Les complexes

Table des matières

Les nombres complexes apparaissent pour la première fois dans des écrits mathématiques au 16ième siècle, pour la résolution d'équations polynomiales de degré 2, 3, ou 4 (Cardan, Bombelli). Ils sont alors seulement considérés comme des intermédiaires pour les calculs, dénués de toute signification et sont appelés des nombres sophistiqués ou impossibles. Ce n'est qu'après le milieu du 19ième siècle que les nombres (enfin appelés) complexes (par Gauss) seront acceptés comme des entités mathématiques bien réelles. Il aura fallu pour cela la mise en place d'une version géométrique qui relie les complexes avec le plan (18ième siècle), mais aussi d'une version algébrique qui assimile $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$ muni d'une addition et d'un produit convenables (Hamilton au 19ième siècle).
De plus, les complexes se sont imposés par l'étendue de leurs applications, tant en mathématiques (théorème fondamental de l'algèbre : tout polynôme non constant à coefficients réels possède au moins une racine complexe, étude des fonctions via l'analyse complexe etc.) qu'en physique (optique géométrique, électricité, séries de Fourier pour la résolution de l'équation de la chaleur).
Aujourd'hui, les complexes ont la même "banalité" que les réels en mathématiques et la physique quantique est fondée sur le corps des complexes (les probabilités émergent en tant que module au carré de certains complexes).

1 Construction de $\mathbb{C}$

Nous suivons l'approche de Hamilton :

Posons $\mathbb{C} \stackrel{\Delta}{=} \mathbb{R}^2$.

$\diamond$ On peut vérifier que $\mathbb{R}^2$ dispose d'une structure de groupe additif commutatif, en convenant que, pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$. L'élément neutre est $0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$ et l'opposé de (a, b) est $(-a, -b)$.
$\diamond$ On définit maintenant sur $\mathbb{C}$ un produit en convenant que, pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.
On vérifie que ce produit est une loi interne, commutative, associative, distributive par rapport à l'addition, et admettant pour élément neutre $1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$. Ainsi, $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un anneau commutatif.
$\diamond$ De plus, si $(a, b) \neq 0_{\mathbb{C}}$, on vérifie que
$(a, b) \times \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) = 1_{\mathbb{C}} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right) \times (a, b)$, donc $\mathbb{C}$ est un anneau commutatif, non réduit à $\{0_{\mathbb{C}}\}$, dont tout élément non nul est inversible : c'est un corps.
$\diamond$ L'application $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & a & \longmapsto & (a, 0) \end{array}$ est un morphisme injectif de corps, c'est-à-dire que, $f(1_{\mathbb{R}}) = 1_{\mathbb{C}}$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $f(xy) = f(x)fy)$.
On utilise cette application pour identifier $\mathbb{R}$ et $\{(a, 0)/a \in \mathbb{R}\}$, en convenant que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a = (a, 0)$.
$\diamond$ Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = (a, b)$. On peut vérifier que
$z = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + [(b, 0) \times (0, 1)]$, donc grâce à l'identification précédente, $z = a + b \times (0, 1)$.

On pose $i \triangleq (0,1)$. Ainsi,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ \ \exists! a, b \in \mathbb{R}, \ \ z = a + ib.$$

On dit que a est la partie réelle de z, elle est notée $a = \mathrm{Re}(z)$.
On dit que b est la partie imaginaire de z, elle est notée $b = \mathrm{Im}(z)$.
L'écriture du complexe z sous la forme $z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$ s'appelle l'écriture algébrique de z.

⋄ Ainsi, $\mathbb{C}$ est un corps, dont $\mathbb{R}$ est un sous-corps et dont les lois sont définies par

$$\boxed{\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \ \begin{cases} (a+ib) + (c+id) & = (a+c) + i(b+d) \\ (a+ib) \times (c+id) & = (ac - bd) + i(ad + bc) \end{cases}}$$

La dernière égalité se déduit des régles usuelles de calcul dans un anneau commutatif : $(a+ib)\times(c+id) = ac + i(bc+ad) + bdi^2$ et du fait que $i^2 = (0,1)\times(0,1) = -(1,0) = -1$.

Si $z \neq 0$, $\boxed{\text{l'inverse de } z = a + ib \text{ est } \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}}$.

Remarque. Si $z \in \mathbb{C}$, l'écriture $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{C}$ n'est bien sûr pas unique. Il n'y a unicité que si l'on impose $a, b \in \mathbb{R}$.

Remarque. On a perdu la structure de corps totalement ordonné, caractéristique de $\mathbb{R}$. En effet, supposons qu'il existe un ordre $\leq$ sur $\mathbb{C}$ pour lequel $\mathbb{C}$ est un corps ordonné, c'est-à-dire tel que, $\forall x, y, z \in \mathbb{C}$, $[x \leq y] \Longrightarrow [x + z \leq y + z]$
et $[0 \leq x] \wedge [0 \leq y] \Longrightarrow [0 \leq xy]$.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z \geq 0$, alors $z^2 \geq 0$ d'après la règle des signes. Sinon, l'ordre étant total, $z \leq 0$, donc d'après la compatibilité avec l'addition, $z + (-z) \leq -z$. Ainsi, $-z \geq 0$, puis $(-z)^2 \geq 0$.
Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^2 \geq 0$.
En particulier $-1 = i^2 \geq 0$, donc $0 = 1 + (-1) \geq 1$. Mais on a aussi $1 = 1^2 \geq 0$, donc $1 = 0$, ce qui est faux.

Définition. Un complexe est un imaginaire pur si et seulement si il est de la forme ib avec $b \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire si et seulement si sa partie réelle est nulle.

Propriété. Deux complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

Propriété. Comme dans tout anneau, $0_{\mathbb{C}}$ est absorbant, c'est-à-dire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $0 \times z = 0$.

Propriété. Comme pour tout corps, $\mathbb{C}$ est intègre, c'est-à-dire que, pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, si $zz' = 0$, alors $z = 0$ ou $z' = 0$.

Propriété. $\boxed{\dfrac{1}{i} = -i}$.

Linéarité des parties réelle et imaginaire : Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,
$\mathrm{Re}(\alpha z + z') = \alpha \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(\alpha z + z') = \alpha \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$.

Démonstration.
Exercice. □

2 Le plan complexe

Définition. On considère un plan P affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On peut alors définir le complexe $z = x + iy$ et le point M de P dont les coordonnées dans le repère R sont (x, y).
On dit que z est l'affixe du point M et que M est l'image du complexe z.
Si l'on note $M(z)$ l'image du complexe z, l'application $z \longmapsto M(z)$ est une bijection de $\mathbb{C}$ dans P qui permet parfois d'identifier $\mathbb{C}$ avec P (muni de son repère R).
On dit aussi que z est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et que $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image de z.
Si l'on note $\overrightarrow{u(z)}$ le vecteur image de z, l'application $z \longmapsto \overrightarrow{u(z)}$ est une bijection de $\mathbb{C}$ dans l'ensemble des vecteurs de P.
Pour ces raisons, $\mathbb{C}$ est souvent appelé le plan complexe.

Interprétation géométrique de l'addition entre complexes :
Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Avec les notations précédentes, notons $\overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{u_{z'}}$ les vecteurs images de z et z'. Alors le vecteur $\overrightarrow{u_z} + \overrightarrow{u_{z'}}$ a pour affixe $z + z'$.
Ainsi, si l'on identifie $\mathbb{C}$ avec l'ensemble des vecteurs de P, l'addition entre complexes correspond à l'addition entre vecteurs du plan.
Si l'on visualise les deux complexes z et z' par deux points M_z et $M_{z'}$ du plan P, le complexe $z + z'$ est donc le point qui complète $O, M_z, M_{z'}$ en un parallélogramme.

Interprétation géométrique de la différence de deux complexes :
Avec les mêmes notations, $z' - z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M(z)M(z')}$.

Interprétation géométrique du produit d'un complexe par un réel :
Soit $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors αz est l'affixe du vecteur $\alpha\overrightarrow{OM(z)}$.
Ainsi, αz est aussi l'affixe de l'image de $M(z)$ par l'homothétie de centre O et de rapport α.

Remarque. On rappelle que l'homothétie de centre Ω et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ est la transformation suivante du plan : $\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & P \\ M & \longmapsto & \Omega + \lambda\overrightarrow{\Omega M} \end{array}$.

3 La conjugaison

Grâce à la théorie des polynômes (à venir), on peut également construire $\mathbb{C}$ en partant d'une racine "formelle" du polynôme $X^2 + 1$, ce qui correspond d'ailleurs à la définition historique des complexes dégagée au 16ième siècle. De ce point de vue, les deux racines i et $-i$ du polynôme X^2+1 jouent des rôles symétriques. C'est pourquoi le fait d'échanger i en $-i$ est une opération fondamentale dans $\mathbb{C}$.

Définition. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Le conjugué du complexe z est le complexe $\overline{z} \stackrel{\Delta}{=} x - iy$.

Géométriquement, $\overline{z}$ est le symétrique de z selon l'axe Ox des réels.

Exemple. $\overline{1 + i} = 1 - i$.

Propriété. $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$ et $z \in i\mathbb{R} \iff \overline{z} = -z$.

