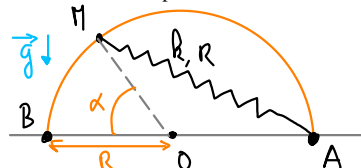


**Exercice 1 : Stabilité d'équilibres sur un cercle**

On étudie le mouvement d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  contraint de se déplacer sans frottement sur un demi-cercle de rayon  $R$  tracé dans un plan vertical dans le champ de pesanteur  $\vec{g}$  et dont un diamètre repose sur le sol.

Il est de plus lié à un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide égale au rayon  $R$  du cercle. L'autre extrémité du ressort est fixée en un point du cercle noté  $A$ .

On repère la position du point matériel par l'angle  $\alpha$  défini sur la figure.

**Données :**

- accélération de la pesanteur :  $9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  ;
- rayon du cercle  $R = 10 \text{ cm}$  ; masse du point matériel  $m = 50 \text{ g}$ .

1. (a) Établir l'expression de l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_{\text{pot}}$  du point matériel. On la mettra sous la forme :

$$\mathcal{E}_{\text{pot}} = mgf(\alpha) + kh(\alpha),$$

avec  $f$  et  $g$  des fonctions dont on précisera la dimension.

- (b) Tracer en les justifiant les allures des fonctions  $f$  et  $h$  sur l'intervalle  $[0; \pi]$ . En déduire graphiquement que si la masse  $m$  n'est pas trop importante, il existera une position d'équilibre stable dans l'intervalle  $[0; \pi]$ .
- (c) Discuter l'existence et la stabilité d'une ou plusieurs autres positions d'équilibre dans l'intervalle  $[0; \pi]$ .
2. On observe une position d'équilibre stable pour  $\alpha = \frac{3\pi}{4} \equiv \alpha_{eqs}$ .

- (a) Calculer la valeur de la raideur  $k$  pour  $m = 50 \text{ g}$  et  $R = 10 \text{ cm}$ .
- (b) Déterminer l'expression et calculer la valeur de la période des oscillations de faible amplitude autour de  $\alpha_{eqs}$ .

3. On étudie les oscillations d'amplitude quelconque. On utilise pour cela le code python accessible à l'adresse



(code 05af-374581 sur capytale).

On prend les valeurs de  $m$ ,  $R$  et  $k$  de la question précédente.

- (a) Résoudre numériquement l'équation différentielle d'évolution de  $\theta$  quand on lâche la masse sans vitesse initiale de  $\alpha = 3\pi/4 - \pi/10$ . Tracer les variations de  $\theta$  en fonction du temps. Vérifier la valeur de la période des petites oscillations en utilisant l'option `events` de la fonction `solve_ivp`.
- (b) Déterminer de même la période pour un mouvement dont l'extrémité est en  $A$  et tracer de nouveau  $\theta$  en fonction du temps. Illustrer ainsi l'anharmonicité des oscillations.
- (c) Déterminer de même la durée du mouvement pour aller de  $\alpha = \pi/4$  à  $A$  quand elle est lâchée sans vitesse initiale. On utilisera l'option `terminal` de l'option `events` pour interrompre l'intégration au premier passage en  $A$ . Tracer de nouveau  $\alpha$  en fonction du temps et déterminer avec `y_events` la vitesse lors du passage en  $A$ .
- (d) Superposer les trajectoires dans l'espace des phases correspondant aux 3 cas précédents.

4. On admet que quand il existe un équilibre stable en  $\alpha_{eqs}$ , il existe également un équilibre instable en  $\alpha \equiv \alpha_{eqi} \approx 33^\circ$ .

- (a) Le point matériel est initialement situé au point  $B$ . Quel sera son mouvement ultérieur s'il est initialement immobile ?
- (b) Quelle vitesse minimale  $v_{\min}$  doit-on lui communiquer quand il est en  $B$  pour qu'il puisse atteindre la position d'équilibre  $\alpha_{eqs}$  ? Quelle sera alors sa vitesse en  $\alpha_{eqs}$  s'il part de  $B$  avec une vitesse très légèrement supérieure à  $v_{\min}$  ? On donnera les expressions littérales et les valeurs numériques.

**Exercice 2 : Régulation du pH sanguin**

Le fonctionnement biologique humain nécessite que le pH du sang reste compris dans l'intervalle  $(7,36; 7,44)$ . Cette régulation est principalement assurée par le couple  $\text{H}_2\text{CO}_3/\text{HCO}_3^-$ .

**Données :**  $K_a(\text{H}_2\text{CO}_3/\text{HCO}_3^-) = 4,30 \cdot 10^{-7}$  ;  $K_a(\text{HCO}_3^-/\text{CO}_3^{2-}) = 5,60 \cdot 10^{-11}$  ;  $K_a(\text{HB}/\text{B}^-) = 1,38 \cdot 10^{-4}$ .

1. Déterminer les concentrations en  $\text{H}_2\text{CO}_3$  et  $\text{HCO}_3^-$  quand le pH du sang vaut 7,4 si la somme de leur concentrations vaut  $c = 2,8 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Dans toute la suite, le sang est initialement dans ces conditions.

2. Lors d'un effort physique important, il se forme de l'acide lactique  $\text{CH}_3\text{CHOHCOOH}$ , noté HB, qui passe dans le sang.

- (a) Calculer la constante d'équilibre de la réaction prépondérante entre l'acide lactique et les espèces contenues dans le sang. Conclure.
- (b) Quelle est la valeur maximale de la concentration en acide lactique qui peut être apportée dans le sang sans que le pH ne sorte de l'intervalle permis ?
- (c) Pour un apport de  $2,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  d'acide lactique, quelle est la nouvelle valeur du pH du sang. Commenter.

3. La respiration permet de maintenir constante la concentration en  $\text{H}_2\text{CO}_3$  en expirant du dioxyde de carbone dont  $\text{H}_2\text{CO}_3$  est la forme dissoute.

- (a) Quelle est dans ces conditions la nouvelle valeur du pH après l'apport de  $2,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  d'acide lactique ?
- (b) En déduire la variation de la concentration totale en  $\text{H}_2\text{CO}_3$  et  $\text{HCO}_3^-$ . Commenter.
- (c) Quelle quantité de  $\text{H}_2\text{CO}_3$  (en mol) un organisme humain aura-t-il dû expirer ? On n'hésitera pas à utiliser tout paramètre de culture générale nécessaire.

## Correction de l'exercice 1

Calculons tout d'abord :

$$pK_{a1} \equiv pK_a(H_2CO_3/HCO_3^-) = 6,37 \quad pK_{a2} \equiv pK_a(HCO_3^-/CO_3^{2-}) = 10,25 \quad pK_{aB} \equiv pK_a(HB/B^-) = 3,62.$$

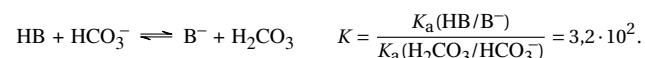
1. Le pH est proche de  $pK_a(H_2CO_3/HCO_3^-)$ , la concentration en  $CO_3^{2-}$  sera donc négligeable. On a alors :

$$\frac{[H_2CO_{3(aq)}]}{[HCO_3^-]} = 10^{pH - pK_{a1}} = 11$$

$$\text{et : } [H_2CO_{3(aq)}] + [HCO_3^-] = c \rightarrow [HCO_3^-] = \frac{c}{1 + [H_2CO_3]/[HCO_3^-]} = 2,56 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\text{et, de même : } [H_2CO_{3(aq)}] = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

2. (a) L'acide HB réagit avec la meilleure base présente,  $HCO_3^-$  selon :



La constante est assez élevée, la réaction sera totale.

- (b) Cette réaction va diminuer le pH en augmentant la proportion de  $H_2CO_3$  dans le couple  $H_2CO_3/HCO_3^-$ . Comme la concentration en  $H_3O^+$  ne varie que de  $10^{-7,36} - 2 \cdot 10^{-7,4} = 2,3 \cdot 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , négligeable devant  $[H_2CO_3]$  et  $[HCO_3^-]$ , on peut négliger l'effet de la réaction avec l'eau du couple  $H_2CO_3/HCO_3^-$  et appliquer :

$$pH = pK_a(H_2CO_3/HCO_3^-) + \log \frac{[HCO_3^-]}{[H_2CO_3]}.$$

Le sang deviendra trop acide pour  $pH = 7,36$ , et on aura alors :

$$[HCO_3^-] = \frac{c}{1 + [H_2CO_3]/[HCO_3^-]} = 2,54 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

En comparant à la valeur précédente, on constate qu'on n'a consommé que  $2 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  : on ne peut donc pas apporter plus de  $2 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  d'acide lactique.

- (c) On apporte cette fois 10 fois trop d'acide. On dresse le tableau d'avancement : On peut dresser le tableau

	HB	+	$HCO_3^-$	$\rightleftharpoons$	$B^-$	+	$H_2CO_3$
d'avancement en supposant que la réaction est totale.	$2 \cdot 10^{-3}$		$2,56 \cdot 10^{-2}$		0		$2,4 \cdot 10^{-3}$
	0		$2,36 \cdot 10^{-2}$		$2 \cdot 10^{-3}$		$4,4 \cdot 10^{-3}$

En négligeant de nouveau l'effet sur ces concentrations des réactions avec l'eau, on a :

$$pH = pK_{a2} + \log \frac{2,36 \cdot 10^{-2}}{4,4 \cdot 10^{-3}} = 7,09.$$

C'est bien légitime puisque de nouveau la variation de  $[H_3O^+]$  est de l'ordre de  $1 \cdot 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , négligeable devant les concentrations de  $H_2CO_{3(aq)}$  et  $HCO_3^-$ .

3. (a) Au lieu d'avoir  $[H_2CO_3] = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , elle reste constante à  $2,36 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . On a en revanche comme précédemment  $[HCO_3^-] = 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et de nouveau :

$$pH = pK_{a1} + \log \frac{2,36 \cdot 10^{-2}}{2,4 \cdot 10^{-3}} = 7,36,$$

à la limite acide du domaine acceptable.

- (b) On calcule alors :

$$[H_2CO_3] + [HCO_3^-] = 2,36 \cdot 10^{-2} + 2,4 \cdot 10^{-3} = 2,60 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

En comparant à la concentration initiale  $c = 2,8 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , on constate une diminution de  $\Delta c = 2,00 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

- (c) Pour un volume sanguin de  $V = 5 \text{ L}$ , on obtient donc une quantité  $n = \Delta c V = 1,00 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$ . Le volume molaire d'un gaz parfait étant de  $25 \text{ L}$  à  $\theta = 25^\circ \text{C}$ , cette quantité de  $H_2CO_{3(aq)}$  correspond à un volume de  $0,25 \text{ L}$  de  $CO_{2(g)}$  expiré.