DM 32 : corrigé
CCP 2002 MP

I. Étude d'un exemple

1. $\diamond$ *Première méthode : avec les connaissances dont vous disposiez.*
   Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+cb & ac+cd \\ ab+bd & bc+d^2 \end{pmatrix}$, donc
   $A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = \begin{pmatrix} a^2+cb-(a+d)a+ad-bc & ac+cd-(a+d)c \\ ab+bd-(a+d)b & bc+d^2-(a+d)d+(ad-bc) \end{pmatrix}$.
   Ainsi, on a bien $A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$.
   $\diamond$ *Seconde méthode : avec les connaissances de seconde année.*
   Le polynôme caractéristique de A vaut :
   $$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} a-X & b \\ c & d-X \end{vmatrix} = X^2 - (a+d)X + (ad-bc) = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)$$
   or d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$ donc $A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$.
2. Par définition, $\mathbb{A}$ est le sous-espace vectoriel engendré par I_2 et A donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. De plus, A n'est pas une matrice scalaire donc (I_2, A) est une famille libre et par conséquent une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{A}$.
   Enfin, $\mathbb{A}$ est stable pour le produit car si $(a, b, a', b') \in \mathbb{R}^4$,
   $$(1)\ :\ (aI_2 + bA)(a'I_2 + b'A) = (aa' - bb'\det(A))I_2 + (ab' + a'b + bb'\mathrm{Tr}(A))A \in \mathbb{A}$$
   et $\mathbb{A}$ contient I_2, donc $\mathbb{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de dimension 2.
3. Soit $B = aI_2 + bA \in \mathbb{A}$. D'après la relation (1) ci-dessus,
   $(C)\ :\ B^2 = -I_2 \Longleftrightarrow -I_2 = (a^2 - b^2\det(A))I_2 + (2ab + b^2\mathrm{Tr}(A))A$, or (I_2, A) est libre, donc $(C) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2ab + b^2\mathrm{Tr}A = 0 \\ a^2 - b^2\det A = -1 \end{array} \right.$. Si $b = 0$, $(C) \Longrightarrow a^2 = -1$, ce qui est faux dans $\mathbb{R}$, donc on peut supposer que $b \neq 0$. Alors $(C) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = -\frac{b}{2}\mathrm{Tr}A \\ b^2\det A - a^2 = 1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = -\frac{b}{2}\mathrm{Tr}A \\ b^2(\det A - \frac{1}{4}(\mathrm{Tr}A)^2) = 1 \end{array} \right.$.
   Si $(\mathrm{Tr}(A))^2 \geq 4\det(A)$, alors $(C) \Longrightarrow 1 \leq 0$, donc il n'existe aucune matrice $B \in \mathbb{A}$ telle que $B^2 = -I_2$.
   Réciproquement, si $(\mathrm{Tr}(A))^2 < 4\det(A)$, alors $(C) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} b = \pm\dfrac{2}{\sqrt{4\det A - (\mathrm{Tr}A)^2}} \\ a = -\frac{b}{2}\mathrm{Tr}A \end{array} \right.$, donc il existe des matrices $B \in \mathbb{A}$ telles que $B^2 = -I_2$.

4. $\diamond$ On suppose que $B \in \mathbb{A}$ est telle que $B^2 = -I_2$. Alors B n'est pas une matrice scalaire (car si $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda I_2)^2 = \lambda^2 I_2 \neq -I_2$) donc (I_2, B) est une famille libre de $\mathbb{A}$, or $\dim(\mathbb{A}) = 2$, donc (I_2, B) est une base de $\mathbb{A}$.

