

DS 6 : un corrigé

Le barème comporte 70 points.

Exercice 1 (sur 4 points) :

Soit $y : t \mapsto y(t)$ une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} deux fois dérivable.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $z(x) = y(\text{sh}(x)) = y(t)$.

Dérivons cette relation par rapport à x . Ainsi, $z'(x) = \text{ch}(x)y'(\text{sh}(x)) = \text{ch}(x)y'(t)$.

Dérivons à nouveau par rapport à x . On obtient que $z''(x) = \text{sh}(x)y'(t) + \text{ch}(x)^2 y''(t)$.

$$\begin{aligned}(E) &\iff \forall t \in \mathbb{R} \quad (1+t^2)y''(t) + ty'(t) - q^2 y(t) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ch}(x)^2 y''(t) + \text{sh}(x)y'(t) - q^2 y(t) = 0 \quad (\text{car sh est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}) \\ &\iff (z''(x) - \text{sh}(x)y'(t)) + \text{sh}(x)y'(t) - q^2 y(t) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad z''(x) - q^2 z(x) = 0.\end{aligned}$$

Cette dernière équation différentielle est linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Son polynôme caractéristique est $X^2 - q^2$, dont les racines sont $\pm q$. Ainsi, d'après le cours,

$$(E) \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad z(x) = ae^{qx} + be^{-qx}.$$

Or $y(t) = z(\text{argsht})$, donc $(E) \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad z(x) = ae^{q \text{argsht}} + be^{-q \text{argsht}}$.

De plus, $\text{argsht} = \ln(t + \sqrt{1+t^2})$ et $\frac{1}{t + \sqrt{1+t^2}} = \sqrt{1+t^2} - t$,

$$\text{donc } \boxed{(E) \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = a(t + \sqrt{1+t^2})^q + b(-t + \sqrt{1+t^2})^q}.$$

Exercice 2 (sur 6 points) :

Posons $z_n = \rho_n e^{i\theta_n}$ avec $\rho_n \geq 0$ et $\theta_n \in]-\pi, \pi]$. Ainsi,

$$\rho_{n+1} e^{i\theta_{n+1}} = \frac{1}{2}(\rho_n e^{i\theta_n} + \rho_n) = \frac{1}{2}\rho_n e^{i\theta_n/2} 2 \cos \frac{\theta_n}{2}, \text{ or } \frac{\theta_n}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \text{ donc } \cos \frac{\theta_n}{2} \geq 0, \text{ donc :}$$

$$\theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2} \text{ et } \rho_{n+1} = \rho_n \cos \frac{\theta_n}{2}.$$

On en déduit par récurrence que $\theta_n = \frac{\theta_0}{2^n}$.

$$\text{De plus, } \rho_{n+1} \sin \theta_{n+1} = \frac{1}{2}\rho_n \sin \theta_n, \text{ donc } \rho_n \sin \theta_n = \frac{1}{2^n}\rho_0 \sin(\theta_0).$$

Premier cas : Si $z_0 \in \mathbb{R}_+$, alors $z_n = z_0$, donc $z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} z_0$.

Second cas : Si $z_0 \in \mathbb{R}_-$, alors $z_1 = 0$ puis $z_n = 0$ pour tout $n \geq 1$, donc $z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Cas général : On suppose que $z_0 \notin \mathbb{R}$. Ainsi, $\sin \theta_0 \neq 0$ et $\rho_0 \neq 0$.

Or $\rho_n \sin \theta_n = \frac{1}{2^n} \rho_0 \sin(\theta_0)$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sin \theta_n \neq 0$ et $\rho_n = \frac{\rho_0 \sin \theta_0}{2^n \sin(2^{-n} \theta_0)}$.

Or au voisinage de 0, $\sin t \sim t$, donc $\rho_n \sim \rho_0 \frac{\sin \theta_0}{\theta_0}$.

De plus, $\theta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \rho_0 \frac{\sin \theta_0}{\theta_0}$.

