DM 23 : Corrigé

Première partie :

1) $0 \leq P_{n+1} = P_n \times u_{n+1} \leq P_n$, car $0 \leq u_{n+1} \leq 1$, donc la suite (P_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge. Ainsi, le produit $\prod_{k=0}^{+\infty} u_k$ existe.

2) D'après la question précédente, tous ces produits existent.

$\diamond$ Soit $N \geq 2$. $\displaystyle\prod_{n=2}^{N}\Big(1-\frac{1}{n}\Big) = \prod_{n=2}^{N}\frac{n-1}{n} = \frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

donc $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\Big(1-\frac{1}{n}\Big) = 0$.

$\diamond$ Soit $N \geq 2$. $\displaystyle\prod_{n=2}^{N}\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big) = \prod_{n=2}^{N}\frac{n^2-1}{n^2} = \prod_{n=2}^{N}\frac{(n+1)(n-1)}{n^2} = \frac{\frac{(N+1)!}{2}\times(N-1)!}{(N!)^2}$,

donc $\displaystyle\prod_{n=2}^{N}\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big) = \frac{1}{2}\frac{N+1}{N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$, donc $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big) = \frac{1}{2}$.

$\diamond$ Soit $N \geq 2$. $\displaystyle\prod_{n=2}^{N}\Big(1-\frac{2}{n(n+1)}\Big) = \prod_{n=2}^{N}\frac{n^2+n-2}{n(n+1)} = \prod_{n=2}^{N}\frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)}$,

donc $\displaystyle\prod_{n=2}^{N}\Big(1-\frac{2}{n(n+1)}\Big) = \frac{\frac{(N+2)!}{6}\times(N-1)!}{N!\times\frac{(N+1)!}{2}} = \frac{1}{3}\frac{N+2}{N} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$.

Ainsi, $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty}\Big(1-\frac{2}{n(n+1)}\Big) = \frac{1}{3}$.

3) a) Soit $t \in \mathbb{R}^*$:

$\displaystyle\frac{\text{th}t}{\text{th}\frac{t}{2}} = \frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}} \times \frac{e^{t/2}+e^{-t/2}}{e^{t/2}-e^{-t/2}}$, or $e^t - e^{-t} = (e^{t/2}+e^{-t/2})(e^{t/2}-e^{-t/2})$,

donc $\displaystyle\frac{\text{th}t}{\text{th}\frac{t}{2}} = \frac{(e^{t/2}+e^{-t/2})^2}{e^t+e^{-t}} = \frac{e^t+e^{-t}+2}{e^t+e^{-t}} = 1 + \frac{1}{\text{ch}t}$.

b)

$\diamond$ On sait que l'application ch est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $[1,+\infty[$, or $x > 1$, donc il existe $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $v_1 = \text{ch}\theta$.

$\diamond$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $R(n)$ l'assertion : $v_n = \text{ch}(2^{n-1}\theta)$.
Pour $n = 1$, $R(1)$ est claire.
Pour $n \geq 1$, supposons $R(n)$.
$v_{n+1} = 2v_n^2 - 1 = 2\text{ch}^2(2^{n-1}\theta) - 1 = \text{ch}(2^n\theta)$, d'où $R(n+1)$.
D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \text{ch}(2^{n-1}\theta)$.

$\diamond$ Soit $N \geq 2$. $\displaystyle\prod_{n=1}^{N}\Big(1 + \frac{1}{v_n}\Big) = \prod_{n=1}^{N}\Big(1 + \frac{1}{\text{ch}(2^{n-1}\theta)}\Big) = \prod_{n=1}^{N}\frac{\text{th}(2^{n-1}\theta)}{\text{th}(2^{n-2}\theta)} = \frac{\text{th}(2^{N-1}\theta)}{\text{th}(\theta/2)}$,
or $\theta > 0$, donc $2^{n-1}\theta \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ puis $\text{th}(2^{n-1}\theta) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1 + \frac{1}{v_n}\Big)$ existe et $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1 + \frac{1}{v_n}\Big) = \frac{1}{\text{th}(\theta/2)}$.