   $\diamond$ Définissons alors f comme l'unique application linéaire entre les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathbb{A}$ et $\mathbb{C}$ telle que $f(I_2) = 1$ et $f(B) = i$. Alors f est un isomorphisme d'espaces vectoriels car elle envoie une base de $\mathbb{A}$ sur une base de $\mathbb{C}$. De plus $f(I_2) = 1$. Enfin, si $M = xI_2 + yB$ et $M' = x'I_2 + y'B$ sont deux éléments de $\mathbb{A}$, $MM' = xx'I_2 + (xy' + x'y)B + yy'B^2 = (xx' - yy')I_2 + (xy' + x'y)B$ donc $f(MM') = (xx' - yy')f(I_2) + (xy' + x'y)f(B) = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$ et
   $f(M)f(M') = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$.
   On a donc $f(MM') = f(M)f(M')$ ce qui achève de montrer que f est un isomorphisme d'algèbres entre $\mathbb{A}$ et $\mathbb{C}$.

5. D'après le calcul fait en question 3, en posant $M = aI_2 + bA$,
   $M^2 = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a^2 - b^2\text{det}A = 0 \\ 2ab + b^2\text{Tr}A = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow b = a = 0 \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{c} a = -\frac{b}{2}\text{Tr}A \\ b^2\left(\frac{1}{4}(\text{Tr}A)^2 - \text{det}A\right) = 0 \end{array} \right.$,
   donc, compte-tenu de l'hypothèse $(\text{Tr}A)^2 = 4\text{det}A$, $M^2 = 0 \Longleftrightarrow a = -\frac{b}{2}\text{Tr}A$.
   En conclusion, les solutions de l'équation $M^2 = 0$ dans $\mathbb{A}$ sont les matrices de la forme $b\left(\left(-\frac{\text{Tr}A}{2}\right) I_2 + A\right)$ avec $b \in \mathbb{R}$.
   Il existe donc dans $\mathbb{A}$ des matrices non nulles de carré nul, donc non inversibles, par conséquent $\mathbb{A}$ n'est pas un corps.

6. Par hypothèse, B est une matrice non scalaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et il existe $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On en déduit que A n'est pas non plus scalaire et (I_2, A) est une base de $\mathbb{A}$. Définissons g comme l'unique application linéaire de $\mathbb{A}$ dans $\mathbb{B}$ telle que $g(I_2) = I_2$ et $g(A) = B$. L'application g est alors un isomorphisme car elle est linéaire et elle envoie une base de $\mathbb{A}$ sur une base de $\mathbb{B}$. De plus, on a $\forall\, M = aI_2 + bA \in \mathbb{A}$,
   $g(M) = aI_2 + bB = aI_2 + bP^{-1}AP = P^{-1}(aI_2 + bA)P = P^{-1}MP$. On en déduit que pour tout $(M, M') \in \mathbb{A}^2$, $g(M)g(M') = P^{-1}MPP^{-1}M'P = P^{-1}MM'P = g(MM')$ ce qui achève de montrer que g est un isomorphisme d'algèbres. Par suite, $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont deux algèbres isomorphes.

7. $\diamond$ Supposons que $(\text{Tr}A)^2 > 4\text{det}A$.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda \in Sp(A) \Longleftrightarrow A - \lambda I_2 \notin GL_2(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \det(A - \lambda I_2) = 0$,
   or $\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = \chi_A(\lambda)$. On a ainsi montré que les valeurs propres de A sont exactement les racines du polynôme χ_A (ce qui est un résultat au programme de seconde année).
   $\chi_A(X) = X^2 - \text{Tr}(A)X + \det(A)$, or $(\text{Tr}A)^2 > 4\text{det}A$, donc le discriminant du polynôme caractéristique de A est strictement positif. Ainsi χ_A possède deux racines réelles distinctes *i.e.* A possède deux valeurs propres réelles distinctes ce qui implique sa diagonalisabilité dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, car la somme directe des deux sous-espaces propres associés est de dimension au moins 2, donc est égale à $\mathbb{R}^2$.

   $\diamond$ Ainsi, il existe une matrice B diagonale qui est semblable à A. D'après la question précédente, $\mathbb{A}$ est isomorphe à $\mathbb{B} = \text{vect}\{I_2, B\}$. Or $\mathbb{B}$ est égal à l'espace $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées diagonales d'ordre 2 : en effet $\mathbb{B} \subset \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ et $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{B}) = 2 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{D}_2(\mathbb{R}))$ (car $\left(E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$). Ainsi, $\mathbb{A}$ est isomorphe à l'algèbre des matrices diagonales.
   On en déduit que $\mathbb{A}$ n'est pas un corps car si h désigne un isomorphisme de $\mathbb{A}$ sur $\mathbb{B} = \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$, $h^{-1}(E_{11})$ et $h^{-1}(E_{22})$ sont deux éléments non nuls de $\mathbb{A}$ dont le produit est nul donc ce sont des éléments non nuls et non inversibles dans $\mathbb{A}$.

