Feuille d'exercices 7.
Applications, lois internes, ensembles dénombrables.

Exercice 7.1 : (niveau 1)
Soit G un groupe tel que $\forall g \in G,\ \ g^2 = 1_G$. Montrer que G est abélien.

Exercice 7.2 : (niveau 1)
Calculer $f([-1,1]^2)$, $f(\mathbb{R}_+ \times [1,+\infty[)$, $f^{-1}(\{4\})$ et $f^{-1}(]-\infty,1])$ pour les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ suivantes : $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $f(x,y) = x + y$.

Exercice 7.3 : (niveau 1)
Soit $f\ :\ E \longrightarrow F$, $g\ :\ F \longrightarrow G$ et $h\ :\ G \longrightarrow E$ des applications.
On suppose que, parmi les 3 applications hgf, gfh et fhg, 2 sont injectives (resp : surjectives) et que la troisième est surjective (resp : injective). Montrer que f, g et h sont des bijections.

Exercice 7.4 : (niveau 1)
On suppose que I et J sont deux ensembles.
S'il existe une application injective de I dans J et si J est fini ou dénombrable, montrer que I est fini ou dénombrable.
S'il existe une application surjective de I dans J et si I est fini ou dénombrable, montrer que J est fini ou dénombrable.

Exercice 7.5 : (niveau 1)
Soit f une application de E dans F et soit F' une partie de F.
Exprimer $f(f^{-1}(F'))$ en fonction de F' et de $f(E)$.

Exercice 7.6 : (niveau 1)
Soit $(E,*)$ un magma. On dit que $x \in E$ est idempotent si et seulement si $x * x = x$.

1°) On suppose que tout élément de E est régulier et que $*$ est distributive par rapport à elle-même. Montrer que tout élément est idempotent.

2°) On suppose que tout élément de E est régulier et que $*$ est associative. Montrer que E possède au plus un élément idempotent.

Exercice 7.7 : (niveau 2)

Soit E muni d'une loi ., associative, telle qu'il existe e vérifiant :
i) $\forall x \in E \quad xe = x$. ($e$ est neutre à droite).
ii) $\forall x \in E$, $\exists y \in E$ $xy = e$. (tout élément admet un symétrique à droite).
Montrez que E est un groupe.

Exercice 7.8 : (niveau 2)

Soit $(G, .)$ un groupe et $a, b \in G$ tels que $aba = b^3$ et $b^5 = 1_G$.
Montrer que a et b commutent.

Exercice 7.9 : (niveau 2)

Soient E un ensemble et $p : E \longrightarrow E$ une application telle que $p \circ p \circ p = p$.

1°) Démontrer que p est injective si et seulement si p est surjective.

2°) Démontrer que si p est injective ou surjective alors $p \circ p = Id_E$.

Exercice 7.10 : (niveau 2)

Etudier l'injectivité et la surjectivité de l'application f, de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Q}$, définie par $f(p, q) = p + \frac{1}{q}$.

Exercice 7.11 : (niveau 2)

Soit E un ensemble. Montrer que E est infini si et seulement si, pour tout $f : E \longrightarrow E$, il existe $A \subset E$ tel que $A \neq \emptyset$, $A \neq E$ et $f(A) \subset A$.

Exercice 7.12 : (niveau 2)

Soit A, B, C, D des ensembles. Construire une bijection entre $C^{A\times B}$ et $(C^A)^B$ et une injection de $C^A \times D^B$ dans $(C \times D)^{A\times B}$.

Exercice 7.13 : (niveau 2)

Soit $f : E \longrightarrow F$. On note $\hat{f}$ l'application "image directe" de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(F)$, et $\widehat{f^{-1}}$ l'application " image réciproque" de $\mathcal{P}(F)$ dans $\mathcal{P}(E)$.

1°) Montrer que f est injective si et seulement si $\hat{f}$ est injective (resp : $\widehat{f^{-1}}$ est surjective).

2°) Montrer que f est surjective si et seulement si $\hat{f}$ est surjective (resp : $\widehat{f^{-1}}$ est injective).

Exercice 7.14 : (niveau 2)

Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si la restriction de f sur $\mathbb{Q}$ est injective, f est-elle nécessairement injective ?

Exercice 7.15 : (niveau 2)

1°) Donner une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$.

