

Feuille d'exercice n° 04 : **Quelques fondamentaux**

Exercice 1 Soit P, Q deux propositions. La proposition $(P \wedge Q \implies (\neg P) \vee Q)$ est-elle nécessairement vraie ?

Exercice 2 Soit la propriété suivante : $P(z) : \ll |z - 1| \leq 3 \implies |z - 5| \geq 1 \gg$.

- 1) Quel est l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z)$ soit vraie ? A-t-on : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z)$ vraie ?
- 2) Mêmes questions en remplaçant $|z - 5| \geq 1$ par $|z - 5| > 1$, puis par $|z - 5| \geq 2$.

Exercice 3 (✎) Écrire la négation des assertions suivantes où P, Q, R, S sont des propositions.

- | | |
|------------------------|---|
| 1) $P \implies Q$ | 4) P ou $(Q$ et $R)$ |
| 2) P et non Q | |
| 3) P et $(Q$ et $R)$ | 5) $(P$ et $Q) \implies (R \implies S)$ |

Exercice 4 Dans chacun des cas suivants, comprendre le sens des deux phrases proposées et déterminer leur valeur de vérité :

- | | | |
|--|----|--|
| 1) $\forall n \in \mathbb{N} \exists N \in \mathbb{N} n \leq N$ | et | $\exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} n \leq N$. |
| 2) $\forall y \in \mathbb{R}_+^* \exists x \in \mathbb{R} y = e^x$ | et | $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}_+^*, y = e^x$. |
| 3) Soit f une fonction réelle définie sur \mathbb{R} . | | |
| $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} y = f(x)$ | et | $\exists y \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} y = f(x)$. |


Exercice 5 (✎) Soit f une fonction réelle définie sur \mathbb{R} . Quelle est la négation des propositions suivantes ?

- | | |
|---|--|
| 1) $\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$ | 4) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y \leq f(x) \leq 2x + y$ |
| 2) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 1$ ou $f(x) \leq -1$ | |
| 3) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \implies x \geq 0$ | 5) $\forall x \in \mathbb{R}, (\exists y \in \mathbb{R}, f(x) \geq y) \implies x \leq 0$ |

Exercice 6 Soient les quatre assertions suivantes :

- | | |
|---|---|
| (a) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$; | (c) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$; |
| (b) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$; | (d) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x$. |

- 1) Les assertions (a), (b), (c) et (d) sont-elles vraies ou fausses ?
- 2) Donner la négation de chacune.

Exercice 7 () Soit f une fonction réelle définie sur \mathbb{R} . Écrire au moyen de quantificateurs les propositions suivantes :

- | | |
|------------------------|---|
| 1) f est croissante. | 3) f s'annule au plus une fois. |
| 2) f est périodique. | 4) f prend au moins une fois la valeur 1. |

Exercice 8 Résoudre sur \mathbb{R} l'équation $2|x - 1| = x^2 - 2$.

Exercice 9 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(y - f(x)) = 2 - x - y.$$

Exercice 10 En quoi le raisonnement suivant est-il faux ?

Soit $\mathcal{P}(n)$: « n crayons de couleurs sont tous de la même couleur ».

- $\mathcal{P}(1)$ est vraie car un crayon de couleur est de la même couleur que lui-même.
- Supposons $\mathcal{P}(n)$. Soit $n + 1$ crayons. On en retire 1. Les n crayons restants sont de la même couleur par hypothèse de récurrence.

Reposons ce crayon et retirons-en un autre ; les n nouveaux crayons sont à nouveau de la même couleur. Le premier crayon retiré était donc bien de la même couleur que les n autres. La proposition est donc vraie au rang $n + 1$.

- On a donc démontré que tous les crayons en nombre infini dénombrable sont de la même couleur.

Exercice 11 Dans un match de rugby, une équipe peut marquer 3 points (pénalité ou drop), 5 points (essai non transformé) ou 7 points (essai transformé). Quel est l'ensemble des scores possibles ?

Exercice 12 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant : $u_0 \leq 1, \forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^n u_k$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} u_n \leq 2^n$.

