



Feuille d'exercice n° 05 : **Nombres complexes**


Exercice 1 () Résoudre pour $z \in \mathbb{C}$, $2 \arg(z + i) = \arg(z) + \arg(i)$ $[2\pi]$.

Exercice 2 Soit $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{7}\right)$. Calculer $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.
(*Indication* : on pourra d'abord calculer AB et $A + B$.)


Exercice 3 () Déterminer les racines 4^{es} dans \mathbb{C} de $-119 + 120i$

Exercice 4 () Soit $(n, z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}$ tel que $z^n = (z + 1)^n = 1$. Montrer que n est multiple de 6 et que $z^3 = 1$.

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation d'inconnue x : $(1 + x)^{2n} = (1 - x)^{2n}$. Calculer alors le produit des solutions de cette équation.

Exercice 6 () Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

- 1) Écrire $-i$ et $1 + i$ sous forme trigonométrique.
- 2) Calculer les racines n^{es} de $-i$ et de $1 + i$.
- 3) Résoudre $z^2 - z + 1 - i = 0$.
- 4) En déduire les racines de $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

Exercice 7 () Soit n un entier naturel non nul, notons $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n.$$

Exercice 8 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $\bar{z} = z^3$.

Exercice 9 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation d'inconnue z : $z^4 + 2\lambda^2 z^2(1 + \cos \theta) \cos \theta + \lambda^4(1 + \cos \theta)^2 = 0$
($\lambda \in \mathbb{C}, \theta \in [0, \pi]$). Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=1}^4 z_k^n$ où les z_k sont les racines de cette équation.

Exercice 10

- 1) Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
- 2) Calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 11

- 1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.
- 2) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ est racine du polynôme $16X^4 - 20X^2 + 5$.
- 3) En déduire la valeur de $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$.
- 4) Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$.

Exercice 12 () Calculer $\cos 5\theta$, $\cos 8\theta$, $\sin 6\theta$, $\sin 9\theta$, en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

Exercice 13 () Linéariser les quantités suivantes.

1) $\cos^3(x) \sin^2(x)$.

2) $\cos^6(x) + \sin^6(x)$.

Exercice 14 (🚲) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(a + kb)$ et $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(a + kb)$.

Exercice 15 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant chacune des équations suivantes.

1) $\left| \frac{z-3}{z-5} \right| = 1$

2) $\left| \frac{z-3}{z-5} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 16 Quel est l'ensemble des nombres complexes z tels que $\frac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur ?

Exercice 17 Déterminer les points d'affixe $z \in \mathbb{C}$ vérifiant chaque situation.

- 1) 1, z et z^2 soient les affixes de trois points alignés.
- 2) z et $\frac{1}{z}$ soient les affixes de deux vecteurs orthogonaux.
- 3) 1, z et $z+i$ soient les affixes des sommets d'un triangle dont le centre du cercle circonscrit est l'origine O du repère.
- 4) z , $\frac{1}{z}$ et $z-1$ soient les affixes de trois points situés sur un même cercle de centre O .

Exercice 18 Soient A, B et C trois points, distincts deux à deux, d'affixes respectifs a, b et c . Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

- 1) ABC est un triangle équilatéral.
- 2) j ou j^2 est racine du polynôme $aX^2 + bX + c$.
- 3) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.
- 4) $(b-a)^2 + (c-b)^2 + (a-c)^2 = 0$.

Exercice 19 (📐)

- 1) Caractériser géométriquement l'application $\begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow \mathbb{C} \\ z & \mapsto (2+2i)z - (7+4i) \end{cases}$
- 2) Soit r la rotation de centre le point d'affixe $1+i$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'expression complexe de r .
- 3) Soient r la rotation de centre le point d'affixe 1 et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$, et s la symétrie centrale de centre le point d'affixe $i+3$. Caractériser géométriquement l'application $s \circ r$.