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

Propriété. La conjugaison est un isomorphisme involutif de corps sur $\mathbb{C}$.
Ainsi, pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Démonstration.
On vérifie ces formules en posant $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$.
Pour la dernière formule, on peut écrire que si $zz' = 1$, alors $\overline{z}\overline{z'} = \overline{1} = 1$, donc $\overline{z'} = \dfrac{1}{\overline{z}}$, or $z' = \frac{1}{z}$. Ceci prouve que $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$. $\square$

Corollaire. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{C}^*$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

> **Exercice.** Déterminer les complexes z tels que $\dfrac{z}{z - i}$ est réel.
> **Solution :** Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$.
> $\dfrac{z}{z-i} \in \mathbb{R} \iff \dfrac{z}{z-i} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z} + i} \iff z\overline{z} + iz = z\overline{z} - i\overline{z} \iff z = -\overline{z}$, donc les complexes solutions sont les imaginaires purs différents de i.

4 Le module

L'interprétation géométrique est complétée par le fait que la distance entre deux points se traduit bien au niveau des complexes, grâce à la notion de module.

Définition. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Le module du complexe $z = x + iy$ est $|z| \stackrel{\Delta}{=} \sqrt{x^2 + y^2}$.

Remarque. Avec les notations précédentes, lorsque $y = 0$, $z = x \in \mathbb{R}$ et $|z| = \sqrt{x^2}$ est la valeur absolue de x. Ainsi, l'application module, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}_+$ est un prolongement de la valeur absolue, ce qui justifie l'emploi de la même notation.

Interprétation géométrique : Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors, avec les notations précédentes, $|z|$ désigne la distance du point $M(z)$ à l'origine, ainsi que la norme du vecteur $\overrightarrow{u(z)}$.

Propriété. Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ dont les images sont notées $M(z)$ et $M(z')$. Alors la distance entre $M(z)$ et $M(z')$ est égale à $|z - z'|$.

Démonstration.
$z' - z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M(z)M(z')}$, donc $|z - z'| = \|\overrightarrow{M(z)M(z')}\| = d(M(z), M(z'))$.
$\square$

Propriété. $\forall z \in \mathbb{C},\ \ |z|^2 = z\overline{z}$ (donc $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$).

Démonstration.
Si $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$. $\square$

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Exemple. $\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{2}$.

Propriété. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$,
- $|z| = |\overline{z}|$ (compatibilité du module avec la conjugaison) ;
- $|zz'| = |z| \times |z'|$ (compatibilité du module avec la multiplication) ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$;
- si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.

Démonstration.
Se déduit aisément de la formule $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ et des propriétés du produit et de la conjugaison. □

Propriété. Le module est une norme sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire que l'application $|.| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes : Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,
- $|z| \geq 0$ (positivité),
- $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$ (séparation),
- $|\alpha z| = |\alpha| \times |z|$ (homogénéité),
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).

Démonstration.
Pour l'inégalité triangulaire :
$|z + z'|^2 = (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) = |z|^2 + |z'|^2 + 2\text{Re}(z\overline{z'})$.
Or, pour tout complexe $Z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$,
$|Z|^2 = a^2 + b^2 \geq a^2$, donc $|Z| \geq |a| = |\text{Re}(Z)|$.
Ainsi, $|z + z'|^2 \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z\overline{z'}| = |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'| = (|z| + |z'|)^2$. □

Exemple. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$|z| = |\text{Re}(z) + i\text{Im}(z)| \leq |\text{Re}(z)| + |i||\text{Im}(z)| = |\text{Re}(z)| + |\text{Im}(z)|$.

Distance entre complexes : Lorsque $x, y \in \mathbb{C}$, la quantité $d(x, y) = |x - y|$ est appelée la distance entre les deux complexes x et y.
La fonction distance vérifie les propriétés suivantes : pour tout $x, y, z \in \mathbb{C}$,
- Positivité : $d(x, y) \in \mathbb{R}_+$.
- $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$: d permet de *séparer* les complexes.
- Symétrie : $d(x, y) = d(y, x)$.
- Inégalité triangulaire : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Démonstration.
Ces propriétés se déduisent directement du fait que le module est une norme sur $\mathbb{C}$. □

Définition. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.
- La boule fermée de centre a et de rayon r est $B_f(a, r) = \{z \in \mathbb{C}/|z - a| \leq r\}$. C'est le disque de centre a et de rayon r.
- Lorsque $r > 0$, la boule ouverte de centre a et de rayon r est $B_o(a, r) = \{z \in \mathbb{C}/d(a, z) < r\}$. C'est le disque ouvert de centre a et de rayon r.
- La sphère de centre a et de rayon r est $S(a, r) = \{z \in \mathbb{C}/d(a, z) = r\}$. C'est le cercle de centre a et de rayon r.

Définition. $S(0,1)$ s'appelle la sphère unité ou bien le cercle unité. Il est noté $\mathbb{U}$.

Propriété. $\boxed{\text{Pour tout } z \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{U} \Longleftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}}$.

Démonstration.
$\overline{z} = \frac{1}{z} \Longleftrightarrow z\overline{z} = 1 \Longleftrightarrow |z|^2 = 1$. □

Exemple. On note $\boxed{j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$. Alors, $|j|^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$, donc $\frac{1}{j} = \overline{j}$.

Théorème. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$, avec égalité si et seulement si $z' = 0$ ou bien $\frac{z}{z'} \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration.
Reprenons la preuve de l'inégalité triangulaire :
$|z + z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z\overline{z'}| = (|z| + |z'|)^2$, donc
$(E)\ :\ |z + z'| = |z| + |z'| \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(z\overline{z'}) = |z\overline{z'}| \Longleftrightarrow z\overline{z'} \in \mathbb{R}_+$.
Lorsque $z' = 0$, il y a bien égalité.
Supposons maintenant que $z' \neq 0$. Alors $z\overline{z'} = \frac{z}{z'}|z'|^2$, donc $(E) \Longleftrightarrow \frac{z}{z'} \in \mathbb{R}_+$. □

> **Exercice.** Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Soit $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n|$, avec égalité si et seulement si , pour tout i, j tels que $1 \leq i < j \leq n$, $(z_j = 0) \vee (\frac{z_i}{z_j} \in \mathbb{R}_+)$.
>
> **Solution :** L'inégalité se démontre aisément par récurrence sur n.
> Soit $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ tels que $|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n|$.
> Soit i, j tels que $1 \leq i < j \leq n$. Alors,
>
> $$\begin{aligned} |z_1 + \cdots + z_n| &= \Big| z_i + z_j + \sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ (k\neq i)\wedge(k\neq j)}} z_k \Big| \\ &\leq \Big| \sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ (k\neq i)\wedge(k\neq j)}} z_k \Big| + |z_i + z_j| \\ &\leq \Big| \sum_{\substack{1\leq k\leq n \\ (k\neq i)\wedge(k\neq j)}} z_k \Big| + |z_i| + |z_j| \\ &\leq |z_1| + \cdots + |z_n| = |z_1 + \cdots + z_n|. \end{aligned}$$
>
> Toutes ces quantités sont donc égales. Ainsi, $|z_i + z_j| = |z_i| + |z_j|$, donc d'après le théorème précédent, $(z_j = 0) \vee (\frac{z_i}{z_j} \in \mathbb{R}_+)$.
> Réciproquement supposons que, pour tout i, j tels que $1 \leq i < j \leq n$, $(z_j = 0) \vee (\frac{z_i}{z_j} \in \mathbb{R}_+)$. Alors on montre que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $\rho_i \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_i = \rho_i z_1$, donc $|z_1 + \cdots + z_i| = |(\rho_1 + \cdots + \rho_n)z_1| = |z_1| + \cdots + |z_n|$.

Corollaire de l'inégalité triangulaire :
- Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$.
- Pour tout $a, b, c \in \mathbb{C}$, $|d(a,b) - d(b,c)| \leq d(a,c)$.

Démonstration.
$\diamond$ Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. $|z| = |z' + (z - z')| \leq |z'| + |z - z'|$, donc $|z| - |z'| \leq |z - z'|$.
En échangeant z et z', on obtient également $|z'| - |z| \leq |z - z'|$,
donc $||z| - |z'|| = \max\{|z| - |z'|, |z'| - |z|\} \leq |z - z'|$.
$\diamond$ Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$, donc $d(a, b) - d(b, c) \leq d(a, c)$.
En échangeant a et c, on a également $d(c, b) - d(b, a) \leq d(a, c)$, ce qui permet de conclure. $\square$

Définition. Une partie A de $\mathbb{C}$ est bornée si et seulement si il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $a \in A$, $|a| \leq R$, c'est-à-dire si et seulement si A est incluse dans un disque centré en 0.

5 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

5.1 Fonctions bornées

Définition. Soit E un ensemble quelconque et f une application de E dans $\mathbb{C}$.
On dit que f est bornée sur E si et seulement si $\{f(x)/x \in E\}$ est une partie bornée de $\mathbb{C}$.

Notation. Soit f une application d'un ensemble E dans $\mathbb{C}$.
On note $\begin{array}{rccl} \mathrm{Re}(f): & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{Re}(f(x)) \end{array}$ et $\begin{array}{rccl} \mathrm{Im}(f): & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{Im}(f(x)) \end{array}$. On les appelle les parties réelle et imaginaire de l'application f.

Propriété. Avec ces notations, f est bornée sur E si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont bornées.

