

DS 4 : un corrigé

Le barème comporte 71 points.

Exercice (sur 4 points) :

Soit $t \in [0, \pi]$. On linéarise la fonction à intégrer :

$$\begin{aligned}\sin^{2m} t \cos(2mt) &= \operatorname{Re} \left(e^{2imt} \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \right)^{2m} \right) \\ &= \frac{(-1)^m}{4^m} \operatorname{Re} \left(e^{2imt} \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} (-e^{-it})^k (e^{it})^{2m-k} \right),\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de la formule du binôme de Newton.

$$\text{Ainsi } \sin^{2m} t \cos(2mt) = \frac{(-1)^m}{4^m} \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} (-1)^k \cos(2mt - kt + (2m - k)t).$$

Or lorsque $h \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\pi \cos(ht) dt = \left[\frac{\sin(ht)}{h} \right]_0^\pi = 0$ et lorsque $h = 0$, $\int_0^\pi \cos(ht) dt = \pi$,

$$\text{donc } \int_0^\pi \sin^{2m} t \times \cos(2mt) dt = \frac{(-1)^m}{4^m} \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} (-1)^k \delta_{4m-2k,0} \pi = \frac{(-1)^m}{4^m} \pi.$$

Problème 1 (sur 34 points) : fractions continues

Partie 1 (sur 5 points) : notations.

1°) (3 points)

◇ x_0 est bien défini et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}_+}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, supposons que x_n est bien défini et que $x_n \in \overline{\mathbb{R}_+}$. Alors, avec les conventions de l'énoncé, $\{x_n\} \in \overline{\mathbb{R}_+}$, puis $x_{n+1} = \frac{1}{\{x_n\}}$ est bien défini et appartient à $\overline{\mathbb{R}_+}$.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, en tant que suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}_+}$.

◇ Alors l'énoncé permet bien de définir $a_n = \lfloor x_n \rfloor \in \overline{\mathbb{R}_+}$.

◇ On convient naturellement que, pour tout $x \in \overline{\mathbb{R}_+}$, $+\infty + x = x + (+\infty) = +\infty$.

Alors, pour tout $s, t \in \overline{\mathbb{R}_+}$, la quantité $s + \frac{1}{t}$ est définie et appartient à $\overline{\mathbb{R}_+}$.

◇ Soit $k \in \mathbb{N}$. Notons $R(k)$ l'assertion suivante : pour tout $s_0, \dots, s_k \in \overline{\mathbb{R}_+}$, la quantité $[s_0, \dots, s_k]$ est définie et appartient à $\overline{\mathbb{R}_+}$.

Soit $s_0 \in \overline{\mathbb{R}_+}$. Alors $[s_0] = s_0$ est défini et appartient à $\overline{\mathbb{R}_+}$, donc $R(0)$ est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $R(k)$. Soit $s_0, \dots, s_{k+1} \in \overline{\mathbb{R}_+}$.

D'après le point précédent, $s_k + \frac{1}{s_{k+1}}$ est défini et appartient à $\overline{\mathbb{R}_+}$, donc d'après $R(k)$,

$[s_0, \dots, s_{k+1}] = \left[s_0, \dots, s_{k-1}, s_k + \frac{1}{s_{k+1}} \right]$ est défini et appartient à $\overline{\mathbb{R}_+}$.

Le principe de récurrence permet de conclure.

2°) (2 points) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R(n)$ la propriété suivante : $x = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x_n]$.

Initialisation : On a $[x_0] = x_0 = x$, ce qui démontre que $R(0)$ est vraie.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $R(n)$ est vraie et démontrons $R(n+1)$. On a

$$\begin{aligned} [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, x_{n+1}] &= \left[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{x_{n+1}} \right] \\ &= [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, [x_n] + \{x_n\}] \\ &= [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x_n] \\ &= x \quad \text{par hypothèse de récurrence,} \end{aligned}$$

ce qui démontre que $R(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, x_n]$.

Partie 2 (sur 10 points) : Fraction continue d'un rationnel.

3°) (1 point) Les divisions euclidiennes effectuées correspondent à l'application de l'algorithme d'Euclide. Comme $u \wedge v = 1$, cet algorithme se termine par un reste égal à 1 suivi d'un reste nul. Ainsi, l'algorithme d'Euclide justifie l'existence de $d \in \mathbb{N}$ tel que $r_d = 1$ et $r_{d+1} = 0$.

