DM 28

I- les polynômes de Bernoulli

1) Analyse : (H) il existe une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}[X])^{\mathbb{N}}$ qui vérifie les conditions de l'énoncé.

D'après 3 : $B_n' = n B_n$ donc $C + B_n = \int_0^x n B_n(t)dt = n\int_0^x B_n(t)\,dt$, $c\in\mathbb{R}$
donc Il existe $c \in \mathbb{R}$ tq $B_n = n\int_0^x B_n(t)\,dt + c$
Or d'après 4 : $0 = \int_0^1 B_n(t)dt$ donc $0 = n\int_0^1\left(\int_0^x B_n(t)dt\right)dx + \int_0^1 c$
donc $c = -n\int_0^1\left(\int_0^x B_n(t)dt\right)dx$
Donc (R) : $B_n = n\left(\int_0^x B_n(t)dt - \int_0^1\left(\int_0^x B_n(t)dt\right)dx\right)$ de plus $B_0 = 1$
(R) est une relation de récurrence donc par identification de polynômes, il existe une unique suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie les conditions.

Synthèse : D'après la relation de récurrence et $B_0 = 1$, on a bien existence d'une telle suite si elle vérifie 1). Montrons donc par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, d^\circ B_n = n$.
$n=0$: On a Bien $d^\circ B_0 = d^\circ 1 = 0$
$n\in\mathbb{N}$: On suppose que $d^\circ B_n = n$.
$d^\circ B_{n+1} = d^\circ B_{n+1}' + 1 = d^\circ B_n + 1 = n+1$
Faux si B_n cste

Donc on a bien existence et unicité de $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) $\forall n\in\mathbb{N}$, Soit $R(n)$: $B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X)$
pour $n=0$, $B_n(1-X) = 1 = (-1)^0 B_n(X)$ donc on a $R(0)$
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. (H) $R(n-1)$. Soit $x\in\mathbb{R}$.
$$B_n(1-x) = n\left[\int_0^{1-x} B_{n-1}(t)dt - \int_0^1\left(\int_0^{1-x} B_{n-1}(t)dt\right)dx\right]$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $B_{n-1}(t) = \frac{B_{n-1}(1-x)}{(-1)^{n-1}} = (-1)^{n-1} B_{n-1}(1-x)$ donc

$$B_n(1-x) = (-1)^{n-1} n\left[\int_0^{1-x} B_{n-1}(1-t)dt - \int_0^1\left(\int_0^{1-x} B_{n-1}(1-t)dt\right)dx\right]$$

En posant $u = 1-t$:

$$B_n(1-x) = (-1)^{n-1} n \left[\int_1^x B_{n-1}(u)(-du) - \int_0^1 \left(\int_1^x B_{n-1}(u)(-du) \right) dx \right]$$

Or $\int_1^x B_{n-1}(u)du = \int_0^x B_{n-1}(u)du - \int_0^1 B_{n-1}(u)du$ donc d'après 4),

$$\int_1^x B_{n-1}(u)du = \int_0^x B_{n-1}(u)du$$

Donc $B_n(1-x) = (-1)^n n \left[\int_0^x B_{n-1}(u)du - \int_0^1 \left(\int_0^x B_{n-1}(u)du \right) dx \right]$

$$= (-1)^n B_n(x)$$

Donc on a $R(n)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X)$

• On en déduit :

→ Si n est pair : $\forall x \in \mathbb{R}$, $B_n(1-x) = B_n(x)$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $B_n(\frac{1}{2}+x) = B_n(\frac{1}{2}-x)$

Donc le graphe de B_n est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$

→ Si n impair : $\forall x \in \mathbb{R}$, $B_n(1-x) = -B_n(x)$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $B_n(\frac{1}{2}+x) = -B_n(\frac{1}{2}-x)$

Donc le graphe de B_n est symétrique par rapport au point $A = (\frac{1}{2}, B_n(\frac{1}{2}))$

Or pour $x = 0$, on a $B_n(\frac{1}{2}) = -B_n(\frac{1}{2})$ donc $B_n(\frac{1}{2}) = 0$ donc par rapport au point $(\frac{1}{2}, 0)$.

3) D'après la formule de Taylor, $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$B_n(x+y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{y^k}{k!} B_n^{(k)}(x)$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n' = n B_{n-1}$ donc par récurrence, $\forall k \leq n$, $B_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}$,

et $\forall k > n$, $B_n^{(k)} = 0$ car B_n de degré n.

