# DM 27

## Partie I

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, et $k \in \mathbb{N}$ tq $k \leq n$.

$$B_{n,k} = X^k(1-X)^{n-k} = \cancel{X^k - X^n} \quad \text{or } n \geq k \text{ donc } d^\circ B_{n,k} = n.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. $B_{n,k}(x) = 0 \iff x^k = 0$ ou $(1-x)^{n-k} = 0$ donc $0$ est racine de multiplicité $k$ si $k \neq 0$
$1$ de multiplicité $n-k$ si $k \neq n$. Sinon ce ne sont pas des racines car
$\forall y \in \mathbb{R}, y^0 = 1$

2) Soit $k \in \mathbb{N}_n$

$$B_{n,k} = X^k(1-X)^{n-k} \overset{\text{Newton}}{=} X^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-X)^j \, 1^{n-k-j}$$

$$= X^k \sum_{j=k}^{n} \binom{n-k}{j-k} (-X)^{j-k}$$

$$= X^k \sum_{j=k}^{n} \binom{n-k}{j-k} (-1)^{j-k} X^{j-k}$$

$$= \sum_{j=k}^{n} \binom{n-k}{j-k} (-1)^{j-k} X^{j}$$

3) $$X^k = X^k 1^{n-k} = X^k (X + (1-X))^{n-k} = X^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} X^j (1-X)^{n-k-j}$$

$$= X^k \sum_{j=k}^{n} \binom{n-k}{j-k} X^{j-k} (1-X)^{n-j}$$

$$= \sum_{j=k}^{n} \binom{n-k}{j-k} X^{j} (1-X)^{n-j}$$

$$= \sum_{j=k}^{n} \binom{n-k}{j-k} B_{n,j}(X)$$

4) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Il existe $(a_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tq $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

en utilisant 3) : on a donc $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=k}^{n} \binom{n-k}{j-k} B_{n,j}$

$$= \sum_{0 \leq k \leq j \leq n} a_k \binom{n-k}{j-k} B_{n,j} = \sum_{j=0}^{n} B_{n,j} \times \sum_{k=0}^{j} a_k \binom{n-k}{j-k}$$

Donc il existe $(b_j)_{0 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tq $P(X) = \sum_{j=0}^{n} b_j B_{n,j}$
Donc $(B_{n,j})_{0 \leq j \leq n}$ est génératrice.

De plus $\#\{B_{n,j} / 0\leq j\leq n\} = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$

Donc $(B_{n,j})_{0\leq j\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

5) $\int_0^1 B_{n,k}(t)\,dt = \cancel{\int_0^1 t^k - t^n\,dt} = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} - \frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

Faux $\to$ RF

$$= \frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-k-1}{(k+1)(n+1)} = \frac{n-k}{(k+1)(n+1)}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$\frac{k+1}{n-k} = \frac{(k+1)(n-k-1)!}{(n-k)!} = \frac{(k+1)(n-(k+1))!\,k!}{(n-k)!\,k!} = \frac{(k+1)!\,(n-(k+1))!}{(n-k)!\,k!} = \cancel{\frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$$

Faux

ça se saurait si on avait une formule aussi simple

Donc $\int_0^1 B_{n,k}(t)\,dt = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}}$

6)

## Partie II : Théorème de Stone - Weierstraß

8) $B_n(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n,k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k(1-X)^{n-k} \overset{\text{Newton}}{=} (X+1-X)^n = 1$

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{k}{n} B_{n,k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{k}{n}X^k(1-X)^{n-k}$$

$\forall k\in\{1,\dots,n\}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} X^k(1-X)^{n-k}$$ $k=1$

c.a.d. après comité-président $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$

$$= X\sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1} X^{k-1}(1-X)^{n-1-(k-1)}$$

$$\overset{\text{Newton}}{=} X(X+1-X)^n = X$$

$B_n(X^2) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{k^2}{n^2}X^k(1-X)^{n-k}$ or $k^2 = k^2 - k + k = k(k-1)+k$ donc

$$B_n(X^2) = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k}\frac{k(k-1)}{n^2}X^k(1-X)^{n-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k}\frac{k}{n^2}X^k(1-X)^{n-k}$$

cas $n=1$ ?

