

Feuille d'exercice n° 22 : **Intégration**

Exercice 1 (✎) Montrer que la composée de deux fonctions uniformément continues est uniformément continue.

Exercice 2 (✎) Montrer que $x \mapsto \ln x$ n'est pas uniformément continue sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 3 Montrer que $\sqrt{\cdot}$ est uniformément continue sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 4 (📐) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue telle que $f(n) \xrightarrow[n \in \mathbb{N}]{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
Montrer que $f(x) \xrightarrow[x \in \mathbb{R}]{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 5 Soit $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. Soit $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, avec g positive ou nulle.
Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$.

Exercice 6 Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$.
Montrer qu'il existe $a \in]0, 1[$ telle que $f(a) = a$.

Exercice 7 Soit f continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} , soit $n \in \mathbb{N}$ tels que $\forall k \in \{0, \dots, n\}, \int_0^1 f(u) u^k du = 0$.
Montrer que f admet au moins $n + 1$ zéros distincts dans $]0, 1[$.

Exercice 8 Soit $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Montrer que

$$\left(\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \int_a^b |f(x)| dx \right) \Leftrightarrow [(f \text{ est positive}) \text{ ou } (f \text{ est négative})].$$

Exercice 9 (✎)

- 1) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{2} \leq \sqrt{1+x^n} \leq \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$ sur $\left[1; 1 + \frac{1}{n}\right]$.
- 2) Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \int_1^{1+1/n} \sqrt{1+x^n} dx$.

Exercice 10 (📐) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue strictement croissante telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Étudier la limite de la suite de terme général $\int_0^1 f^n(t) dt$.

Exercice 11 (📐) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (avec $a < b$), soit f continue et positive de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . Montrer

$$\left(\int_a^b f^n(t) dt \right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sup \{ f(t) \mid t \in [a, b] \}$$

Indication : commencer par traiter le cas où f est constante.

Exercice 12 Déterminer les limites des expression suivantes lorsque $x \rightarrow +\infty$, sans pour autant calculer les intégrales correspondantes.

1) $\int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t} dt$

2) $\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt$

3) $\int_x^{2x} \frac{e^{1/t}}{t} dt$

Exercice 13 Calculer les intégrales suivantes.

1) $\int_0^1 (e^x + \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)) dx$

3) $\int_0^1 \frac{x-2}{(2x-3)^2} dx$

5) $\int_1^2 \frac{x^3}{(1+x^4)^2} dx$

2) $\int_0^1 x(x+2-e)e^x dx$

4) $\int_0^{\pi/4} \cos^4 x \sin^2 x dx$

6) $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

Exercice 14 Calculer les intégrales et primitives suivantes.

1) $\int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} e^{\operatorname{Arcsin} t} dt$

4) $\int_0^1 \frac{t}{1+\sqrt{1+t}} dt$

7) $\int_1^t \sqrt{\frac{1-\sqrt{t}}{t}} dt$

2) $\int_0^1 \ln(1+t^2) dt$

5) $\int_1^5 \frac{\sqrt{t-1}}{t} dt$

8) $\int_0^{\pi/2} t^2 \sin t dt$

3) $\int_1^2 \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt$

6) $\int_1^2 \frac{dt}{t\sqrt{1+t^2}}$

Exercice 15 () Déterminer les primitives suivantes.

1) $\int^x t \ln t dt$

3) $\int^x (t^2 - t + 1)e^{-t} dt$

5) $\int^x (t+1) \operatorname{ch} t dt$

2) $\int^x t \operatorname{Arctan} t dt$

4) $\int^x (t-1) \sin t dt$

6) $\int^x t \sin^3 t dt$

Exercice 16 On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$.

1) Après avoir majoré $\frac{x^n}{1+x^n}$ pour $x \in [0, 1]$ par une fonction simple, montrer que la suite (I_n) converge vers 0.

2) Montrer que $\int_0^1 \ln(1+x^n) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

3) À l'aide d'une intégration par parties, donner un équivalent de I_n .

Exercice 17 Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

1) Calculer I_0 et I_1 .



2) Établir une relation liant I_n et I_{n+1} .

3) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < I_n < \frac{e}{n+1}$

4) Déterminer la limite puis un équivalent de I_n .

5) Soit $a \in \mathbb{R}$, soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = e - (n+1)u_n$.

On suppose que $a \neq I_0$, montrer, en étudiant $D_n = |u_n - I_n|$, que $|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 18 ( ) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Justifier que les fonctions suivantes sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et exprimer leurs dérivées.


$$1) \varphi : x \mapsto \int_{2x}^{x^2} f(t) dt \qquad 2) \chi : x \mapsto \int_0^x x f(t) dt \qquad 3) \psi : x \mapsto \int_0^x f(t+x) dt$$

Exercice 19 () On définit la fonction F de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} par $\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) = \int_0^\pi \frac{|\sin(tx)|}{t} dt$.

- 1) Justifier proprement la définition de F .
- 2) Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R}_+ et calculer sa dérivée.
- 3) Nous étudions à présent le comportement asymptotique de F .

a) Montrer que $\forall x > 1, F(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} \left(\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \right) + \int_{\pi \lfloor x \rfloor}^{\pi x} \frac{|\sin t|}{t} dt$.



b) On rappelle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$. En déduire que $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{\pi} \ln x$.

Exercice 20 () Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x dt$.

- 1) Montrer que f est décroissante.
- 2) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[, (x+1)f(x+1) = xf(x-1)$.
- 3) Soit $\varphi(x) = xf(x)f(x-1)$. Montrer que φ est périodique de période 1.
- 4) Calculer $\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{N}^*$
- 5) En déduire que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$, puis que $\forall x \in [1, +\infty[, \varphi(x) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 21 Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, avec $a < b$. Soit f une fonction continue sur \mathbb{R}^+ .

- 1) Montrer que si $f(0) = 0$ alors $\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$.
- 2) Montrer que, dans le cas général, $\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} f(0) \ln \left(\frac{b}{a} \right)$


Exercice 22 ( ) En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Exercice 23 () Déterminer les primitives suivantes.

$$1) \int^x \frac{dt}{it+1} \qquad 2) \int^x e^t \cos t dt \qquad 3) \int^x te^t \sin t dt$$

Exercice 24 Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, notons $a = \operatorname{Re}(\lambda)$ et $b = \operatorname{Im}(\lambda)$. Établir

$$\int^x \frac{dt}{t-\lambda} = \ln|x-\lambda| + i \operatorname{Arctan} \left(\frac{x-a}{b} \right).$$

Exercice 25 () Calculer la limite de la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{8k^3 + n^3}.$$

Exercice 26 (✎) Calculer la limite de la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}.$$

Exercice 27 Donner un équivalent de la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Exercice 28 Calculer la limite puis un équivalent de la suite de terme général

$$P_n = \prod_{k=n+1}^{2n} k^{\frac{1}{k}}.$$

Exercice 29 Calculer la limite de la suite de terme général

$$P_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{p=1}^n (n+p)}.$$

Exercice 30 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n^\alpha}.$$

Rappel : c'est la suite $\left(\sum_{n=1}^N u_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$.

