I Trigonométrie et nombres imaginaires

26 août 2025

Table des matières

Nous nous placerons dans tout ce chapitre dans le plan $\mathbb{R}^2$, muni de son repère orthonormal canonique $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

1 Relation de congruence modulo un réel

Définition 1.0.1.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On dit que deux réels a et b sont *congrus modulo θ* s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + k\theta$. On note alors $a \equiv b\ [\theta]$, ou aussi $a = b\,[\theta]$.

Exemple 1.0.2.
- $\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{5\pi}{2}$ sont congrus modulo π ;
- $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{9\pi}{4}$ et $-\dfrac{15\pi}{4}$ sont congrus modulo 2π.

Remarque 1.0.3.
La relation $a = b\ [\theta]$ se lit aussi « a et b sont égaux à un multiple de θ près ».

Proposition 1.0.4.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$, et a, b, c, d quatre réels.

1. On a $a \equiv a\ [\theta]$ (on dit que la relation de congruence modulo θ est *réflexive*).
2. Si $a \equiv b\ [\theta]$, alors $b \equiv a\ [\theta]$ (on dit que la relation de congruence modulo θ est *symétrique*).
3. Si $a \equiv b\ [\theta]$ et $b \equiv c\ [\theta]$, alors $a \equiv c\ [\theta]$ (on dit que la relation de congruence modulo θ est *transitive*).
4. Si $a \equiv b\ [\theta]$ et $c \equiv d\ [\theta]$, alors $a + c \equiv b + d\ [\theta]$.
5. Si $a \equiv b\ [\theta]$, alors $a \equiv b\ [-\theta]$.
6. Si $n \in \mathbb{Z}$ et $a \equiv b\ [n\theta]$, alors $a \equiv b\ [\theta]$.
7. Si $a \equiv b\ [\theta]$, alors $ac \equiv bc\ [c\theta]$.

Une relation vérifiant les trois premiers points de cette proposition est appelée une *relation d'équivalence*.

Démonstration.
C'est immédiat en revenant à la définition.

1. On a $a = a + 0\theta$, donc $a \equiv a\ [\theta]$.
2. Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + k\theta$, alors $b = a + (-k)\theta$, or $-k \in \mathbb{Z}$, donc $b \equiv a\ [\theta]$.
3. Soit $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tels que $a = b + k\theta$ et $b = c + \ell\theta$, alors $a = c + (k + \ell)\theta$, or $k + \ell \in \mathbb{Z}$, donc $a \equiv c\ [\theta]$.
4. Soit $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tels que $a = b + k\theta$ et $c = d + \ell\theta$, alors $a + c = b + d + (k + \ell)\theta$, or $k + \ell \in \mathbb{Z}$, donc $a + c \equiv b + d\ [\theta]$.
5. C'est un cas particulier du point suivant (avec $n = -1$).
6. Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + kn\theta$, alors $a = b + (nk)\theta$, or $nk \in \mathbb{Z}$, donc $a \equiv b\ [\theta]$.
7. Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + k\theta$, alors $ac = bc + k(c\theta)$, or $k \in \mathbb{Z}$, donc $ac \equiv bc\ [c\theta]$.

□

Exercice 1.0.5.
Parmi la famille de réels suivants, déterminer lesquels sont congrus entre eux modulos 2π. Même question pour π, $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{2\pi}{3}$.

- $\alpha = 1$
- $\beta = 3\pi$
- $\gamma = 4\pi$
- $\delta = -\dfrac{\pi}{2}$
- $\varepsilon = \dfrac{5\pi}{6}$
- $\zeta = \dfrac{28\pi}{4}$

Au besoin, vous placerez les points/angles correspondants sur le cercle trigonométrique (voir partie 3.4).

Remarque 1.0.6 (Irrationnalité de π)**.**
Tout au long de cette année, vous pourrez utiliser le résultat suivant :

$$\pi \notin \mathbb{Q}.$$

Ce résultat sera démontrable en milieu d'année de MPSI.

2 Les fonctions sinus, cosinus et tangente

2.1 Définitions géométriques

Soit (ABC) un triangle du plan, rectangle en B. On suppose les trois points A, B, C deux à deux distincts. On note α l'angle (non orienté)

$\widehat{BAC}$. Alors nous posons :

- $\cos\alpha = \dfrac{AB}{AC}$;
- $\sin\alpha = \dfrac{CB}{AC}$;
- $\tan\alpha = \dfrac{CB}{AB} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

En particulier, dans le cas où $AC = 1$, grâce au théorème de Pythagore nous obtenons que :

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = AB^2 + CB^2 = AC^2 = 1.$$

Cette relation entre sinus et cosinus est la première formule de trigonométrie à connaître !

Vous connaissez ces définitions depuis la fin du collège. Elles sont bien sûr historiquement et géométriquement fondamentales, mais posent quelques problèmes théoriques : tout d'abord, qu'est-ce qu'un angle ? Comment définir cette notion ?
Ensuite, avec cette définition, tous les sinus et cosinus sont positifs. Pour obtenir des quantités algébriques, donc avec des signes, il faut *orienter* toutes les quantités en jeu : aussi bien les angles que les longueurs. Et cela oblige à quelques contorsions.
Enfin, comment définir le sinus et le cosinus d'un angle droit ?

Dans les mathématiques « modernes », les choses sont introduites différemment : les fonctions sinus et cosinus sont introduites grâce à la notion de *série entière*, que vous étudierez en seconde année. Et c'est à partir de ces fonctions que l'on peut définir ce qu'est un angle, et retrouver toutes les propriétés géométriques habituelles.
Nous allons dans la suite adopter ce point de vue : tout ce que nous admettrons, c'est qu'il existe deux fonctions réelles sinus et cosinus, dont nous admettrons quelques propriétés, en particulier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.
Finalement, en MPSI peu importe le point de vue, vous devrez uniquement connaître les liens entre angles et fonctions trigonométriques (vous les connaissez déjà pour la plupart).

2.2 Résultats admis

Nous admettons qu'il existe deux fonctions sinus et cosinus, dont les graphes sont représentés figure 2.2, et vérifiant les propriétés suivantes :

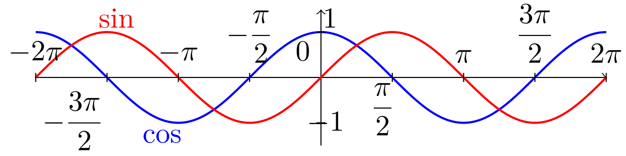

FIGURE 1 – Fonctions cos et sin.

Proposition 2.2.1.
1. Les fonctions sinus (sin) et cosinus (cos) sont définies sur $\mathbb{R}$ et sont 2π-périodiques ;
2. La fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire ;
3. La fonction cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$ établit une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$; cela signifie que pour tout $x \in [-1, 1]$, il existe un unique réel $t \in [0, \pi]$ tel que $x = \cos t$;
4. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos t = \sin\left(t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ (le graphe de cos n'est donc que le translaté de celui de sin, et la connaissance d'une seule de ces deux fonctions permet de connaître l'autre) ;
5. Si $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{lll}
\cos t = 0 & \text{ssi} & t \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \\
\sin t = 0 & \text{ssi} & t \equiv 0\ [\pi] \\
\cos t = 1 & \text{ssi} & t \equiv 0\ [2\pi] \\
\cos t = -1 & \text{ssi} & t \equiv \pi\ [2\pi] \\
\sin t = 1 & \text{ssi} & t \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \\
\sin t = -1 & \text{ssi} & t \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]
\end{array}$$

6. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Nous pouvons alors démontrer le lemme suivant, fort utile :

Lemme 2.2.2.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$. Alors il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} a = \cos t \\ b = \sin t \end{cases}$.

Démonstration.
Puisque $a^2+b^2 = 1$, alors a^2 et b^2 appartiennent à l'intervalle $[0,1]$, et donc $a, b \in [-1,1]$. Ainsi il existe un réel t tel que $a = \cos t$. Dans ce cas : $b^2 = 1 - a^2 = 1 - \cos^2 t = \sin^2 t$. Par conséquent, $|b| = |\sin t|$. Si b et $\sin t$ sont de même signe, $b = \sin t$ et nous avons fini.
Sinon, $b = -\sin t = \sin(-t)$ puisque sin est impaire. Si nous posons $t' = -t$, alors $b = \sin t'$ et $a = \cos t = \cos(-t') = \cos t'$ car cos est paire. Nous avons donc bien démontré le résultat voulu. □

Nous pouvons alors définir la fonction tangente :

Définition 2.2.3.
Notons A l'ensemble des points d'annulation de la fonction cos, *i.e.* l'ensemble des réels congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo π :

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists k \in \mathbb{Z}\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

On appelle alors *fonction tangente*, notée tan, la fonction :

$$\tan : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash A & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{\sin t}{\cos t} \end{array}.$$

Remarque 2.2.4.
On peut définir de la même manière la fonction *cotangente* :
Posons
$$B = \{ x \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \mathbb{Z}\ x = k\pi \} = \pi\mathbb{Z}.$$
On appelle alors *fonction cotangente*, notée cotan, la fonction :

$$\text{cotan} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash B & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{\cos t}{\sin t} \end{array}.$$

La fonction cotangente n'est pas égale à $\dfrac{1}{\tan}$. Pourquoi ?

Par parité du cosinus et imparité du sinus, la fonction tangente est impaire. Elle est aussi π-périodique, ce que nous allons montrer plus loin. Les autres propriétés des fonctions cos, sin et tan, qui sont appelées *fonctions trigonométriques circulaires*, vont être démontrées plus loin également. Elles nous permettront de tracer le graphe de la fonction tangente.
Nous allons d'abord effectuer quelques rappels de géométrie du plan.

