DM 2 (devoir supplémentaire)
Enoncé

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.
Il n'est pas à rendre.
Un corrigé sera fourni la semaine prochaine.

On rappelle qu'une paire est un ensemble possédant exactement 2 éléments.
Par définition, un village est un ensemble fini non vide de personnes, tel que pour toute paire de personnes de ce village, exactement une personne espionne l'autre.
On convient que toute personne s'espionne elle-même.
Dans un village, une personne E est appelée un espion si, pour toute personne Y du village, il existe une personne X du village telle que E espionne X qui espionne Y (d'après la convention précédente, il est possible que X soit égal à E).

Pour dire que X espionne Y, on pourra se contenter d'écrire $X \longrightarrow Y$.
On prendra soin de définir précisément toute autre notation utilisée.

On attend des démonstrations précises et détaillées, présentées de manière manuscrite sur feuilles doubles A4.

Première partie

On fixe un village V.

1°) On rappelle que toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ possède un maximum. Montrer qu'il existe une personne de V qui espionne un nombre maximal de personnes.

2°) Montrer que dans tout village, il y a au moins un espion.

3°) Soit $X \in V$. Si X est espionné par une autre personne de V, montrer qu'il existe un espion différent de X qui espionne X.

4°) A quelle condition V possède-t-il un unique espion ?

5°) Est-il possible d'avoir exactement 2 espions ?

Seconde partie

Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leq k \leq n$, un village de n habitants possédant exactement k espions sera appelé un $V(n, k)$.
Le but de cette partie est de déterminer l'ensemble des couples (n, k) pour lesquels il existe un $V(n, k)$.

1°) S'il existe un $V(n, k)$, montrer que pour tout $m > n$, il existe un $V(m, k)$.

2°) On suppose que V est un $V(n, n)$. Montrer qu'il existe un $V(n + 2, n + 2)$.

3°) En partant d'un $V(1, 1)$ et en utilisant les 2 questions précédentes, quels couples (n, k) possédant un $V(n, k)$ obtient-on ?

4°) Montrer qu'il existe un $V(5, 4)$: on pourra le représenter par un graphe, en convenant que $X \longrightarrow Y$ si et seulement si X espionne Y.

5°) Montrer qu'il existe un $V(6, 6)$.

6°) Montrer qu'il n'existe pas de $V(4, 4)$.

7°) Conclure.