Feuille d'exercices 13 :
Équations différentielles linéaires.

Exercice 13.1 : (niveau 1)
Résoudre l'équation différentielle $(E)\ :\ y' + 2y = 4e^{2t}$, avec la condition de Cauchy $y(0) = 0$.

Exercice 13.2 : (niveau 1)
Résoudre $(1 + x^2)y'(x) - 2xy(x) = xe^{\frac{1}{1+x^2}}$.

Exercice 13.3 : (niveau 1)
Résoudre l'équation différentielle $(E)\ :\ y'' - 10y' + 41y = 170 \sin t$.

Exercice 13.4 : (niveau 1)
Soit $f\ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \ f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 2e^x.$$

1°) Montrez que si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) \geq 0$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \geq 0$.

2°) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 13.5 : (niveau 1)
On considère l'équation différentielle suivante

$$(E)\ :\ x(x^2 - 1)y' + 2y = x^2,$$

où y est une fonction de x.

1°) Résoudre cette équation différentielle lorsque y est définie sur un intervalle I ne contenant aucun des réels -1, 0 et 1.

2°) Montrer que y est une solution de (E) si et seulement si $x \longmapsto y(-x)$ est une solution de (E).

3°) Déterminer les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

4°) Déterminer les solutions de (E) sur $]-1, 1[$.

Exercice 13.6 : (niveau 2)
Déterminez les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continues et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \;\; f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt = 1.$$

Exercice 13.7 : (niveau 2)
Résoudre l'équation $(E) \;: y' = \dfrac{y}{2t} + \dfrac{1}{2yt}$.
Indication : On pourra poser $z = y^2$.

Exercice 13.8 : (niveau 2)
Soit $q \in \mathbb{R}_+^*$. Résoudre l'équation différentielle
$(E) \;: (t^2+1)y'' + ty' - q^2y = 0$ à l'aide du changement de variable $t = \mathrm{sh}(x)$.

Exercice 13.9 : (niveau 2)
Soient b et c deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On considère l'équation différentielle $(E) \;:\; y' + b(x)y = c(x)$.

1°) Résoudre (E) à l'aide d'intégrales.

2°) Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose que b et c sont T-périodiques.
a) Montrer qu'une solution y de (E) est T-périodique si et seulement si $y(0) = y(T)$.
b) Montrer que (E) possède une unique solution T-périodique si et seulement si $\displaystyle\int_0^T b(t)dt \neq 0$.

Exercice 13.10 : (niveau 2)
Résoudre (E) : $f"(x) + f(-x) = x + cosx$.

Exercice 13.11 : (niveau 2)
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Déterminer les applications f de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(\lambda - x)$.

Exercice 13.12 : (niveau 2)
Résoudre l'équation différentielle $(E) \;: x^2y" + xy' - 4y + 4x^2 = 0$.
On pourra utiliser le changement de variable suivant :

$$t = \ln|x|.$$

On précisera quelles sont les solutions définies sur $\mathbb{R}$ en entier.

Exercice 13.13 : (niveau 2)
Résoudre l'équation (E) : $y" + 6y' + 9y = \dfrac{e^{-3x}}{\sqrt{x^2+1}}$.

Exercice 13.14 : (niveau 3)
Déterminer les applications $f \;:\; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continues, telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \displaystyle\int_0^x tf(x-t)dt$.

Exercice 13.15 : (niveau 3)
On souhaite résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$y" + |y| = 0 \text{ avec } y(0) = a \text{ et } y'(0) = 0.$$

On admettra qu'il possède une unique solution définie sur $\mathbb{R}$ que l'on notera y.

1°) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) \leq a$.

2°) Déterminer y lorsque $a \leq 0$.
Pour la suite, on suppose que $a > 0$.

3°) Montrer que y s'annule en exactement deux points $b_- < 0$ et $b_+ > 0$.

4°) Achever la résolution de l'exercice.

Exercice 13.16 : (niveau 3)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$.
On note E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On note (E) l'équation différentielle $\sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0$, en l'inconnue $y \in E$,
où $(a_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ vérifie $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = (X - a)^n$.

1°) Montrer que l'opérateur dérivation $D : E \longrightarrow E$ défini par $D(f) = f'$ est un endomorphisme sur E.

2°) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$, on note $M_\lambda(f)(x) = e^{\lambda x} f(x)$.
Calculer $M_a \circ D \circ M_{-a}$.

3°) Quel est le lien entre l'équation (E) et $\mathrm{Ker}((D - aId_E)^n)$?

4°) Calculer $(M_a \circ D \circ M_{-a})^n$ et en déduire l'ensemble des solutions de (E).

Exercices supplémentaires

Exercice 13.17 : (niveau 1)
Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle $x(xy' + y - x) = 1$.

Exercice 13.18 : (niveau 1)
Résoudre $(E) : y' - y = \sin t$.

Exercice 13.19 : (niveau 1)
Résoudre l'équation différentielle $(E) : y' - 3t^2 y = t^2$, avec la condition de Cauchy $y(0) = 0$.

Exercice 13.20 : (niveau 1)
Résoudre l'équation différentielle $(E) : y'' + 2y' - 8y = 7e^{3t}$.

Exercice 13.21 : (niveau 2)
Résoudre (E) : $yy' + x = 0$.

Exercice 13.22 : (niveau 2)
Résoudre (E) : $(1 + y^2)y' - xy = 0$.

Exercice 13.23 : (niveau 2)
(E) $x^2y' + y = x^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Limite en 0 des solutions.

Exercice 13.24 : (niveau 2)
Résoudre (E) : $2xyy' = x^2 + y^2$, avec $y(1) = 2$.

Exercice 13.25 : (niveau 2)
Résoudre (E) : $(2x+1)y" + (4x-2)y' - 8y = 0$, sachant qu'elle admet une solution de la forme $x \longmapsto e^{ax}$.

Exercice 13.26 : (niveau 2)
Déterminer les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, continues et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \;\; f(x) - 2\int_0^x \cos(x-t)f(t)dt = 1.$$

Exercice 13.27 : (niveau 2)
Résoudre l'équation différentielle (E) : $(t^2 + 1)y' = 4ty + 4t\sqrt{y}$.

Exercice 13.28 : (niveau 2)
Notons f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et, pour $x \neq 0$ $f(x) = x^4 sin(x^{-3})$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $xy' + 3y = f(x)$.

Exercice 13.29 : (niveau 2)
Résoudre l'équation différentielle réelle suivante : $(1 + x^2)^2y'' + 2x(1 + x^2)y' + y = 0$ en utilisant le changement de variable $t = \arctan(x)$.

Exercice 13.30 : (niveau 3)
Le but de l'exercice est de déterminer les applications $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ continues, non identiquement nulles, s'annulant en au moins un point et telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\; f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

1°) Soit f une solution. Montrer que f est paire, puis qu'elle admet une primitive F impaire.

2°) Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall y \in \mathbb{R} \;\; f(y) = \frac{F(x_0+y) + F(x_0-y)}{2F(x_0)}.$$

En déduire que f est de classe C^∞.

3°) Montrer qu'il existe μ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \;\; F\text{"}(x) = \mu F(x)$.

4°) Achever la résolution de l'exercice.

Exercice 13.31 : (niveau 3)
Déterminer les applications f de classe C^1, de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(-\frac{1}{x}) = f(x)$.