Problème

Partie I : polynômes d'endomorphismes (sur 11 points)

1°) (1 point) Si $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit les applications $f + g$, fg et αf en convenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(fg)(x) = f(x).g(x)$ et $(\alpha f)(x) = \alpha.f(x)$.

2°) (3 points)

◇ L'élément neutre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ pour la multiplication est la fonction constante égale à 1. C'est clairement un polynôme, dont les coefficients sont $(a_n) = (\delta_{n,0})_{n \in \mathbb{N}}$. Ainsi, en notant **1** cet élément neutre, $\mathbf{1} \in \mathbb{R}[X]$.

◇ Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Notons $P(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n$ et $Q(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n X^n$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\alpha P)(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha a_n x^n$, donc $\alpha P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha P = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha a_n X^n$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(P + Q)(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) x^n$, et $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est presque nulle,

car $\{n \in \mathbb{N} / a_n + b_n \neq 0\} \subset \{n \in \mathbb{N} / a_n \neq 0\} \cup \{n \in \mathbb{N} / b_n \neq 0\}$

donc $P + Q \in \mathbb{R}[X]$ et $P + Q = \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) X^n$.

On peut ainsi déjà affirmer que $\mathbb{R}[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (il est bien non vide).

◇ Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n > N$, $a_n = b_n = 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(PQ)(x) = \left(\sum_{n=0}^N a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^N b_n x^n \right) = \sum_{0 \leq n, m \leq N} a_n b_m x^{n+m}$, donc PQ

est une combinaison linéaire de polynômes, or $\mathbb{R}[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, donc $PQ \in \mathbb{R}[X]$.

En conclusion, on a bien montré que $\mathbb{R}[X]$ est une sous-algèbre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

3°) (4 points)

◇ Soit $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$P + \lambda Q = \sum_{k \in \mathbb{N}} (a_k + \lambda b_k) X^k$, donc par définition de φ ,

$$\varphi(P + \lambda Q) = \sum_{k \in \mathbb{N}} (a_k + \lambda b_k) u^k = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k u^k + \lambda \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k u^k = \varphi(P) + \lambda \varphi(Q)$$

Ceci prouve que φ est une application linéaire.

◇ Soit $Q(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k X^k$ et soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \varphi(X^p) \circ \varphi(Q) &= u^p \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k u^k = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k u^{k+p} \\ &= \sum_{k \geq p} b_{k-p} u^k = \varphi \left(\sum_{k \geq p} b_{k-p} X^k \right) \\ &= \varphi \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} b_k X^{k+p} \right) = \varphi(X^p Q). \end{aligned}$$

◇ $\mathbb{R}[X]$ est une algèbre d'après la question 2 et $L(E)$ est une algèbre d'après le cours.

Soit $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n$ et $Q(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$.

$PQ = \sum_{p \in \mathbb{N}} a_p X^p Q$ et cette somme est finie, or φ est linéaire,

donc $\varphi(PQ) = \sum_{p \in \mathbb{N}} a_p \varphi(X^p Q) = \sum_{p \in \mathbb{N}} a_p u^p Q(u)$ d'après le point précédent. Ainsi, en

calculant dans l'algèbre $L(E)$, $\varphi(PQ) = \left(\sum_{p \in \mathbb{N}} a_p u^p \right) Q(u) = P(u)Q(u) = \varphi(P)\varphi(Q)$.

De plus on a vu que φ est linéaire et $\varphi(1) = \varphi(X^0) = u^0 = \text{Id}$, donc φ est bien un morphisme d'algèbres.

4°) (3 points)

◇ Soit P, Q, R sont trois polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que P et Q sont premiers avec R . Par définition, il existe $A, B, C, D \in \mathbb{R}[X]$ tels que $AP + BR = 1 = CQ + DR$. En effectuant le produit dans l'algèbre $\mathbb{R}[X]$, on obtient que

$$\begin{aligned} 1 &= (AP + BR)(CQ + DR) \\ &= (AC)(PQ) + (APD + BCQ + BDR)R \\ &= A'(PQ) + B'R, \end{aligned}$$

en posant $A' = AC$ et $B' = APD + BCQ + BDR$, donc PQ est premier avec R .

