

# Devoir surveillé n°9

## Barème

**Calculs** : 20 questions sur 2 points, total sur 40 , ramené sur 5 points

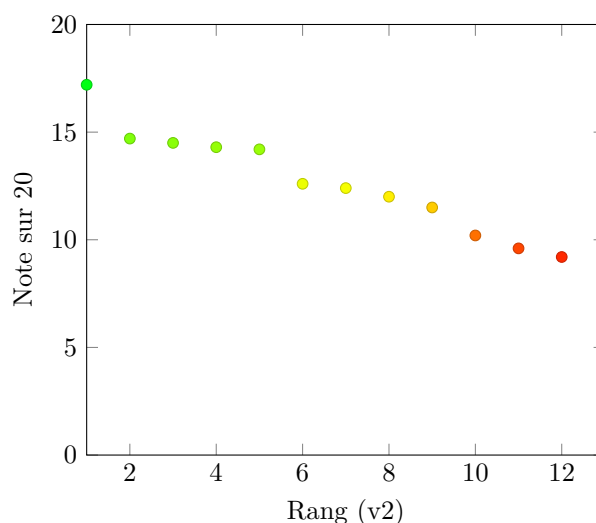
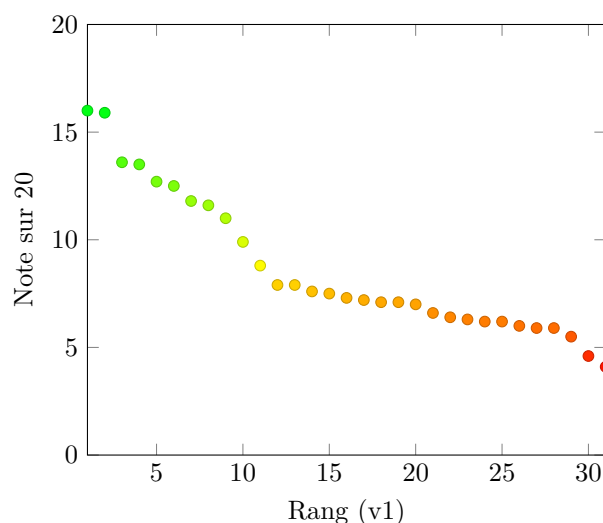
**Problème** : 30 ou 26 questions sur 4 points, total sur 120 (v1) ou 104 (v2), ramené sur 15 points

Soit  $\varphi : x \mapsto \frac{1}{10} \lfloor 10x \rfloor$ ,  $c$  le nombre de points obtenus sur la fiche de calculs et  $p$  le nombre de points obtenus sur les exercices, la note sur 20 est le réel  $n = \min \left\{ \varphi \left( \frac{5c}{24} + \frac{15p}{\alpha} \right), 20 \right\}$  avec  $\alpha = 95$  (v1) ou 90 (v2)

## Statistiques

	Calculs	Problème (v1)	Problème (v2)	Précision (v1)	Précision (v2)
Minimum	4	14	37	32%	58%
Q1	9	28	46	54%	67%
Médiane	11	36	52	65%	70%
Q3	14	57	63	80%	83%
Maximum	21	76	77	85%	91%
Moyenne	11.7	41.6	54.5	64.1%	72.9%

## Répartition des notes



## Remarques générales

- Il faut minutieusement justifier chacune de vos réponses afin de convaincre le correcteur, d'autant plus si le résultat de la question se trouve dans l'énoncé.
- Toute question demande une réponse argumentée, même les plus simples. Pas d'argument, pas de points.
- Une réponse ne peut se limiter à un calcul brut (sauf si c'est ce qui est explicitement demandé).
- Lorsque vous utilisez un théorème, vous devez en citer le nom. Ce n'est pas parce que vous êtes dans un problème de probabilités que les règles changent.
- Lorsque vous effectuez une transformation dans un calcul (décalage ou renversement d'indice dans une somme, utilisation d'une formule précédemment démontrée), vous devez l'explicitier.
- Non seulement vous devez définir les variables utilisées, mais vous devez le faire au bon moment et en les quantifiant correctement. Voici un extrait du rapport du concours Centrale-Supélec (à propos des oraux de mathématiques) à méditer :

