## Feuille d'exercice n° 27 : **Déterminants**

Exercice 1 ( ) On pose  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  et  $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ . Écrire  $\sigma\theta$  et  $\sigma^{-1}$  sous forme de produits de cycles de supports disjoints et déterminer les signatures de ces permutations.

Exercice 2 ( 
$$\bigcirc$$
 ) Soit  $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 6 & 4 & 2 & 1 & 7 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ .

Décomposer s en produit de cycles à supports disjoints, puis en produit de transpositions. Donner la signature de s.

Exercice 3 ( ) Écrire la permutation  $\tau = (1,2)(2,4,6,5)(1,3,7)(2,5,4)(3,5,6,1)(2,5)(1,4,6)$  sous forme d'un produit de cycles de supports disjoints. Quelle est la signature de  $\tau$ ?

Exercice 4 ( ) Calculer la signature des permutations suivantes.

1) 
$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 6 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$
 2)  $g = (1,3,4)(2,4,3,1)(2,3)$  3)  $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ 

## Exercice 5

- 1) Montrer que les transpositions (1 i) (pour  $i \in [2, n]$ ) engendrent le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ .
- 2) Montrer que les transpositions (i i+1) (pour  $i \in [1, n-1]$ ) engendrent le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$ .
- 3) Montrer que les cycles de longueur 3 engendrent  $\mathfrak{A}_n$ .
- 4) Montrer que les cycles de la forme  $(1 \ i \ j)$  avec  $i, j \in [2, n], i \neq j$ , engendrent  $\mathfrak{A}_n$ .
- **5)** Montrer que les cycles de la forme  $(1\ 2\ j)$  avec  $j \in [3, n]$ , engendrent  $\mathfrak{A}_n$ .

**Exercice 6** ( $^{\bigcirc}$ ) Dans chacun des cas ci-dessous, dire si l'application de  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$  considérée est multilinéaire.

1) 
$$\varphi: \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \longmapsto x_1 + y_2 + z_3$$

$$\mathbf{2)} \ \chi: \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) \longmapsto x_1 y_3 + y_2 z_1 + z_3 x_2$$

**3)** 
$$\psi: \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \longmapsto x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2$$

4) 
$$\omega: \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \longmapsto x_1 x_2 x_3 + y_1 y_2 y_3 + z_1 z_2 z_3$$

$$\mathbf{5)} \ \alpha: \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) \longmapsto x_1 y_1 z_1 + x_2 y_2 z_2 + x_3 y_3 z_3$$

**6)** 
$$\beta: \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \longmapsto (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)(z_1 + z_3)$$

7) 
$$\gamma: \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \longmapsto (x_1 + 2x_2)(z_1 + z_3)$$

**Exercice 7** ( $^{\otimes}$ ) Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  anti-symétrique. Calculer  $\det(A)$ . Ce résultat vaut-il encore pour  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ?

Généraliser ceci.

**Exercice 8** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On suppose qu'il existe  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  tel que  $B = P^{-1}AP$ . Montrer qu'il existe  $Q \in GL_n(\mathbb{R})$  tel que  $B = Q^{-1}AQ$ .

Indice: avec P = R + iS, tel que  $R, S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on pourra montrer que RB = AR, SB = AS et en déduire que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , (R + tS)B = A(R + tS).

Exercice 9 (%) – Déterminant circulant –

Soit  $(a,b,c) \in (\mathbb{K})^3$ . On note  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ , et l'on considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \qquad \text{et } V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}.$$

Calculer le produit AV, puis det(V) et det(AV), et en déduire det(A).

**Exercice 10** Pour quelles valeurs de  $k \in \mathbb{K}$  les matrices suivantes sont-elles inversibles?

**1)** 
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & k \end{pmatrix}$$
 **2)**  $B = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 2 & -1 & k \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 

Exercice 11 ( ) Calculer les déterminants suivants.

$$\mathbf{1)} \ \alpha = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{2)} \ \beta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{3)} \ \gamma = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 12 Montrer que :  $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$  est divisible par  $(x-1)^3$ .

Exercice 13 On note a, b, c [...] des réels. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & x & y & z \\ b & x & y & z \\ c & x' & y' & z' \\ d & x' & y' & z' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+a & b & a & b \\ b & 1+a & b & a \\ a & b & 1+a & b \\ b & a & b & 1+a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & a & a^2 & b+c+d \\ a & b & b^2 & c+d+a \\ a & c & c^2 & d+a+b \\ a & d & d^2 & a+b+c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & a & 0 & 3 \\ b & a & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a+b+c & b & b & b \\ c & a+b+c & b & b \\ c & c & a+b+c & b \\ c & c & c & a+b+c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p & 1 & 0 \\ 1 & p & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14 ( $\stackrel{\triangleright}{\triangleright}$ ) Calculer les déterminants suivants, d'ordre  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$$\mathbf{1)} \ A_{n} = \begin{vmatrix} 1+x^{2} & x & & & 0 \\ x & 1+x^{2} & x & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & x & 1+x^{2} & x \\ & & & x & 1+x^{2} & x \\ 0 & & & x & 1+x^{2} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{2)} \ B_{n} = \begin{vmatrix} a_{1}+b_{1} & a_{1} & \dots & a_{1} \\ a_{2} & a_{2}+b_{2} & a_{2} & \dots & a_{2} \\ a_{3} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n} & \dots & \dots & a_{n} & a_{n}+b_{n} \end{vmatrix}$$

2

**Exercice 15** Soit  $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ . Calculer les déterminants des matrices suivantes.

1) 
$$\left(\sin(a_i+a_j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$
 2)  $\left(\cos\left((i-1)a_j\right)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 

**Exercice 16** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in [0, n]$ . On définit la matrice  $A_{n,p}$  de  $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$  par :

$$A_{n,p} = \begin{pmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{p} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} & \dots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \binom{n+p}{1} & \binom{n+p}{2} & \dots & \binom{n+p}{p} \end{pmatrix}.$$

Calculer  $\det A_{n,p}$ .

**Exercice 17** ( Soit f l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique (notée  $\mathscr{C}$ ) est  $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

- 1) On appelle valeur propre de f tout scalaire  $\lambda$  pour lequel  $f \lambda \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}$  n'est pas injective. Déterminer toutes les valeurs propres de f en calculant un déterminant. On notera  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  ces valeurs propres, avec  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ .
- 2) Si  $\lambda$  est une valeur propre de f, on appelle sous-espace propre de f associé à  $\lambda$  le noyau de  $f \lambda \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3}$ . Déterminer les trois sous-espaces propres de f. On appellera  $E_i$  le sous-espace propre associé à  $\lambda_i$ , et on le notera  $E_i = \operatorname{Vect}(v_i)$ , pour un vecteur  $v_i$  à déterminer.
- 3) Écrire la matrice de f dans la base  $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ . De quelle forme est-elle?

