Devoir à la maison n° 18

À rendre le 15 avril

E désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Id_E est l'application identité de E et Θ l'endomorphisme nul.
$\mathbb{C}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients complexes, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{C}_n[X]$ représente l'ensemble des polynômes à coefficients complexes, de degré inférieur ou égal à n.
Si g est un endomorphisme de E, on définit g^n par récurrence en posant :

$$\begin{cases} g^0 = \mathrm{Id}_E \\ g^n = g^{n-1} \circ g \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, avec $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p$, on note $P(g)$ l'endomorphisme de E égal à :

$$P(g) = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 g + \cdots + a_p g^p$$

On montre alors que pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{C}[X]$, on a :

$$(PQ)(g) = P(g) \circ Q(g) = Q(g) \circ P(g)$$

On désigne par T le polynôme de $\mathbb{C}[X]$ défini par :

$$T(X) = 3X^3 - X^2 - X - 1$$

et par f un endomorphisme de E satisfaisant la relation :

$$T(f) = \Theta$$

1) Montrer que 1 est une racine réelle de T. En utilisant les relations coefficients-racines, donner la somme et le produit des deux autres racines. En déduire un polynôme de degré 2 dont ce sont les racines. Pourquoi ces deux autres racines sont-elles conjuguées ?
Les racines de T seront notées 1, α et $\overline{\alpha}$. On ne cherchera pas à expliciter α.

2) On désigne par φ l'application qui, à tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de P par T.

- **a)** Rappeler le théorème de la division euclidienne des polynômes.
- **b)** Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$.
- **c)** L'endomorphisme φ est-il injectif ? Est-il surjectif ?

3) On note L_1, L_2 et L_3 les polynômes définis par :

$$L_1(X) = (X-1)(X-\alpha),\ L_2(X) = (X-1)(X-\overline{\alpha}),\ L_3(X) = (X-\alpha)(X-\overline{\alpha})$$

- **a)** Montrer que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{C}_2[X]$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique triplet (a_n, b_n, c_n) de $\mathbb{C}^3$ tel que :

$$\varphi(X^n) = a_n L_1 + b_n L_2 + c_n L_3$$

Exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n, α et $\overline{\alpha}$. Vérifier que $c_n = \frac{1}{2}$.

c) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f^n = a_n L_1(f) + b_n L_2(f) + c_n L_3(f)$$

d) Justifier la convergence des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers des réels a, b et c respectivement.

4) On pose $h = aL_1(f) + bL_2(f) + cL_3(f)$.

a) Montrer que $h = \frac{1}{6}(3f^2 + 2f + \mathrm{Id}_E)$.

b) Prouver enfin que h est un projecteur.

— FIN —