## Feuille d'exercice n° 30 : Fonctions de deux variables

Montrer que  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Exercice 1 ( )

On considère la fonction f définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $f(x,y) = |x|^y$ , avec la convention  $0^0 = 1$ . En quels points la fonction f est-elle continue ?

Exercice 3 ( ) Étudier l'existence et, le cas échéant, calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

1) 
$$f(x,y) = 2xy^3 - 3y$$

**2)** 
$$g(x,y) = \max(|x|,|y|)$$
 **3)**  $h(x,y) = \sqrt{1+x^2y^2}$ 

**3)** 
$$h(x,y) = \sqrt{1 + x^2 y^2}$$

On définit sur  $\mathbb{R}^2$  la fonction f par Exercice 4

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{|x| + |y|} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad x = y = 0 \end{cases}.$$

La fonction f est-elle continue? De classe  $\mathscr{C}^1$ ?

**Exercice 5** ( $^{\circ}$ ) Soit  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  de classe  $\mathscr{C}^1$ . Déterminer les dérivées (évenuellement partielles) des fonctions suivantes.

1) 
$$g: x \mapsto f(x,x)$$

**2)** 
$$h:(x,y) \mapsto f(y,f(x,x))$$

## - Fonctions positivement homogènes -

Soit  $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$  de classe  $\mathscr{C}^1$ , soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La fonction f est dite positivement homogène de degré  $\alpha$  si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ f(tx,ty) = t^{\alpha} f(x,y).$$

- 1) Donner un exemple de fonction positivement homogène (avec son degré), et un exemple de fonction non homogène.
- 2) Montrer que si f est positivement homogène de degré  $\alpha$ , alors ses dérivées partielles sont positivement homogènes de degré  $\alpha - 1$ .
- 3) Montrer que f est positivement homogène de degré  $\alpha$  si et seulement si f vérifie la relation d'Euler :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \ x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y).$$

Indication: étudier  $\varphi: t \mapsto f(tx, ty)$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Résoudre sur  $\mathbb{R}^2$  l'équation aux dérivées partielles suivantes, en utilisant le Exercice 7 changement de variables u = x + y et v = x - y:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda.$$

Exercice 8 ( $\circlearrowleft$ ) – Coordonnées polaires – On définit  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (x,0) \mid x \in \mathbb{R}_- \}$ . Soit  $f: D \to \mathbb{R}$  de classe  $\mathscr{C}^1$ , on définit sur  $\mathbb{R}_+^* \times ] - \pi, \pi[$  la fonction

$$g:(r,\theta)\mapsto f(r\cos(\theta),r\sin(\theta)).$$

- 1) Représenter D et montrer que D est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .
- 2) Justifier que g est de classe  $\mathscr{C}^1$ .
- 3) Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f, et réciproquement.
- 4) Exemple : dériver  $u \mapsto ||u||$  en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires.
- 5) Application: résoudre sur D les équations aux dérivées partielles suivantes, en utilisant les coordonnées polaires.

$$\mathbf{a)} \ \ x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

**b)** 
$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Exercice 9 ( ) Étudier les extremums globaux des fonctions suivantes.

- 1)  $f:(x,y) \mapsto x^3 + y^3$ , sur  $\mathbb{R}^2$ .
- **2)**  $g: u \mapsto ||u||^2 + \sin(||u||^2), \text{ sur } ] 1, 1[^2.$
- 3)  $h:(x,y)\mapsto x^2+3y^2-2x-10y+2xy+6 \text{ sur } \mathbb{R}^2.$

Exercice 10 On note

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < y < 1 \right\},$$

$$\overline{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1 \right\}.$$

On admet que D est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

- 1) Représenter D et  $\overline{D}$ .
- 2) Étudier sur  $\overline{D}$  les extremums de la fonction

$$f:(x,y)\mapsto x^3+5y^3+3x^2y+3xy^2-3y^2.$$