3 Modes de repérage dans le plan et angles orientés

3.1 Coordonnées cartésiennes

Définition 3.1.1 (voir figure 3.1)**.**
1. Soit u un vecteur du plan. Il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = a\overrightarrow{\imath} + b\overrightarrow{\jmath}$. Ce couple est appelé couple des *coordonnées* de u dans la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. On note alors $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
2. Soit M un point du plan. Soit (a, b) les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. Ce couple est appelé couple des *coordonnées* de M dans le repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. On note alors $M = (a, b)$. Le réel a est l'abscisse du point M, le réel b est son ordonnée.

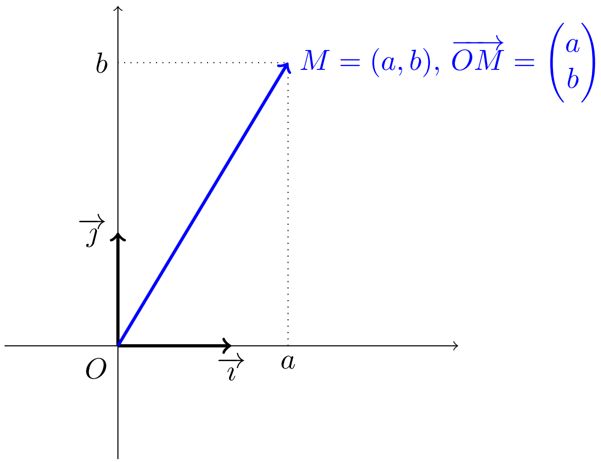

FIGURE 2 – Repérage d'un point par ses coordonnées cartésiennes.

Remarque 3.1.2.
On identifiera fréquemment le point M avec le vecteur $\overrightarrow{OM}$. Notamment, on notera souvent $M = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ pour donner les coordonnées de M.

Rappelons maintenant une série de résultats que vous connaissez déjà :

Théorème 3.1.3 (Règles de calcul)**.**
1. Soient u et u' deux vecteurs de coordonnées respectives (x, y) et (x', y'), et λ et λ' deux réels. Le vecteur $\lambda u + \lambda' u'$ a pour coordonnées le couple $(\lambda x + \lambda' x', \lambda y + \lambda' y')$.
2. Soient A et B deux points de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B). Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées le couple $(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

Définition 3.1.4.
1. Soit u un vecteur du plan de coordonnées (a, b). La *norme (euclidienne)* du vecteur u est le réel $\|u\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. Soient A et B deux points de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B). La *distance* AB est le réel

$$AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

On a immédiatement le résultat suivant.

Proposition 3.1.5.
Soit u un vecteur du plan, soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
1. On a $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \overrightarrow{0}$.
2. On a $\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\|$.

Et pour finir, l'inégalité triangulaire, qui sera démontrée plus tard grâce aux nombres complexes :

Proposition 3.1.6 (Inégalité triangulaire)**.**

1. Soit u, u' deux vecteurs. Alors

$$\Big| \|u\| - \|u'\| \Big| \leqslant \|u \pm u'\| \leqslant \|u\| + \|u'\|.$$

2. Soit A, B, C trois points du plan. Alors

$$|AB - BC| \leqslant AC \leqslant AB + BC.$$

3.2 Angles orientés de vecteurs

Dans toute la suite de ce chapitre et tout au long de l'année, nous allons parler d'*angle*. Mais qu'est-ce qu'un angle ? Observons tout d'abord qu'il s'agit de distinguer les angles orientés et les angles non orientés, ainsi que les angles entre droites et entre vecteurs.
Nous n'allons considérer que des angles orientés, et pour cela il faut *orienter* le plan : nous reviendrons plus tard dans l'année sur la définition précise d'orientation. Contentons-nous pour l'instant de considérer la base canonique $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ comme étant directe, et les angles étant orientés *dans le sens trigonométrique* (ou *sens anti-horaire*), comme vous en avez pris l'habitude au lycée.

Dans le secondaire, vous n'avez jamais vraiment défini ce qu'était un angle. Mais vous avez vu une définition des fonctions cosinus et sinus à partir de la notion d'angle. Comme nous l'avons dit plus haut, nous pouvons faire l'inverse : définir la notion d'angle à partir des fonctions cosinus et sinus.

Il existe plusieurs manières de définir un angle entre deux vecteurs. Donnons une définition possible, qui ne figure pas au programme :

Définition 3.2.1 (voir figure 3.2)**.**
Soit u, v deux vecteurs **non nuls** du plan. Nous introduisons $u' = \dfrac{u}{\|u\|}$ et $v' = \dfrac{v}{\|v\|}$. Ces deux vecteurs sont donc de norme 1, ou *unitaires*. Nous noterons $u' = \begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$ et $v' = \begin{pmatrix}c'\\d'\end{pmatrix}$.
On appelle *mesure de l'angle* (u, v) tout réel θ tel que

$$\left\{\begin{array}{lll} c' & = & \cos\theta \quad a' - \sin\theta \quad b' \\ d' & = & \sin\theta \quad a' + \cos\theta \quad b' \end{array}\right.$$

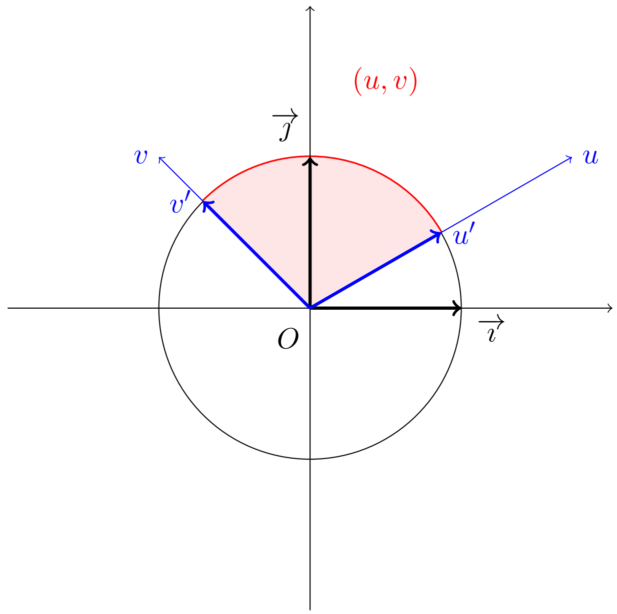

FIGURE 3 – Angle entre deux vecteurs u et v.

Cette condition se note matriciellement

$$v' = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} u'.$$

Il existe une infinité de tels réels, mais si θ_0 est l'un d'entre eux, l'ensemble des mesures de l'angle (u, v) est l'ensemble de tous les réels congrus à θ_0 modulo 2π, *i.e.*

$$\{\theta_0 + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

On note alors $(u, v) = \theta_0\ [2\pi]$.

Remarque 3.2.2.
- Par abus, on parle souvent de « l'angle (u, v) » plutôt que d' « une mesure de l'angle (u, v) » [1].
- Il est important de retenir qu'un angle orienté de vecteurs se donne toujours modulo 2π.
- Géométriquement, l'angle (u, v) vaut θ si v' est l'image de u' par la rotation vectorielle d'angle θ.

Nous pourrons démontrer les résultats suivants plus tard dans l'année mais nous allons les admettre ici :

Proposition 3.2.3.
Soit $u, v, w \in \mathbb{R}^2$.
1. $(u, v) = -(v, u)\,[2\pi]$;
2. Relation de Chasles :

$$(u, v) + (v, w) = (u, w)\,[2\pi].$$

3.3 Angles orientés de droites

Il est aussi possible de définir l'angle orienté entre deux droites :

Définition 3.3.1.
Soit $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites. On appelle *mesure de l'angle orienté*$(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ tout réel θ pour lequel il existe u un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ et v un vecteur directeur de $\mathscr{D}'$ tel que θ est une mesure de l'angle (u, v).
Il existe une infinité de tels réels, mais si θ_0 est l'un d'entre eux, l'ensemble des mesures de l'angle $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ est l'ensemble de tous les réels congrus à θ_0 modulo π, *i.e.* $\{\theta_0 + k\pi\ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
On note alors $(\mathscr{D}, \mathscr{D}') = \theta_0\,[\pi]$.

1. en toute rigueur l'angle (u, v) est l'ensemble de toutes les mesures de l'angle (u, v) : il s'agit d'une *classe d'équivalence* ; nous en reparlerons plus tard dans l'année

Remarque 3.3.2.
- Par abus, on parle souvent de « l'angle $(\mathscr{D}, \mathscr{D}')$ » plutôt que d' « une mesure de l'angle (u, v) ».
- Il est important de retenir qu'un angle orienté de droites se donne toujours modulo π.

Nous pourrons démontrer les résultats suivants plus tard dans l'année mais nous allons les admettre ici :

Proposition 3.3.3.
Soit $\mathscr{D}, \mathscr{D}', \mathscr{D}''$ trois droites du plan.
1. $(\mathscr{D}, \mathscr{D}') = -(\mathscr{D}', \mathscr{D})\,[\pi]$;
2. Relation de Chasles : $(\mathscr{D}, \mathscr{D}') + (\mathscr{D}', \mathscr{D}'') = (\mathscr{D}, \mathscr{D}'')\,[\pi]$.

3.4 Cercle trigonométrique

Le cercle dit *trigonométrique*, souvent noté $\mathbb{U}$ (nous en reparlerons), est tout simplement le cercle de rayon 1 et de centre O.

Son utilité est principalement de représenter graphiquement les propriétés trigonométriques usuelles.