Démonstration.
Supposons que f est bornée sur E. Ainsi, il existe $R \geq 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $|f(x)| \leq R$. Alors, pour tout $x \in E$, $|\mathrm{Re}(f)(x)| \leq |f(x)| \leq R$ et de même,
$|\mathrm{Im}(f)(x)| \leq R$, donc les applications $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont bornées.
Réciproquement, supposons que les applications $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont bornées : il existe $M_1, M_2 \in \mathbb{R}_+$ tels que, pour tout $x \in E$, $|\mathrm{Re}(f)(x)| \leq M_1$ et $|\mathrm{Im}(f)(x)| \leq M_2$. Alors, pour tout $x \in E$, $|f(x)| = \sqrt{\mathrm{Re}(f)^2(x) + \mathrm{Im}(f)^2(x)} \leq \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$, donc f est bornée sur E. $\square$

5.2 Dérivation

Définition. Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une application. On verra plus loin que f est continue (resp : dérivable, k fois dérivable, de classe C^k où $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$) si et seulement si les applications $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues (resp : dérivables, k fois dérivables, de classe C^k où $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$).
De plus, lorsque f est k fois dérivable, où $k \in \mathbb{N}^*$, on verra que,
pour tout $t \in I$, $f^{(k)}(t) = [\mathrm{Re}(f)]^{(k)}(t) + i[\mathrm{Im}(f)]^{(k)}(t)$.

Propriété. Les formules suivantes, déjà admises pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont aussi valables pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, ainsi que nous le démontrerons plus tard.
Les fonctions qui interviennent dans ces formules sont toutes supposées dérivables sur un intervalle. On se limite éventuellement à un sous-intervalle pour s'assurer que les quantités qui interviennent dans les formules sont bien définies. :
— Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.
— $(fg)' = f'g + fg'$.
— $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.
— $\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - g'f}{g^2}$.
— Si $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, alors $(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$.
— Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(f^n)' = nf' \times f^{n-1}$.

Formule de Leibniz : Soient f et g deux applications d'un intervalle I dans $\mathbb{C}$. Si f et g sont n fois dérivables sur I, alors fg est n fois dérivable sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Démonstration.
La démonstration vue dans le cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ reste valable. □

5.3 Intégration

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue. Pour tout $a, b \in I$, on pose

$$\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\ dt + i \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\ dt.$$

Remarque. Ainsi, $\mathrm{Re}\Big(\int_a^b f(t)\ dt\Big) = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\ dt$ et $\mathrm{Im}\Big(\int_a^b f(t)\ dt\Big) = \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\ dt$.
On admettra pour le moment que les intégrales vérifient les propriétés suivantes :
Propriété. Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.

Soit f et g deux applications continues de I dans $\mathbb{C}$. Soit $a, b \in I$.
— Linéarité : Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.
— Relation de Chasles : Pour tout $c \in I$, $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f + \int_c^b f$.
— Inégalité triangulaire : $\left|\int_a^b f(t)\ dt\right| \leq \int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} |f(t)|\ dt$.

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{C}$ que l'on suppose continue.
On dit que F est une primitive de f sur I si et seulement si F est dérivable et $F' = f$.
Si F_0 est une primitive de f, alors les autres primitives de f sont exactement les applications $F_0 + k$, où k est une fonction constante.

Démonstration.
F est une primitive de f si et seulement si $(F_0 - F)' = 0 = \mathrm{Re}(F_0 - F)' + i\mathrm{Im}(F_0 - F)'$, donc si et seulement si $\mathrm{Re}(F_0 - F)$ et $\mathrm{Im}(F_0 - F)$ sont constantes. $\square$

On admet pour le moment le théorème suivant (ou bien on le démontre en passant aux parties réelle et imaginaire).
Théorème : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{C}$ que l'on suppose continue. Soit $x_0 \in I$.
Alors $x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en x_0.

En adaptant les démonstrations vues dans le cas d'une fonction de I dans $\mathbb{R}$, on en déduit :

Corollaire. Soit f une application continue d'un intervalle I dans $\mathbb{C}$.
Si F est une primitive de f, alors pour tout $a, b \in I$,

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \overset{\Delta}{=} [F(t)]_a^b.$$

Corollaire. Si f est une application de classe C^1 de I dans $\mathbb{C}$, pour tout $a, b \in I$, $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$.

Notation. L'écriture "$\int f(t)\ dt = F(t) + k, t \in I$" signifiera que f est continue de I dans $\mathbb{C}$ et que l'ensemble des primitives de f est $\{F + k / k \in \mathbb{C}\}$.

Théorème. On suppose que f est une application continue d'un intervalle I dans $\mathbb{C}$, et que φ est une application **de classe** C^1 d'un intervalle J dans I. Alors,

$$\forall(\alpha, \beta) \in J^2 \ \boxed{\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.}$$

Lorsque l'on remplace un membre de cette égalité par l'autre, on dit que l'on effectue le changement de variable $x = \varphi(t)$.

Démonstration.
Soit $\alpha, \beta \in J$. $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \int_\alpha^\beta \mathrm{Re}(f)(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt + i \int_\alpha^\beta \mathrm{Im}(f)(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt$, puis on effectue le changement de variables $x = \varphi(t)$ dans ces deux intégrales de fonctions à valeurs réelles. $\square$

Théorème. Soit $u : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et $v : I \longrightarrow \mathbb{C}$ deux applications de classe C^1 sur I.
Pour tout $(a, b) \in I^2$, $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\ dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\ dt$.

Démonstration.
La démonstration vue pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ reste valable pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$. □

Théorème. Soit $u : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et $v : I \longrightarrow \mathbb{C}$ deux applications de classe C^1 sur I.
Alors, $\displaystyle\int u(t)v'(t)\ dt = u(t)v(t) - \int u'(t)v(t)\ dt,\ \ t \in I$.

Démonstration.
La démonstration vue pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ reste valable pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$. □

La formule d'intégration par parties itérée reste valable pour des fonctions de I dans $\mathbb{C}$, ainsi que la formule de Taylor avec reste intégral, l'inégalité de Taylor-Lagrange et celle de Taylor-Young.

6 L'exponentielle complexe

6.1 En théorie

Reprenons ce que nous avions écrit pour "définir" les fonctions cos et sin (chapitre "Dérivation et intégration", page 5), en détaillant un peu plus. Ceci permet de voir combien la construction de $\mathbb{C}$ dépend de la théorie des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (analyse réelle).

Définition. Une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de complexes converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geq N,\ \ |z_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On dit qu'une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de complexes est convergente si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Définition. On dit que la série de complexes $\sum z_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de complexes. Dans ce cas, on note $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} z_k$.

Propriété. Si $\sum z_n$ est une série convergente de complexes, alors $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
La réciproque est fausse : on peut avoir $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors que la série $\sum z_n$ diverge.

Démonstration.

Supposons que $\sum z_n$ converge : il existe $S \in \mathbb{C}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} z_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$. Alors, pour tout $n \geq 1$, $z_n = \sum_{k=0}^{n} z_k - \sum_{k=0}^{n-1} z_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$.

Pour montrer que la réciproque est fausse, il suffit de donner un contre-exemple :
Posons $z_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$. On a bien $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
mais $\sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1) - \ln k) = l(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Autre exemple classique, avec $z_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$: exercice. □

Théorème. Soit $\sum z_n$ une série de complexes.
Si $\sum |z_n|$ converge alors $\sum z_n$ est une série convergente. On dit dans ce cas que la série $\sum z_n$ est absolument convergente.

Démonstration.
Admis pour le moment □

Définition. On a vu, grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange, que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$. Ainsi, pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$, la série $\left(\sum \frac{z^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente. Ceci permet de prolonger l'exponentielle réelle sur $\mathbb{C}$, en convenant que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \ e^z = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}.$$

Propriété. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}$.
Alors $\overline{z_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \overline{\ell}$.

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'hypothèse, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|z_n - \ell| \leq \varepsilon$.
Soit $n \geq N$. Alors $|\overline{z_n} - \overline{\ell}| = |z_n - \ell| \leq \varepsilon$. □

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{(e^z)} = e^{\overline{z}}$.

Démonstration.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Par définition de e^z, $\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^z$, donc d'après la propriété précédente, $\overline{\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \overline{(e^z)}$, mais $\overline{\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\right)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\overline{z}}$, donc d'après l'unicité de la limite d'une suite de complexes, $\overline{(e^z)} = e^{\overline{z}}$. □

Propriété. Pour tout $u, v \in \mathbb{C}$, $e^u e^v = e^{u+v}$.

Démonstration.
Soit $u, v \in \mathbb{C}$. D'après des règles de calcul sur les limites de suites de complexes, que nous verrons plus loin, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(u+v)^k}{k!} - \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{v^k}{k!}\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{u+v} - e^u e^v$, donc pour montrer la propriété, il suffit d'établir que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(u+v)^k}{k!} - \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{v^k}{k!}\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et d'invoquer l'unicité de la limite.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \ldots, n\}$. $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un anneau commutatif, donc on peut utiliser la formule du binôme de Newton. Ainsi, $\displaystyle(u+v)^k = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} u^p v^{k-p}$,

puis $\displaystyle\frac{(u+v)^k}{k!} = \sum_{p=0}^{k} \frac{u^p}{p!} \frac{v^{k-p}}{(k-p)!}$.

Notons $A_k = \{(p,q) \in \{0, \ldots, n\}^2 / p + q = k\}$ et $\begin{array}{cccc} \varphi : & \{0, \ldots, k\} & \longrightarrow & A_k \\ & p & \longmapsto & (p, k-p) \end{array}$.

Ainsi, $\displaystyle\frac{(u+v)^k}{k!} = \sum_{p=0}^{k} \alpha_{\varphi(p)}$, où pour tout $(p,q) \in A_k$, $\alpha_{p,q} = \dfrac{u^p v^q}{p!q!}$.

