Gutsche
Patrick

DM17

1)a) $\frac{\partial r}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{dx}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$

b) $\frac{\partial f}{dx} = \frac{\partial v(r(x,y,z))}{\partial x} = \frac{\partial r}{dx} v'(r(x,y,z)) = \frac{x}{r} v'(r)$

par dérivation de composées

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{r} v'(r) + x \frac{\partial r}{\partial x}\left(\frac{-1}{r^2}\right) v'(r) + \frac{x}{r}\frac{\partial r}{\partial x} v''(r)$

$= \frac{1}{r} v'(r) + \frac{x^2}{r^3} v'(r) + \frac{x^2}{r^2} v''(r)$

c) x, y, z interchangeables donc

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x^2+z^2}{r^3} v'(r) + \frac{y^2}{r^2} v''(r)$

$\frac{\partial^2 f}{dz^2} = \frac{x^2+y^2}{r^{\cancel{2}\,3}} v'(r) + \frac{z^2}{r^2} v''(r)$

$\Delta f = \frac{2}{r} v'(r) + v''(r)$

2)a) $(E_\omega) \Leftrightarrow \forall r \in \mathbb{R}_+^*, \frac{2}{r} v'(r) + \omega^2 v(r) = 0$

on a $V'(t) = v(t) + t v'(t)$ et $V''(t) = 2v'(t) + t v''(t)$

donc $(E_\omega) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*, 2v'(t) + t v''(t) + \omega^2 t v(t) = 0$

$\Leftrightarrow V'' + \omega^2 V = 0$

cours

b) On a donc $(E_\omega) \Leftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R}_+^*$ tq $v(t) = \frac{A}{t}\cos(\omega t) + \frac{B}{t}\sin(\omega t)$

On a $\frac{\sin(\omega t)}{\omega t} \xrightarrow[t>0]{t \to 0} \omega$ et $\frac{\cos(\omega t)}{\omega t} \xrightarrow[t>0]{t \to 0} +\infty$

Donc $f = v \circ r$ est solution non nulle de E tq $v(t)$ a une limite finie en $t \to 0$ SSI $v(t) = B\frac{\sin(\omega t)}{t}$ avec $B \neq 0$

3)a) (H) Il existe $B \in \mathbb{R}^*$ tq pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $v(t) = \frac{B}{t}\sin(\omega t)$

Donc $v'(t) = \frac{B}{t^2}(t\omega\cos(\omega t) - \sin\omega t)$

$v'(1) = 0$

$\Leftrightarrow B(\omega\cos\omega - \sin\omega) = 0$

$\Leftrightarrow \omega\cos\omega = \sin\omega$

Premier cas : $\cos\omega = 0$

$v'(1) = 0 \Leftrightarrow \sin\omega = 0 \Rightarrow 1 = \sin^2\omega + \cos^2\omega = 0 \Leftrightarrow$ Faux.

Deuxième cas : $\cos\omega \neq 0$

$v'(1) = 0 \Leftrightarrow \tan\omega = \omega$

4)a) $\omega_n - (n+1)\pi = \arctan(\tan(\omega - (n+1)\pi))$

$= \arctan(\tan\omega_n) = \omega_n$

Faux

Problème 2 :

1)

4)a) $-P_0 E \overset{IPP}{=} [xP(x)]_0^b - \int_0^b P(x)\,dx$ or $P(b) = 0$

donc $E = \frac{1}{P_0}\int_0^{+\infty} P(x)\,dx$

b) D'après 2), on a donc avec $a = 0$ et $b = N \geq 150$ tq $\forall n \geq N, P(n) = 0$

donc $\tilde{E} = \frac{1}{P_0}\frac{N-0}{N}\left(\frac{P(0)+P(N)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} P(k)\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{P_0}\sum_{k=1}^{+\infty} P(k)$

Partie 2 :

5)a) $\Delta S = S(x+\Delta x) - S(x)$ or entre x et $x+\Delta x$,

$m(x)\Delta x S(x)$ meurent et $q S(x)\Delta x$ attrapent la variole

donc $\Delta S = -m(x)S(x)\Delta x - qS(x)\Delta x$

donc $-(m(x)+q)S(x) = \dfrac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} S'(x)$

donc quand Δx est petit, S est solution de
$(E_S) : S' = -(m(x)+q)S$

b) de même, entre x et $x+\Delta x$, $m(x)\Delta x\, R(x)$ meurent et par les $n = q\, S(x)\Delta x$ qui attrapent la variole, $(1-p)n$ va intégrer les $R(x)$.
Donc
$$R(x+\Delta x) - R(x) = (1-p)q S(x)\Delta x - m(x)\Delta x R(x)$$
Donc R est sol de $R' = q(1-p)S - m(x)R$

b) a) $f = \dfrac{S}{P} = \dfrac{S}{S+R}$

$$f' = \frac{S'(S+R) - (S+R)'S}{(S+R)^2} \qquad (S+R)' = -m(S+R) - pqS$$

donc $(S+R)^2 f' = -(m+q)S(S+R) - S(-m(S+R) - pqS)$
donc $(S+R)^2 f' = -(m+q)S + mS + pq\dfrac{S^2}{S+R}$.

Donc f est sol de $(E_f) : f' = -qf + pqf^2$

c) $P(x)$ ne s'annule pas pour que $f(x)$ soit défini
$S(x)$ —————— // —————— $g(x)$ soit défini
de plus, $P(x) = 0 \Rightarrow S(x) = 0$ donc il faut supposer que $S(x) > 0$ $\forall x$