx} + n(n+1)P = 0, \quad (6.8)$$

方程 (6.8) 就是 § 2.6 中所述的勒让德方程. 一些定解问题的解决也归结为求勒让德方程的特征值与特征函数, 这个方程的解将在下面讨论.

## § 6.2 勒让德方程的求解

把 (6.8) 中的未知函数仍记成  $y$ , 则勒让德方程为

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0, \quad (6.9)$$

其中  $n$  为任意实数 (由于在实际应用中  $n$  为整数时的情况最为重要, 所以我们这里不考虑  $n$  为复数的情况).

如同求贝塞尔方程的解一样, 设 (6.9) 的解为

$$\begin{aligned} y &= x^c (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+c}, \quad a_0 \neq 0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

求上式的导数, 并与 (6.10) 一起代入 (6.9) 得

$$- \sum_{k=0}^{\infty} [(k+c)(k+c+1) - n(n+1)] a_k x^{k+c} +$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+c)(k+c-1) a_k x^{k+c-2} = 0.$$

经过适当的整理可得

$$\begin{aligned} & c(c-1) a_0 x^{c-2} + c(c+1) a_1 x^{c-1} + \\ & \sum_{k=0}^{\infty} \{ (k+c+2)(k+c+1) a_{k+2} - \\ & [(k+c)(k+c+1) - n(n+1)] a_k \} x^{k+c} = 0, \end{aligned} \quad (6.11)$$

这是  $x$  的恒等式, 所以  $x$  的各次幂的系数必全为零, 即

$$c(c-1) a_0 = 0, \quad (6.12)$$

$$c(c+1) a_1 = 0, \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} & (k+c+2)(k+c+1) a_{k+2} - [(k+c)(k+c+1) - \\ & n(n+1)] a_k = 0, \quad k=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.14)$$

由(6.12)得  $c=0$  或  $c=1$ , 由(6.13)得  $c=0$  或  $c=-1$  (设  $a_1 \neq 0$ ), 由(6.14)便得到系数  $a_k$  之间的递推关系

$$a_{k+2} = \frac{(k+c)(k+c+1) - n(n+1)}{(k+c+1)(k+c+2)} a_k \quad (k=0, 1, 2, \dots),$$

取  $c=0$ , 得

$$a_{k+2} = \frac{(k-n)(k+n+1)}{(k+2)(k+1)} a_k \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (6.15)$$

这时  $a_0, a_1$  都是任意常数. 在上面递推公式中令  $k=0, 2, \dots, 2i, \dots$ , 分别得

$$a_2 = \frac{-n(n+1)}{2!} a_0,$$

$$a_4 = (-1)^2 \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} a_0,$$

.....

$$a_{2i} = (-1)^i \frac{n(n-2)\dots(n-2i+2)(n+1)(n+3)\dots(n+2i-1)}{(2i)!} a_0,$$

.....

在(6.15)中令  $k = 1, 3, \dots, 2i - 1, \dots$  分别得

$$a_3 = - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} a_1,$$

$$a_5 = (-1)^2 \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} a_1,$$

.....

$$a_{2i+1} =$$

$$(-1)^i \frac{(n-1)(n-3)\dots(n-2i+1)(n+2)(n+4)\dots(n+2i)}{(2i+1)!} a_1.$$

将这些值代入级数(6.10), 使得

$$\begin{aligned} y = a_0 & \left[ 1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} x^4 + \dots \right] \\ & + a_1 \left[ x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \right. \\ & \left. \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (6.16)$$

由于  $a_0, a_1$  的任意性, 所以函数

$$y_1 = a_0 \left[ 1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} x^4 + \dots \right], \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} y_2 = a_1 & \left[ x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \right. \\ & \left. \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 + \dots \right] \end{aligned} \quad (6.18)$$

分别都是方程(6.9)的解, 显然在  $a_0 \neq 0, a_1 \neq 0$  的情况下, 它们是线性无关的.

如果开始时取  $c = 1$ , 重复前面的做法, 所得的级数解就是  $y_2$ ; 同样, 如果取  $c = -1$ , 所得级数就是  $y_1$ , 这里不再赘述, 读者可自己验算.

从系数的递推公式(6.15)容易证明这两个级数的收敛半径都



为 1, 故在  $(-1, 1)$  内 (6.16) 式即为方程 (6.9) 的通解.

## § 6.3 勒让德多项式

上面我们求出了方程 (6.9) 的解, 并且从 (6.17) 与 (6.18) 可以看出, 当  $n$  不是整数时,  $y_1$  与  $y_2$  都是无穷级数, 在  $|x| < 1$  内它们都绝对收敛, 可以证明在  $x = \pm 1$  时发散, 且此时勒让德方程的解不可能在  $x = +1$  和  $x = -1$  处为有限.

