Devoir surveillé n°1

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

Soit $\theta \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$, $z = \dfrac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1-\cos\theta - i\sin\theta}$. Calculer $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$.

II. Calcul de quelques sinus et cosinus.

1) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$, puis préciser les solutions dans $[0, 2\pi]$.

2) Pour tout réel x, exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$.

3) En déduire qu'il existe trois réels a, b, c que l'on précisera tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(3x) - \sin(2x) = \cos x(a\sin^2 x + b\sin x + c)$$

4) Résoudre l'équation $4y^2 + 2y - 1 = 0$.

5) Utiliser les résultats précédents pour déterminer les valeurs de $\sin\frac{\pi}{10}$ et $\sin\frac{3\pi}{10}$.

6) A l'aide des formules de trigonométrie, déterminer les valeurs de $\cos\frac{\pi}{5}$, $\cos\frac{\pi}{10}$, $\sin\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{3\pi}{10}$.

III. Étude d'une bijection et de sa réciproque.

Dans tout ce problème, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : x \mapsto x + x^3.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

Partie I : réciproque de f

1) Dresser le tableau des variations de f.

2) Justifier que f possède une réciproque g, dont on donnera le tableau des variations.

3) Justifier que g est impaire.

4) Dresser le tableau de signes de g.

5) Justifier que si $x > 0$, alors $g(x) < x$.

6) Tracer dans un même repère l'allure de $\mathscr{C}$, ainsi que celle de la courbe de g.

Partie II : approximation rationnelle de g.

Dans toute cette partie, on considère un réel $a > 0$. Nous allons étudier une méthode de calcul approché de $g(a)$: la méthode de Newton.
On note $\mathscr{D}_a$ la droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point d'ordonnée a.

7) Soit $t \geqslant 0$. On note $\varphi(t)$ l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{D}_a$ et de la tangente à $\mathscr{C}$ au point $(t, f(t))$. Réaliser un schéma explicatif. Montrer que

$$\varphi(t) = \frac{2t^3 + a}{3t^2 + 1}.$$

8) Montrer que $\varphi(g(a)) = g(a)$.

9) Montrer que pour tout $t > 0$, $t - \varphi(t)$ a le même signe que $f(t) - a$.

10) Pour $t > 0$, déterminer le signe de $\varphi'(t)$ en fonction de celui de $f(t) - a$. En déduire les variations de φ sur l'intervalle $I_a = [g(a), a]$.

11) Montrer que si $t \in I_a$, alors $\varphi(t) \in I_a$.

12) Montrer que si $t \in I_a$, alors $0 \leqslant \varphi'(t) \leqslant \dfrac{2}{3}$.

On définit maintenant la suite $(u_n(a))$ par $u_0(a) = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1}(a) = \varphi(u_n(a)).$$

On considère enfin un entier naturel N vérifiant $a \leqslant N$.

13) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(a) \in I_a$.

14) Montrer que la suite $(u_n(a))$ est décroissante et en déduire qu'elle converge vers une limite ℓ.

15) Montrer que $f(\ell) = a$. Que vaut-donc ℓ ?

16) En considérant $\displaystyle\int_{g(a)}^{u_n(a)} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant u_{n+1}(a) - g(a) \leqslant \frac{2}{3}(u_n(a) - g(a)).$$

17) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant u_n(a) - g(a) \leqslant N\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

18) *Application :* calculer à la main une valeur approchée rationnelle à 10^{-1} près de $g(1)$.

— FIN —