WIKIPEDIA

欧拉方程 (流体动力学)

维基百科，自由的百科全书

本条目讨论流体动力学。对于其它意义的欧拉方程，参看欧拉方程。

在流体动力学中，**欧拉方程**是一组支配无黏性流体运动的方程，以莱昂哈德·欧拉命名。方程组各方程分别代表质量守恒（连续性）、动量守恒及能量守恒，对应零黏性及无热传导项的纳维－斯托克斯方程。历史上，只有连续性及动量方程是由欧拉所推导的。然而，流体动力学的文献常把全组方程——包括能量方程——称为"欧拉方程"[1]。

跟纳维－斯托克斯方程一样，欧拉方程一般有两种写法："守恒形式"及"非守恒形式"。守恒形式强调物理解释，即方程是通过一空间中某固定体积的守恒定律；而非守恒形式则强调该体积跟流体运动时的变化状态。

欧拉方程可被用于可压缩性流体，同时也可被用于非压缩性流体——这时应使用适当的状态方程，或假设流速的散度为零。

本条目假设经典力学适用；当可压缩流的速度接近光速时，详见相对论性欧拉方程。

目录

历史

第一份印有欧拉方程的出版物是欧拉的论文《流体运动的一般原理》（Principes généraux du mouvement des fluides），发表于1757年，刊载于《柏林科学院论文集》（Mémoires de l'Academie des Sciences de Berlin）。它们是最早被写下来的一批偏微分方程。在欧拉发表他的研究之时，方程组只有动量方程及连续性方程，因此只能完整描述非压缩性流体；在描述可压缩性流体时，会因条件不足而不能提供唯一解。在1816年，皮埃尔-西蒙·拉普拉斯添加了一条方程，第三条方程后来被称为绝热条件。

在十九世纪的后半期，科学家们发现，与能量守恒相关的方程在任何时间都得被遵守，而绝热条件则只会在有平滑解的情况下会被遵守，因为该条件是由平滑解时的基础定律所造成的后果。在发现了狭义相对论之后，能量密度、质量密度及应力这三个概念，被统一成应力-能量张量这一个概念；而能量及动量也同样被统一成一个概念——能量-动量张量[2]。

守恒形式（分量）

以下是用微分形式写成的欧拉方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes (\rho \mathbf{u})) + \nabla p = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}(E + p)) = 0,$$

其中

- ρ为流体的质量密度；
- $\mathbf{u}$ 为流体速度矢量，分量为u、v及w；
- $E = \rho e + ½ \rho (u^2 + v^2 + w^2)$为每一单位容量所含的总能量，其中$e$为流体每一单位容量所含的内能；
- p为压力；
- $\otimes$代表张量积。

第二条方程包含了一并矢积的散度，用下标标记（每一个j代表从1至3）表示会较易明白：

$$\frac{\partial (\rho u_j)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial (\rho u_i u_j)}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_j} = 0,$$

其中i及j下标各代表直角坐标系的三个分量：$(x_1 , x_2 , x_3) = (x , y , z)$及$(u_1 , u_2 , u_3) = (u , v , w)$。

注意以上方程是用守恒形式的，而守恒形式强调的是方程的物理起因（因此在计算流体力学中的电脑模拟上使用这种形式最方便）。而代表动量守恒的第二条方程可用非守恒形式表示：

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} + \nabla p = 0$$

但是在这个形式上，会比较看不出欧拉方程与牛顿第二运动定律的直接关联。

守恒形式（矢量）

以下是用矢量及守恒形式写成的欧拉方程：

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{f}_z}{\partial z} = 0,$$

其中

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{f}_x = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(E+p) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{f}_y = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \\ \rho vw \\ v(E+p) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{f}_z = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ p + \rho w^2 \\ w(E+p) \end{pmatrix}.$$