◇ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante : si P_1, \dots, P_n sont n polynômes, tous premiers avec un même polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, alors $\prod_{i=1}^n P_i$ est premier avec Q .

$R(1)$ est évidente et $R(2)$ résulte du point précédent.

Supposons $R(n)$ et montrons $R(n+1)$. Soit P_1, \dots, P_{n+1} $n+1$ polynômes, tous premiers avec un même polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$. D'après $R(n)$, $\prod_{i=1}^n P_i$ est premier avec Q . De plus

P_{n+1} est aussi premier avec Q , donc d'après $R(2)$, $\prod_{i=1}^{n+1} P_i = P_{n+1} \prod_{i=1}^n P_i$ est premier avec

Q , ce qui prouve $R(n+1)$.

Le principe de récurrence permet de conclure.

Partie II : décomposition des noyaux (sur 19 points)

5°) a) (3 points) Soit $f \in F$, $g \in G$ et $h \in H$ tels que $f + g + h = 0$.

Posons $k = f + g$. $k \in K$ et $k + h = 0$ avec $h \in H$.

La somme $K + H$ est directe, donc $k = h = 0$.

Ainsi, $0 = k = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. La somme $F + G$ est directe, donc $f = g = 0$.

Ainsi $f = g = k = 0$, ce qui prouve que la somme $F + G + H$ est directe. De plus,

$$\begin{aligned}(F \oplus G) \oplus H &= \{(f + g) + h \mid f \in F, g \in G, h \in H\} \\ &= \{f + g + h \mid f \in F, g \in G, h \in H\} = F \oplus G \oplus H.\end{aligned}$$

b) (2 points)

Il suffit d'adapter le raisonnement précédent : on suppose que $f_1 + \dots + f_n + g = 0$, où $g \in G$ et où pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $f_i \in F_i$. Posons $k = f_1 + \dots + f_n$. $k \in K$ et $k + g = 0$, or $K + G$ est directe, donc $k = g = 0$. Ainsi, $f_1 + \dots + f_n = 0$, or $F_1 + \dots + F_n$ est directe, donc $g = f_1 = \dots = f_n = 0$, ce qui prouve que $F_1 + \dots + F_n + G$ est une somme directe. De plus,

$$\begin{aligned}(F_1 \oplus \dots \oplus F_n) \oplus H &= \{(f_1 + \dots + f_n) + h \mid g \in G, \forall i \in \mathbb{N}_n, f_i \in F_i\} \\ &= \{f_1 + \dots + f_n + h \mid g \in G, \forall i \in \mathbb{N}_n, f_i \in F_i\} \\ &= F_1 \oplus \dots \oplus F_n \oplus H.\end{aligned}$$

6°) (2 points) Pour tout $v, w \in L(E)$, $\text{Ker}(w) \subset \text{Ker}(vw)$, car si $x \in E$ vérifie $w(x) = 0$, alors $(vw)(x) = v(w(x)) = v(0) = 0$.

En particulier, avec $v = P(u)$ et $w = Q(u)$,

$$\text{Ker}(Q(u)) \subset \text{Ker}((P(u) \circ Q(u)) = \text{Ker}((PQ)(u)),$$

de plus, $(PQ)(u) = (QP)(u) = Q(u) \circ P(u)$, donc on a aussi $\text{Ker}(P(u)) \subset \text{Ker}((PQ)(u))$.

$\text{Ker}((PQ)(u))$ est donc un sous-espace vectoriel de E qui contient $\text{Ker}(P(u)) \cup \text{Ker}(Q(u))$, donc il contient $\text{Vect}(\text{Ker}(P(u)) \cup \text{Ker}(Q(u))) = \text{Ker}(P(u)) + \text{Ker}(Q(u))$, ce qu'il fallait démontrer.