Le point de départ est le suivant : pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, posons M_θ le point de coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$: puisque $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, ce point est sur le cercle trigonométrique. Si nous posons $u_\theta = \overrightarrow{OM_\theta} = \begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$, alors $(\overrightarrow{\imath}, u_\theta) = \theta\,[2\pi]$ (voir figure 3.4).

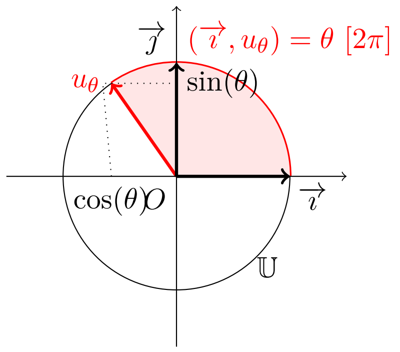

FIGURE 4 – Cercle trigonométrique et vecteur u_θ.

Mais réciproquement, tout point du cercle trigonométrique est de cette forme.

Théorème 3.4.1 (Représentation paramétrique du cercle trigonométrique)**.**
Une représentation paramétrique du cercle trigonométrique est $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.
Ou encore, $\mathbb{U} = \{(\cos t, \sin t),\ t \in \mathbb{R}\}$.

Démonstration.
L'inclusion $\mathbb{U} \subset \{(\cos t, \sin t),\ t \in \mathbb{R}\}$ se démontre directment grâce au lemme 2.2.2 □

Remarque 3.4.2 (radians)**.**
La longueur du cercle trigonométrique étant de 2π, par proportionnalité, la mesure d'un angle est la longueur de l'arc du cercle trigonométrique intersecté par ledit angle (voir figure 3.2).

La mesure d'un angle « en radians » est le rapport entre la longueur de l'arc d'un cercle centré en O intersecté par ledit angle et le rayon de ce cercle, c'est donc une mesure sans dimension (du point de vue des physiciens). Le cercle trigonométrique étant de rayon 1, on obtient immédiatement que la mesure en radians d'un angle est la mesure donnée précédemment.

Remarque 3.4.3.
On retrouve sur ce cercle les relations « cosinus = côté adjacent sur hypoténuse », « sinus = côté opposé sur hypoténuse » et donc ensuite « tangente = côté opposé sur côté adjacent », puisqu'ici l'hypoténuse est de longueur 1.

3.5 Coordonnées polaires

Les coordonnées polaires ne sont plus au programme en mathématiques, mais vous pourrez les rencontrer en physique, et elles vous aideront à comprendre l'écriture trigonométrique des nombres complexes, que nous verrons dans la suite de ce chapitre.

Définition 3.5.1.
Soit M un point du plan. On appelle *couple de coordonnées polaires* de M tout couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{OM} = ru_\theta$ et $r \geqslant 0$.

Théorème 3.5.2.
Tout point admet une infinité de couples de coordonnées polaires.
Plus précisément :

- Les couples de coordonnées polaires de O sont tous les couples $(0, \theta)$ quand $\theta \in \mathbb{R}$;
- Si $M \neq O$, posons $\theta = (\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM})\ [2\pi]$. Alors les couples de coordonnées polaires de M sont tous les couples $(OM, \theta + 2k\pi)$ quand $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque 3.5.3.
On rencontre parfois une définition plus générale où r peut être négatif, mais nous l'éviterons. Cela dit, il faut remarquer que quel que soit le signe de r, $ru_\theta = -ru_{\theta+\pi}$. Il est donc toujours possible de se restreindre au cas r positif.

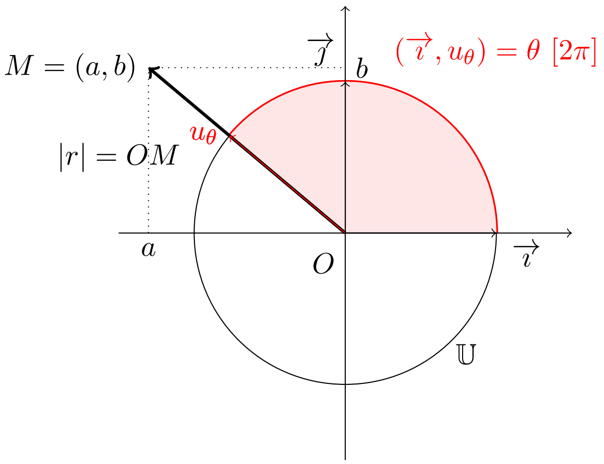

Figure 5 – Coordonnées polaires (r, θ) de $M = (a, b)$.

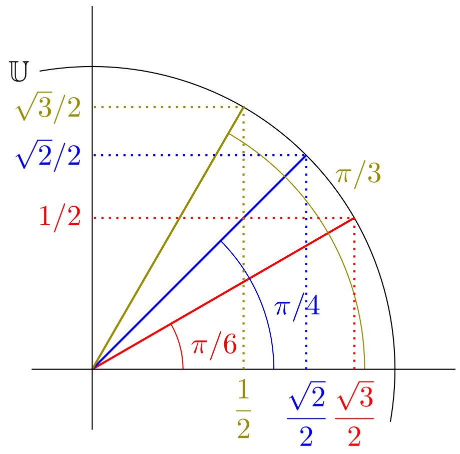

Figure 6 – Angles usuels dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exemple 3.5.4.
Si M est le point de coordonnées cartésiennes $(-1, 1)$, alors M admet $\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(\sqrt{2}, \frac{-5\pi}{4}\right)$ comme couples de coordonnées polaires. Le couple $\left(-\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$ est parfois accepté.

Remarque 3.5.5.
On passe facilement des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes : si M a pour coordonnées polaires (r, θ), posons $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Alors M a pour coordonnées cartésiennes le couple (x, y).
Pour l'autre sens, il est nécessaire d'utiliser les fonctions trigonométriques circulaires inverses Arccos, Arcsin et Arctan, que nous définirons dans le chapitre sur les fonctions usuelles.

4 Trigonométrie

4.1 Angles remarquables

Vous devez connaître par cœur les valeurs des sinus, cosinus et tangentes pour les angles 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, et tous leurs multiples. Ces valeurs sont données dans un tableau du formulaire de trigonométrie qui vous a été distribué en début d'année, vous les retrouverez dans la figure 4.1.

Toutes ces valeurs se retrouvent sur le cercle trigonométrique, et peuvent se démontrer géométriquement. Faisons-le pour retrouver les valeurs des sinus et cosinus des angles $\frac{\pi}{4}$ (voir figure 4.1) et $\frac{\pi}{3}$ (voir figure 4.1).

Démonstration.
Comme $\frac{\pi}{4} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$.

Si nous notons M, N, P les points de coordonnées respectives $(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4})$, $(\cos\frac{\pi}{4}, 0)$ et $(0, \sin\frac{\pi}{4})$, alors $ONMP$ est un carré dont la diagonale est de longueur 1. Ainsi, grâce au théorème de Pythagore, ses côtés sont de longueur $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ou encore $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc

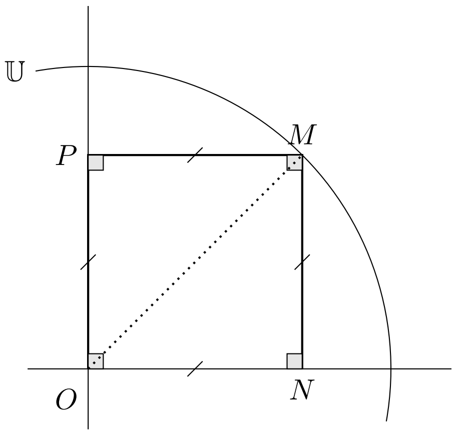

FIGURE 7 – Détermination de $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

$\cos\dfrac{\pi}{4} = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. □

Démonstration.
Comme $\dfrac{\pi}{3} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) > 0$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) > 0$.

Si nous notons maintenant A, B les points de coordonnées respectives $(1, 0)$ et $(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3})$, alors OAB est équilatéral, de côtés de longueur 1. Ainsi, la médiatrice de $[O, A]$ passe par B. Si Q est le milieu de $[OA]$, alors $(QB) \perp (OA)$, donc Q a pour coordonnées $(\cos\frac{\pi}{3}, 0)$, donc $\cos\frac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$. De plus, avec le théorème de Pythagore, $QB^2 = OB^2 - OQ^2 = 1 - \dfrac{1}{4}$. Ainsi $\sin\frac{\pi}{3} = QB = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. □

Remarque 4.1.1 ().
Il est fréquent d'hésiter dans les valeurs des sinus et cosinus des angles $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{6}$: encore une fois, au moindre doute, tracez un cercle trigonométrique.

Vous y verrez clairement que le point du cercle trigonométrique désigné par l'angle $\dfrac{\pi}{6}$ a une abscisse supérieure à celle du point correspondant à

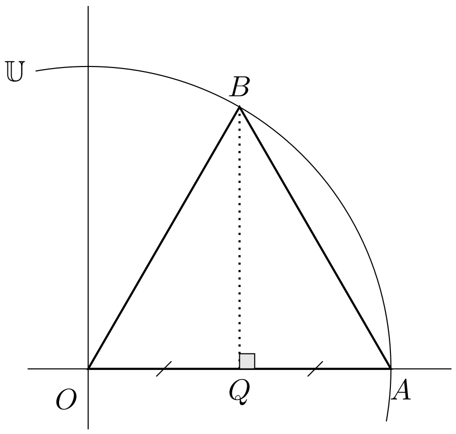

FIGURE 8 – Détermination de $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

l'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Donc $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$. Même méthode pour les sinus.