4°) (4 points)

◇ Pour tout $k \in \{0, \dots, d\}$, on note $S(k)$ la propriété $x_k = \frac{r_{k-1}}{r_k}$.

Initialisation : On a $\frac{r_{0-1}}{r_0} = \frac{u}{v} = x = x_0$ donc $S(0)$ est vraie.

Hérédité : Fixons $k \in \{0, \dots, d-1\}$ tel que $S(k)$ est vraie et démontrons $S(k+1)$.

On a $\frac{r_{k-1}}{r_k} = \frac{q_k \times r_k + r_{k+1}}{r_k} = q_k + \frac{r_{k+1}}{r_k}$, avec $0 \leq \frac{r_{k+1}}{r_k} < 1$, car dans la division euclidienne $r_{k-1} = q_k \times r_k + r_{k+1}$, on a $0 \leq r_{k+1} < r_k$.

De plus $q_k \in \mathbb{N}$, donc $\left\{ \frac{r_{k-1}}{r_k} \right\} = \frac{r_{k+1}}{r_k}$.

Par hypothèse de récurrence, cela donne $\{x_k\} = \frac{r_{k+1}}{r_k}$ et donc $x_{k+1} = \frac{1}{\{x_k\}} = \frac{r_k}{r_{k+1}}$.

Donc $S(k+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $k \in \{0, \dots, d\}$, $x_k = \frac{r_{k-1}}{r_k}$.

◇ Pour tout $k \in \{0, \dots, d\}$, on a

$$a_k = [x_k] = \left\lfloor \frac{r_{k-1}}{r_k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{q_k \times r_k + r_{k+1}}{r_k} \right\rfloor = \left\lfloor q_k + \frac{r_{k+1}}{r_k} \right\rfloor = q_k$$

puisque $0 \leq \frac{r_{k+1}}{r_k} < 1$. Donc $\forall k \in \{0, \dots, d\}$, $a_k = q_k$.

◇ On constate alors que

$$\begin{aligned} x_{d+1} &= \frac{1}{\{x_d\}} = \frac{1}{\left\{\frac{r_{d-1}}{r_d}\right\}} = \frac{1}{\{r_{d-1}\}} \quad (\text{car } r_d = 1) \\ &= \frac{1}{0} \quad (\text{car } r_{d-1} \in \mathbb{N}^*) \\ &= +\infty, \end{aligned}$$

ce qui permet de démontrer (à l'aide d'une récurrence immédiate) que pour tout $\forall k \geq d+1$, $x_k = a_k = +\infty$.

5°) (1 point) D'après la question 2, $x = [a_0, a_1, \dots, a_d, x_{d+1}]$, donc $x = [q_0, q_1, \dots, q_d, +\infty] = x = [q_0, q_1, \dots, q_{d-1}, q_d]$, ce qu'il fallait démontrer.

6°) (2 points) On calcule $\frac{355}{113} = 3 + \frac{16}{113} = 3 + \frac{1}{\frac{113}{16}} = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{16}}$, donc $\frac{355}{113} = [3, 7, 16]$.

7°) (2 points) L'ensemble $\{n \in \mathbb{N} / a_n = +\infty\}$ est une partie non vide de \mathbb{N} , donc il admet un plus petit élément. Comme $a_0 \neq +\infty$, on sait que ce plus petit élément est supérieur ou égal à 1. Cela nous permet de l'écrire $d+1$ où $d \in \mathbb{N}$.

On a donc $\forall k \in \{0, \dots, d\}$, $a_k \in \mathbb{N}$ et $a_{d+1} = +\infty$. Il s'ensuit que $x_{d+1} = +\infty$.

D'après la question 2, on a donc

$$x = [a_0, a_1, \dots, a_d, x_{d+1}] = [a_0, a_1, \dots, a_d, +\infty] = [a_0, a_1, \dots, a_d].$$

On a donc montré que $x = [a_0, a_1, \dots, a_{d-1}, a_d]$ avec $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{N}$.

Dès lors, x s'écrit à l'aide d'un nombre fini de fractions d'entiers empilées, donc $x \in \mathbb{Q}_+$.

Partie 3 (sur 19 points) : Fraction continue d'un irrationnel.