$\diamond$ De plus $\text{ch}t = 2\text{ch}^2\frac{t}{2} - 1$, donc $2\text{ch}^2\frac{\theta}{2} = \text{ch}\theta + 1 = x + 1$. Ainsi, $\text{ch}\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$.
De même, $\text{ch}t = 1 + 2\text{sh}^2\frac{t}{2}$, donc $\text{sh}\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{x-1}{2}}$.
En conclusion $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\Big(1 + \frac{1}{v_n}\Big) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

4) **a)** On suppose que $\sum u_n^2$ converge.
$\diamond$ $\sum u_n$ converge, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\ln(1 + u_n) - u_n = -\frac{1}{2}u_n^2 + o(u_n^2) \sim -\frac{1}{2}u_n^2$,
or $-\frac{1}{2}u_n^2$ est une suite de signe constant et $\sum u_n^2$ converge,
donc la série $\sum(\ln(1 + u_n) - u_n)$ converge.

$\diamond$ $\displaystyle\ln\Big(\prod_{n=0}^{N}(1 + u_n)\Big) = \sum_{n=0}^{N}\ln(1 + u_n) = \sum_{n=0}^{N}[\ln(1 + u_n) - u_n] + \sum_{n=0}^{N}u_n$. Or les séries $\sum[\ln(1 + u_n) - u_n]$ et $\sum u_n$ convergent, donc il existe $L \in \mathbb{R}$
tel que $\displaystyle\ln\Big(\prod_{n=0}^{N}(1 + u_n)\Big) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} L$. Alors, par continuité de la fonction exponentielle,
$\displaystyle\prod_{n=0}^{N}(1 + u_n) = exp\left(\ln\Big(\prod_{n=0}^{N}(1 + u_n)\Big)\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} e^L \in \mathbb{R}_+^*$.
Ceci montre que $\displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty}(1 + u_n)$ existe et qu'il appartient à $\mathbb{R}_+^*$.

b) On a encore $\ln(1 + u_n) - u_n \sim -\frac{1}{2}u_n^2$ or $-\frac{1}{2}u_n^2 < 0$ et c'est maintenant le terme général d'une série divergente, donc $\sum[\ln(1 + u_n) - u_n]$ est aussi une série divergente dont le terme général est négatif à partir d'un certain rang.

Alors, d'après le cours, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}[\ln(1 + u_n) - u_n] \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Ainsi, $\ln\Big(\prod_{n=0}^{N}(1+u_n)\Big) = \sum_{n=0}^{N}\ln(1+u_n) = \sum_{n=0}^{N}[\ln(1+u_n)-u_n] + \sum_{n=0}^{N}u_n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$,

donc en passant à l'exponentielle, $\prod_{n=0}^{N}(1+u_n) = exp\left(\ln\Big(\prod_{n=0}^{N}(1+u_n)\Big)\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ceci montre que $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ existe et qu'il vaut 0.

c)

$\diamond$ Posons $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$. Pour tout $n \geq 2$, $|u_n| < 1$. De plus la suite $\Big(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)_{n\geq 2}$ tend vers 0 en décroissant, donc d'après le théorème spécial des séries alternées, la série $\sum u_n$ converge.

De plus, $u_n^2 = \frac{1}{n}$, donc la série $\sum u_n^2$ diverge. On peut donc appliquer le b), ce qui montre que $\prod_{n=2}^{+\infty}\Big(1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\Big)$ existe et qu'il vaut 0.

$\diamond$ Posons maintenant $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$. Pour tout $n \geq 2$, $|u_n| < 1$. De plus la suite $\Big(\dfrac{1}{n}\Big)_{n\geq 2}$ tend vers 0 en décroissant, donc d'après le théorème spécial des séries alternées, la série $\sum u_n$ converge.

De plus, $u_n^2 = \dfrac{1}{n^2}$, donc la série $\sum u_n^2$ converge. On peut donc appliquer le a), ce qui montre que $\prod_{n=2}^{+\infty}\Big(1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\Big)$ existe.

Soit $N \geq 1$. $\prod_{n=2}^{2N}\Big(1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\Big) = \prod_{k=1}^{N}\Big(1-\dfrac{1}{2k}\Big) \times \prod_{k=1}^{N-1}\Big(1+\dfrac{1}{2k+1}\Big)$, donc

$\prod_{n=2}^{2N}\Big(1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\Big) = \prod_{k=1}^{N}\dfrac{2k-1}{2k} \times \prod_{k=1}^{N-1}\dfrac{2k+2}{2k+1} = \prod_{k=0}^{N-1}\dfrac{2k+1}{2k+2} \times \prod_{k=1}^{N-1}\dfrac{2k+2}{2k+1} = \dfrac{1}{2}$, mais

$\prod_{n=2}^{2N}\Big(1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\Big) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \prod_{n=2}^{+\infty}\Big(1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\Big)$, donc

$\prod_{n=2}^{+\infty}\Big(1+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\Big) = \dfrac{1}{2}$.

