## Feuille d'exercice n° 19 : Espaces vectoriels

Exercice 1 ( ) Dire si les objets suivants sont des espaces vectoriels.

- 1) L'ensemble des fonctions  $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$  et vérifiant  $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ .
- 2) L'ensemble des fonctions réelles impaires, définies sur  $\mathbb{R}.$
- 3) L'ensemble des fonctions f définies sur [a,b], continues et vérifiant  $f(a) = 7f(b) + \int_a^b t^3 f(t) dt$ .
- 4) L'ensemble des fonctions f de classe  $\mathscr{C}^2$  vérifiant  $f'' + \omega^2 f = 0$ .
- **5)** L'ensemble des primitives de la fonction  $x \mapsto xe^x$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 6) L'ensemble des nombres complexes d'argument  $\pi/4 + k\pi$ , pour  $k \in \mathbb{Z}$ .
- 7) L'ensemble des points (x,y) de  $\mathbb{R}^2$ , vérifiant  $\sin(x+y)=0$ .
- 8) L'ensemble des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  orthogonaux au vecteur (-1,3,-2).

**Exercice 2** ( ) Soit E un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On pose  $F = E^2$ . Pour tout couple  $((x_1, y_1), (x_2, y_2))$  d'éléments de F, on pose  $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ , et tout  $(x, y) \in F$ , on note  $\lambda \cdot (x, y) = (ax - by, bx + ay)$ , où  $a = \text{Re } \lambda$  et  $b = \text{Im } \lambda$ .

Montrer que  $(F, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel (appelé le complexifié du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E).

## Exercice 3 (%)

- 1) Soit les vecteurs  $v_1 = (1 i, i)$ ,  $v_2 = (2, -1 + i)$  et  $v_3 = (1 + i, i)$ . Le vecteur  $v_1$  est-il combinaison linéaire de  $v_2$  et  $v_3$  dans  $\mathbb{C}^2$ , considéré comme  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel ? comme  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel ?
- 2) Dans  $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , la fonction  $x \mapsto \sin(3x)$  est-elle combinaison linéaire des deux fonctions  $x \mapsto \sin(x)$  et  $x \mapsto \sin(2x)$ ? Généraliser.

**Exercice 4** Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E. Montrer que  $F \cup G = F + G \Leftrightarrow F \subset G$  ou  $G \subset F$ .

Exercice 5 ( ) Soit

$$F = \left\{ f \in \mathscr{C}([-1,1], \mathbb{C}) \mid \int_{-1}^{1} f(t) \, \mathrm{d}t = 0 \right\}$$

et 
$$G = \{ f \in \mathscr{C}([-1,1], \mathbb{C}) \mid f \text{ constante} \}$$
.

Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathscr{C}([-1,1],\mathbb{C})$ .

**Exercice 6** ( ) Dans  $\mathbb{R}^4$ , on considère F d'équation x-2y+z+t=0, G d'équation 2x-y+3t=0 et

$$H = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

F et G sont-ils des sous-espaces vectoriels supplémentaires ? Même question pour F et H, puis pour G et H

Exercise 7 (%) Soit  $F = \{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) + f(1) = 0 \}.$ 

- 1) Montrer que F est un espace vectoriel.
- 2) Déterminer un supplémentaire de F dans  $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ .

**Exercice 8** Soient F, G, F', G' des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, tels que  $F \cap G = F' \cap G'$ .

Montrer que  $(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F$ .

**Exercice 9** Soit  $\mathscr{V}$  et  $\mathscr{W}$  deux sous-espaces affines **disjoints** d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E. On note V et W leurs directions respectives. Soit  $a \in \mathscr{V}$  et  $b \in \mathscr{W}$ . On pose U = V + W,  $\mathscr{V}' = a + U$  et  $\mathscr{W}' = b + U$ . Montrer que  $\mathscr{V}'$  et  $\mathscr{W}'$  sont deux sous-espaces affines disjoints, de même direction et contenant respectivement  $\mathscr{V}$  et  $\mathscr{W}$ .

