DM 8 :
Étude du cours pendant les vacances de la Toussaint

Pendant les vacances, je vous demande de faire une lecture détaillée d'une petite portion du cours : il s'agit du chapitre "Applications et dénombrement", de la page 8 à la page 16 (incluse). Au fur et à mesure de votre lecture, veuillez répondre aux questions qui suivent et les rédiger proprement sous le format d'un "devoir maison". C'est à remettre numériquement avant vendredi 5 novembre à 23h45.

Injectivité et surjectivité

1°) On dit que f est injective si et seulement si $\forall x, y \in E,\ [f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y]$. Démontrer que f est injective si et seulement si tout élément de F possède au plus un antécédent.

2°) Lorsque f est une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, interprétez graphiquement l'injectivité de f.

3°) Soit f une application d'un ensemble ordonné $(E, \leq_E)$ dans un ensemble ordonné $(F, \leq_F)$. Si $\leq_E$ est total et si f est strictement monotone, montrer que f est injective.

4°) Montrer que l'application $(x, y) \longmapsto (x + y, x - y)$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même et préciser sa bijection réciproque.

5°) Soit f une application de E dans F. On définit sur E la relation binaire R par : $xRy \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$. Montrer que R est une relation d'équivalence puis que montrer en détail que l'application $\begin{array}{rccc} \overline{f}: & E/R & \longrightarrow & f(E) \\ & \overline{x} & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est une bijection.

6°) Soit f une application de E dans F et g une application de F dans G.
Si $g \circ f$ est injective, montrer que f est injective.
Si $g \circ f$ est surjective, montrer que g est surjectif.

7°) Soit f une application de E dans F.
Lorsque f est surjective, montrer que, pour toute partie B de F, $f(f^{-1}(B)) = B$.
Lorsque f est injective, montrer que, pour toute partie A de E, $f^{-1}(f(A)) = A$.

Lois internes

8°) Si A est un ensemble, montrer que $(\mathcal{P}(A), \cup)$ est un monoïde commutatif dont l'élément neutre est $\emptyset$. Qu'en est-il de $(\mathcal{P}(A), \cap)$?

9°) Si A est un ensemble, dont les éléments sont appelés des lettres, on note A^* l'ensemble des mots écrits avec l'alphabet A. Montrer que A^* possède une structure de monoïde que l'on précisera.

10°) Soit $(E, \times)$ un monoïde et $x \in E$.
Lorsque x est inversible à gauche et à droite, montrer qu'il existe un unique $y \in E$ tel que $xy = yx = 1_E$.

11°) Soit $(E, \times)$ un monoïde et $x, y \in E$.
Si x et y sont inversibles dans E, montrer que xy est aussi inversible.

12°) Montrer que $(\mathbb{Q}^*, \times)$ est un groupe commutatif mais que $(\mathbb{Z}^*, \times)$ n'est pas un groupe.

Cardinal d'un ensemble

13°) Soit E un ensemble. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{N}_n$ est en bijection avec E, montrer que n est unique. On dit alors que n est le cardinal de E. Il est noté $\mathrm{card}(E)$ ou bien $\#E$, ou encore $|E|$. En cas d'inexistence d'un tel entier n, on dit que E est infini.

14°) Soit A un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et soit B un ensemble quelconque. Montrer que B est fini de cardinal n si et seulement si il existe une bijection de A sur B.

15°) Soit A un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Soit B une partie de A. Montrer que B est un ensemble fini et que $|B| \leq |A|$, avec égalité si et seulement si $B = A$.

16°) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels et $l \in \mathbb{R}$. Montrer que x_n ne tend pas vers l si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\{n \in \mathbb{N}/|x_n - l| > \varepsilon\}$ est infini.