4.2 Propriétés élémentaires

Là encore, ces propriétés doivent se retrouver rapidement sur un cercle trigonométrique (voir exercice 4.2.3).

Proposition 4.2.1.
Les fonctions sin et cos sont 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$.

La fonction tan est π-périodique sur son ensemble de définition.

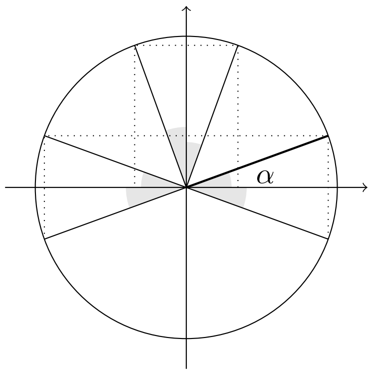

FIGURE 9 – Formules sur les sinus et cosinus.

De plus, pour tout réel α on a :

- $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\cos(\pi/2 + \alpha) = -\sin(\alpha)$
- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
- $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha)$
- $\sin(\pi/2 + \alpha) = \cos(\alpha)$
- $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$

Démonstration.
Il suffit d'utiliser les formules d'addition (voir la proposition 4.4.1). □

Remarque 4.2.2.
Le dernier point permet de montrer que la fonction tangente est π-périodique.

Exercice 4.2.3.
Reproduire à main levée la figure 4.2 et y placer tous les sinus et cosinus relevés, puis retrouver graphiquement les formules données par la proposition 4.2.1.

Exercice 4.2.4.
Ordonner les cosinus des angles suivants.

- $\alpha = \dfrac{\pi}{7}$
- $\beta = \dfrac{15\pi}{6}$
- $\gamma = \dfrac{37\pi}{12}$
- $\delta = \dfrac{41\pi}{3}$
- $\varepsilon = \dfrac{31\pi}{6}$
- $\zeta = \dfrac{112\pi}{5}$

4.3 Équations trigonométriques

Proposition 4.3.1.
Soient a et b deux réels. Alors :

$$\begin{array}{lll} \cos(a) = \cos(b) & \text{ssi} & (a = b\,[2\pi] \text{ ou } a = -b\,[2\pi]) \\ \sin(a) = \sin(b) & \text{ssi} & (a = b\,[2\pi] \text{ ou } a = \pi - b\,[2\pi]) \\ \tan(a) = \tan(b) & \text{ssi} & a = b\,[\pi] \end{array}$$

On retrouve ces résultats sur un cercle trigonométrique, et en utilisant les propriétés élémentaires précédentes. Par exemple, pour résoudre $\sin x = \sin y$: on trace sur la droite d'équation $y = \sin a$. Elle coupe le cercle trigonométrique en deux points (ou éventuellement un seul si $\sin a = \pm 1$). Cela nous donne déjà deux solutions : a et $\pi - a$. Il faut ensuite considérer tous les réels congrus à ces deux solutions modulo 2π.
Même chose pour résoudre $\cos a = \cos b$ en traçant la droite d'équation $x = \cos a$.

4.4 Formules trigonométriques

Les formules à partir desquelles on retrouve quasiment toutes les autres sont les suivantes :

Proposition 4.4.1 (formules d'addition)**.**
Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$;
2. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

Démonstration.
Notons M le point de coordonnées $(\cos(a+b), \sin(a+b))$ (voir figure 4.4) : cela signifie que

$$\overrightarrow{OM} = \cos(a+b)\overrightarrow{\imath} + \sin(a+b)\overrightarrow{\jmath} \tag{1}$$

D'autre part, notons

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}\cos(a)\\ \sin(a)\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}-\sin(a)\\ \cos(a)\end{pmatrix}.$$

Comme

$$\begin{aligned} -\sin(a) &= 0 \times \cos(a) - 1\sin(a)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(a) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(a) \end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned} \cos(a) &= 0 \times \sin(a) + 1\cos(a)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(a) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(a), \end{aligned}$$

on a

$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = +\frac{\pi}{2}\,[2\pi].$$

On peut donc voir que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est la base obtenue à partir de $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ par la rotation vectorielle d'angle a.

Or, comme $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{u}) = a\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{OM}) = a+b\ [2\pi]$, on a alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}) = b\,[2\pi]$.

On peut donc écrire que

$$\overrightarrow{OM} = \cos(b)\overrightarrow{u} + \sin(b)\overrightarrow{v}.$$

Nous avons aussi par définition

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} &= \cos(a)\overrightarrow{\imath} + \sin(a)\overrightarrow{\jmath}\\ \overrightarrow{v} &= -\sin(a)\overrightarrow{\imath} + \cos(a)\overrightarrow{\jmath} \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \cos(b)[\cos(a)\overrightarrow{\imath} + \sin(a)\overrightarrow{\jmath}]\\ &\quad + \sin(b)[-\sin(a)\overrightarrow{\imath} + \cos(a)\overrightarrow{\jmath}]\\ &= (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b))\overrightarrow{\imath}\\ &\quad + (\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b))\overrightarrow{\jmath} \end{aligned}$$

Grâce à l'unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base, il suffit d'utiliser l'expression trouvée en 1 pour obtenir les formules demandées.

On peut aussi obtenir ces formules par un raisonnement géométrique élémentaire (voir figure 4.4), dans le cas où a, b et $a+b$ sont dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Notons M le point de coordonnées $(\cos(a+b), \sin(a+b))$, qui se situe sur $\mathbb{U}$ (on a donc $OM = 1$). Notons $\mathscr{D}_a$ la droite passant par O et faisant un angle de mesure a avec la droite $O\overrightarrow{\imath}$. Notons A le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}_a$. Ainsi, le triangle OAM est rectangle en A. Notons J le projeté orthogonal de M sur la droite $O\overrightarrow{\jmath}$. Ainsi, le triangle OJM est rectangle en J. Notons I le projeté orthogonal de A sur la droite $O\overrightarrow{\imath}$. Ainsi, le triangle OAM est rectangle en I.

On a donc immédiatement, en utilisant $OM = 1$:

$$\begin{aligned} OJ &= \sin(a+b),\\ JM &= \cos(a+b),\\ OA &= \cos(b),\\ AM &= \sin(b),\\ AI &= \sin(a)\cos(b),\\ OI &= \cos(a)\cos(b). \end{aligned}$$

Comme les droites $(O\overrightarrow{\imath})$ et $(O, \overrightarrow{\jmath})$ sont orthogonales, les droites (MB) et (AI) sont aussi orthogonales, donc sécantes : on note B leur point d'intersection. Ainsi, le triangle MAB est rectangle en B.

On admet que la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à π, à un multiple de 2π près. Comme l'angle $\widehat{OIA}$ est droit, l'angle $\widehat{OAI}$ a pour mesure $\frac{\pi}{2} - a$. Comme $A \in (BI)$, l'angle $\widehat{IAB}$ est plat (donc de mesure π), or

$$(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB})\ [2\pi].$$

On en déduit que l'angle $\widehat{BAM}$ a pour mesure a (ainsi, les triangles BAM et OAI sont semblables). Ainsi,

$$\begin{aligned} BA &= \cos(a)\sin(b)\\ BM &= \sin(a)\sin(b). \end{aligned}$$

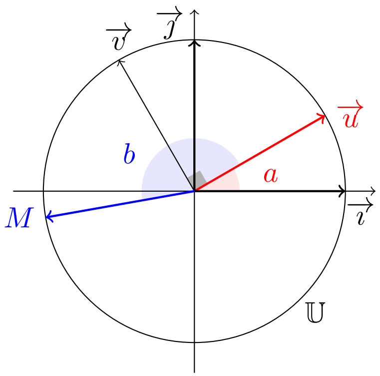

FIGURE 10 – Formules d'addition : première preuve.

Remarquons que $OJBI$ est un rectangle, donc $OJ = BI$ et $JB = OI$. On en déduit immédiatement la formule demandée.

Nous verrons à la fin de ce chapitre une méthode plus rapide pour retrouver ces formules, utilisant l'exponentielle complexe. □

En jouant sur la parité de cosinus et l'imparité de sinus, nous avons bien sûr également, à partir de ces deux premières formules :

Corollaire 4.4.2.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$;
2. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$.

On en tire les formules de duplication des angles, très utilisées aussi :

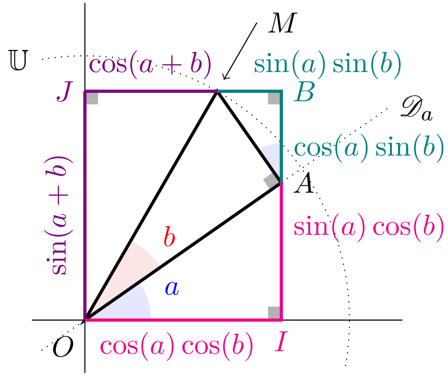

FIGURE 11 – Formules d'addition : deuxième preuve.

Corollaire 4.4.3 (formules de duplication)**.**
Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a)\\ &= 2\cos^2(a) - 1\\ &= 1 - 2\sin^2(a)\end{aligned}$$

et $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$.

Viennent ensuite les formules d'addition de cosinus et sinus, et celles de produit :

Proposition 4.4.4.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$
2. $\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

3. $\cos(a) - \cos(b) = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
4. $\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$
5. $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
6. $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
7. $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$.

