Devoir surveillé n°5

Barème

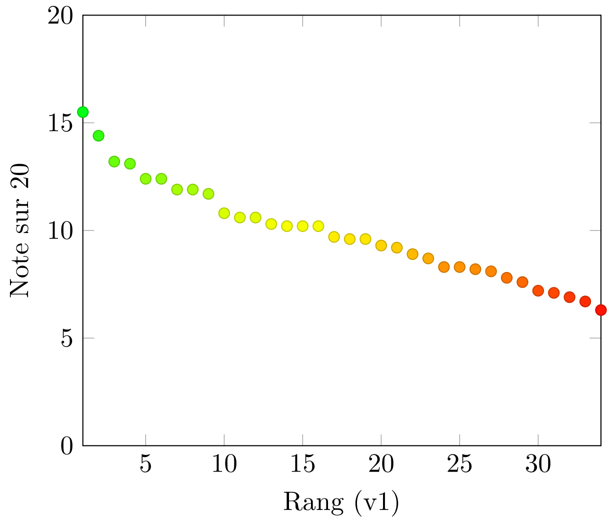
Calculs : 15 questions sur 2 points, total sur 30 , ramené sur 5 points
Problème : 32 ou 26 questions sur 4 points, total sur 128 (v1) ou 104 (v2), ramené sur 15 points

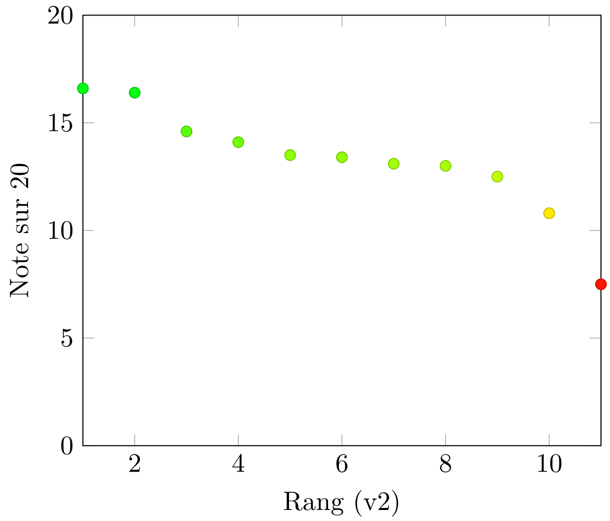
Soit $\varphi : x \mapsto \frac{1}{10}\lfloor 10x \rfloor$, c le nombre de points obtenus sur la fiche de calculs et p le nombre de points obtenus sur les exercices, la note sur 20 est le réel $n = \min\left\{\varphi\left(\frac{5c}{28} + \frac{15p}{\alpha}\right), 20\right\}$ avec $\alpha = 80$ (v1) ou 76 (v2)

Statistiques

	Calculs	Problème (v1)	Problème (v2)	*Précision (v1)*	*Précision (v2)*
Minimum	4	25	27	*36%*	*39%*
Q1	10	33	46	*54%*	*65%*
Médiane	12	40	49	*58%*	*76%*
Q3	18	50	53	*67%*	*81%*
Maximum	26	66	64	*86%*	*88%*
Moyenne	13.9	41.5	48.9	*59.3%*	*71.5%*

Répartition des notes





Remarques générales

Exercice 1

- De nombreuses récurrences erronées ou approximatives.
- **Question 1.** L'expression de u_n en fonction de n ne doit dépendre que de n, et pas de réels λ et μ encore inconnus. Il fallait traiter la question jusqu'au bout...
- **Question 3.** Le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} \geq u_{n+1}$ ne suffit pas à justifier que u est croissante ; on peut en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \geq u_n$, et donc que u est croissante **à partir du rang 1**.
- **Question 4.** Beaucoup d'erreurs. En procédant par récurrence double, et en obtenant le fait que si $u_n \geq n$ et $u_{n+1} \geq n+1$, alors $u_{n+2} \geq 2n+1$, il fallait remarquer que $2n+1 \geq n+2$ uniquement pour $n \geq 1$; le cas $n = 0$ **n'a pas été traité dans l'initialisation**, puisque « $u_{n+2} \geq n+2$ »pour $n = 0$, ce n'est pas $u_0 \geq 0$, mais $u_2 \geq 2$...
- **Question 5.** Il est tout de même dommage de passer à côté du fait que (a_n) est géométrique.
  Attention, il n'existe pas une seule suite géométrique de raison -1 ; le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = -a_n$ n'est pas suffisant pour affirmer que $a_n = (-1)^n$.
- **Question 6.** Vous pouviez éviter de faire une disjonction de cas suivant la parité de n en multipliant la relation par $(-1)^n$.

