

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 27 : du lundi 6 juin au vendredi 10 juin

Algèbre linéaire, AVEC les déterminants

Liste des questions de cours

- 1°) Enoncer puis établir les liens entre “antisymétrique” et “alternée” pour une application p -linéaire.
- 2°) Lorsque e est une base de E , donner la définition de \det_e : on proposera deux formules et l’on montrera qu’elles sont égales.
- 3°) Si e est une base de E , montrer que \det_e est alternée.
- 4°) Montrer que pour tout $f \in A_n(E)$, $f = f(e) \det_e$.
- 5°) Donner et justifier la définition du déterminant d’un endomorphisme.
- 6°) Si $f, g \in L(E)$, que peut-on dire de $\det(fg)$? Démontrez-le.
- 7°) Enoncer et démontrer la formule du développement de $\det(M)$ selon l’une de ses colonnes.
- 8°) Montrer que $M^t \text{Cof}(M) = {}^t \text{Cof}(M) M = \det(M) I_n$.
- 9°) Que vaut le déterminant d’une matrice triangulaire par blocs ? Démontrez-le.
- 10°) Enoncer et démontrer les formules de Cramer.
- 11°) Calcul du déterminant de Vandermonde.

1 Programmes précédents

Les programmes de colles précédents, portant sur l’algèbre linéaire, sont à réviser.

2 Les déterminants

Notation. \mathbb{K} désigne un corps quelconque.

3 Applications multilinéaires

Formes p -linéaires, formes bilinéaires.

Formes p -linéaires symétriques, antisymétriques, alternées.

alternée \implies antisymétrique. La réciproque est vraie lorsque $\text{car}(\mathbb{K}) \neq 2$.

4 Les trois notions de déterminants

4.1 Déterminant d'une famille de vecteurs

Notation. E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie égale à n , avec $n > 0$.

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le “volume algébrique” de l’hyperparallélépipède défini par $x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$ est nécessairement une forme n -linéaire alternée en fonction de x .

Notation. On note $A_n(E)$ l’ensemble des formes n -linéaires alternées.

Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, si e est une base de E , on pose

$$\det_e(x_1, \dots, x_n) \triangleq \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n e_{\sigma(j)}^*(x_j) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n e_j^*(x_{\sigma(j)}).$$

Si e est une base de E , pour tout $f \in A_n(E)$, $f = f(e) \det_e$.
 $A_n(E)$ est la droite vectorielle dirigée par \det_e .

4.2 Déterminant d'une matrice

$$\det(M) = \det({}^t M).$$

Formule de Sarrus.

4.3 Déterminant d'un endomorphisme

Soit $u \in L(E)$. $\det(u)$ est l’unique scalaire tel que $\forall f \in A_n(E), \forall x \in E^n, f(u(x)) = (\det(u))f(x)$.

Si e est une base de E et $u \in L(E)$, $\det_e(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det(u) \det_e(x_1, \dots, x_n)$.
 $\det(u) = \det_e(u(e_1), \dots, u(e_n))$.

Pour toute base e de E et pour tout $u \in L(E)$, $\det(u) = \det(\text{Mat}(u, e))$.

5 Propriétés du déterminant

Modification du déterminant lors d’une opération élémentaire portant sur les lignes ou sur les colonnes.

Pour tout $f, g \in L(E)$, $\det(fg) = \det(f) \times \det(g)$.

x est une base si et seulement si $\det_e(x) \neq 0$.

$u \in GL(E)$ si et seulement si $\det(u) \neq 0$ et dans ce cas, $\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}$.

$A \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Groupe spécial linéaire de E : $SL(E) = \{u \in L(E) \mid \det(u) = 1\}$.

Le déterminant est un invariant de similitude.

6 Calcul des déterminants

Mineurs et cofacteurs.

Développement de $\det(M)$ selon l’une des ses lignes ou de ses colonnes.

Comatrice $\text{Com}(M)$. $M^t \text{Com}(M) = {}^t \text{Com}(M) M = \det(M) I_n$.

Déterminant d’une matrice triangulaire par blocs.

Formules de Cramer.

7 Exemples de déterminants.

Déterminant de Vandermonde.

Déterminants tridiagonaux : relation de récurrence.

Déterminants circulants : On ajoute toutes les lignes (ou colonnes).

8 Le polynôme caractéristique

Il ne s'agit que d'une introduction à la théorie de la réduction. Aucune connaissance n'est attendue des élèves concernant les polynômes annulateurs, le lemme de décomposition des noyaux, la trigonalisation.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_M = \det(XI_n - M)$.

$\chi^t M = \chi_M$,

si M est triangulaire, alors $\chi_M(X) = \prod_{i=1}^n (X - M_{i,i})$,

deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique (réciproque fausse).

Lorsque $u \in L(E)$, $\chi_u = \chi_{\text{mat}(u,e)}$ où e est une base de E .

Le spectre de u est l'ensemble des racines dans \mathbb{K} de χ_u .

8.1 Propriétés du polynôme caractéristique

$\chi_u(X) = X^n - \text{Tr}(u)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u)$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, u admet au moins un vecteur propre.

Prévisions pour la semaine suivante :

Espaces euclidiens