

Conservez seulement de quoi écrire et une calculatrice : pas de téléphone en particulier !
Si vous ne comprenez pas une notation, une question, ou si vous pensez avoir découvert une erreur d'énoncé, signalez-le immédiatement.
Les mouvements seront étudiés dans le référentiel terrestre, considéré galiléen pour la durée des expériences.

Problème 1 : Accélérateur linéaire

On étudie le principe d'un accélérateur linéaire de particules (LINAC).

Données :

- charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; unité de masse atomique $u = 1,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$; masse électronique $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; vitesse de la lumière $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- fréquence du champ radiofréquence $f = 1,0 \text{ MHz}$, tension du générateur $U_0 = 25 \text{ kV}$.
- nombre de masse $A(\text{Na}) = 23$.

I Généralités

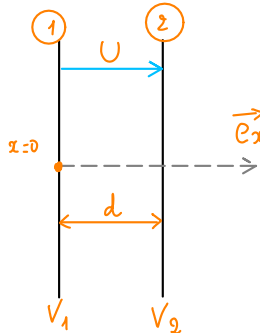
I.1. On impose une tension électrique U entre deux plaques parallèles distantes d'une distance d négligeable devant leurs dimensions transversales.

(a) Rappeler l'expression du champ électrique \vec{E} , supposé uniforme, qui règne entre les plaques. Quel doit être le signe de U sur le schéma ci-contre pour que des ions Na^+ subissent une force dans le sens de \vec{e}_x . On considère cette condition réalisée par la suite.

(b) Un ion Na^+ est initialement placé en $x = 0$, animé d'une vitesse négligeable. Déterminer l'expression de la durée de traversée de la distance d ainsi que celle de sa vitesse au point $x = d$, notée v_U . Calculer ces valeurs pour $d = 1 \text{ cm}$ et $|U| = U_0 = 25 \text{ kV}$. Les ions sont-ils relativistes ?

(c) Dans cette question seulement, l'ion possède une vitesse initiale notée \vec{v}_0 de norme v_0 qu'on ne néglige plus et formant l'angle $\alpha_0 \in [0; \pi/2]$ avec la direction $+\vec{e}_x$. On note \vec{v}_1 la vitesse dans le plan d'abscisse $x = d$ et α_1 l'angle qu'elle forme avec \vec{e}_x . Établir les expressions de v_1 et de $\sin(\alpha_1)$. Calculer les valeurs de v_1 et α_1 pour $v_0 = v_U/4$ et $\alpha = 5^\circ$.

I.2. On étudie le mouvement d'un cation de charge e et de masse m dans un champ magnétique uniforme et stationnaire d'intensité B . Le cation est initialement animé d'une vitesse notée v_0 orthogonale au champ magnétique.



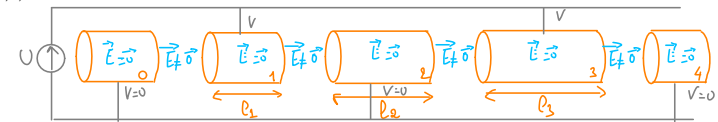
- (a) On admet que le mouvement du cation est circulaire. Montrer qu'il est uniforme, et établir l'expression de son rayon et de sa période.
- (b) Reproduire le schéma ci-contre et y représenter la trajectoire. On y précisera la position de l'ion aux instants $t = 0$ et au bout d'une durée égale à $m\pi/(2eB)$.

II Modèle de Widerøe

On étudie un accélérateur produisant des champs électriques au moyen de cylindres métalliques coaxiaux placés à différents de potentiel. On admet que le champ électrique \vec{E} ainsi produit :

- est nul à l'intérieur de chacun des cylindres,
- est uniforme et de même valeur entre les deux cylindres que celui déterminé à la question I.1a entre deux plaques soumises à la même différence de potentiel V .

Les cylindres sont alternativement connectés à chacune des bornes d'un générateur de tension. Chaque cylindre possède une longueur ℓ_1, ℓ_2, \dots a priori différente (dispositif réalisé par Widerøe en 1928.)



Des cations Na^+ parviennent à l'espace entre les cylindres 0 et 1 en sortant du cylindre 0 avec une vitesse négligeable. On admet qu'on peut négliger le temps passé par les cations entre chaque cylindre devant la durée nécessaire pour traverser un cylindre.

II.1. Dans cette question seulement, le générateur délivre une tension continue $U = -U_0 = -25 \text{ kV}$. Déterminer les expressions et calculer les valeurs de leur énergie cinétique quand ils sont dans le cylindre 1 et quand ils sont dans le cylindre 2. On les exprimera en eV.

