DM 15

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.
Il n'est pas à rendre.
Un corrigé sera fourni dans une semaine.

Produit semi-direct de groupes

Partie I : Automorphismes de groupes

1°) Lorsque H est un groupe, on note $\mathrm{Aut}(H)$ l'ensemble des automorphismes de H. Montrer que $\mathrm{Aut}(H)$ est un groupe pour la loi de composition.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. À quelle condition sur x l'application $y \longmapsto xy$ est-elle un automorphisme du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$?

3°) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.
Montrer que $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est isomorphe au groupe des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Partie II : produit semi-direct

Dans cette partie, H et K désignent deux groupes notés multiplicativement et φ est un morphisme du groupe K vers le groupe $\mathrm{Aut}(H)$. Ainsi, lorsque $k \in K$ et $h \in H$, $\varphi(k)(h)$ représente l'image de h par l'automorphisme $\varphi(k)$.

4°) Pour tout $(h,k) \in H \times K$ et $(h',k') \in H \times K$, on pose $(h,k).(h',k') = (h\,\varphi(k)(h'), kk')$.
Montrer que cette égalité définit une loi de groupe sur l'ensemble $H \times K$.
Ce groupe est appelé le produit semi-direct de H par K relativement à φ et il est noté $H \rtimes_{\varphi} K$.

5°) Montrer que $H \rtimes_{\varphi} K$ est commutatif si et seulement si H et K sont abéliens et si φ est l'application $k \longmapsto Id_H$.

6°) En utilisant les questions précédentes, construire un groupe non commutatif d'ordre 21.

7°) Si R est un sous-groupe d'un groupe G, noté multiplicativement, on dit que R est un sous-groupe distingué de G si et seulement si, pour tout $g \in G$ et $r \in R$, $grg^{-1} \in R$.
Si G est un groupe noté multiplicativement, on note 1_G son élément neutre.
On note $E = H \times \{1_K\}$ et $F = \{1_H\} \times K$ et on pose $E.F = \{e.f \ / \ e \in E, \ f \in F\}$.
Montrer que

- $E \cap F = \{1_{H \rtimes_\varphi K}\}$;
- $E.F = H \rtimes_\varphi K$;
- F est un sous-groupe de $H \rtimes_\varphi K$ isomorphe à K ;
- E est un sous-groupe distingué de $H \rtimes_\varphi K$ isomorphe à H.

Partie III : construction réciproque

8°) Soit G un groupe, toujours noté multiplicativement. On suppose qu'il existe un sous-groupe distingué de G, noté E, et un sous-groupe de G noté F, tels que
$E \cap F = \{1_G\}$ et $E.F = G$.
Montrer que l'application p, de $E \times F$ dans G, définie par $p(e, f) = ef$ est une bijection.
Montrer qu'il existe un morphisme φ de F dans $\mathrm{Aut}(E)$ tel que G est isomorphe à $E \rtimes_\varphi F$.

9°) Soit H, H', K et K' 4 groupes notés multiplicativement.
On suppose que H' est isomorphe à H et que K' est isomorphe à K.
Si φ est un morphisme de K dans $\mathrm{Aut}(H)$, montrer qu'il existe un morphisme φ' de K' dans $\mathrm{Aut}(H')$ tel que $H \rtimes_\varphi K$ est isomorphe à $H' \rtimes_{\varphi'} K'$.

10°) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$ et on appelle D_n l'ensemble des similitudes s telles que $s(\mathbb{U}_n) = \mathbb{U}_n$.
a) Montrer que D_n est un groupe (que l'on appelle le groupe diédral d'ordre $2n$).
b) Montrer que si $s \in D_n$, alors $s(0) = 0$.
c) Déterminer les éléments de D_n.
d) Montrer que D_n est isomorphe à un produit semi-direct de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.