## I-Caractérisation des matrices symétriques définies positives

— **I-A.1.2 :**
◇ Supposons que $A$ est positive (resp : définie positive).
Soit $\lambda \in Sp(A)$ , alors $\exists X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $AX = \lambda X$ , donc ${}^tXAX = \lambda {}^tXX = \lambda ||X||^2$, or $||X||^2 > 0$, donc $\lambda = \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX}$.
Si $A$ est positive, alors $\lambda \geq 0$ et si $A$ est définie positive, on aura $\lambda > 0$.
Réciproquement, supposons que $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$ (respectivement : $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$) : $A$ étant symétrique réelle, elle est orthodiagonalisable d'après le théorème spectral, donc il existe $P \in O_n$ et $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ telles que $A = PD{}^tP = PDP^{-1}$, donc $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX = {}^t({}^tPX)D({}^tPX) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$ où on a posé ${}^tPX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. De plus $\{\lambda_i / i \in \{1, \ldots, n\}\} = Sp(D) = Sp(A)$.
Donc : si $Sp(A) \subset \mathbb{R}^+$, alors ${}^tXAX \geq 0$ et si $Sp(A) \subset \mathbb{R}^{*+}$, alors vu que $X$ est non nul et que ${}^tP$ est inversible, ${}^tPX$ est aussi non nul, donc il existe $j \in [[1, n]]$ tel que $y_j \neq 0$, et par suite ${}^tXAX \geq \lambda_j y_j^2 > 0$.
On a ainsi le résultat demandé.

— **I-B.1 :** Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ que nous supposons définie positive et soit $X_i \in M_{i,1}(\mathbb{R})$ non nul, alors en posant $X = \begin{pmatrix} X_i \\ O \end{pmatrix}$ où $O \in M_{n-i,1}(R)$, on aura par produit de matrices par blocs : ${}^tX_i A^{(i)} X_i = {}^tXAX > 0$ , donc $A^{(i)}$ est définie positive pour tout $i \in [[1, n]]$.

— On déduit donc que $det(A^{(i)}) = \displaystyle\prod_{k=1}^{i} \mu_k > 0$ où $\mu_1, ..., \mu_i$ sont les valeurs propres de $A^{(i)}$ qui sont strictement positifs.

— **I-B.2 :**
  — <u>Cas $n = 1$</u>
  Soit $A = (a)$ tel que $a > 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $ax^2 > 0$, donc $A$ est définie positive.
  — <u>Cas $n = 2$</u>
  Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ tel que $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$. Notons $\lambda$ et $\mu$ les valeurs propres de $A$.
  Ainsi $ac \geq b^2 \geq 0$, donc $a$ et $c$ ont le même signe, or $a > 0$, donc $\lambda + \mu = Tr(A) = a + c > 0$. De plus $\lambda\mu = ac - b^2 > 0$, donc $\lambda$ et $\mu$ ont le même signe, qui est donc celui de leur somme, donc $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ , ce qui entraine d'après $I - A.2$, que $A$ est définie positive.

