Feuille d'exercices 19.
Dérivation et convexité

Exercice 19.1 : (niveau 1)
Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :
$f(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$, $f(x) = |\ln x|$, $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ et $f(x) = x|x|$.

Exercice 19.2 : (niveau 1)
Etudiez les suites (x_n) de réels vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}\ \ x_{n+1} = x_n - x_n^2$.

Exercice 19.3 : (niveau 1)
Montrer que, pour tout $x \geq 1$, $\left| x \ln x - \frac{1}{2}(x^2 - 1) \right| \leq \frac{1}{6}(x-1)^3$.

Exercice 19.4 : (niveau 1)
E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et C_1 et C_2 sont deux parties convexes de E.
On note C l'ensemble des milieux des couples de points (A_1, A_2) où $A_1 \in C_1$ et $A_2 \in C_2$.
Montrer que C est convexe.

Exercice 19.5 : (niveau 1)
Déterminez les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convexes et bornées.

Exercice 19.6 : (niveau 1)
Etudiez les suites (x_n) vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a^2}{x_n}\right),$$

où $a > 0$.

Exercice 19.7 : (niveau 1)
Soit f une application C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et pour laquelle il existe $a \in]0,1]$ tel que $f(a)f'(a) < 0$. Montrez qu'il existe $b \in]0,1]$ tel que $f'(b) = 0$.

Exercice 19.8 : (niveau 1)
On considère une suite réelle vérifiant :
$u_0 \in \mathbb{R}^*$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f(x) = 1 + \dfrac{1}{4}\sin\dfrac{1}{x}$.

1°) En notant $I = [\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$, montrer que $f(I) \subset I$.
En déduire qu'il existe $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$.

2°) Montrer que, pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \frac{4}{9}$. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exercice 19.9 : (niveau 2)
Montrer que $x \longmapsto x^2 \tan\frac{1}{x} \sin\frac{2}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement est dérivable en 0. Cette fonction est-elle de classe C^1 en 0 ?

Exercice 19.10 : (niveau 2)
Soit (u_n) une suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n\dfrac{1+2u_n}{1+3u_n}$.
Etudiez (u_n) et donnez un équivalent.

Exercice 19.11 : (niveau 2)

1°) Montrer que, pour tout $t \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$, il existe un unique $\theta(t) \in]0, 1[$ vérifiant $\sin t = t - \dfrac{t^3}{6}\cos(t\theta(t))$.

2°) Montrer que $\theta(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Exercice 19.12 : (niveau 2)
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$.

1°) On suppose que f est strictement convexe sur I.
Démontrer que l'équation $f(x) = a$ admet au plus deux solutions.

2°) On suppose seulement que f est convexe sur I. Que peut-on dire de l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = a$?

Exercice 19.13 : (niveau 2)
On considère deux applications f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1°) Si f et g sont continues, montrer que $\max(f, g)$ est également continue.

2°) Lorsque f et g sont dérivables en $x_0 \in \mathbb{R}$, à quelle condition $\max(f, g)$ est-elle dérivable en x_0 ?

Exercice 19.14 : (niveau 2)
Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$, où I désigne un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. On suppose que f est dérivable sur I.

1°) Soit $(a, b) \in I^2$. On suppose que $f'(a) < 0$ et que $f'(b) > 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

2°) Montrer que $f'(I)$ est un intervalle (c'est le théorème de Darboux).

Exercice 19.15 : (niveau 2)
Etudiez les suites telles que : $x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n}$.

Exercice 19.16 : (niveau 2)

1°) Soient f et g deux applications de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\begin{vmatrix} f(b) - f(a) & f'(c) \\ g(b) - g(a) & g'(c) \end{vmatrix} = 0$.

2°) *R*ègle de l'Hôpital.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $a \in I$. Soient f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$ continues sur I et dérivables sur $I \setminus \{a\}$. On suppose que $f(a) = g(a) = 0$ et qu'il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $\forall t \in V \cap (I \setminus \{a\})\ \ g'(t) \neq 0$.
Montrer que s'il existe $l \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\dfrac{f'(t)}{g'(t)} \underset{\substack{t \to a \\ t \neq a}}{\longrightarrow} l$ alors $\dfrac{f(t)}{g(t)} \underset{\substack{t \to a \\ t \neq a}}{\longrightarrow} l$.