Exercice 2

— **Question 1a.** La loi utilisée ici est l'addition $+$, il convient donc d'utiliser plutôt les notations additives (et le vocabulaire adapté) : l'*inverse* d'un élément x pour $+$ est appelé *opposé* de x et est noté $-x$.
Attention à ne pas confondre les propriétés à vérifier pour montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe et les propriétés que doit vérifier un groupe. Il ne s'agit pas ici de montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ contient un élément neutre pour $+$, mais de montrer que 0 appartient à $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$. De même, on ne montre pas que tout élément $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ est inversible pour $+$ (on le sait déjà : c'est un réel), mais que pour tout $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, son opposé $-x$ (qu'on sait déjà exprimer) appartient à $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.

— **Question 1b.** Le plus simple était de montrer ici que $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$. Si vous souhaitez utiliser la définition d'un anneau, attention à n'oublier aucune des propriétés à vérifier.

— **Question 2b.** Attention : la négation de $(a, b) = (a', b')$ est $a \neq a'$ **ou** $b \neq b'$.
Pour déduire directement de $(a - a') + (b - b')\sqrt{7} = 0$ le fait que $a - a' = b - b' = 0$, il faudrait avoir déjà montré que 0 s'écrit de manière unique sous la forme $c + d\sqrt{7}$ avec $c, d \in \mathbb{Z}$, ce qui n'est pas le cas.

— **Question 2c.** Ne pas oublier de vérifier que $\varphi(1) = 1$. Il n'est en revanche pas nécessaire de vérifier que $\varphi(0) = 0$, cela découle directement du fait que φ est un endomorphisme du groupe $(\mathbb{Z}[\sqrt{7}], +)$.

— **Question 3d.** Il ne faut pas oublier de vérifier que G est stable par $\times$. Par ailleurs, le fait que tout élément de G soit inversible (dans $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$) n'est pas suffisant : il faut vérifier que son inverse est bien un élément de G.
Le plus simple ici était de montrer que G est un sous-groupe d'un groupe bien choisi, par exemple $(\mathbb{R}^*, \times)$ ou $(Z[\sqrt{7}]^\times, \times)$. Attention au fait que $(Z[\sqrt{7}], \times)$ n'est pas un groupe !
Il est encore une fois nécessaire d'utiliser le vocabulaire adapté suivant que vous utilisez la définition d'un groupe ou la notion de sous-groupe (loi de composition interne ou stabilité par la loi du groupe de référence, existence d'un élément neutre ou appartenance de l'élément neutre du groupe de référence, existence d'un inverse <u>dans G</u> ou stabilité par passage à l'inverse) et de ne pas oublier d'évoquer l'associativité si vous utilisez la définition.

— **Question 3e.** Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, si $x + y\sqrt{7} \in G$, alors $x^2 - 7y^2 = 1$, ne suffit pas à répondre à la question : cela prouve que les éléments de G correspondent à **des** solutions de l'équation, pas qu'il y a une équivalence entre la résolution de l'équation et la détermination des éléments de G.

Exercice 3

— **Question 1.** Attention à la cohérence de ce que vous écrivez : $(f * (g * h))(n)$, ce n'est pas $\cancel{f * ((g * h)(n))}$, qui n'aurait aucun sens.
Pour cette question, la deuxième écriture était largement plus facile à utiliser :

$$(f * (g * h))(n) = \sum_{a,b \in \mathbb{N}^*} f(a)(g * h)(b) = \sum_{a,b \in \mathbb{N}^*, ab = n} f(a) \sum_{c,d \in \mathbb{N}^*, cd = b} g(c)h(d) = \sum_{a,c,d \in \mathbb{N}^*, acd = n} f(a)g(c)h(d)$$

et de même pour $((f * g) * h)(n)$.

— **Question 6.** Le fait que $(\mathcal{A}, +)$ est un groupe abélien fait partie du cours, car $\mathcal{A}$ n'est rien d'autre que l'ensemble des suites complexes. Inutile donc de le redémontrer. Avec les questions précédentes, il ne restait que la distributivité de $*$ sur $+$ à démontrer, mais vous devez tout de même évoquer explicitement toutes les propriétés d'un anneau (oui, même celles qui ont été démontrées dans les questions précédentes). L'associativité de $*$ et l'existence d'un élément neutre pour $*$ doivent donc figurer dans votre réponse.

— **Question 12.** On vous demande de prouver l'existence d'un plus petit entier tel que « ... ». Soyez complet, sobre et efficace, et exhibez une partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée.
Vous ne pouvez pas vous contenter d'écrire que « $z^n = 1$ ~~donc~~ d existe »(quel est le lien ?).