DM32

Partie I - étude d'un exemple

1) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+cb & ac+cd \\ ab+bd & bc+d^2 \end{pmatrix}$

$$A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = \begin{pmatrix} a^2+cb-(a+d)a+ad-bc & ac+cd-(a+d)c \\ ab+bd-(a+d)b & bc+d^2-(a+d)d+ad-bc \end{pmatrix}$$

$$= 0.$$

2) $\mathcal{A} = \mathrm{Vect}(A, I_2)$ = sev. de plus (A, I_2) libre car A n'est pas scalaire. Donc (A, I_2) est une base de $\mathcal{A}$.

Soit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

$$(aI_2 + bA)(cI_2 + dA) = acI_2 + adAI_2 + bcAI_2 + bdA^2$$
$$= acI_2 + adAI_2 + bcAI_2 + bd(\mathrm{Tr}(A)A - \det A\, I_2)$$
$$(*) = (ac - bd\det A)I_2 + (ad + bc + bd\mathrm{Tr}(A))A$$
$$\in \mathcal{A}.$$

$I_2 \in \mathcal{A}$, donc $\mathcal{A}$ est bien une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de dimension 2.

3) Soit $B = aI_2 + bA \in \mathcal{A}$.

D'après $(*)$ $(E) : B^2 = -I_2 \Leftrightarrow -I_2 = (a^2 - b^2\det A)I_2 + (2ab + b^2\mathrm{Tr}A)A$

Or I_2, A libre donc $(E) \Leftrightarrow \begin{cases} 2ab + b^2\mathrm{Tr}A = 0 \\ a^2 - b^2\det A = -1 \end{cases}$

(H) $b = 0$: $(E) \Rightarrow a^2 = -1$ ↯ donc $b \neq 0$.

$$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{b}{2}\mathrm{Tr}A \\ b^2\det A - a^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{b}{2}\mathrm{Tr}A \\ b^2\det A - a^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{b}{2}\mathrm{Tr}A \\ b^2\left(\det A - \frac{(\mathrm{Tr}A)^2}{4}\right) = 1 \end{cases}$$

(H) $\mathrm{Tr}(A)^2 \geq 4\det A$. Alors $(E) \Rightarrow 1 \leq 0$ donc $\nexists B \in \mathcal{A}$ tq $B^2 = -I_2$

Réciproquement (H) $(\mathrm{Tr}A)^2 < 4\det A$.

Alors $(E) \iff \begin{cases} a = -\frac{b}{2} \mathrm{Tr} A \\ b = \pm \frac{2}{\sqrt{4\det A - (\mathrm{Tr} A)^2}} \end{cases}$

Donc on a bien l'équivalence

4) Soit $B \in \mathcal{A}$ tq $B^2 = -I_2$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $(\lambda I_2)^2 = \lambda^2 I_2 \neq -I_2$ donc B n'est pas scalaire.
Donc (I_2, B) est libre. Or $\dim \mathcal{A} = 2$ donc c'est une base.
→ Notons $f \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathbb{C})$ tq $f(I_2) = 1$, $f(B) = i$.
f est un isomorphisme car f envoie une base sur une autre et $f(I_2) = 1$, et :
Soit $M = xI_2 + yB$, $M' = x'I_2 + y'B \in \mathcal{A}$
$MM' = xx'I_2 + (x'y + x'y)B + yy'B^2 = (xx' - yy')I_2 + (xy' + x'y)B$
$f(MM') = (xx' - yy')f(I_2) + (xy' + x'y)f(B) \overset{\text{détailler}}{=} f(M)f(M')$

5) Posons $M = aI_2 + bA$. D'après le calcul de la 3 :
$M^2 = 0 \iff \begin{cases} a^2 - b^2 \det A = 0 \\ 2ab + b^2 \mathrm{Tr} A = 0 \end{cases} \iff b = a = 0$ ou $\begin{cases} a = -\frac{b}{2} \mathrm{Tr} A \\ b^2\left(\frac{(\mathrm{Tr} A)^2}{4} - \det A\right) = 0 \end{cases}$

Or $\mathrm{Tr} A^2 = 4\det A$ donc $M^2 = 0 \iff a = -\frac{b}{2} \mathrm{Tr} A$.
Donc $M^2 = 0 \iff \exists b \in \mathbb{R}, M = b\left(A - \frac{\mathrm{Tr} A}{2} I_2\right)$

Donc il existe des matrices non nulles de $\mathcal{A}$ telque leur carré est nul donc $\mathcal{A}$ n'est pas un corps

6) B non scalaire donc il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tq $B = P^{-1}AP$.
Donc A n'est pas scalaire, et donc (I_2, A) est une base de $\mathcal{A}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ tq $f(I_2) = I_2$, $f(A) = B$.
f est un isomorphisme car elle envoie une base sur une base
et : $\forall M = aI_2 + bA \in \mathcal{A}$, $f(M) = aI_2 + bB = aI_2 + bP^{-1}AP$
$= P^{-1}(aI_2 + bA)P$
$= P^{-1}MP$

Donc $\forall M, M' \in \mathcal{A}$, $f(M)f(M') = P^{-1}MPP^{-1}M'P = P^{-1}MM'P$
$= f(MM')$

Donc f est un isomorphisme d'algèbres
Donc $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ isomorphes

Partie II - Quelques résultats généraux

1) Soit $x, y \in D$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
$\varphi_a(x + \alpha y) = a(x + \alpha y) = ax + a(\alpha y)$ parce que distributive
$= \varphi_a(x) + \alpha \varphi_a(y)$
Donc φ_a endomorphisme de $\mathbb{D}$.

