Équations différentielles

Table des matières

1 Equations différentielles linéaires d'ordre 1 **1**

2 Equation différentielle linéaire du second ordre **5**
2.1 Équations à coefficients quelconques 5
2.2 Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants 9
2.2.1 Résolution de (H) 9
2.2.2 Résolution de l'équation avec second membre 10

3 Equations à variables séparables (hors programme) **12**
3.1 Equations à variables séparées 12
3.2 Cas général 13

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Notation. Pour tout ce paragraphe, on fixe un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$ de cardinal infini. On fixe deux applications continues a et b de I dans $\mathbb{K}$.
On considère les équations différentielles suivantes en l'inconnue y :
$(E) : y' = a(t)y + b(t)$ et $(H) : y' = a(t)y$.
(E) est la forme générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et (H) est son équation homogène associée. On dit aussi que (H) est l'équation sans second membre (ESSM).

Définition. On dit que y est une solution de (E) si et seulement si y est une application dérivable de I dans $\mathbb{K}$ telle que, pour tout $t \in I$, $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$.
Dans ce cas, le graphe de y est appelé une courbe intégrale de (E).

Remarque. Cette équation différentielle est dite du premier ordre car elle ne fait intervenir que la dérivée d'ordre 1 et non les dérivées d'ordres supérieurs.

Remarque. Il s'agit bien d'une équation linéaire car elle est de la forme

$(E)\ :\ f(y)=b$, en posant $\begin{array}{rccc} f: & D^1(I,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(I,\mathbb{K}) \\ & y & \longmapsto & y'-a.y \end{array}$, qui est bien une application linéaire.
En particulier, l'ensemble des solutions de (H) est égal à $\mathrm{Ker}(f)$, donc c'est un sous-espace vectoriel : si y_1 et y_2 sont deux solutions de (H), pour tout $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, $t\longmapsto \alpha y_1(t)+\beta y_2(t)$ est encore une solution de (H).

Exemple. $t\longmapsto e^t$ est une solution de l'équation différentielle $y'=y$.
$t\longmapsto e^{t^2}+1$ est une solution de l'équation différentielle $y'=2ty-2t$.

Exemple. L'équation différentielle régissant la vitesse v d'une masse chutant dans un fluide (très) visqueux est du type $v'+\lambda v^2=g$ où λ est une grandeur physique (en m^{-1}) et où g est l'accélération de la pesanteur. Ce n'est pas une équation différentielle linéaire !

Définition. Soit $y_0\in\mathbb{K}$ et $t_0\in I$.
Le problème de Cauchy relatif à (E) et au couple (t_0,y_0) consiste en la recherche des solutions y de (E) vérifiant la condition initiale $y(t_0)=y_0$.

Exemple. $t\longmapsto e^{t^2}+1$ est une solution du problème de Cauchy relatif à l'équation $y'=2ty-2t$ et à la condition initiale $y(0)=2$.

Propriété. Notons S_H l'ensemble des solutions de (H) et S_E l'ensemble des solutions de (E). Si y_0 est une solution de (E), alors $S_E=\{y_0+y/y\in S_H\}\stackrel{\Delta}{=}y_0+S_H$. On dit que la solution générale de (E) s'obtient en ajoutant une solution particulière de (E) à la solution générale de (H).

Démonstration.
C'est un cas particulier de la propriété sur les équations linéaires énoncée en page 11 du chapitre sur la structure d'espace vectoriel. □

Théorème. Notons A une primitive de a. Alors

$$\boxed{y'=a(t)y\iff[\exists\lambda\in\mathbb{K}\quad\forall t\in I\quad y(t)=\lambda e^{A(t)}]}.$$

Démonstration.
Soit y une application dérivable de I dans $\mathbb{K}$. Notons z l'application de I dans $\mathbb{K}$ définie par $\forall t\in I\quad z(t)=y(t)e^{-A(t)}$.
z est dérivable et $\forall t\in I\quad z'(t)=e^{-A(t)}(y'(t)-a(t)y(t))$.
Ainsi $(H)\iff z'=0\iff\exists\lambda\in\mathbb{K}\quad\forall t\in I\quad z(t)=\lambda$. Donc
$(H)\iff\exists\lambda\in\mathbb{K}\quad\forall t\in I\quad y(t)=\lambda e^{A(t)}$. □

Exemple. En dynamique des populations, le modèle de Malthus (1798) décrit la vitesse de croissance d'une population lorsqu'elle est de taille raisonnable et placée dans des conditions idéales : espace illimité, nourriture suffisante, absence de prédateurs, résistance aux maladies ... En notant $N(t)$ le nombre d'individus à l'instant t, le taux de croissance est alors proportionnel à la population, ce qui donne l'équation

différentielle suivante : $(H)\ :\ N'(t) = rN(t)$, où $r > 0$ représente le taux de croissance relatif.
La solution de (H) est $N(t) = N_0 e^{rt}$ où N_0 est la population initiale, à l'instant $t = 0$. La croissance de la population est donc exponentielle pour ce modèle.
Dans la réalité, de telles conditions idéales sont rares et ne restent valables que sur de courtes durées. Notamment, dès que l'on s'approche de la surpopulation, le manque de nourriture, les interactions dues à la promiscuité etc., font baisser le taux de croissance si bien que la population ne dépasse pas une certaine limite. Le modèle de Verhulst (1838) a pour but de tenir compte de ces contraintes imposées par le milieu. Pour cela, Verhulst choisit de remplacer le taux de croissance constant r du modèle de Malthus par un taux de croissance variant avec la taille de la population. Plus précisément, Verhulst corrige le taux de croissance per capita r en le multipliant par le facteur correctif limitant $1 - \dfrac{N(t)}{K}$ où K désigne l'effectif maximal de la population. Ainsi, lorsque la population est faible devant K, le facteur $1 - \dfrac{N(t)}{K}$ est proche de 1 et le taux de croissance est proche de r. On retrouve alors le modèle malthusien et sa croissance exponentielle. A contrario, lorsque la population s'approche de sa limite K, le facteur $1 - \dfrac{N(t)}{K}$ tend vers 0 et le taux de croissance devient très faible.
Verhulst aboutit ainsi à l'équation différentielle suivante :

$$(E)\ :\ N'(t) = r\Big(1 - \frac{N(t)}{K}\Big)N(t).$$

Une telle équation se rencontre pour d'autres modélisations, en économie et en chimie notamment. Elle porte le nom d'équation logistique. C'est une équation différentielle non linéaire.
Cependant, lorsque pour tout $t \in I$, $N(t) \neq 0$, si l'on pose $y = \frac{1}{N}$,
$(E) \iff -\dfrac{y'}{y^2} = r\Big(1 - \dfrac{1}{Ky}\Big)\dfrac{1}{y} \iff y' + ry = \dfrac{r}{K}$. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, dont l'équation homogène $(H)\ :\ y' = -ry$ a pour solution générale $t \longmapsto \lambda e^{-rt}$.
On devine qu'une solution particulière de (E) est l'application constante $t \longmapsto \frac{1}{K}$, donc la solution générale de (E) est $t \longmapsto \lambda e^{-rt} + \frac{1}{K}$, ce qui donne $N(t) = \dfrac{K}{\lambda K e^{-rt} + 1}$, où λ est un réel qui dépend des conditions initiales.

Exemple. Un circuit électrique composé en série d'un condensateur de capacité C et d'une résistance R alimentés par un générateur de force électromotrice V s'appelle un circuit RC. Si on note $q(t)$ la charge du condensateur à l'instant t, la loi des mailles permet d'établir que q satisfait l'équation différentielle

$$(E)\ :\ q' + \frac{q}{RC} = \frac{V}{R}.$$

Comme pour l'exemple précédent, on montre que

$(E) \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ q(t) = \lambda e^{-\frac{t}{RC}} + VC.$

Exemple. $(E)\ :\ y' + \dfrac{1}{1+t^2} y = 0 \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda e^{-\arctan t}.$

Exemple. $y' - ty = 2t \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = \lambda e^{\frac{t^2}{2}} - 2.$

Résolution de (E) par la méthode de variation de la constante.
Soit y une application dérivable de I dans $\mathbb{K}$. On vient de voir que y est solution de (H) si et seulement si il existe une *constante* λ telle que $y(t) = \lambda e^{A(t)}$. Nous allons faire "varier cette constante" en posant $y(t) = \lambda(t) e^{A(t)}$ où $\lambda(t)$ est maintenant une fonction quelconque de t.
Formellement, cela revient à noter λ l'application de I dans $\mathbb{K}$ définie par $\forall t \in I \quad \lambda(t) = y(t) e^{-A(t)}$. Ainsi $y(t) = \lambda(t) e^{A(t)}$. On vérifie que $(E) \Longleftrightarrow \lambda'(t) e^{A(t)} = b(t) \Longleftrightarrow \lambda'(t) = b(t) e^{-A(t)}$. Fixons $t_0 \in I$.
$(E) \Longleftrightarrow \exists C \in \mathbb{K} \quad \lambda(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} b(u) e^{-A(u)} du + C$, donc

$$(E) \Longleftrightarrow \exists C \in \mathbb{K} \quad \forall t \in I \quad y(t) = e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} b(u) e^{-A(u)} du + C e^{A(t)}.$$

Résolution du problème de Cauchy relatif à (E) et à $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$.
Notons $(\mathcal{C})$ la condition de Cauchy suivante : $(\mathcal{C}) \Longleftrightarrow [(E)$ et $y(t_0) = y_0]$. Alors
$(\mathcal{C}) \Longleftrightarrow [\exists C \in \mathbb{K} \quad y(t) = e^{A(t)} \displaystyle\int_{t_0}^{t} b(u) e^{-A(u)} du + C e^{A(t)}$ et $C e^{A(t_0)} = y_0]$, donc
$(C) \Longleftrightarrow [\forall t \in I \quad y(t) = e^{A(t)} \displaystyle\int_{t_0}^{t} b(u) e^{-A(u)} du + y_0 e^{A(t) - A(t_0)}]$.
On a donc prouvé, dans le cas particulier d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1, qu'il y a existence et unicité d'une solution pour un problème de Cauchy donné. Ce résultat reste vrai pour des équations différentielles beaucoup plus générales, c'est le théorème de Cauchy-Lipschitz, que nous énonçons plus loin pour un autre type d'équations différentielles.

Exemple. $(E)\ :\ y' - ty = 2te^{\frac{t^2}{2}} \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, y(t) = (\lambda + t^2) e^{\frac{t^2}{2}}.$

Remarque. Considérons l'équation $(E)\ : y' - ty = 2te^{\frac{t^2}{2}} + 2t$.
D'après le principe de superposition des solutions, et d'après les exemples précédents, la forme générale des solutions de (E) est $t \longmapsto (\lambda + t^2) e^{\frac{t^2}{2}} - 2$.

> **Exercice.** Résoudre l'équation différentielle $(E)\ :\ ty' + y = 1$.
>
> **Solution :** Soit $I \in \{\mathbb{R}_-^*, \mathbb{R}_+^*\}$. Soit $y\ :\ I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable. Alors, sur I, on a $(E) \Longleftrightarrow y' + \dfrac{y}{t} = \dfrac{1}{t} \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall t \in I,\ y(t) = 1 + \dfrac{\lambda}{t}$.
> Recherchons maintenant une solution y définie sur $\mathbb{R}$ en entier : ce qui précède montre que par restriction à $\mathbb{R}_-^*$ ou à $\mathbb{R}_+^*$, il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}_-^*$, $y(t) = 1 + \dfrac{\lambda_1}{t}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $y(t) = 1 + \dfrac{\lambda_2}{t}$.

Si $\lambda_1 \neq 0$, $|y(t)| \underset{t\to 0^-}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui est faux car en tant que solution de (E) sur $\mathbb{R}$, y est dérivable donc continue en 0. Donc $\lambda_1 = 0$ et de même $\lambda_2 = 0$.
La réciproque étant claire, on a montré que la fonction constante égale à 1 est l'unique solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$ en entier.

Exercice. Résoudre sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ le problème de Cauchy

$$(E)\ :\ y' + 2y\tan t = 2 \text{ et } y(0) = 0.$$

Solution : La solution générale de (E) est $t \longmapsto \lambda\cos^2 t + \sin(2t)$, donc l'unique solution du problème de Cauchy est $t \longmapsto \sin(2t)$.

Exemple. Résolution du système différentiel

$$(S)\ :\quad \begin{cases} (1+t^2)x' &= tx + y + 2t^2 - 1 \\ (1+t^2)y' &= -x + ty + 3t \end{cases}$$

posons $z = x + iy$.
Alors $(S) \Longleftrightarrow (1+t^2)z'(t) = x(t-i) + y(1+it) + 2t^2 - 1 + 3it$, donc
$(S) \Longleftrightarrow (1+t^2)z' = (t-i)z + (t+i)(2t+i) \Longleftrightarrow z' = \dfrac{z}{t+i} + \dfrac{2t+i}{t-i}$.
L'équation homogène associée est
$(H) : z' = \dfrac{z}{t+i} \Longleftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{C} \quad z = \lambda(t+i)$.
Appliquons la méthode de variation de la constante. Posons $z = \lambda(t)(t+i)$. Alors
$(S) \Longleftrightarrow \lambda'(t)(t+i) = \dfrac{2t+i}{t-i} \Longleftrightarrow \lambda' = \dfrac{2t+i}{t^2+1}$, donc
$(S) \Longleftrightarrow \exists(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \lambda(t) = \ln(1+t^2) + i\arctan(t) + C_1 + iC_2$, donc
$(S) \Longleftrightarrow \exists(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x(t) &= C_1 t - C_2 - \arctan(t) + t\ln(1+t^2) \\ y(t) &= C_1 + tC_2 + t.\arctan(t) + \ln(1+t^2) \end{cases}$

2 Equation différentielle linéaire du second ordre

2.1 Équations à coefficients quelconques

Notation. Pour tout ce paragraphe, on fixe un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$ de cardinal infini. On fixe trois applications a, b et c continues de I dans $\mathbb{K}$.
On considère l'équation suivante en l'inconnue y :

$$(E) \qquad y" = a(x)y' + b(x)y + c(x).$$

C'est la forme générale d'une équation différentielle linéaire du second ordre.
On notera (H) l'équation homogène associèe : $y" = a(x)y' + b(x)y$.

Définition. On appelle solution de (E) toute application $y : I \longrightarrow \mathbb{K}$ deux fois dérivable telle que

$$\forall x \in I \ \ y"(x) = a(x)y'(x) + b(x)y(x) + c(x).$$

Dans ce cas, le graphe de y est appelé une courbe intégrale de (E).

Propriété. Notons S_H l'ensemble des solutions de (H) et S_E l'ensemble des solutions de (E). Si y_0 est une solution de (E), alors $S_E = \{y_0 + y/y \in S_H\} \stackrel{\Delta}{=} y_0 + S_H$. On dit que la solution générale de (E) s'obtient en ajoutant une solution particulière de (E) à la solution générale de (H).

Démonstration.
(E) est encore une équation linéaire. Cette propriété est encore un cas particulier de la propriété vue en page 11 du chapitre sur la structure d'espace vectoriel. □

Définition. Soit $(x_0, y_0, y_0') \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.
On appelle problème de Cauchy relatif à (E) et au triplet (x_0, y_0, y_0') le problème de la recherche des solutions de (E) telles que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_0'$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz.
Pour tout $(x_0, y_0, y_0') \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, il y a existence et unicité au problème de Cauchy relatif à (E) et au triplet (x_0, y_0, y_0').

Démonstration.
Admis □

Cas particulier où on connaît une solution φ_1 de (H) ne s'annulant pas sur I.
On considère l'application $\lambda = \dfrac{y}{\varphi_1}$, (on dit que l'on pose $y = \lambda\varphi_1$).
Alors (E) est équivalente à une équation linéaire d'ordre 1 en λ'.

Démonstration.
$(E) \Longleftrightarrow c(x) + b(x)\lambda\varphi_1 + a(x)(\lambda'\varphi_1 + \lambda\varphi_1') = \lambda"\varphi_1 + \lambda\varphi"_1 + 2\lambda'\varphi_1'$,
or $b(x)\varphi_1 + a(x)\varphi_1' = \varphi"_1$, donc
$(E) \Longleftrightarrow \lambda" = \dfrac{a(x)\varphi_1 - 2\varphi_1'}{\varphi_1}\lambda' + \dfrac{c(x)}{\varphi_1}$. □

Exemple. Résolution de $(E) : (t+1)y" - 2y' - (t-1)y = te^{-t}$.
On recherchera notamment les solutions définies sur $\mathbb{R}$ en entier.

⋄ On remarque que $(1+t) - 2 + (1-t) = 0$, donc $t \longrightarrow e^t$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène qui ne s'annule jamais. On peut donc appliquer la méthode ci-dessus.

⋄ On recherche dans un premier temps les solutions définies sur l'intervalle $]-\infty, -1[$ (respectivement : $]-1, +\infty[$), noté I.
Soit $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable. On pose $\forall t \in I \quad y(t) = \lambda(t)e^t$.
Alors $(E) \Longleftrightarrow te^{-t} = e^t((1-t)\lambda - 2(\lambda + \lambda') + (1+t)(\lambda + 2\lambda' + \lambda"))$, puis
$(E) \Longleftrightarrow te^{-2t} = (1+t)\lambda" + 2t\lambda' \Longleftrightarrow \lambda" = -\dfrac{2t}{1+t}\lambda' + \dfrac{te^{-2t}}{1+t}$.

⋄ Notons (H) l'équation $z' = -\dfrac{2t}{1+t}z$.

$\displaystyle\int \frac{-2t}{1+t}dt = \int \frac{-2(1+t)+2}{1+t}dt = -2t + 2\ln|1+t| + k$, donc

$(H) \iff [\exists C \in \mathbb{R}\ \forall t \in I\ \ z = C(1+t)^2 e^{-2t}]$.

◇ Appliquons la méthode de variation de la constante. On pose $\lambda' = C(t)(1+t)^2e^{-2t}$. D'après le cours,

$(E) \iff C'(t)(1+t)^2e^{-2t} = \dfrac{te^{-2t}}{1+t} \iff C'(t) = \dfrac{t}{(1+t)^3} = \dfrac{(1+t)-1}{(1+t)^3}$, donc

$(E) \iff \exists C \in \mathbb{R}\ \ C(t) = \dfrac{-1}{1+t} + \dfrac{1}{2(1+t)^2} + C$, puis

$(E) \iff \exists C \in \mathbb{R}\ \ \lambda' = e^{-2t}(-(1+t) + \frac{1}{2} + C(1+t^2+2t))$.

Ainsi $(E) \iff \exists C \in \mathbb{R}\ \forall t \in I\ \ \lambda'(t) = (Ct^2 + (2C-1)t + C - \frac{1}{2})e^{-2t}$.

◇ Cette dernière application admet une primitive de la forme $(\alpha t^2 + \beta t + \gamma)e^{-2t}$, avec $Ct^2 + (2C-1)t + C - \frac{1}{2} = -2(\alpha t^2 + \beta t + \gamma) + 2t\alpha + \beta$, donc

$-2\alpha = C$, $-2\beta + 2\alpha = 2C - 1$ et $-2\gamma + \beta = C - \frac{1}{2}$. Ainsi $\alpha = -\dfrac{C}{2}$,

$\beta = \frac{1}{2}(-C - 2C + 1) = -\dfrac{3C-1}{2}$ et $\gamma = \frac{1}{2}(\dfrac{1-3C}{2} - C + \dfrac{1}{2}) = \dfrac{-5C+2}{4}$. Donc

$(E) \iff \exists (C,D) \in \mathbb{R}^2\quad y(t) = e^{-t}(C(-\dfrac{t^2}{2} - \dfrac{3}{2}t - \dfrac{5}{4}) + \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{2}) + De^t$.

Ainsi $(E) \iff \exists (C,D) \in \mathbb{R}^2\quad y(t) = De^t + e^{-t}(C(2t^2+6t+5) + \dfrac{t+1}{2})$.

◇ Si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ en entier, alors ses restrictions sur $]-\infty,-1[$ et sur $]-1,+\infty[$ sont des solutions de (E), qui sont donc de la forme précédente.
Réciproquement, étudions à quelle condition une solution y_- sur $]-\infty,-1[$ et une solution y_+ sur $]-1,+\infty[$ se raccordent en une solution y sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire qu'il existe une solution y de (E) sur $\mathbb{R}$ telle que ses restrictions aux intervalles $]-\infty,-1[$ et $]-1,+\infty[$ sont y_- et y_+ respectivement).

$\exists (C_-,D_-) \in \mathbb{R}^2\quad \forall t \in]-\infty,-1[\ \ y_-(t) = D_-e^t + e^{-t}(C_-(2t^2+6t+5) + \dfrac{t+1}{2})$ et

$\exists (C_+,D_+) \in \mathbb{R}^2\quad \forall t \in]-1,+\infty[\ \ y_+(t) = D_+e^t + e^{-t}(C_+(2t^2+6t+5) + \dfrac{t+1}{2})$.

y_- se prolonge sur $]-\infty,-1]$ en une application de classe C^∞ que l'on notera encore y_-. De même y_+ se prolonge sur $[-1,+\infty[$ en une application de classe C^∞ que l'on notera encore y_+.

Alors y_- et y_+ se raccordent en une solution y de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si

$$(D)\ :\ \forall i \in \{0,1,2\}\quad y_-^{(i)}(-1) = y_+^{(i)}(-1).$$

[**En effet** :

◇ supposons que y_- et y_+ se raccordent en une solution y de (E) sur $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $i \in \{0,1,2\}\quad y_-^{(i)}(-1) = y^{(i)}(-1) = y_+^{(i)}(-1)$.

◇ Réciproquement, supposons que $\forall i \in \{0,1,2\}\quad y_-^{(i)}(-1) = y_+^{(i)}(-1)$.

— En particulier, avec $i = 0$, (D) affirme que $y_-(-1) = y_+(-1)$. On peut donc définir une application y sur $\mathbb{R}$ en entier en convenant que :
pour tout $t \in]-\infty,-1]$, $y(t) = y_-(t)$ et pour tout $t \in [-1,+\infty[$, $y(t) = y_+(t)$.
y est continue à gauche et à droite en -1, donc y est continue sur $\mathbb{R}$ en entier.

— $y|_{]-\infty,-1]} = y_-|_{]-\infty,-1]}$, donc $y|_{]-\infty,-1]}$ est dérivable sur $]-\infty,-1]$: en particulier, y est dérivable à gauche en -1 et $y'_g(-1) = y'_-(-1)$.
De même, on montre que y est dérivable à droite en -1 et $y'_d(-1) = y'_+(-1)$.
D'après (D), $y'_g(-1) = y'_d(-1)$, donc (d'après un cours à venir) y est dérivable en -1 et $y'(-1) = y'_g(-1) = y'_d(-1) = y'_-(-1) = y'_+(-1)$.

— On peut ensuite appliquer le même raisonnement à y' : $y'|_{]-\infty,-1]} = y'_-|_{]-\infty,-1]}$, donc $y'|_{]-\infty,-1]}$ est dérivable sur $]-\infty,-1]$: en particulier, y' est dérivable à gauche en -1 et $(y')'_g(-1) = y''_-(-1)$.
De même, on montre que y' est dérivable à droite en -1 et $(y')'_d(-1) = y''_+(-1)$.
D'après l'hypothèse, $(y')'_g(-1) = (y')'_d(-1)$, donc y' est dérivable en -1 et $y''(-1) = (y')'_g(-1) = (y')'_d(-1) = y''_-(-1) = y''_+(-1)$.

— De plus, $y''|_{]-\infty,-1]} = y''_-|_{]-\infty,-1]}$ et $y''|_{[-1,+\infty[} = y''_+|_{[-1,+\infty[}$, donc y'' est continue à gauche et à droite en -1. Ainsi, y est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ en entier.

— Il reste à montrer que y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
Or, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $(t+1)y"(t) - 2y'(t) - (t-1)y(t) = te^{-t}$.
Comme y est C^2 en -1, en faisant tendre t vers -1, on en déduit que $(-1+1)y"(-1) - 2y'(-1) - (-1-1)y(-1) = -1e^{-(-1)}$.
Ainsi y est bien une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.]

On peut éviter un calcul direct des dérivées successives en -1 de y_- et de y_+ en évaluant des développements limités à l'ordre 2 de y_- et de y_+ au voisinage de -1. En effet, la formule de Taylor-Young et le principe d'unicité du développement limité montrent que la condition (D) est équivalente au fait que les développements limités à l'ordre 2 en -1 de y_- et de y_+ ont exactement les mêmes coefficients.

Posons $h = t + 1$.
$y_-(t) = D_-e^{h-1} + e^{1-h}(C_-(2h^2 + 2 - 4h + 6h - 6 + 5) + \frac{h}{2})$, donc
$y_-(t) = D_-\dfrac{1}{e}(1 + h + \dfrac{h^2}{2} + \circ(h^2)) + e(1 - h + \dfrac{h^2}{2} + \circ(h^2))(C_- + (2C_- + \dfrac{1}{2})h + 2C_-h^2)$,
puis

$$\begin{aligned} y_-(t) = \quad & D_-\frac{1}{e}(1 + h + \frac{h^2}{2} + \circ(h^2)) \\ & + e\Big[C_- + h\Big(-C_- + 2C_- + \frac{1}{2}\Big) + h^2\Big(\frac{C_-}{2} + 2C_- - (2C_- + \frac{1}{2})\Big) + \circ(h^2)\Big]. \end{aligned}$$

Finalement, $y_-(t) = \dfrac{D_-}{e} + C_-e + h(\dfrac{D_-}{e} + C_-e + \dfrac{e}{2}) + \dfrac{h^2}{2}(\dfrac{D_-}{e} + C_-e - e) + o(h^2)$.
Le calcul étant identique pour y_+, y_- et y_+ se raccordent si et seulement si

$$\frac{D_-}{e} + C_-e = \frac{D_+}{e} + C_+e.$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$ en entier est

$$z_5 + \{\sum_{i=1}^{4} x_i z_i / \frac{x_1}{e} + x_2 e = \frac{x_3}{e} + x_4 e\},$$

où $\begin{array}{rccl} z_1 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \begin{cases} e^t & \text{si } t < -1 \\ 0 & \text{si } t \geq -1 \end{cases} \end{array}$, $\begin{array}{rccl} z_2 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \begin{cases} (2t^2+6t+5)e^{-t} & \text{si } t < -1 \\ 0 & \text{si } t \geq -1 \end{cases} \end{array}$,

$\begin{array}{rccl} z_3 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \begin{cases} e^t & \text{si } t \geq -1 \\ 0 & \text{si } t < -1 \end{cases} \end{array}$, $\begin{array}{rccl} z_4 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \begin{cases} (2t^2+6t+5)e^{-t} & \text{si } t \geq -1 \\ 0 & \text{si } t < -1 \end{cases} \end{array}$

et $\begin{array}{rccl} z_5 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \dfrac{t+1}{2}e^{-t} \end{array}$.

2.2 Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Notation. Pour tout ce paragraphe, on fixe un intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$ de cardinal infini. Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et f une application continue de I dans $\mathbb{K}$.
On considère l'équation suivante en l'inconnue y :

$$(E) \qquad y" + ay' + by = f(x).$$

On notera (H) l'équation homogène associée : $y" + ay' + by = 0$.

Exemples :

— L'équation différentielle décrivant l'élongation d'un ressort de raideur k portant une masse m (sans force de frottement) est $my'' + ky = 0$. On parle de régime libre car le système ne subit pas de force extérieure.
— Avec une force de frottement proportionnelle à la vitesse, l'équation différentielle précédente devient $my'' + cy' + ky = 0$. C'est toujours un régime libre (les forces de frottements ne sont pas considérées comme des forces extérieures).
— Lorsqu'enfin, le ressort subit une force extérieure dépendant du temps, on obtient l'équation différentielle $my'' + cy' + ky = f(t)$. On parle alors de régime forcé.
— L'équation différentielle régissant la position du centre de gravité d'un pendule oscillant est du type $\theta'' + \omega^2 \sin\theta = 0$ où ω est une grandeur physique. Cette équation n'est pas linéaire. En physique, on considère parfois que les oscillations sont de faibles amplitudes (et de petite période), ce qui permet de linéariser l'équation sous la forme $\theta'' + \omega^2\theta = 0$.

2.2.1 Résolution de (H)

Le polynôme $\chi = X^2 + aX + b$ est appelé le polynôme caractéristique de (H) ou de (E). On montre au tableau les résultats suivants, à connaître parfaitement.

• *Premier cas.* Si $\Delta = a^2 - 4b \neq 0$.
χ admet deux racines complexes distinctes λ et μ.
Alors y est solution de (H) si et seulement si c'est une combinaison linéaire de $\begin{array}{rccl} y_1 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & e^{\lambda x} \end{array}$ et de $\begin{array}{rccl} y_2 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & e^{\mu x} \end{array}$:

$$(H) \iff \exists (u, v) \in \mathbb{K}^2 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \ \ y(x) = ue^{\lambda x} + ve^{\mu x}.$$

Cas particulier où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $\Delta < 0$.

Dans ce cas, la formule précédente est parfois tout à fait suffisante et il n'est pas nécessaire d'en faire un cas particulier. Cependant, il est peut être utile de fournir une expression des solutions sous une forme explicitement réelle.
λ et μ sont non réelles et conjuguées, donc si l'on note $\lambda = \alpha + i\beta$, $\mu = \alpha - i\beta$.
$e^{\alpha x}\cos(\beta x) = \frac{1}{2}(e^{\alpha x + i\beta x} + e^{\alpha x - i\beta x}) = \frac{1}{2}(e^{\lambda x} + e^{\mu x}) \in \mathcal{S}_H$
et $e^{\alpha x}\sin(\beta x) = \frac{1}{2i}(e^{\alpha x + i\beta x} - e^{\alpha x - i\beta x}) = \frac{1}{2i}(e^{\lambda x} - e^{\mu x}) \in \mathcal{S}_H$.
Donc si on note $\begin{array}{rccc} y_3 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & e^{\alpha x}\cos\beta x \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} y_4 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & e^{\alpha x}\sin\beta x \end{array}$, y_3 et y_4 sont des solutions de (H).
On peut montrer que

$$(H) \Longleftrightarrow \exists (u,v) \in \mathbb{R}^2 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \;\; y(x) = ue^{\alpha x}\cos\beta x + ve^{\alpha x}\sin\beta x.$$

- *Deuxième cas.* Si $\Delta = 0$.

χ admet une racine double notée λ. Alors les solutions de (H) sont exactement les combinaisons linéaires de $\begin{array}{rccc} y_1 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & e^{\lambda x} \end{array}$ et de $\begin{array}{rccc} y_2 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & xe^{\lambda x} \end{array}$:

$$(H) \Longleftrightarrow \exists (u,v) \in \mathbb{K}^2 \;\; \forall x \in \mathbb{R} \;\; y(x) = e^{\lambda x}(u + xv).$$

Exemple. Un oscillateur harmonique soumis au champ de pesanteur terrestre satisfait l'équation

$$(E) \; : \; y'' + \omega^2 y = g, \text{ où } \omega > 0.$$

La solution générale de l'ESSM est $y(t) = \lambda\cos\omega t + \mu\sin\omega t$, que l'on peut aussi mettre sous la forme $y(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$.
Une solution particulière de (E) est la fonction constante $t \longmapsto \dfrac{g}{\omega^2}$,
donc $(E) \; : \; \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \;\; \forall t \in \mathbb{R}, \;\; y(t) = \lambda\cos\omega t + \mu\sin\omega t + \dfrac{g}{\omega^2}$.

2.2.2 Résolution de l'équation avec second membre

Comme on sait résoudre (H), quitte à restreindre l'intervalle I à un sous-intervalle, on peut se placer dans le cas où on connaît une solution de (H) qui ne s'annule jamais. On a déjà vu comment résoudre (E) dans cette situation.
Cependant, lorsque f est le produit d'une application polynomiale et d'une application exponentielle, il est plus simple de rechercher une solution particulière à l'aide du théorème ci-dessous.

Propriété. Soit P une application polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$: il existe une famille presque nulle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$.

Alors cette famille est unique et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{P^{(n)}(0)}{n!}$.

On dit que a_n est le coefficient de P de degré n.
En particulier, $P = 0 \iff [\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n = 0]$.

Formule de Taylor pour les polynômes : Soit P une application polynomiale et $a \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{C}$, $P(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

Démonstration.
Lorsque $x \in \mathbb{R}$, il suffit d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à P entre a et x, à un ordre supérieur au degré de P, de sorte que le reste intégral est nul. Ainsi, en tant que polynôme de $\mathbb{C}[X]$, $P - \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$ possède une infinité de racines, donc il est identiquement nul. $\square$

Définition. Soit $P\ :\ x \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une application polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
Lorsque P n'est pas identiquement nulle, on appelle degré de P le maximum de $\{n \in \mathbb{N}/a_n \neq 0\}$. Le degré de P est noté deg(P).
Lorsque P est identiquement nulle, on convient que $deg(P) = -\infty$.

Théorème. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ tels que

$$\forall x \in I \quad f(x) = e^{\lambda x}P(x).$$

Alors (E) admet sur I une solution particulière de la forme $x \longmapsto Q(x)e^{\lambda x}$, où Q est une application polynomiale.
Plus précisément, (E) admet sur I une solution particulière de la forme $x \longrightarrow x^m e^{\lambda x}Q(x)$ où Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de même degré que P, avec $m = 0$ lorsque λ n'est pas racine de χ, avec $m = 1$ lorsque λ est une racine simple de χ et avec $m = 2$ lorsque λ est une racine double de χ.

Démonstration.
Au tableau. $\square$

Remarque. Ce théorème est aussi valable pour les équations différentielles de la forme $(E)\ :\ y' + by = e^{\lambda x}P(x)$ où $P \in \mathbb{K}[X]$:
(E) admet sur I une solution particulière de la forme $x \longmapsto Q(x)e^{\lambda x}$, où Q est une application polynomiale.
Plus précisément, (E) admet une solution particulière de la forme $x \longrightarrow x^m e^{\lambda x}Q(x)$ où Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de même degré que P, avec $m = 0$ lorsque $\lambda \neq -b$ et $m = 1$ lorsque $\lambda = -b$ (dans ce cas, $\chi = X + b$).

Exemple. Résolution de (E) : $y" - 2y' + y = \text{ch}t$.
Le polynôme caractéristique de l'équation homogène (H) associée à (E) est $\chi = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, donc 1 est une valeur propre double. Ainsi

$$(H) \iff \exists (u,v) \in \mathbb{R}^2\ \ \forall t \in \mathbb{R}\ \ y(t) = e^t(u + tv).$$

Notons $(E_1) : y" - 2y' + y = \frac{e^t}{2}$ et $(E_2) : y" - 2y' + y = \frac{e^{-t}}{2}$.
Supposons que y_1 et y_2 sont des solutions de (E_1) et de (E_2) respectivement. Alors $(y_1 + y_2)" - 2(y_1 + y_2)' + (y_1 + y_2) = \frac{e^t}{2} + \frac{e^{-t}}{2} = \text{ch}t$, donc $y = y_1 + y_2$ est une solution de (E). Cette remarque s'appelle le principe de superposition des solutions.
1 étant une racine double de χ, on cherche une solution particulière y_1 de (E_1) sous la forme $\alpha t^2 e^t$. y_1 convient si et seulement si
$\frac{e^t}{2} = e^t(\alpha t^2) - 2e^t(2\alpha t + \alpha t^2) + e^t(2\alpha + 2\alpha t + (2\alpha t + \alpha t^2)) = 2\alpha e^t$, donc si et seulement si $\alpha = \frac{1}{4}$.
-1 n'étant pas racine de χ, on cherche une solution particulière y_2 de (E_2) sous la forme βe^{-t}. y_2 convient si et seulement si
$\frac{e^{-t}}{2} = e^{-t}\beta(1 + 2 + 1)$, donc si et seulement si $\beta = \frac{1}{8}$.
On en déduit que

$$(E) \Longleftrightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{R}^2 \ \ \forall t \in \mathbb{R} \ \ y(t) = e^t(u + tv + \frac{t^2}{4}) + \frac{e^{-t}}{8}.$$

Remarque. Supposons que $a, b \in \mathbb{R}$ et que $f(x)$ est de la forme $f(x) = P(x)\cos(\omega x)$ où $\omega \in \mathbb{R}$ et où P est un polynôme à coefficients réels. Alors on peut utiliser le théorème précédent en écrivant que $f(x) = \text{Re}(P(x)e^{i\omega x})$ et en remarquant que si z est solution de $z" + az' + bz = P(x)e^{i\omega x}$, alors $y = \text{Re}(z)$ est solution de $y" + ay' + by = \text{Re}(P(x)e^{i\omega x})$.
De même, lorsque $f(x)$ est de la forme $f(x) = P(x)\sin(\omega x)$, on peut utiliser le théorème précédent en écrivant que $f(x) = \text{Im}(P(x)e^{i\omega x})$

Remarque. Plus généralement, lorsque $f(x)$ est de la forme $P(x)e^{Q(x)}$, où P et Q sont des polynômes, on peut chercher une solution particulière de la forme $H(x)e^{Q(x)}$, où H est aussi un polynôme.

Exercice. Résoudre $(E) \ : \ y'' + 2y' + 2y = 2e^{-t}\cos t$.

Solution : Le polynôme caractéristique est $\chi = X^2 + 2X + 2$. Son discriminant vaut $\Delta = 4 - 8 = (2i)^2$, donc les racines de χ sont $-1 \pm i$.
Ainsi, $(H) \Longleftrightarrow y = e^{-t}(\alpha \cos t + \beta \sin t)$.
On note $(E') \ : \ y'' + 2y' + 2y = 2e^{(-1+i)t}$. On en cherche une solution particulière de la forme $t \longmapsto ate^{(-1+i)t}$. On obtient $a = -i$, donc une solution particulière de (E) est $t \longmapsto \text{Re}(-ite^{(-1+i)t}) = te^{-t}\sin t$. En conclusion,

$$(E) \Longleftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \ y(t) = e^{-t}(\alpha \cos t + (\beta + t)\sin t).$$

3 Equations à variables séparables (hors programme)

3.1 Equations à variables séparées

Notation. Soient I et K deux intervalles infinis et soient $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $b : K \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications continues. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \Longleftrightarrow \boxed{a(t) - b(y)y' = 0}.$$

On dit qu'une telle équation est à variables séparées.
Si A et B sont des primitives de a et de b respectivement,
$(E) \Longleftrightarrow \dfrac{d(A(t) - B(y(t)))}{dt} = 0$, donc les courbes intégrales de (E) ont pour équations cartésiennes $A(x) = B(y) + C$, où $C \in \mathbb{R}$.
En pratique, on écrira $(E) \Longleftrightarrow a(t)dt = b(y)dy \Longleftrightarrow A(t) = B(y) + C$.

Exemple. On peut résoudre directement l'équation de Verhulst :

$$(E) \ : \ N'(t) = r\Big(1 - \frac{N(t)}{K}\Big)N(t).$$

3.2 Cas général

Notation. Soient I et K deux intervalles infinis. Soient a et d deux applications continues de I dans $\mathbb{R}$ et b et c deux applications continues de K dans $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \Longleftrightarrow \boxed{a(t)c(y) - b(y)d(t)y' = 0}.$$

• On dit qu'une telle équation est à variables séparables. On peut en effet, en divisant par $c(y)$ et $d(t)$ se ramener à une équation à variables séparées.
• Plus précisément, soit $y : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application dérivable. Quitte à restreindre l'intervalle I, on supposera que d ne s'annule pas sur I.
Ainsi $(E) \Longleftrightarrow \dfrac{a(t)}{d(t)}c(y) - y'b(y) = 0$.
Il faudra ensuite étudier les possibles raccordements des solutions en chaque zéro de d.
• Si $y_0 \in K$ est un zéro de c, l'application constante $y = y_0$ est une solution de (E). Ainsi chaque zéro de c fournit une solution particulière.
On suppose ensuite que $\forall t \in I \ \ c(y(t)) \neq 0$. Alors
$(E) \Longleftrightarrow \dfrac{a(t)}{d(t)} - y'\dfrac{b(y)}{c(y)} = 0$.
Il s'agit d'une équation à variables séparées et on est donc ramené au a). Il reste ensuite à étudier les possibles recollements de ces dernières solutions avec les solutions particulières $y = y_0$ où y_0 est un zéro de c.

Exercice. Résolution de (E) : $(x^2 - x)y' = 1 - y^2$.

Résolution. (E) est bien une équation à variables séparables.
Soient I un intervalle de cardinal infini ne contenant pas 0 et 1 et $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable.

• *Premier cas.* Si $\forall x \in I\ \ y(x) = 1$ ou bien si $\forall x \in I\ \ y(x) = -1$, alors y est solution de (E). On obtient deux solutions particulières notées y_1 et y_{-1} de (E) sur $\mathbb{R}$ en entier.

• *Deuxième cas.* Supposons qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $y(t_0) \neq 1$ et qu'il existe $t_1 \in I$ tel que $y(t_1) \neq -1$.

⋄ Soit $t \in I$. Si $y(t) = 1$, y et y_1 sont deux solutions de (E) vérifiant la condition de Cauchy $y(t) = 1$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (hors programme dans ce contexte), y et y_1 coïncident sur I. On en déduit que $y(t_0) = 1$ ce qui est faux. Ainsi, pour tout $t \in I$, $y(t) \neq 1$. De même on montrerait que pour tout $t \in I$, $y(t) \neq -1$.

⋄ Ainsi $(E) \iff \dfrac{y'}{1-y^2} = \dfrac{1}{x^2-x}$. On a donc séparé les variables.

$$\begin{aligned}
(E) \quad &\iff \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \int \left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x}\right)dx \\
&\iff \exists C \in \mathbb{R}\ \ \tfrac{1}{2}\ln\left|\tfrac{1+y}{1-y}\right| = -\ln|x| + \ln|1-x| + C \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*\ \ \ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \ln\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 + \ln\lambda \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*\ \ \left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \lambda\left(\frac{1-x}{x}\right)^2.
\end{aligned}$$

⋄ Supposons que y est solution de (E). Ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\left|\dfrac{1+y}{1-y}\right| = \lambda\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^2$. Comme $\dfrac{1+y}{1-y}$ est une application continue ne s'annulant pas sur I, elle conserve un signe constant d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Ainsi $\dfrac{1+y}{1-y} = \mu\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^2$ où $\mu = \pm\lambda$. Réciproquement, il est clair que si cette propriété est vérifiée, y est une solution de (E). Ainsi
$(E) \iff \exists \mu \in \mathbb{R}^*\ \ \dfrac{1+y}{1-y} = \mu\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^2$.
Donc $(E) \iff \exists \mu \in \mathbb{R}^*\ \ y\left(1 + \mu\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^2\right) = \mu\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^2 - 1$. Finalement,
$(E) \iff \exists \mu \in \mathbb{R}^*\ \ \forall x \in I\ \ y(x) = \dfrac{\mu\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 - 1}{\mu\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 + 1}$.

• Etudions les raccordements des solutions en 0.
Supposons que $I \subseteq]-\infty, 0[$ ou que $I \subseteq]0, 1[$ et que 0 est l'une des bornes de I. Soit y une solution de (E) sur I. Ainsi, il existe $\mu \in \mathbb{R}^*$ tel que
$y(x) = \dfrac{\mu\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 - 1}{\mu\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 + 1}$. Au voisinage de 0,
$y(x) = \dfrac{\mu(x^2 - 2x + 1) - x^2}{\mu(x^2 - 2x + 1) + x^2} = \dfrac{\mu(1-2x) + \circ(x)}{\mu(1-2x) + \circ(x)}$,

donc $y(x) = (1 - 2x + \circ(x))(1 - 2x + \circ(x))^{-1}$.
Or d'après la formule de Taylor-Young, $\dfrac{1}{1+u} \underset{u \to 0}{=} 1 - u + o(u)$,
donc par changement de variable,
$(1 - 2x + \circ(x))^{-1} \underset{x \to 0}{=} 1 - (-2x + o(x)) + o(-2x + o(x)) = 1 + 2x + o(x)$.
Ainsi, $y(x) = (1 - 2x + \circ(x))(1 + 2x + \circ(x)) = 1 + \circ(x)$.
Ainsi toute solution (différente de y_{-1}) de (E) définie à droite de 0 se raccorde avec toute solution (différente de y_{-1}) définie à gauche de 0.

- Etudions maintenant les raccordements des solutions en 1.

Supposons que $I \subseteq]1, +\infty[$ avec $1 = \inf I$ ou que $I \subseteq]0, 1[$ avec $1 = \sup I$.
Soit y une solution de (E) sur I. Ainsi, il existe $\mu \in \mathbb{R}^*$ tel que
$y(x) = \dfrac{\mu(\frac{1-x}{x})^2 - 1}{\mu(\frac{1-x}{x})^2 + 1}$. Au voisinage de 1, en posant $u = x - 1$,
$y(x) = \dfrac{\mu(\frac{u}{u+1})^2 - 1}{\mu(\frac{u}{1+u})^2 + 1} = \dfrac{\mu u^2 - u^2 - 2u - 1}{\mu u^2 + u^2 + 2u + 1}$, donc
$y(x) = \dfrac{-1 - 2u + \circ(u)}{1 + 2u + \circ(u)} = -(1 + 2u + \circ(u))(1 - 2u + \circ(u)) = -1 + \circ(u)$.
Ainsi toute solution (différente de y_1) de (E) définie à droite de 1 se raccorde avec toute solution (différente de y_1) définie à gauche de 1.