- Présenter les objets et quantifier une assertion est indispensable. Ainsi, quand on demande l'énoncé du théorème de Bézout, on obtient le plus souvent : «  $a, b \in \mathbf{Z}$  avec  $a \wedge b = 1$ . Alors  $au + bv = 1$ , avec  $u, v \in \mathbf{Z}$  ». On voit ici que la préposition avec sert de joker pouvant jouer le rôle de  $\forall$  ou de  $\exists$  selon le contexte ; elle est donc à proscrire. Par exemple «  $\sin x < x$  avec  $x > 0$  » : le « avec » joue pour « pour tout  $x > 0$  » ; ou encore «  $f$  est surjective donc  $y = f(x)$  avec  $x$  dans  $E$  » le « avec » joue pour « il existe  $x$  dans  $E$  ».
- Bien que d'une importance moindre, l'écriture «  $\exists x \in E$  tel que (ou t.q.)  $P(x)$  » n'est pas correcte : les quantificateurs ne sont pas des abréviations (page 6/36 du programme de MPSI). De même, l'écriture «  $\forall x \in E$  on a  $P(x)$  » n'est pas conforme. Il en va de même de «  $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$  ».

## Version 1

### Exercice 1

- **Question 1.** La somme de  $n$  variables suivant une loi de Bernoulli ne suit pas toujours une loi binomiale : attention à ne pas oublier l'hypothèse d'indépendance.
- **Question 2.** Toute réponse doit être justifiée. Ici, on introduit des événements (ou des variables aléatoires) pertinents, on exprime la probabilité recherchée en fonction de ces événements, puis on conclut.
- **Question 3.** « Vérifier que... » : vous devez calculer la somme, et vérifier qu'elle vaut 1.
- **Question 5.** « En déduire... » : si vous n'utilisez pas la question précédente, il y a un problème.
- **Question 9.**  $Z_2$  est une somme de deux variables suivant une même loi de Bernoulli, mais ces variables ne sont pas indépendantes.

### Exercice 2

- **Question 1.** Ne pas oublier de conclure sur l'inversibilité de  $A$ .
- **Question 4.** Lorsqu'on vous demande l'expression de  $A^n$ , vous devez expliciter les coefficients de la matrice.
- **Question 5b.** L'énoncé indique que la première coordonnée des vecteurs doit valoir 1. Vous avez perdu des points lorsque cela n'était pas le cas.  
N'oubliez pas de répondre à la question : écrire «  $E_2 = \text{Vect}((1, 1, 1))$  » ne répond pas à la question, écrire «  $\mathcal{B}_2 = \text{Vect}((1, 1, 1))$  » non plus (qu'est-ce alors que  $\mathcal{B}_2$  ?).  
Par ailleurs, pour affirmer qu'une famille génératrice d'un sous-espace en est une base, il faut soit vérifier que le nombre de vecteurs est égal à la dimension du sous-espace (ce qui n'est possible que si on la connaît), soit que la famille est libre. Dans les deux cas, cette vérification doit apparaître sur votre copie, en tout cas si vous voulez tous les points de la question...
- **Question 6a.** Les vecteurs de  $\mathcal{B}_i$  appartiennent au noyau de  $f - \lambda_i \text{Id}$  ; il n'y avait donc besoin d'aucun calcul dans cette question.
- **Question 6d.** Aucun calcul matriciel n'est nécessaire dans cette question : l'initialisation se justifie grâce à la formule de changement de base pour un endomorphisme (ce qui fonctionne même en cas d'erreur sur les questions précédentes).

## Version 2

### Exercice 1

- La quasi totalité des réponses est donnée dans l'énoncé. Il est donc indispensable de justifier très soigneusement vos réponses.
- Les tirages n'étaient clairement pas indépendants.
- **Question 2.** C'est la formule des probabilités composées, il faut le dire et préciser le produit. Il faut aussi expliquer à quoi sont égaux tous les termes de ce produit, en expliquant, et pas seulement en faisant apparaître des fractions sans aucune justification. À la fin, il fallait simplifier l'expression, en utilisant des factorielles.
- **Question 5.** La deuxième formule de la question 3 n'était pas valide pour  $k = b + 1$ .
- **Question 9b.** L'énoncé demande d'exprimer  $q_{n+1}$  en fonction de  $E(X_n)$ . Si vous exprimez  $q_n$  en fonction de  $E(X_n)$  ou  $q_{n+1}$  en fonction de  $E(X_{n+1})$ , vous êtes hors sujet.