2°) Donner une bijection de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

3°) Donner une bijection de $[0, 1]$ dans $[0, 1[$.
Indications, pour la question 3) : utiliser une suite u strictement décroissante telle que $u_0 = 1$.

Exercice 7.16 : (niveau 2)

Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes (où $\mathcal{P}(F)$ désigne l'ensemble des parties de F) :
i) f est surjective ;
ii) $\forall y \in F \quad f(f^{-1}\{y\}) = \{y\}$;
iii) $\forall Y \in \mathcal{P}(F) \quad f(f^{-1}(Y)) = Y$;
iv) $\forall Y \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(Y) = \emptyset \Longleftrightarrow Y = \emptyset$.
Donnez un énoncé analogue en remplaçant i) par i') : f injective.

Exercice 7.17 : (niveau 3)

Soient A et B deux parties non vides d'un ensemble E et f l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ définie par $f(X) = (A \cap X, B \cap X)$.

1°) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective.

2°) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit surjective.

3°) Lorsque f est une bijection, déterminer f^{-1}.

Exercice 7.18 : (niveau 3)

Soit E un ensemble infini et F un sous-ensemble de E, infini dénombrable, tel que $E \setminus F$ est infini. Montrer qu'il existe une bijection de E sur $E \setminus F$.

Exercice 7.19 : (niveau 3)

Soit E, E', F, F' quatre ensembles, $u : E' \longrightarrow E$ et $v : F \longrightarrow F'$ deux applications.
On pose $\begin{array}{cccc} \Phi : & F^E & \longrightarrow & F'^{E'} \\ & f & \longmapsto & v \circ f \circ u \end{array}$.

1°) Montrer que si u est surjective et v injective, alors Φ est injective.

2°) Montrer que si u est injective et v est surjective, alors Φ est surjective.

3°) Étudier les réciproques.

Exercice 7.20 : (niveau 3)

Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ?

1°) L'ensemble $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ des parties finies de $\mathbb{N}$.
L'ensemble $\mathcal{P}_\omega(\mathbb{N})$ des parties dénombrables de $\mathbb{N}$.
L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ des parties de $\mathbb{N}$.

2°) L'ensemble $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ des suites entières.
L'ensemble $A \subset \mathbb{N}^\mathbb{N}$ des suites ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.
L'ensemble $B \subset \mathbb{N}^\mathbb{N}$ des suites stationnaires à partir d'un certain rang.

3°) L'ensemble $\sigma(\mathbb{N})$ des bijections de $\mathbb{N}$ dans lui-même.
L'ensemble $\sigma_0(\mathbb{N})$ des bijections de $\mathbb{N}$ dans lui-même coïncidant avec l'identité en dehors d'un ensemble fini.

Exercices supplémentaires :

Exercice 7.21 : (niveau 1)

Soit $f : E \longrightarrow E$ une application. On note $F = \{x \in E/f(x) = x\}$. F est l'ensemble des points fixes de f. Montrer que $f \circ f = f$ si et seulement si $f(E) \subset F$.

Exercice 7.22 : (niveau 1)

Soient $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
par $f(x) = 2x$ et $g(x) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$.

1°) a) Démontrer que f est injective et non surjective.
b) Pour tout $y \in \mathbb{N}$, résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{N}$. Retrouver ainsi le fait que f est injective et non surjective.

2°) Étudier l'injectivité et la surjectivité de g.

3°) Préciser $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 7.23 : (niveau 1)

Déterminer $f(\mathbb{R}_+)$, $f(\mathbb{R}_-^*)$, $f(]0,1])$, $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$ et $f^{-1}(\{-1\})$ lorsque f prend les valeurs suivantes : $f(x) = e^x$, $f(x) = \ln x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

Exercice 7.24 : (niveau 1)

1°) Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Calculer l'indicatrice de $A \Delta B$ en fonction des indicatrices 1_A et 1_B de A, B.

2°) Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E et D la partie des éléments appartenant exactement à deux des parties A, B, C. Calculer l'indicatrice 1_D en fonction des indicatrices 1_A, 1_B et 1_C de A, B, C.

Exercice 7.25 : (niveau 1)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. Une fonction périodique est bornée.
2. Le produit de deux fonctions impaires est une fonction paire.
3. La dérivée d'une fonction impaire est paire.
4. Une primitive d'une fonction paire est impaire.
5. Le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante.