8°) (4 points)

◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\{x_n\} = 0$. Alors $x_{n+1} = +\infty$, puis $a_{n+1} = +\infty$, ce qui est faux. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{x_n\} \in]0, 1[$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n > 1$ et donc $a_n \geq 1$. Cela implique que $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} \geq q_n + q_{n-1}$. Comme $q_0 = 1$, on en déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_n \geq 1$. Il s'ensuit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $q_{n+1} > q_n$. Par conséquent, $(q_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante.

◇ Par récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n \geq n$.

En effet, on a vu que $q_1 \geq 1$, et si $q_n \geq n$ pour un certain $n \geq 1$, alors comme $q_{n+1} > q_n$, on a $q_{n+1} > n$, donc $q_{n+1} \geq n+1$.

On en déduit que $q_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

9°) (2 points)

◇ On a vu que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $[a_0, \dots, a_n, t]$ est défini et appartient à \mathbb{R}_+^* .

◇ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R(n)$ la propriété suivante :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, t] = \frac{p_n + \frac{p_{n-1}}{t}}{q_n + \frac{q_{n-1}}{t}}.$$

Initialisation : Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On calcule :

$$[a_0, t] = a_0 + \frac{1}{t} \text{ et } \frac{p_0 + \frac{p_{-1}}{t}}{q_0 + \frac{q_{-1}}{t}} = \frac{a_0 + \frac{1}{t}}{1 + \frac{0}{t}} = a_0 + \frac{1}{t}, \text{ d'où } R(0).$$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $R(n)$ et montrons $R(n+1)$. Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, t] &= \left[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1} + \frac{1}{t} \right], \text{ donc d'après } R(n), \\ [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, t] &= \frac{\left(a_{n+1} + \frac{1}{t} \right) p_n + p_{n-1}}{\left(a_{n+1} + \frac{1}{t} \right) q_n + q_{n-1}} \\ &= \frac{a_{n+1} p_n + p_{n-1} + \frac{p_n}{t}}{a_{n+1} q_n + q_{n-1} + \frac{q_n}{t}} \\ &= \frac{p_{n+1} + \frac{p_n}{t}}{q_{n+1} + \frac{q_n}{t}}, \end{aligned}$$

ce qui démontre que $R(n+1)$.

Le principe de récurrence permet de conclure.

◇ Dans la formule précédente, on fait tendre t vers $+\infty$. On obtient alors le résultat :

$$[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = \frac{p_n}{q_n}.$$

10°) (2 points) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R(n) : p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n+1}$.

Initialisation : On a $p_0 q_{-1} - q_0 p_{-1} = a_0 \times 0 - 1 \times 1 = -1 = (-1)^{0+1}$ d'où $R(0)$.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $R(n)$ est vraie et démontrons $R(n+1)$. On calcule

$p_{n+1} q_n - q_{n+1} p_n = (a_{n+1} p_n + p_{n-1}) q_n - (a_{n+1} q_n + q_{n-1}) p_n = -(p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1})$, donc d'après $R(n)$, $p_{n+1} q_n - q_{n+1} p_n = (-1)^{n+2}$, ce qui démontre que $R(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n+1}$.

Cette égalité est une relation de Bézout. D'après le théorème de Bézout, on en déduit que p_n et q_n sont premiers entre eux pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc que la fraction $\frac{p_n}{q_n}$ est irréductible.

11°) (2 points)

◇ Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p_{2n-1} q_{2n} - q_{2n-1} p_{2n}}{q_{2n-1} q_{2n}} = \frac{-(-1)^{2n+1}}{q_{2n-1} q_{2n}} = \frac{1}{q_{2n-1} q_{2n}} \text{ où la troisième égalité découle du résultat de la question précédente.}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = +\infty$, on en déduit que $\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

◇ Pour tout $n \geq 1$, on calcule

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{p_{n+2}q_n - q_{n+2}p_n}{q_{n+2}q_n} \\ &= \frac{(a_{n+2}p_{n+1} + p_n)q_n - (a_{n+2}q_{n+1} + q_n)p_n}{q_{n+2}q_n} \\ &= \frac{a_{n+2}(p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n)}{q_{n+2}q_n} \\ &= \frac{a_{n+2}(-1)^n}{q_{n+2}q_n} \text{ d'après la question précédente.} \end{aligned}$$

Donc $\frac{p_{2n+2}}{q_{2n+2}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} > 0$ et $\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} < 0$, ce qui démontre que $\left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)_{n \geq 1}$ est strictement croissante et que $\left(\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\right)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante.