Exercice 19.17 : (niveau 2)
Etudiez les suites réelles (u_n) vérifiant : $u_{n+1} = 1 - u_n^2$.

Exercice 19.18 : (niveau 3)

1°) Déterminer l'ensemble des applications $f\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivables en 0 et telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 2f(x)$.

2°) Déterminer l'ensemble des applications $f\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivables en 0 et telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)^2$.

Exercice 19.19 : (niveau 3)
Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ \ f(\dfrac{x + y}{2}) \leq \dfrac{1}{2}(f(x) + f(y))$. Montrez que f est convexe.

Exercice 19.20 : (niveau 3)
Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(t) = exp\left(\dfrac{-1}{t^2}\right)$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 0$.
1°) Montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n \geq 1}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*\ \ \forall t \in \mathbb{R}^*\ \ f^{(n)}(t) = \dfrac{P_n(t)}{t^{3n}} exp\left(-\dfrac{1}{t^2}\right)$. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite (P_n) et donner le degré de P_n.
2°) Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ f^{(n)}(0) = 0$.
3°) Montrer que toutes les racines de P_n sont réelles.

Exercice 19.21 : (niveau 3)
Soit f une application de classe C^∞ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels, strictement croissante et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a_n) = 0$.

Exercice 19.22 : (niveau 3)
Convergence quadratique de la méthode de Newton.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 telle que, pour tout $x \in I$, $f'(x) \neq 0$.
On choisit x_0 dans I et on définit la suite (x_n) par récurrence en convenant que x_{n+1} est l'abscisse de l'intersection avec l'axe Ox de la tangente au graphe de f en le point d'abscisse x_n.

1°) Donner une expression de x_{n+1} en fonction de x_n, f et f'.
Si (x_n) converge vers $\ell \in I$, que peut-on dire de ℓ ?
Lorsque $I = \mathbb{R}_+^*$ et $f(x) = x^2 - a$, avec $a \in \mathbb{R}_+^*$, donner une expression simple de x_{n+1} en fonction de x_n.

2°) On suppose que f est C^3 et qu'il existe ℓ dans l'intérieur de I tel que $f(\ell) = 0$. Montrer qu'il existe $\varepsilon, C \in \mathbb{R}_+^*$ tels que, si $x_0 \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \ell| \leq C10^{-(2^n)}$ (on dit que la convergence de x_n vers ℓ est quadratique).

Exercices supplémentaires :

Exercice 19.23 : (niveau 1)
Etudier les suites (x_n) de réels vérifiant la relation, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = e^{x_n}$.

Exercice 19.24 : (niveau 1)
1°) Soit f une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$. f peut-elle être convexe ?
2°) La composée de deux applications convexes est-elle convexe ?

Exercice 19.25 : (niveau 2)
Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer la dérivée n-ième de l'application $x \longmapsto e^{x\text{ch}a}\text{ch}(x\text{sh}a)$.

Exercice 19.26 : (niveau 2)
Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $\arctan(t)$.

Exercice 19.27 : (niveau 2)

1°) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|e^t - 1 - t| \leq \dfrac{t^2}{2}e^{|t|}$.

2°) Montrer que, pour tout $t > 0$, $\arctan t > \dfrac{t}{1+t^2}$.

Exercice 19.28 : (niveau 2)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence d'une primitive n-ème de f sur $\mathbb{R}$, notée $f^{[n]}$, et démontrer que l'on peut prendre

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{[n]}(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt.$$

Exercice 19.29 : (niveau 2)
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable.
1°) Montrez que si f' est bornée, f est uniformément continue.
2°) Montrez que si $|f'(x)| \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, f n'est pas uniformément continue.