D'après la formule "comité à deux présidents" $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ pour $2\leq k\leq n$

Donc $B_n(X^2) = X^2\frac{n-1}{n}\sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} X^{k-2}(1-X)^{n-2-(k-2)} + \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}\frac{1}{n}X^k(1-X)^{n-k}$

comité-président

Donc $B_n(X^2) = X^2\frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}X$

9) Soit $f \in C$.

pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \in \mathbb{R}$ et $B_{n,k} \in \mathbb{R}[X]$

Donc $B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}$ est un polynôme car somme finie de polynômes

Donc $B_n(f) \in C$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $n$, $f, g \in C$.

$$B_n(\alpha f+g) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\alpha f+g)\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\left(\alpha \times f\left(\frac{k}{n}\right) + g\left(\frac{k}{n}\right)\right) B_{n,k}$$

$$= \alpha \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}$$

$$= \alpha B_n(f) + B_n(g)$$

Donc $B_n$ est un endomorphisme. Montrons qu'il est continu.

Soit $f \in C$, $x \in [0,1]$

$$|B_n(f)(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}\right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \times |x^k (1-x)^{n-k}|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \|f\| \times |x^k(1-x)^{n-k}|$$

$$= \|f\| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{car } x \in [0,1] \text{ donc } x^k(1-x)^{n-k} \geq 0$$

$$= \|f\|(x+1-x) = \|f\|$$

donc $\|f\|$ est un majorant de $\{|B_n(f)(x)| \,/\, x \in [0,1]\}$ or $\|B_n(f)\|$ est le plus petit de ces majorants donc $\|B_n(f)\| \leq \|f\|$ (On appelle ceci passage à la borne sup)

De plus $B_n$ est linéaire car endomorphisme donc $B_n$ continue D'après le cours

10) $$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{k/n} X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{\frac{1}{n}} X\right)^k (1-X)^{n-k}$$

$$\overset{\text{Newton}}{=} \left(e^{\frac{1}{n}} X + 1 - X\right)^n = \left(1 + X\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right)^n$$

Soit $x \in [0,1]$. $B_n(f)(x) = \left(1 + x\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right)^n$

$$= \exp\left(n \ln\left(1 + x\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right)\right)\right)$$

$$= \exp\left(n \ln\left(1 + x\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\right)$$

$$= \exp\left(n\left(\frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(x + o(1)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \exp(x)$$

11) Soit $x \in [0,1]$. $x^k(1-x)^{n-k} \geqslant 0$ car produit de réels positifs donc $S_{n,\delta}(x) \geqslant 0$

Soit $k \in \{0, \dots, n\}$ tq $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \delta$.

On a donc $\delta^2 \leqslant \left(\frac{k}{n} - x\right)^2$

donc $\delta^2 S_{n,\delta}(x) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k^2}{n^2} - 2\frac{kx}{n} + x^2\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} B_{n,k} - 2x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x}{n} B_{n,k} + x^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= B_n(X^2)(x) + 2x\, B_n(X)(x) - x^2\, B_n(1)(x)$$

$$= \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x - 2x^2 + x$$

$$\leqslant \frac{x - x^2}{n}$$

De plus $x - x^2 = -\left(x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{4}$

Donc $S_{n,\delta}(x) \leqslant \frac{1}{4\delta n^2}$

12)

14) C'est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc avec combinaison linéaire, c'est vrai pour tout polynôme, donc pour $B_n(f)$.

Donc $\int_0^1 B_n(f)(x) \times f(x)\, dx = 0$

De plus $\left|\int_0^1 B_n(f)(x) f(x) - f^2(x)\, dx\right| = \left|\int_0^1 (B_n(f)(x) - f(x)) f(x)\, dx\right| \leqslant \|B_n(f) - f\| \|f\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

D'après le principe des gendarmes $\int_0^1 B_n(f)(x) f(x) dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f^2(x) dx$

Donc par passage à la limite $\int_0^1 f^2(x)\, dx = 0$ or $f^2(x) \geqslant 0$ donc $f^2 = 0$ donc $f = 0$.