Feuille d'exercice n° 29 : **Espaces euclidiens**

Exercice 1 Sur $\mathbb{R}_3[X]$, on considère les formes bilinéaires suivantes. Dire lesquelles sont des produits scalaires.

1) $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$

2) $\chi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(P'(t)Q(t) + P(t)Q'(t)\right)\mathrm{d}t$

3) $\psi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t + P(0)Q(0)$.

Exercice 2 À deux polynômes $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on associe

$$\langle P, Q\rangle = (a_0 + a_1)b_0 + (a_0 + 3a_1)b_1 + 3a_2b_2.$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Exercice 3 Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $v_1, \ldots, v_n \in E$.

Montrer l'inégalité : $\displaystyle\left\|\sum_{i=1}^{n} v_i\right\|^2 \leqslant n\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2$.

Exercice 4 Soit $a < b$ deux réels.

1) Soient f et g deux applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Étudier le cas d'égalité.

2) Soit f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Étudier le cas d'égalité.

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que, sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $(A,B) \to \mathrm{tr}\,(A^\top B)$ est un produit scalaire.

2) Soit N la norme associée à ce produit scalaire (on l'appelle *norme de Frobenius*), montrer que :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

3) Montrer que :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), |\mathrm{tr}\,(A)| \leqslant \sqrt{n}N(A).$$

Exercice 6 Soit E un espace euclidien, et $(e_1, ..., e_n)$ des vecteurs unitaires vérifiant : $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$.

1) Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une famille orthogonale.

2) Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale.

Remarque : on ne suppose pas que la dimension de l'espace est n.

Exercice 7 (✎) $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Vérifier que les vecteurs $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (1, 0, 2)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt.

Exercice 8

1) Montrer qu'un parallélogramme est un rectangle si et seulement si ses diagonales sont de même longueur.

2) Montrer qu'un parallélogramme est un losange si et seulement si ses diagonales sont orthogonales.

Exercice 9 (✎) Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer les égalités suivantes.

1) $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$ **2)** $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ **3)** $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

Exercice 10 (🚲)

On munit $\mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire usuel : $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer $F^\perp$, avec $F = \{f \in \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. Que peut-on en conclure ?

Indication : si $f \in F^\perp$, on pourra s'intéresser à la fonction $t \mapsto tf(t)$.

Exercice 11 (🚲) On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire : $(P, Q) \to \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. Existe t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}[X], (P|A) = P(0)$?

Exercice 12 Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est orthogonal (c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}(p)$) si et seulement si : $\forall x \in E : \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Indication : pour montrer une des implications, avec $k \in \mathrm{Ker}\, p$ et $i \in \mathrm{Im}\, p$, on pourra considérer le vecteur $i + \lambda k$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 13 Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2. Soit x et $y \in E$. Montrer les propriétés suivantes.

1) Si $\|x\| = \|y\|$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y = s(x)$ où s est la symétrie orthogonale par rapport à H.

2) Si $\langle x, y\rangle = \|y\|^2$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y = p(x)$ où p est la projection orthogonale sur H.

3) Les hyperplans trouvés précédemment sont-ils uniques ?

Exercice 14 Déterminer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (\mathrm{e}^{\,x} - (ax+b))^2 dx$.

Exercice 15 ( ) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. À tout couple (P, Q) de E, on associe $\langle P, Q\rangle = \int_0^\pi P(\cos t)Q(\cos t)dt$.
On appelle k^{e} polynôme de Tchebychev le polynôme défini par :

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\ P_k(\cos\theta) = \cos(k\theta).$$

1) Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E.

2) Montrer que les polynômes de Tchebychev $P_0, \dots, P_n$ constituent une base orthogonale de E.

Bonus : si cela n'est pas clair, montrez l'existence et l'unicité de ces polynômes, déterminer le degré et le coefficient dominant de chacun.

Exercice 16 Soit E un espace euclidien, f et g deux endomorphismes de E qui commutent. On suppose que les matrices de f et de g dans une base orthonormée sont respectivement symétriques et antisymétriques.

Montrer que $\forall u \in E,\ \langle f(u), g(u)\rangle = 0$, puis que $\forall u \in E,\ \|(f-g)(u)\| = \|(f+g)(u)\|$.

Exercice 17 ( ) Soit $E = \mathbb{R}^3$, muni de sa structure euclidienne usuelle, soit $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les matrices dans la base $\mathscr{C}$ des transformations suivantes.

1) La symétrie et la projection orthogonale par rapport au plan d'équation $x - 2y + 3z = 0$.

2) La symétrie et la projection orthogonale par rapport à la droite engendrée par le vecteur $e_1 - 4e_3$.