MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 21 : du lundi 4 avril au vendredi 8.

Dérivation, convexité

Liste des questions de cours

1°) Dérivée d'un produit de la forme $B(f,g)$: énoncé et démonstration.

2°) Dérivée d'une composée : énoncé et démonstration.

3°) Montrer qu'une composée de deux applications de classe C^n est de classe C^n.

4°) Enoncer et démontrer le lemme de Rolle généralisé.

5°) Enoncer et démontrer le théorème de la limite de la dérivée.
Que se passe-t-il lorsque $f'(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in I \setminus \{a\}}}{\longrightarrow} +\infty$?

6°) CNS pour que f^{-1} soit dérivable en $f(t)$: énoncé et démonstration.

7°) CNS pour que f soit un C^n-difféomorphisme de I dans $f(I)$: énoncé et démonstration.

8°) Représentez graphiquement le comportement d'une suite (x_n) vérifiant $x_{n+1} = f(x_n)$.

9°) Lorsque $f(\ell) = \ell$ avec $|f'(\ell)| < 1$, montrer que ℓ est un point d'équilibre localement stable.

10°) Enoncer et démontrer la propriété d'associativité du barycentre.

11°) Donner la définition d'une fonction convexe ainsi que son interprétation géométrique.

12°) Montrer qu'une fonction est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe. En déduire l'inégalité de Jensen.

13°) Si f est dérivable, montrer que f est convexe si et seulement si f' est croissante.

Dérivation

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. I est un intervalle d'intérieur non vide et $a \in I$.
Les applications considérées sont définies sur I et sont à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E.

1 Dérivabilité

Dérivée en un point, dérivées à gauche et à droite.
f est dérivable en a si et seulement s'il existe $l \in E$ tel que $f(t) = f(a) + (t-a)l + o(t-a)$.

dérivable $\Longrightarrow$ continue.

2 Opérations sur les fonctions dérivables

Dérivation d'une application à valeurs dans un produit cartésien d'espaces vectoriels normés.
Dérivation d'une application à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, en fonction de ses applications coordonnées.
Cas particulier : $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en a ssi $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Re}(f)$ sont dérivables en a.

Linéarité de la dérivation,
Dérivée de $u \circ f$, où u est linéaire continue et f dérivable.

Définition d'une application bilinéaire,
dérivée de $B(f, g)$, où B est bilinéaire continue et où f et g sont dérivables.

Dérivation d'une composée.

Dérivée de l'inverse lorsque $f(I) \subset \mathbb{K}$.
Dérivée logarithmique.

3 Dérivées d'ordre supérieur

Applications D^n et C^n.

Formule de Leibniz pour la dérivée d'ordre n de $B(f, g)$.

Composée d'applications D^n ou C^n.

4 L'égalité des accroissements finis

Dans ce paragraphe, toutes les applications utilisées sont définies sur I et sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Les extremums locaux sur $\overset{\circ}{I}$ de $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sont des points critiques de f. Réciproque faussse.

lemme de Rolle
Généralisation : Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ avec $a < b$. Si f est dérivable sur $]a, b[$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to b} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème des accroissements finis.

Théorème de la limite de la dérivée, généralisation aux dérivées d'ordre supérieur.

5 Formules de Taylor

L'égalité de Taylor-Lagrange (hors programme) pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Inégalité des accroissements finis pour une fonction C^1 à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Formule de Taylor avec reste intégral.
Inégalite de Taylor-Lagrange.

Primitivation d'un développement limité.
Formule de Taylor-Young.

6 Monotonie et dérivabilité

Lien entre sens de variation et signe de la dérivée.
Condition de stricte monotonie.

Dérivée de f^{-1}.
CNS pour que f soit un C^n-difféomorphisme de I dans $f(I)$.

7 Suites récurrentes d'ordre 1

Étude de suites (x_n) vérifiant $x_{n+1} = f(x_n)$, lorsque x_0 est dans un intervalle I tel que $f : I \longrightarrow I$ est continue et monotone.

Représentation graphique de (x_n) .

Limites et points fixes de f.

Lorsque $f|_I$ est croissante, (x_n) est monotone, toujours à gauche ou toujours à droite d'un point fixe.

Lorsque $f|_I$ est décroissante. les deux suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) sont monotones et de sens contraires.

Lorsque $f(\ell) = \ell$ et $|f'(\ell)| < 1$ (resp : $|f'(\ell)| > 1$), ℓ est un point d'équilibre localement stable (resp : instable).

Convexité

Remarque. Les deux premiers paragraphes n'ont presque pas fait l'objet d'exercices en TD.

8 Sous-espaces affines

Repère affine.

Dimension d'un sous-espace affine.
Sous-espaces affines parallèles.

L'ensemble des solutions d'une équation linéaire compatible est un sous-espace affine.

Intersection de sous-espaces affines.

9 Barycentres et convexité

Notation. On fixe un espace affine $\mathcal{E}$, p points $A_1, \ldots, A_p$ de $\mathcal{E}$ et p scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ dans $\mathbb{K}$.

Fonction vectorielle de Leibniz : $\forall M \in \mathcal{E}$, $\varphi(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{A_i M}$.

Barycentre des $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$ lorsque $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \neq 0$.

Homogénéïté et associativité du barycentre.

Parties convexes.
Les sous-espaces affines sont des convexes.
Une intersection de parties convexes est convexe.
Enveloppe convexe.

10 Fonctions convexes

10.1 Définition

Notation. On fixe une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Convexité et concavité, stricte convexité.
Interprétation géométrique.

Sommes de fonctions convexes.

Points d'inflexion.

L'épigraphe de f, égal à $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in I \text{ et } y \geq f(x)\}$, est convexe si et seulement si f est convexe.

Inégalité de Jensen.

la moyenne géométrique $\prod_{i=1}^{n} x_i^{\frac{1}{n}}$ est inférieure à la moyenne arithmétique $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

10.2 Croissance des pentes

Convexité et croissance des pentes : en posant $p_x(y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y} = p_y(x)$, f est convexe sur I si et seulement si pour tout $a, b, c \in I$ avec $a < b < c$, $p_a(b) \leq p_a(c)$ (resp : $p_b(a) \leq p_b(c)$, ou encore $p_c(a) \leq p_c(b)$).

Hors programme : Si f est convexe sur I, elle est dérivable à droite et à gauche, donc elle est continue, en tout point de $\overset{\circ}{I}$.

10.3 Fonctions convexes dérivables

Si f est dérivable, f est convexe si et seulement si f' est croissante, ou bien si et seulement si son graphe est au dessus de ses tangentes.

Prévisions pour la semaine suivante :

Polynômes (début).