Démonstration.
• Pour les quatre premières formules, il suffit de remarquer que $a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ et $b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$, et d'appliquer les formules de base. Ainsi, pour la première formule :

$$\begin{aligned}
\cos(a) + \cos(b) = &\quad \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) \\
&+ \cos\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) \\
= &\quad \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
&- \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
&+ \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
&+ \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
= &\quad 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).
\end{aligned}$$

Les trois formules suivantes s'obtiennent de même.
• Pour les deux dernières formules, on procède comme suit :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \tag{2}$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \tag{3}$$

Nous obtenons immédiatement les deux formules de produit par demi-somme et demi-différence des lignes (2) et (3). □

Pour finir, voici les formules de trigonométrie concernant la fonction tangente :

Proposition 4.4.5.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Lorsque les tangentes qui suivent sont bien définies, nous avons les égalités suivantes :

1. $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$;
2. $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$;
3. $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$;
4. $\dfrac{1}{\cos^2(a)} = 1 + \tan^2(a)$;
5. $\cos(2a) = \dfrac{1 - \tan^2(a)}{1 + \tan^2(a)}$;
6. $\sin(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1 + \tan^2(a)}$.

Démonstration. 1. On factorise :

$$\begin{aligned}
\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} \\
&= \frac{\sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)} \\
&= \frac{\cos(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)} \times \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.
\end{aligned}$$

2. Utiliser le point précédent en utilisant l'imparité de la fonction tangente.

3. Utiliser le premier point en posant $b = a$.

4. $1 + \tan^2(a) = 1 + \dfrac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = \dfrac{\cos^2 a + \sin^2 a}{\cos^2 a} = \dfrac{1}{\cos^2(a)}$.

5.

$$\begin{aligned}\cos(2a) &= 2\cos^2 a - 1\\ &= \frac{2}{1+\tan^2 a} - 1\\ &= \frac{2-(1+\tan^2 a)}{1+\tan^2 a}\\ &= \frac{1-\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)}.\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}\frac{2\tan(a)}{1+\tan^2(a)} &= 2\tan(a)\cos^2(a)\\ &= 2\sin(a)\cos(a)\\ &= \sin(2a)\end{aligned}$$

□

Proposition 4.4.6 (Forme amplitude-phase)**.**
Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Alors il existe $A, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a\cos(t) + b\sin(t) = A\cos(t-\varphi)$.

Démonstration.
Il s'agit de normaliser le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ puis d'utiliser des formules de trigonométrie :
Si $a = b = 0$, il suffit de poser $A = 0$.
Sinon, posons $A = \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a^2+b^2}$. Ainsi $\left\| \begin{pmatrix} \frac{a}{A} \\ \frac{b}{A} \end{pmatrix} \right\| = 1$. Par conséquent il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{a}{A} = \cos\varphi$ et $\frac{b}{A} = \sin\varphi$. Alors, pour tout réel t :

$$\begin{aligned}a\cos(t) + b\sin(t) &= A\left(\frac{a}{A}\cos(t) + \frac{b}{A}\sin(t)\right)\\ &= A(\cos(\varphi)\cos(t) + \sin(\varphi)\sin(t))\\ &= A\cos(t-\varphi)\end{aligned}$$

□

Remarque 4.4.7.
Ce résultat sera utilisé dans le chapitre sur les équations différentielles, pour exprimer sous une certaine forme les solutions de certaines équations.

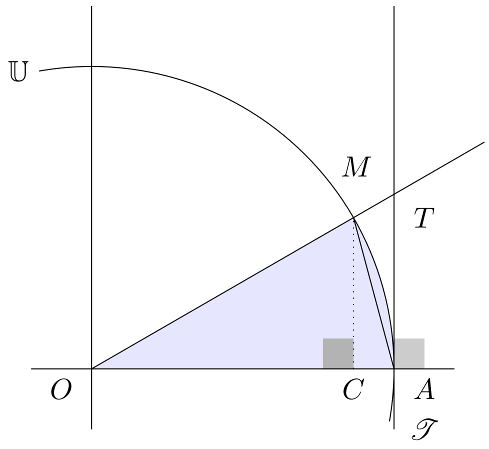

FIGURE 12 – Preuve du lemme 4.5.1.

4.5 Régularité des fonctions trigonométriques circulaires

Commençons par démontrer l'inégalité fondamentale suivante.

Lemme 4.5.1.
Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$, alors

$$0 \leqslant x\cos(x) \leqslant \sin(x) \leqslant x.$$

Démonstration.
Soit $0 < x < \frac{\pi}{2}$, notons $A = (1, 0)$ et $M = (\cos(x), \sin(x))$ (voir figure 4.5).

Remarquons que $\cos(x), \sin(x), \tan(x) \in \mathbb{R}_+^*$.

Notons $\mathscr{T}$ la perpendiculaire à (OA) passant par A et notons T le point d'intersection de $\mathscr{T}$ et (OM), qui existe bien car (OM) et $\mathscr{T}$ ne sont pas parallèles, vu l'encadrement sur x.

Notons C le projeté orthogonal de M sur (OA) : on a $C = (\cos(x), 0)$.

Par le théorème de Thalès, comme $CM = \sin(x)$, $OC = \cos(x)$ et comme $OA = OM = 1$, on a $AT = \tan(x)$.

Ainsi, le triangle OAM a pour aire $\dfrac{\sin(x)}{2}$.

Le disque unité a une aire de π et un périmètre de longueur 2π. La longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AM}$ est x. Par proportionnalité, la portion du disque unité comprise entre les segments OA et OM a pour aire $\dfrac{x}{2}$.

Enfin, le triangle OAT a pour aire $\dfrac{\tan(x)}{2}$.

Ces trois domaines sont inclus l'un dans l'autre (on l'admet), ce qui donne

$$0 \leqslant \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x),$$

ce qui donne l'encadrement demandé.

$\square$

Proposition 4.5.2.
Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.
Rappelons qu'une fonction f est continue en un point a lorsque $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$.
Commençons par démontrer la continuité en 0.
Si $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, alors $0 \leqslant \sin(x) \leqslant x$. Par encadrement, on obtient donc que $\sin(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 = \sin(0)$. Mais imparité de sin et $x \mapsto x$, nous avons $x \leqslant \sin x \leqslant 0$ si $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$, donc encore par encadrement, $\sin(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0 = \sin(0)$. Les limites à gauche à droite valant $\sin(0)$, $\sin(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \sin(0)$, d'où la continuité de sin en 0.

Pour le cosinus, il suffit d'observer que si $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

Il suffit d'utiliser la limite précédente pour obtenir que

$$\cos(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1 = \cos(0).$$

Ainsi cos est aussi continue en 0.

Étudions maintenant la continuité en un point $a \in \mathbb{R}$ quelconque : si $h \in \mathbb{R}$, $\sin(a+h) = \sin(a)\cos(h) + \cos(a)\sin(h) \xrightarrow[h\to 0]{} \sin(a)$. Donc $\sin(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sin(a)$, et sin est continue en a. On procède de la même manière pour cos. $\square$

Donnons un dernier résultat intermédiaire, qui sera utilisé dans la démonstration du théorème suivant, mais dont le premier point est un résultat très important que vous réutiliserez souvent :

Proposition 4.5.3. 1. $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$;

2. $\dfrac{\cos(x)-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Démonstration. 1. Par la continuité du cosinus, on a $\cos(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. Par le lemme 4.5.1, on a pour tout $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$:

$$\cos(x) \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant 1.$$

Par encadrement, on obtient que

$$\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1,$$

Par imparité de sin, $x \mapsto x\cos x$ et $x \mapsto x$, on obtient de la même manière $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 1$, donc $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

Par les formules de duplication, on obtient

$$\cos(x) = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

Ainsi,

$$\frac{\cos(x)-1}{x} = -\frac{x}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

grâce au premier point. $\square$

Théorème 4.5.4. 1. La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, est sa dérivée est $\cos' = -\sin$;

2. La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, est sa dérivée est $\sin' = \cos$;
3. La fonction tangente est dérivable là où elle est définie, et sa dérivée est

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

Démonstration.
On rappelle qu'une fonction f est dérivable en un point a s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} l$. Dans ce cas, la dérivée de f en a est $f'(a) = l$.
Directement avec le premier point de la proposition 4.5.3, nous voyons que sin est dérivable et $\sin'(0) = 1$.
Et avec le second point de ce même lemme, cos est dérivable en 0 et $\cos'(0) = 0$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, fixé. Posons $f\ : h \mapsto \sin(a+h)$ et $g\ : h \mapsto \sin(a)\cos(h)+\cos(a)\sin(h)$. Alors $f = g$. Puisque g est dérivable en 0, f l'est aussi, et $f'(0) = g'(0) = \sin(a)\cos'(0) + \cos(a)\sin'(0) = \cos(a)$. Donc $\dfrac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \cos(a)$, ou encore $\dfrac{\sin(t)-\sin(a)}{t-a} \xrightarrow[t\to a]{} \cos(a)$.

   Ainsi, la fonction sinus est dérivable en a et
   $$\sin'(a) = \cos(a).$$
2. On procède de même pour le cosinus.
3. La fonction tangente est le quotient de deux fonctions dérivables là où elle est définie, donc elle est dérivable, et
   $$\begin{aligned}\tan' &= \frac{\sin'\cos - \sin\cos'}{\cos^2}\\ &= \frac{\sin^2+\cos^2}{\cos^2}\\ &= \frac{1}{\cos^2}\\ &= 1+\tan^2.\end{aligned}$$

□

Maintenant que nous voyons que la fonction tangente a une dérivée strictement positive, nous sommes en mesure d'affirmer qu'elle est strictement croissante sur chaque intervalle où elle est définie. Par composition de limites, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\tan \xrightarrow[\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^-]{} +\infty$ et $\tan \xrightarrow[\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)^+]{} -\infty$. Enfin, $\tan'(k\pi) = 1$, ce qui nous permet de donner une allure du graphe de la fonction, qui est donné dans la figure 4.5.

