

Devoir à la maison n° 22

À rendre le 3 juin

Quelques propriétés de la comatrice.

On étudie dans ce problème quelques propriétés de la comatrice d'une matrice carrée. Les deux parties sont indépendantes.

Dans tout ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à deux et \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Partie 1 : Comatrice de la comatrice.

Dans cette partie A est une matrice carrée d'ordre n .

- 1) Dans cette question uniquement, on suppose que A est inversible.
 - a) Quel est le rang de $\text{com}(A)$?
 - b) Calculer $\text{com}(\text{com}(A))$.
- 2) On suppose que $\text{rg}(A) \leq n - 2$, calculer $\text{com}(\text{com}(A))$.
- 3) On suppose maintenant que $\text{rg}(A) = n - 1$. Montrer que $\text{rg}(\text{com}(A)) = 1$.
- 4) Montrer, dans le cas général, que $\text{com}(\text{com}(A)) = (\det(A))^{n-2}A$.

Remarque : on n'oubliera pas de traiter les cas particuliers pouvant survenir.

Partie 2 : Comatrice d'un produit.

Dans cette partie A et B sont deux matrices carrées d'ordre n .

- 5) Dans le cas où A et B sont inversibles, montrer que $\text{com}(AB) = \text{com}(A)\text{com}(B)$.
- 6) Dans cette question, on ne suppose plus que A et B sont inversibles.
 - a) Pour une matrice M carrée d'ordre n , que peut-on dire de la fonction $x \mapsto \det(M - xI_n)$?
 - b) En déduire que l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $A - \lambda I_n$ ou $B - \lambda I_n$ n'est pas inversible est fini.
 - c) En déduire que $\text{com}(AB) = \text{com}(A)\text{com}(B)$.
- 7) Montrer que si A et B commutent, alors $\text{com}(A)$ et $\text{com}(B)$ commutent aussi.
- 8) Montrer que, si A et B sont semblables, alors $\text{com}(A)$ et $\text{com}(B)$ le sont aussi.

— FIN —