Dans toute la suite, le générateur délivre une tension *alternative* d'amplitude U_0 et de fréquence notée f variant selon $V(t) = -U_0 \cos(2\pi f t)$. On considère un cation sortant du cylindre 0 à l'instant $t = 0$.

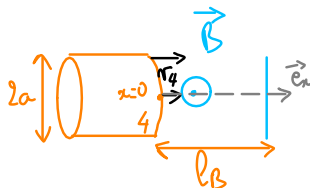
- II.2. (a) Montrer qu'il est possible de choisir les longueurs des cylindres 1, 2, ... pour que l'énergie cinétique du cation croisse de manière arithmétique avec le nombre de cylindres franchis. Donner les expressions des longueurs ℓ_1 et ℓ_2 et calculer leurs valeurs pour un cation Na^+ et une tension d'amplitude $U_0 = 25 \text{ kV}$ et de fréquence $1,0 \text{ MHz}$. En quoi est-il intéressant de disposer de sources de tension de fréquence élevée.
- (b) Dans ces conditions, quelle sera la longueur totale d'un dispositif permettant de produire des cations d'énergie cinétique égale à 100 keV .
- (c) Pour une particule relativiste, l'énergie cinétique a pour expression $\mathcal{E}_c = (\gamma - 1)mc^2$. Donner le nombre de cylindres nécessaires pour produire des électrons de vitesse $v = 9c/10$ avec la même tension $|U|$. Comment doit ensuite varier la longueur des cylindres pour continuer à accélérer de manière optimale les électrons au-delà de $v = c/10$?

II.3. Le dispositif est construit dans les conditions déterminées à la question II.2a pour des cations Na^+ , avec une tension $V(t) = -U_0 \cos(2\pi f t)$. On étudie l'effet d'un décalage temporel de l'instant d'émission des cations.

- (a) On considère un ion sortant du cylindre 0 avec une vitesse négligeable à un instant $t_0 > 0$, avec $t_0 \ll 1/f$. Déterminer l'instant auquel il parvient dans le cylindre 2. Même question dans le cas d'un cation émis à un instant $-t_0$.

- (b) On émet en sortie du cylindre 0 un paquet de cations dans un intervalle de temps Δt au voisinage d'un instant t_1 , avec $|t_1| \ll \pi/\omega$ et $\Delta t \ll |t_1|$. Comment choisir le signe de t_1 pour que le paquet reste groupé ?

II.4. On souhaite dévier la trajectoire des cations en sortie de l'accélérateur linéaire. On crée en sortie du cylindre 4 un champ magnétique uniforme de direction orthogonale à \vec{e}_x et de largeur notée ℓ_B . Dans cette zone le champ électrique est nul. On note $\vec{v}_4 = v_4 \vec{e}_x$ le vecteur vitesse des cations en sortie du cylindre 4. On suppose, sauf mention explicite du contraire, que la longueur ℓ_B est suffisamment faible pour que les cations traversent la zone de champ magnétique.



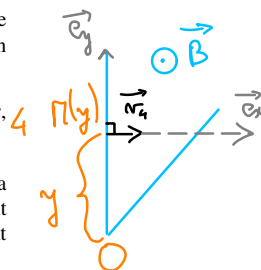
- (a) Déterminer l'expression de l'angle, noté α_B que forme le vecteur vitesse des cations avec l'axe \vec{e}_x en $x = \ell_B$. Calculer la valeur de ℓ_B pour avoir $\alpha_B = \pi/4$ avec $B = 1\text{ T}$ et les valeurs précédentes du dispositif accélérateur.

- (b) On suppose, dans cette question seulement, que la longueur ℓ_B est suffisamment grande pour que les cations ne puissent pas sortir de la zone de champ magnétique dans le sens des x croissants. Déterminer les expressions de l'intensité B du champ magnétique pour lesquelles les cations finissent leur parcours avec une vitesse nulle dans le cylindre 0. Calculer la valeur minimale de B correspondante si les cations se propagent initialement sur l'axe de symétrie de révolution des cylindres et si ceux-ci ont un rayon $a = 100\text{ cm}$.

II.5. Le champ magnétique n'est désormais non nul que dans un secteur angulaire d'angle $\theta_B = \pi/4$. On note y la distance entre le point d'incidence M d'un cation et le centre O du secteur. La vitesse initiale des cations est toujours v_4 .

