MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 17 : du lundi 7 mars au vendredi 11.

Liste des questions de cours

1°) Nature de $\sum a^n$ où $a \in \mathbb{C}$ et valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ en cas de convergence. Justifier.

2°) Montrer que l'absolue convergence implique la convergence dans un Banach.

3°) Lorsque $\sum a_n$ est une série de complexes absolument convergente, montrer qu'elle converge sans utiliser le critère de Cauchy, à l'aide de $a_n^+ = \max(a_n, 0)$ et $a_n^- = \max(-a_n, 0)$.

4°) Présenter la technique de comparaison entre séries et intégrales. En déduire le théorème du même nom.

5°) Etablir la nature des séries de Riemann.

6°) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{(n^\alpha)}$.

7°) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

8°) Déterminer la nature des séries de Bertrand.

9°) Enoncer et démontrer le critère de D'Alembert.

10°) Enoncer et démontrer le théorème spécial des séries alternées.

11°) Nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

12°) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Thème de la semaine : Séries de vecteurs

Les élèves doivent savoir faire des calculs asymptotiques simples. Cependant, le cours sur les o, O, équivalents et développements limités n'a pas encore été étudié. Aucune aisance technique n'est donc attendue dans ce domaine.

Notation. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E est un espace de Banach.

1 Définitions

Définition de la série formelle $\sum a_n$. Sommes partielles d'une série.
L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des séries de vecteurs de E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Si (A_n) est une suite de vecteurs, la série télescopique $\sum(A_n - A_{n-1})$ est l'unique série dont la suite des sommes partielles est (A_n).

Série tronquée $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} a_n$.

2 Convergence d'une série de vecteurs

$\sum a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} a_n$ sont de même nature.

La série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge.

Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, $\sum(a_n + \lambda b_n)$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + \lambda b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Si une série converge, son terme général tend vers 0. La réciproque est fausse.
Lorsque a_n ne tend pas vers 0, on dit que $\sum a_n$ diverge grossièrement.

Définition. Si $\sum a_n$ converge, son n-ième reste de Cauchy est $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. On a $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\sum a_n$ converge si et seulement si $\sum \mathrm{Re}(a_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(a_n)$ convergent,
et dans ce cas $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(a_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(a_n)$.
Une série à valeurs dans un produit de p espaces vectoriels normés converge si et seulement si ses séries composantes sont convergentes.
Une série à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie converge si et seulement si ses séries coordonnées dans une base sont convergentes.

3 Convergence absolue

Critère de Cauchy, séries absolument convergente.
L'absolue convergence implique la convergence (car E est de Banach).
Séries semi-convergentes.

4 Séries de réels positifs

4.1 Théorèmes généraux

$\sum a_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Si $\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq a_n \leq b_n$ et $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.
Si $\sum a_n, \sum b_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$ avec $a_n = O(b_n)$ et si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge.

Théorème. Soit $\sum a_n, \sum b_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ avec b_n de signe constant à partir d'un certain rang.
Si $a_n \sim b_n$, alors $\sum a_n$ et $\sum b_n$ ont la même nature.

Les espaces vectoriels normés $l^1(\mathbb{K}) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \sum |u_n| \text{converge } \}$
et $l^2(\mathbb{K}) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \sum |u_n|^2 \text{converge } \}$.

Méthode par défaut pour étudier la nature d'une série $\sum a_n$: rechercher un équivalent de a_n.

4.2 Séries de Riemann

Technique de **comparaison entre séries et intégrales** (TCSI).
Théorème de comparaison entre séries et intégrales : lorsque f est continue positive et décroissante, la série $\sum\limits_{n\geq n_0} f(n)$ a même nature que la suite $\left(\int_{n_0}^{n} f(t)dt\right)_{n\geq n_0}$.

La **série de Riemann** $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
Critère de Riemann (étude de $n^\alpha a_n$).

Constante d'Euler : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Séries de Bertrand (hors programme : à savoir établir lorsque c'est nécessaire dans un exercice).

Critère de D'Alembert.

Formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$ (démontrée en DM).

5 Séries alternées

Théorème des séries spéciales alternées.
Non commutativité des séries semi-convergentes.

6 La transformation d'Abel (hors programme)

Théorème d'Abel : Soient (a_n) une suite décroissante de réels qui tend vers 0 et $\sum x_n$ une série de complexes dont les sommes partielles sont bornées. Alors la série $\sum a_n x_n$ converge.

Prévisions pour la semaine prochaine :

Topologie.