Exercice 19.30 : (niveau 2)
Soit f une application convexe et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$: On pose $g(x) = \dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$. Montrez que g est convexe.

Exercice 19.31 : (niveau 2)
Soit f une application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$. Montrez que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{f'(0)}{2}$.

Exercice 19.32 : (niveau 3)
Soit f une application de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1, telle que $f(0) = 0$ et telle que $f'(x) \in [0,1]$ pour tout $x \geq 0$.
Montrer que $\displaystyle\int_0^x f^3(t)dt \leq \left(\int_0^x f(t)dt\right)^2$.

Exercice 19.33 : (niveau 3)
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en 0 et telle que
$\dfrac{f(2x) - f(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} a \in \mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable en 0.
Indication. On pourra commencer par étudier le cas où $f(0) = 0 = a$.

Exercice 19.34 : (niveau 3)
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^∞, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $t \in I$, $f^{(2k+1)}(t) \geq 0$.

Pour tout $a \in I$ et $x \in I$, on pose $T_a(x) = \displaystyle\sum_{h=0}^{2k} \frac{(x-a)^h}{h!} f^{(h)}(a)$.

Montrer que pour tout $a, a' \in I$ avec $a < a'$, $T_{a'} - T_a$ est convexe sur I.

Exercice 19.35 : (niveau 3)
Lemme de Grönwall :
Soit f et g deux fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On suppose que g est positive et qu'il existe $x_0, K \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \geq x_0$,
$f(x) \leq K + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)g(t)\ dt$.

Montrer que, pour tout $x \geq x_0$, $f(x) \leq K\exp\Big(\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(t)\ dt\Big)$.

Exercice 19.36 : (niveau 3)
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^∞, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ de cardinal infini. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $t \in I$, $f^{(2k+1)}(t) \neq 0$.

Pour tout $\alpha \in I$ et $x \in I$, on pose $T_\alpha(x) = \sum_{h=0}^{2k} \frac{(x-\alpha)^h}{h!} f^{(h)}(\alpha)$.
Montrer que les graphes des applications T_α sont deux à deux disjoints.

Exercice 19.37 : (niveau 3)
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $y \longmapsto \frac{f(x+y)-f(x-y)}{2y}$ est constante sur $\mathbb{R}^*$. On notera $g(x)$ cette constante.
Sauf pour la dernière question, on suppose que g est une application continue sur $\mathbb{R}$.

1°) Montrer que f est dérivable et que $f' = g$.

2°) Quelles sont les valeurs possibles pour f ?

3°) Reprendre l'exercice en supposant maintenant que g est localement bornée.

Exercice 19.38 : (niveau 3)
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq 0$ et $a \neq 1$.
On recherche les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \ f \circ f(x) = ax + b.$$

1°) Si $a < 0$, montrez qu'il n'y a aucune solution.

2°) Notons $\begin{array}{rccc} h : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & ax+b \end{array}$.
Montrez que h est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
Pour $n \in \mathbb{Z}$ calculez h^n (au sens de la composition).

3°) On suppose que $a \in]0,1[$.
Montrez que $h^{-1} \circ f \circ h = f$.
En déduire les expressions possibles de f.

4°) Achevez la résolution de l'exercice.

Exercice 19.39 : (niveau 3)
Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$\forall t \in \mathbb{R} \ \ f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$. Montrez que la dérivée n-ième de f est de la forme :
$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{(1+t^2)^n} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, où $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$. Prouvez les relations :
$P_{n+1} = (1+X^2)P' - (2n+1)XP_n$; $\forall n \geq 1 \ \ P_{n+1} + (2n+1)XP_n + n^2(1+X^2)P_{n-1} = 0$; $(1+X^2)P_n'' - (2n-1)XP_n' + n^2 P_n = 0$. En déduire que $P_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} a_k X^{n-2k}$ avec
$a_0 = (-1)^n n!$ et $a_p = (-1)^{n+p} \frac{n! n(n-1)...(n-2p+1)}{4^p (p!)^2}$.
Montrez que les racines de P_n sont réelles et simples.