Seconde partie :

1) a) Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, posons $f(t) = \sin t - \dfrac{2t}{\pi}$.

$f'(t) = -\frac{2}{\pi} + \cos t$ et $f''(t) = -\sin t < 0$ (lorsque $0 < t < \frac{\pi}{2}$).

Ainsi, f' est strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Or $f'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0$ et $f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{2}{\pi} < 0$, donc il existe un unique $t_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $f'(t_0) = 0$.
Alors f est croissante entre 0 et t_0, or $f(0) = 0$, donc f est positive entre 0 et t_0, puis f décroît entre t_0 et $\frac{\pi}{2}$, mais $f(\frac{\pi}{2}) = 0$, donc f est encore positive entre t_0 et $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(t) \geq 0$, ce qu'il fallait démontrer.

b) Ainsi,
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2t}{\pi}\right)^{2n} dt = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n} \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n} \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} \times \frac{1}{2n+1}$, donc
$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt \geq \frac{\pi}{2(2n+1)}$.

c) Fixons $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.
sin est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2} - \alpha]$, $\sin t \leq \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$. Ainsi,
$\dfrac{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} (\sin t)^{2n} dt}{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt} \leq (\frac{\pi}{2} - \alpha)[\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)]^{2n} \times \frac{2(2n+1)}{\pi} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, d'après les croissances comparées, car $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \in [0, 1[$, ce qu'il fallait démontrer.

d) Fixons $\varepsilon > 0$. φ étant continue en $\frac{\pi}{2}$, et $\frac{\varepsilon}{2}|\varphi(\frac{\pi}{2})|$ étant dans $\mathbb{R}_+^*$, il existe $\alpha > 0$ (avec $\alpha < \frac{\pi}{2}$) tel que, pour tout $x \in [\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2}]$, $|\varphi(x) - \varphi(\frac{\pi}{2})| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\varphi(\frac{\pi}{2})|$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $x_n = \left|\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)(\sin t)^{2n} dt - \varphi(\frac{\pi}{2}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt\right|$.
Par inégalité triangulaire, $0 \leq x_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\varphi(t) - \varphi(\frac{\pi}{2})|(\sin t)^{2n} dt$,
donc $x_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} (|\varphi(t)| + |\varphi(\frac{\pi}{2})|)(\sin t)^{2n} dt + \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon}{2}|\varphi(\frac{\pi}{2})|(\sin t)^{2n} dt$,
or φ est continue sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc elle est bornée : il existe $M > 0$ tel que, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $|\varphi(t)| \leq M$. Ainsi,
$x_n \leq 2M \int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} (\sin t)^{2n} dt + \frac{\varepsilon}{2}|\varphi(\frac{\pi}{2})| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt$, mais d'après la question précédente, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} (\sin t)^{2n} dt \leq \frac{\varepsilon}{4M}|\varphi(\frac{\pi}{2})| \int_0^{\frac{\pi}{2}} |(\sin t)^{2n} dt$.
Ainsi, pour tout $n \geq N$, $x_n \leq \varepsilon|\varphi(\frac{\pi}{2}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt|$, ce qu'il fallait démontrer.

2)a) Effectuons une intégration par parties :
$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n-1} \sin t dt = [-\cos t(\sin t)^{2n-1}]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2 (2n-1)(\sin t)^{2n-2} dt$, donc
$I_n = (2n-1) \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - (\sin t)^2)(\sin t)^{2n-2} = (2n-1)(I_{n-1} - I_n)$, ainsi $I_n = \dfrac{2n-1}{2n} I_{n-1}$.

b)

◇ Par une récurrence simple, on montre que $I_n = I_0 \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} = I_0 \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{2^n(n!)}$, puis en multipliant le numérateur et le dénominateur par $\prod_{k=1}^{n}(2k)$,

on obtient $I_n = \dfrac{(2n)!}{(2^n(n!))^2}\,\dfrac{\pi}{2}$.

◇ D'après la formule de Stirling, $n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$,

donc $I_n \sim \dfrac{\sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{-2n}}{2^{2n}2\pi n n^{2n}e^{-2n}}\,\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}\,\dfrac{\pi}{2}$, donc $I_n \sim \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$.

