Semaine n° 30 : du 19 mai au 23 mai

Lundi 19 mai

- **Cours à préparer : Chapitre XXVIII - Séries**
  - *Partie 1 :* Série convergente, série divergente ; somme d'une série convergente ; somme partielle d'indice n, reste d'indice n ; séries géométriques, condition nécessaire et suffisante pour la convergence, somme d'une série géométrique convergente ; séries téléscopique ; divergence grossière ; série exponentielle.
  - *Partie 2 :* Séries à termes positifs ; comparaison de séries à termes positifs ; séries de Riemann.
- **Exercices à rendre en fin de TD** - *(liste non exhaustive)*
  - **Feuille d'exercices nº 27 :** exercices 6, 7, 9, 10, 13, 15, 16, 5.

Mardi 20 mai

- **Cours à préparer : Chapitre XXVIII - Séries**
  - *Partie 2 :* Séries à termes positifs ; comparaison de séries à termes positifs ; séries de Riemann.
  - *Partie 3 :* Comparaison série-intégrale.
  - *Partie 4 :* Séries absolument convergentes ; critère spécial des séries alternées.
- **Exercices à corriger en classe**
  - **Feuille d'exercices nº 27 :** exercice 8.

Jeudi 22 mai

- **Cours à préparer : Chapitre XXVIII - Séries**
  - *Partie 5.1 :* Famille sommable de réels positifs ; invariance de la somme par permutation ; opérations ; comparaison ; une sous-famille d'une famille sommable de réels positifs est sommable ; sommation par paquets ; théorème de Fubini positif.
  - *Partie 5.2 :* Famille sommable de nombres réels ou complexes ; somme d'une famille sommable, invariance par permutation ; linéarité de la somme ; sommation par paquets ; théorème de Fubini ; produit de Cauchy.
- **Exercices à corriger en classe**
  - **Feuille d'exercices nº 27 :** exercice 17.

Vendredi 23 mai

- **Cours à préparer : Chapitre XXIX - Espaces euclidiens et préhilbertiens réels**
  - *Partie 1 :* Produit scalaire ; espace préhilbertien réel, espace euclidien ; distance ; norme ; distance associée à une norme, norme associée à un produit scalaire ; inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire ; identité du parallélogramme, identité de polarisation.
  - *Partie 2.1 :* Vecteur unitaire, vecteurs orthogonaux.
  - *De la définition 2.2.1 au corollaire 2.2.7 :* Famille orthogonale, famille orthonormale ; théorème de Pythagore ; toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Échauffements

Mardi 20 mai

- Soient $a, b, a_1, \dots, a_n, x \in \mathbb{K}$. Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix} ; \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+b & ab \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

- *Cocher toutes les phrases correctes :*
  ☐ Le déterminant d'une matrice à coefficients entiers est un entier.
  ☐ Le déterminant d'une matrice à coefficients entiers et positifs est un entier positif.
  ☐ Une matrice à coefficients entiers admet un inverse à coefficients entiers si et seulement si son déterminant est 1 ou -1.
  ☐ Le pgcd des coefficients de la première ligne d'une matrice à coefficients entiers qui admet un inverse à coefficients entiers vaut 1.

Jeudi 22 mai

- Calculer les déterminants des endomorphismes φ et ψ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définis par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \varphi(M) = M^\top \text{ et } \psi(M) = 3M - 2M^\top.$$

- *Cocher toutes les phrases correctes :*
  ☐ $\det \left(a_i^{j-i}\right)_{i,j\in[\![1n]\!]} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i)$.
  ☐ $\det \left((-1)^{i+j} a_{ij}\right) = \det a_{ij}$.
  ☐ Pour $\sigma \in S_n$, $\det \left(\delta_{i,\sigma(j)}\right) = \varepsilon(\sigma)$.

Vendredi 23 mai

- *Cocher toutes les phrases correctes :*
  ☐ Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\det\left(A^\top . A\right) \geqslant 0$.
  ☐ Il existe $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\det(A^2) = -1$.
  ☐ Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la fonction $t \mapsto \det(tA + \mathrm{I})$ est polynomiale de degré n.
  ☐ Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe au plus n scalaires $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $A - \lambda\mathrm{I}$ soit non inversible.
- *Cocher toutes les phrases correctes :*
  La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+^*$ où $n \geqslant 42$. Alors d'après l'inégalité de Taylor,
  ☐ $\left| 1 + \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{(-1)^2}{t^3} - \dots - \dfrac{1}{n!}\dfrac{(-1)^n}{t^{n+1}} \right| \leqslant \dfrac{1}{n!} \sup_{t\in]0,1]} \left| \dfrac{(-1)^n}{n! t^{n+1}} \right|$
  ☐ Soit $(x, x_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\left| \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x_0} + (x - x_0)\dfrac{1}{(x_0)^2} \right| \leqslant \dfrac{|x - x_0|^2}{2} \sup_{t\in]x,x_0]} \left| \dfrac{1}{t^2} \right|$
  ☐ Soit $(x, x_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\left| \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x_0} + (x - x_0)\dfrac{1}{(x_0)^2} \right| \leqslant |x - x_0| \sup_{t\in]x,x_0]} \left| \dfrac{1}{t^2} \right|$
  ☐ Soit $(x, x_0) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\left| \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x_0} + (x - x_0)\dfrac{1}{(x_0)^2} \right| \leqslant |x - x_0| \sup_{t\in]x,x_0]} \left| \dfrac{2}{t^3} \right|$