Un dernier résultat, que la première partie de la démonstration précédente implique déjà sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

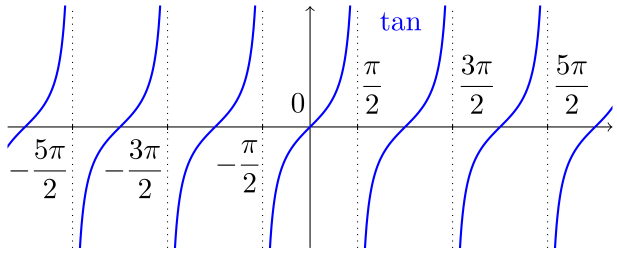

Figure 13 – Fonction tan.

Proposition 4.5.5.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leqslant |x|$.

Démonstration.
Introduisons les fonctions $f\ :\ x \mapsto x - \sin(x)$ et $g\ :\ x \mapsto x + \sin(x)$, définies sur $\mathbb{R}_+$. Ces fonctions sont dérivables, et $f'(x) = 1 - \cos(x) \geqslant 0$. Ainsi f est croissante. Comme elle s'annule en 0, elle est donc positive sur $\mathbb{R}_+$. Avec un raisonnement analogue, g est positive également. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+\ :\ -x \leqslant \sin x \leqslant x$, ou encore $-|x| \leqslant \sin x \leqslant |x|$ car $x \geqslant 0$. Finalement, $|\sin x| \leqslant |x|$ sur $\mathbb{R}_+$. Mais par parité de $x \mapsto |\sin x|$ et $x \mapsto |x|$, ce résultat est aussi valable sur $\mathbb{R}_-$, donc sur $\mathbb{R}$. □

5 Nombres imaginaires

5.1 Bref aperçu historique

Au XVIème siècle, Cardan et Bombelli, deux mathématiciens italiens, s'intéressent à la résolution de certaines équations algébriques du troisième degré. Mais ils sont confrontés à un problème : ils ont besoin de la racine carrée d'un nombre réel négatif pour exprimer certaines solutions réelles qui existent bel et bien ! Ils « imaginent » alors que ces racines carrées existent.
Pendant trois siècles, des mathématiciens vont se pencher sur ces travaux, avec des points de vue divers. Pour certains, l'existence de ces « nombres imaginaires » n'a aucun sens. D'autres vont chercher à comprendre ces

nombres. Il faudra attendre des travaux d'Euler à la fin du XVIIIème siècle pour que la situation s'éclaircisse et que les mathématiciens acceptent et utilisent ces nombres.
À partir du XIXème siècle, plusieurs mathématiciens vont proposer des définitions plus modernes et abouties de ces nombres alors appelés « complexes ». Il en existe plusieurs, ce qui fait l'intérêt et la richesse des nombres complexes : on peut les comprendre et les utiliser de plusieurs manières, et il existe des correspondances entre tous ces points de vue.
Les nombres complexes sont très importants. Vous les rencontrerez dans la plupart des chapitres de MPSI : dans les résolutions d'équations polynomiales, des équations différentielles, des suites récurrentes linéaires, en algèbre linéaire, et en géométrie bien sûr. Vous les utiliserez aussi énormément en physique et en SI.
C'est pourquoi il est essentiel de bien les appréhender. Ne vous laissez pas influencer par leur dénomination de « complexes ». Ils doivent cet attribut à trois siècles d'assimilation difficile. Mais vous avez suivi une formation moderne, dans laquelle les nombres imaginaires (adjectif plus positif que complexes) vont trouver leur place facilement. Après tout, les nombres négatifs ont aussi mis plusieurs siècles à être acceptés, mais vous les maniez au moins depuis que vous avez 12 ans, parfois même bien avant.

Aucune construction des nombres complexes n'est au programme. Mais il faut bien les introduire, et nous allons le faire en gardant un point de vue géométrique. Tous les résultats sur les complexes s'interprètent géométriquement : ne l'oubliez pas, cela vous aidera à mieux vous les représenter, mieux mémoriser les résultats et élaborer vos raisonnements.

5.2 Une définition géométrique

À tout point du plan de coordonnées (a, b), nous allons associer un nouvel objet noté $a + ib$, appelé un *nombre complexe*. À tout point il correspond exactement un nombre complexe. Ainsi, si a, a', b, b' sont quatre réels, $a + ib = a' + ib'$ ssi $(a, b) = (a', b')$ ssi $a = a'$ et $b = b'$.

La même construction peut être faite à partir de vecteurs : à tout vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, on associe le complexe $a + ib$.

Introduisons maintenant un peu de vocabulaire :

Définition 5.2.1 (voir figure 5.2)**.** 1. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, c'est-à-dire que $\mathbb{C} = \{a + ib\ ,\ a, b \in \mathbb{R}\}$.

2. Soit M un point du plan de coordonnées (a, b). On appelle *affixe* de M le complexe $a + ib$.
3. Soit u un vecteur du plan de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. On appelle *affixe* de u le complexe $a + ib$.
4. Soit z un nombre complexe. Il existe donc un unique $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$. Le réel a est appelé la *partie réelle* de z. On le note $\operatorname{Re} z$. Le réel b est appelé la *partie imaginaire* de z. On le note $\operatorname{Im} z$.
5. Un complexe de partie réelle nulle est dit *imaginaire pur*. Les imaginaires purs s'écrivent donc sous la forme $0 + ib$, avec $b \in \mathbb{R}$, que nous écrirons plus simplement ib. Un complexe de partie imaginaire nulle est dit *réel*. Les réels s'écrivent donc sous la forme $a + i.0$, avec $a \in \mathbb{R}$, que nous écrirons plus simplement a.
6. Soit z un complexe de partie réelle a et de partie imaginaire b. On appelle *image* de z le point du plan de coordonnées (a, b), ou le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Remarque 5.2.2.
L'ensemble des *réels* correspond donc aux points du plan qui se trouvent sur l'axe des abscisses. D'une certaine manière, cela permet de voir $\mathbb{R}$ comme une partie de $\mathbb{R}^2$.
L'ensemble des imaginaires purs correspond quant à lui à l'axe des ordonnées.

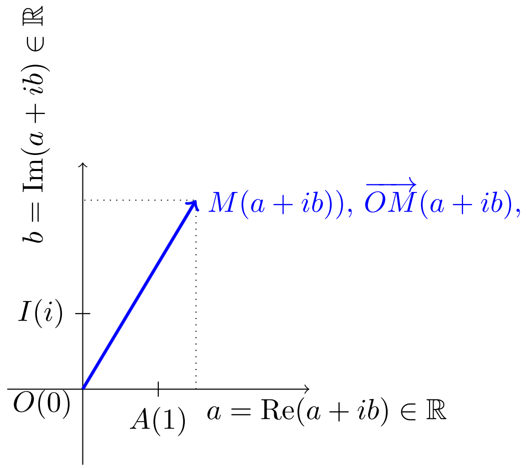

FIGURE 14 – Repérage d'un point par ses coordonnées cartésiennes.

Jusque-là, tout cela a peu d'intérêt : nous nous sommes contentés de « réécrire » les objets (a, b) et $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sous une autre forme. Pour qu'un ensemble d'objets ait un intérêt, il faut pouvoir faire des opérations entre ces objets. Nous allons donc définir deux opérations, une addition et un produit externe, sur $\mathbb{C}$:

Définition 5.2.3. 1. Soit $z = a + ib$ et $z' = c + id$ deux complexes. On définit leur somme $z + z' = (a + c) + i(b + d)$. Ainsi $\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$.

2. Soit $z = a + ib$ un complexe et $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit le complexe $\lambda z = (\lambda a) + i(\lambda b)$. Ainsi $\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda \mathrm{Im}(z)$.

Remarque 5.2.4.
Un complexe de partie imaginaire nulle est un réel. Mais alors pour les réels, nous disposons maintenant de deux additions : celle entre deux réels, que vous connaissez depuis toujours ; et celle entre complexes, que nous venons d'introduire. Mais, si a et b sont deux réels, nous pouvons les voir comme des complexes : $a = a+i\times 0$, et $b = b+i\times 0$. Si nous les additionnons comme des complexes, il vient : $a+b = a+i\times 0+b+i\times 0 = (a+b)+i\times(0+0) = a+b$, cette dernière somme étant celle entre a et b vus comme des réels. Pour des réels, il n'y a donc aucune différence entre ces deux additions : on dit que l'addition des complexes *prolonge* celle des réels.

Nous pouvons alors aller plus loin dans les identifications point / complexe et vecteur / complexe :

Théorème 5.2.5 (Règles de calcul)**.**
On a les propriétés suivantes :

(i) Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ deux vecteurs d'affixes respectifs z et z', et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors le vecteur $\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{u}'$ a pour affixe $z + \lambda z'$. En particulier, pour tout couple de vecteurs, l'affixe de la somme de ces vecteurs est la somme des affixes et pour tout scalaire λ et tout vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe z, l'affixe de $\lambda\overrightarrow{u}$ est λz.

(ii) Soient A et B deux points d'affixes respectifs a et b. Alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$.

Démonstration. (i) Notons a et b respectivement les parties réelle et imaginaire de z, et a' et b' celles de z'. Alors $\overrightarrow{u}$ (resp. $\overrightarrow{u}'$) a pour coordonnées (a, b) (resp. (a', b')). $\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{u}'$ a alors pour coordonnées $(a + \lambda a', b + \lambda b')$, donc pour affixe $(a + \lambda a') + i(b + \lambda b')$. Or on a

$$\begin{aligned} z + \lambda z' &= (a + ib) + \lambda(a' + ib') \\ &= (a + \lambda a') + i(b + \lambda b') \end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{u}'$ a bien pour affixe $z + \lambda z'$.
Il suffit alors d'étudier les cas particuliers où $\lambda = 1$, où $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et où $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et $\lambda = -1$ pour conclure.