II. Quelques résultats généraux

1. Soit $x, y \in \mathbb{D}$ et $x \in \mathbb{R}$.
   $\varphi_a(x+\alpha y) = a(x+\alpha y) = ax + a(\alpha y)$ d'après la distributivité de la multiplication par rapport au produit, donc $\varphi_a(x+\alpha y) = ax + \alpha(ay) = \varphi_a(x) + \alpha\varphi_a(y)$.
   Ainsi φ_a est un endomorphisme de $\mathbb{D}$.
2. $\diamond$ Soit $a, b \in \mathbb{D}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{D}$, $\varphi_{a+\alpha b}(x) = (a+\alpha b)x = \varphi_a(x) + \alpha\varphi_b(x)$, donc $\varphi_{a+\alpha b} = \varphi_a + \alpha\varphi_b$, puis en passant aux matrices, $\Psi(a+\alpha b) = \Psi(a) + \alpha\Psi(b)$.
   De plus, $\varphi_{ab}(x) = a(bx) = \varphi_a \circ \varphi_b(x)$, donc en passant aux matrices, $\Psi(ab) = \Psi(a)\Psi(b)$.
   Enfin, $\Psi(1_{\mathbb{D}}) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{D}}) = I_n$.
   Ainsi Ψ est un morphisme d'algèbres.
   $\diamond$ Soi $a \in \mathbb{D}$ tel que $\Psi(a) = 0 = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_a)$.
   Alors $\varphi_a = 0$, puis $a = \varphi_a(1_{\mathbb{D}}) = 0$. Ainsi φ_a est injective.
   $\diamond$ $\Psi(\mathbb{D})$ est alors une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en tant qu'image d'un morphisme d'algèbres. On peut vérifier plus généralement que l'image par un morphisme d'algèbres $\varphi : A \longrightarrow B$ d'une sous-algèbre C de A est une sous-algèbre de B :
   $1_B = \varphi(1_A) \in \varphi(C)$ car $1_A \in C$.
   Si $\varphi(a), \varphi(b) \in \varphi(C)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) \in \varphi(C)$ car $ab \in C$
   et $\varphi(a) + \alpha\varphi(b) = \varphi(a+\alpha b) \in \varphi(C)$ car $a + \alpha b \in C$.
   $\diamond$ Par restriction, $\Psi|^{\Psi(\mathbb{D})}$ est un isomorphisme de $\mathbb{D}$ dans $\Psi(\mathbb{D})$, donc $\mathbb{D}$ est isomorphe à $\Psi(\mathbb{D})$ qui est bien une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Si $\mathbb{D} = \mathbb{C}$ et $z = a + ib$, $\varphi_z(1) = z = a + ib$ et $\varphi_z(i) = (a+ib)i = -b + ia$ donc si $\mathcal{B} = (1, i)$,
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$
4. (a) $A - \lambda I_n$ appartient à $\mathbb{A}$ (car $\mathbb{A}$ est stable par combinaisons linéaires et contient A et I_n), $A - \lambda I_n$ est non inversible (car λ est valeur propre de A) et n'est pas la matrice nulle (car A n'est pas scalaire), donc $\mathbb{A}$ n'est pas un corps.
   (b) Supposons qu'il existe dans $\mathbb{A}$ une matrice A trigonalisable (ou diagonalisable) non scalaire. Il existe donc une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\mathrm{mat}(A, e)$ est triangulaire supérieure (ici A est identifié avec l'endomorphisme canoniquement associé à A). Alors Ae_1 est colinéaire à e_1, donc c'est un vecteur propre de A. D'après la question précédente, $\mathbb{A}$ n'est pas un corps.
   (c) Soit $A \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$. D'après la question II.1, $\Phi_A : X \mapsto AX$ est un endomorphisme de $\mathbb{A}$. De plus, $\mathbb{A}$ étant intègre et A étant non nulle, $\mathrm{Ker}\,\Phi_A = \{0\}$ donc Φ_A est injectif. Comme Φ_A est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, on en déduit que Φ_A est un isomorphisme. En particulier, Φ_A est surjective donc il existe $B \in \mathbb{A}$ telle que $\Phi_A(B) = I_n$. La matrice A possède donc un inverse à droite, ce qui d'après le cours est suffisant pour assurer que A est inversible, d'inverse B appartenant à $\mathbb{A}$. Ainsi, tout élément non nul de $\mathbb{A}$ possède un inverse dans $\mathbb{A}$ donc $\mathbb{A}$ est un corps.