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} y^k \frac{n!}{(n-k)!k!} B_{n-k}(x)$$. On permute les termes de la somme avec $i = n-k$

$$= \sum_{i=0}^{n} y^{n-i} \binom{n}{i} B_i(x)$$

4) avec la relation de récurrence de la question 1 :

$B_0 = 1$, $b_0 = B_0(0) = 1$

$B_1 = 1 \times \left[\int_0^x B_0(t)dt - \int_0^1 \left(\int_0^x B_0(t)dt \right) dx \right] = 1 \times \left[x - \int_0^1 x\, dx \right] = x - \frac{1}{2}$. donc $b_1 = -\frac{1}{2}$

$B_2 = 2 \times \left[\int_0^x (t - \frac{1}{2})dt - \int_0^1 \int_0^x (t - \frac{1}{2}) dt\, dx \right] = 2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \left[\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 \right]$

$= x^2 - x + \frac{1}{6}$ et $b_2 = \frac{1}{6}$

$B_3 = 3\times\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}-\left[\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{12}\right]_0^1\right] = x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$, et $b_3=0$

$$B_4 = 4\times\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3}{3\times2}x^3+\frac{1}{4}x^2-\left[\frac{x^5}{20}-\frac{x^4}{8}+\frac{x^3}{12}\right]_0^1\right]$$

$$= x^4-2x^3+x^2-4\times\frac{1}{120} = x^4-2x^3-\frac{1}{30} \text{, et } b_4=-\frac{1}{30}$$

5) Soit $n\geq 2$:

$\int_0^1 B_{n-1}(t)dt = \frac{1}{n}\int_0^1 B_n'(t)dt = \frac{B_n(1)-B_n(0)}{n}$ d'après 3. Or d'après 4 c'est aussi nul donc $\frac{B_n(1)-B_n(0)}{n}=0$ donc $B_n(1)=B_n(0)=b_n$

Soit $n\in 2\mathbb{N}^*+1$. D'après 2), $B_n(0)=(-1)^n(1)$ car $n\geq 2$ donc $B_n(0)=-B_n(1)$

donc $b_n=-b_n$ donc $b_n=0$.

6) Soit $n\in\mathbb{N}$. $Q_n(-X)=B_n(-X)-nb_1(-X)^{n-1}$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_k(-X)^{n-k} + (-1)^n nb_1X^{n-1}$$

$$=(-1)^n\sum_{\substack{k=0\\k\neq1}}^{n}\binom{n}{k}b_kX^{n-k}+(-1)^{n-1}nb_1X^{n-1}+(-1)^nnb_1X^{n-1} \text{ d'après 5)}$$

$$=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_kX^{n-k}-(-1)^nnb_1X^{n-1}$$

$$=(-1)^n\left(B_n(X)-nb_1X^{n-1}\right)=(-1)^nQ_n(X)$$

Dans ce calcul on avait calculé : $B_n(-X)=(-1)^n\sum_{\substack{k=0\\k\neq1}}^{n}\binom{n}{k}b_kX^{n-k}-(-1)^nnb_1X^{n-1}$

$$=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_kX^{n-k}-2(-1)^nnb_1X^{n-1}$$

$$B_n(-X)=(-1)^n\left(B_n(X)-nX^{n-1}\right) \quad \text{car } b_1=-\frac{1}{2}$$

$$B_n(1+X)-B_n(X)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k(1)X^{n-k}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b_kX^{n-k}$$

a d'après 5) $\forall k\geq2$, $B_k(1)=b_k$ donc $B_n(1+X)-B_n(X)=\binom{n}{0}B_0(1)^n+\binom{n}{1}B_1(1)X^{n-1}-\binom{n}{0}b_0^n-\binom{n}{1}b_1X^{n-1}$

a $B_0=1$, $b_0=1$, $B_1=X-\frac{1}{2}$, $b_1=-\frac{1}{2}$ donc $B_n(1+X)-B_n(X)=n(1-\frac{1}{2})X^{n-1}+\frac{1}{2}nX^{n-1}$

$$=nX^{n-1}$$

Soit $n\in\mathbb{N}$.

7) D'après 3) $B_{n+1}(X+1)=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}B_k(X)$

Donc $\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k(X)=B_{n+1}(X+1)-B_{n+1}(X)\overset{\text{question précédente}}{=}(n+1)X^n$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ $B_{n+1}(0+1)=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}b_k$ donc $\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}b_k=B_{n+1}(1)-b_{n+1}$
$=0$ car $n+1\geqslant 2$ et 5)

(on aurait pu aussi juste prendre $X=0$ dans la 1ère expression)

8) Soit $K,N\in\mathbb{N}$.