### Exercice 2

- **Question 2a.** Deux copies confondent somme de deux sous-espaces et réunion. Ici,  $E = F \oplus G$ , mais il y a a priori des éléments de  $E$  qui n'appartiennent ni à  $F$ , ni à  $G$ .
- **Question 2b.** Vous êtes nombreux à avoir voulu démontrer que  $(u - a)^2$  était l'endomorphisme nul. Cette méthode a été (presque) correctement menée dans deux copies uniquement, les autres ayant écrit à peu près n'importe quoi pour justifier des simplifications frauduleuses.  
Il était beaucoup plus simple d'utiliser directement le fait que si  $q = \text{operatorname{Id}} - p$ , alors  $q$  est le

projecteur sur  $G$  parallèlement à  $F$ , d'appliquer la question précédente pour  $u \circ q$  puis d'écrire que  $u = u \circ (p+q)$  et d'utiliser la linéarité de  $u$ .

- **Question 3d.** Écrire « On a montré que  ~~$\text{Im } a \oplus \text{Im } b$~~  » n'a aucun sens ! Cela revient à écrire « On a montré que ~~2 < 1~~ ».

Vous écrirez donc à l'avenir : « On a montré que  $\text{Im } a$  et  $\text{Im } b$  sont en somme directe », voire « On a montré que  $\text{Im } a \cap \text{Im } b = \{0\}$  », ce qui convient tout à fait pour continuer.

La surjectivité de  $u$  était essentielle ici. Si vous écrivez que pour tout  $x \in E$ ,  $u(x) = a(x) + b(x) \in \text{Im } a + \text{Im } b$ , vous pouvez ensuite écrire que  $\text{Im } u \subset \text{Im } a + \text{Im } b$ , mais sûrement pas directement que  $E = \text{Im } a + \text{Im } b$ .

Répartition des points

Version 1

	Question	Non traité	Non encadré	0	1	2	3	4
ex1	1	5	0	4	0	2	13	7
	2	7	0	4	1	11	3	5
	3	13	0	8	1	0	0	9
	4	14	0	6	1	0	3	7
	5	18	0	1	0	0	3	9
	6	11	0	3	2	1	1	13
	7	12	0	0	0	2	0	17
	8	19	0	4	1	1	2	4
	9	22	0	4	0	1	2	2
	10	22	0	4	0	1	0	4
	11a	28	0	1	0	0	0	2
	11b	29	0	1	0	0	0	1
	11c	29	0	1	1	0	0	0
ex2	1	1	0	2	1	1	10	16
	2	0	0	0	0	0	1	30
	3	2	0	0	2	1	7	19
	4	5	0	14	1	2	7	2
	5a	2	0	7	8	6	4	4
	5b	5	0	3	0	8	12	3
	5c	9	1	3	1	6	2	9
	5d	13	0	2	1	4	7	4
	6a	14	0	7	1	1	1	7
	6b	12	0	4	0	0	0	15
	6c	12	0	1	5	1	3	9
	6d	14	0	2	0	0	6	9
	6e	22	0	3	1	0	1	4
	7a	13	0	5	1	1	0	11
	7b	24	0	6	0	0	0	1
	7c	29	0	0	1	0	1	0
	8	30	0	0	0	1	0	0

Version 2

	Question	Non traité	Non encadré	0	1	2	3	4
ex1	1	0	0	0	0	1	11	1
	2	1	0	0	2	4	3	3
	3	2	0	0	1	5	0	5
	4	0	0	0	0	0	1	12
	5	1	0	0	4	1	3	4
	6	1	0	2	4	3	2	1
	7	7	0	1	1	2	1	1
	8a	6	0	2	0	4	0	1
	8b	5	0	0	0	1	1	6
ex2	9a	10	0	0	1	1	0	1
	9b	11	0	1	0	0	1	0
	1	3	0	1	0	0	1	8
	4	1	0	3	0	0	1	8
	2a	0	0	0	0	3	0	10
	2b	1	0	1	3	1	1	6
	3a	0	0	0	0	0	0	13
	3b	0	0	0	0	0	0	13
	3c	1	0	2	0	1	1	8
	3d	1	0	2	1	3	1	5
	5a	2	0	3	0	1	3	4
	5b	2	0	1	0	0	0	10
	5c	4	0	2	4	0	1	2
	5d	7	0	0	0	0	4	2
	6a	7	0	0	0	1	5	0
	6b	11	0	1	0	0	0	1
	6c	13	0	0	0	0	0	0