MPSI 2

Programme virtuel des colles de mathématiques.

Semaine (virtuelle) 29 : du lundi 20 juin au vendredi 24 juin

Calcul différentiel

Liste des questions de cours

1°) Donner la définition de la différentielle et montrer son unicité.

2°) Lorsque f est différentiable, exprimer en justifiant la différentielle de f en fonction de ses dérivées partielles.

3°) Montrer qu'une application bilinéaire est de classe C^1 et calculer sa différentielle.

4°) Enoncer et démontrer le théorème de composition d'applications différentiables.

5°) Calculer $\dfrac{\partial}{\partial t}\Big(f(t^3u^4, \sqrt{t^2+1+u^2})\Big)$.

6°) Montrer que la surface d'équation $z = f(x, y)$, avec f de classe C^1, admet en tout point un plan tangent dont on précisera une équation.

7°) Montrer, en précisant cet énoncé, que le gradient de f est orthogonal à ses surfaces de niveau.

1 Dérivées partielles

Dérivée partielle selon un vecteur, linéarité, dérivées partielles d'un produit.
Mauvais comportement de la notion de dérivée partielle vis à vis de la composition.

2 Différentielle

Différentiabilité, lien avec la dérivabilité.
Expression de la différentielle à l'aide des dérivées partielles.
Matrice jacobienne.

3 Cas des applications numériques

3.1 Le gradient

Définition lorsque E est euclidien.
L'opposé du gradient donne la direction de plus grande pente.

3.2 Recherche des extrema

Points critiques.
Si f est différentiable, les extrema de f sont des points critiques.

4 Applications continûment différentiables

f est une application de classe C^1 sur U si et seulement si df est définie et continue sur U.
f est de classe C^1 sur U si et seulement si ses dérivées partielles sont définies et continues sur U (admis).

Les applications linéaires et bilinéaires sont de classe C^1, calcul de leurs différentielles.

5 Composition

Une composée d'applications différentiables (resp : de classe C^1) est différentiable (resp : C^1).
différentielle d'une composée, règle de la chaîne, expression à l'aide du gradient.

Si U est convexe, f est constante si et seulement si f est de classe C^1 et $d(f) = 0$.

6 Un peu de géométrie différentielle

6.1 Vecteurs tangents

Définition d'un vecteur tangent en un point à une partie.

6.2 Plan tangent à une surface

Nappe paramétrée différentiable d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans un espace euclidien de dimension 3.
Plan tangent et normale en un point d'une nappe paramétrée.

Cas d'une surface d'équation $z = f(x, y)$.

6.3 Surfaces de niveau

Le gradient de f est orthogonal aux surfaces de niveau de f.