Devoir surveillé n° 6
Version 2
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Fonctions périodiques continues.

A - Sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$:
Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. On suppose $G \neq \{0\}$. On veut montrer que G est de la forme $a\mathbb{Z}$, pour un certain $a \in \mathbb{R}$, ou que G est dense dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $G \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure, que l'on notera a.

2) On suppose dans cette question que $a > 0$.

a) Montrons par l'absurde que $a \in G$. Supposons donc que $a \notin G$. Montrer qu'il existe $b, c \in G$ tels que $a < b < c < 2a$, et aboutir à une contradiction.

b) En déduire que $a\mathbb{Z} \subset G$.

c) Montrer maintenant l'inclusion réciproque.

3) On suppose maintenant que $a = 0$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$.

a) Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $0 < g < y - x$.

b) Montrer qu'il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x \leqslant ng \leqslant y$.
En déduire que G est dense dans $\mathbb{R}$.

B - Plus petite période d'une fonction périodique continue :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique.
On note $\mathscr{T} = \left\{T \in \mathbb{R}_+^*,\ T \text{ est une période de } f\right\}$ (on rappelle que par définition une période est un réel **strictement positif**).
On note également $\mathscr{T}' = \{-T,\ T \text{ est une période de } f\}$ et enfin
$\mathscr{G} = \mathscr{T} \cup \mathscr{T}' \cup \{0\}$.

1) Montrer que $\mathscr{T}$ admet une borne inférieure, notée T.

2) Montrer que $\mathscr{G}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

3) On suppose dans cette question que f est **continue**.

a) Montrer que T est nulle si et seulement si est f est constante (pour le sens direct, on pourra montrer que toute fonction continue constante sur un ensemble dense est constante).

b) Dans le cas où f n'est pas constante, montrer que toutes les périodes de f ont des rapports rationnels.

4) Donner l'exemple d'une fonction périodique non constante telle que $T = 0$.

C - Somme de deux fonctions périodiques continues, premier cas :
Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues, non constantes et périodiques de plus petites périodes respectives a et b, telles que $\dfrac{a}{b}$ soit rationnel.

1) Montrer que $f + g$ est périodique.

2) Dans ce cas, $f + g$ a-t-elle une plus petite période ?

3) Donner un exemple où $a = b$ et où $f + g$ est non nulle et a une plus petite période strictement plus petite que a.

D - Somme de deux fonctions périodiques continues, second cas :

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues, non constantes et périodiques de plus petites périodes respectives a et b.

On suppose ici que $\dfrac{a}{b}$ est irrationnel, et on veut montrer par l'absurde que $f+g$ n'est pas périodique.

1) Montrer que $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2) Montrer que f et g n'ont aucune période commune.

3) On suppose qu'il existe $T>0$ tel que T soit une période de $f+g$. Montrer que les deux fonctions $\varphi : x \mapsto f(x+T)-f(x)$ et $\psi : x \mapsto g(x+T)-g(x)$ sont opposées et ont toutes deux a et b pour périodes.

4) Montrer que φ et ψ sont nulles.

5) En déduire que f et g sont T-périodiques, et conclure.

II. Polynômes laissant stables quelques ensembles.

Si A est un sous-anneau de $(\mathbb{C},+,\times)$, on note $A[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans A.

L'objectif de ce problème est d'étudier sur différents exemples les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant pour un tel sous-anneau A : $\forall x \in A,\ P(x) \in A$.

1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, on suppose que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \in \mathbb{R}$. Nous allons montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$ de deux manières différentes.

- **a)** Démontrer ce résultat en considérant $\overline{P}$.
- **b)** On propose une deuxième démonstration.
  - **i)** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P^{(n)}(x) \in \mathbb{R}$.
  - **ii)** En déduire que $P \in \mathbb{R}[X]$.

2) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, on suppose que $\forall x \in \mathbb{Q},\ P(x) \in \mathbb{Q}$. Démontrer que $P \in \mathbb{Q}[X]$.
Indication : on pourra utiliser l'interpolation de Lagrange.

3) On s'intéresse maintenant au cas des entiers.

- **a)** Pour un entier $n \in \mathbb{Z}$, quelle est la parité de $n(n-1)$?
- **b)** Proposer (en le justifiant) un polynôme P à coefficients non tous entiers et vérifiant $\forall x \in \mathbb{Z},\ P(x) \in \mathbb{Z}$.

Nous allons maintenant déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{Z},\ P(x) \in \mathbb{Z}. \qquad (\star)$$

Si $k \in \mathbb{N}^*$, on considère le k^{e} polynôme de Hilbert :

$$H_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}.$$

On définit $H_0 = 1$.

4) <u>Lemme :</u> montrer que pour tout $k \geqslant 0$ et tout $n \geqslant k$:

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \dots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

5) Exprimer $H_k(n)$ pour chaque $k \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{Z}$ et en déduire que H_k vérifie la propriété $(\star)$.
Indication : on pourra distinguer les cas $n \geqslant k$, $0 \leqslant n < k$ et $n < 0$.

6) Montrer que pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, alors

$$H_k(0) + \cdots + H_k(n) = H_{k+1}(n+1).$$

7) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul vérifiant $(\star)$, notons d son degré. On pose $Q = P(X+1) - P(X)$.

- **a)** Quel est le degré de Q ?
- **b)** Soit un entier $n \geqslant 0$. Exprimer $P(n) - P(0)$ en fonction de $Q(0), \ldots, Q(n-1)$.
- **c)** En déduire qu'il existe $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{Z}$ vérifiant

$$P = a_0 H_0 + a_1 H_1 + \cdots + a_d H_d.$$

Indication : on pourra raisonner par récurrence et utiliser tous les résultats précédents.

8) Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $(\star)$.

— FIN —