φ est une bijection, donc on peut poser $(p,q) = \varphi(p)$: $\displaystyle\frac{(u+v)^k}{k!} = \sum_{(p,q) \in A_k} \frac{u^p}{p!} \frac{v^q}{q!}$,

ce que nous écrirons sous la forme $\displaystyle\frac{(u+v)^k}{k!} = \sum_{\substack{(p,q)\in\{0,\ldots,n\}^2 \\ p+q=k}} \frac{u^p v^q}{p!q!}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{k=0}^{n} \frac{(u+v)^k}{k!} & -\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{v^k}{k!}\Big)\Big| = \Big| \sum_{0\le k\le n} \sum_{\substack{(p,q)\in\{0,\ldots,n\}^2 \\ p+q=k}} \frac{u^p v^q}{p!q!} - \sum_{(p,q)\in\{0,\ldots,n\}^2} \frac{u^p v^q}{p!q!} \Big| \\
&= \Big| \sum_{\substack{(p,q)\in\{0,\ldots,n\}^2 \\ p+q\le n}} \frac{u^p v^q}{p!q!} - \sum_{(p,q)\in\{0,\ldots,n\}^2} \frac{u^p v^q}{p!q!} \Big| = \Big| \sum_{\substack{(p,q)\in\{0,\ldots,n\}^2 \\ p+q> n}} \frac{u^p v^q}{p!q!} \Big| \\
&\le \sum_{\substack{(p,q)\in\{0,\ldots,n\}^2 \\ p+q> n}} \frac{|u|^p |v|^q}{p!q!} \\
&= \sum_{(p,q)\in\{0,\ldots,n\}^2} \frac{|u|^p |v|^q}{p!q!} - \sum_{\substack{(p,q)\in\{0,\ldots,n\}^2 \\ p+q\le n}} \frac{|u|^p |v|^q}{p!q!} \\
&= \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{|u|^k}{k!}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{|v|^k}{k!}\Big) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(|u|+|v|)^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{|u|} e^{|v|} - e^{|u|+|v|} = 0,
\end{aligned}$$

d'après les propriétés connues de l'exponentielle réelle. □

Corollaire. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$ et $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$.

Démonstration.
$e^z e^{-z} = e^0 = 1$. □

Propriété. $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$.

Démonstration.
$|e^z|^2 = e^z\overline{(e^z)} = e^z e^{\overline{z}} = e^{z+\overline{z}} = e^{2\mathrm{Re}(z)}$, or d'après les propriétés de l'exponentielle réelle, $e^{2\mathrm{Re}(z)} = (e^{\mathrm{Re}(z)})^2$ et $e^{\mathrm{Re}(z)} \geq 0$, donc $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$. □

Théorème. $e^z \in \mathbb{U} \iff z \in i\mathbb{R}$.
En particulier, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$.

Démonstration.
$e^z \in \mathbb{U} \iff |e^z| = 1 \iff e^{\mathrm{Re}(z)} = e^0$, mais $\mathrm{Re}(z)$ et 0 sont deux réels et on sait que l'exponentielle réelle est injective. Ainsi, $e^z \in \mathbb{U} \iff \mathrm{Re}(z) = 0 \iff z \in i\mathbb{R}$. □

Formules d'Euler :

$$\boxed{\cos\theta \triangleq \mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta \triangleq \mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}.$$

De plus,

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}.$$

Propriété. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n}}{(2n)!}$ et $\sin\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Démonstration.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $N \in \mathbb{N}$.
$\sum_{n=0}^{2N}\frac{(i\theta)^n+(-i\theta)^n}{n!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} e^{i\theta}+e^{-i\theta}$ et d'autre part,
en séparant les indices pairs et impairs,
$\sum_{n=0}^{2N}\frac{(i\theta)^n+(-i\theta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{N}\frac{(i\theta)^{2n}+(-i\theta)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{N-1}\frac{(i\theta)^{2n+1}+(-i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} = 2\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{\theta^{2n}}{(2n)!}$,
donc $\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\frac{\theta^{2n}}{(2n)!} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta$.
On raisonne de même pour $\sin\theta$. □

Corollaire. sin est une fonction impaire et cos est une fonction paire.
cos et sin sont de classe C^∞ et $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$.

Démonstration.
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, (1) : $\cos\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n}}{(2n)!}$, donc $\cos\theta = \cos(-\theta)$.
De même, on montre que sin est impaire.
Lorsque vous étudierez les séries entières, vous verrez que l'on peut dériver la relation (1) terme à terme, c'est-à-dire que cos est dérivable et que $\frac{d(\cos\theta)}{d\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d}{d\theta}\left((-1)^n\frac{\theta^{2n}}{(2n)!}\right)$.
Ainsi, $\frac{d(\cos\theta)}{d\theta} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\theta^{2n-1}}{(2n-1)!} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\frac{\theta^{2n-1}}{(2n-1)!}$,

donc $\dfrac{d(\cos\theta)}{d\theta} = \lim\limits_{N\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{N-1} (-1)^{n+1} \dfrac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin\theta$.
De même, on montre que sin est dérivable et que $\sin' = \cos$. □

Formule circulaire : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Démonstration.
$\cos^2\theta + \sin^2\theta = |e^{i\theta}|^2 = 1$. □

Formule d'addition : Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \text{ et}$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

Démonstration.
Déjà vu : $\cos(a+b) + i\sin(a+b) = e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib} = (\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)$ et on conclut en passant aux parties réelle et imaginaire. □

Définition. On appelle série alternée toute série réelle de la forme $\sum(-1)^n\alpha_n$ ou $\sum(-1)^{n+1}\alpha_n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \in \mathbb{R}_+$.

Théorème spécial des séries alternées (TSSA).
Soit $\sum a_n$ une série alternée. On dit qu'elle est spéciale alternée lorsque la suite $(|a_n|)$ est décroissante et tend vers 0. Dans ce cas,

— $\sum a_n$ est convergente ;

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$ est du signe de son premier terme a_n

et $|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k| \leq |a_{n+1}|$.

Démonstration.
Admis pour le moment. □

Propriété. L'application cos est strictement décroissante sur $]0, 2]$ et elle possède un unique zéro sur $]0, 2]$, que l'on notera $\dfrac{\pi}{2}$: c'est la **définition** de π.

Démonstration.
• Si $t \in]0, 2]$, $\cos'(t) = -\sin(t)$, donc pour montrer que cos est strictement décroissante sur $]0, 2]$, il suffit de montrer que $\dfrac{\sin(t)}{t} > 0$ lorsque $t \in]0, 2]$.

• Soit $t \in]0, 2]$. $\dfrac{\sin t}{t} - 1 + \dfrac{t^2}{6} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{t^{2n}}{(2n+1)!}$.

La série $\sum\limits_{n\geq 2} (-1)^n \dfrac{t^{2n}}{(2n+1)!}$ est une série alternée (car $t > 0$) dont le terme général tend vers 0 (car elle est convergente). Or, pour $n \geq 2$, si l'on pose $a_n = \dfrac{t^{2n}}{(2n+1)!}$,

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{t^2}{(2n+3)(2n+2)} \leq \frac{4}{3 \times 2} \leq 1$, donc la série alternée est spéciale alternée.
Ainsi $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!}$ a le signe de son premier terme qui est positif.
On en déduit que $\frac{\sin(t)}{t} \geq 1 - \frac{t^2}{6} \geq 1 - \frac{2^2}{6} = \frac{1}{3} > 0$.

- $cos(2) - 1 + \frac{2^2}{2!} - \frac{2^4}{4!} = \sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!}$.

Si l'on pose, pour $n \geq 3$, $b_n = \frac{2^{2n}}{(2n)!}$, la suite $(b_n)_{n\geq 3}$ est décroissante car, pour $n \geq 3$, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4}{(2n+2)(2n+1)} \leq 1$. Ainsi, toujours d'après le TSSA, $cos(2) - 1 + \frac{2^2}{2!} - \frac{2^4}{4!} \leq 0$, donc $\cos(2) \leq 1 - 2 + \frac{16}{24} = -1 + \frac{2}{3} < 0$.
D'autre part, $\cos(0) = Re(e^0) = 1 > 0$. Mais cos est continue, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in]0, 2[$ tel que $\cos(\alpha) = 0$. Ce zéro est unique car cos est strictement décroissante, donc est injective, sur $]0, 2]$. □

Propriété. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$ et $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$.
On dispose des tableaux de variations suivants :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1
$\sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

2π est la plus petite période de cos, ainsi que de sin.

Démonstration.

- $\sin^2(\frac{\pi}{2}) = 1 - \cos^2(\frac{\pi}{2}) = 1$ et, d'après le début de la démonstration précédente, $\sin(\frac{\pi}{2}) > 0$, donc $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)\cos(\frac{\pi}{2}) - \sin(x)\sin(\frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$.
De même on calcule que $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$.

- cos décroît sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, de 1 à 0. $\sin' = \cos$, donc sin croît sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ de 0 à 1.

$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$, donc cos décroit sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ de 0 à -1.
De même, $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$, donc sin décroît sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ de 1 à 0. On en déduit ensuite les variations sur $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$, puis sur $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. $\cos(x + 2\pi) = -\sin(x + 3\frac{\pi}{2}) = -\cos(x + \pi) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$, donc cos est périodique de période 2π.

Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. Supposons que T est une période de cos :
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + T) = \cos x$. En particulier, $\cos T = \cos 0 = 1$.
Posons $n = \left\lfloor \frac{T}{2\pi} \right\rfloor$: $n \leq \frac{T}{2\pi} < n+1$, donc $2\pi n \leq T < 2\pi n + 2\pi$ puis $0 \leq T - 2\pi n < 2\pi$.
Or cos est 2π-périodique, donc $1 = \cos T = \cos(T - 2n\pi)$ et $T - 2n\pi \in [0, 2\pi[$. D'après le tableau de variations, $T - 2n\pi = 0$, donc $T = 2n\pi$.
Ceci démontre bien que 2π est la plus petite période de l'application cos.

