

Devoir à la maison n° 1

À rendre le 9 septembre

Pour un réel a , on considère la fonction f_a , définie sur \mathbb{R} par

$$f_a : x \mapsto (a - x)e^{-x^2}.$$

On note \mathcal{C}_a la courbe représentative de f_a .

- 1) Justifier que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, f_a est dérivable, et exprimer f'_a .
- 2) Soit $a \in \mathbb{R}$, dresser le tableau des variations de f_a .
- 3) Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux uniques réels $x_-(a)$ et $x_+(a)$ en lesquels f_a atteint respectivement un minimum et un maximum, dont on note les valeurs $y_-(a)$ et $y_+(a)$.
- 4) Justifier que pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$x_+(a) < a < x_-(a).$$

En déduire la limite de x_+ lorsque a tend vers $-\infty$, ainsi que la limite de x_- lorsque a tend vers $+\infty$.

- 5) Pour $a \in \mathbb{R}$, tracer dans un repère l'allure de \mathcal{C}_a , en faisant apparaître tous les éléments étudiés précédemment. On fera notamment apparaître toutes les tangentes horizontales.
- 6) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a < b$. Comparer f_a et f_b , en déduire les positions relatives de \mathcal{C}_a et \mathcal{C}_b .
- 7) Déterminer l'expression de $x_+(a)$ et de $x_-(a)$ en fonction de $a \in \mathbb{R}$ et dresser les tableaux des variations de x_+ et de x_- .
- 8) Simplifier les expressions de $x_+(a) + x_-(a)$ et de $x_+(a)x_-(a)$, en fonction de a .
- 9) On note \mathcal{C}_- l'ensemble des points du plan de la forme $(x_-(a), y_-(a))$, et \mathcal{C}_+ l'ensemble des points du plans de la forme $(x_+(a), y_+(a))$:

$$\mathcal{C}_- = \{ (x_-(a), y_-(a)) \mid a \in \mathbb{R} \} \text{ et } \mathcal{C}_+ = \{ (x_+(a), y_+(a)) \mid a \in \mathbb{R} \}.$$

Montrer que \mathcal{C}_- et \mathcal{C}_+ sont les deux branches de la courbe \mathcal{C} d'une fonction g , que l'on déterminera.

- 10) Dresser le tableau des variations de g .
- 11) Sans étude de fonction supplémentaire, déterminer pour un réel a la position relative des courbes \mathcal{C} et \mathcal{C}_a .
- 12) Pour deux réels a, b vérifiant $a < b$, tracer dans un même repère les allures des courbes \mathcal{C}_a , \mathcal{C}_b et \mathcal{C} , en faisant apparaître tous les éléments étudiés précédemment. On fera notamment apparaître toutes les tangentes horizontales.

— FIN —