7°) (5 points) D'après l'énoncé, il existe $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que $AP + BQ = 1$, donc $\text{Id} = \varphi(1) = \varphi(A)\varphi(P) + \varphi(B)\varphi(Q) = A(u)P(u) + B(u)Q(u)$.

On en déduit que, pour tout $x \in E$, $x = (AP)(u)(x) + (BQ)(u)(x)$.

◇ Soit $x \in \text{Ker}(P(u)) \cap \text{Ker}(Q(u))$.

Alors $x = A(u)(P(u)(x)) + B(u)(Q(u)(x)) = 0$, car $P(u)(x) = Q(u)(x) = 0$.

Ainsi $\text{Ker}(P(u)) \cap \text{Ker}(Q(u)) = \{0\}$, ce qui prouve que la somme est directe.

◇ Soit $x \in \text{Ker}((PQ)(u))$. $x = [(AP)(u)](x) + [(BQ)(u)](x)$, or

$$Q(u)([(AP)(u)](x)) = (QAP)(u)(x) = A(u)([(PQ)(u)](x)) = 0 \text{ et}$$

$$P(u)([(BQ)(u)](x)) = B(u)([(PQ)(u)](x)) = 0, \text{ donc}$$

$$[(AP)(u)](x) \in \text{Ker}(Q(u)) \text{ et } [(BQ)(u)](x) \in \text{Ker}(P(u)).$$

Ainsi $x \in \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u))$.

On a prouvé que $\text{Ker}((PQ)(u)) \subset \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u))$. L'inclusion réciproque a été démontrée en question 6, donc $\text{Ker}((PQ)(u)) = \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u))$.

8°) (3 points)

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante : si P_1, \dots, P_n sont n polynômes de $\mathbb{R}[X]$ deux à deux premiers entre eux, alors $\bigoplus_{i=1}^n \text{Ker}(P_i(u)) = \text{Ker}\left(\left[\prod_{i=1}^n P_i\right](u)\right)$.

La question précédente prouve $R(2)$.

Supposons que $R(n)$ et montrons $R(n+1)$. Soit P_1, \dots, P_{n+1} $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}[X]$ deux à deux premiers entre eux. Posons $P = \prod_{i=1}^n P_i$ et $Q = P_{n+1}$. D'après la question 4,

P est premier avec Q , donc d'après $R(2)$, en posant $K = \text{Ker}(P(u))$ et $G = \text{Ker}(Q(u))$, $K \oplus G = \text{Ker}((PQ)(u))$.

De plus, d'après $R(n)$, en posant $F_i = \text{Ker}(P_i(u))$ pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $F_1 + \dots + F_n$ est une somme directe et $F_1 \oplus \dots \oplus F_n = \text{Ker}(P(u))$. Alors d'après la question 5.b, $F_1 + \dots + F_n + G$ est une somme directe et $(F_1 \oplus \dots \oplus F_n) \oplus G = F_1 \oplus \dots \oplus F_n \oplus G$.

On a donc montré que

$$\begin{aligned} \text{Ker}(P_1(u)) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(P_{n+1}(u)) &= \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u)) = \text{Ker}((PQ)(u)) \\ &= \text{Ker}\left(\left[\prod_{i=1}^{n+1} P_i\right](u)\right). \end{aligned}$$

9°) (4 points)

◇ Soit $(\alpha_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p_i}}$ une famille de réels telle que $\sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p_i}} \alpha_{i,j} e_{i,j} = 0$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, posons $x_i = \sum_{j=1}^{p_i} \alpha_{i,j} e_{i,j}$. Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $x_i \in F_i$ et $\sum_{i=1}^p x_i = 0$.

La somme étant supposée directe, on en déduit que, pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $x_i = 0$.

Soit $i \in \mathbb{N}_p$. On a donc $0 = \sum_{j=1}^{p_i} \alpha_{i,j} e_{i,j}$, or b_i est une famille libre, donc pour tout $j \in \mathbb{N}_{p_i}$, $\alpha_{i,j} = 0$. Ceci prouve que b est une famille libre de vecteurs.

