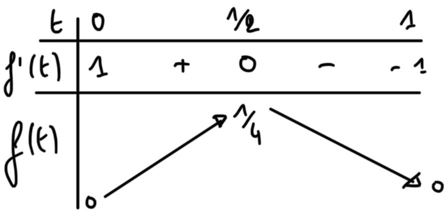
DS 2 : un corrigé

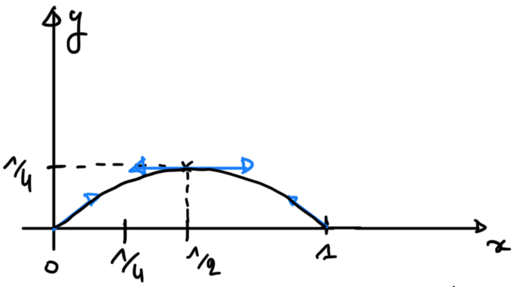
Le barème comporte 59 points.

Problème 1 (sur 36 points)

1°) (1 point) $I_0 = \int_0^1 e^t \, dt = [e^t]_0^1 = e - 1$.
En effectuant une intégration par parties,
$I_1 = \int_0^1 (t - t^2)e^t \, dt = \Big[t(1-t)e^t\Big]_0^1 - \int_0^1 (1-2t)e^t \, dt = \int_0^1 (2t-1)e^t \, dt$.
Une seconde intégration par parties donne alors
$I_1 = \Big[(2t-1)e^t\Big]_0^1 - \int_0^1 2e^t \, dt = e + 1 - 2[e^t]_0^1$, donc $I_1 = e + 1 - 2e + 2 = 3 - e$.
En conclusion, $I_0 = e - 1$ et $I_1 = 3 - e$.

2°) (2 points) Pour tout $t \in [0,1]$, notons $f(t) = t(1-t) = t - t^2$.
f est un polynôme, donc elle est définie et dérivable sur $[0,1]$.
Pour tout $t \in [0,1]$, $f'(t) = 1 - 2t$, donc $f(t) \geq 0 \iff t \leq \frac{1}{2}$. On obtient alors le tableau de variations de f ainsi que son graphe :





3°) (2 points)
D'après la question précédente, pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leq t(1-t) \leq \frac{1}{4}$, donc par croissance de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 \frac{e^t}{4^n} \, dt = \frac{1}{n!4^n}[e^t]_0^1 = \frac{e-1}{4^n n!}$.
D'après le principe des gendarmes, $I_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

4°)
⋄ (3 points) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. f_n est un polynôme donc c'est une application deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
$f_n(t) = (t - t^2)^n$, donc $f_n'(t) = n(1-2t)(t-t^2)^{n-1}$, puis
$f_n''(t) = n(-2)(t-t^2)^{n-1} + n(n-1)(1-2t)^2(t-t^2)^{n-2}$,

or $(1-2t)^2 = 4t^2 - 4t + 1 = -4(t-t^2) + 1$, donc

$$\begin{aligned} f_n''(t) &= -2n(t-t^2)^{n-1} + n(n-1)(-4)(t-t^2)^{n-1} + n(n-1)(t-t^2)^{n-2} \\ &= f_{n-1}(t)(-2n+4n-4n^2) + f_{n-2}(t)n(n-1). \end{aligned}$$

En conclusion, $f_n''(t) = -2n(2n-1)f_{n-1}(t) + n(n-1)f_{n-2}(t)$.

$\diamond$ (2 points) Soit $n \geq 2$. Intégrons par parties :

$n!I_n = \int_0^1 f_n(t)e^t\,dt = [f_n(t)e^t]_0^1 - \int_0^1 f_n'(t)e^t\,dt$, or $f_n(0) = f_n(1) = 0$,

donc $n!I_n = -\int_0^1 f_n'(t)e^t\,dt$. Une nouvelle intégration par parties donne :

$n!I_n = -[f_n'(t)e^t]_0^1 + \int_0^1 f_n''(t)e^t\,dt$, or on a vu que $f_n'(t) = n(1-2t)(t-t^2)^{n-1}$ et $n-1 \geq 1$,

donc $f_n'(0) = 0 = f_n'(1)$. Ainsi, $n!I_n = \int_0^1 f_n''(t)e^t\,dt$.

Mais $f_n''(t) = -2n(2n-1)f_{n-1}(t) + n(n-1)f_{n-2}(t)$,

donc $n!I_n = -2n(2n-1) \times (n-1)!I_{n-1} + n(n-1) \times (n-2)!I_{n-2}$,

puis $I_n = -2(2n-1)I_{n-1} + I_{n-2}$.