在这个形式下，不难看出$\mathbf{f}_x$、$\mathbf{f}_y$及$\mathbf{f}_z$是通量。

以上方程分别代表质量守恒、动量的三个分量及能量。里面有五条方程，六个未知数。封闭系统需要一条状态方程；最常用的是理想气体定律（即$p = \rho\ (\gamma-1)\ e$，其中ρ为密度，γ为绝热指数，e为内能）。

注意能量方程的奇特形式；见蓝金-雨果尼厄方程。附加含p的项可被诠释成相邻的流体元对某流体元所作的机械功。在非压缩性流体中，这些附加项的总和为零。

取流线上欧拉方程的积分，假设密度不变，及状态方程具有足够的刚性，可得有名的伯努利定律。

非守恒形式（通量雅可比矩阵）

在构建数值解，例如求雷曼问题的近似解的时候，展开通量可以是很重要的一环。使用上面以矢量表示的守恒形式方程，展开其通量可得非守恒形式如下：

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} + \mathbf{A}_x \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x} + \mathbf{A}_y \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial y} + \mathbf{A}_z \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial z} = 0.$$

其中$\mathbf{A}_x$、$\mathbf{A}_y$及$\mathbf{A}_z$为通量雅可比矩阵，各矩阵为：

$$\mathbf{A}_x = \frac{\partial \mathbf{f}_x(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}}, \qquad \mathbf{A}_y = \frac{\partial \mathbf{f}_y(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}}, \qquad \mathbf{A}_z = \frac{\partial \mathbf{f}_z(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}}.$$

上式中这些通量雅可比矩阵$\mathbf{A}_x$、$\mathbf{A}_y$及$\mathbf{A}_z$，还是状态矢量$\mathbf{m}$的函数，因此这种形式的欧拉方程跟原方程一样，都是非线性方程。在状态矢量$\mathbf{m}$平滑变动的区间内，这种非守恒形式跟原来守恒形式的欧拉方程是相同的。

理想气体的通量雅可比矩阵

将理想气体定律用作状态方程，可推导出完整的雅可比矩阵形式，矩阵如下[3]：

理想气体的通量雅可比矩阵

x方向的通量雅可比矩阵：

$$\mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}H - u^2 - a^2 & (3-\gamma)u & -\hat{\gamma}v & -\hat{\gamma}w & \hat{\gamma} \\ -uv & v & u & 0 & 0 \\ -uw & w & 0 & u & 0 \\ u[(\gamma-2)H - a^2] & H - \hat{\gamma}u^2 & -\hat{\gamma}uv & -\hat{\gamma}uw & \gamma u \end{bmatrix}.$$

y方向的通量雅可比矩阵：

$$\mathbf{A}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -vu & v & u & 0 & 0 \\ \hat{\gamma}H - v^2 - a^2 & -\hat{\gamma}u & (3-\gamma)v & -\hat{\gamma}w & \hat{\gamma} \\ -vw & 0 & w & v & 0 \\ v[(\gamma-2)H - a^2] & -\hat{\gamma}uv & H - \hat{\gamma}v^2 & -\hat{\gamma}vw & \gamma v \end{bmatrix}.$$

z方向的通量雅可比矩阵：

$$\mathbf{A}_z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -uw & w & 0 & u & 0 \\ -vw & 0 & w & v & 0 \\ \hat{\gamma}H - w^2 - a^2 & -\hat{\gamma}u & -\hat{\gamma}v & (3-\gamma)w & \hat{\gamma} \\ w[(\gamma-2)H - a^2] & -\hat{\gamma}uw & -\hat{\gamma}vw & H - \hat{\gamma}w^2 & \gamma w \end{bmatrix}.$$

其中$\hat{\gamma} = \gamma - 1$.