◇ Soit $x \in F$. $F = \bigoplus_{i=1}^p F_i$, donc pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, il existe $x_i \in F_i$ tels que $x = \sum_{i=1}^p x_i$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, b_i est une base de F_i et $x_i \in F_i$, donc il existe $(\alpha_{i,j})_{1 \leq j \leq p_i} \in \mathbb{R}^{p_i}$ telle que $x_i = \sum_{j=1}^{p_i} \alpha_{i,j} e_{i,j}$. On en déduit que $x = \sum_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p_i}} \alpha_{i,j} e_{i,j}$, donc b est une famille

génératrice de E .

◇ En conclusion, b est une base de E . En passant aux cardinaux, on en déduit que

$$\dim(F) = |b| = \sum_{i=1}^p |b_i| = \sum_{i=1}^p \dim(F_i).$$

Partie III : applications (sur 11 points)

10°) a) (2 points) Soit y une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} solution de (E) . Alors y est nécessairement trois fois dérivable.

On montre par récurrence sur n que y est de classe C^n : en effet, $y''' = 2y'' + y' - 2y$ est dérivable donc continue, donc y est de classe C^3 , et si y est C^n pour $n \geq 3$, $y''' = 2y'' + y' - 2y$ est C^{n-2} donc y est C^{n+1} .

Ainsi toute solution de (E) est un vecteur de $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

b) (2 points)

Notons D l'application de E dans E définie par : pour tout $f \in E$, $D(f) = f'$. Clairement $D \in L(E)$ et pour tout $y \in E$, $(E) \iff D^3(y) = 2D^2(y) + D(y) - 2y$, donc en notant \mathcal{S} l'ensemble des solutions de (E) ,

$\mathcal{S} = \text{Ker}(D^3 - 2D^2 - D + 2\text{Id}) = \text{Ker}(P(D))$, où $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 2$.

c) (4 points) On a $P(X) = (X - 1)(X^2 - X - 2) = (X - 1)(X + 1)(X - 2) = P_1 P_2 P_3$, où $P_1 = X - 1$, $P_2 = X + 1$ et $P_3 = X - 2$.

Lorsque $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \neq \beta$, les polynômes $X - \alpha$ et $X - \beta$ sont premiers entre eux car $\frac{P - Q}{\beta - \alpha} = 1$. Ainsi les polynômes P_1, P_2 et P_3 sont deux à deux premiers entre eux.

Alors, d'après la question 8, $\mathcal{S} = \text{Ker}(D - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(D + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(D - 2\text{Id})$.

De plus $y \in \text{Ker}(D - \text{Id}) \iff y' = y \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \ y = \lambda e^t$, donc $\text{Ker}(D - \text{Id})$ est la droite vectorielle engendrée par $e_1 = (t \mapsto e^t)$.

De même $\text{Ker}(D + \text{Id}) = \text{Vect}(e_2)$ et $\text{Ker}(D - 2\text{Id}) = \text{Vect}(e_3)$ où $e_2 = (t \mapsto e^{-t})$ et $e_3 = (t \mapsto e^{2t})$.

Alors d'après la question précédente, (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathcal{S} , donc l'ensemble des solutions de (E) est exactement l'ensemble des applications de la forme

$t \mapsto \alpha e^t + \beta e^{-t} + \gamma e^{2t}$ où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

11°) (3 points) On choisit maintenant $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et D désigne l'application de E dans E définie par : $D((v_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (v_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. On note \mathcal{S} l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels satisfaisant la relation de récurrence $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\mathcal{S} = \text{Ker}(D^3 - 2D^2 - D + 2\text{Id}) = \text{Ker}(P(D))$, où $P(X) = X^3 - 2X^2 - X + 2$.

Comme lors de la question précédente, $\mathcal{S} = \text{Ker}(D - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(D + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(D - 2\text{Id})$.

