DM22

1) Soit $(c_n) \in P$. Donc il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tq pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+p} = c_n$

→ Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $c_{kn+p} = c_n$ À détailler

→ Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe $a, b \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq b < a$ tq $n = pa + b$
$\{c_n / n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble fini de complexes
donc elle est bornée.

Donc $(c_n) \in B$.

2) → $(0)_{n \in \mathbb{N}} \in P$ et B

→ Soit (c_n) et $(d_n) \in B$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Il existe $N, N' \in \mathbb{R}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $|c_n| \leq N$ et $|d_n| \leq N'$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $|\alpha c_n + d_n| \leq |\alpha| N + N'$ donc $(\alpha c_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B$.

→ Soit (c_n) et $(d_n) \in P$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+p} = c_n$ et $d_{n+p} = d_n$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+pq} = c_n$ et $d_{n+pq} = d_n$
donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha c_{n+pq} + d_{n+pq} = \alpha c_n + d_n$ donc $(\alpha c_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in P$.

→ Donc B et P sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

3) Soit $(c_n) \in B$.

→ positivité : $\|c\| = \sup_{n} \underbrace{|c_n|}_{\geq 0} \geq 0$

→ séparation : (H) $\|c\| = 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq |c_n| \leq \|c\| = 0$ donc $(c_n) = 0$

→ homogénéité : Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda c_n| = |\lambda| |c_n| \leq |\lambda| \|(c_n)\|$ donc $|\lambda| \|(c_n)\|$ majore $\{|\lambda c_n| / n \in \mathbb{N}\}$. $\|\lambda c_n\| = \sup\{|\lambda c_n| / n \in \mathbb{N}\} \leq |\lambda| \|c_n\|$

Si $|\lambda| = 0$, alors $\|\lambda c_n\| = \|0\| = |0| \|(c_n)\|$

Si $|\lambda| \neq 0$: on applique le calcul à $\frac{1}{|\lambda|}$ et λc, on a $\|(c_n)\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \|\lambda (c_n)\|$

Donc $\|\lambda (c_n)\| = |\lambda| \|(c_n)\|$

→ Inégalité triangulaire : Soit $(d_n) \in B$
$\forall n \in \mathbb{N}$, $|c_n + d_n| \leq |c_n| + |d_n| \leq \|(c_n)\| + \|(d_n)\|$. par passage au sup
$\|(c_n) + (d_n)\| \leq \|(c_n)\| + \|(d_n)\|$

4) Soit $c=(c_n)\in P$.

Soit A l'ensemble des périodes de c.

$A\subset\mathbb{N}$ et A non vide donc il possède un minimum, noté p_m

$\rightarrow \forall k\in\mathbb{N}^*, kp_c\in\mathbb{N}$ donc $\mathbb{N}^* p_m \subset A$.

$\rightarrow$ Soit $x\in A$. Il existe $a,b\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$ tq $x=ap_m+c$ avec $0\leq c<p_m$

$\forall n\in\mathbb{N}, c_{x+n}=c_{x-ap_m+n}$. Si $c\neq 0$, on a c une période plus petite que p_m, ce qui est faux. Donc $c=0$, donc $x=ap_m$

Donc $A=\mathbb{N}^* p_m$

$\rightarrow$ posons $(c_n)=Re(i^{n+1})$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $c_{n+4}=c_n$ car $i^{n+1+4}=i^{n+1}$.

Donc 4 est une période de c. Supposons que $p_m<4$ une période de c_n.

Alors $p_m|4$ d'après la partie précédente.

$p_m\neq 1$ car $Re(i^{0+1})=0$ et $Re(i^{1+1})=-1$

$p_m\neq 2$ car $Re(i^{1+1})=0$ et $Re(i^{3+1})=1$

Donc p_m n'existe pas donc 4 est la plus petite période de (c_n).

Partie II

6)

7) a) Soit $c=(c_n)\in P$ et p une période de c.

$$|M(c)|=\frac{1}{p}\left|\sum_{k=0}^{p-1}c_k\right|\leq\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}|c_k|$$

$$\leq\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\|c\|=\|c\|$$

De plus, M linéaire donc M est continue.

b) Donc pour tout $c\in P\setminus\{0\}$, $\frac{|M(c)|}{\|c\|}\leq 1$. par passage au sup,

$$\sup\frac{|M(c)|}{\|c\|}\leq 1$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=1$. $(u_n)\in P$, et est de période 1, donc

$$\sup\frac{|M(c)|}{\|c\|}\geq\frac{|M(1)|}{\|1\|}=1$$

donc $\sup\frac{|M(c)|}{\|c\|}=1$.

c) $P_0 = \mathrm{Ker}(M) = M^{-1}(\{0\})$. Or $\{0\}$ est fermé et M continue donc P_0 est fermé.

Partie III

10)

11) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\left|\frac{c_n}{n^\alpha}\right| \leq \frac{\|c\|}{n^\alpha}$ or $\alpha > 1$ donc $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ CV donc $\sum \frac{c_n}{n^\alpha}$ ACV.