(ii) Il suffit d'utiliser la relation fondamentale $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ et le point précédent pour conclure.

□

Remarque 5.2.6.
Soit $b \in \mathbb{C}$. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z+b \end{array}$$

s'interprète géométriquement comme la translation de vecteur d'affixe b.

Mais cela est encore peu. Pour aller plus loin, nous voulons pouvoir multiplier des complexes entre eux.

5.3 Écriture trigonométrique d'un complexe

L'écriture précédente des complexes est appelée *écriture algébrique*. Nous pouvons remarquer qu'elle est très liée aux coordonnées cartésiennes. Et si nous utilisions les coordonnées polaires ?

Définition 5.3.1.
Soit un nombre complexe, que l'on écrit sous forme algébrique $z = a + ib$ ($i.e.$ $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$).
On appelle *module* de z le réel $\sqrt{a^2 + b^2}$. On le note $|z|$.

Notation 5.3.2.
On note $\mathbb{U}$ le cercle unité complexe :

$$\mathbb{U} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \},$$

Remarque 5.3.3.
1. Si $x \in \mathbb{R}$, on peut le voir comme un complexe. On se retrouve alors avec deux objets notés de la même manière, $|x|$: son module et sa valeur absolue. Mais $x = x + i.0$, donc son module est $\sqrt{x^2 + 0} = \sqrt{x^2}$: il est donc bien égal à sa valeur absolue. Là encore, le module prolonge sur $\mathbb{C}$ la valeur absolue réelle.
2. Si M (ou le vecteur u) est l'image de z, alors $|z|$ n'est autre que la distance OM (ou la norme $\|u\|$).
3. En particulier, soit a et z deux complexes et $R \geqslant 0$. Notons M et A les points du plans d'affixes respectives z et a. Alors $|z - a|$ est la distance AM. Et M appartient au cercle (resp. disque ouvert, resp. disque fermé) de centre A et de rayon R si et seulement si $|z - a| = R$ (resp. $|z - a| < R$, resp. $|z - a| \leqslant R$).
4. L'ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique est donc $\mathbb{U}$. Nous identifierons donc ces deux objets.

Proposition 5.3.4.
Soit $z \in \mathbb{C}$
1. $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ et $|\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z|$;
2. $|z| = 0$ ssi $z = 0$;
3. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $|\lambda z| = |\lambda||z|$.

Démonstration.
Écrivons sous forme algébrique $z = a + ib$.
1. On a l'encadrement fondamental
$$0 \leqslant a^2 \leqslant a^2 + b^2,$$
donc par croissance de la racine carrée $0 \leqslant \sqrt{a^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$, donc $0 \leqslant |a| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$, ce qui est exactement le premier encadrement demandé.
On procède de même pour b.
2. Si $z = 0 = 0 + i0$, on a immédiatement $|z| = 0$.
Si $|z| = 0$, on a par l'encadrement précédent : $0 \leqslant a^2 \leqslant a^2 + b^2 = 0$, donc $a^2 = 0$, donc $a = 0$. On procède de même pour b, donc $z = 0$.
3. On a $\lambda z = (\lambda a) + i(\lambda b)$, or λa et λb sont des réels, donc
$$|\lambda z|^2 = (\lambda a)^2 + (\lambda b)^2 = \lambda^2 (a^2 + b^2) = \lambda^2 |z|^2.$$
Comme $|\lambda z|$ et $|z|$ sont positifs, on obtient bien le résultat demandé.

$\square$

Corollaire 5.3.5.
Si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, alors $\left|\frac{z}{|z|}\right| = 1$, *i.e*

$$\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}.$$

Démonstration.
Immédiat avec le dernier point de la proposition précédente. □

Théorème 5.3.6 (Inégalité triangulaire)**.**
Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors

$$\big||z| - |z'|\big| \leqslant |z \pm z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

Démonstration.
Ce résultat sera démontré dans le chapitre sur les complexes.
Mais nous allons ici montrer qu'il est équivalent à l'inégalité triangulaire vue dans le plan avec trois points ou deux vecteurs.
Soit deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ d'affixes respectifs z et z'. Alors l'affixe de $\overrightarrow{u} \pm \overrightarrow{v}$ est $z \pm z'$, et nous avons les égalités $\|\overrightarrow{u}\| = |z|$, $\|\overrightarrow{v}\| = |z'|$,$\|\overrightarrow{u} \pm \overrightarrow{v}\| = |z \pm z'|$, donc directement

$$\begin{aligned} &\Big|\|\overrightarrow{u}\| - \|\overrightarrow{v}\|\Big| \leqslant \|\overrightarrow{u} \pm \overrightarrow{v}\| \leqslant \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\| \\ \Leftrightarrow &\Big||z| - |z'|\Big| \leqslant |z \pm z'| \leqslant |z| + |z'|. \end{aligned}$$

□

Définition 5.3.7.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle *exponentielle complexe de $i\theta$* le complexe $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

L'écriture $\mathrm{e}^{i\theta}$ n'est qu'une **notation** : en aucun cas il ne s'agit du réel e élevé à la puissance $i\theta$, ce qui n'a aucun sens.

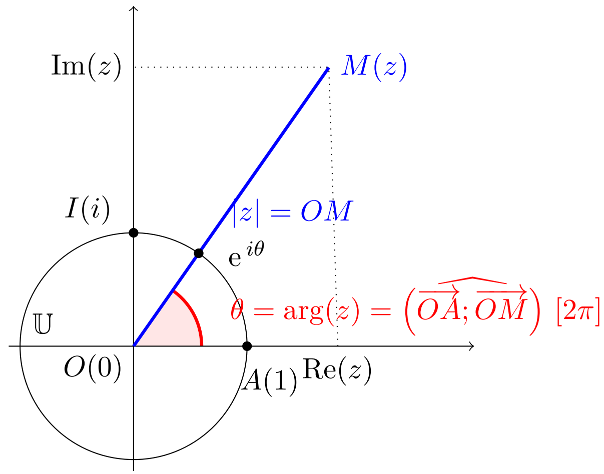

Figure 15 – Interprétation géométrique du module et de l'argument de $z \in \mathbb{C}^*$.

Remarque 5.3.8.
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\left|\mathrm{e}^{i\theta}\right| = 1$, donc une exponentielle complexe, tout comme les exponentielles réelles, ne s'annule jamais.

Remarque 5.3.9.
Grâce à la représentation paramétrique du cercle trigonométrique, nous pouvons écrire que $\mathbb{U} = \left\{\mathrm{e}^{i\theta}\ ,\ \theta \in \mathbb{R}\right\}$.

Définition 5.3.10.
Soit $z \neq 0$. Alors $z/|z| \in \mathbb{U}$, donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ vérifiant $z/|z| = \mathrm{e}^{i\theta}$, c'est-à-dire $z = |z|\mathrm{e}^{i\theta}$.

Le réel θ est alors appelé ***un** argument* de z. Il existe à 2π près. Il existe alors un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$ vérifiant $z = |z|\mathrm{e}^{i\theta}$. Ce réel est appelé *l'argument principal* de z, et noté $\arg z$.
L'écriture «$z = |z|\mathrm{e}^{i\theta}$» est appelée *écriture trigonométrique* de z.

Remarque 5.3.11. 1. Attention à la non unicité de l'argument.

2. Le complexe 0 n'a pas d'argument ;
3. Pour tout z non nul, $(|z|, \arg z)$ est un couple de coordonnées polaires du point d'affixe z ;
4. Il est simple de passer de l'écriture trigonométrique à l'écriture algébrique, de même qu'il est simple de passer des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes : $r\mathrm{e}^{i\theta} = (r\cos\theta) + i(r\sin\theta)$. La réciproque nécessite là aussi l'utilisation des fonctions circulaires inverses, qui seront bientôt vues.

Exercice 5.3.12.
Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants.

$$-3;\ -2i;\ 2\sqrt{3}-2i;\ \sqrt{6}+i\sqrt{2}$$

5.4 Multiplication de deux complexes

Nous pouvons maintenant définir une multiplication sur $\mathbb{C}$:

Définition 5.4.1.
Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. On définit leur produit $z \times z'$, ou plus simplement zz', de la manière suivante :
Si z ou z' est nul, alors $zz' = 0$;
Sinon, on écrit z et z' sous forme trigonométrique, $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ et $z' = r'\mathrm{e}^{i\theta'}$, et on pose $zz' = rr'\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$.

Remarque 5.4.2.
Multiplier un complexe z par $z' = r\mathrm{e}^{i\theta}$, c'est donc multiplier z par la constante réelle positive r (on appelle cette transformation une *homothétie* de rapport r), et ensuite appliquer la rotation d'angle θ au vecteur obtenu. On remarque que l'on peut aussi appliquer d'abord la rotation, puis l'homothétie : l'ordre n'importe pas, ces deux transformations *commutent* (voir figure 5.4).

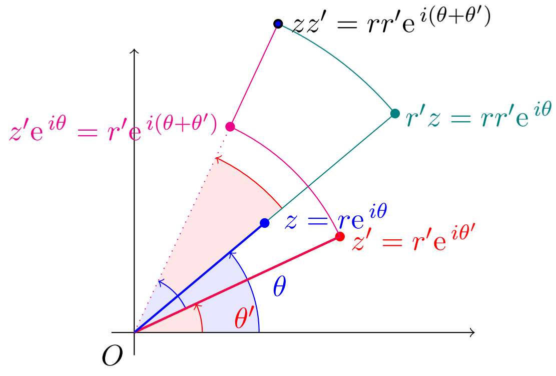

FIGURE 16 – Produit zz'.