III. L'algèbre des quaternions

1. Comme $A^2 = -I_n$, on a $(\mathrm{det}A)^2 = (-1)^n \in \mathbb{R}^+$ donc n est pair.

2. Remarquons que $(AB)^2 = A(BA)B = A(-AB)B = -A^2B^2 = -I_n$, $BAB = -AB^2 = A$ et $ABA = -A^2B = B$. On en déduit que si $M = tI_n + xA + yB + zAB$ et $M' = t'I_n + x'A + y'B + z'AB$ sont deux éléments de $\mathbb{H}$, alors

$$MM' = (tt'-xx'-yy'-zz')I_n+(tx+xt'+yz'-zy')A+(ty'-xz'+yt'+zx')B+(tz'+xy'-yx'+zt')AB,$$

ce qui montre que $\mathbb{H}$ est stable pour le produit ; De plus $\mathbb{H}$ est un sous-espace vectoriel contenant I_n, donc $\mathbb{H}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. D'après 2.,

$$(tI_n + xA + yB + zAB)(tI_n - xA - yB - zAB) = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)I_n$$

4. (a) Si $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ sont tels que $tI_n + xA + yB + zAB = 0$ alors

$$(t^2 + x^2 + y^2 + z^2)I_n = (tI_n + xA + yB + zAB)(tI_n - xA - yB - zAB) = 0$$

donc $t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$ ce qui, vu que t, x, y, z sont réels impose $t = x = y = z = 0$. La famille (I_n, A, B, AB) est donc libre.

(b) Soit M est un élément non nul de $\mathbb{H}$. Il existe $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ tel que $M = tI_n + xA + yB + zAB$. D'après la question III.3, $(tI_n + xA + yB + zAB) \times \dfrac{1}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}(tI_n - xA - yB - zAB) = I_n$, donc M est inversible d'inverse $\dfrac{1}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}(tI_n - xA - yB - zAB) \in \mathbb{H}$.

Ceci prouve que $\mathbb{H}$ est un corps.

5. (a) On a $J^2 = -I_2$ et d'après les règles de calcul des produits de matrices par blocs,

$$A^2 = \begin{pmatrix} J^2 & 0 \\ 0 & J^2 \end{pmatrix} = -I_4,\ B^2 = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} = -I_4$$

$$AB + BA = \begin{pmatrix} 0 & -J \\ -J & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & J \\ J & 0 \end{pmatrix} = 0$$

6. ${}^t(AB) = {}^tB\ {}^tA = (-B)(-A) = BA = -AB$, donc A, B et $C = AB$ sont antisymétriques,. Ainsi, lorsque $M = tI_n+xA+yB+zC \in \mathbb{H}$, ${}^tM = tI_n-xA-yB-zC \in \mathbb{H}$ et d'après la question III.3, $M\ {}^tM = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)I_4$. On en déduit donc que $(\det M)^2 = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^4$. Ainsi, lorsque $M \neq 0$, d'après la question III.4.b,

$$M^{-1} = \frac{1}{\sqrt{|\det {}^tM|}}{}^tM.$$

IV. Les automorphismes de l'algèbre des quaternions

1. Si $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ et $M = tI_n + xA + yB + zC$, $M + {}^tM = 2tI_n$ donc $M = -{}^tM$ si et seulement si $t = 0$ ou encore $M \in \operatorname{vect}\{A, B, C\}$. Or (A, B, C) est une famille libre en tant que sous-famille de la famille libre (I_4, A, B, C). Donc l'ensemble des quaternions purs est le sous-espace vectoriel de dimension 3 admettant pour base (A, B, C).