12°) ◇ (3 points) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto [a_0, a_1, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}, t]$ est décroissante (car t est en dessous d'un nombre impair de traits de fraction). Il s'ensuit que

$$[a_0, a_1, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}, x_{2n+1}] \geq [a_0, a_1, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}, +\infty],$$

$$\text{or d'après la question 2, } [a_0, a_1, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}, x_{2n+1}] = x$$

$$\text{et } [a_0, a_1, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}, +\infty] = [a_0, a_1, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}] = \frac{p_{2n}}{q_{2n}}, \text{ donc } x \geq \frac{p_{2n}}{q_{2n}}.$$

De même, la fonction $t \mapsto [a_0, a_1, \dots, a_{2n-2}, a_{2n-1}, t]$ est croissante (car t est en dessous d'un nombre pair de traits de fraction).

$$\text{Il s'ensuit que } [a_0, a_1, \dots, a_{2n-2}, a_{2n-1}, x_{2n}] \leq [a_0, a_1, \dots, a_{2n-2}, a_{2n-1}, +\infty],$$

$$\text{c'est-à-dire que } x \leq \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}.$$

$$\text{En conclusion, } \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{p_{2n}}{q_{2n}} \leq x \leq \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}.$$

◇ (2 points) La suite $\left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)_{n \geq 1}$ est ainsi croissante et majorée, donc elle converge, vers une limite que l'on notera temporairement x^- . De même, la suite $\left(\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée, donc elle converge, vers une limite que l'on notera temporairement x^+ .

En passant à la limite dans l'encadrement précédent, on obtient $x^- \leq x \leq x^+$.

De plus on a vu que $\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc par unicité de la limite, $x^- = x^+$. Ainsi, $x^- \leq x \leq x^+$, donc $x = x^- = x^+$.

Ainsi, les deux suites $\left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}\right)_{n \geq 1}$ et $\left(\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\right)_{n \geq 1}$ convergent vers x , donc $\frac{p_n}{q_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$: c'est un résultat classique, que l'on peut démontrer en passant aux ε :

(2 points) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que,

$$\text{pour tout } n \geq N_1 \text{ (c'est-à-dire } 2n \geq 2N_1), \left| \frac{p_{2n}}{q_{2n}} - x \right| \leq \varepsilon \text{ et,}$$

$$\text{pour tout } n \geq N_2 \text{ (c'est-à-dire } 2n-1 \geq 2N_2-1), \left| \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} - x \right| \leq \varepsilon.$$

On en déduit, en distinguant le cas où n est pair de celui où n est impair, qu'en posant

$N = \max(2N_1, 2N_2 - 1)$, pour tout $n \geq N$, $\left| \frac{p_n}{q_n} - x \right| \leq \varepsilon$, ce qu'il fallait démontrer.

13°) (2 points) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 10, $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (-1)^n$, donc en divisant par q_nq_{n+1} , $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_nq_{n+1}}$. On en déduit, en notant d la distance dans \mathbb{R} , que $d\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right) \leq \frac{1}{q_nq_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^2}$, car d'après la question 8, la suite $(q_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

Or pour tout $n \geq 1$, $\frac{p_{2n}}{q_{2n}} \leq x \leq \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$, donc en distinguant les cas où n est pair ou impair, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d\left(x, \frac{p_n}{q_n}\right) \leq d\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right)$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \leq \frac{1}{q_n^2}$.

Problème 2 (sur 33 points) : ensembles pairs

1°) (3 points) Par hypothèse, il existe une bijection f de E dans F . On suppose que E est pair.

Il existe une partition par paires de E que l'on notera \mathcal{E} .

Notons $\mathcal{F} = \{f(P) \mid P \in \mathcal{E}\}$. Il suffit de montrer que \mathcal{F} est une partition par paires de F .

