

Feuille d'exercice n° 28 : **Séries numériques**

**Exercice 1** Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite réelle décroissante de limite nulle. On suppose que la suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  de terme général  $v_n = \left( \sum_{k=1}^n u_k \right) - nu_n$  est bornée. On veut montrer que la série  $\sum u_n$  converge.


- 1) Montrer que  $(v_n)$  est croissante, puis convergente. On note  $\ell$  sa limite.
- 2) Exprimer  $u_k - u_{k+1}$  en fonction de  $v_k$  et  $v_{k+1}$ .
- 3) En sommant l'égalité précédente de  $n$  à  $+\infty$ , montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n \leq \frac{1}{n}(\ell - v_n)$ .
- 4) En déduire que  $nu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , et enfin que la série  $\sum u_n$  converge.


**Exercice 2** Soit  $(u_n)$  une suite réelle, décroissante, à termes positifs et telle que  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge.

- 1) Montrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $p > N$ , on a  $(p - N)u_p \leq \varepsilon$ .
- 2) En déduire que  $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

**Exercice 3** On considère deux séries  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$ , à termes positifs.


- 1) Démontrer que si les deux séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent, alors la série de terme général  $\sqrt{u_n v_n}$  converge aussi.
- 2) On suppose maintenant que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = \frac{1}{1 + n^2 u_n}$ .
  - a) Exprimer  $\sqrt{u_n v_n}$  en fonction de  $v_n$  et de  $n$ .
  - b) En déduire que  $\sum v_n$  et  $\sum u_n$  ne peuvent pas converger toutes les deux.

**Exercice 4** () Comment choisir deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\sum_{n \geq 1} u_n$  converge, avec  $u_n = \ln n + a \ln(n + 1) + b \ln(n + 2)$  ? Dans le cas de convergence, donner la valeur de la somme.

**Exercice 5** () On étudie la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 \in ]0, \pi/2[$  et  $u_{n+1} = \sin(u_n)$ .

- 1) Montrer que  $(u_n)$  est une suite à termes positifs, et qu'elle est convergente.
- 2) Déterminer la limite de  $(u_n)$ .
- 3)
  - a) Donner un DL à l'ordre 3 de  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ , quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . En déduire un équivalent de  $u_n^3$  en fonction de  $(u_n - u_{n+1})$ .
  - b) Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n^3$ .
- 4) Déterminer la nature de la série de terme général  $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ .
- 5)
  - a) Donner un équivalent de  $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  en fonction de  $u_n$ , quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
  - b) En déduire la nature des séries de termes généraux  $u_n^2$  et  $u_n$ .


**Exercice 6** Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 1/n^2 & \text{sinon} \end{cases}$ .


**Exercice 7** () Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants.

- |   |  |   |
|---|--|---|
| 1) $u_n = \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} 2n}$ | 4) $\alpha_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ | 7) $a_n = \frac{2^n n}{n!}$                           |
| 2) $v_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$  | 5) $\beta_n = \frac{1}{n \cos^2 n}$              | 8) $b_n = \left(\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}\right)^n$ |
| 3) $w_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$               | 6) $\gamma_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$        | 9) $c_n = \frac{3n^3 + 2n - 1}{(n+1)(n^2 + n + 1)}$   |

**Exercice 8** Calculer  $\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ , après avoir montré son existence.

**Exercice 9** Calculer  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!}$ .

**Exercice 10** () Calculer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}$ , après avoir montré son existence.

**Exercice 11** () – **Transformation d'Abel** –


Soit  $(a_n)$  une suite positive décroissante de limite nulle et  $(S_n)$  une suite bornée.

- 1) Montrer que la série  $\sum (a_n - a_{n+1})S_n$  est convergente.
- 2) En déduire que la série  $\sum a_{n+1}(S_{n+1} - S_n)$  est convergente.
- 3) Établir que, pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ , la série  $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$  est convergente.

**Exercice 12** Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{1}{(\ln 2)^2 + \dots + (\ln n)^2}$ .

**Exercice 13** () Soit  $\alpha > 1$ . Pour tout  $N \in \mathbb{N}^*$  on pose  $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha}$  et  $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ .

Étudier, selon  $\alpha$ , la nature de la série  $\sum_{N \geq 1} \frac{R_N}{S_N}$ .

**Exercice 14** () Soit  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , telle que  $f(0) = 0$  et  $|f'(0)| < 1$ . On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $\forall n, u_{n+1} = f(u_n)$ . Démontrer qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que si  $|u_0| < \alpha$ , la série de terme général  $u_n$  converge absolument.

**Exercice 15** () Déterminer les natures des séries suivantes.

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 1) $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^{42}}$ | 2) $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n n^2 + 3n}{e^n}$ | 3) $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n)}{\operatorname{sh}(n)}$ |
|--|--|---|


**Exercice 16** () Déterminer les natures des séries suivantes.

1)  $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$

3)  $\sum_{n \geq 0} \frac{1 - 2! + \dots + (-1)^{n-1} n!}{(n+1)!}$

2)  $\sum_{n \geq 1} \frac{1 + (-1)^n \sqrt{n}}{n}$

4)  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-\ln(n))^n}{n^{\ln(n)}}$ .

**Exercice 17** () Calculer  $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^i 3^j}$ .

**Exercice 18** Soit  $q \in ]-1, 1[$ .

1) Montrer que la famille  $(q^{k\ell})_{k,\ell \in \mathbb{N}^*}$  est sommable.

2) En déduire que  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{1 - q^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) q^n$ , où  $d(n)$  est le nombre de diviseurs positifs de  $n$ .

**Exercice 19** () En considérant l'exponentielle complexe comme définie par sa série, montrer que pour tout  $z, z' \in \mathbb{C}$ , alors  $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ .

