DM 6

Problème 1

On considère un ensemble ordonné non vide $(E, \preceq)$.
On définit sur E la relation "ne pas être strictement comparable", notée T, de la façon suivante :

$$\forall x, y \in E,\ \ (x\ T\ y) \Longleftrightarrow (\neg(x \prec y) \land \neg(y \prec x)).$$

Pour tout $x \in E$, on note $x^- = \{t \in E / t \prec x\}$.
1) On suppose, seulement pour cette question, que l'ordre $\preceq$ est total sur E.
Que vaut alors la relation T ?

2)
2.a) Montrer que la relation T est réflexive et symétrique.
2.b) On suppose que $E = \mathbb{N}$ et que $\preceq$ est la relation de divisibilité.
Dans ce cas, la relation T est-elle une relation d'équivalence ?

3) Montrer que, pour tout $x, y \in E$, $(x^- = y^-) \Longrightarrow (x\ T\ y)$.

4) On suppose que, pour tout $x, y \in E$, $(x\ T\ y) \Longrightarrow (x^- = y^-)$.
Montrer que T est une relation d'équivalence.

5) Réciproquement, si l'on suppose que T est une relation d'équivalence, montrer que, pour tout $x, y \in E$, $(x\ T\ y) \Longrightarrow (x^- = y^-)$.

Problème 2

Soit Ω un ensemble.
Si A est une partie de Ω, on notera $\overline{A}$ le complémentaire de A dans Ω.
Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de parties de Ω (donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$).
On dira que $\mathcal{C}$ est un clan sur Ω si et seulement si $\mathcal{C}$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $\emptyset \in \mathcal{C}$,
2. pour tout $A \in \mathcal{C}$, $\overline{A} \in \mathcal{C}$,
3. pour tout $A, B \in \mathcal{C}$, $A \cup B \in \mathcal{C}$.

1) Soit $\mathcal{C}$ un clan sur Ω.
1.a) Démontrer que $\Omega \in \mathcal{C}$.
1.b) Démontrer que, pour tout $A, B \in \mathcal{C}$, $A \cap B \in \mathcal{C}$.

2) Quel est le plus petit clan sur Ω ?
Quel est le plus grand clan sur Ω ?

3) On admettra que l'intersection de deux intervalles de $\mathbb{R}$ est toujours un intervalle.
On note $\mathcal{I}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$ qui sont des réunions d'un nombre fini d'intervalles. Démontrer que $\mathcal{I}$ est un clan sur $\mathbb{R}$.

4) Soit $(E_1, \ldots, E_n)$ une partition de Ω.
On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties de Ω qui sont des réunions d'un certain nombre (éventuellement nul) de E_k :

$$\mathcal{C} = \left\{ \bigcup_{i \in I} E_i / I \subset \{1, \ldots, n\} \right\}.$$

Démontrer que $\mathcal{C}$ est un clan sur Ω, que l'on appellera le clan engendré par la partition $(E_1, \ldots, E_n)$.

5) Soit $\mathcal{C}$ un clan sur Ω.
5.a) On définit sur Ω la relation binaire R en convenant que

$$\forall x, y \in \Omega,\ \ (x\ R\ y) \Longleftrightarrow (\forall A \in \mathcal{C},\ \ (x \in A) \Longleftrightarrow (y \in A)).$$

Démontrer que R est une relation d'équivalence sur Ω.
Pour tout $x \in \Omega$, on notera $\hat{x}$ la classe d'équivalence de x pour la relation R.
5.b) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{C}$, $A = \bigcup_{x \in A} \hat{x}$.
5.c) Soit $x \in \Omega$. On note $\mathcal{C}_x = \{X \in \mathcal{C} / x \in X\}$.
Montrer que $\hat{x} = \bigcap_{X \in\ \mathcal{C}_x} X$.
5.d) On suppose que $\mathcal{C}$ est un ensemble fini.
Montrer que toutes les classes d'équivalence pour R sont des éléments de $\mathcal{C}$.
En déduire que $\mathcal{C}$ est un clan engendré par une partition finie de Ω.

Problème 3 : coefficients optimaux de Bezout

Algorithme d'Euclide

Dans toute cette partie, on fixe deux entiers naturels a et b supérieurs ou égaux à 2. On pose $a_0 = a$, $a_1 = b$ et, pour tout $i \geq 1$, tant que a_i est non nul, on note a_{i+1} le reste de la division euclidienne de a_{i-1} par a_i.

1°) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_{N+1} = 0$.

2°) Montrer que a_N est égal au PGCD de a et b, que l'on notera $a \wedge b$.

3°) Pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$,
on note q_i le quotient de la division euclidienne de a_{i-1} par a_i.
On pose $\alpha_{N-1} = 0$, $\beta_{N-1} = 1$ et,
pour tout $i \in \{1, \ldots, N-1\}$, on pose $\alpha_{i-1} = \beta_i$ et $\beta_{i-1} = \alpha_i - \beta_i q_i$.
Montrer que $\alpha_0 a + \beta_0 b = a \wedge b$.

Application

4°) En utilisant les questions précédentes, calculer le PGCD de 67 et de 35 ainsi que deux entiers relatifs α et β tels que $67\alpha + 35\beta = 1$.

5°) Un restaurant japonais propose la livraison de sushis. Pour ranger ses sushis, le restaurant dispose de deux types de boîtes : des boites permettant de ranger 35 sushis et des boites permettant de ranger 67 sushis.
Un client vient d'appeler et a commandé, pour un banquet, un certain nombre de sushis. Quand on range ces sushis uniquement dans des boites de 35, on s'aperçoit qu'après avoir rempli le plus de boîtes possibles, il reste 21 sushis. Quand on range ces sushis uniquement dans des boites de 67, on constate qu'il reste 4 sushis.
Sachant que ce client a commandé moins de 5000 sushis mais plus de 500, combien ce client a-t-il commandé de sushis ?

Optimalité

On fixe deux entiers naturels a et b supérieurs ou égaux à 2 **que l'on suppose premiers entre eux**.

6°) Montrer qu'il existe $u_0, v_0 \in \mathbb{Z}$ tels que $u_0 a + v_0 b = 1$, puis déterminer en fonction de u_0 et v_0 l'ensemble des couples $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $ua + vb = 1$.

7°) Montrer qu'il existe un unique couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$ua + vb = 1 \text{ avec } 0 < u < b \text{ et } -a < v < 0.$$

Montrer qu'il existe un unique couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$ua + vb = 1 \text{ avec } -b < u < 0 \text{ et } 0 < v < a.$$

8°) Montrer que le couple (α_0, β_0) défini en question 3 est l'un des deux couples (u, v) de la question 7. Dans quel cas s'agit-il du couple (u, v) pour lequel $u > 0$?

Un second algorithme de calcul des coefficients de Bezout

On fixe à nouveau deux entiers naturels a et b supérieurs ou égaux à 2 **que l'on suppose premiers entre eux**. On reprend les notations de la première partie.
On pose $(u_0, v_0) = (1, 0)$, $(u_1, v_1) = (0, 1)$ et, pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$, on pose $u_{i+1} = u_{i-1} - q_i u_i$ et $v_{i+1} = v_{i-1} - q_i v_i$.

9°) Montrer que, pour tout $i \in \{0, \ldots, N+1\}$, $u_i a + v_i b = a_i$.

10°) Montrer que, pour tout $i \in \{0, \ldots, N+1\}$, u_i et v_i sont premiers entre eux.

11°) La question 9 construit un couple $(u_N, v_N) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $u_N a + v_N b = a_N = 1$.
Avec les notations de la question 3, montrer que $(u_N, v_N) = (\alpha_0, \beta_0)$.