Feuille d'exercice n° 01 : **Trigonométrie et nombres imaginaires**

Exercice 1 ( ) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\sin x = \dfrac{1}{2}$

2) $\tan x = \sqrt{3}$

3) $\cos x = -1$

4) $\sin(3x) = 1$

5) $\cos(4x) = -1$

6) $\sin(x)\cos(x) = \dfrac{1}{4}$

Exercice 2 ( ) Résoudre les équations suivantes :

1) $\tan(2x) = 1$

2) $\sin x + \cos x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

3) $\cos(5x) = \cos(2\pi/3 - x)$

4) $\sin(x + 3\pi/4) = \cos(x/4)$

5) $\cos(x + \pi/6)\cos(x - \pi/6) = \dfrac{1}{2}$

6) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$

Exercice 3 ( ) Résoudre l'équation $\sin(3x)\cos^3(x) + \sin^3(x)\cos(3x) = \dfrac{3}{4}$.

Exercice 4 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $\tan x \geqslant 1$

2) $\cos\left(\dfrac{x}{3}\right) \leqslant \sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$

3) $2\sin^2 x \leqslant 1$

4) $\cos^2 x \geqslant \cos(2x)$

Exercice 5 ( ) Pour quelles valeurs de m l'équation $\sqrt{3}\cos x - \sin x = m$ admet-elle des solutions ? Les déterminer lorsque $m = \sqrt{2}$.

Exercice 6 On cherche à déterminer tous les réels t tels que $\cos t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

1) Démontrer qu'il existe une unique solution dans l'intervalle $]0, \pi/4[$. Dans la suite, on notera cette solution t_0.

2) Calculer $\cos(2t_0)$, puis démontrer que $\cos(4t_0) = -\cos(t_0)$.

3) En déduire t_0.

4) Résoudre l'équation.

Exercice 7 Soit $x, y \in]0, \pi/2[$ tels que $\tan x = \dfrac{1}{7}$ et $\tan y = 2$.

1) En utilisant $\tan(x + 2y)$, calculer $x + 2y$.

2) Calculer $\cos(2y)$.

Exercice 8 Résoudre $\cos^4 x + \sin^4 x = \dfrac{6+\sqrt{3}}{8}$.

Exercice 9 (✎) Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

1) $\dfrac{1+2i}{3-4i}$

2) $\dfrac{1}{(1+2i)^2}$

3) $\dfrac{(1+i)^3}{(1-i)^2}$

4) $\dfrac{1+i}{3-i}+\dfrac{1-i}{3+i}$

5) $\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{i}}$

6) $(1+(1+(1+2i)^2)^{-1})$

Exercice 10 Montrer que pour tout $(a,b,c,d)\in\mathbb{Z}^4$, il existe $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ tel que

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=m^2+n^2.$$

Exercice 11 (✎) Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

1) $\left(\sqrt{3}-i\right)^{11}$

2) $(-1+i)^{17}$

3) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{-42}$

Exercice 12 Soit $\theta\in\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, $z=\dfrac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$. Calculer $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$.

Exercice 13 Soient z_1 et z_2 deux complexes de module 1, tels que $1+z_1z_2\neq 0$. Montrer que

$$\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\in\mathbb{R}.$$

Exercice 14 Soit $a\in[0;2\pi[$ et n un entier naturel. Déterminer le module et l'argument de : $(1+i\mathrm{e}^{ia})^n$.