Feuille d'exercices 6.
Réels, bornes supérieures.

Exercice 6.1 : (niveau 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lfloor 2x+1 \rfloor = \lfloor x+4 \rfloor$.

Exercice 6.2 : (niveau 1) Montrer que $\{q^2/q \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6.3 : (niveau 1) Montrer que $\dfrac{\ln 2 + \ln 3}{\ln 5 + \ln 7}$ est irrationnel.

Exercice 6.4 : (niveau 1) Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$.

1°) Démontrer que $(A \subset B) \Longrightarrow (\sup A \leq \sup B)$.

2°) Démontrer que $A \cup B$ est majorée et déterminer $\sup(A \cup B)$.

3°) Démontrer que $A \cap B$ est majorée.
Quelle propriété peut-on établir reliant $\sup(A \cap B)$, $\sup A$ et $\sup B$?

Exercice 6.5 : (niveau 1)

1°) Démontrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.

2°) Démontrer que la racine carrée d'un irrationnel strictement positif est un irrationnel.

3°) Soient r, s deux rationnels positifs tels que $\sqrt{r}$ et $\sqrt{s}$ sont irrationnels. Démontrer que $\sqrt{r} + \sqrt{s}$ est irrationnel.

Exercice 6.6 : (niveau 1)
Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f|_{\mathbb{Q}}$ est croissante.
Montrer que f est croissante.

Exercice 6.7 : (niveau 2) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer si elle existe la limite de la suite $(E(a^n)^{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}^*}$, où E désigne la partie entière.

Exercice 6.8 : (niveau 2) Montrer que $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$.

Exercice 6.9 : (niveau 2)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+3} \rfloor$.

Exercice 6.10 : (niveau 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lfloor nx \rfloor = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor$.

Exercice 6.11 : (niveau 2)

Soit I un segment non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f\ :\ I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue.
Montrer que, pour tout $\lambda \in f(I)$, $\lambda = f(\inf\{z \in I/f(z) = \lambda\})$.

Exercice 6.12 : (niveau 2)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Toutes les suites de cet exercice seront à valeurs dans $[a, b]$.
Soit (x_n) une suite.
On pose $\text{limsup}(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{k\geq n} x_k$ et $\text{liminf}(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \inf\limits_{k\geq n} x_k$.
Montrer que ces notions sont bien définies et que $\text{limsup}(x_n) \geq \text{liminf}(x_n)$.
Soit (y_n) une seconde suite.
a) Montrer que si : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq y_n$, alors
$\text{limsup}(x_n) \leq \text{limsup}(y_n)$ et $\text{liminf}(x_n) \leq \text{liminf}(y_n)$.
b) Montrer que $\text{limsup}(x_n + y_n) \leq \text{limsup}(x_n) + \text{limsup}(y_n)$ et que
$\text{limsup}(x_n) + \text{liminf}(y_n) \leq \text{limsup}(x_n + y_n)$.
c) On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geq 0$ et $y_n \geq 0$: Montrer que
$\text{limsup}(x_n)\text{liminf}(y_n) \leq \text{limsup}(x_n y_n) \leq \text{limsup}(x_n)\text{limsup}(y_n)$.

Exercice 6.13 : (niveau 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $F_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2}$. F_n peut-il être un nombre décimal ?

Exercice 6.14 : (niveau 2) Montrer que $\{\sqrt{m} - \sqrt{n}/(n, m) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6.15 : (niveau 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(I_j)_{1\leq j\leq n}$ une famille finie de n intervalles telle que $\bigcup\limits_{1\leq j\leq n} I_j$ est un intervalle. Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{N}_n$ tel que $\bigcup\limits_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq\ell}} I_j$ est un intervalle.
Cette propriété est-elle encore vraie avec une famille infinie d'intervalles ?

Exercice 6.16 : (niveau 2)

Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(E)$ tel que $E \in \mathcal{F}$. Soit $P \subset E$.
On pose $\mathcal{F}_P = \{A \in \mathcal{F}\ /\ P \subset A\}$.