总焓H为：

$$H = \frac{E}{\rho} + \frac{p}{\rho},$$

及声速a为：

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{(\gamma - 1)\left[H - \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right)\right]}.$$

线性化形式

将含通量雅可比矩阵的非守恒形式，在状态$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_0$的周围线性化后，可得线性化欧拉方程如下：

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t} + \mathbf{A}_{x,0}\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x} + \mathbf{A}_{y,0}\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial y} + \mathbf{A}_{z,0}\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial z} = 0,$$

其中$\mathbf{A}_{x,0}$、$\mathbf{A}_{y,0}$及$\mathbf{A}_{z,0}$分别为$\mathbf{A}_x$、$\mathbf{A}_y$及$\mathbf{A}_z$于某参考状态$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_0$的值。

线性化一维的非耦合波方程

如果弃用守恒变量而改用特征变量的话，欧拉方程可被变换成非耦合波方程。举例说，考虑以线性通量雅可比矩阵形式表示的一维（1-D）欧拉方程：

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial t}+\mathbf{A}_{x,0}\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x}=0.$$

矩阵$\mathbf{A}_{x,0}$可被对角化，即可将其分解成：

$$\mathbf{A}_{x,0}=\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1},$$

$$\mathbf{P}=[\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,\mathbf{r}_3]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ u-a & u & u+a\\ H-ua & \frac{1}{2}u^2 & H+ua\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u-a & 0 & 0\\ 0 & u & 0\\ 0 & 0 & u+a\end{bmatrix}.$$

上式中，$\mathbf{r}_1$、$\mathbf{r}_2$及$\mathbf{r}_3$为矩阵$\mathbf{A}_{x,0}$的右特征矢量（若$\boldsymbol{Ax_R=\lambda_R x_R}$，，则x_R为右特征矢量），而$\lambda_1$、$\lambda_2$及$\lambda_3$则为对应的特征值。

设特征变量为：

$$\mathbf{w}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{m},$$

由于$\mathbf{A}_{x,0}$不变，原来的一维通量雅可比矩阵方程，乘上$\mathbf{P}^{-1}$后可得：

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}+\mathbf{\Lambda}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}=0$$

经过这样的处理后，方程实际上已经被非耦合化，而且可被视作三条波方程，其中特征值为波速。变量w_i为雷曼不变量，或在一般的双曲系统中为特征变量。

冲击波

欧拉方程为非线性双曲方程，而它们的通解为波。与海浪一样，由欧拉方程所描述的波碎掉后，所谓的冲击波就会形成；这是一种非线性效应，所以其解为多值函数（即函数内的某自变量会产生多个因变量）。物理上这代表构建微分方程时所用的假设已经崩溃，如果要从方程上取得更多信息，就必须回到更基础的积分形式。然后，在构建弱解时，需要使用蓝金-雨果尼厄冲击波条件，在流动的物理量中避开不连续点“跳跃”，上述物理量有密度、速度、压力及熵。物理量很少会出现不连续性；在现实的流动中，黏性会把这些不连续点平滑化。

许多领域都有研究冲击波的传播，尤其是出现流动处于足够高速的领域，例如空气动力学及火箭推进。

一维中的方程

在某些问题中，特别是分析导管中的可压缩流，或是当流动呈圆柱或球状对称的时候，一维欧拉方程都是很有用的近似法。一般来说，解欧拉方程会用到黎曼的特征线法。首先需要找出特征线，这条曲线位于两个独立变量（即x及t）所构成的平面上，在这条线上偏微分方程（PDE）会退化成常微分方程（ODE）。欧拉方程的数值解法非常倚赖特征线法。

注释

1. Anderson, John D. (1995), Computational Fluid Dynamics, The Basics With Applications. ISBN 0-07-113210-4
2. Christodoulou, Demetrios. The Euler Equations of Compressible Fluid Flow (PDF). Bulletin of the American Mathematical Society. October 2007, **44** (4): 581–602 [June 13, 2009]. doi:10.1090/S0273-0979-07-01181-0.
3. 见Toro (1999)

资料来源及延伸阅读

- Batchelor, G. K. An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press. 1967. ISBN 0521663962.
- Thompson, Philip A. Compressible Fluid Flow. New York: McGraw-Hill. 1972. ISBN 0070644055.
- Toro, E.F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Springer-Verlag. 1999. ISBN 3-540-65966-8.