De plus,

$(v_n) \in \text{Ker}(D - 2\text{Id}) \iff [\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 2v_n] \iff [\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, v_n = \alpha 2^n]$, donc $\text{Ker}(D - 2\text{Id})$ est la droite vectorielle de E engendrée par la suite géométrique $e_2 = (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Comme lors de la question précédente, on en déduit que \mathcal{S} est l'ensemble des suites de la forme $(\alpha + \beta(-1)^n + \gamma 2^n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Partie IV : Une décomposition plus fine (sur 19 points)

12°)

◇ (3 points) Notons $v' = v|_{\mathcal{S}} : \begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & v(x) \end{array}$.

Soit $x \in S$. Si $x \in \text{Ker}(v')$, alors $v(x) = 0$, donc $x \in S \cap \text{Ker}(v) = \{0\}$. Ainsi $\text{Ker}(v') = \{0\}$ et v' est injective.

Soit $y \in E$. v étant surjective, il existe $x \in E$ tel que $v(x) = y$. De plus, $S \oplus \text{Ker}(v) = E$, donc il existe $(s, k) \in S \times \text{Ker}(v)$ tel que $x = s + k$. Ainsi $v(x) = v(s) + v(k) = v'(s)$ donc $y = v'(s)$. Cela prouve la surjectivité de v' .

◇ (2 points) On peut alors définir l'application w de E dans E en convenant que, pour tout $x \in E$, $w(x) = (v|_S)^{-1}(x)$. D'après le cours, $v|_S$ est linéaire, donc pour tout $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $w(\alpha x + y) = \alpha w(x) + w(y)$. Ainsi, $w \in L(E)$.

Soit $x \in E$. $vw(x) = v((v|_S)^{-1}(x))$, or $(v|_S)^{-1}(x) \in S$, donc $vw(x) = v|_S((v|_S)^{-1}(x)) = x$. Ceci prouve que $vw = \text{Id}$.

Soit $x \in \text{Ker}(w)$. Alors $x = \text{Id}(x) = v(w(x)) = v(0) = 0$, donc $\text{Ker}(w) = \{0\}$, ce qui prouve que w est injectif.

13°) (3 points)

◇ Soit $i \in \mathbb{N}$. Notons $R(i)$ l'assertion suivante : $v^i w^i = \text{Id}$.

Pour $i = 0$, $v^0 = w^0 = \text{Id}$, d'où $R(0)$.

Soit $i \in \mathbb{N}$. Supposons $R(i)$.

$v^{i+1} w^{i+1} = v(v^i w^i)w$, donc d'après $R(i)$, $v^{i+1} w^{i+1} = vw = \text{Id}$.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\forall i \in \mathbb{N}$, $v^i w^i = \text{Id}$.

◇ Soient $i \in \{0, \dots, k-1\}$ et $x \in w^i(\text{Ker}(v))$: Il existe $y \in \text{Ker}(v)$ tel que $x = w^i(y)$. Alors $v^k(x) = v^k(w^i(y)) = v^{k-i} v^i w^i(y) = v^{k-i}(y)$ car $v^i w^i = \text{Id}$, or $k-i-1 \geq 0$, donc $v^k(x) = v^{k-i-1}(v(y))$, de plus $v(y) = 0$, donc $v^k(x) = 0$. Ainsi, $x \in \text{Ker}(v^k)$, ce qui prouve que $w^i(\text{Ker}(v)) \subset \text{Ker}(v^k)$.

14°)

◇ (2 points) Soit $x \in E$ et soit $i \in \{0, \dots, k-1\}$:

$w^i v^i(x) - w^{i+1} v^{i+1}(x) = w^i (v^i(x) - w v^{i+1}(x))$

et $v(v^i(x) - w v^{i+1}(x)) = 0$, car $vw = \text{Id}$. Ainsi

$w^i v^i(x) - w^{i+1} v^{i+1}(x) \in w^i(\text{Ker}(v))$.

◇ (5 points) Soit $x \in \text{Ker}(v^k)$: $x = x - w^k v^k(x) = \sum_{i=0}^{k-1} [w^i v^i(x) - w^{i+1} v^{i+1}(x)]$,

donc $\text{Ker}(v^k) \subset \sum_{i=0}^{k-1} w^i(\text{Ker}(v))$.