D'après 6), $x^N=\frac{1}{N+1}\left(B_{N+1}(x+1)-B_{N+1}(x)\right)$

Donc $\sum_{m=0}^{K}x^N=\sum_{m=0}^{K}\frac{1}{N+1}\left(B_{N+1}(m+1)-B_{N+1}(m)\right)$

$=\frac{1}{N+1}\sum_{m=0}^{K}\left(B_{N+1}(m+1)-B_{N+1}(m)\right)$

$=\frac{1}{N+1}\left(B_{N+1}(K+1)-B_{N+1}(0)\right)$

$=\frac{1}{N+1}\left(B_{N+1}(K+1)-b_{N+1}\right)$

* pour $N=2$: $\sum_{m=0}^{K}m^2=\frac{1}{3}\left(B_3(K+1)-b_3\right)=\frac{(K+1)^3-\frac{3}{2}(K+1)^2+\frac{1}{2}(K+1)}{3}$

donc $\sum_{m=0}^{K}m^2=\frac{(K+1)\left((K+1)^2-\frac{3}{2}(K+1)+\frac{1}{2}\right)}{3}=\frac{(K+1)(K^2+\frac{1}{2}K)}{3}=\frac{K(K+1)(2K+1)}{6}$

ce qui est la bonne formule

9) Soit $v:\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telle que $\forall x\in\mathbb{R}$, $v(f)(x)=f(x+1)-f(x)$

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, $f,g\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Soit $x\in\mathbb{R}$.

$(F_g)\Leftrightarrow v(f)=g$

$v(\lambda f+g)(x)=(\lambda f+g)(x+1)-(\lambda f+g)(x)$

$=\lambda f(x+1)+g(x+1)-\lambda f(x)-g(x)$

$=\lambda\left(f(x+1)-f(x)\right)+g(x+1)-g(x)=\lambda v(f)(x)+v(g)(x)$

donc v est linéaire donc (F_g) est linéaire...

10) $v\left(\frac{B_{n+1}}{n+1}\right)=X^n$ donc d'après 9) $g=\sum_{n=0}^{N}a_nX^n=\sum_{n=0}^{N}a_n\,v\left(\frac{B_{n+1}}{n+1}\right)$

$=v\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{a_n}{n+1}B_{n+1}\right)\overset{\Delta}{=}v(h)$

avec $h=\sum_{n=0}^{N}\frac{a_n}{n+1}B_{n+1}$

h est une solution de (E_g). Donc les solutions de (E_g) sont $h + \mathrm{Ker}\, v$
or $f \in \mathrm{Ker}\, v \iff v(f)=0 \iff \forall x\in\mathbb{R}, f(x+1)=f(x) \iff f\in P$ donc
l'ensemble des solutions est $h+P$, ce qui a l'air convenable.

11) Supposons f solution de E_g telle que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L \in \mathbb{R}$
Soit $x\in\mathbb{R}$, $N\in\mathbb{N}$.

$$\sum_{n=0}^{N} g(x+n) = \sum_{n=0}^{N} \big(f(x+n+1) - f(x+n)\big)$$

$$= f(x+N+1) - f(x) \xrightarrow[N\to+\infty]{} L - f(x) \text{ donc } \sum_{n=0} g(x+n) \text{ CV}$$

et $\sum_{n=0}^{+\infty} g(x+n) = L - f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

$\to$ (H) $\sum_{n=0}^{N} g(x+n)$ CV et $\sum_{n=0}^{+\infty} g(x+n) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Trouvons une solution de (E_g):

posant $x\in\mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g(x+n)$. $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \in \mathbb{R}$.

$$f(x+1) - f(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} g(x+1+n) + \sum_{n=0}^{+\infty} g(x+n)$$

Illégal? $= -\sum_{n=1}^{+\infty} g(x+n) + \sum_{n=0}^{+\infty} g(x+n) = g(x)$ Illégal

donc $f(x+1) - f(x) = g(x)$. Donc (E_g) a bien une solution qui tend vers une limite réelle.

12) Soit $x\in\mathbb{R}$. $g(x) = e^{-\lambda x}$. Soit $N\in\mathbb{N}$. $\sum_{n=0}^{N} g(x+n) = \sum_{n=0}^{N} e^{-\lambda(x+n)}$

$$= \sum_{n=0}^{N} e^{-\lambda x} \times e^{-\lambda n}$$

$$= e^{-\lambda x} \sum_{n=0}^{N} e^{-\lambda n}$$

$$= e^{-\lambda x} \frac{1-(e^{-\lambda})^{N+1}}{1-e^{-\lambda}}$$

$$\xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}} \text{ car } 0<e^{-\lambda}<1$$

Comme dans la question précédente, posons $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}}$
Toujours d'après la question précédente, f est solution.
Donc l'ensemble des solutions est $f+P$.

~~13) prenons g une fonction bip~~