— **I-B.3 :** Soit $A \in S_{n+1}(\mathbb{R})$ tel que pour tout $i \in [[1, n + 1]]$, $det(A^{(i)}) > 0$. On suppose que $A$ n'est pas définie positive. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ les valeurs propres de $A$, comptées avec multiplicités. Il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ telle que, pour tout $i \in [[1, n + 1]]$, $Ae_i = \lambda_i e_i$.
  — **(a) :** D'après $I - A.2$, il existe $j$ tel que $\lambda_j \leq 0$, mais si $\lambda_j = 0$ alors $det(A) = det(A^{(n+1)}) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse . Ainsi $\lambda_j < 0$.
  $det(A) > 0$ donc $\displaystyle\prod_{i \neq j} \lambda_i < 0$, donc il existe $k$ tel que $\lambda_k < 0$. Alors $e_j$ et $e_k$ sont deux vecteurs propres linéairement indépendants associés à $\lambda_j$ et $\lambda_k$ respectivement.
  — **(b) :** Soient $V_1, V_2 \in M_{n+1,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs propres orthonormaux associés aux deux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2$ strictement négatives de la question précédente. Notons $a, b$ les dernières composantes de $V_1$ et $V_2$ respectivement.
  Si $ab = 0$, alors l'un des deux vecteurs répond à la question, on obtient ${}^tV_1AV_1 = \lambda_1 \|V_1\|^2 = \lambda_1 < 0$ ou ${}^tV_2AV_2 = \lambda_2 \|V_2\|^2 = \lambda_2 < 0$.
  Si $ab \neq 0$. La dernière composante du vecteur $V = bV_1 - aV_2$ est nulle et
  on a alors ${}^tVAV =< V, AV >_{\mathbb{R}^{n+1}} =< bV_1 - aV_2, b\lambda_1 V_1 - a\lambda_2 V_2 >$, or $V_1$ et $V_2$ sont orthogonaux, donc ${}^tVAV = b^2\lambda_1 + a^2\lambda_2 < 0$.
  On conclut donc à l'existence d'un vecteur $X \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ de dernière composante nulle
  qui vérifie ${}^tXAX < 0$.
  — **(c) :** Posons $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ O \end{pmatrix} \in M_{n+1,1}(\mathbb{R})$ tel que $X_1 \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. On a ${}^tXAX = {}^tX_1 A^{(n)} X_1 < 0$, ce qui contredit le fait que $A^{(n)}$ est définie positive.

— **I-C :** On a clairement équivalence lorsque $n = 1$.
Lorsque $n \geq 2$, l'implication directe est toujours vraie mais la réciproque est fausse grâce à l'exemple

$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans lequel on a $det(A^{(i)}) = 0$ pour tout $i \in [[1, n]]$, mais $Sp(A) = \{0, -1\}$, donc $A$ n'est pas définie positive.

**II-Étude d'une suite de polynômes**

— **II-A :** On vérifie que $< \lambda P + Q, R >= \lambda < P, R > + < Q, R >$ et $< P, Q >=< Q, P >$, donc $< ., . >$ est bilinéaire et symétrique. De plus $< P, P >\geq 0$, et si $< P, P >= 0$, alors $t \mapsto P(t)^2$ est positive, continue et d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, donc pour tout $t \in [0, 1]$, $P(t) = 0$, donc $P$ est nul car c'est un polynôme possédant une infinité de racines.
Ainsi $< ., . >$ est bien un produit scalaire.

— **II-B :** On a $deg(P_n) = 2n$, donc $deg(P_n^{(n)}) = 2n - n = n$.
Au voisinage de $1$ on a $P_n \sim (X-1)^n$, donc $P_n = (X-1)^n + o((X-1)^n)$, ce qui entraine d'après la formule de Taylor-Young que $\dfrac{P_n^{(n)}(1)}{n!} = 1$, donc $P_n^{(n)}(1) = n!$.

— **II-C :** Intégrons par parties : $n! < Q, L_n >= \displaystyle\int_0^1 Q(t)P_n^{(n)}(t)dt = \left[Q(t)P_n^{n-1}(t)\right]_0^1 - \int_0^1 Q'(t)P_n^{(n-1)}(t)dt$,
or $0$ et $1$ sont racines de $P_n$ de multiplicités $n$,
donc $P_n^{n-1}(0) = P_n^{n-1}(1) = 0$, donc $n! < Q, L_n >= -\displaystyle\int_0^1 Q'(t)P_n^{(n-1)}(t)dt$.
En effectuant des intégrations par parties successives, on montre par récurrence que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $n! < Q, L_n >= (-1)^k \displaystyle\int_0^1 Q^{(k)}(t)P_n^{(n-k)}(t)dt$.
En particulier, avec $k = n$, on obtient $n! < Q, L_n >= (-1)^n \displaystyle\int_0^1 Q^{(n)}(t)P_n(t)dt$ mais lorsque $deg(Q) \leq n-1$, on a $Q^{(n)} = 0$, donc $< Q, L_n >= 0$.