Si T est une période de sin, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x+T) = \sin x$, donc en dérivant, $\cos(x+t) = \cos x$, si bien que T est aussi une période de cos. On établit de même la réciproque, donc sin dispose du même ensemble de périodes que cos. $\square$

Exemple. $e^{i0} = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{3i\frac{\pi}{2}} = -i$,
pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $e^{2ik\pi} = 1$.

Propriété. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a^2 + b^2 = 1$.
Il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$.

Démonstration.
$\diamond$ $a^2 = 1 - b^2 \leq 1$, donc $a \in [-1, 1]$. D'après le tableau de variations de cos, il existe $\varphi \in [0, \pi]$ tel que $a = \cos\varphi$.
$b^2 = 1 - a^2 = 1 - \cos^2\varphi = \sin^2\varphi$.
Si $b \geq 0$, alors $b = \sin\varphi$ et si $b < 0$, $b = -\sin\varphi = \sin(2\pi - \varphi)$ avec $\varphi \in]0, \pi[$.
Ceci démontre l'existence.
$\diamond$ Démontrons l'unicité : soit $(\theta, \theta') \in [0, 2\pi[^2$ tel que $\cos\theta = \cos\theta'$ et $\sin\theta = \sin\theta'$. Montrons que $\theta = \theta'$.
$\sin\theta$ et $\sin\theta'$ ont le même signe, donc $(\theta, \theta') \in [0, \pi]^2$ ou $(\theta, \theta') \in [\pi, 2\pi[^2$.
Sur $[0, \pi]$ ou sur $[\pi, 2\pi[$, cos est injective, donc $\theta = \theta'$. $\square$

Corollaire. Soit $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que $\cos\theta = \cos\varphi$ et $\sin\theta = \sin\varphi$. Alors $\theta \equiv \varphi\ [2\pi]$.

Démonstration.
Posons $a = \cos\theta = \cos\varphi$ et $b = \sin\theta = \sin\varphi$. $a^2 + b^2 = 1$, donc il existe un unique $\alpha \in [0, 2\pi[$ tel que $a = \cos\alpha$ et $b = \sin\alpha$.
Posons $n = \left\lfloor \dfrac{\theta}{2\pi} \right\rfloor$: $n \leq \dfrac{\theta}{2\pi} < n+1$, donc $0 \leq \theta - 2n\pi < 2\pi$. Or $\cos(\theta - 2n\pi) = a$ et $\sin(\theta - 2n\pi) = b$, donc d'après l'unicité, $\alpha = \theta - 2n\pi$, ce qui prouve que $\alpha \equiv \theta\ [2\pi]$.
De même, on montre que $\alpha \equiv \varphi\ [2\pi]$, donc par transitivité de la relation de congruence, $\theta \equiv \varphi\ [2\pi]$. $\square$

Paramétrage du cercle unité : l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array}$ est périodique et sa plus petite période est 2π. Sa restriction à $[0, 2\pi[$ est bijective.

Démonstration.
$\diamond$ $e^{it} = \cos t + i \sin t$, donc $t \longmapsto e^{it}$ est périodique de période 2π.
De plus, si T est une période de $t \longmapsto e^{it}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{i(x+T)} = e^{ix}$, donc en prenant la partie réelle, $\cos(x+T) = \cos x$. Ainsi, T est une période de cos, donc $T \in 2\pi\mathbb{N}^*$.
$\diamond$ Soit $z \in \mathbb{U}$. Posons $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. $1 = |z|^2 = a^2 + b^2$, donc il existe un unique $t \in [0, 2\pi[$ tel que $a = \cos t$ et $b = \sin t$, c'est-à-dire tel que $z = \cos t + i \sin t = e^{it}$.
$\square$

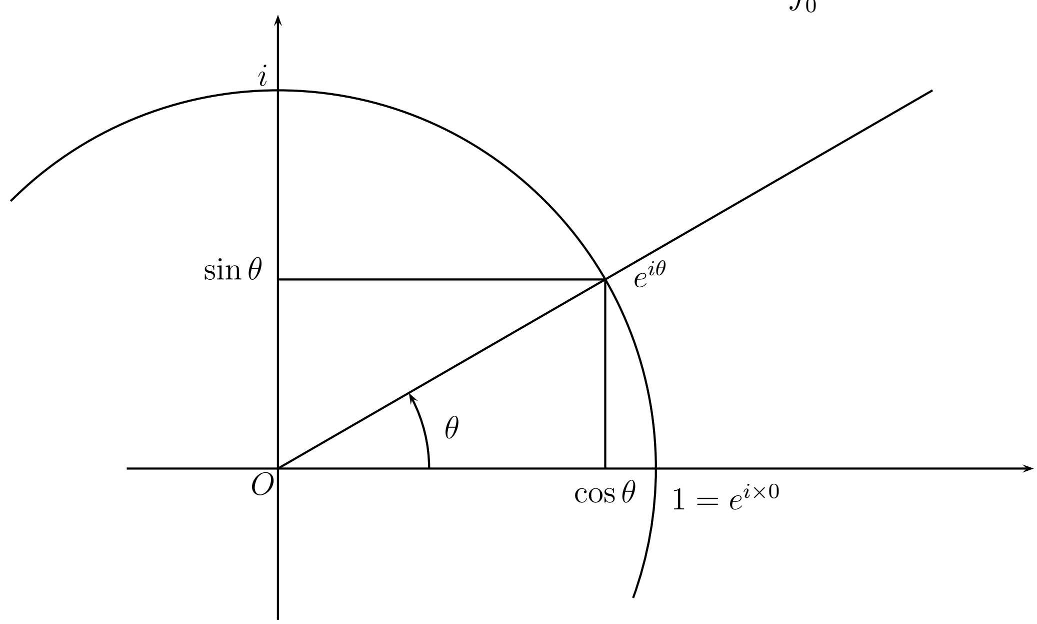
Définition. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $\begin{array}{cccc} M : & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & M(t) \end{array}$ une application de classe C^1. Notons $C = \{M(t)/t \in [a,b]\}$: C est une courbe dans le plan complexe, dont l'application M est un paramétrage.

Par définition, la longueur de C est égale à $\displaystyle\int_a^b |M'(t)|dt$.

Remarque. Informellement, pour tout $t \in [a,b]$, entre t et $t+dt$ (où dt est une quantité infiniment petite), le mobile ponctuel $M(t)$ se déplace dans le plan complexe à la vitesse constante $\dfrac{d(M(t),M(t+dt))}{(t+dt)-t} = \left|\dfrac{M(t+dt)-M(t)}{dt}\right| = |M'(t)|$, donc la longueur parcourue par le mobile ponctuel $M(t)$ entre t et $t+dt$ est égale à $|M'(t)|dt$, puis par sommation, la longueur totale de la courbe C est bien égale à $\displaystyle\int_a^b |M'(t)|dt$.

Propriété. Soit $\theta \in [0,2\pi]$. Notons $C_\theta = \{e^{it}/t \in [0,\theta]\}$: C_θ est une portion du cercle unité. Sa longueur est égale à θ. Ceci valide le schéma ci-dessous.

Démonstration.
Ici, $M(t) = e^{it} = \cos t + i\sin t$, donc $M'(t) = -\sin t + i\cos t = i(\cos t + i\sin t) = ie^{it}$ puis $|M'(t)| = |i| \times |e^{it}| = 1$. Ainsi, la longueur de C_θ est égale à $\displaystyle\int_0^\theta |M'(t)|dt = \theta$. $\square$



Propriété. Dans le plan complexe, le périmètre d'un cercle de rayon R vaut $2\pi R$.

Démonstration.
Notons C le cercle de centre $\Omega = a+ib$ et de rayon R. Ainsi,

$$\begin{aligned} C &= \{x+iy \in \mathbb{C}/x,y \in \mathbb{R} \ \wedge\ (x-a)^2+(y-b)^2 = R^2\} \\ &= \{x+iy \in \mathbb{C}/x,y \in \mathbb{R} \ \wedge \exists\theta \in [0,2\pi[,\ \ x = a+R\cos\theta \text{ et } y = b+R\sin\theta\}. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité montre que C est paramétré
par $M(\theta) = (a+R\cos\theta) + i(b+R\sin\theta)$.
Ainsi, la longueur de la courbe C est égale à $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\overrightarrow{M'(\theta)}|\ d\theta = \int_0^{2\pi} R = 2\pi R$. $\square$

6.2 En pratique

6.2.1 Formules

Nous regroupons les formules rencontrées dans la partie théorique :
- Pour tout $u, v \in \mathbb{C}$, $e^u e^v = e^{u+v}$;
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$ et $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$;
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{(e^z)} = e^{(\overline{z})}$;
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$.
- $e^z \in \mathbb{U} \iff z \in i\mathbb{R}$.
- **Formules d'Euler :**
  - $\cos\theta \triangleq \mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$,
  - $\sin\theta \triangleq \mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$,
  - $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
- l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array}$ est périodique et sa plus petite période est 2π. Sa restriction à $[0, 2\pi[$ est bijective.

Propriété. Si $z = a + ib$, où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $e^z = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$.

6.2.2 Arguments d'un complexe

Définition. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $\rho, \theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = \rho e^{i\theta}$. On dit alors que (ρ, θ) est un couple de coordonnées polaires du point $M(z)$ (l'image du complexe z).
On peut imposer $\rho \geq 0$. Dans ce cas, $\rho = |z|$. On dit alors que θ est un argument de z et l'on note $\theta = \arg(z)$.
Lorsque $z \neq 0$, on peut imposer $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. Dans ce cas, le couple (ρ, θ) est unique.

