# Semaine n° 25 : du 31 mars au 4 avril

## Lundi 31 mars

- **Cours à préparer : Chapitre XXV - Probabilités sur un univers fini**

  **Les définitions des parties 1.1 et 1.2 sont à connaître parfaitement.**

  — *Partie 1.1 :* Expérience aléatoire, univers, événement ; événement impossible, événement certain ; événements incompatibles ; événements deux à deux incompatibles, mutuellement incompatibles.
  Variable aléatoire, univers image ; pour une variable aléatoire $X$, événement $(X \in A)$ ; si $X$ est réelle, événements $(X = x)$, $(X \leqslant x)$, etc.
  Système complet d'événements ; système complet d'événements $(X = x)_{x \in X(\Omega)}$

  — *Partie 1.2 :* Probabilité sur un univers fini, espace probabilisé fini ; événement presque sûr, événement négligeable ; probabilité uniforme ; propriétés d'une probabilité ; formule des probabilités totales ; détermination par les images des événements élémentaires.

  — *Partie 1.3 :* Probabilité conditionnelle ; si $B$ est un événement de probabilité non nulle, $P_B$ est une probabilité ; formule des probabilités composées, formule des probabilités totales ; formules de Bayes.

- **Exercices à rendre en fin de TD** - *(liste non exhaustive)*

  — **Feuille d'exercices n° 24 :** exercices 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11.

## Mardi 1er avril

- **Cours à préparer : Chapitre XXV - Probabilités sur un univers fini**

  — *Partie 1.4 :* Couple d'événements indépendants ; famille finie d'événements mutuellement indépendants.

- **Exercices à corriger en classe**

  — **Feuille d'exercices n° 24 :** exercices 6, 9.

## Jeudi 3 avril

- **Cours à préparer : Chapitre XXV - Probabilités sur un univers fini**

  — *Partie 2.2 :* Loi d'une variable aléaoire ; image d'une variable aléatoire $X$ par une application $f$, loi de $f(X)$ ; loi conditionnelle.

  — *Partie 2.4 :* Loi uniforme ; loi de Bernoulli ; loi binomiale.

- **Exercices à corriger en classe**

  — **Feuille d'exercices n° 24 :** exercices 13, 14, 19, 21, 22.

## Vendredi 4 avril

- **Cours à préparer : Chapitre XXV - Probabilités sur un univers fini**

  — *Partie 2.5 :* Couple de variables aléatoires ; loi conjointe, lois marginales.

  — *Partie 2.6 :* Variables aléatoires indépendantes ; lemme des coalitions ; somme de $n$ variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi de Bernoulli.

# Échauffements

## Mardi 1er avril

- *Cocher toutes les assertions vraies :*
  - ☐ Une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est linéaire si et seulement s'il existe un réel $a$ tel que $f(x) = ax$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
  - ☐ Une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est linéaire si et seulement s'il existe des réels $a$ et $b$ tels que $f(x, y) = (ax, by)$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
  - ☐ Une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est linéaire si et seulement s'il existe des réels $a, b, c$ et $d$ tels que $f(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
  - ☐ Une application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est linéaire si et seulement s'il existe des réels $a, b$ et $c$ tels que $f(x, y, z) = (ax, by, cz)$, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- *Cocher toutes les assertions vraies :* Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$. On pose $\dim E = n$ et $\dim F = m$.
  - ☐ Si $f$ est injective, alors $n \leq m$.
  - ☐ Si $n \leq m$, alors $f$ est injective.
  - ☐ Si $f$ est surjective, alors $n \geq m$.
  - ☐ Si $n \geq m$, alors $f$ est surjective.

## Jeudi 3 avril

- *Cocher toutes les assertions vraies :* Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. Soit $f$ l'endomorphisme de $E$ défini par

$$\forall (x, y, z) \in E, f(x, y, z) = (x + 3z, 0, y - 2z)$$

  - ☐ $f(e_1) = e_1 + 3e_3, f(e_2) = 0, f(e_3) = e_2 - 2e_3$.
  - ☐ $f(e_1) = e_1, f(e_2) = e_3, f(e_3) = 3e_1 - 2e_3$.
  - ☐ $f$ est de rang 3 car E est de dimension 3 .
  - ☐ $f$ est de rang 2 car $(e_1, e_3)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.
  - ☐ $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.
  - ☐ $\operatorname{Ker} f$ est de dimension 1 car $\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \operatorname{rg} f$.
  - ☐ $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de $\operatorname{Im} f$ car $\dim \operatorname{Ker} f \leqslant \dim \operatorname{Im} f$.
  - ☐ L'égalité « $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$ » suffit pour affirmer que $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires.
  - ☐ $f$ est surjective.
  - ☐ $f$ est injective.
- *Cocher toutes les assertions vraies :* Soit $E$ un espace vectoriel et $f$ un endomorphisme involutif de $E$, c.à.d. un endomorphisme non nul de $E$ tel que $f^2 = Id$, où $Id$ est l'identité de $E$.
  - ☐ $f$ est bijective.
  - ☐ $\operatorname{Im}(Id + f) \cap \operatorname{Im}(Id - f) = E$.
  - ☐ $E = \operatorname{Im}(Id + f) + \operatorname{Im}(Id - f)$.
  - ☐ $\operatorname{Im}(Id + f)$ et $\operatorname{Im}(Id - f)$ ne sont pas supplémentaires dans $E$.

## Vendredi 4 avril

- Soit $u : x \mapsto \frac{1}{x} \ln(x + \cos x)$ et $f : x \mapsto (x + \cos x)^{1/x}$. On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$.
  - ☐ Pour obtenir un $DL_2(0)$ de $f$, il suffit de prendre un $DL_2(0)$ de $\ln(x + \cos x)$.
  - ☐ $f(x) = e^{u(x)}$ donc, si $u(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + o(x^2)$ au voisinage de 0, alors :

$$f(x) = 1 + p(x) + \frac{p(x)^2}{2!} + o\left(x^2\right) \text{ où } p(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$$

  - ☐ Le $DL_2(0)$ de $f$ est : $f(x) = e\left[1 - x - \frac{4}{3}x^2\right] + o\left(x^2\right)$.
  - ☐ Du $DL_2(0)$ de $f$, on déduit un prolongement par continuité de $f$ en 0 en une fonction dérivable en 0, et un positionnement de $\mathscr{C}$ au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.