— **II-D.1 :** Une succession d'intégrations par parties donne

$$I_n = \int_0^1 x^n(x-1)^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(x-1)^n\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{n}{n+1}x^{n+1}(x-1)^{n-1}dx$$

$$= -\frac{n}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}(x-1)^{n-1}dx = \dots = (-1)^k \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}\int_0^1 x^{n+k}(x-1)^{n-k}dx,$$

soit pour $k = n$ : $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n(x-1)^n dx = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}\int_0^1 x^{2n}dx$, donc $I_n = \dfrac{(-1)^n(n!)^2}{(2n+1)!}$.

— **II-D.2 :** Le début du calcul du II.C dans lequel on remplace $Q$ par $L_n = \dfrac{1}{n!}P_n^{(n)}$ donne :
$< L_n, L_n >= \dfrac{(-1)^n}{(n!)^2}\displaystyle\int_0^1 P_n^{(2n)}P_n$, or $P_n^{(2n)} = (2n)!$,
donc $< L_n, L_n >= \dfrac{(-1)^n(2n)!}{(n!)^2}I_n = \dfrac{(-1)^n(2n)!}{(n!)^2}\dfrac{(-1)^n(n!)^2}{(2n+1)!} = \dfrac{1}{2n+1}$.

— **II-E :**
⋄ On a $\forall n > m$ , $L_m \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc d'après la question $II-C$, $< L_n, L_m >= 0$.
De plus d'après la question précédente $\|L_n\| = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$. Ce qui entraine que si on pose $K_n = \dfrac{L_n}{\|L_n\|} = \sqrt{2n+1}L_n$, alors la famille $(K_n)$ répond à la question, sachant que le coefficient dominant de $K_n$ est $\sqrt{2n+1}\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} > 0$.

⋄ Supposons que $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une seconde famille de polynômes vérifiant $i)$ et $ii)$.
$Q_0$ est un polynôme constant de norme 1 et strictement positif, tout comme $K_0$, donc $Q_0 = K_0$.
Fixons $N \in \mathbb{N}^*$. La famille $(Q_n)_{0\leq n\leq N-1}$ est une famille orthonormée incluse dans $\mathbb{R}_{N-1}[X]$ de cardinal $N$, donc c'est une base de $\mathbb{R}_{N-1}[X]$. Or $Q_N$ est orthogonal à $Q_0, \dots, Q_{N-1}$, donc $Q_N \in \mathbb{R}_{N-1}[X]^\perp \cap \mathbb{R}_N[X]$ et de même, $K_N \in \mathbb{R}_{N-1}[X]^\perp \cap \mathbb{R}_N[X]$, or $\mathbb{R}_{N-1}[X]^\perp \cap \mathbb{R}_N[X]$ est l'orthogonal de $\mathbb{R}_{N-1}[X]$ en considérant $\mathbb{R}_N[X]$ comme l'espace global, donc $\dim(\mathbb{R}_{N-1}[X]^\perp \cap \mathbb{R}_N[X]) = \dim(\mathbb{R}_N[X]) - \dim(\mathbb{R}_{N-1}[X]) = 1$. Ainsi $Q_N$ et $K_N$ sont tous deux sur une même droite vectorielle, donc il existe $\alpha$ tel que $Q_N = \alpha K_N$. Mais $Q_N$ et $K_N$ sont de norme 1, donc $|\alpha| = 1$. De plus les coefficients dominants de $K_N$ et $Q_N$ sont strictement positifs, donc $\alpha = 1$. Ainsi, $Q_N = P_N$ et l'on a prouvé l'unicité.

— **II-F :** $L_0 = 1$ , $L_1 = 2X - 1$, $L_2 = 6X^2 - 6X + 1$ ce qui donne $K_0 = 1$ , $K_1 = \sqrt{3}(2X-1)$ et $K_3 = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)$.