$\mathbb{L}$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathbb{H}$ car, par exemple $A \times A = -I_2 \notin \mathbb{L}$ alors que $A \in \mathbb{L}$.

2. Soit $M = xA + yB + zC$ et $N = x'A + y'B + z'C$ deux éléments de $\mathbb{L}$. Comme (A, B, C) est une base orthonormée pour le produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, on a $(M|N) = xx' + yy' + zz'$. Par ailleurs, d'après III.3.,

$$\begin{aligned} MN + NM &= (-xx' - yy' - zz')I_4 + (yz' - zy')A + (-xz' + zx')B + (xy' - yx')C \\ &\quad +(-x'x - y'y - z'z)I_4 + (y'z - z'y)A + (-x'z + z'x)B + (x'y - y'x)C \\ &= -2(xx' + yy' + zz')I_4 \end{aligned}$$

On a donc $\frac{1}{2}(MN + NM) = -(M|N)I_4$.

3. $\diamond$ Si $M \in \mathbb{L}$, d'après la relation précédente, $M^2 = \lambda I_4$ avec $\lambda = -\|M\|^2 \in \mathbb{R}^-$.
$\diamond$ Réciproquement, supposons que $M \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{L}$.
Alors il existe $t \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{L}$ tels que $M = tI_4 + N$.
Alors $M^2 = t^2I_4 + 2tN + N^2 = (t^2 - \|N\|^2)I_4 + 2tN$.
Si $N \neq 0$ alors $N \notin \mathbb{R}I_4$ (sinon $N^2 \in \mathbb{R}_+^*I_4$, ce qui est faux d'après le sens direct), donc $M^2 \notin \mathbb{R}I_4$.
Si $N = 0$, alors $M^2 = t^2I_4 \notin \mathbb{R}_-I_4$.
On a ainsi montré que, pour tout $M \in \mathbb{H}$, $M \in \mathbb{L} \iff M^2 \in \mathbb{R}_-I_4$.

4. Soit $M \in \mathbb{L}$: on a $M^2 = -\|M\|^2I_4$ donc $\varphi(M)^2 = \varphi(M^2) = -\|M\|^2\varphi(I_4) = -\|M\|^2I_4$.
On en déduit d'après la question précédente que $\varphi(M) \in \mathbb{L}$. On peut alors appliquer la question précédente à $\varphi(M)$: $\varphi(M)^2 = -\|\varphi(M)\|^2I_4$ donc $-\|\varphi(M)\|^2 = -\|M\|^2$ soit $\|\varphi(M)\| = \|M\|$. Donc φ transforme tout quaternion pur en un quaternion pur de même norme.
L'endomorphisme induit par φ sur $\mathbb{L}$ conserve la norme donc c'est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{L}$.

5. On suppose que M et N sont deux quaternions purs de même norme.
   (a) Supposons que M et N sont colinéaires.
   Si $M \neq 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $N = \lambda M$, donc si l'on note (x, y, z) les coordonnées de M dans la base (A, B, C), $\|M\|^2 = \|N\|^2 = \lambda^2(x^2 + y^2 + z^2) = \lambda^2\|M\|^2$ et $\|M\| \neq 0$. Ainsi, $\lambda^2 = 1$, puis $\lambda = \pm 1$. Ceci démontre que $N = \pm M$, et c'est encore vrai lorsque $M = 0$.
   $\diamond$ Si $M = N$ la matrice $P = I_4$ vérifie $P \in \mathbb{H}$, $P \neq 0$ et $M = P^{-1}NP$.