当  $n$  是整数时, 则  $y_1$  或者  $y_2$  便成为多项式, 例如  $n$  是正偶数 (或负奇数) 时  $y_1$  是  $n$  次 (或  $-n-1$  次) 多项式, 而当  $n$  是正奇数 (或负偶数) 时,  $y_2$  是  $n$  次 (或  $-n-1$  次) 多项式. 在实际运用中, 这种特殊情况常常出现, 现在我们就来给出这个多项式的表达式.

将 (6.15) 式改写成如下形式:

$$a_k = - \frac{(k+2)(k+1)}{(n-k)(k+n+1)} a_{k+2} \quad (k \leq n-2),$$

于是可以通过多项式的最高次项系数  $a_n$  来表示其他各次项的系数:

$$a_{n-2} = - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} a_n,$$

$$a_{n-4} = - \frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)} a_{n-2} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} a_n,$$

$$\begin{aligned} a_{n-6} &= - \frac{(n-4)(n-5)}{6(2n-5)} a_{n-4} \\ &= - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2 \cdot 4 \cdot 6(2n-1)(2n-3)(2n-5)} a_n, \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

---

例如, 可参阅 . 菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》二卷二分册第 279 页中高斯判别法或梁昆森编《数学物理方法》, 1979 年版附录十.

为了使这些表达式能够写成比较简洁的形式,并且使所得的多项式在  $x = 1$  处取的值等于 1(见习题六中第 1 题),我们取  $a_n$  为

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{n!} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

从而相应地有

$$\begin{aligned} a_{n-2} &= -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \cdot \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \\ &= -\frac{n(n-1)2n(2n-1)(2n-2)!}{2(2n-1)2^n n(n-1)! n(n-1)(n-2)!} \\ &= -\frac{(2n-2)!}{2^n (n-1)! (n-2)!}, \\ a_{n-4} &= -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)} \left[ -\frac{(2n-2)!}{2^n (n-1)! (n-2)!} \right] \\ &= \frac{(n-2)(n-3)(2n-2)(2n-3)(2n-4)!}{4 \cdot 2^n (2n-3)(n-1)(n-2)! (n-2)(n-3)(n-4)!} \\ &= \frac{(2n-4)!}{2^n 2! (n-2)! (n-4)!}, \\ a_{n-6} &= -\frac{(2n-6)!}{2^n 3! (n-3)! (n-6)!}, \end{aligned}$$

一般说来,当  $n-2m \geq 0$  时,我们有:

$$a_{n-2m} = (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m! (n-m)! (n-2m)!}.$$

如果  $n$  是正偶数,将这些系数代入(6.17)得到

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n - \frac{(2n-2)!}{2^n (n-1)! (n-2)!} x^{n-2} + \dots \\ &= \sum_{m=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m! (n-m)! (n-2m)!} x^{n-2m}, \end{aligned}$$

如果  $n$  是正奇数,将上面的  $a_{n-2m}$  表达式代入(6.18)式得到

$$y_2 = \sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m! (n-m)! (n-2m)!} x^{n-2m}.$$

把这两个多项式写成统一的形式,得

$$P_n(x) = \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m! (n-m)! (n-2m)!} x^{n-2m}, \quad (6.19)$$

其中

$$M = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数时,} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{当 } n \text{ 为奇数时.} \end{cases}$$

这个多项式称为  $n$  次的勒让德多项式 (或称为第一类勒让德函数) .

特别是,当  $n=0, 1, 2, 3, 4, 5$  时,分别有

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$

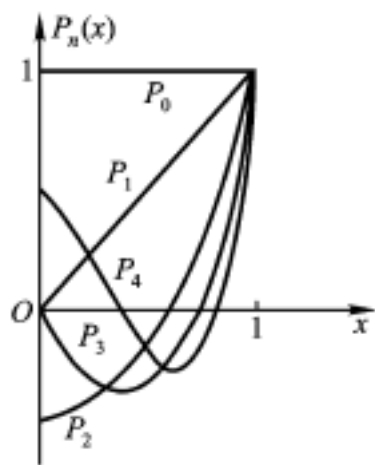


图 6-1

它们的图形如图 6-1 所示 .

为了后面应用起来方便,我们可将

$P_n(x)$  写成

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad (6.20)$$

的形式, (6.20) 式称为勒让德多项式的罗德里格斯 (Rodrigues) 表达式. 要验证这个公式, 只需要利用二项式定理将  $(x^2 - 1)^n$  展开, 然后逐项求  $n$  阶导数, 读者自己验证一下 .

综合上述, 可得如下结论:

当  $n$  不是整数时, 方程 (6.9) 的通解为  $y = y_1 + y_2$ , 其中  $y_1$ ,

$y_2$  分别由(6.17)和(6.18)确定,而且它们在闭区间 $[-1, 1]$ 上是无界的,所以此时方程(6.9)在 $[-1, 1]$ 上无有界的解.