Le résultat suivant nous permet d'exprimer la multiplication entre deux complexes, cette fois-ci sous forme algébrique, et non pas sous forme trigonométrique :

Proposition 5.4.3.
Pour tout $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$,

$$(a+ib)(a'+ib') = (aa'-bb') + i(ab'+a'b).$$

Ou encore, si $z, z' \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(zz') &= \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z') - \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(z') \\ \mathrm{Im}(zz') &= \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z') + \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Re}(z') \end{cases}.$$

Démonstration.
Les deux formulations de l'énoncé sont équivalentes : démontrons la seconde.
Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Notons-les $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ et $z' = r'\mathrm{e}^{i\theta'}$. Ainsi $zz' = rr'\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$. Nous avons

donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(zz') &= \mathrm{Re}\left[rr'\big(\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')\big)\right]\\ &= rr'\cos(\theta+\theta')\\ &= rr'\left[\cos(\theta)\cos(\theta')-\sin(\theta)\sin(\theta')\right]\\ &= r\cos(\theta)r'\cos(\theta')-r\sin(\theta)r'\sin(\theta')\\ &= \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z')-\mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(z')\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(zz') &= rr'\sin(\theta+\theta')\\ &= rr'\left[\cos(\theta)\sin(\theta')+\sin(\theta)\cos(\theta')\right]\\ &= r\cos(\theta)r'\sin(\theta')+r\sin(\theta)r'\cos(\theta')\\ &= \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z')+\mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Re}(z')\end{aligned}$$

□

Remarque 5.4.4.
Nous voyons qu'additionner des complexes sous forme algébrique est très simple. Les multiplier sous forme trigonométrique l'est aussi. Multiplier des complexes sous forme algébrique est déjà moins agréable. Quant à les additionner sous forme trigonométrique, nous verrons plus tard que cela n'est réalisable que si les deux complexes sont de même module, et même dans ce cas l'opération n'est pas immédiate.

Il convient donc de choisir l'écriture des complexes que vous utiliserez en fonction des opérations que vous voudrez effectuer.

Remarque 5.4.5.
Là encore, si $x, y \in \mathbb{R}$, nous pouvons les mulitplier comme des complexes : $(x+i.0)(y+i.0) = (xy-0)+i(0+0) = xy$. Nous obtenons le produit de x et y vus comme des réels : le produit sur $\mathbb{C}$ est donc un prolongement du produit sur $\mathbb{R}$.

Remarque 5.4.6.
L'identité « $\mathrm{e}^{i\theta}.\mathrm{e}^{i\theta'} = \mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$ » est inoubliable ! Et à partir de cette identité, la démonstration précédente permet de retrouver les formules de trigonométrie de la proposition 4.4.1. Ce sera pour vous la technique à favoriser pour retrouver ces formules si besoin (mais insistons tout de suite : vous devriez normalement connaître ces formules par coeur).

Proposition 5.4.7 (règles de calcul)**.**
Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$, alors

1. $ab = ba$ (commutativité de la multiplication) ;
2. $(ab)c = a(bc)$ (associativité de la multiplication) ;
3. $a(b+c) = ab+ac$ (distributivité de $\times$ sur $+$) ;
4. $0+a = a$ (0 est neutre pour $+$) ;
5. $a+(-1)a = 0$, *i.e.* $(-1)a = -a$;
6. $0a = 0$ (0 est absorbant pour $\times$) ;
7. $1a = a$ (1 est neutre pour $\times$) ;
8. $ab = 0 \Rightarrow (a = 0$ ou $b = 0)$.

Démonstration.
Il suffit d'écrire cela avec la définition 5.4.1, ou bien à partir des formules obtenues à la proposition 5.4.3. □

Remarque 5.4.8.
Toutes ces propriétés des opérations $+$ et $\times$ sur $\mathbb{C}$, font que $\mathbb{C}$ est appelé un *corps* : nous en reparlerons dans le chapitre sur les groupes, anneaux et corps.

Théorème 5.4.9.
On a $i^2 = -1$.

Remarque 5.4.10 ()**.**
Ce dernier résultat indique que la règle des signes n'est pas vraie sur $\mathbb{C}$. On ne peut donc prolonger la relation d'ordre $\leqslant$ de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$.

En résumé, on ne peut pas comparer deux complexes (non réels). Lorsque l'on travaille dans un cadre complexe, on ne peut donc utiliser aucune notion construite sur $\leqslant$ (ex : monotonie).

Comparer deux nombres complexes est une grave et lourde erreur !

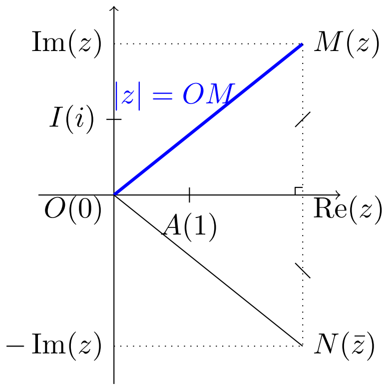

FIGURE 17 – Interprétation géométrique du conjugué de $z \in \mathbb{C}$.

5.5 Conjugué et module d'un nombre complexe

Définition 5.5.1.
On appelle *conjugué d'un complexe* z le complexe $\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$.

Proposition 5.5.2 (Interprétation géométrique)**.**
Soit $M(z)$ un point du plan. Alors $|z| = OM$ et $\overline{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe $(O\overrightarrow{i})$ (voir figure 5.5).

Démonstration.
Immédiat □

Proposition 5.5.3.
Soit z un complexe non nul, écrit $z = re^{i\theta}$ sous forme trigonométrique. Alors $\overline{z} = re^{-i\theta}$.

Proposition 5.5.4 (Règles de calcul)**.**
Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a les identités suivantes.

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z) &= \frac{z+\overline{z}}{2} & \mathrm{Im}(z) &= \frac{z-\overline{z}}{2i} \\ \overline{z+z'} &= \overline{z}+\overline{z'} & \overline{z \times z'} &= \overline{z} \times \overline{z'} \\ \overline{\overline{z}} &= z & z\overline{z} &= |z|^2 \\ |\overline{z}| &= |z| & |zz'| &= |z| \times |z'| \end{aligned}$$

Démonstration.
Ces identités sont élémentaires et se vérifient directement en posant $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Celles qui ne font pas intervenir de somme sont même encore plus simple à démontrer sous forme trigonométrique.

Pour la dernière, remarquons aussi que, facilement, $|zz'|^2 = zz'\overline{zz'} = zz'\overline{z}\overline{z'} = z\overline{z}z'\overline{z'} = |z|^2|z'|^2$. □

Corollaire 5.5.5.
Soit $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \overline{z} = z, \\ z \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \overline{z} = -z. \end{aligned}$$

5.6 Inverse d'un nombre complexe non nul

Proposition 5.6.1.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 0$. Il existe un unique complexe z' tel que $zz' = 1$: on dit que z est *inversible* pour la multiplication, et que z' est son *inverse*. On notera ce dernier $\dfrac{1}{z}$ ou encore z^{-1}.
De plus : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Remarque 5.6.2.
Attention : 0 n'est pas inversible, et comme avec les réels, il est interdit d'écrire $\frac{1}{0}$. De manière générale, avant d'écrire une fraction (de complexes ou d'autre chose), on s'assurera que le dénominateur n'est pas nul.

Démonstration.
Pour l'existence, il suffit d'utiliser l'égalité $z\bar{z} = |z^2|$ vue précédemment. Si $z \neq 0$, alors $|z^2|$ est un réel non nul donc $z \times \frac{\bar{z}}{|z^2|} = 1$.
Pour l'unicité, si z'' est un autre inverse, alors $z'zz'' = (z'z)z'' = 1.z'' = z''$ mais aussi $z'zz'' = z'(zz'') = z'.1 = z'$, par associativité. □

Nous pouvons compléter les règles de calcul précédentes :

Proposition 5.6.3 (Règles de calcul)**.**
Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, tel que $z' \neq 0$. On a les identités suivantes :

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{et} \quad \overline{\frac{z}{z'}} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}.$$

Remarque 5.6.4.
L'inverse d'un complexe est donc

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

Exercice 5.6.5.
Écrire $\frac{1+2i}{3-4i}$ sous forme algébrique.

5.7 Technique de l'angle moitié

La méthode suivante est indispensable : elle permet d'additionner deux complexes de même module, le tout sous forme trigonométrique.

Théorème 5.7.1 (technique de l'angle moitié)**.**
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{iy} &= \mathrm{e}^{i\frac{(x+y)}{2}}\left(\mathrm{e}^{i\frac{(x-y)}{2}} + \mathrm{e}^{-i\frac{(x-y)}{2}}\right) \\ &= 2\mathrm{e}^{i\frac{(x+y)}{2}} \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{aligned}$$

Cette technique permet en particulier de montrer

Corollaire 5.7.2.
Soit $t \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} 1 + \mathrm{e}^{it} &= 2\mathrm{e}^{i\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{t}{2}\right) \\ 1 - \mathrm{e}^{it} &= -2\mathrm{e}^{i\frac{t}{2}} i \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

Démonstration.
Il suffit de remarquer que $1 = \mathrm{e}^{i0}$ et d'appliquer la technique. □

Exercice 5.7.3.
Mettre sous forme trigonométrique le nombre complexe $\mathrm{e}^{3i\pi/5} + \mathrm{e}^{4i\pi/9}$.