5°) (3 points) Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $R(n)$ l'assertion : il existe α_n et β_n des entiers relatifs impairs tels que $I_n = \alpha_n e - \beta_n$.

Pour $n = 0$, $I_0 = e - 1$, donc $\alpha_0 = 1$ et $\beta_0 = 1$ conviennent.

Pour $n = 1$, $I_1 = -e + 3$, donc $\alpha_1 = -1$ et $\beta_1 = -3$ conviennent.

On suppose que $n \geq 2$ et que $R(n-1)$ et $R(n-2)$ sont vraies. Alors

$$\begin{aligned} I_n &= -2(2n-1)I_{n-1} + I_{n-2} \\ &= -2(2n-1)(\alpha_{n-1}e - \beta_{n-1}) + (\alpha_{n-2}e - \beta_{n-2}) \\ &= (\alpha_{n-2} - 2(2n-1)\alpha_{n-1})e - (\beta_{n-2} - 2(2n-1)\beta_{n-1}), \end{aligned}$$

donc en posant $\boxed{\alpha_n = \alpha_{n-2} - 2(2n-1)\alpha_{n-1}}$ et $\boxed{\beta_n = \beta_{n-2} - 2(2n-1)\beta_{n-1}}$, on a bien $I_n = \alpha_n e - \beta_n$. De plus α_n et β_n sont des entiers, de même parité que α_{n-2} et β_{n-2}, c'est-à-dire impairs. Ceci prouve $R(n)$.

On a ainsi répondu à la question, d'après le principe de récurrence double.

6°) (1 point) $\left|\dfrac{\beta_n}{\alpha_n} - e\right| = \dfrac{|\beta_n - e\alpha_n|}{|\alpha_n|} \leq \dfrac{|I_n|}{1}$, car α_n est un entier relatif impair, donc $|\alpha_n| \geq 1$. Or $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après la question 3, donc d'après le principe des gendarmes, $\dfrac{\beta_n}{\alpha_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$.

7°) (4 points) Raisonnons par l'absurde en supposant que e est rationnel. Ainsi, il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $e = \frac{a}{b}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $bI_n = \alpha_n a - b\beta_n \in \mathbb{Z}$, or $bI_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|bI_n| \leq \frac{1}{2}$. On en déduit en particulier que $bI_N = 0$, donc $0 = I_N = \int_0^1 t^n(1-t)^n e^t\,dt$. De plus, l'application $t \longmapsto t^n(1-t)^n e^t$ est positive et continue sur $[0,1]$, donc d'après un théorème du cours, cette application est identiquement nulle sur $[0,1]$. C'est manifestement faux, par exemple pour $t = \frac{1}{2}$, donc e est irrationnel.

8°) (2 points) D'après l'énoncé, $(s-s')e = r'-r$. Si $s-s' \neq 0$, alors $e = \dfrac{r'-r}{s-s'}$, mais il est clair qu'une différence de rationnels est un rationnel et qu'un quotient de rationnels est aussi un rationnel, donc $e \in \mathbb{Q}$, ce qui est faux d'après la question précédente, donc $s - s' = 0$. Ainsi $s = s'$, puis $r' - r = (s-s')e = 0$, donc on a également $r = r'$.

9°) (2 points) Notons $S(\ell)$ cette propriété et montrons-la par récurrence.

Pour $\ell = 0$, $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^\ell e^t \, dt = I_0 = e - 1 = 0!e - \sum_{j=0}^{0} \frac{\ell!}{j!}$, donc $S(0)$ est vraie.

Soit $\ell \in \mathbb{N}$. On suppose $S(\ell)$. En intégrant par parties,

$\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{\ell+1} e^t \, dt = \Big[(1-t)^{\ell+1} e^t\Big]_0^1 - \int_0^1 (\ell+1)(-1)(1-t)^\ell e^t \, dt$, donc d'après $S(\ell)$,

$\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{\ell+1} e^t \, dt = -1 + (\ell+1)\Big(\ell!e - \sum_{j=0}^{\ell} \frac{\ell!}{j!}\Big) = (\ell+1)!e - \sum_{j=0}^{\ell} \frac{(\ell+1)!}{j!} - \frac{(\ell+1)!}{(\ell+1)!}$, ce qui prouve $S(\ell+1)$.

