MPSI 2

Programme des colles de mathématiques.

Semaine 26 : du lundi 30 mai au vendredi 3 juin

Algèbre linéaire, SANS les déterminants

La notion de déterminant n'est pas connue pour le moment par les étudiants.

Liste des questions de cours

1°) Définir les opérations élémentaires sur les lignes et interprétez-les en termes de produit matriciel.

2°) Exposer comment calculer l'inverse de M par opérations élémentaires sur les lignes de $\boxed{M}\boxed{I_n}$, en justifiant.

3°) Présenter en détails l'algorithme du pivot partiel.

4°) Montrer que $\dim\Big(\sum_{i=1}^{k} E_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{k} \dim(E_i)$ et préciser le cas d'égalité.

5°) Enoncer et démontrer la formule de Grassmann.

6°) Montrer que si $p^2 = p$, alors il existe F, G tels que p est le projecteur sur F parallèlement à G.

7°) Que peut-on dire de la somme d'un nombre fini de sous-espaces propres ? Démontrez-le.

8°) Enoncer et démontrer la formule de changement de bases pour une application linéaire.

9°) Enoncer 4 définitions d'un endomorphisme diagonalisable et établir qu'elles sont équivalentes.

10°) Montrer que la trace d'un projecteur est égale à son rang.

11°) Montrer que deux matrices sont équivalentes si et seulement si il est possible de transformer l'une en l'autre par une succession d'opérations élémentaires portant sur les lignes ou sur les colonnes.

12°) Montrer que $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$ est équivalente à $J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où r désigne le rang de M.

13°) Montrer que H est un hyperplan de E si et seulement si il est le noyau d'une forme linéaire non nulle, laquelle est unique à un scalaire multiplicatif non nul près.

1 Programmes précédents

Les programmes de colles précédents, portant sur l'algèbre linéaire, sont à réviser.

2 Les systèmes linéaires

2.1 Trois interprétations d'un système linéaire

Interprétation par combinaison linéaire de vecteurs colonnes. Condition de compatibilité.

Interprétation matricielle.
Système de Cramer.

Interprétation par une application linéaire.
Structure de l'ensemble des solutions du système homogène associé.

2.2 Les opérations élémentaires

Pour les lignes : $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$ (transvection), $L_i \longleftarrow \alpha L_i$ (affinité) et $L_i \longleftrightarrow L_j$ (transposition).
Interprétation par multiplication à gauche par une matrice inversible particulière.

Opérations élémentaires sur les colonnes. Interprétation par multiplication matricielle à droite.

Principe de la résolution d'un système linéaire par opérations élémentaires sur les lignes de la matrice globale du système.
Principe du calcul de l'inverse de M par opérations élémentaires sur les lignes de $\boxed{M}\boxed{I_n}$.

2.3 Méthode du pivot de Gauss

Algorithme du pivot partiel, où le pivot de l'étape r est cherché uniquement dans la colonne r.
Algorithme du pivot total.
Résoudre un système, c'est exprimer les inconnues secondaires en fonction des inconnues principales.

2.4 Méthode de Gauss-Jordan, lorsque le système est de Cramer

Toute matrice inversible est un produit de matrices de transvections, d'affinités et de transpositions.

3 Somme de sous-espaces vectoriels

3.1 Sommes et sommes directes de k sous-espaces vectoriels

3.2 Supplémentaires d'un sous-espace vectoriel

3.3 Propriétés des sommes directes

Si $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq k} E_i$, pour définir une application linéaire u de E dans F, il suffit de préciser ses restrictions aux sous-espaces vectoriels E_i.

$\dim\left(\sum_{i=1}^{k} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \dim(E_i)$, $\boxed{\text{avec égalité si et seulement si la somme est directe}}$.

Formule de Grassmann : $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Associativité des sommes directes.

$E_1, \ldots, E_k$ sont en somme directe si et seulement si $\forall i \in \{2, \ldots, k\}$ $E_i \bigcap \sum_{j=1}^{i-1} E_j = \{0\}$.

Théorème de la base adaptée à une décomposition en somme directe.

3.4 Les projecteurs

projecteur sur F parallèlement à un supplémentaire de F.
p est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$.

Symétrie par rapport à F parallèlement à un supplémentaire de F.
Lorsque $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, s est une symétrie si et seulement si $s^2 = Id_E$.

4 Sous-espaces propres

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres, spectre.

La somme d'un nombre fini de sous-espaces propres de u est toujours directe.

Si $v \in L(E)$ commute avec u, les sous-espaces propres de u sont stables par v.

5 Changement de base

Matrice de passage entre deux bases e et e'. C'est $\mathrm{mat}(Id_E, e', e)$.
Formules de changement de base, pour des vecteurs, puis des applications linéaires.
Si e, e' et e'' sont trois bases de E, $P_e^{e"} = P_e^{e'} P_{e'}^{e"}$ et $\left(P_e^{e'}\right)^{-1} = P_{e'}^{e}$.

6 Diagonalisation et trigonalisation

Différentes caractérisations d'un endomorphisme diagonalisable : existence d'une matrice diagonale, existence d'une base de vecteurs propres, la somme des sous-espaces propres recouvre tout l'espace, la somme des dimensions des sous-espaces propres est celle de l'espace.

Une matrice est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.

Définition d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable.

7 Trace d'un endomorphisme

$\mathrm{Tr}(uv) = \mathrm{Tr}(vu)$.

La trace d'un projecteur est égale à son rang.

8 Matrices équivalentes

Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles représentent une même application linéaire dans des bases de départ différentes et des bases d'arrivée différentes.

Deux matrices sont équivalentes si et seulement si il est possible de transformer l'une en l'autre par une succession d'opérations élémentaires portant sur les lignes ou sur les colonnes.

Si $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$, M est équivalente à $J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, où r désigne le rang de M.
Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

9 Propriétés du rang d'une matrice

$\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}({}^tM)$.
Le rang de M est aussi le rang de la famille de ses vecteurs lignes.

Le rang d'une matrice est égal au nombre d'étapes dans la méthode du pivot global.

Si P est une matrice extraite de M, alors $\mathrm{rg}(P) \leq \mathrm{rg}(M)$.
$\mathrm{rg}(A)$ est égal à la taille maximale des matrices inversibles extraites de A.

10 Matrices semblables

Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme dans des bases différentes, en imposant de prendre une même base au départ et à l'arrivée.

Si $M' = PMP^{-1}$, pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q(M') = PQ(M)P^{-1}$.
Si M' et M sont inversibles, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $M'^n = PM^nP^{-1}$.

11 Les hyperplans

11.1 En dimension quelconque

Soit H un hyperplan et D une droite non incluse dans H. Alors $H \oplus D = E$.

H est un hyperplan de E si et seulement si il est le noyau d'une forme linéaire non nulle, laquelle est unique à un scalaire multiplicatif non nul près.

11.2 En dimension finie

Base duale d'une base de E.
Equation d'un hyperplan vectoriel.

11.3 Application aux systèmes linéaires

Équation d'un hyperplan affine.

L'ensemble des solutions d'un système linéaire est une intersection d'hyperplans affines.

En dimension p, l'intersection de r hyperplans vectoriels est de dimension supérieure à $p - r$.
Réciproquement tout sev de dimension $p - r$ où $r \geq 1$ est une intersection de r hyperplans de E.

Tout sous-espace affine différent de $\mathcal{E}$ peut être caractérisé par un système d'équations linéaires. C'est une intersection d'un nombre fini d'hyperplans affines.

Prévisions pour la semaine suivante :

Déterminants.