当  $n$  为整数时,在  $a_n$  适当选定之后,  $y_1$  与  $y_2$  中有一个是勒让德多项式  $P_n(x)$ ,另一个仍是无穷级数,记作  $Q_n(x)$ ,此时方程(6.9)的通解为

$$y = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x),$$

其中  $Q_n(x)$  称为第二类勒让德函数,它在闭区间 $[-1, 1]$ 上仍是无界的.

## § 6.4 函数展成勒让德多项式的级数

在应用勒让德多项式解决数学物理方程的定解问题时,需要将给定在区间 $(-1, 1)$ 内的函数按勒让德多项式展开为无穷级数.为此,首先要证明不同阶数的所有勒让德多项式的全体构成一个正交函数系,(勒让德多项式 $\{P_n(x)\} (n=0, 1, \dots)$ 的正交性也可以直接从§2.6中的结论3推知,读者想想是何道理?)然后再讨论把定义在 $(-1, 1)$ 内的函数展成勒让德多项式的无穷级数的方法.

### 6.4.1 勒让德多项式的正交性

现在我们来讨论勒让德多项式的正交性,即要证明

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases} \quad (6.21)$$

为了证明(6.21),我们先证明下列简单的等式:

$$\int_{-1}^1 x^k P_n(x) dx = 0, \quad (6.22)$$

其中  $k$  为小于  $n$  的正整数.

利用分部积分法,得

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 x^k P_n(x) dx &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2^n n!} x^k \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n dx \\
 &= \frac{x^k}{2^n n!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n \Big|_{-1}^1 \\
 &\quad - \frac{k}{2^n n!} \int_{-1}^1 x^{k-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n dx.
 \end{aligned}$$

利用莱布尼茨(Leibnitz)公式将  $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n$  展开, 因为其中每一项都含有  $x - 1$ ,  $x + 1$  这两个因子, 所以上式第一项等于零. 第二项的积分继续使用分部积分法, 经过  $k$  次之后得

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 x^k P_n(x) dx &= (-1)^k \frac{k!}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x^2 - 1)^n dx \\
 &= (-1)^k \frac{k!}{2^n n!} \frac{d^{n-(k+1)}}{dx^{n-(k+1)}} (x^2 - 1)^n \Big|_{-1}^1 = 0.
 \end{aligned}$$

在(6.21)中, 当  $m \neq n$  时, 不论  $m < n$  或  $m > n$ , 总可以把它化成有限个形如(6.22)左端积分之和, 故有

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0.$$

当  $m = n$  时, 还是反复使用分部积分法, 即

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n dx \\
 &= \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} \left\{ \left[ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \right]_{-1}^1 \right. \\
 &\quad \left. - \int_{-1}^1 \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2 - 1)^n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n dx \right\} \\
 &= - \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (x^2 - 1)^n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (x^2 - 1)^n dx.
 \end{aligned}$$

经过  $n$  次这样运算之后, 得

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = (-1)^n \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 \left[ \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2 - 1)^n \right] (x^2 - 1)^n dx$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^n \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 \left[ \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} x^{2n} \right] (x^2 - 1)^n dx \\
&= (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx.
\end{aligned}$$

作代换  $x = \cos \theta$ , 则  $(x^2 - 1)^n = (-1)^n \sin^{2n} \theta$ ,  $dx = -\sin \theta d\theta$ , 因而

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx &= \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_0^\pi \sin^{2n+1} \theta d\theta \\
&= \frac{2(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} \theta d\theta \\
&= \frac{2(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{2n(2n-2)\dots 4 \cdot 2}{(2n+1)(2n-1)\dots 5 \cdot 3} \\
&= \frac{2(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{2^n n!}{(2n+1)(2n-1)\dots 5 \cdot 3} \\
&= \frac{2(2n)!}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}.
\end{aligned}$$

至此, 正交关系式(6.21)完全得到了证明. 和贝塞尔函数一样, 通常我们也把定积分  $\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx$  的正平方根称为勒让德多项式的模值.

#### 6.4.2 函数展成勒让德多项式的级数

有了(6.21)式, 我们就可以讨论函数按勒让德多项式展开的问题了. 设函数  $f(x)$  满足 §2.6 所述按特征函数展开的条件, 则  $f(x)$  可以表示为

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x), \quad -1 < x < 1, \quad (6.23)$$

为了求出系数  $C_n$ , 在(6.23)式两端同乘  $P_n(x)$  并在区间  $(-1, 1)$  上积分, 得

$$\int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \int_{-1}^1 P_k(x) P_n(x) dx = C_n \frac{2}{2n+1},$$

所以