10°) (3 points) Posons $K_\ell = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^\ell e^{-t} \, dt$.

Lorsque $\ell \in \mathbb{N}$, en intégrant par parties,

$K_{\ell+1} = \Big[-(1-t)^{\ell+1} e^{-t}\Big]_0^1 - (\ell+1) \displaystyle\int_0^1 (1-t)^\ell e^{-t} \, dt = 1 - (\ell+1) K_\ell$.

De plus $K_0 = [-e^{-t}]_0^1 = 1 - e^{-1}$.

En examinant les premières valeurs de la suite (K_ℓ), on conjecture que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,

$K_\ell = (-1)^{\ell+1} \ell! \dfrac{1}{e} - \displaystyle\sum_{j=0}^{\ell} (-1)^{\ell+1+j} \frac{\ell!}{j!}$.

On démontre cette propriété par récurrence sur ℓ, selon un calcul analogue à celui de la question précédente.

11°)

◇ (2 points) Par linéarité de l'intégrale, puis d'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \int_0^1 (1-t)^{n+k} e^t \, dt &= \frac{1}{n!} \int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (1-t)^k\Big) (1-t)^n e^t \, dt \\
&= \frac{1}{n!} \int_0^1 ((t-1)+1)^n (1-t)^n e^t \, dt \\
&= I_n.
\end{aligned}$$

◇ (3 points) D'après la question 9, ceci permet d'écrire que

$I_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \Big((n+k)!e - \sum_{j=0}^{n+k} \frac{(n+k)!}{j!}\Big)$,

donc $I_n = \dfrac{e}{n!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n+k)! \quad + \quad r$ où $r \in \mathbb{Q}$.

Ainsi, si l'on pose $s = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n+k)!$, on a $I_n = se + r$, avec $s, r \in \mathbb{Q}$.

D'autre part, $I_n = \alpha_n e - \beta_n$, avec $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{Q}$. Alors, d'après la question 8,

$\alpha_n = s = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n+k)! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!}$.

12°)
◇ (1 point) Dans la définition de I_n, posons $u = 1 - t$.
On obtient $I_n = \frac{1}{n!}\int_1^0 (1-u)^n u^n e^{1-u}\ (-du)$, donc $I_n = \frac{e}{n!}\int_0^1 (1-u)^n u^n e^{-u}\ du$.
◇ (3 points) D'après les questions 11 et 6, il suffit de montrer que $\beta_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^n \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!}$.
D'après le point précédent,

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{e}{n!}\int_0^1 (1-u)^n u^n e^{-u}\ du \\ &= \frac{e}{n!}\int_0^1 (1-u)^n ((u-1)+1)^n e^{-u}\ du \\ &= \frac{e}{n!}\int_0^1 (1-u)^n \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(u-1)^k e^{-u}\ du \\ &= \frac{e}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\int_0^1 (1-u)^{n+k} e^{-u}\ du. \end{aligned}$$

Alors d'après la question 10,

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{e}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\Big((-1)^{n+k+1}(n+k)!\frac{1}{e} - \sum_{j=0}^{n+k}(-1)^{n+k+1+j}\frac{(n+k)!}{j!}\Big) \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n+1}(n+k)! + se, \end{aligned}$$

où $s \in \mathbb{Q}$. Alors, d'après la question 8,
$\beta_n = -\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n+1}(n+k)! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^n\frac{(n+k)!}{k!(n-k)!}$, ce qui conclut.

Problème 2 (sur 23 points)

1°) (2 points) Avec $n = 1$, $\bigcup_{i=1}^{1}(A_i \cap B_i) = A_1 \cap B_1$. De plus, $\mathcal{P}(\mathbb{N}_1) = \{\emptyset, \{1\}\}$, donc

$$\bigcap_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)}\Big(\Big(\bigcup_{i\in X}A_i\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_1\setminus X}B_i\Big)\Big) = \Big[\Big(\bigcup_{i\in\emptyset}A_i\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in\{1\}}B_i\Big)\Big]\bigcap\Big[\Big(\bigcup_{i\in\{1\}}A_i\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in\emptyset}B_i\Big)\Big],$$

or $\bigcup_{i\in\emptyset}A_i = \emptyset = \bigcup_{i\in\emptyset}B_i$, donc $\bigcap_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)}\Big(\Big(\bigcup_{i\in X}A_i\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_1\setminus X}B_i\Big)\Big) = B_1 \cap A_1$,
ce qui prouve (C_1).

