Devoir surveillé n° 9
Version 1
Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Étude d'une suite de tirages.

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).

Étude du cas $c = 0$.

On effectue donc ici n tirages avec remise de la boule dans l'urne.
On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire réelle définie par :

$$\begin{cases} Y = k & \text{si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au } k^{ième} \text{ tirage.} \\ Y = 0 & \text{si les } n \text{ boules tirées sont noires.} \end{cases}$$

1) Déterminer la loi de X. Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.

2) Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, déterminer la probabilité $P(Y = k)$ de l'événement $(Y = k)$, puis déterminer $P(Y = 0)$.

3) Vérifier que :

$$\sum_{k=0}^{n} P(Y = k) = 1.$$

4) Pour $x \neq 1$ et n entier naturel non nul, montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$

5) En déduire $E(Y)$.

Étude du cas $c \neq 0$.

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définies par :

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i^{ème} \text{ tirage.} \\ X_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire Z_p, par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i.$$

6) Que représente la variable Z_p ?

7) Donner la loi de X_1 et l'espérance $E(X_1)$ de X_1.

8) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2 puis l'espérance $E(X_2)$.

9) Déterminer la loi de probabilité de Z_2.

10) Déterminer l'univers image $Z_p(\Omega)$ de Z_p.

11) Soit $p \leqslant n-1$.

a) Déterminer $P_{(Z_p=k)}(X_{p+1}=1)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.

b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :

$$P(X_{p+1}=1) = \frac{1+cE(Z_p)}{2+pc}.$$

c) En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
(On raisonnera par récurrence sur p : les variables X_1, X_2, ..., X_p étant supposées suivre une loi de de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, et on calculera $E(Z_p)$).

II. Calcul des puissances d'une matrice.

Dans tout le problème on se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
On désigne par $\mathcal{E}$ la base (e_1, e_2, e_3) telle que $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.
On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ et } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On convient que si M est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ alors $M^0 = I$.
Si P désigne le polynôme à coefficients réels $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$ et si M désigne une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $P(M)$ la matrice

$$P(M) = \sum_{i=0}^{n} a_i M^i = a_0 I + a_1 M + ... + a_n M^n$$

On peut aisément démontrer que pour tous polynômes P et Q à coefficients réels, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $(P+Q)(M) = P(M) + Q(M)$ et $(PQ)(M) = P(M)Q(M)$

L'objectif de ce problème est de calculer de plusieurs manières A^n pour n entier naturel non nul.

Partie A

1) En utilisant la méthode du pivot de Gauss, montrer que A est inversible et calculer A^{-1}. On fera apparaître sur la copie les calculs intermédiaires.

2) Calculer A^2 et A^3, et montrer que A, A^2, et A^3 se mettent sous la forme :

$$A = \lambda_1 A + \mu_1 I, \quad A^2 = \lambda_2 A + \mu_2 I, \quad A^3 = \lambda_3 A + \mu_3 I$$

où $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \lambda_3, \mu_3$ sont des réels que l'on précisera.

3) On donne la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1 \text{ et } \forall n \geqslant 1, \alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} + 2\alpha_n.$$

Montrer par récurrence sur n que $\forall n \geqslant 2, A^n = \alpha_n A + 2\alpha_{n-1} I$.

4) En déduire l'expression de A^n pour tout n entier naturel non nul.

Partie B

On note I l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{E}$ est A.

5) **a)** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. A l'aide d'un calcul de rang, montrer que $f - \lambda \mathrm{I}$ n'est pas injective si et seulement si $\lambda \in \{-1, 2\}$.

Par la suite, on notera $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$.

b) On pose $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{I})$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(f - \lambda_2 \mathrm{I})$; on rappelle qu'il s'agit de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de E_1 et une base $\mathcal{B}_2$ de E_2.
On choisira des vecteurs dont la première coordonnée est 1 et dont une coordonnée est nulle, lorsque cela est possible.

c) On note $\mathcal{B}$ la famille obtenue en complétant $\mathcal{B}_1$ par l'élément de $\mathcal{B}_2$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

d) Montrer que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.

6) **a)** Déterminer la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}$.

b) Déterminer la matrice P de passage de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{B}$.

c) Rappeler pourquoi P est inversible, puis calculer son inverse P^{-1}.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

e) En déduire la valeur de A^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comparer avec le résultat obtenu dans la partie A.

Partie C

Soit n un entier naturel non nul et soit R_n le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par le polynôme $(X+1)(X-2)$

7) **a)** Que peut-on dire du degré de R_n ?

b) Déterminer le polynôme R_n.

c) Montrer que les coefficients du polynôme R_n sont des entiers.

8) Retrouver à nouveau l'expression de A^n.

— **FIN** —