3 a) $\displaystyle\int_0^{p\pi} e^{-2t}\ dt = \Big[-\frac{1}{2}e^{-2t}\Big]_0^{p\pi} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2p\pi} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.

b) Fixons $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{p\pi} e^{-2t}(\sin t)^{2n}\ dt \le \int_0^{p\pi} e^{-2t}\ dt \le \frac{1}{2}$, d'après le calcul précédent, donc la suite $\displaystyle\Big(\int_0^{p\pi} e^{-2t}(\sin t)^{2n}\ dt\Big)_{p\in\mathbb{N}}$ est majorée. De plus elle est croissante car $\displaystyle\int_{p\pi}^{(p+1)\pi} e^{-2t}(\sin t)^{2n}\ dt \ge 0$. Elle est donc convergente.

c) Fixons k et n dans $\mathbb{N}$. Le changement de variable $t = x + k\pi$ donne :

$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-2t}(\sin t)^{2n}dt = \int_0^{\pi} e^{-2(x+k\pi)}(\sin x)^{2n}dx$,

donc $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-2t}(\sin t)^{2n}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2k\pi}e^{-2x}(\sin x)^{2n}dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{-2k\pi}e^{-2x}(\sin x)^{2n}dx$.

Dans la seconde intégrale, posons $x = \pi - t$:

$\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-2t}(\sin t)^{2n}dt = e^{-2k\pi}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2x}(\sin x)^{2n}dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2(\pi-t)}(\sin t)^{2n}dt\Big)$, ce qui répond à la question en posant $\varphi(t) = e^{-2t} + e^{-2\pi}e^{2t}$.

d) Fixons $n \in \mathbb{N}$. D'après la relation de Chasles,

$\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-2t}(\sin t)^{2n}dt = \int_0^{(N+1)\pi} e^{-2t}(\sin t)^{2n}dt \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} u_n$, donc la série de terme général $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-2t}(\sin t)^{2n}dt$ est convergente et sa somme vaut u_n. Ainsi, d'après la question précédente, $\displaystyle u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2k\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)(\sin x)^{2n}dx$, or $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2k\pi} = \frac{1}{1-e^{-2\pi}}$, donc

$\displaystyle u_n = \frac{1}{1-e^{-2\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(x)(\sin x)^{2n}dx$. Or φ est une application continue

et $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 2e^{-\pi} \neq 0$, donc d'après la question 1.d, $\displaystyle u_n \sim \frac{2e^{-\pi}}{1-e^{-2\pi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{2n}dx$, puis d'après la question 2.b, $\displaystyle u_n \sim \frac{2}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{2\mathrm{sh}\pi}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

4 a) Soit $n \ge 1$. Effectuons une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^{p\pi} e^{-2t}(\sin t)^{2n}dt &= \Big[-\frac{1}{2}e^{-2t}(\sin t)^{2n}\Big]_0^{p\pi} + \int_0^{p\pi}\frac{1}{2}e^{-2t}2n\cos t(\sin t)^{2n-1}dt\\ &= n\int_0^{p\pi} e^{-2t}\cos t(\sin t)^{2n-1}dt,\end{aligned}$$

donc en faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient que $u_n = n\lim\limits_{p\to+\infty}\int_0^{p\pi} e^{-2t}(\cos t)(\sin t)^{2n-1}dt$.

b) Soit $n \geq 1$. Effectuons une seconde intégration par parties.

$$\begin{aligned} n\int_0^{p\pi} e^{-2t}\cos t(\sin t)^{2n-1}dt = &\Big[-n\frac{1}{2}e^{-2t}\cos t(\sin t)^{2n-1}\Big]_0^{p\pi}\\ &+\frac{n}{2}\int_0^{p\pi} e^{-2t}(-\sin t(\sin t)^{2n-1} + (2n-1)(\cos t)^2(\sin t)^{2n-2})dt,\end{aligned}$$

donc en faisant tendre p vers $+\infty$, et en remplaçant $(\cos t)^2$ par $1-(\sin t)^2$, on obtient :

$u_n = -\frac{n}{2}u_n + \frac{1}{2}n(2n-1)(u_{n-1}-u_n)$,

donc $\frac{n(2n-1)}{2}u_{n-1} = (1+\frac{n}{2}+\frac{n}{2}(2n-1))u_n = (1+n^2)u_n$,

puis $n(2n-1)u_{n-1} = 2(1+n^2)u_n$.

c) On a donc, pour $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{2n(2n-1)}{4(1+n^2)}u_{n-1}$, donc par récurrence sur n, on peut montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n = \dfrac{(2n)!}{4^n\prod\limits_{k=1}^{n}(1+k^2)}u_0$.