2°) (3 points)
◇ Soit $x \in E$.
Supposons que $x \in \Big(\bigcap_{i\in I}F_i\Big) \cup G$.
Si $x \in G$, alors pour tout $i \in I$, $x \in F_i \cup G$, donc $x \in \bigcap_{i\in I}(F_i \cup G)$.

Si $x \notin G$, alors $x \in \bigcap_{i \in I} F_i$, donc pour tout $i \in I$, $x \in F_i$, puis $x \in F_i \cup G$ et on a encore $x \in \bigcap_{i \in I} (F_i \cup G)$. Ceci démontre que $\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) \cup G = \bigcap_{i \in I} (F_i \cup G)$.

Réciproquement, supposons que $x \in \bigcap_{i \in I} (F_i \cup G)$.

Si $x \in G$, alors $x \in \left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) \cup G$.

Supposons maintenant que $x \notin G$. Pour tout $i \in I$, $x \in F_i \cup G$, donc $x \in F_i$. Ainsi, $x \in \bigcap_{i \in I} F_i$, puis $x \in \left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) \cup G$.

Ainsi, dans les deux cas, $x \in \left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) \cup G$, ce qui montre la seconde inclusion.

$\diamond$ Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in \left(\bigcup_{i \in I} F_i\right) \cap G &\iff (x \in G) \wedge (\exists i \in I,\ \ x \in F_i) \\ &\iff (\exists i \in I,\ \ x \in F_i \cap G) \\ &\iff x \in \bigcup_{i \in I} (F_i \cap G). \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\left(\bigcup_{i \in I} F_i\right) \cap G = \bigcup_{i \in I} (F_i \cap G)$.

3°) (3 points)

$\diamond$ Soit $x \in \bigcap_{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \left(\left(\bigcup_{i \in X \cup \{n+1\}} A_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}_n \setminus X} B_i\right)\right)$.

Ainsi, pour tout $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$, il existe $i \in X \cup \{n+1\}$ tel que $x \in A_i$, ou il existe $i \in \mathbb{N}_n \setminus X$ tel que $x \in B_i$.

Soit $Y \in Q$. Posons $X = Y \setminus \{n+1\}$, de sorte que $Y = X \sqcup \{n+1\}$. De plus $\mathbb{N}_n \setminus X = \mathbb{N}_{n+1} \setminus Y$, donc il existe $i \in Y$ tel que $x \in A_i$, ou il existe $i \in \mathbb{N}_{n+1} \setminus Y$ tel que $x \in B_i$. Ceci prouve que $x \in \left(\bigcup_{i \in Y} A_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}_{n+1} \setminus Y} B_i\right)$, pour tout $Y \in Q$,

donc $x \in \bigcap_{Y \in Q} \left(\left(\bigcup_{i \in Y} A_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}_{n+1} \setminus Y} B_i\right)\right)$. Ceci prouve que

$$\bigcap_{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \left(\left(\bigcup_{i \in X \cup \{n+1\}} A_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}_n \setminus X} B_i\right)\right) \subset \bigcap_{X \in Q} \left(\left(\bigcup_{i \in X} A_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}_{n+1} \setminus X} B_i\right)\right).$$

$\diamond$ Réciproquement, soit $x \in \bigcap_{X \in Q} \left(\left(\bigcup_{i \in X} A_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}_{n+1} \setminus X} B_i\right)\right)$. Ainsi, pour tout $Y \in Q$, il existe $i \in Y$ tel que $x \in A_i$ ou il existe $i \in \mathbb{N}_{n+1} \setminus Y$ tel que $x \in B_i$.

Soit $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$. Posons $Y = X \cup \{n+1\}$. $Y \in Q$ donc il existe $i \in Y = X \cup \{n+1\}$ tel que $x \in A_i$, ou il existe $i \in \mathbb{N}_{n+1} \setminus Y = \mathbb{N}_n \setminus X$ tel que $x \in B_i$. On en déduit que $x \in \left(\bigcup_{i \in X \cup \{n+1\}} A_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}_n \setminus X} B_i\right)$, pour tout $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$, donc $x \in \bigcap_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \Big(\Big(\bigcup_{i\in X\cup\{n+1\}} A_i\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_n\setminus X} B_i\Big)\Big)$, ce qui prouve l'inclusion réciproque.

4°) (4 points) L'initialisation de la récurrence provient de la question 1.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que (C_n) est vraie.
Considérons deux nouvelles parties A_{n+1} et B_{n+1} de E et montrons (C_{n+1}).

$$\bigcup_{i=1}^{n+1}(A_i \cap B_i) = \Big[\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap B_i)\Big] \cup (A_{n+1}\cap B_{n+1}),$$ donc en utilisant (C_n),

$$\bigcup_{i=1}^{n+1}(A_i \cap B_i) = \Big[\bigcap_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \Big(\Big(\bigcup_{i\in X} A_i\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_n\setminus X} B_i\Big)\Big)\Big] \cup (A_{n+1}\cap B_{n+1}).$$

Alors, d'après la question 2,

$$\bigcup_{i=1}^{n+1}(A_i \cap B_i) = \bigcap_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \Big[\Big(\Big(\bigcup_{i\in X} A_i\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_n\setminus X} B_i\Big)\Big) \cup (A_{n+1}\cap B_{n+1})\Big].$$

Or d'après la question 2, si F, G et K sont des parties de E,
$F \cup (G\cap K) = (F\cup G)\cap(F\cup K)$. Donc

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{n+1}(A_i \cap B_i) = \bigcap_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \Big[& \Big(\Big(\bigcup_{i\in X} A_i\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_n\setminus X} B_i\Big)\cup A_{n+1}\Big) \\ & \bigcap\Big(\Big(\bigcup_{i\in X} A_i\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_n\setminus X} B_i\Big)\cup B_{n+1}\Big)\Big].\end{aligned}$$

D'après la commutativité de la réunion,

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{n+1}(A_i \cap B_i) = \bigcap_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \Big[& \Big(\Big(\bigcup_{i\in X\cup\{n+1\}} A_i\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_n\setminus X} B_i\Big)\Big) \\ & \bigcap\Big(\Big(\bigcup_{i\in X} A_i\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in(\mathbb{N}_n\setminus X)\cup\{n+1\}} B_i\Big)\Big)\Big].\end{aligned}$$

D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{n+1}(A_i \cap B_i) = & \Big[\bigcap_{X\in Q}\Big(\Big(\bigcup_{i\in X} A_i\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_{n+1}\setminus X} B_i\Big)\Big)\Big] \\ & \bigcap\Big[\bigcap_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)}\Big(\Big(\bigcup_{i\in X} A_i\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_{n+1}\setminus X} B_i\Big)\Big)\Big],\end{aligned}$$

or $\mathcal{P}(\mathbb{N}_{n+1}) = Q \sqcup \mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$, car une partie de $\mathbb{N}_{n+1}$ contient $n+1$ ou (exclusif) ne contient pas $n+1$. Ainsi, par commutativité de l'intersection,

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{n+1}(A_i \cap B_i) &= \bigcap_{X\in Q\sqcup\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)}\Big(\Big(\bigcup_{i\in X} A_i\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_{n+1}\setminus X} B_i\Big)\Big) \\ &= \bigcap_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_{n+1})}\Big(\Big(\bigcup_{i\in X} A_i\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_{n+1}\setminus X} B_i\Big)\Big),\end{aligned}$$

ce qui prouve C_{n+1}.

5°) (4 points) Soit $x \in \bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap B_i)$. Il existe alors $i_0 \in \mathbb{N}_n$ tel que $x \in A_{i_0}\cap B_{i_0}$.

Soit $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$. Si $i_0 \in X$, alors $x \in \bigcup_{i \in X} A_i$ et si $i_0 \notin X$, alors $x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}_n \setminus X} B_i$. Donc dans tous les cas, $x \in \Big(\bigcup_{i \in X} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}_n \setminus X} B_i\Big)$. C'est vrai pour tout $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$, donc $x \in \bigcap_{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \Big(\Big(\bigcup_{i \in X} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}_n \setminus X} B_i\Big)\Big)$.

Pour démontrer l'inclusion réciproque, on procède par contraposée : on suppose que $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B_i)$. Ainsi, on a $\neg(\exists i \in \mathbb{N}_n,\ (x \in A_i) \wedge (x \in B_i))$,
donc pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $x \notin A_i$ ou $x \notin B_i$.
Posons $X = \{i \in \mathbb{N}_n \ / \ x \notin A_i\}$.
Alors pour tout $i \in X$, $x \notin A_i$ et, lorsque $i \in \mathbb{N}_n \setminus X$, $x \in A_i$ donc $x \notin B_i$. On a donc $(\forall i \in X,\ x \notin A_i) \wedge (\forall i \in \mathbb{N}_n \setminus X,\ x \notin B_i)$,
c'est-à-dire $\neg[(\exists i \in X,\ x \in A_i) \vee (\exists i \in \mathbb{N}_n \setminus X,\ x \in B_i)]$. Ainsi, $x \notin \Big(\bigcup_{i \in X} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}_n \setminus X} B_i\Big)$,
puis $x \notin \bigcap_{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \Big(\Big(\bigcup_{i \in X} A_i\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}_n \setminus X} B_i\Big)\Big)$.

6°) (4 points)
◇ $$\begin{aligned} x \in \bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} A_{i,j} &\iff \forall i \in I,\ \exists j \in J,\ x \in A_{i,j} \\ &\iff \forall i \in I,\ \exists f(i) \in J,\ x \in A_{i,f(i)} \\ &\iff \exists f \in \mathcal{F}(I,J),\ \forall i \in I,\ x \in A_{i,f(i)} \\ &\iff x \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}(I,J)} \bigcap_{i \in I} A_{i,f(i)}, \end{aligned}$$
ce qu'il fallait démontrer.
◇ Appliquons la propriété que l'on vient de démontrer en remplaçant les parties $A_{i,j}$ par leurs complémentaires dans E, notées $\overline{A_{i,j}}$: $\bigcap_{i \in I} \bigcup_{j \in J} \overline{A_{i,j}} = \bigcup_{f \in \mathcal{F}(I,J)} \bigcap_{i \in I} \overline{A_{i,f(i)}}$, donc d'après le cours, $\overline{\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{i,j}} = \overline{\bigcap_{f \in \mathcal{F}(I,J)} \bigcup_{i \in I} A_{i,f(i)}}$, puis $\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{i,j} = \bigcap_{f \in \mathcal{F}(I,J)} \bigcup_{i \in I} A_{i,f(i)}$.

7°) (3 points) D'après la question précédente, en posant $J = \{0, 1\}$,
$\bigcup_{i \in I} (A_{i,0} \cap A_{i,1}) = \bigcap_{f \in \mathcal{F}(I,\{0,1\})} \bigcup_{i \in I} A_{i,f(i)}$.
Soit $x \in \bigcup_{i \in I} (A_{i,0} \cap A_{i,1})$. Soit $X \in \mathcal{P}(I)$.

Notons f l'application définie sur I par : pour tout $i \in I$, $f(i) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \in X \\ 1 \text{ si } i \in I \setminus X \end{cases}$

Alors $x \in \bigcup_{i \in I} A_{i,f(i)} = \Big(\bigcup_{i \in X} A_{i,0}\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i \in I \setminus X} A_{i,1}\Big)$.

C'est vrai pour tout $X \in \mathcal{P}(I)$, donc $x \in \bigcap_{X \in \mathcal{P}(I)} \left(\left(\bigcup_{i \in X} A_{i,0} \right) \bigcup \left(\bigcup_{i \in I \setminus X} A_{i,1} \right) \right)$.

Réciproquement, soit $x \in \bigcap_{X \in \mathcal{P}(I)} \left(\left(\bigcup_{i \in X} A_{i,0} \right) \bigcup \left(\bigcup_{i \in I \setminus X} A_{i,1} \right) \right)$.

Soit $f \in \mathcal{F}(I, \{0, 1\})$. Notons $X = \{i \in I \ / \ f(i) = 0\}$.

Alors $x \in \left(\bigcup_{i \in X} A_{i,0} \right) \bigcup \left(\bigcup_{i \in I \setminus X} A_{i,1} \right) = \bigcup_{i \in I} A_{i,f(i)}$. C'est vrai pour tout $f \in \mathcal{F}(I, \{0, 1\})$, donc $x \in \bigcap_{f \in \mathcal{F}(I,\{0,1\})} \bigcup_{i \in I} A_{i,f(i)}$.

En conclusion, on a montré par double inclusion que

$\bigcup_{i \in I} (A_{i,0} \cap A_{i,1}) = \bigcap_{X \in \mathcal{P}(I)} \left(\left(\bigcup_{i \in X} A_{i,0} \right) \bigcup \left(\bigcup_{i \in I \setminus X} A_{i,1} \right) \right)$.

En particulier, lorsque $I = \mathbb{N}_n$, qui est bien non vide, on retrouve la propriété (C_n), en remplaçant $A_{i,0}$ par A_i et $A_{i,1}$ par B_i.