**III-Matrices de Hilbert.**

— **III-A.Étude de quelques propriétés de $H_n$.**

— **III-A.1 :** $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$, $H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$, $H_3^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$

— **III-A.2 :** Soit la fraction définie par $F(X) = \alpha \dfrac{X(X-1)...(X-n+1)}{(X+1)(X+2)...(X+n+1)} = \dfrac{a_1}{X+1} + \dfrac{a_2}{X+2} + ... + \dfrac{a_{n+1}}{X+n+1}$, avec pour tout $k \in [[1, n+1]]$, $a_k$ le résidu associé au pôle simple $-k$ donné par $a_k = \alpha \dfrac{-k(-k-1)...(-k-n+1)}{\prod\limits_{\substack{j\neq k \\ 1\leq j\leq n+1}} (-k+j)} = (-1)^{n-k+1}\alpha \dfrac{(n-1+k)!}{((k-1)!)^2(n+1-k)!}$.

On choisit $\alpha$ tel que $a_{n+1} = \alpha\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} = 1$ , c'est à dire $\alpha = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

L'opération élémentaire sur les colonnes de $\Delta_{n+1}$ donnée par $C_{n+1} \longleftarrow C_{n+1} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k C_k$ amène à

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} & & & F(0) \\ & \triangle_n & & F(1) \\ & & & \vdots \\ * & \dots & * & F(n) \end{vmatrix}, \text{ or } F(0) = F(1) = ... = F(n-1) = 0,$$

donc $\triangle_{n+1} = F(n)\triangle_n = \alpha\dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}\triangle_n = \dfrac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}\triangle_n$.

— **III-A.3 :** La relation de récurrence précédente conduit à $\triangle_n = \dfrac{((n-1)!(n-2)!...1!)^4}{(2n-1)!(2n-2)!...3!2!}\triangle_1 = \dfrac{c_n^4}{c_{2n}}$.

— **III-A.4 :**

— $det(H_n) = \triangle_n = \dfrac{c_n^4}{c_{2n}} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

— La relation de récurrence $det(H_{n+1}^{-1}) = \dfrac{(2n)!(2n+1)!}{(n!)^4} det(H_n^{-1}) = (2n+1)\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}^2 det(H_n^{-1})$ nous invite à utiliser une récurrence simple.
Pour $n = 1$, $det(H_1^{-1}) = 1 \in \mathbb{N}$ et si on suppose que $det(H_n) \in \mathbb{N}$, alors :
$det(H_{n+1}^{-1}) = (2n+1)\begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}^2 det(H_n^{-1}) \in \mathbb{N}$ , ce qui établit la récurrence.

— **III-A.5 :** Pour tout $k \in [[1, n]]$, $det(H_n^{(k)}) = det(H_k) = \triangle_k > 0$, et $H_n$ est symétrique, donc d'après la question $I - B$, la matrice $H_n$ est définie positive, de plus elle est diagonalisable, donc ses valeurs propres sont au nombre de $n$ et $Sp(H_n) \subset \mathbb{R}^{*+}$.

— **III-B : Approximations au sens des moindres carrés.**

— **III-B.1 :** $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous espace vectoriel de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ de dimension finie, donc le théorème de la projection orthogonale assure que pour tout $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, il existe $p(f) = \Pi_n \in \mathbb{R}_n[X]$ la projection orthogonale de $f$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\min\limits_{Q\in\mathbb{R}[X]}(\|Q - f\|) = d(f, \mathbb{R}[X]) = \|\Pi_n - f\|$.

— **III-B.2 :** $\mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$, donc $\min\limits_{Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]}(\|Q - f\|) \geq \min\limits_{Q\in\mathbb{R}_n[X]}(\|Q - f\|)$, c'est à dire $\|\Pi_{n-1} - f\| \geq \|\Pi_n - f\|$ ce qui traduit la décroissance de la suite $(\|\Pi_n - f\|)_n$.

— **III-B.3 :**

⋄ Posons $e_k(X) = X^{k-1}$, alors $(e_1, ..., e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et on a $< e_i, e_j >= \displaystyle\int_0^1 e_i e_j = \int_0^1 t^{i+j-2}dt = \frac{1}{i+j-1} = (H_n)_{i,j}$ , donc la matrice $H_n$ est la matrice du produit scalaire $< ., . >$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

⋄ Soit $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$. Ici, les lignes et colonnes de $H_n$ sont numérotées de $0$ à $n-1$.
$[H_n]_{i,j} =< X^i, X^j >$, or par définition de la matrice de passage $P^{-1}$ de la base $(K_0, \dots, K_{n-1})$ vers la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $X^i = \sum\limits_{k=0}^{n-1}[P^{-1}]_{k,i}K_k$, or la base $(K_0, \dots, K_{n-1})$ est orthonormée, donc $[H_n]_{i,j} = \sum\limits_{k=0}^{n-1}[P^{-1}]_{k,i}[P^{-1}]_{k,j} = [{}^tP^{-1}P^{-1}]_{i,j}$, ce qui montre que $H_n = {}^tP^{-1}P^{-1}$.