   $\diamond$ Si $N = -M$ la condition $M = P^{-1}NP$ équivaut à $PM + MP = 0$. Dans ces conditions, d'après la formule de la question 2, il suffit de prendre pour P une matrice non nulle de $\mathbb{L}$ orthogonale à M dans $\mathbb{L}$, s'il existe une telle matrice P.
   Si l'on note (a, b, c) et (x, y, z) les coordonnées de M et de P dans la base (A, B, C), cela revient à montrer qu'il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tel que $ax + by + cz = 0$. C'est évident lorsque $M = 0$ et sinon cela revient à montrer que le plan de $\mathbb{L}$ d'équation $ax + by + cz = 0$ contient un vecteur non nul, ce qui est connu.
   (b) M et N sont deux quaternions purs non colinéaires de même norme, donc
   $M(MN) - (MN)N = M^2N - MN^2 = (-\|M\|^2I_4)N - M(-\|N\|^2I_4) = \|M\|^2(M - N)$.
   On a donc $M(MN - \|M\|^2I_4) = (MN - \|M\|^2I_4)N$. Dans ces conditions, si on pose $P = MN - \|M\|^2I_4$, on a $MP = PN$ avec $P \in \mathbb{H}$. De plus, $P \neq 0$ car sinon on aurait $MN = \|M\|^2I_4 = -M^2$ ou encore $M(N + M) = 0$ donc $M + N = 0$ (M est inversible car élément non nul de $\mathbb{H}$) ce qui est contradictoire avec le fait que la famille (M, N) soit libre. Comme P est un élément non nul de $\mathbb{H}$, P est inversible et $M = PNP^{-1}$.

6. $\diamond$ Telle qu'elle est formulée cette question est incorrecte ; en effet, sous la seule condition d'être non nulle et de vérifier $MP = PN$ une matrice $P = \alpha I_4 + Q$ avec $Q \in \mathbb{L}$ n'est pas

nécessairement telle que Q soit orthogonale à M et N. À titre de contre-exemple, prenons $M = A$, $N = B$, $Q = A+B$ et $P = Q = 0 \times I_4 + Q$. M et N sont bien de même norme. De plus $PM = (A+B)A = -I_4 + BA = B(A+B) = NP$, $P \neq 0$, mais $(Q|M) = (A+B|A) = 1 \neq 0$.

$\diamond$ Par contre, pour la matrice P mise en évidence dans chacun des 3 cas envisagés, on a bien la propriété souhaitée. En effet, dans le cas où $M = N$, on a choisi $P = I_4$ soit $Q = 0$ qui est orthogonale à $M = N$, si $M = -N$, on a choisi $P = 0I_4 + Q$ avec Q orthogonale à M et N.

Enfin, lorsque M et N sont linéairement indépendantes, posons $P = MN - \|M\|^2 I_4 = \alpha I_4 + Q$ avec $Q \in \mathbb{L}$. Alors ${}^tQ = -Q$, donc $Q = \frac{1}{2}(Q - {}^tQ) = \frac{1}{2}(MN - NM)$,

car ${}^t(MN) = {}^tN\, {}^tM = (-N)(-M) = NM$. D'après la formule de la question 2,

$-4(Q|M)I_4 = (MN - NM)M + M(MN - NM) = -NM^2 + M^2N = 0$ car $M^2 = -\|M\|^2 I_4$.

Ainsi Q est orthogonale à M et de même, on montre que Q est orthogonale à N.

7. $\diamond$ Remarquons tout d'abord que pour tout $P \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$, l'application φ_P de $\mathbb{H}$ dans lui-même qui à M associe $P^{-1}MP$ est un isomorphisme de l'algèbre $\mathbb{H}$. En effet, φ_P est bien une application de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$ puisque $\mathbb{H}$ est un corps, φ_P est linéaire par bilinéarité du produit dans $\mathbb{H}$, $\varphi_P(I_4) = P^{-1}I_4P = I_4$ et $\varphi_P(M)\varphi_P(N) = (P^{-1}MP)(P^{-1}NP) = P^{-1}MNP = \varphi_P(MN)$ pour tout couple $(M, N) \in \mathbb{H}^2$. Enfin, φ_P est bien bijective, de bijection réciproque égale à $\varphi_{P^{-1}}$. Les isomorphismes φ_P s'appellent les automorphismes intérieurs de l'algèbre H.