De plus, $u_0 = \frac{1}{2}$ (cf 3.a) et d'après la question 2.b, $I_n = \dfrac{(2n)!}{(2^n(n!))^2}\dfrac{\pi}{2}$

ou bien $\dfrac{(n!)^2 I_n}{\pi} = \dfrac{(2n)!}{4^n}u_0$, donc $u_n = \dfrac{(n!)^2 I_n}{\pi\prod\limits_{k=1}^{n}(1+k^2)}$.

d) Alors, d'après les questions 3.d puis 2.b,

$\dfrac{1}{2\mathrm{sh}\pi}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}} \sim u_n \sim \dfrac{(n!)^2}{2\sqrt{\pi n}\prod\limits_{k=1}^{n}(1+k^2)} = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi n}\prod\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1+k^2}{k^2}}$, donc $\prod\limits_{k=1}^{n}(1+\dfrac{1}{k^2}) \sim \dfrac{\mathrm{sh}(\pi)}{\pi}$, ce qui prouve que $\prod\limits_{k=1}^{+\infty}\Big(1+\dfrac{1}{k^2}\Big)$ existe et que $\prod\limits_{k=1}^{+\infty}\Big(1+\dfrac{1}{k^2}\Big) = \dfrac{\mathrm{sh}\pi}{\pi}$.

Troisième partie :

1) Si $N \geq 1$, $\prod\limits_{n=1}^{N}\Big|1+\dfrac{i}{n}\Big| = \prod\limits_{n=1}^{N}\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}} = \sqrt{\prod\limits_{n=1}^{N}(1+\dfrac{1}{n^2})} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\dfrac{\mathrm{sh}(\pi)}{\pi}}$, ce qui prouve que $\prod\limits_{n=1}^{+\infty}\Big|1+\dfrac{i}{n}\Big|$ existe et vaut $\sqrt{\dfrac{\mathrm{sh}(\pi)}{\pi}}$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $R(n)$ l'assertion :
pour tout $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, $\left| -1 + \prod_{k=1}^{n} (1 + z_k) \right| \le -1 + \prod_{k=1}^{n} (1 + |z_k|)$.
Pour $n = 1$, pour tout $z_1 \in \mathbb{C}$, $|(1 + z_1) - 1| = |z_1| = (1 + |z_1|) - 1$, ce qui prouve $R(1)$.
Pour $n = 2$, pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,
$|(1 + z_1)(1 + z_2) - 1| = |z_1 + z_1 + z_1 z_2| \le |z_1| + |z_2| + |z_1 z_2| = (1 + |z_1|)(1 + |z_2|) - 1$,
ce qui prouve $R(2)$.
Pour $n \ge 2$, supposons $R(n)$. Soit $z_1, \dots, z_{n+1} \in \mathbb{C}$.

$$-1 + \prod_{k=1}^{n+1} (1 + z_k) = -1 + (1 + z_{n+1}) \Big(1 + \Big[-1 + \prod_{k=1}^{n} (1 + z_k) \Big] \Big) = -1 + (1 + Z_1)(1 + Z_2),$$

en posant $Z_1 = z_{n+1}$ et $Z_2 = -1 + \prod_{k=1}^{n} (1 + z_k)$, donc d'après $R(2)$,

$\left| -1 + \prod_{k=1}^{n+1} (1 + z_k) \right| \le -1 + (1 + |Z_1|)(1 + |Z_2|)$, mais d'après $R(n)$, $|Z_2| \le -1 + \prod_{k=1}^{n} (1 + |z_k|)$,

donc $\left| -1 + \prod_{k=1}^{n+1} (1 + z_k) \right| \le -1 + (1 + |z_{n+1}|)(1 + -1 + \prod_{k=1}^{n} (1 + |z_k|)) = -1 + \prod_{k=1}^{n+1} (1 + |z_k|)$,
ce qui prouve $R(n + 1)$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $P_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + u_k)$ et $Q_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + |u_k|)$. D'après la question 4 de la première partie appliquée à la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$, ce qui est possible car $|u_n| < 1$ et $\sum |u_n|$ converge, la suite (Q_n) converge, donc c'est une suite de Cauchy.
Soit $\varepsilon > 0$: il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \ge N$ et $q \in \mathbb{N}$, $|Q_{n+q} - Q_n| \le \varepsilon$.
Soit $n \ge N$ et $q \in \mathbb{N}$.

