Feuille d'exercices 21.
Fractions rationnelles et calculs d'intégrales

Exercice 21.1 : (niveau 1)
Décomposer $\frac{X^2}{X^2+i}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 21.2 : (niveau 1)
Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $F \in \mathbb{K}(X)$ telle que $F^2 = X$.

Exercice 21.3 : (niveau 1)

1°) Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma$.

2°) Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(4n^2-1)}$.

Exercice 21.4 : (niveau 1)
Soit P un polynôme à coefficients complexes de degré $n \geq 2$ et dont les racines, notées $x_1, \ldots, x_n$, sont supposées simples.

1°) Donner la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P(X)}$.

2°) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{P'(x_i)} = 0$.

Exercice 21.5 : (niveau 1)
Soit P un polynôme de degré n admettant n racines distinctes notées $x_1, \ldots, x_n$.

1°) Décomposer la fraction rationnelle $\frac{P'}{P}$ en éléments simples.

2°) Calculer $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x-x_i)^2}$ et $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n} \frac{1}{(x-x_i)(x-x_j)}$ en fonction de P et de ses dérivées.

Exercice 21.6 : (niveau 2)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant. Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $F \in \mathbb{R}(X)$ telle que $F\Big(\frac{X^2}{1+X}\Big) = P(X)$.

Exercice 21.7 : (niveau 2)
Soit F une fraction rationnelle sur $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique nulle.

1°) Démontrer que si α est une racine de F de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$, alors α est une racine de F' de multiplicité $m-1$.

2°) Démontrer que si β est un pôle de F de multiplicité $p \in \mathbb{N}^*$, alors β est un pôle de F' de multiplicité $p+1$.

Exercice 21.8 : (niveau 2)
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Quelle est la décomposition en éléments simples de
$F(X) = \dfrac{P'(X)}{P(X)}$?
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P.

Exercice 21.9 : (niveau 2)
Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction $\dfrac{X^{2n}}{(X^2+1)^n}$.

Exercice 21.10 : (niveau 2)
Calcul de $\displaystyle\int \frac{dt}{t^7-1}$.

Exercice 21.11 : (niveau 2)
Soit N un entier supérieur ou égal à 2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{3n^2-1}{(n-1)^2n^2(n+1)^2}$.

Exercice 21.12 : (niveau 2)
Calcul de $\displaystyle\int \frac{t^4+t^2+1}{(t^2+t+1)^3}dt$.

Exercice 21.13 : (niveau 2)
Calcul de $\displaystyle\int \frac{\sin t \; dt}{\cos^2 t + \tan^2 t}$.

Exercice 21.14 : (niveau 2)
Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $Q \neq 0$ et $P \wedge Q = 1$. Trouver une CNS sur la parité de P et de Q pour que la fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ soit paire. Même question pour F impaire.

Exercice 21.15 : (niveau 2)
n désigne un entier strictement positif. On note U_n l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité dans $\mathbb{C}$.

1°) Si $C \in \mathbb{C}[X]$ avec $deg(C) < n$, donner la décomposition en éléments simples de $\dfrac{C(X)}{X^n-1}$.

2°) Trouver deux polynômes (aussi simples que possible) A et B de $\mathbb{C}[X]$ tels que $\displaystyle\sum_{\omega \in U_n} \frac{\omega}{(X-\omega)} = \frac{A}{B}$.

3°) Trouver deux polynômes (aussi simples que possible) A et B de $\mathbb{C}[X]$ tels que $\displaystyle\sum_{\omega\in U_n} \frac{\omega}{(X-\omega)^2} = \frac{A}{B}$.

Exercice 21.16 : (niveau 3)
Décomposer $\dfrac{3}{(X^3-1)^2}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, à l'aide d'un développement limité au voisinage de 1.

Exercice 21.17 : (niveau 3)
Soit P un polynôme non constant à coefficients complexes.

1°) Donner la décomposition de $\dfrac{P'}{P}$ à l'aide des racines de P et de leurs multiplicités.

2°) En déduire le théorème de Lucas : les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P, c'est-à-dire que les racines de P' sont des barycentres à coefficients positifs des racines de P.

Exercice 21.18 : (niveau 3)
Décomposer $\dfrac{1}{(X-1)(X^n-1)}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 21.19 : (niveau 3)
Soit $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ avec $Q \neq 0$. On pose $F = \dfrac{P}{Q}$ et on suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F(n)$ est un nombre premier. Montrer que F est constante.

Exercices supplémentaires :

Exercice 21.20 : (niveau 1)
Décomposer $\dfrac{4}{(X^2+1)^2}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 21.21 : (niveau 1)
Calculer $S = \displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{4n-3}{n(n^2-4)}$.

Exercice 21.22 : (niveau 2)
Soit $n, m \in \mathbb{N}$. Décomposer $\dfrac{X^m}{(X-1)^n}$ en éléments simples.

Exercice 21.23 : (niveau 2)
Calcul de $\displaystyle\int \frac{dx}{1+th^2x}$.

Exercice 21.24 : (niveau 2)
Calculer $\displaystyle\int \frac{\cos(2x)}{\sin x + \sin(3x)}dx$.

Exercice 21.25 : (niveau 2)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n$ une famille de n complexes 2 à 2 distincts.
On pose $P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$. Calculer $\sum_{i=1}^{n} \frac{P''(x_i)}{P'(x_i)}$.

Exercice 21.26 : (niveau 2)
Calcul de $\int \frac{3(\cos x)^2 - 1}{2\cos x \sin x} dx$.

Exercice 21.27 : (niveau 2)
Calcul de $\int \frac{dx}{\cos x + \cos 3x}$.

Exercice 21.28 : (niveau 3)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a \neq b$, et soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$: Décomposez en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ la fraction $f(x) = \frac{1}{(x-a)^n (x-b)^p}$.

Exercice 21.29 : (niveau 3)
On note $z_1, \ldots, z_4$ les racines du polynôme $X^4 - X^3 + 1$. Calculer $S = \sum_{k=1}^{4} \frac{z_k^3 + 2}{(z_k^2 - 1)^2}$.

Exercice 21.30 : (niveau 3)
On pose $\mathbb{K}_0(X) = \{F \in \mathbb{K}(X) \ / \ \deg(F) \leq 0\}$.

1°) Montrer que $\mathbb{K}_0(X)$ est un anneau.

2°) Quels sont les idéaux de $\mathbb{K}_0(X)$?

Exercice 21.31 : (niveau 3)
Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle.

1°) Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Montrer que, lorsque $\deg(F) \neq 0$, $\deg(F') = \deg(F) - 1$.
Lorsque $\deg(F) = 0$, montrer que $\deg(F') \leq -2$.
Déterminer $\{\deg(F') \ / \ F \in \mathbb{C}(X) \text{ avec } \deg(F) = 0\}$.

2°) Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle sur $\mathbb{K}(X)$ telle que $F' = \frac{1}{X}$.