De plus d'après la question précédente, l'inclusion réciproque est vraie.

Ainsi, $\text{Ker}(v^k) = \sum_{i=0}^{k-1} w^i(\text{Ker}(v))$.

Il reste à montrer que cette somme est directe.

◇ Soit $(y_i)_{0 \leq i \leq k-1}$ une famille de vecteurs de E vérifiant :

$\forall i \in \{0, \dots, k-1\}$, $y_i \in w^i(\text{Ker}(v))$ et $\sum_{i=0}^{k-1} y_i = 0$.

Pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$, il existe $x_i \in \text{Ker}(v)$ tel que $y_i = w^i(x_i)$.

Ainsi, $\sum_{i=0}^{k-1} w^i(x_i) = 0$.

Supposons qu'il existe $i \in \{0, \dots, k-1\}$ tel que $w^i(x_i) \neq 0$.

Alors, $\{i \in \{0, \dots, k-1\} \mid w^i(x_i) \neq 0\}$ est un ensemble fini et non vide inclus dans

\mathbb{N} , donc il admet un maximum noté i_0 . Alors $\sum_{i=0}^{i_0} w^i(x_i) = 0$.

Ainsi $0 = v^{i_0} \left(\sum_{i=0}^{i_0} w^i(x_i) \right) = v^{i_0} w^{i_0}(x_{i_0})$, car, d'après b), pour tout $i \in \{0, \dots, i_0-1\}$,

$w^i(\text{Ker}(v)) \subset \text{Ker}(v^{i_0})$. De plus, $v^{i_0} w^{i_0} = \text{Id}$ donc $x_{i_0} = 0$, ce qui est impossible.

Ainsi $\forall i \in \{0, \dots, k-1\}$, $y_i = w^i(x_i) = 0$.

En conclusion, on a montré que $\text{Ker}(v^k) = \bigoplus_{i=0}^{k-1} w^i(\text{Ker}(v))$.

15°) (1 point) Par composition d'endomorphismes injectif, pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$, w^i est un endomorphisme injectif, donc $w^i(\text{Ker}(v))$ est de dimension finie égale à s . Alors, d'après la question 14, $\dim(\text{Ker}(v^k)) = ks$.

16°) (3 points) Pour tout $q \in \mathbb{N}_p$, posons $P_q = (X - r_q)^{n_q}$.

Soit $q, m \in \mathbb{N}_p$ avec $q \neq m$. Alors d'après l'énoncé, $r_q \neq r_m$. On a vu en question 10.b qu'alors $X - r_q$ et $X - r_m$ sont premiers entre eux. D'après la question 4, on en déduit que $(X - r_q)^{n_q}$ est premier avec $X - r_m$, puis que $P_m = (X - r_m)^{n_m}$ est premier avec $P_q = (X - r_q)^{n_q}$.

Ainsi les polynômes P_1, \dots, P_p sont deux à deux premiers entre eux, donc d'après la question

8, $\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{q=1}^p \text{Ker}(P_q(u))$.

De plus, pour tout $q \in \mathbb{N}_p$, $\text{Ker}(P_q(u)) = \text{Ker}(v_q^{n_q})$, où $v_q = u - r_q \text{Id}$, donc d'après la

question 14, $\text{Ker}(P_q(u)) = \bigoplus_{k=0}^{n_q-1} w_q^k(\text{Ker}(u - r_q \text{Id}))$.

On en déduit que $\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{q=1}^p \left(\bigoplus_{k=0}^{n_q-1} w_q^k(\text{Ker}(u - r_q \text{Id})) \right)$.

Ensuite, d'après les questions 9 et 15, lorsque $\text{Ker}(u - r_q \text{Id})$ est de dimension finie s_q

pour tout $q \in \{1, \dots, p\}$, on obtient $\dim(\text{Ker}(P(u))) = \sum_{q=1}^p n_q s_q$.