— **III-B.4** Posons $\Pi_n = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j X^j = \sum\limits_{j=1}^{n+1} a_{j-1}X^{j-1}$.

On sait que $f - \Pi_n \in (\mathbb{R}_n[X])^{\perp}$, donc $\forall k \in [[1, n+1]] < f - \Pi_n, X^{k-1} >= 0$, ce qui donne

$< f, X^{k-1} >= \sum_{j=1}^{n+1} a_{j-1} < X^{j-1}, X^{k-1} >= \sum_{j=1}^{n+1} a_{j-1}(H_{n+1})_{k,j}$, ce qui s'écrit $H_{n+1}\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < f,1 > \\ \vdots \\ < f, X^n > \end{pmatrix}$ et par suite $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = H_{n+1}^{-1}\begin{pmatrix} < f,1 > \\ \vdots \\ < f, X^n > \end{pmatrix}$.

— **III-B.5 :** On calcule $< f, 1 >= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [Atan(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$, $< f, X >= \int_0^1 \frac{tdt}{1+t^2} = [\frac{1}{2}\ln(1+t^2)]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2)$ et $< f, X^2 >= \int_0^1 \frac{t^2dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{(1+t^2)-1}{1+t^2}dt = 1 - \frac{\pi}{4}$, donc $\Pi_2 = [-\frac{75\pi}{2} - 90(-2+\ln 2)]X^2 + 12[-15+3\pi+8\ln 2]X + 30 - \frac{21\pi}{4} - 18\ln 2.$

**IV Propriétés des coefficients de $H_n^{-1}$**

— **IV-A : Somme des coefficients de $H_n^{-1}$**

— **IV-A.1 :** $s_1 = 1$, $s_2 = 4$, $s_3 = 9$, on conjecture que $s_n = n^2$.

— **IV-A.2.a** Le système en question est un système de $n$ équations à $n$ inconnues dont la matrice est $H_n$ qui est inversible, donc c'est un système de Cramer qui admet une solution unique.

— **IV-A.2.b** La solution unique du système est donnée par $\begin{pmatrix} a_0^{(n)} \\ \vdots \\ a_{n-1}^{(n)} \end{pmatrix} = H_n^{(-1)}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\forall i \in [[0, n-1]]$

$a_i^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} h_{i+1,j}^{(-1,n)}$, ce qui donne en sommant sur les $i$, $\sum_{i=0}^{n-1} a_i^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} a_{i-1}^{(n)} = \sum_{1\leq i,j\leq n} h_{i,j}^{(-1,n)} = s_n$.

— **IV-A.3** puisque $Q = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p X^p$, on aura $< S_n, Q >= \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p < S_n, X^p >$, or en exploitant pour tout $p \in [[0, n-1]]$, la $(p+1)$ème ligne du système de la question $IV - A.2 : (a)$, on obtient $< S_n, X^p >= \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n)} < X^p, X^k >= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k^{(n)}}{p+k+1} = 1$, ce qui entraine que $< S_n, Q >= \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p = Q(1)$.

— **IV-A.4** En prenant $Q = S_n$ dans la relation précédente, on obtient $(S_n, S_n) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p^{(n)} = s_n$, puisque $(K_p)_{0\leq p\leq n-1}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ on a $(S_n, S_n) = \|S_n\|^2 = \sum_{p=0}^{n-1} < S_n, K_p >^2$, et toujours d'après la relation précédente avec $Q = K_p$, on aura $< S_n, K_p >= K_p(1)$, ce qui donne finalement $s_n = \sum_{p=0}^{n-1}(K_p(1))^2$.

