Gutsche
Patrick

DM 16

Partie I : applications bilinéaires

1) Soit $a,b,x,y \in \mathbb{R}$. Notons $\varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longrightarrow xy \end{array}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(\alpha a + b, y) = (\alpha a + b)y = \alpha a y + by = \alpha \varphi(a,y) + \varphi(b,y)$$

et $\varphi(a, \alpha x + y) = a(\alpha x + y) = \alpha a x + ay = \alpha\varphi(a,x) + \varphi(a,y)$

Donc φ est bien une application bilinéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre. Si on note $\varphi : \begin{array}{l} A^2 \longrightarrow A \\ (x,y) \longrightarrow xy \end{array}$, le calcul précédent est valable donc $\begin{array}{l} A^2 \longrightarrow A \\ (x,y) \longrightarrow xy \end{array}$ est bien une application bilinéaire

2) Soit $f,g \in E$, $u,v \in F$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$

$$b(\alpha f + g, u) = \int_0^1 (\alpha f + g)(t)\,(u(t) + 2u'(t))\,dt$$

$$= \alpha \int_0^1 f(t)(u(t) + 2u'(t))\,dt + \int_0^1 g(t)(u(t) + 2u'(t))\,dt$$

$$= \alpha\, b(f,u) + b(g,u)$$

$$b(f, \alpha u + v) = \int_0^1 f(t)\left((\alpha u + v)(t) + 2(\alpha u + v)'(t)\right)dt$$

$$= \int_0^1 f(t)\left(\alpha u(t) + v(t) + 2\alpha u'(t) + 2v'(t)\right)dt$$

$$= \alpha \int_0^1 f(t)(u(t) + 2u'(t))\,dt + \int_0^1 f(t)(v(t) + 2v'(t))\,dt$$

$$= \alpha\, b(f,u) + b(f,v)$$

donc b est bilinéaire

3) $\mathcal{F}(E\times F, G)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrons que $\mathcal{B}(E,F;G)$ est un sous-espace vectoriel.

- On a bien $0_{\mathcal{F}} \in B(E,F;G)$
- Soit $u,v \in B(E,F;G)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Soit $a,b \in E$, $x,y \in F$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$(\lambda u+v)(\alpha a+b,x) = \lambda u(\alpha a+b,x) + v(\alpha a+b,x)$$
$$= \lambda(\alpha u(a,x)+u(b,x)) + \alpha v(a,x)+v(b,x)$$
$$= \alpha(\lambda u+v)(a,x) + (\lambda u+v)(b,x)$$
$$(\lambda u+v)(a,\alpha x+y) = \lambda(\alpha u(a,x)+u(a,y)) + \alpha v(a,x)+v(a,y)$$
$$= \alpha(\lambda u+v)(a,x) + (\lambda u+v)(a,y)$$

Donc $\lambda u+v \in B(E,F;G)$

Donc $B(E,F;G)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E\times F,G)$ donc c'est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel

Partie II. Unicité du produit tensoriel

5) Soit G un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $\ell \in \mathcal{L}(P,G)$. $u : E\times F \to P$

donc $\ell \circ u : E\times F \to G$

Montrons que $\ell\circ u \in B(E,F;G)$

Soit $x,y \in E$, $z,t \in F$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\ell\circ u(\alpha x+y,z) \underset{\nearrow}{=} \ell(\alpha u(x,z)+u(y,z)) \underset{\nearrow}{=} \alpha\ell(u(x,z)) + \ell(u(y,z))$$

car u bilinéaire et v est linéaire

$$\ell\circ u(x,\alpha z+t) = \ell(\alpha u(x,z)+u(x,t)) = \alpha\ell(u(x,z)) + \ell(u(x,t))$$

Donc $\ell\circ u \in B(E,F;G)$.

Notons $\varphi : \begin{array}{l}\mathcal{L}(P,G) \to B(E,F;G)\\ \ell \mapsto \ell\circ u\end{array}$. Montrons que φ est une application linéaire

Soit $f,g \in \mathcal{L}(P,G)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $x,y \in E\times F$

$$\varphi(\alpha f+g)((x,y)) = (\alpha f+g)(u(x,y)) = \alpha f(u(x,y)) + g(u(x,y))$$
$$= \alpha\varphi(f)(x,y) + \varphi(g)(x,y)$$
$$= (\alpha\varphi(f)+\varphi(g))(x,y)$$

donc φ est linéaire.

Partie III : quotient d'espaces vectoriels

7) Soit $x,y,z \in E$.

Reflexivité : $x-x=0 \in F$ car F est un sev de E.

Symétrie : Supposons xRy. alors $y-x\in F$ donc $-(x-y)\in F$ car F est un sev donc yRx

Transitivité : Supposons xRy et yRz. $x-y\in F$ et $y-z\in F$ or F sev donc $x-y+y-z=x-z\in F$. donc xRz.

Donc R est une relation d'equivalence.

8) Montrons que l'addition de E/F est bien définie, donc $\overline{x+y}$ ne dépend que de $\bar{x}$ et $\bar{y}$, donc si $\overline{x'}=\bar{x}$ et $\overline{y'}=\bar{y}$ alors $\overline{x+y}=\overline{x'+y'}$. Si $\bar{x}=\bar{x'}$ et $\bar{y}=\bar{y'}$, alors $x-x'\in F$ et $y-y'\in F$ donc $(x+y)-(x'+y')=(x-x')+(y-y')\in F$ donc $\overline{x+y}=\overline{x'+y'}$

Il faut aussi que $\overline{\lambda x}$ dépend seulement de $\bar{x}$. supposons $\bar{x}=\overline{x'}$ on a donc $x-x'\in F$, or F est un sev donc $\alpha(x-x')\in F$ donc $\overline{\alpha x}=\overline{\alpha x'}$

* Montrons que E/F est un $\mathbb{K}$-ev :

→ Soit $x,y,z\in E$. $\bar{x}+(\bar{y}+\bar{z})=\overline{x+(y+z)}=(\overline{x+y})+\bar{z}$ donc associativité.

