Feuille d'exercice n° 24 : **Applications linéaires**

Exercice 1 ( ) Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x^2$
2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 4x - 3$
3) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x^2}$
4) $\varphi : \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto f(3/4)$
5) $\chi : \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto -\int_{1/2}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$
6) $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \sin(3x + 5y)$
7) $\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto xy$
8) $\rho : \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R}) \to \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R}),\ f \mapsto \left(x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t\right)$

Exercice 2 ( ) Calculer le noyau et l'image de f :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x + 2y \\ -x - 4y + 2z \\ 2x + 5y - z \end{pmatrix} \end{array}.$$

Exercice 3 Pour chaque propriété suivante, donner un exemple d'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ la vérifiant.

1) $\mathrm{Ker}(f)$ est inclus strictement dans $\mathrm{Im}(f)$.
2) $\mathrm{Im}(f)$ est inclus strictement dans $\mathrm{Ker}(f)$.
3) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.
4) $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires.

Exercice 4 ( ) Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^2$ et $\mathrm{Im}\, f^2 \subset \mathrm{Im}\, f$.
2) Montrer que $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0_E\} \iff \mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f$.
3) Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f \iff \mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Im}\, f$.

Exercice 5 ( )

1) Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Établir l'équivalence

$$g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \iff \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g.$$

2) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, vérifiant $f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
   a) Montrer que $(f - \mathrm{Id}_E) \circ (f + 2\mathrm{Id}_E) = (f + 2\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
   b) En déduire que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f + 2\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.
   c) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E)$.

Exercice 6 ( ) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. On suppose que

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda x.$$

Montrer que

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(x) = \lambda x.$$

Exercice 7 ( )

1) Montrer que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & (P(0), P') \end{array}$ est un isomorphisme.

2) En déduire que $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Exercice 8 ( ) Soient E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Soit f une application linéaire de E dans lui-même.

1) Montrer que, si $F \subset f(F)$ alors $f(F) = F$.

2) Montrer que, si f est injective et $f(F) \subset F$ alors $f(F) = F$.

Exercice 9 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes.

1) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ **2)** $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ **3)** $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$

Exercice 10 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Ker}(g)$. Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice 11 ( ) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$.

1) Montrer que $\operatorname{rg}(u + v) \leqslant \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$.

2) En déduire que $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leqslant \operatorname{rg}(u + v)$.

Exercice 12 **– Suite exacte d'applications linéaires –**

Soient $E_0, E_1, ..., E_n$ $n+1$ espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$, de dimensions respectives $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$. On suppose qu'il existe n applications linéaires $f_0, f_1, ..., f_{n-1}$ telles que :

$$\forall k \in \{0, ..., n-1\}, f_k \in \mathscr{L}(E_k, E_{k+1}).$$

et de plus :

— f_0 est injective ;
— $\forall j \in \{1, ..., n-1\}, \operatorname{Im} f_{j-1} = \operatorname{Ker}(f_j)$;
— f_{n-1} est surjective.

Montrer que

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \alpha_j = 0.$$

Exercice 13 Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $f : P \mapsto P + P' + P''$.

1) Montrer que f est injective. En déduire que f est bijective.

2) On appelle φ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $\varphi : P \mapsto P + P' + P''$. Montrer que φ est surjective puis bijective.

Exercice 14 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension égale à n. Montrer que

$$n \text{ est pair} \Leftrightarrow \exists f \in \mathscr{L}(E) \quad \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f.$$

Exercice 15 Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme u tel que $\operatorname{Ker}(u) = F$ et $\operatorname{Im}(u) = G$.

2) Construire un tel endomorphisme u avec $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \}$ dans $\mathbb{R}^3$ et $G = \{ \lambda(2, -1, -1) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$.

Exercice 16 ( ) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$, soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{rg}(f^n) = \mathrm{rg}(f^{n+1})$.

Exercice 17 ( ) Soient $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $H = \{ P \in \mathbb{K}_n[X] \mid P(\alpha) = 0 \}$. Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$ et en déterminer une base.

Exercice 18 ( ) Montrer que les formes linéaires sur $\mathbb{K}^3$ $\varphi : (x, y, z) \mapsto x + 2y + 3z$ et $\psi : (x, y, z) \mapsto x - 2y + 3z$ sont linéairement indépendantes.

Exercice 19 Quelle est la nature de l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -5x & + & 2y & & \\ -12x & + & 5y & & \\ -4x & + & 2y & - & z \end{pmatrix} \end{array}$?

Déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 20 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $p, q \in \mathscr{L}(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre les deux assertions suivantes :

1) $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$;

2) p et q sont deux projecteurs de même noyau.

Exercice 21 ( ) On pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$ et $G = \mathrm{Vect}(1, 1, 0)$.

1) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer une expression explicite de la projection de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G.

Exercice 22 Soit p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que $p - q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = q$.