Exercice 7.26 : (niveau 1)

Soit E un ensemble muni de deux lois internes + et ., admettant chacune un élément neutre (respectivement noté e et u), et telles que chacune d'elles soit distributive par rapport à l'autre.
a) Montrez en calculant $e.(u + e)$ que $e^2 = e$, et de façon analogue que $u + u = u$.
b) Prouvez que ces deux lois sont idempotentes.

Exercice 7.27 : (niveau 1)

Soit E un ensemble et A une partie de E.

1°) On note $\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ & X & \longmapsto & X \cup A \end{array}$.

À quelle condition f est-elle injective (resp : surjective) ?

2°) On note $\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ & X & \longmapsto & X \cap A \end{array}$.

À quelle condition f est-elle injective (resp : surjective) ?

Exercice 7.28 : (niveau 2)

Sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E, on considère la loi suivante :

$$A \top B = (A \cup (E \setminus B)) \cap (B \cup (E \setminus A)).$$

Montrez que $(\mathcal{P}(E), \top)$ est un groupe abélien

Exercice 7.29 : (niveau 2)

Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

On dit qu'une partie A de E est un domaine d'injectivité pour f lorsque la restriction de f à A (au départ) est une injection. Ce domaine est dit maximal lorsqu'il n'existe pas de partie B de E, autre que A, telle que $A \subset B$ et la restriction de f à B est injective.

Soit A un domaine d'injectivité de f. Démontrer que ce domaine est maximal si et seulement si $f(A) = f(E)$.

Exercice 7.30 : (niveau 2)

Soit E un ensemble non vide et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On note f l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)^2$ définie par $f(X) = (X \cup A, X \cup B)$.

1°) Montrer que f n'est pas surjective.

2°) Donner une CNS pour que f soit injective.

Exercice 7.31 : (niveau 2)

Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1°) Démontrer que pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$, $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$.

2°) Démontrer que f est injective si et seulement si pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$,
$f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

Exercice 7.32 : (niveau 2)

Soient $(A, +, \times)$ un anneau et $a \in A$. On suppose que a admet un unique inverse à droite (c'est-à-dire $\exists! b \in A,\ ab = 1$). Démontrer que a est simplifiable et en déduire que a est inversible.

Exercice 7.33 : (niveau 2)

Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+f(y)) = f(x)+y^5$.
f est-elle injective ? f est-elle surjective ?

Exercice 7.34 : (niveau 2)

Soit E un ensemble non vide muni d'une loi interne associative notée $*$.
On suppose que pour tout $(a,b) \in E^2$, les équations $a * x = b$ et $y * a = b$ admettent au moins une solution.
Montrer que $(E, *)$ est un groupe.

Exercice 7.35 : (niveau 2)

Soit E, F et G trois ensembles.
Soit f une application de F dans G et g une application de E dans G.

1°) Donnez une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une application h telle que $g = f \circ h$.

2°) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que h soit unique.

3°) Mêmes questions en supposant maintenant que f est une application de E dans F et en étudiant la condition d'existence de h tel que $g = h \circ f$.

Exercice 7.36 : (niveau 3)

Soit E, F, G et H quatre ensembles, $s : E \longrightarrow F$, $f : E \longrightarrow G$, $i : G \longrightarrow H$ et $g : F \longrightarrow H$ des applications telles que s est surjective, i est injective, et $i \circ f = g \circ s$.
Montrer qu'il existe une unique application $h : F \longrightarrow G$ telle que $f = h \circ s$ et $g = i \circ h$.

Exercice 7.37 : (niveau 3)

Soit f et g deux bijections de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$. Montrer que l'application $k \longmapsto f(k)g(k)$ n'est pas une bijection de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 7.38 : (niveau 3)

1°) Montrer qu'une application f est surjective si et seulement si
$g_1 \circ f = g_2 \circ f \Longrightarrow g_1 = g_2$, pour tout couple d'applications (g_1, g_2) pour lequel ceci a un sens.

Soit f et g deux applications d'un ensemble X vers un ensemble Y.
Si e est une application de Y vers un ensemble Q, on dit que e est un co-égalisateur de (f, g) si et seulement si

- $e \circ f = e \circ g$;
- pour toute fonction $d : Y \longrightarrow Q'$ telle que $d \circ f = d \circ g$, il existe une unique application $h : Q \longrightarrow Q'$ telle que $h \circ e = d$.

2°) Montrer que si e est un co-égalisateur de (f, g), alors e est surjective.

3°) Montrer que (f, g) possède un co-égalisateur.