- f étant injective, pour tout $P \in \mathcal{E}$, $|f(P)| = |P| = 2$, donc $f(P)$ est une paire de F .
- Soit $P', Q' \in \mathcal{F}$ tel que $P' \neq Q'$.
Il existe $P, Q \in \mathcal{E}$ tels que $P' = f(P)$ et $Q' = f(Q)$.
 $P' \neq Q'$, donc $P \neq Q$.
Supposons que $P' \cap Q' \neq \emptyset$, c'est-à-dire que $f(P) \cap f(Q) \neq \emptyset$. Alors il existe $y \in f(P) \cap f(Q)$, donc il existe $p \in P$ et $q \in Q$ tels que $y = f(p) = f(q)$. f est injective, donc $p = q \in P \cap Q = \emptyset$.
C'est impossible donc $P' \cap Q' = f(P) \cap f(Q) = \emptyset$.
- D'après le cours, $\bigcup_{P \in \mathcal{E}} f(P) = f\left(\bigcup_{P \in \mathcal{E}} P\right) = f(E) = F$, car f est surjective.

Ceci démontre que \mathcal{F} est une partition par paires de F , donc que F est pair.

2°) (1 point) Posons $\mathcal{F} = \{\{2n, 2n+1\} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{2n, 2n+1\}$ est une paire de \mathbb{N} ;
- Soit $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \neq m$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $n < m$. Alors $n \leq m-1$, donc $2n \leq 2m-2$. Ainsi, $2n < 2n+1 < 2m < 2m+1$, donc $\{2n, 2n+1\} \cap \{2m, 2m+1\} = \emptyset$.
- On sait que $\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{2n, 2n+1\}$, car tout entier est pair ou impair.

Ceci démontre que \mathcal{F} est une partition par paires de \mathbb{N} , donc \mathbb{N} est pair.

3°) (3 points) Posons $\mathcal{F} = \{\{A, \bar{A}\} \mid A \subset E\}$.

- Soit $A \subset E$. E étant non vide, il existe $x \in E$. Si $x \in A$, alors $x \notin \bar{A}$, donc $A \neq \bar{A}$ et de même, si $x \notin A$, alors $x \in \bar{A}$, donc $A \neq \bar{A}$. Ceci montre que $\{A, \bar{A}\}$ est une paire de E ;
- Soit $P, Q \in \mathcal{F}$. Il existe $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tels que $P = \{A, \bar{A}\}$ et $Q = \{B, \bar{B}\}$.
Supposons que $P \cap Q \neq \emptyset$. Alors $A \in Q$ ou $\bar{A} \in Q$, donc il y a 4 possibilités :
 $A = B$, $A = \bar{B}$, $\bar{A} = B$ ou $\bar{A} = \bar{B}$, qui se regroupent en seulement 2 possibilités :
 $A = B$ ou $A = \bar{B}$. Dans chaque cas, on a bien $P = \{A, \bar{A}\} = \{B, \bar{B}\} = Q$.
On a montré que $P \cap Q \neq \emptyset \implies P = Q$,
donc par contraposée, $P \neq Q \implies P \cap Q = \emptyset$.
- Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Posons $Q = \{A, \bar{A}\}$. Alors $A \in Q$ et $Q \in \mathcal{F}$, donc $A \in \bigcup_{P \in \mathcal{F}} P$.

L'inclusion réciproque étant évidente, on a montré que $\mathcal{P}(E) = \bigcup_{P \in \mathcal{F}} P$.

Ceci démontre que \mathcal{F} est une partition par paires de $\mathcal{P}(E)$, donc $\mathcal{P}(E)$ est pair.

4°) (3 points)

Soit E un ensemble fini pair. Il existe une partition par paires $\{A_1, \dots, A_m\}$ de E où $m \in \mathbb{N}$ (celle-ci contient nécessairement un nombre fini de paires sinon E serait infini).

Dès lors, on a $|E| = \left| \bigcup_{i=1}^m A_i \right| = \sum_{i=1}^m |A_i| = \sum_{i=1}^m 2 = 2m$ ce qui démontre que E est de cardinal pair.

Réciproquement, considérons un ensemble fini E de cardinal pair $2m$ où $m \in \mathbb{N}$. On peut énumérer ses éléments de sorte que $E = \{x_1, x_2, \dots, x_{2m-1}, x_{2m}\}$. Alors l'ensemble $\{\{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{2m-1}, x_{2m}\}\}$ est une partition par paires de E , ce qui démontre que E est pair.

Ainsi, un ensemble fini est pair si, et seulement si, son cardinal est pair.

5°) \diamond (3 points) Soit E un ensemble de cardinal $2m$, où $m \in \mathbb{N}^*$.