1°) Montrer que $\mathcal{F}_P$ admet une borne inférieure, notée $\widehat{P}$ pour la relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$.

2°) Si $P \in \mathcal{F}$, montrer que $\widehat{P} = P$.

3°) Montrer que pour tout $P \in \mathcal{P}(E)$, $\widehat{\widehat{P}} = \widehat{P}$.

Exercice 6.17 : (niveau 3)

Soit A une partie non majorée de $\mathbb{R}_+$. Montrer que $B = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n}A$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Exercices supplémentaires

Exercice 6.18 : (niveau 1)
Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications réelles bornées. Que peut-on dire de $\sup\{f(x)+g(x)/x \in \mathbb{R}\}$ vis-à-vis de $\sup\{f(x)/x \in \mathbb{R}\} + \sup\{g(x)/x \in \mathbb{R}\}$?

Exercice 6.19 : (niveau 1)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lfloor \sqrt{x^2+1} \rfloor = 2$.

Exercice 6.20 : (niveau 1)
Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2,\ (1+\sqrt{5})^n = a_n + b_n\sqrt{5}$.

Exercice 6.21 : (niveau 1) On appelle nombre dyadique tout nombre rationnel de la forme $\dfrac{m}{2^k}$ où $m \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que l'ensemble des nombres dyadiques est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6.22 : (niveau 2) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 6.23 : (niveau 2)
Soit A une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$.
Exprimer $\sup\limits_{x,y \in A} |x-y|$ en fonction de $\sup(A)$ et $\inf(A)$.

Exercice 6.24 : (niveau 2)

1°) Montrer que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq 2$.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la borne inférieure de
$\{(a_1 + \cdots + a_n)(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}) \ /\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*\}$.

Exercice 6.25 : (niveau 2) Démontrer qu'il existe deux irrationnels a et b tels que a^b est un rationnel.

Exercice 6.26 : (niveau 2) On fixe k dans $\mathbb{N}^*$. Lorsque $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq k$, on note u_n le chiffre des unités de $\dbinom{n}{k}$ en base 10. Montrer que le réel $x = 0, u_k u_{k+1} u_{k+2} \cdots$ est un rationnel (formellement, $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_{k+n-1}}{10^n}$).

Exercice 6.27 : (niveau 2) On munit $E = [0,1] \times [0,1]$ de l'ordre lexicographique. Montrez que toute partie non vide de E admet une borne supérieure. Ce résultat subsiste-t-il avec $E = [0,1] \times]0,1]$?

Exercice 6.28 : (niveau 3) Montrer que $\{\cos(\ln(n)) \ /\ n \in \mathbb{N} \text{ avec } n \geq 2\}$ est dense dans $[-1,1]$.

Exercice 6.29 : (niveau 3) On note G l'ensemble des applications f de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0)=0$ et $f(1)=1$. Déterminer $\inf\limits_{f \in G} \displaystyle\int_0^1 |f'(x) - f(x)|\, dx$.

Exercice 6.30 : (niveau 3)

1°) Lorsque A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$, on dit qu'elles sont adjacentes si et seulement si

— $\forall (a,b) \in A \times B,\ \ a \leq b$;

— $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \exists (a,b) \in A \times B,\ \ b - a \leq \varepsilon$.

Montrer que la propriété de la borne supérieure est équivalente à la propriété suivante : Deux parties A, B de $\mathbb{R}$ sont adjacentes si et seulement si il existe un unique $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(a,b) \in A \times B$, $a \leq c \leq b$.

2°) Montrer que la propriété de la borne supérieure est équivalent à la propriété suivante : Si $(u_n), (v_n)$ sont deux suites adjacentes de réels (c'est-à-dire que l'une est croissante, l'autre décroissante et que $u_n - v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$) alors elles convergent vers un même réel.