(je n'ai pas eu le temps d'avancer le DM plus loin)

DM 19

Partie 1 : Non complétude de $\mathbb{Q}$

1) A : $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall q \geq N, \ |u_p - u_q| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow$ ——————————— $|u_p| \leq \varepsilon + |u_q|$

$\Rightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \quad |u_p| \leq \varepsilon + |u_N|$

or $\forall p \leq N, \ u_p \leq \max\limits_{q \leq N} u_q$. Donc

$A \Rightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, |u_p| \leq \max(\varepsilon + |u_N|, \max\limits_{q \leq N} u_q)$

Donc (u_n) est bornée

2) $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{Q}$-ev. Donc montrons que l'ensemble des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} = S$ est un sev de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.

$0 \in S$ car $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*, \forall N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall q \geq N, |u_p - u_q| = 0 \leq \varepsilon$. Donc $S \neq \emptyset$

Soit $(u_n), (v_n) \in S$, $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$. Il existe $N', N'' \in \mathbb{N}$ tq pour tout $p, q \geq N'$, $|u_p - u_q| \leq \frac{\varepsilon}{1+|\alpha|}$

et pour tout $p, q \geq N''$, $|v_p - v_q| \leq \frac{\varepsilon}{1+|\alpha|}$.

Donc pour tout $p, q \geq \max(N', N'') = N$:

$|\alpha u_p + v_p - \alpha u_q - v_q| \leq |\alpha||u_p - u_q| + |v_p - v_q| \leq (1 + |\alpha|)\frac{\varepsilon}{1+|\alpha|} = \varepsilon$

Donc $(\alpha u_n + v_n) \in S$ ← $\alpha(u_n) + (v_n) = (\alpha u_n + v_n)$

Donc S est un sev de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$

3) Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$. Il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tq $\varepsilon = \frac{p}{q}$. Soit $n \geq q$.

$|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{q} \leq \frac{p}{q} = \varepsilon$. donc $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

4) Soit $\varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tq pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Soit $p, q \geq N$. $|u_p - u_q| = |(u_p - \ell) - (u_q - \ell)| \leq |u_p - \ell| + |u_q - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Donc (u_n) est une suite de Cauchy

Partie 2 : Définition du corps des réels

91

16) $I = \ker f$ avec f qui à une suite convergente associe sa limite
Donc I sev de S. Donc $I \neq \emptyset$ et I stable par l'addition
Soit $(u_n), (v_n) \in S$. D'après 1), il existe $M \in \mathbb{Q}_+$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$.
Donc $|u_n v_n| \leq M|v_n|$ or $M|v_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{RF} 0$ donc $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
donc $u_n v_n \in I$

11) a) Réflexivité : $\forall a \in A$, $a - a = 0 \in \mathcal{J}$ car $\mathcal{J}$ est un ev donc $0 \in \mathcal{J}$.
Symétrie : Soient $a, b \in A$ tq aRb. donc $b - a \in \mathcal{J}$ donc $a - b \in \mathcal{J}$ car
$\mathcal{J}$ est un ev donc il contient le symétrique de chaque élément.
Transitivité : Soit $a, b, c \in A$ tq aRb et bRc, donc $b - a \in \mathcal{J}$ et $c - b \in \mathcal{J}$
$c - a = (c - b) + (b - a) \in \mathcal{J}$ car $\mathcal{J}$ stable pour addition donc aRc.
Donc R est une relation d'équivalence.
$\rightarrow b \in \bar{a} \Leftrightarrow b - a \in \mathcal{J} \Leftrightarrow b \in a + \mathcal{J}$ donc $\bar{a} = a + \mathcal{J}$.

12) comme cours, juste avec $(A/_{\mathcal{J}}, +, \times)$. À recopier.

Partie III - L'ordre naturel sur $\mathbb{R}$

15)

16) Réflexivité : Soit $x \in \mathbb{R}$. $x \leq x$ car $x = x$.

Antisymétrie : Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tq $x \leq y$ et $y \leq x$, $x \neq y$.

Donc $x - y$, $y - x$ strict. positifs. Il existe $u_n \in S$ tq $x - y = \overline{(u_n)}$
donc $y - x = \overline{(-u_n)}$. Donc il existe $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1 \in \mathbb{Q}_+^*$ tq $\forall n \geq n_0, u_n \geq a_0$
et $\forall n \geq n_1$, $-u_n \geq a_1$. Donc $u_{\max(n_0, n_1)} > 0$ et $-u_{\max(n_0,n_1)} < 0$ $\lightning$
car $\leq$ est une relation d'ordre de $\mathbb{Q}$.

Donc $x = y$.

Donc $\leq_{\mathbb{R}}$ est antisymétrique.

pourquoi

→ Transitivité : Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$ tq $x \leq y$ et $y \leq z$, $x \neq y$ et $y \neq z$.

Donc $y - x > 0$ et $z - y > 0$. Il existe $(x_n), (y_n), (z_n) \in S$ tq
$x = \overline{(x_n)}$, $y = \overline{(y_n)}$, $z = \overline{(z_n)}$.

Il existe $a, b \in \mathbb{Q}_+^*$, $p, q \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq p$, $y_n - x_n \geq a$ et $\forall n \geq q$, $z_n - y_n \geq b$

Donc $\forall n \geq \max(p, q)$, $z_n - x_n = (z_n - y_n) + (y_n - x_n) \geq a + b$ donc $x - z > 0$
donc $x < z$.

Donc $\leq_{\mathbb{R}}$ est transitive

17) Soit $x, y \in \mathbb{Q}$ tq $x < y$. Soit $a = y - x \in \mathbb{Q}_+^*$ et $m = 0$. Donc
$\forall n \geq m$, $y - x \geq a$, donc $\forall n \geq m$ $j(y - x) = j(y) - j(x) = \overline{(y - x)} > 0$
donc $j(y) > j(x)$ donc j est strictement croissante.