Démonstration.
Si $z = 0$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, le couple $(0, \theta)$ convient. Supposons maintenant que $z \neq 0$.
Alors, si $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$, $|z| = |\rho| \times |e^{i\theta}| = |\rho| = \rho$.
Posons $u = \frac{z}{|z|}$. $u \in \mathbb{U}$, donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $u = e^{i\theta}$. Alors, $z = |z|e^{i\theta}$. □

Définition. Un complexe z possède ainsi deux écritures usuelles :
- l'écriture algébrique : $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, ou bien $z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$;
- l'écriture trigonométrique (ou exponentielle, ou polaire) : $z = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ (l'angle θ n'est défini que modulo 2π), ou bien $z = |z|e^{i\ \arg(z)}$.

Les relations suivantes font le lien entre ces deux écritures :
lorsque $z = a + ib = \rho e^{i\theta}$ avec $a, b, \rho, \theta \in \mathbb{R}$ et $\rho \geq 0$,
- $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- lorsque $z \neq 0$, $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;

— Lorsque $a \neq 0$, $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$;
— Lorsque $z \neq 0$ et $\theta \in [0, \pi]$, $\theta = \arccos\Big(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big)$;
— Lorsque $z \neq 0$ et $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\theta = \arcsin\Big(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big)$;
— Lorsque $a \neq 0$ et $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\theta = \arctan\Big(\dfrac{b}{a}\Big)$;
— Lorsque $z \neq 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$, $\theta = 2\text{arctan}\Big(\dfrac{b}{a+\sqrt{a^2+b^2}}\Big)$.

Démonstration.
Pour la dernière formule : $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} = \dfrac{2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = \dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \dfrac{b}{a+\sqrt{a^2+b^2}}$.
□

Exemple. Donner l'écriture trigonométrique du complexe $z = 1 - i$.
On sait que $z = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho = |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$
et $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + i \times (-\dfrac{1}{\sqrt{2}})$, donc $\theta \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.
En conclusion $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Propriétés de l'argument : Si z, z_1, z_2 sont trois complexes non nuls, alors
— $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi]$;
— $\arg\Big(\dfrac{1}{z}\Big) \equiv \arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$;
— $\arg\Big(\dfrac{z_1}{z_2}\Big) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)\ [2\pi]$;
— pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\arg(z^n) \equiv n\ \arg(z)\ [2\pi]$;
— $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi]$;
— $(\arg(z_1) \equiv \arg(z_2)\ [2\pi]) \Longleftrightarrow \dfrac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}_+^*$.

Remarque.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\arg(e^z) \equiv \text{Im}(z)\ [2\pi]$, ce qui complète la formule $|e^z| = e^{\text{Re}(z)}$.
En effet, si l'on pose $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, alors $e^z = e^x e^{iy}$ et $e^x \in \mathbb{R}_+^*$.

Interprétation géométrique du produit dans $\mathbb{C}$:
Fixons $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$, où $\rho_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$.
La multiplication par z_0, c'est-à-dire l'application $z \longmapsto zz_0$ est la composée de $h\ :\ z \longmapsto \rho_0 z$ avec $r\ :\ z \longmapsto ze^{i\theta_0}$.
On a déjà vu que h s'interprète géométriquement comme une homothétie de centre O et de rapport ρ_0.
De plus, lorsque $z = \rho e^{i\theta}$, $r(z) = \rho e^{i(\theta+\theta_0)}$, donc r s'interprète géométriquement comme la rotation de centre O et d'angle θ_0.
La composée d'une homothétie et d'une rotation s'appelle une similitude directe, donc le fait de mutiplier z par $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$ revient à transformer z selon la similitude directe de centre O, de rapport ρ_0 et d'angle θ_0.

Propriété. Soit $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z = \rho e^{i\theta} \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ \ z = \ln(\rho) + i\theta + 2ik\pi).$$

En particulier, l'application exponentielle $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & e^z \end{array}$ est surjective et $2i\pi$ périodique.

Démonstration.
S'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = \ln(\rho) + i\theta + 2ik\pi$, alors $e^z = e^{\ln(\rho)}e^{i\theta} = \rho e^{i\theta}$.
Réciproquement, supposons que $e^z = \rho e^{i\theta}$. Alors $\rho = |e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$, donc $\mathrm{Re}(z) = \ln(\rho)$. Alors $e^{i\mathrm{Im}(z)}e^{\mathrm{Re}(z)} = e^z = \rho e^{i\theta} = e^{\mathrm{Re}(z)}e^{i\theta}$, or $e^{\mathrm{Re}(z)} \neq 0$, donc $e^{i\mathrm{Im}(z)} = e^{i\theta}$. Ainsi, $\mathrm{Im}(z)$ et θ ont même sinus et cosinus, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{Im}(z) = \theta + 2k\pi$. Ainsi, $z = \ln(\rho) + i\theta + 2ik\pi$. □

Formule de Moivre : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, $\boxed{e^{int} = (\cos t + i \sin t)^n}$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. $(\cos t + i \sin t)^n = (e^{it})^n = \underbrace{e^{it} \times \cdots \times e^{it}}_{n \text{ fois}} = e^{int}$. □

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\dfrac{d}{dt}(e^{zt}) = ze^{zt}$.

Démonstration.
Soit $z \in \mathbb{C}$. $e^{zt} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \frac{t^n}{n!}$. Vous verrez plus tard que l'on peut dériver cette égalité terme à terme. Ainsi, $\dfrac{d}{dt}(e^{zt}) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} z^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = ze^{tz}$. Pour vérifier en détails cette dernière égalité, on peut revenir au fait que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N}$. □

Définition. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $x^\alpha \triangleq e^{\alpha \ln x}$.

Propriété. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $\dfrac{d}{dt}(t^\alpha) = \alpha t^{\alpha - 1}$.

Démonstration.
$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$ et on utilise la formule de dérivation d'une fonction composée. □

> **Exercice.** Calculer $\displaystyle\int e^x \cos x \ dx$.
> **Solution :** Une double intégration par parties mène rapidement au résultat :
> $\displaystyle\int e^x \cos x \ dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \ dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \ dx$, donc
> $\displaystyle\int e^x \cos x \ dx = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + k$.
> On peut également obtenir cette primitive par un calcul direct :
> $\displaystyle\int e^x \cos x \ dx = \mathrm{Re}\Big(\int e^x e^{ix} \ dx\Big)$, or

$\int e^x e^{ix}\ dx = \dfrac{e^{x(i+1)}}{i+1} = \dfrac{1-i}{2}e^x(\cos x + i\sin x) + k$, donc on retrouve ainsi que $\int e^x \cos x\ dx = \dfrac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + k$.

6.2.3 Technique de l'angle moyen

Formule : Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pour écrire $e^{i\alpha} \pm e^{i\beta}$ sous forme polaire, on met en facteur la quantité $e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$, c'est-à-dire l'exponentielle complexe de l'angle moyen $\frac{\alpha+\beta}{2}$. Ainsi,
$e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{-\alpha+\beta}{2}}) = 2e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\cos(\dfrac{\alpha-\beta}{2})$
et $e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} - e^{i\frac{-\alpha+\beta}{2}}) = 2ie^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\sin(\dfrac{\alpha-\beta}{2})$.

Exercice. Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$, $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos kt$.

Solution : Soit $t \in \mathbb{R}$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos kt = \mathrm{Re}\Big(\sum_{k=0}^{n} e^{ikt}\Big)$.
Si $t \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $S = n+1$. Supposons maintenant que $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$.
Alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ikt} = \frac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}t}(e^{-i\frac{n+1}{2}t} - e^{i\frac{n+1}{2}t})}{e^{i\frac{t}{2}}(e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}})} = e^{i\frac{n}{2}t}\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}$,
donc $S = \cos(\frac{n}{2}t)\dfrac{\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}$.

7 Applications à la trigonométrie

7.1 Linéarisation

Définition. Linéariser une expression trigonométrique, c'est transformer un produit de quantités en sin et cos en une somme de sin ou cos. Une méthode de linéarisation consiste à suivre les étapes suivantes :
- On remplace chaque occurrence en cos ou sin par son expression issue des formules d'Euler ;
- On développe les différents produits qui apparaissent alors ;
- On regroupe les différents termes à l'aide des formules d'Euler pour faire apparaître une somme de cos et de sin.

Exemple. Linéarisons $\cos^3\theta$.
$\cos^3\theta = \Big(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\Big)^3$, donc d'après la formule du binôme de Newton,
$\cos^3\theta = \dfrac{1}{8}(e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} + e^{-3i\theta}) = \dfrac{1}{8}(e^{3i\theta} + e^{-3i\theta}) + \dfrac{3}{8}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$, donc
$\cos^3\theta = \dfrac{\cos 3\theta}{4} + \dfrac{3\cos\theta}{4}$.

Exemple. Calcul de $\int \cos^4 t \sin^2 t \ dt$.
D'après les formules d'Euler et la formule du binôme de Newton,
$\cos^4 t = \frac{1}{2^4}(e^{it}+e^{-it})^4 = \frac{1}{2^4}(e^{4it}+4e^{2it}+6+4e^{-2it}+e^{-4it})$ et $\sin^2 t = -\frac{1}{4}(e^{2it}-2+e^{-2it})$,
donc $\cos^4 t \sin^2 t = -\frac{1}{2^5}(\cos(6t)+2\cos(4t)-\cos(2t)-2)$.
Ainsi, $\int \cos^4 t \sin^2 t \ dt = \frac{t}{16} + \frac{\sin(2t)}{64} - \frac{\sin(4t)}{64} - \frac{\sin(6t)}{192} + k$.

Remarque. Linéariser une expression trigonométrique permet de calculer ses dérivées d'ordre n, avec n quelconque, ou bien de la développer en série entière, c'est-à-dire de l'écrire sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ où (a_n) est une suite de réels. Cela permet aussi d'en calculer une primitive, comme dans l'exemple ci-dessus, mais il y a plus rapide que cette méthode pour le calcul de $\int \cos^k t \ \sin^h t \ dt$ dès que k ou h est impair, en posant $u = \sin t$ ou bien $u = \cos t$ selon les cas.

7.2 Antilinéarisation

On peut réciproquement transformer toute quantité de la forme $\cos(at)$ ou $\sin(bt)$, où $a, b \in \mathbb{N}$, sous la forme d'une combinaison linéaire d'expressions de la forme $\cos^k t \ \sin^h t$, où $k, h \in \mathbb{N}$. On parle alors d'antilinéarisation.

Définition. Une application polynomiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est une application de la forme $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \end{array}$, où $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.

Propriété. Si P et Q sont deux applications polynomiales, et si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, alors $\alpha P + \beta Q$ et PQ sont des applications polynomiales.

Théorème fondamental de l'algèbre : Pour toute application polynomiale P non constante de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, il existe au moins $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $P(\alpha) = 0$. On dit que α est une racine du polynôme P.

Démonstration.
Admis. □

Propriété. Soit P une application polynomiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ admettant une infinité de racines. Alors P est l'application identiquement nulle.

Démonstration.
Cf cours à venir sur les polynômes. □

> **Exercice.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$.
> T_n est appelé le n-ième polynôme de Tchebychev de première espèce.
> **Solution :**

◇ *Unicité :* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe deux polynômes T et S tels que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T(\cos\theta) = \cos n\theta = S(\cos\theta)$.
Soit $x \in [-1, 1]$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos\theta$, donc $T(x) = S(x)$,
puis $(T - S)(x) = 0$. Ainsi, $T - S$ possède une infinité de racines, donc il est identiquement nul, ce qui prouve l'unicité.
◇ *Existence , première méthode à l'aide de la formule de Moivre :*
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. D'après la formule de Moivre,
$\cos n\theta = \mathrm{Re}(e^{in\theta}) = \mathrm{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)^n)$, or d'après la formule du binôme de Newton, $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (i\sin\theta)^k \cos^{n-k}\theta$,

donc $\cos n\theta = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-\cos^2\theta)^k \cos^{n-2k}\theta$. Ainsi, $\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$, où

pour tout $x \in \mathbb{C}$, $T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-x^2)^k x^{n-2k}$. T_n est bien polynomiale, en tant que somme de produits d'applications polynomiales.
◇ *Existence, seconde méthode par récurrence :*
Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $R(n)$ l'assertion : il existe une application polynomiale T_n telle que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$.
Pour $n = 0$, $T_0 = 1$ convient.
Pour $n = 1$, $T_1 = Id_{\mathbb{C}}$ convient.
Soit $n \geq 1$. Supposons $R(n-1)$ et $R(n)$ et montrons $R(n+1)$ (récurrence double).
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$, donc
$\cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta T_n(\cos\theta) - T_{n-1}(\cos\theta)$. Ainsi, $\cos(n+1)\theta = T_{n+1}(\cos\theta)$, si l'on pose $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.

Exercice. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme S_n tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin(n+1)\theta = (\sin\theta)S_n(\cos\theta)$.
S_n est appelé le n-ième polynôme de Tchebychev de seconde espèce.
Solution : à faire.

8 Équations polynomiales

8.1 Racines n-ièmes

8.1.1 Racines n-ièmes de l'unité

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans un groupe $(G, .)$, les racines n-ièmes de l'unité sont les solutions de l'équation $a^n = 1$.

Notation. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Propriété. $\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\frac{\pi}{n}} / k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{2ik\frac{\pi}{n}} / k \in [\![0, n-1]\!]\}$. C'est le groupe cyclique d'ordre n, engendré par $e^{2i\frac{\pi}{n}}$.

Démonstration.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^n = 1$. Posons $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
$1 = z^n = \rho^n e^{in\theta}$, donc en passant aux modules, $\rho^n = 1$, mais $\rho \in \mathbb{R}_+$, donc $\rho = 1$.
Ainsi $z = e^{i\theta}$ et $e^{in\theta} = 1 = e^{i0}$, donc $n\theta \equiv 0\ [2\pi]$. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n\theta = 2k\pi$.
Ceci démontre que $\{z \in \mathbb{C}/z^n = 1\} \subset \{e^{2ik\frac{\pi}{n}}/k \in \mathbb{Z}\}$. L'inclusion réciproque est claire.
□

Remarques :
— Il y a exactement n racines n-ièmes complexes de l'unité.
— Géométriquement, les racines n-ièmes de l'unité dessinent un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle unité, dont l'un des sommets est 1.
— D'après la formule de Bernoulli, $X^n - 1 = (X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + 1)$, donc les racines n-ièmes de l'unité différentes de 1 sont exactement les racines du polynôme $X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1$.

Propriété. Les racines cubiques de l'unité sont $1, j$ et j^2, où $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$.
On a $1 + j + j^2 = 0$.

Exercice. Montrer que la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.
Plus généralement, pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, si l'on pose $\omega = e^{2ik\frac{\pi}{n}}$,
montrer que $\displaystyle\sum_{h=0}^{n-1} \omega^h = 0$.

Solution : $\omega \neq 1$, donc $\displaystyle\sum_{h=0}^{n-1} \omega^h = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0$.

8.1.2 Racines n-ièmes d'un complexe

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$.
Les racines n-ièmes de a sont les solutions de l'équation $z^n = a$ en l'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$.
Posons $a = re^{i\varphi}$. Alors, en notant $z_0 = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi}{n}}$ on a $z_0^n = a$. Ainsi,
$z^n = a \Longleftrightarrow z^n = z_0^n \Longleftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1 \Longleftrightarrow \frac{z}{z_0} \in \mathbb{U}_n$.
Ainsi, lorsque $a = re^{i\varphi}$, l'ensemble des solutions de l'équation $z^n = a$
est $\{r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{2k\pi+\varphi}{n}}/k \in \{0, \ldots, n-1\}\}$.

Remarques :
— Tout complexe a non nul possède exactement n racines n-ièmes.
Aucune de ces racines n'est "meilleure" qu'une autre, si bien que les notations fonctionnelles $\sqrt[n]{z}$ ou $z^{\frac{1}{n}}$ n'ont pas de sens.
— Géométriquement, les racines n-ièmes de a dessinent un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $|a|^{\frac{1}{n}}$.

Exemple. Calculons les racines cubiques de $a = -(1+2i)^3$.
Posons $z_0 = -1 - 2i$: $z_0^3 = a$, donc les racines cubiques de a sont z_0, jz_0 et $j^2 z_0$.

8.2 Équations du second degré

8.2.1 Racines carrées

Soit $a \in \mathbb{C}$. Si $a = 0$, 0 est l'unique racine carrée de a.
Pour la suite, on suppose que a est non nul.
D'après le paragraphe précédent, avec $n = 2$, a possède exactement deux racines carrées. De plus, si $a = re^{i\varphi}$ avec $r > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$, alors ces deux racines carrées sont $\sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$ et $-\sqrt{r}e^{i\frac{\varphi}{2}}$.
En particulier, lorsque $a \in \mathbb{R}_+^*$, les racines carrées de a sont les deux réels $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
Lorsque $a \in \mathbb{R}_-^*$, ses racines carrées sont $i\sqrt{a}$ et $-i\sqrt{a}$.
En général, on ne privilégie aucune des deux racines, donc la notation $\sqrt{z}$ ne peut être utilisée : la quantité $\sqrt{z}$ n'est pas définie.

Lorsque c'est l'écriture algébrique de a qui est donnée, c'est-à-dire lorsque a est donné sous la forme $a = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on peut déterminer les racines carrées de a selon le procédé suivant :
On pose $z = \alpha + i\beta$. Alors $z^2 = (\alpha^2 - \beta^2) + 2i\alpha\beta$, donc $z^2 = a \iff \begin{cases} x &= \alpha^2 - \beta^2 \\ y &= 2\alpha\beta \end{cases}$.
Ce système n'est pas facile à résoudre directement, mais il devient nettement plus simple en utilisant l'astuce suivante : si $z^2 = a$, alors $\alpha^2 + \beta^2 = |z|^2 = |a| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Cela permet d'ajouter une équation :

$$\begin{aligned}(E)\ :\ z^2 = a \quad &\iff \begin{cases} x &= \alpha^2 - \beta^2 \\ \sqrt{x^2+y^2} &= \alpha^2 + \beta^2 \\ y &= 2\alpha\beta \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha^2 &= \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2+y^2}) \\ \beta^2 &= \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+y^2} - x) \\ \mathrm{sgn}(\alpha\beta) &= \mathrm{sgn}(y) \end{cases} \ :\ (F).\end{aligned}$$

Si l'on note S_E et S_F les ensembles de solutions des équations (E) et (F), on a $S_E \subset S_F$, mais $|S_E| = 2 = |S_F|$, donc $S_E = S_F$.

Exemple. Recherchons les racines carrées de $a = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$:
$a = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$, donc les racines carrées de a sont $\pm\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$.

Exemple. Recherchons les racines carrées de $a = -3 - 4i$.
On pose $z = \alpha + i\beta$. Alors $z^2 = (\alpha^2 - \beta^2) + 2i\alpha\beta$ et $|z|^2 = \alpha^2 + \beta^2$, donc

$$z^2 = a \iff \begin{cases} -3 &= \alpha^2 - \beta^2 \\ \sqrt{3^2+4^2} &= \alpha^2 + \beta^2 \\ -4 &= 2\alpha\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha^2 &= 1 \\ \beta^2 &= 4 \\ \alpha\beta &= -2 \end{cases},$$

donc $z^2 = a \iff (\alpha, \beta) \in \{(1, -2), (-1, 2)\}$ et
les racines carrées de $-3 - 4i$ sont $\pm(1 - 2i)$.

8.2.2 Racines d'un trinôme

Formule : Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, c'est-à-dire les racines du polynôme $aX^2 + bX + c$, sont

$\boxed{\dfrac{-b \pm \delta}{2a}, \text{ où } \delta \text{ est une racine carrée du discriminant } \Delta = b^2 - 4ac}$.

Ces deux racines sont égales si et seulement si $\Delta = 0$. Dans ce cas, l'unique racine vaut $\dfrac{-b}{2a}$. On dit que c'est une racine double.

Démonstration.

On met le trinôme $az^2 + bz + c$ sous forme canonique :

$az^2 + bz + c = a\Big(z^2 + \dfrac{b}{a}z + \dfrac{c}{a}\Big) = a\Big((z + \dfrac{b}{2a})^2 + \dfrac{c}{a} - \dfrac{b^2}{4a^2}\Big)$,

donc $az^2 + bz + c = a\Big((z + \dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\Big)$.

Ainsi, $az^2 + bz + c = 0 \Longleftrightarrow (z + \dfrac{b}{2a})^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2} \Longleftrightarrow z + \dfrac{b}{2a} = \pm\dfrac{\delta}{2a}$. $\square$

Remarque. Lorsque $\Delta \in \mathbb{R}_-$, les racines sont $\dfrac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$. L'une est la conjuguée de l'autre.

Exercice. Résoudre l'équation $z^2 - (4 + 3i)z + (1 + 7i) = 0$.

Propriété. Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Notons z_1 et z_2 les deux racines (éventuellement égales à une racine double) du trinôme $aX^2 + bX + c$.

Alors $\boxed{z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a} \text{ et } z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}}$.

C'est un cas particulier des relations coefficients-racines d'un polynôme, que nous verrons plus loin.

Démonstration.

$z_1 z_2 = \dfrac{b^2 - \delta^2}{4a^2} = \dfrac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$. $\square$

Exemple. Posons $P(X) = X^2 - (1 + i)X + i$. On remarque que 1 est une racine "évidente", or le produit des racines est égal à i, donc les racines sont 1 et i.

Propriété. Soit $s, p \in \mathbb{C}$. Alors, pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$ si et seulement si $\{z_1, z_2\}$ est l'ensemble des racines du trinôme $X^2 - sX + p$.

Démonstration.

Si z_1 et z_2 sont les deux racines du trinôme $P(X) = X^2 - sX + p$, alors on vient de voir que $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$.

Réciproquement, supposons que $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$.

Alors $P(z_1) = z_1^2 - z_1 s + p = z_1^2 - z_1(z_1 + z_2) + z_1 z_2 = 0$ et de même, on calcule que $P(z_2) = 0$.

Il reste à montrer que, lorsque $\Delta = s^2 - 4p \neq 0$, $z_1 \neq z_2$, or la contraposée est claire : si $z_1 = z_2$, alors $s^2 - 4p = (2z_1)^2 - 4z_1^2 = 0$. $\square$

Exercice. Déterminer deux complexes dont la somme vaut -1 et

dont le produit vaut 1.
Solution : Ces deux complexes sont les racines de X^2+X+1, or on a vu que, j et j^2 étant les deux racines troisièmes de l'unité différentes de 1, ce sont les deux racines de X^2+X+1.

9 Géométrie du plan complexe

9.1 Distances et angles

Propriété.
Soit A, B, C trois points distincts du plan usuel, d'affixes respectifs $a, b, c \in \mathbb{C}$.
— Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est d'affixe $b-a$;
— La distance AB entre A et B est égale à $|b-a|$;
— L'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$ vérifie $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \equiv \arg\Big(\dfrac{b-c}{a-c}\Big)$ $[2\pi]$.

Démonstration.
Les deux premières propriétés ont été établies précédemment.
Posons $a-c = r_1 e^{i\varphi_1}$ et $b-c = r_2 e^{i\varphi_2}$, avec $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$.
D'après la relation de Chasles sur les angles,
$(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\overrightarrow{CA}, \vec{\imath}}) + (\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{CB}}) = (\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{CB}}) - (\widehat{\vec{\imath}, \overrightarrow{CA}})$, donc $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \equiv \varphi_2 - \varphi_1$ $[2\pi]$.
Par ailleurs, $\dfrac{b-c}{a-c} = \dfrac{r_2}{r_1} e^{i(\varphi_2-\varphi_1)}$, donc $\arg\Big(\dfrac{b-c}{a-c}\Big) \equiv \varphi_2 - \varphi_1$ $[2\pi]$. □

9.2 Orthogonalité et colinéarité

Propriété. Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan usuel d'affixes respectifs u et v. Alors,
— $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires
  — si et seulement si $\dfrac{u}{v} \in \mathbb{R}$ ou encore
  — si et seulement si $\text{Im}(\overline{u}v) = 0$;
— $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux
  — si et seulement si $\dfrac{u}{v} \in i\mathbb{R}$ ou encore
  — si et seulement si $\text{Re}(\overline{u}v) = 0$.

Si l'on pose $u = a+ib$ et $v = c+id$, avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$,
alors $\overline{u}v = (a-ib)(c+id) = (ac+bd) + i(ad-bc)$, donc
— $\text{Re}(\overline{u}v) = ac+bd \stackrel{\Delta}{=} < u, v >$: c'est le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Il est nul si et seulement si les deux vecteurs sont orthogonaux.
— $\text{Im}(\overline{u}v) = ad-bc \stackrel{\Delta}{=} \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \stackrel{\Delta}{=} \det(u, v)$: c'est le déterminant (aussi appelé le produit mixte) des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Il est nul si et seulement si les deux vecteurs sont colinéaires.

Démonstration.
◇ Notons (C) la condition "$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires".
$(C) \Longleftrightarrow \arg(u) \equiv \arg(v)\ [\pi] \Longleftrightarrow \arg(\frac{u}{v}) \equiv 0\ [\pi] \Longleftrightarrow \frac{u}{v} \in \mathbb{R}$,
donc $(C) \Longleftrightarrow \dfrac{u}{v} = \dfrac{\overline{u}}{\overline{v}} \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(\overline{u}v) = 0$.
◇ Notons (C') la condition "$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux".
$(C') \Longleftrightarrow \arg(u) \equiv \arg(v) + \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Longleftrightarrow \arg(\frac{u}{v}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Longleftrightarrow \frac{u}{v} \in i\mathbb{R}$,
donc $(C') \Longleftrightarrow \dfrac{u}{v} = -\dfrac{\overline{u}}{\overline{v}} \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(\overline{u}v) = 0$. □

Corollaire. Soit A, B, C trois points du plan usuel, d'affixes respectifs $a, b, c \in \mathbb{C}$.

— A, B et C sont alignés si et seulement si $\dfrac{a-b}{c-b} \in \mathbb{R}$, ou encore si et seulement si $\mathrm{Im}(\overline{(a-b)}(c-b)) = 0$. On a aussi
$C \in (AB) \Longleftrightarrow \arg(c-a) \equiv \arg(b-a)\ [\pi] \Longleftrightarrow (\exists t \in \mathbb{R},\ \ c = (1-t)a + tb)$.
— Le triangle ABC est rectangle en B si et seulement si $\dfrac{a-b}{c-b} \in i\mathbb{R}$ ou encore si et seulement si $\mathrm{Re}(\overline{(a-b)}(c-b)) = 0$.

Exercice. Soit A et B deux points distincts du plan usuel d'affixes a et b.
À quelle condition le point d'affixe z appartient-il à la droite (AB) ?

Solution : Soit $z \in \mathbb{C}$. Notons M le point d'affixe z.
$M \in (AB) \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(\overline{(a-b)}(z-b)) = 0 \Longleftrightarrow \overline{(a-b)}(z-b) = \overline{\overline{(a-b)}(z-b)}$, donc
$M \in (AB) \Longleftrightarrow \overline{(a-b)}(z-b) = (a-b)\overline{(z-b)}$,
puis $M \in (AB) \Longleftrightarrow z(\overline{a} - \overline{b}) + \overline{z}(b-a) = b(\overline{a} - \overline{b}) + \overline{b}(b-a)$.
En conclusion, $M \in (AB) \Longleftrightarrow z(\overline{a} - \overline{b}) + \overline{z}(b-a) = \overline{a}b - a\overline{b}$.

9.3 Équation d'un cercle

Notons C le cercle de centre $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$. Alors

$$\begin{aligned} z = x + iy \in C &\Longleftrightarrow |z - \alpha| = r \\ &\Longleftrightarrow (z-\alpha)(\overline{z} - \overline{\alpha}) = r^2 \\ &\Longleftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by = r^2 - a^2 - b^2. \end{aligned}$$

Réciproquement, un ensemble admettant une équation cartésienne de la forme $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = c$ est un cercle éventuellement réduit à un point ou à l'ensemble vide.