Devoir surveillé n°6

Barème

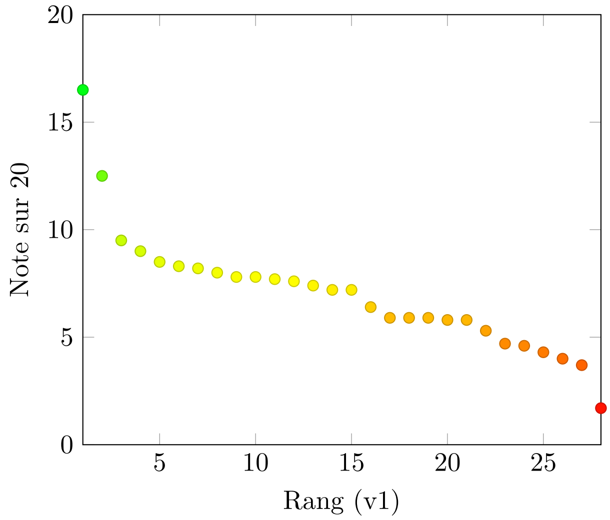
Calculs : 15 questions sur 2 points, total sur 30 , ramené sur 5 points
Problème : 28 ou 32 questions sur 4 points, total sur 112 (v1) ou 128 (v2), ramené sur 15 points

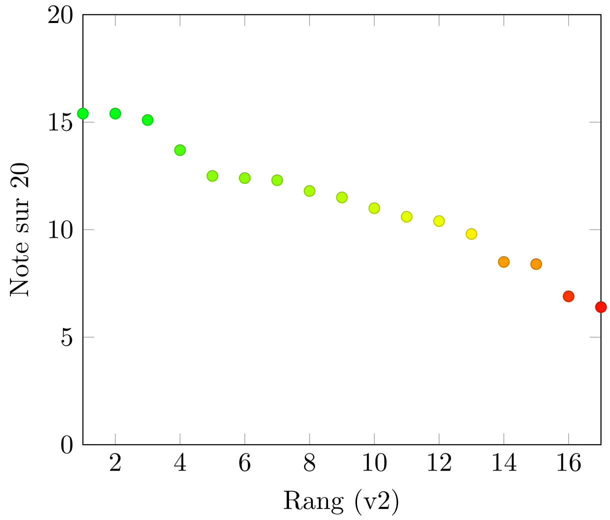
Soit $\varphi : x \mapsto \frac{1}{10}\lfloor 10x \rfloor$, c le nombre de points obtenus sur la fiche de calculs et p le nombre de points obtenus sur les exercices, la note sur 20 est le réel $n = \min\left\{\varphi\left(\frac{5c}{30} + \frac{15p}{\alpha}\right), 20\right\}$ avec $\alpha = 68$ (v1) ou 76 (v2)

Statistiques

	Calculs	Problème (v1)	Problème (v2)	*Précision (v1)*	*Précision (v2)*
Minimum	6	3	20	*15%*	*38%*
Q1	13	14	35	*33%*	*45%*
Médiane	16	22	43	*39%*	*50%*
Q3	18	25	48	*50%*	*59%*
Maximum	26	58	63	*76%*	*75%*
Moyenne	15.6	21.2	42.0	*41.1%*	*53.4%*

Répartition des notes





Remarques générales

— Il peut être parfois pertinent de répondre à une question même si vous n'êtes pas tout à fait sur que votre réponse est correcte. En revanche, il vaut mieux vous abstenir de répondre plutôt que d'écrire quelque chose dont vous êtes à peu près certain que c'est une ânerie, ou encore que d'écrire une tartine de phrases fumeuses sans aucune rigueur, dont le correcteur va se souvenir pendant tout la copie, ce qui va certainement vous faire perdre des points. Dans le doute, on ne donne pas de points à un élève qui a été capable d'écrire n'importe quoi quelques pages avant ; mais on en donnera peut-être à un élève qui a traité peu de questions, mais qui les a bien traitées.

Version 1

Exercice 1

— Si Q et R sont deux polynômes tels que $X^n + X + 1 = (X-1)^2Q + R$, alors rien ne permet d'affirmer que $\deg(R) < 2$ et que R est le reste de la division euclidienne de $X^n + X + 1$ par $(X-1)^2$. En prenant n'importe quel polynôme Q et en posant $R = X^n + X + 1 - (X-1)^2Q$, Q et R vérifient $X^n + X + 1 = (X-1)^2Q + R$.