— **IV-A.5 :** On a $K_p = \sqrt{2p+1}L_p$ avec $L_p(1) = 1$ on obtient $K_p(1) = \sqrt{2p+1}$.

— **IV-A.6 :** $s_n = \sum_{p=0}^{n-1}(K_p(1))^2 = \sum_{p=0}^{n-1}(2p+1) = 2\sum_{p=1}^{n-1} p + n = (n-1)n + n = n^2$.

— **IV-B :Les coefficients de $H_n^{-1}$ sont des entiers.**

— **IV-B.1 :** Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} 2p \\ p \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2p-1 \\ p \end{pmatrix} \in 2\mathbb{N}$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [[1, n]]$ :

$\begin{pmatrix} n+p \\ p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{(n+p)!}{(p!)^2(n-p)!} = \frac{(2p)!}{(p!)^2}\frac{(n+p)!}{(2p)!(n-p)!} = \begin{pmatrix} 2p \\ p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n+p \\ 2p \end{pmatrix} \in 2\mathbb{N}$.

— **IV-B.2 :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $K_n = \sqrt{2n+1}L_n$ avec $L_n = \frac{1}{n!}(P_n^{(n)})$,

or $(P_n)^{(n)} = (X^n(X-1)^n)^{(n)} = \left(\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}(-1)^{n-k}X^{n+k}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}(-1)^{n-k}\frac{(n+k)!}{k!}X^k$,

ce qui donne $L_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}X^k$, donc le coefficient constant de $L_n$ est égale à $(-1)^n$ et tous les autres sont pairs grâce à la question précédente.

— **IV-B.3 :**

— $K_j = \sqrt{2j+1}\sum_{k=0}^{j}(-1)^{j-k}\begin{pmatrix} j+k \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix}X^k$, donc en notant $P = (p_{i,j})$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vers $(K_0, \ldots, K_{n-1})$,

pour tout $i, j \in [[1, n]]$ $p_{i,j} = \sqrt{2j-1}(-1)^{j-i} \begin{pmatrix} j+i-2 \\ i-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j-1 \\ i-1 \end{pmatrix}$ si $i \leq j$ et $p_{i,j} = 0$ si $i > j$.
Or, d'après III.B.3, $H_n^{-1} = P^t P$, donc pour tout $i \in [[1, n]]$

$$h_{i,i}^{(-1,n)} = \sum_{j=i}^{n} p_{i,j}^2 = \sum_{j=i}^{n} (2j-1) \begin{pmatrix} j+i-2 \\ i-1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} j-1 \\ i-1 \end{pmatrix}^2.$$

En particulier pour $i = 1$ et $i = n$, on obtient $h_{1,1}^{(-1,n)} = \sum_{j=1}^{n} (2j-1) = n^2$ et $h_{n,n}^{(-1,n)} = (2n-1) \begin{pmatrix} 2n-2 \\ n-1 \end{pmatrix}^2$.

— Pour tous $i, j \in [[1, n]]$ $h_{i,j}^{(-1,n)} = \sum_{k=max(i,j)}^{n} p_{i,k} p_{j,k} =$

$$= (-1)^{i+j} \sum_{k=max(i,j)}^{n} (2k-1) \begin{pmatrix} k+i-2 \\ i-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k-1 \\ i-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k+j-2 \\ j-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k-1 \\ j-1 \end{pmatrix}$$

Ce qui montre que les $h_{i,j}^{(-1,n)}$ sont des entiers comme produit d'entiers.

— Soient $i, j \in [[2, n]]$ , donc pour tout $k \geq max(i, j) \geq 2$, $i-1, j-1, k-1 \in \mathbb{N}^*$, et par suite d'après $(IV - B.1)$, $\begin{pmatrix} k+i-2 \\ i-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k-1 \\ i-1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} k+j-2 \\ j-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k-1 \\ j-1 \end{pmatrix}$ sont pairs, donc leur produit est un multiple de $4$, ce qui entraine que $h_{i,j}^{(-1,n)}$ qui est somme de ces produits est aussi un multiple de $4$.

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *