

## Définition

**Définition : Produit vectoriel**

Dans une base orthonormée directe (orientation par la règle de la main droite ou gauche), on définit le produit vectoriel  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  comme le vecteur :

**direction** orthogonal aux vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ ,

**sens** tel que le trièdre  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  est direct,

**norme** de norme  $\|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin(\vec{a}, \vec{b})$ .

on a aussi :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{vmatrix} \quad (1)$$

En particulier :

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \quad \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \quad \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2.$$

## Propriétés

**Propriétés**

Le produit vectoriel  $\vec{a} \wedge \vec{b}$  :

- est **antisymétrique** :  $\forall$  vecteurs  $\vec{a}, \vec{b}$  :  $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$
- est **bilinéaire** :  $\forall$  vecteurs  $\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{b}_2$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$  :  $\vec{a} \wedge (\lambda \vec{b}_1 + \mu \vec{b}_2) = \lambda \vec{a} \wedge \vec{b}_1 + \mu \vec{a} \wedge \vec{b}_2$
- vérifie la formule du **double produit vectoriel** :  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$  (à vérifier sur les vecteurs de base)

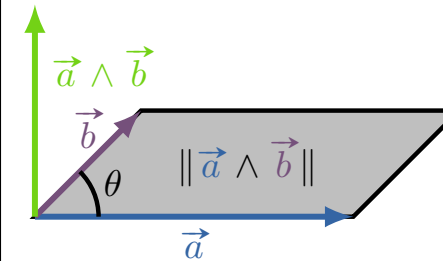
## Produit vectoriel

Les normes de vecteurs construits avec des produits vectoriels ont des in-

terprétations géométriques :

**Norme du produit vectoriel**

$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = ab |\sin(\vec{a}, \vec{b})|$  est l'aire du parallélogramme construit sur  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ .



## Produit mixte

**Définition : Produit mixte**

On définit le **produit mixte** de trois vecteurs, noté  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  comme le scalaire  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}$ .

**Valeur absolue du produit mixte**

Sa valeur absolue  $|(a, b, c)|$  est le volume du parallélépipède construit sur  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

**Permutation circulaire**

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \wedge \vec{c}) \cdot \vec{a}$$

## Définition

**Définition : Force de Lorentz et champ électromagnétique**

Soit une particule ponctuelle de charge  $q$  et de masse  $m$ , située en  $M$  et animée d'une vitesse  $\vec{v}_{\mathcal{R}}(M)$  à l'instant  $t$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$ . On nomme **force de Lorentz**<sup>a</sup>, notée  $\vec{F}_{\mathcal{L}}$  la résultante des forces auxquelles elle est soumise du fait de sa charge.

- La composante de  $\vec{F}_{\mathcal{L}}$  indépendante de la vitesse est la **force électrique**, notée  $\vec{F}_{E,\mathcal{R}}$ . Elle définit le **champ électrique** dans  $\mathcal{R}$ , noté  $\vec{E}_{\mathcal{R}}(M, t) = \frac{\vec{F}_{E,\mathcal{R}}}{q}$ .
- La composante de  $\vec{F}_{\mathcal{L}}$ , dépendante de la vitesse est la **force magnétique**, notée  $\vec{F}_{B,\mathcal{R}}$ . Elle définit le **champ magnétique** dans  $\mathcal{R}$ , noté  $\vec{B}_{\mathcal{R}}(M, t)$  tel que, pour toute vitesse  $\vec{v}_{\mathcal{R}}(M)$ ,  $\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) \wedge \vec{B}_{\mathcal{R}} = \frac{\vec{F}_{B,\mathcal{R}}}{q}$ .

L'ensemble des champs  $\vec{E}(M, t)$  et  $\vec{B}(M, t)$  constitue le **champ électromagnétique** dans  $\mathcal{R}$ .

<sup>a</sup>H. Lorentz, physicien néerlandais (1853-1928) Nobel en 1902 avec P. Zeeman

**Les champs dépendent du référentiel****Les champs dépendent du référentiel**

La force de Lorentz est **indépendante** du référentiel galiléen dans lequel on la mesure mais sa **décomposition** en forces électrique et magnétique dépend du référentiel galiléen d'étude.

**Caractéristiques****Définition : Champ électrique**

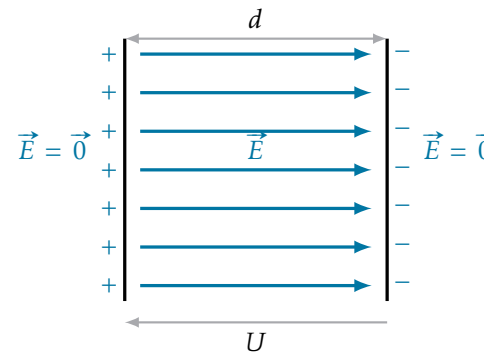
Le champ électrique est produit par les charges et sa structure dépend de leur répartition spatiale. Il s'exprime en volt par mètre  $V \cdot m^{-1}$ .

**Production****Champ électrostatique du condensateur plan**

Le champ électrique produit par un condensateur plan **entre ses armatures** est uniforme si celles-ci sont suffisamment grandes, proches l'une de l'autre, et si l'on observe le champ loin de leurs bords. Dans ces mêmes conditions, le champ est uniformément nul **à l'extérieur du condensateur**.

En notant  $U_{AB} = V_A - V_B$  la différence de potentiel entre les armatures  $A$  et  $B$ ,  $d$  la distance qui les sépare et  $\vec{e}_{AB}$  le vecteur unitaire orthogonal aux armatures et dirigé de  $A$  vers  $B$ , on a :

$$\vec{E} = \frac{U_{AB}}{d_{AB}} \vec{e}_{AB}.$$

**Champ du condensateur plan****Caractéristiques****Définition : Champ magnétique**

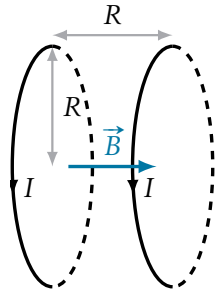
Le champ magnétique est produit par le mouvement des charges et sa structure dépend de celle du courant électrique.

Il s'exprime en tesla, de symbole T.

**Production**

**Champ des bobines de Helmholtz**

Une paire de bobines parallèles de même rayon  $R$ , parcourues dans le même sens par le même courant  $I$ , et *séparées d'une distance égale à leur rayon*, crée au voisinage du centre du dispositif un champ magnétique *quasi uniforme*, dirigé selon l'axe de symétrie de révolution des bobines.

**Poids négligeable****Poids négligeable**

Dans le vide ou un gaz sous faible pression, le mouvement d'une particule chargée dans des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  d'intensité raisonnables est régi uniquement par la force de Lorentz, son poids étant négligeable.

**Puissance nulle de la force magnétique****Puissance de la force de Lorentz**

La puissance  $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\vec{F}_{\mathcal{L}})$  de la force de Lorentz exercée sur une particule ponctuelle de charge  $q$  et de masse  $m$  située en  $M$  et animée de  $\vec{v}_{\mathcal{R}}(M)$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  est :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(\vec{F}_{\mathcal{L}}) = q \vec{E}_{\mathcal{R}}(M, t) \cdot \vec{v}_{\mathcal{R}}(M).$$

En particulier, la puissance de la force *magnétique* est *toujours nulle*.

**Énergie potentielle****Énergie potentielle électrostatique d'un champ uniforme**

La force électrique associée à un champ  $\vec{E}$  uniforme, de la forme  $\vec{E} = E_0 \vec{e}_x$ , est *conservative*. L'énergie potentielle électrostatique d'une particule de charge  $q$  est :

$$\mathcal{E}_{\text{pot}} = -q(x - x_0)E_0 + \mathcal{E}_{\text{pot}_0},$$

avec  $x_0$  l'abscisse où le potentiel vaut  $\mathcal{E}_{\text{pot}_0}$ .

**Potentiel électrostatique****Définition : Potentiel électrostatique**

On définit le potentiel électrostatique  $V$  tel que :

$$\mathcal{E}_{\text{pot}} = qV + \text{cste}$$

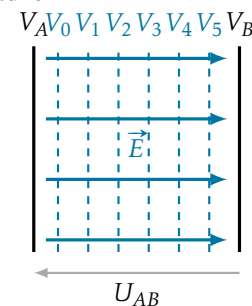
On a donc, pour un champ  $\vec{E}$  uniforme :

$$V = V_0 - (x - x_0)E_0,$$

avec  $x_0$  l'abscisse où le potentiel vaut  $V_0$ .

**Lien avec l'électrocinétique**

Le potentiel électrostatique défini au moyen de la force électrostatique coïncide avec le potentiel électrique étudié en électrocinétique dans le régime stationnaire, c'est-à-dire en particulier en l'absence de courant.

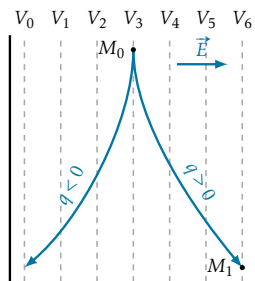
**Structure**

## synthèse

paramètre	champ	force	accélération	énergie potentielle
charge $q$	$\vec{E} = E_0 \vec{e}_x$	$\vec{F}_E = q \vec{E}$	$q \vec{E} / m$	$\mathcal{E}_{\text{pot}_E} = -q E_0 x + \text{cste}$
masse $m$	$\vec{g} = -g \vec{e}_z$	$\vec{P} = m \vec{g}$	$\vec{g}$	$\mathcal{E}_{\text{pot}_P} = mgz + \text{cste}$

## Caractéristiques de la trajectoire

comme pour la chute libre



$$\mathcal{E}_c(M_1) - \mathcal{E}_c(M_0) = q(V_3 - V_6)$$

Mouvement dans  $\vec{E}$  uniforme et stationnaire

Le mouvement d'une particule ponctuelle de charge  $q$  et de masse  $m$  dans un champ purement électrique uniforme  $\vec{E}$  est uniformément accéléré d'accélération :  $\frac{q}{m} \vec{E}$ .

- La trajectoire est parabolique, d'axe colinéaire à  $\vec{E}$ .
- La variation d'énergie cinétique entre  $M_1$  où  $V = V_1$  et  $M_2$  où  $V = V_2$  est :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c(M_2) - \mathcal{E}_c(M_1) &= \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) \\ &= q(V_1 - V_2). \end{aligned}$$

## Électron-volt

## Définition : Électron-volt

L'électron-volt, de symbole eV, est une unité d'énergie définie comme l'énergie cinétique acquise par une particule de charge élémentaire  $e = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  lors d'un déplacement au cours duquel le potentiel du point où elle se trouve diminue de 1V. On a donc environ :

$$1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

## Exercice

Le dispositif responsable de l'accélération dans un oscilloscope cathodique est alimenté sous une tension de  $U = 4 \text{ kV}$ .

Déterminer l'énergie cinétique des électrons produits. Sont-ils relativistes ?

## Pulsation cyclotron

## Pulsation cyclotron

Les mouvements d'une particule de charge  $q$  et de masse  $m$  régis par la force magnétique d'un champ  $\vec{B}$  sont caractérisés par une pulsation dite **cyclotron**, notée  $\omega_c$ , définie par :

$$\omega_c = \frac{|q| B}{m}.$$

## Détermination du rayon

Mouvement dans  $\vec{B}$  uniforme et stationnaire

Le mouvement d'une particule ponctuelle de charge  $q$  et de masse  $m$  dans un champ purement magnétique uniforme et stationnaire  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$  est, si son vecteur vitesse initial  $\vec{v}_0$  est orthogonal à  $\vec{B}$ , circulaire uniforme.

Le cercle est :

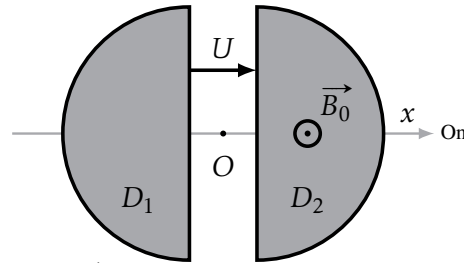
- inscrit dans le plan orthogonal à  $\vec{B}$  ;
- parcouru dans le sens positif (resp. négatif) défini par le vecteur  $\vec{B}$  pour une charge négative (resp. positive) ;
- parcouru à la vitesse angulaire  $\omega = -q B_0 / m$ , de valeur absolue égale à la **pulsation cyclotron**, indépendante du vecteur vitesse initial ;
- de rayon  $R = \frac{v_0}{\omega_c}$  **croissant** avec le module de la vitesse initiale.
- de manière équivalente, on a  $p = |q| B_0 R$

Accélération (augmentation de  $\mathcal{E}_c$ ) de particules chargées

Un cyclotron est une machine, inventée en 1930, permettant d'accélérer des particules chargées, bien plus efficacement que par la simple accélération linéaire d'un champ électrostatique uniforme. On en présente le principe dans cet exercice.

- Calculer numériquement la période  $T_0$  et la pulsation cyclotron  $\omega_c$  du mouvement d'un proton de vitesse initiale  $\vec{v}_0$  dans un champ magnétique  $\vec{B}_0$  uniforme, perpendiculaire à  $\vec{v}_0$ . On a  $B_0 = 1,0 \text{ T}$ .

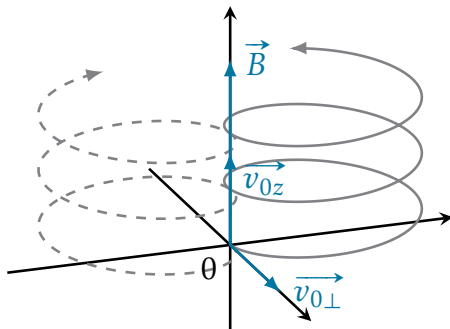
2. Un cyclotron est formé de deux boîtes métalliques semi-cylindriques  $D_1$  et  $D_2$  (les « dees ») telles que  $\vec{B}_0$  soit parallèle aux génératrices du cylindre. Des protons sont injectés à vitesse quasi nulle dans un plan orthogonal à  $\vec{B}$  par une source d'ions proche du centre  $O$  du système. On peut appliquer une différence de potentiel  $U$  entre les « dees ».



admet que  $\vec{E}$  est nul dans chacun des « dees » et on considère que  $\vec{B}$  est nul en dehors des « dees ».

- Quel est le mouvement du proton quand il se trouve entre les « dees » ?
  - Quel est son mouvement quand il se trouve à l'intérieur d'un « dee » ?
  - Justifier qu'on doit périodiquement changer le signe de  $U$  pour continuer à accélérer les protons. Représenter alors l'allure de la trajectoire d'un proton.
3. On varie sinusoïdalement  $U$  selon  $U = U_0 \cos(\omega t)$  et on néglige le temps passé par les protons entre les « dees ».
- Comment doit-on choisir  $\omega$  ?
  - Quelle est l'énergie cinétique d'un proton après  $n$  demi-tours du cyclotron si on néglige son énergie cinétique initiale ? En déduire que le rayon  $\rho_n$  des demi-cercles augmente proportionnellement avec  $\sqrt{n}$ .
  - Le rayon des « dees » est  $R = 50$  cm. Quelle est la vitesse à laquelle on peut accélérer un proton dans ce dispositif ? Quelle est l'énergie cinétique maximale d'un tel proton ? On exprimera ce résultat en joules et en méga-électron-volts. Quel temps a-t-il mis pour l'acquérir si la tension accélératrice est  $U_0 = 4,0 \cdot 10^3$  V ?

### Trajectoire hélicoïdale



### Grandeurs cinématiques relativistes

#### Définition : Grandeurs cinématiques relativistes

Pour une particule de masse  $m$  animée du vecteur vitesse  $\vec{v}$  :

- la quantité de mouvement a pour expression  $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$  ;
- l'énergie cinétique a pour expression  $\mathcal{E}_c = (\gamma - 1)mc^2$  ;

avec  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ .

#### Indispensable

#### Indispensable

- expression de la force,
- expression de l'énergie potentielle,
- schémas de la déflexion électrostatique
- expression de la pulsation cyclotron et du rayon (en fonction de  $p$ ), sens de l'enroulement