$\diamond$ Réciproquement, soit φ un automorphisme de l'algèbre $\mathbb{H}$. Il s'agit de montrer qu'il existe $P \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ tel que, pour tout $M \in \mathbb{H}$, $\varphi(M) = P^{-1}MP$ (ce qui prouvera que les seuls automorphismes de l'algèbre $\mathbb{H}$ sont ses automorphismes intérieurs). Pour cela, il suffit de trouver $P \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ telle que $AP - P\varphi(A) = 0 = BP - P\varphi(B)$. En effet, dans ces conditions, $\varphi(C) = \varphi(A)\varphi(B) = P^{-1}(AB)P = P^{-1}CP$, puis pour tout $M = tI_4 + xA + yB + zC \in \mathbb{H}$, $\varphi(M) = tI_4 + xP^{-1}AP + yP^{-1}BP + zP^{-1}CP = P^{-1}MP$.

Premier cas. Etudions tout d'abord le cas où $\varphi(A) = A$. On recherche donc $P \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ telle que $P^{-1}AP = A$ et $P^{-1}BP = \varphi(B)$. D'après 4., on sait que $\varphi(B)$ est un quaternion pur de norme 1 et orthogonal à $\varphi(A) = A$ donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(B) = \cos\theta\ B + \sin\theta\ C$. La question 6 nous incite à chercher P sous la forme $P = \alpha I_4 + \beta A$. Dans ces conditions, P commute avec A donc $P^{-1}AP = A$ et

$$\begin{aligned} BP - P\varphi(B) &= \alpha B - \beta C - (\alpha I_4 + \beta A)(\cos\theta\ B + \sin\theta\ C) \\ &= (\alpha(1-\cos\theta) + \beta\sin\theta)B - (\beta(1+\cos\theta) + \alpha\sin\theta)C, \end{aligned}$$

donc on cherche (α, β) non nul et solution de $\begin{cases} \alpha(1-\cos\theta) + \beta\sin\theta = 0 \\ \alpha\sin\theta + \beta(1+\cos\theta) = 0 \end{cases}$,

or $\alpha(1-\cos\theta) + \beta\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}(\alpha\sin\frac{\theta}{2} + \beta\cos\frac{\theta}{2})$

et $\alpha\sin\theta + \beta(1+\cos\theta) = 2\cos\frac{\theta}{2}(\alpha\sin\frac{\theta}{2} + \beta\cos\frac{\theta}{2})$,

donc $(\alpha, \beta) = (\cos\frac{\theta}{2}, -\sin\frac{\theta}{2})$ convient. Ainsi, en posant $P = \cos\frac{\theta}{2}I_4 - \sin\frac{\theta}{2}A$, on a alors $P \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$, $P^{-1}AP = A = \varphi(A)$ et $P^{-1}BP = \varphi(B)$ et donc, $\forall M \in \mathbb{H}$, $\varphi(M) = P^{-1}MP$.

Cas général. Soit φ un isomorphisme de l'algèbre $\mathbb{H}$. Alors, d'après 4, on sait que $\varphi(A)$ est un quaternion pur de même norme que A donc d'après 5, il existe $Q \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ telle que $A = Q^{-1}\varphi(A)Q$. Si φ_Q désigne l'application de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{H}$ telle que $\varphi_Q(M) = Q^{-1}MQ$, alors $\varphi_Q \circ \varphi$ est un isomorphisme de l'algèbre $\mathbb{H}$ tel que $\varphi_Q \circ \varphi(A) = A$ donc d'après le premier cas étudié, il existe $R \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ tel que pour tout M de $\mathbb{H}$, $\varphi_Q \circ \varphi(M) = R^{-1}MR$. En posant $P = RQ^{-1}$, on a $P \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ et pour tout M de $\mathbb{H}$, $\varphi(M) = P^{-1}MP$.