Devoir à la maison n° 8

À rendre le 3 décembre

Soit d_1, d_2, …, d_9, neuf entiers relatifs distincts.
On note $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & (n+d_1)\times\cdots\times(n+d_9) \end{array}$
L'objectif de ce problème est de montrer qu'il existe $N \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $f(n)$ est divisible par un nombre premier supérieur ou égal à 20.
On se place pour commencer dans le cas où d_1, …, d_n sont des entiers strictement positifs.
On note H le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à 20 et $p_1, \dots, p_H$ ces entiers.

1) Déterminer H.

2) On pose $d = \max(d_1, \dots, d_9)$ et $N = d^8$. On suppose par l'absurde qu'il existe $n \geqslant N$ tel que tous les diviseurs premiers de $f(n)$ soient inférieurs ou égaux à 20.
Montrer alors que pour tout $i \in \{ 1, \dots, 9 \}$, il existe un nombre premier q_i avec $q_i \leqslant 20$ et un entier α_i tels que $q_i^{\alpha_i} | n + d_i$ et $q_i^{\alpha_i} > d$.

3) En déduire qu'il existe i et j avec $i \neq j$ tels que $q_i = q_j$.

4) Montrer qu'alors $q_i^{\min(\alpha_i,\alpha_j)}$ divise $d_i - d_j$.

5) En déduire une absurdité.

6) Conclure.

7) On se place maintenant dans le cas général, c'est-à-dire qu'on ne suppose plus que d_1, …, d_9 sont strictement positifs. Montrer que le résultat est encore vrai et donner, en fonction de d_1, …, d_9, une valeur de N convenant.

— FIN —