2) → Soit $a, b \in \mathbb{D}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{D}$. $\varphi_{a+\alpha b}(x) = (a + \alpha b)x = \varphi_a(x) + \alpha \varphi_b(x)$
donc $\varphi_{a+\alpha b} = \varphi_a + \alpha \varphi_b$
Donc $\Psi(a + \alpha b) = \Psi(a) + \alpha \Psi(b)$
$\Psi(1_{\mathbb{D}}) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{D}}) = I_n$. Donc Ψ est un isomorphisme d'algèbres
→ Soit $a \in \mathbb{D}$ tq $\Psi(a) = 0 = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_a)$. Alors $\varphi_a = 0$, donc $a = \varphi_a(1) = 0$
Donc φ_a injective.

3) Si $z = a + ib$, $\mathbb{D} = \mathbb{C}$: $\varphi_z(1) = z = a + ib$ et $\varphi_z(i) = (a+ib)i$
$= ia - b$

Donc si $\mathcal{B} = (1, i)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & -a \end{pmatrix}$

4) a) $A - \lambda I_n \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ stable par combinaison linéaire
$A - \lambda I_n \notin GL_2(\mathbb{R})$ car $\lambda \in Sp(A)$ et $A - \lambda I_n \neq 0$ car
A n'est pas scalaire, donc $\mathcal{A}$ n'est pas un corps.

b) ⊕ Il existe $A \in \mathcal{A}$ trigonalisable non scalaire.
Il existe $e = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $\mathrm{mat}(A, e)$ triangulaire sup
Donc $Ae_1 \in \mathbb{R}e_1$ donc $e_1 \in Sp(A)$. D'après a), $\mathcal{A}$ n'est pas

un corps.

c) Soit $A \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$. D'après 1), $\varphi_A : X \mapsto AX$ est un endomorphisme de $\mathcal{A}$. Or $\mathcal{A}$ intègre et $A \neq \{0\}$ donc $\ker \varphi_A = \{0\}$, donc φ_A injectif.
Or φ est en dimension finie donc φ_A est un isomorphisme.
Donc il existe $B \in \mathcal{A}$ tq $\varphi_A(B) = I_n$
Donc A a un inverse.
Donc $\mathcal{A}$ est un corps

Partie III - L'algèbre des quaternions

1) $A^2 = -I_n$ donc $(\det A)^2 = (-1)^n \in \mathbb{R}^+$ donc n pair

2) $(AB)^2 = ABAB = A(-AB)B = -A^2B^2 = -I_n$

$BAB = -AB^2 = A$

$ABA = -A^2B = B$.

Donc si $M = tI_n + xA + yB + zAB$
et $M' = t'I_n + x'A + y'B + z'AB$

$MM' = (tt' - xx' - yy' - zz')I_n + (tx' + xt' + yz' - zy')A$
$+ (ty' - xz' + yt' + zx')B$
$+ (tz' + xy' - yx' + zt')AB$

Donc $\mathbb{H}$ stable par produit
De plus $I_n \in \mathbb{H}$ et $\mathbb{H}$ un sev donc $\mathbb{H}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3) D'après 2) : $(tI_n + xA + yB + zAB)(tI_n - xA - yB - zAB)$
$= (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)I_n$

4) a) Soient $t, x, y, z \in \mathbb{R}$ tq $tI_n + xA + yB + zAB = 0$
$(t^2 + x^2 + y^2 + z^2)I_n = (tI_n + xA + yB + zAB)(tI_n - xA - yB - zAB) = 0$

Donc $t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$

Donc $t = x = y = z = 0$.
Donc (I_n, A, B, AB) libre.

Partie IV - Les automorphismes de l'algèbre des quaternions

1) Soient $t, x, y, z \in \mathbb{R}^4$ tq $M + {}^tM = 2t I_n$, avec $M = tI_n + xA + yB + zC$
Donc $M = -{}^tM$ SSI $t = 0$ SSI $M \in \text{Vect}(A, B, C)$
Or (A, B, C) libre car sous famille de la base (I_4, A, B, C)
Donc l'ensemble des quaternions purs est $\text{Vect}(A, B, C)$, de dim 3.
Il n'est pas une sous-algèbre de $\mathbb{H}$ car $A \times I = -I_2 \notin \mathbb{L}$.

2) Soit $M = xA + yB + zC$, $N = x'A + y'B + z'C \in \mathbb{L}$.
$(M, N) = xx' + yy' + zz'$
D'après III-3)
$$MN + NM = (-xx' - yy' - zz')I_4 + (yz' - zy')A$$
$$+ (-xz' + zx')B + (xy' - yx')C$$
$$+ (-xx' - y'y - zz')I_4 + (y'z - z'y)A$$
$$+ (-x'z + z'x)B + (x'y - y'x)C$$
$$= -2(xx' + yy' + zz')I_4$$
Donc $\dfrac{MN + NM}{2} = -(M|N) I_4$

3) Soit $M \in \mathbb{L}$. D'après 2), $M^2 = -\|M\|^2 I_4$, $\lambda = -\|M\|^2 \in \mathbb{R}^-$
→ Soit $M \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{L}$
Il existe $t \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{L}$ tq $M = tI_4 + N$.
$M^2 = t^2 I_4 + 2tN + N^2 = (t^2 - \|N\|^2) I_4 + 2tN$
(1) $N \neq 0$. Donc $N \notin \mathbb{R}_- I_4$, donc $M^2 \notin \mathbb{R}_- I_4$
(2) $N = 0$, $M^2 = t^2 I_4 \notin \mathbb{R}_- I_4$
Donc $\forall M \in \mathbb{H}$, $M \in \mathbb{L} \Leftrightarrow M^2 \in \mathbb{R}_- I_4$