E est non vide, donc il possède au moins un élément que l'on note e .

Pour construire une partition par paires de E , on choisit un élément f dans $E \setminus \{e\}$ (il y a $2m - 1$ choix) afin de constituer la paire $\{e, f\}$, puis on complète $\{\{e, f\}\}$ en choisissant une partition par paires de $E \setminus \{e, f\}$ (il y a a_{m-1} choix). On obtient donc $(2m - 1)a_{m-1}$ partitions par paires de E .

Par conséquent, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $a_m = (2m - 1)a_{m-1}$.

\diamond (3 points) De plus a_0 désigne le nombre de partitions par paires de \emptyset , or $\mathcal{P}_2(\emptyset) = \emptyset$, donc $\mathcal{F} = \emptyset$ est l'unique partition par paires de $E = \emptyset$. Ceci prouve que $a_0 = 1$.

Par récurrence, on en déduit alors que, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $a_m = \prod_{k=1}^m (2k - 1)$ (en

convenant que le produit vide est égal à 1).

En multipliant et en divisant par le produit des nombres pairs de 2 à $2m$, il vient, pour tout $m \in \mathbb{N}$, $a_m = \frac{(2m)!}{(2m) \times (2m - 2) \times \dots \times 4 \times 2}$. Chaque facteur du dénominateur

de factorise par 2 pour donner : $\forall m \in \mathbb{N}, a_m = \frac{(2m)!}{m!2^m}$.

6°) (2 points) Lorsque $\mathcal{E} \in \Pi(E)$, notons $\varphi(\mathcal{E}) = \{f(P) / P \in \mathcal{E}\}$. D'après la première question, φ est une application de $\Pi(E)$ dans $\Pi(F)$.

De même, pour tout $\mathcal{F} \in \Pi(F)$, notons $\Psi(\mathcal{F}) = \{f^{-1}(Q) / Q \in \mathcal{F}\}$. Toujours d'après la première question, Ψ est une application de $\Pi(F)$ dans $\Pi(E)$.

On vérifie que $\varphi \circ \Psi = Id_{\Pi(F)}$ et $\Psi \circ \varphi = Id_{\Pi(E)}$, donc φ est une bijection de $\Pi(E)$ dans $\Pi(F)$, dont Ψ est la bijection réciproque.

7°) \diamond (2 points) Lorsque σ est une bijection de E dans E , il est clair que $\varphi(\sigma)$ est une partition par paires de E , donc φ est bien une application de $\mathcal{S}(E)$ dans $\Pi(E)$.

Soit $\mathcal{F} \in \Pi(E)$. On a vu en question 4 que $|\mathcal{F}| = m$. Notons P_1, \dots, P_m les éléments de \mathcal{F} , deux à deux distincts. Pour tout $i \in \mathbb{N}_m$, notons $\sigma(2i-1)$ et $\sigma(2i)$ les deux éléments de P_i . Ainsi, $E = \{\sigma(1), \dots, \sigma(2m)\}$, donc σ est une bijection de E dans E et $\mathcal{F} = \varphi(\sigma)$. Ceci démontre que φ est surjective.

\diamond (3 points) Reprenons les notations du point précédent. Pour construire $\sigma' \in \mathcal{S}(E)$ telle que $\varphi(\sigma') = \mathcal{F}$, on peut d'abord choisir une façon d'ordonner P_1, \dots, P_m , sous la forme $P_{f(1)}, \dots, P_{f(m)}$, où f est une bijection de \mathbb{N}_m dans \mathbb{N}_m , soit $m!$ choix, puis pour chaque $i \in \mathbb{N}_m$, on choisit pour $\sigma'(2i-1)$ l'un des deux éléments de $P_{f(i)}$, soit 2 choix, l'autre élément étant alors noté $\sigma'(2i)$. Ainsi, le nombre d'antécédents de \mathcal{F} par φ est constamment égal à $m!2^m$.

Alors, d'après le principe des bergers, $|\Pi(E)| = \frac{|\mathcal{S}(E)|}{m!2^m} = \frac{(2m)!}{m!2^m}$.

De plus, si F est un ensemble de cardinal $2m$, il est en bijection avec E , donc d'après la question précédente, le nombre de partitions par paires de F est égale à celui de E .