$|P_{n+q} - P_n| = |P_n| \left| -1 + \prod_{k=n+1}^{n+q} (1 + u_k) \right|$, et $|P_n| \le Q_n$, donc d'après la question 2,

$$|P_{n+q} - P_n| \le Q_n \Big(-1 + \prod_{k=n+1}^{n+q} (1 + |u_k|) \Big) = Q_{n+q} - Q_n \le \varepsilon.$$

Ainsi, la suite (P_n) est une suite de Cauchy, donc elle converge vers un complexe, ce qu'il fallait démontrer.

4) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\prod_{n=0}^{N} u_n = exp(i \sum_{n=0}^{N} \theta_n)$.

$\diamond$ Supposons que $\sum \theta_n$ converge. Alors $\prod_{n=0}^{N} u_n \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} exp(i \sum_{n=0}^{+\infty} \theta_n)$, ce qui prouve que $\prod_{n=0}^{+\infty} u_n$ existe.

$\diamond$ Réciproquement, supposons que $\prod_{n=0}^{+\infty} u_n$ existe.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\left|\prod_{n=0}^{N} u_n\right| = 1$ et l'application $|.|$ est continue sur $\mathbb{C}$, donc en passant à la limite, $\left|\prod_{n=0}^{+\infty} u_n\right| = 1$. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\prod_{n=0}^{+\infty} u_n = e^{i\theta}$.

Par hypothèse, $exp\Big(i\Big(\sum_{n=0}^{N} u_n - \theta\Big)\Big) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $\varepsilon_N \in [-\pi,\pi[$ et $k_N \in \mathbb{Z}$ tels que $\sum_{n=0}^{N} \theta_n - \theta = \varepsilon_N + 2k_N\pi$.

Ainsi, $e^{i\varepsilon_N} = exp\Big(i\Big(\sum_{n=0}^{N} u_n - \theta\Big)\Big) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

En passant aux parties réelle et imaginaire, on en déduit que $\sin\varepsilon_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\cos\varepsilon_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $N \geq N_0$, $\cos\varepsilon_N > 0$, ainsi pour tout $N \geq N_0$, $\varepsilon_N \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

Pour $N \geq N_0$, $\varepsilon_N = \arcsin(\sin\varepsilon_N) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Soit $N \in \mathbb{N}$: $k_N = \frac{1}{2\pi}\Big(\sum_{n=0}^{N} \theta_n - \theta - \varepsilon_N\Big)$, donc $k_{N+1} - k_N = \frac{1}{2\pi}(\theta_{N+1} + \varepsilon_N - \varepsilon_{N+1})$.

$\varepsilon_N - \varepsilon_{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $N \geq N_1$, $|\varepsilon_N - \varepsilon_{N+1}| \leq \frac{\pi}{2}$.

Soit $N \geq N_1$: $|k_{N+1} - k_N| \leq \frac{|\theta_{N+1}|}{2\pi} + \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4}$, car $\theta_{N+1} \in [-\pi,\pi]$.

Or $k_{N+1} - k_N \in \mathbb{Z}$, donc $k_{N+1} = k_N$. On en déduit que pour tout $N \geq N_1$, $k_N = k_{N_1}$.

Ainsi $\sum_{n=0}^{N} \theta_n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \theta + 0 + 2k_{N_1}\pi$, ce qui prouve que $\sum \theta_n$ converge.

5) Supposons que $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{i}{n})$ existe.

Alors d'après 1, $\prod_{n=1}^{N} \frac{1+\frac{i}{n}}{|1+\frac{i}{n}|} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\prod_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{i}{n})}{\prod_{n=1}^{+\infty}|1+\frac{i}{n}|}$.

Ainsi, en posant $u_n = \frac{1+\frac{i}{n}}{|1+\frac{i}{n}|}$, $\prod_{n=1}^{+\infty} u_n$ existe.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = 1$ et $u_n \neq -1$. Posons $u_n = e^{i\theta_n}$ où $\theta_n \in]-\pi,\pi[$.

D'après III.4, $\sum \theta_n$ converge. Mais $\tan\theta_n = \frac{1}{n}$ et $\theta_n \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ car $Re(u_n) > 0$.

Ainsi $\theta_n = \arctan\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$, donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ converge, ce qui est faux.

On a donc montré par l'absurde que $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{i}{n})$ n'existe pas.