Semaine 1 du 15 septembre 2025 (S38)

Trigonométrie et nombres imaginaires

1 Relation de congruence modulo un réel

2 Les fonctions sinus, cosinus et tangente

2.1 Définitions géométriques

2.2 Résultats admis

3 Modes de repérage dans le plan et angles orientés

3.1 Coordonnées cartésiennes

3.2 Angles orientés de vecteurs

3.3 Angles orientés de droites

3.4 Cercle trigonométrique

3.5 Coordonnées polaires

4 Trigonométrie

4.1 Angles remarquables

4.2 Propriétés élémentaires

4.3 Équations trigonométriques

4.4 Formules trigonométriques

La preuve des formules d'addition n'est pas exigible. Les étudiants doivent savoir retrouver tout le formulaire trigonométrique à partir des formules d'addition.

4.5 Régularité des fonctions trigonométriques circulaires

La preuve géométrique de l'inégalité $0 \leqslant x\cos(x) \leqslant \sin(x) \leqslant x$ pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ n'est pas exigible. On pourra demander d'en déduire les résultats de cette partie.

5 Nombres imaginaires

Aucune construction du corps des nombres complexes n'a été donnée, et aucune notion de structure algébrique n'a été vue. Les règles de calcul sur les nombres complexes ont été introduites géométriquement, aucun travail formel n'a été fait dessus.

5.1 Bref aperçu historique

Rien d'exigible dans cette partie.

5.2 Une définition géométrique

5.3 Écriture trigonométrique d'un complexe

5.4 Multiplication de deux complexes

5.5 Conjugué et module d'un nombre complexe

5.6 Inverse d'un nombre complexe non nul

5.7 Technique de l'angle moitié

Questions de cours

Ces questions de cours sont à savoir traiter, et non à apprendre par cœur.

Les colleurs sont libres de demander tout ou partie d'une de ces questions de cours, mais aussi de mélanger les différentes questions ou de donner des exemples numériques différents de ceux proposés.

L'évaluation de la maîtrise du cours ne se limite pas à la question de cours : la connaissance des définitions et théorèmes du cours pourra être évaluée à tout moment de la colle.

— Donner les valeurs remarquables des fonctions cos, sin et tan sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

— Donner les valeurs de $\cos(x \pm \pi)$, $\sin(x \pm \pi)$, $\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right)$, $\cos(-x)$, $\sin(-x)$, $\cos(\pi - x)$, $\sin(\pi - x)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$; on illustrera ces propriétés par un dessin.

— Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Retrouver à partir des formules d'addition la formule de factorisation de $\cos(a) + \cos(b)$ (ou $\cos(a) - \cos(b)$, ou $\sin(a) + \sin(b)$, ou $\sin(a) - \sin(b)$).

— Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Retrouver la formule donnant $\tan(a + b)$. Est-elle toujours valide ?

— Retrouver les expressions de $\cos(2a)$ et $\sin(2a)$ en fonction de $\tan(a)$.

— Soit $b \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel a pour que $\cos a = \cos b$.
Résoudre l'équation $\cos(3x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

— Soit $b \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel a pour que $\sin a = \sin b$.
Résoudre $\sin(4x) = \frac{1}{2}$.

— Soit $b \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel a pour que $\tan a = \tan b$.
Résoudre l'équation $\tan(5x) = 1$.

— Démontrer que les fonctions sin et cos sont continues ; on admettra que pour tout $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant x\cos(x) \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

— Démontrer que les fonctions sin et cos sont dérivables et déterminer leurs dérivées ; on admettra que pour tout $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant x\cos(x) \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

— Rappeler et justifier l'expression de la fonction $\tan'$, sans oublier son ensemble de définition.

— Après avoir rappelé ses propriétés de parité et de périodicité, tracer la courbe représentative de la fonction cosinus (ou sinus, ou tangente).
On prendra soin de faire apparaître les éléments remarquables.

— Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $A, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a\cos t + b\sin t = A\cos(t - \varphi)$.

— Définition et propriétés du conjugué d'un nombre complexe.

— Mettre sous forme trigonométrique/exponentielle et algébrique le nombre complexe $\dfrac{2 - 2i}{\sqrt{3} + i}$

— Soit $z \in \mathbb{C}$. Donner et démontrer les expressions de $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $|z|^2$ en fonction de z et $\bar{z}$.

— Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Que peut-on dire de $|zz'|$ (avec démonstration), de $|z + z'|$ (sans démonstration) ?

— Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Exprimer $\mathrm{Re}(z + z')$, $\mathrm{Im}(z + z')$, $\mathrm{Re}(zz')$, $\mathrm{Im}(zz')$ en fonction de $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $\mathrm{Re}(z')$, $\mathrm{Im}(z')$.

— Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Factoriser par la technique de l'angle moitié $\mathrm{e}^{ix} \pm \mathrm{e}^{iy}$; on détaillera la factorisation.
(On pourra demander une factorisation pour des valeurs choisies de x et y)