Ainsi, on a établi à nouveau que $a_m = \frac{(2m)!}{m!2^m}$.

8°) (3 points) Posons $x_0 = x$. Comme $E \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$, il existe $x_1 \in E \setminus \{x_0\}$.

Comme $E \setminus \{x_0, x_1\} \neq \emptyset$, il existe $x_2 \in E \setminus \{x_0, x_1\}$, etc. On construit ainsi (par récurrence) une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E , distincts deux à deux.

$$\varphi : E \longrightarrow E \setminus \{x\}$$

Considérons l'application

$$y \longmapsto \begin{cases} x_{k+1} & \text{s'il existe } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } y = x_k \\ y & \text{sinon} \end{cases}$$

C'est une bijection puisqu'on voit que sa réciproque

$$\varphi : E \setminus \{x\} \longrightarrow E$$

est

$$y \longmapsto \begin{cases} x_{k-1} & \text{s'il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } y = x_k \\ y & \text{sinon} \end{cases}$$

9°) (1 point) L'ensemble $\{-x, x\} / x \in \mathbb{R}_+^*$ est une partition par paires de \mathbb{R}^* . Donc \mathbb{R}^* est pair. Or, d'après la question précédente, \mathbb{R} et \mathbb{R}^* sont équipotents. De plus, d'après la question 1, deux ensembles équipotents ont la même parité. Donc \mathbb{R} et \mathbb{R}^* ont la même parité. En conclusion, \mathbb{R} est pair.

10°) (3 points) Posons $\mathcal{E} = \bigcup_{\mathcal{F} \in \Gamma} \mathcal{F}$. Montrons que \mathcal{E} est un majorant de Γ dans Π .

Si $\mathcal{F} \in \Gamma$, alors $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ par définition de \mathcal{E} . Ainsi \mathcal{E} est un majorant de Γ dans $\mathcal{P}(\mathcal{P}_2(E))$. Il reste à montrer que \mathcal{E} appartient à Π .

Chaque \mathcal{F} appartenant à Γ est constitué de paires d'éléments de E . Par conséquent, \mathcal{E} est constitué de paires d'éléments de E .

Soient P_1 et P_2 deux paires distinctes d'éléments de E appartenant à \mathcal{E} . Il existe alors $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \Gamma$ tels que $P_1 \in \mathcal{F}_1$ et $P_2 \in \mathcal{F}_2$. Comme Γ est totalement ordonnée, on a $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ ou $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$. Pour fixer les idées, on suppose que $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$. Dès lors, P_1 et P_2 appartiennent à \mathcal{F}_2 . Et comme \mathcal{F}_2 est constitué de paires d'éléments de E qui sont disjointes, on en déduit que P_1 et P_2 sont disjointes. On a ainsi démontré que toutes les paires d'éléments de E qui appartiennent à \mathcal{E} sont disjointes. On en déduit que \mathcal{E} appartient bien à Π . En conclusion, \mathcal{E} est un majorant de Γ dans Π .

11°) (2 points)

L'ensemble \mathcal{E} est constitué de paires d'éléments de E qui sont disjointes.

Notons $F = \bigcup_{P \in \mathcal{E}} P$. Ainsi, \mathcal{E} est une partition par paires de F . Il s'agit donc de montrer

que $F = E$, ou bien qu'il existe un élément x de E tel que $F = E \setminus \{x\}$.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $F \neq E$ et que, pour tout $x \in E$,

$F \neq E \setminus \{x\}$.

$F \neq E$, donc il existe $a \in E$ tel que $a \notin F$. Mais $F \neq E \setminus \{a\}$, donc il existe $b \in E \setminus \{a\}$ tel que $b \notin F$. Alors $F \subset E \setminus \{a, b\}$. Dans ce cas, $\mathcal{E} \sqcup \{\{a, b\}\}$ est aussi un élément de Π , strictement plus grand que \mathcal{E} , ce qui est impossible car \mathcal{E} est maximal.

12°) (1 point) D'après la question précédente, E est pair ou bien il existe $x \in E$ tel que $E \setminus \{x\}$ est pair, mais d'après la question 8, il existe une bijection entre E et $E \setminus \{x\}$, donc d'après la première question, lorsque $E \setminus \{x\}$ est pair, E est aussi pair. En conclusion, on a montré que tout ensemble infini est pair.