DM 4. Enoncé

Exercice 1 :

Une caractérisation des fonctions exponentielle et logarithme.

1°) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $f(1) = 1$ et telle que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{Q}$, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.
b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$.
Indication : On admettra qu'entre deux réels distincts, il existe toujours au moins un rationnel.

2°) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant
- $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0$,
- f est croissante,
- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x)f(y)$,
- $f(1) = e$.

Montrer que f est l'application exponentielle.

3°) Soit g une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
- g est une bijection croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$,
- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $g(xy) = g(x) + g(y)$,
- $g(e) = 1$.

Montrer que g est le logarithme néperien.

Exercice 2 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\alpha_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n e^t dt$.

1°) a) Montrer que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
b) Trouver une relation de récurrence liant α_n et α_{n-1}.
c) Déterminer un équivalent simple de α_n, c'est-à-dire une suite u_n aussi simple que possible et telle que $\dfrac{\alpha_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

2°) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\alpha_n}{n!}$.
b) En déduire un équivalent simple de $u_n = \sin(\pi\ e\ n!)$.

Problème

Partie I : Généralités.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)dt.$$

I_n est appelée l'intégrale de Wallis d'ordre n.

1°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$.

2°) Calculer I_0 et I_1.

3°) Pour tout entier n, exprimer I_{n+2} en fonction de I_n et de n.

4°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

5°) **a)** Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

b) Montrer que $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Partie II : Calcul de $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)dt$.

6°) **a)** Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$ démontrer l'inégalité $t \leq \dfrac{\pi}{2}\sin(t)$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq J_n \leq \dfrac{\pi^2}{4}(I_{2n} - I_{2n+2})$.

c) Montrer que $\dfrac{J_n}{I_{2n}}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

7°) **a)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{2n} = n(2n-1)J_{n-1} - 2n^2 J_n$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{J_{n-1}}{I_{2n-2}} - \dfrac{J_n}{I_{2n}} = \dfrac{1}{2n^2}$.

c) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$.

Partie III : Calcul de l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du$ et de $\Gamma(n+\frac{1}{2})$.

8°) a) Montrer que, pour tout $a \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+a) \leq a$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $u \in [0,\sqrt{n}]$,

$$\Big(1-\frac{u^2}{n}\Big)^n \leq e^{-u^2} \leq \Big(1+\frac{u^2}{n}\Big)^{-n}.$$

9°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $I_{2n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\Big(1-\frac{u^2}{n}\Big)^n du.$

10°) Effectuer le changement de variable $u = \sqrt{n}\tan t$ dans l'intégrale

$$\int_0^{\sqrt{n}}\Big(1+\frac{u^2}{n}\Big)^{-n}du.$$

11°) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $nI_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2}$.

b) En déduire que $\sqrt{n}I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

12°) On admet le théorème de la limite monotone : Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit g est une application croissante de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Alors il existe $L \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ tel que $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L$.
Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

13°) Pour $x \in \mathbb{R}$, lorsque c'est défini, on pose

$$\Gamma(x) = \lim_{A\to+\infty}\left[\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^A e^{-t}t^{x-1}dt\right].$$

a) Montrer que $\Gamma(\frac{1}{2})$ est défini et que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\Gamma(n+\frac{1}{2})$ est défini et que $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \dfrac{(2n)!\sqrt{\pi}}{2^{2n}n!}$.

Partie IV : Formule de Stirling

14°) Montrer la formule de Wallis :

$$\frac{\sqrt{n}}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

15°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln\Big(\dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n}\Big)$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1}-u_n = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{(n+\frac{1}{2})^2-x^2}dx$.

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_{n+1}-u_n \leq \dfrac{1}{12}\Big(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\Big)$.

16°) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\lambda \in \mathbb{R}$.

17°) On pose $\mu = e^{-\lambda}$.
A l'aide de la formule de Wallis (question 14), montrer que $\mu = \sqrt{2\pi}$.
En déduire la formule de Stirling :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n}.$$