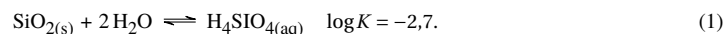
- (a) Déterminer, en fonction entre autres de l'intensité B , l'expression de y , notée y_B , pour laquelle les cations sont déviés de θ_B .

- (b) On considère un cation incident en $y < y_B$. Comparer géométriquement sa déviation en sortie de secteur angulaire à θ_B . En déduire géométriquement que le secteur angulaire magnétique focalise un faisceau de cations incident dans l'intervalle $y_B \pm \Delta y/2$.



Exercice 1 : Solubilité des silices

La dissolution dans l'eau pure de la silice amorphe, de formule $\text{SiO}_{2(s)}$, est caractérisée par la réaction :



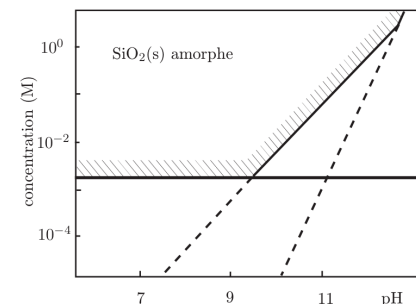
1. Déterminer l'expression et calculer la solubilité de la silice amorphe si seul cet équilibre intervient. On note s_0 sa valeur.

2. Les propriétés acidobasiques de $\text{H}_4\text{SiO}_{4(aq)}$ modifient cette solubilité en fonction du pH. La molécule H_4SiO_4 est en effet un diacide caractérisé par $\text{p}K_{a1} = 9,5$ et $\text{p}K_{a2} = 12,6$. On s'efforcera de raisonner en formulant des hypothèses sur le domaine du pH à l'équilibre.

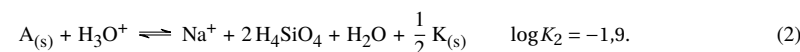
- (a) Calculer la solubilité de la silice amorphe dans une eau pure.
- (b) On rajoute $4s_0$ mol par litre de soude NaOH à une solution saturée en silice amorphe. Déterminer le pH et la quantité totale de silice dissoute.

3. La figure ci-contre donne les variations asymptotiques (ie approximées par des droites) de la solubilité totale de la silice amorphe en fonction du pH.

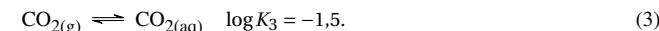
- (a) Retrouver par lecture les valeurs de pH et de solubilité des réponses aux questions du 2.
- (b) Écrire les équations bilans des équilibre mis en jeu le long des segments de droite et retrouver les pentes lues sur la courbe.



4. L'albite $\text{NaAlSi}_3\text{O}_8(s)$ (abrégié en A) est un silico-aluminate de sodium qui entre dans la composition des roches (feldspath de sodium). Son altération au contact d'une eau en équilibre avec le $\text{CO}_{2(g)}$ atmosphérique conduit à une dissolution partielle accompagnant la transformation de l'albite en un autre silico-aluminate, la kaolinite $\text{Al}_2\text{Si}_2\text{O}_5(\text{OH})_4(s)$ (abrégié en K). L'équation bilan correspondante est :



La dissolution du dioxyde de carbone atmosphérique $\text{CO}_{2(g)}$ est caractérisée par l'équilibre :



Le dioxyde de carbone aqueux $\text{CO}_{2(aq)}$ est un diacide caractérisé par les couples $(\text{CO}_{2(aq)}/\text{HCO}_3^-)$ de $\text{p}K_{a1}' = 6,3$ et $(\text{HCO}_3^-/\text{CO}_3^{2-})$ de $\text{p}K_{a2}' = 10,3$.

- (a) Sachant que le pH des eaux naturelles est généralement compris entre 7 et 8, quelles sont les formes prédominantes en solution du dioxyde de carbone et de la silice ?
- (b) Écrire l'équation bilan de la réaction de dissolution partielle de l'albite au contact d'une eau en équilibre avec le $\text{CO}_{2(g)}$ atmosphérique et en déterminer la constante (on en donnera le log).
- (c) La pression partielle du $\text{CO}_{2(g)}$ est $p_{\text{CO}_{2(g)}} = 10^{-3,5}\text{ bar}$. Déterminer les espèces prédominantes en solution résultant de la mise en équilibre d'albite en excès avec de l'eau pure au contact du $\text{CO}_{2(g)}$.
- (d) En déduire le pH de la solution.
- (e) Comment la solubilité varie-t-elle avec p_{CO_2} ?