Exercice 2

- Il est indispensable de maîtriser le raisonnement par récurrence !
- **Question 1a.** Attention, le degré d'une somme de deux polynômes n'est en général pas égal au maximum des degrés des deux polynômes. Il est donc indispensable de bien justifier l'égalité.
- **Question 1d.** On vous demande de *calculer* $P_n(1)$, $P_n(-1)$ et $P_n(0)$. Il faut donc déterminer leur valeur !
- **Question 1e-ii.** L'énoncé demande de déduire la valeur de $P_n(x)$ à partir de la relation de récurrence. Dans le cas où $|x| = 1$, vous n'aurez pas les points de la question si vous y répondez sans utiliser la relation de récurrence...
- **Question 2a.** Vous devez maîtriser le formulaire de trigonométrie.
- **Question 2c.** Attention : il existe des réels qui ne s'écrivent pas sous la forme $\cos\alpha$. Résoudre $P(\cos\alpha) = 0$ ne permet donc a priori pas de trouver toutes les racines de P, sauf si vous arrivez à justifier ensuite qu'il n'y en a pas d'autre.

Exercice 3

- **Questions 1 et 2.** Vu en classe...
- **Question 5e.** Pour la continuité d'Argth, une partie des copies utilise que th est strictement monotone, donc Argth aussi, et comme elle est bijective d'un intervalle sur un intervalle, elle est continue. C'est correct ... mais pourquoi faire si compliqué ? La réciproque d'une bijection continue sur un intervalle est continue, est-ce un théorème trop simple pour vous plaire ?
- **Question 5f.** Ne pas oublier la continuité en 0 !

Version 2

Exercice 1

- Que d'incompréhensions du sujet ! Il est rappelé en gras qu'une période est strictement positive, mais j'ai quand même trouvé des « f est $\cancel{0}$-périodique » ou « $\cancel{0}$ est la plus petite période de f ».
- Le mot « dense » n'est pas une incantation magique. Lorsque vous utilisez un argument de densité, vous ne pouvez pas vous contentez d'écrire « G est dense dans $\mathbb{R}$ donc [*réponse à la question*] ». Il faut utiliser les propriétés des parties denses de $\mathbb{R}$ pour en déduire soigneusement le résultat.
- La partie A ne porte pas sur les fonctions périodiques. Vous pouviez donc vous douter qu'on y démontrait des résultats qui allaient se révéler utiles dans la suite du problème...
- **Question A-2b.** Vous ne pouvez pas vous contenter d'écrire « Comme G est un groupe et que $a \in G$, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $ak \in G$ » : vous ne faites que paraphraser la question !
- **Question A-3b.** Comme g est positif strictement, la propriété d'Archimède peut éventuellement servir à justifier qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x < ng$, mais il n'y a aucune raison que ce n vérifie aussi $ng < y$.
  Cette propriété n'apparaît en réalité pas dans le programme officiel, et n'a été vu en cours que pour définir la notion qui nous intéressait vraiment : la partie entière (qui, elle, est au programme).
- **Question B-2.** Rarement bien traitée (notamment pour la stabilité par $+$). Ne vous précipitez pas, et faites les disjonctions de cas nécessaires.
- **Question B-3b.** De nombreuses copies commencent par affirmer que T est la plus petite période de f (sans preuve), puis que les autres périodes de f sont des multiples de T (sans preuve). Elles n'obtiennent bien évidemment pas tous les points de la question.
  Il fallait ici réinvestir les réponses de la partie A, idéalement en indiquant **explicitement** que $\mathcal{G} \cap \mathbb{R}_+^*$ n'était autre que $\mathcal{T}$.
- **Question C-3.** Une fonction constante, bien que périodique, n'admet pas de plus petite période. Ici, $f + g$ ne pouvait pas être constante.

Exercice 2

- **Question 1a.** Ne confondez pas $\overline{P}(x)$ et $\overline{P(x)}$. Le passage de $\overline{P}(x) = P(x)$ à $P = \overline{P}$ a rarement été traité suffisamment clairement. En effet, la propriété « $\forall x \in \mathbb{R}, (P(x) = \overline{P}(x) \Rightarrow P = \overline{P})$ » est fausse. On attendait donc ici un argument sur les racines de $P - \overline{P}$, ou au moins une remarque sur les fonctions rationnelles associées à P et $\overline{P}$ (même si ces dernières sont techniquement des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, alors qu'on démontre juste qu'elles coïncident sur $\mathbb{R}$).
- **Question 1b-ii.** Plusieurs copies affirment que les coefficients de P s'expriment à l'aide des $P^{(n)}(0)$, mais sans donner l'expression exactes du coefficient de degré n en fonction de $P^{(n)}(0)$. Une réponse aussi incomplète n'était bien évidemment pas acceptée.
  Le plus efficace était d'utiliser la formule de Taylor-Maclaurin, ou éventuellement la formule de Taylor en un réel autre que 0 (en prenant soin de l'énoncer juste...).

— **Question 3a.** Vu la simplicité de la question, on attendait une démonstration précise et complète, pas une courte phrase qui expédie le problème.
L'utilisation des congruences était la méthode la plus efficace.

— **Question 7a.** Vous avez trop souvent oublié le cas $\deg P = 0$. Le résultat doit être impeccablement justifié.