→ $\bar{x}+\bar{y}=\overline{x+y}=\overline{y+x}=\bar{y}+\bar{x}$ donc commutativité.

→ $\forall x\in E$, $\bar{0}+\bar{x}=\overline{0+x}=\bar{x}=\bar{x}+\bar{0}=\bar{x}$ donc $\bar{0}$ est l'élément neutre.

→ $\forall x\in E$, $\bar{x}+\overline{-x}=\bar{0}$ donc $-\bar{x}=\overline{-x}$

Donc $(E/F,+)$ est un groupe commutatif. Soit $x,y\in E$, $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$.

→ $\alpha(\bar{x}+\bar{y})=\alpha(\overline{x+y})=\overline{\alpha x+\alpha y}=\alpha\bar{x}+\alpha\bar{y}$

→ $(\alpha+\beta)\bar{x}=\overline{(\alpha+\beta)x}=\alpha\bar{x}+\beta\bar{x}$

→ $(\alpha\beta)\bar{x}=\overline{(\alpha\beta)x}=\overline{\alpha(\beta x)}=\alpha(\beta\bar{x})$

→ $1_{\mathbb{K}}\bar{x}=\overline{1_{\mathbb{K}}x}=\bar{x}$

Donc $(E/F,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev.

9) Soit $\varphi:\begin{array}{l}G\to E/F\\ x\mapsto\bar{x}\end{array}$. φ linéaire d'après 8) donc pour tout $x,y\in G$, $\alpha\in\mathbb{K}$, $\varphi(\alpha x+y)=\alpha\varphi(x)+\varphi(y)$ donc φ est linéaire.

Soit $x\in\operatorname{Ker}\varphi$. On a alors $\bar{x}=0=\bar{0}$ donc $x\in F$. Donc $x\in F\cap G=\{0\}$ donc $\operatorname{Ker}\varphi=\{0\}$ donc f injective.

Soit $z\in E/F$. Il existe $x\in E$ tq $z=\bar{x}$. Or $E=F+G$, donc il existe $y\in F$ et $\varepsilon\in G$ tq $x=y+\varepsilon$. Donc $z=\bar{y}+\bar{\varepsilon}=\bar{\varepsilon}$ car $y\in F$ donc $\bar{y}=\bar{0}=0$. Donc $z=\varphi(\varepsilon)$ donc φ surjective.

Donc φ est un isomorphisme de G sur E/F.

Partie IV - Existence du produit tensoriel

11) $\to \{0\}^I \in \mathbb{K}^{(I)}$ donc $\mathbb{K}^{(I)} \neq \emptyset$

$\to$ Soit $(a_i),(b_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $i \in I$.

(Si) $a_i = 0 \wedge b_i = 0$ alors $\lambda a_i + b_i = 0$. Par contraposée,
$\forall i \in I$, $\lambda a_i + b_i \neq 0 \Rightarrow (a_i \neq 0$ ou $b_i \neq 0)$ donc
$\{i \in I / \lambda a_i + b_i \neq 0\} \subset \{I \in I / a_i \neq 0\} \cup \{i \in I / b_i \neq 0\}$
donc $\{i \in I / \lambda a_i + b_i\} \neq 0$ est fini donc $\lambda(a_i) + (b_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$

Donc $\mathbb{K}^{(I)}$ est un sev de $\mathbb{K}^I$ donc c'est un $\mathbb{K}$-ev.

12) $\to$ Soit $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ $\sum\limits_{i\in I} a_i c_i = \sum\limits_{\substack{i\in I \\ a_i \neq 0}} a_i (\delta_{i,j})_{j\in I}$

somme finie donc $-\left(\sum\limits_{\substack{i\in I \\ a_i \neq 0}} a_i \delta_{i,j}\right)_{j\in I} = (a_j)_{j\in I} = (a_i)_{i\in I}$

$\to$ Soit $(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$. D'après la "$\to$" précédente, on a bien l'existence et unicité de $(a_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$ tq $(x_i)_{i\in I} = \sum\limits_{i\in I} a_i c_i$.

Partie V - Newton $\Leftrightarrow$ Leibniz

15) pour $n = 0$, $t \in \mathbb{R}$, $\frac{d^n}{dt^n}(e^{at}) = a^0 e^{at}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, Supposons $R(n-1)$: $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(e^{at}) = a^{n-1} e^{at}$

$$\frac{d^n}{dt^n}(e^{at}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(e^{at})\right) = \frac{d}{dt}(a^{n-1} e^{at})$$
$$= a^{n-1} a e^{at} = a^n e^{at}$$

Donc par le principe de récurrence, $R(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\to$ D'après Leibniz : Soit $t \in \mathbb{R}$ $(fg)^{(n)}(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t)$

a $fg(t) = e^{(a+b)t}$, donc

$$(a+b)^n e^{(a+b)t} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k e^{at} b^{n-k} e^{bt}.$$ On divisant par $e^{(a+b)t}$ $(\neq 0)$, on a la formule du binôme de Newton.