MPSI 2

Programme des colles de mathématiques.

Semaine 8 : du lundi 29 novembre au vendredi 3 décembre.

Liste des questions de cours

1°) Enoncez puis démontrez une formule relative à $|A \cup B|$.

2°) Exprimez le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ en fonction de celui de E. Démontrez-le.

3°) Soit $(G, \times)$ un groupe commutatif fini. Montrer que, pour tout $g \in G$, $g^{|G|} = 1_G$.

4°) Enoncer et démontrer le principe des bergers.

5°) Déterminer la probabilité que 2 élèves au moins aient la même date d'anniversaire dans une classe de 47 élèves.

6°) Donner une preuve combinatoire de la formule "comité-président".

7°) Donner une preuve combinatoire de la formule du triangle de Pascal.

8°) Combien le mot MISSISSIPPI possède-t-il d'anagrammes, qu'ils aient un sens ou non ?

9°) Enoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

10°) Enoncer et démontrer la formule du multinôme.

11°) Enoncer et démontrer le petit théorème de Fermat.

12°) Pour une famille $(u_{k,\ell})$ d'éléments d'un monoïde commutatif $(G, +)$, écrire en justifiant la somme $\sum\limits_{m \leq k \leq \ell \leq n} u_{k,\ell}$ sous la forme "$\sum\limits_{k} \sum\limits_{\ell}$" puis sous la forme "$\sum\limits_{\ell} \sum\limits_{k}$".

Les thèmes de la semaine

Dénombrement et sommes finies

Cardinaux d'ensembles usuels

Cardinal d'une réunion disjointe finie.
Cardinal du complémentaire.
Cardinal de $A \cup B$.
Formule du crible (hors programme).

Propriété. Si E est fini, alors E/R est aussi de cardinal fini, inférieur à celui de E.

Cardinal d'un produit cartésien d'ensembles finis.
$|\mathcal{F}(E, F)| = |F|^{|E|}$.
$|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$.

Sommes et produits finis

Les termes des sommes considérées sont des éléments d'un monoïde commutatif $(G,+)$.

Commutativité généralisée : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x_1,\ldots,x_n \in G$. Alors, $\forall \sigma \in \mathcal{S}_n,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)}$.

Définition. Soit A un ensemble fini et $(x_a)_{a\in A}$ une famille de G indexée par A.
Notons $n = |A|$. Il existe une bijection f de $\mathbb{N}_n$ dans A. On pose $\sum_{a\in A} x_a \triangleq \sum_{i=1}^{n} x_{f(i)}$.
Cette quantité ne dépend pas de la bijection f.

Propriété d'additivité : $\sum_{a\in A}(x_a + y_a) = \Big(\sum_{a\in A} x_a\Big) + \Big(\sum_{a\in A} y_a\Big)$.

Distributivité généralisée : Dans un anneau, $\sum_{a\in A}(\lambda x_a) = \lambda \sum_{a\in A} x_a$.

Changement de variable dans une somme finie : Soit B un ensemble fini, $(x_b)_{b\in B}$ une famille d'éléments de G. Soit φ une bijection d'un ensemble A dans B. Alors $\sum_{b\in B} x_b = \sum_{a\in A} x_{\varphi(a)}$.

Sommation par paquets : Soit A un ensemble fini et $(x_a)_{a\in A}$ une famille d'éléments de G. On suppose qu'il existe un ensemble fini B et une famille $(A_b)_{b\in B}$ de parties de A telles que $A = \bigsqcup_{b\in B} A_b$.
Alors $\sum_{a\in A} x_a = \sum_{b\in B}\sum_{a\in A_b} x_a$.

Sommation par paquets, seconde formulation : Soit A un ensemble fini et $(x_a)_{a\in A}$ une famille d'éléments de G. Soit R une relation d'équivalence sur A. Alors $\sum_{a\in A} x_a = \sum_{c\in A/R}\sum_{a\in c} x_a$.

Applications et cardinaux

Propriété. Soit E un ensemble fini et $f : E \longrightarrow F$. Alors $f(E)$ est fini. De plus,
$|f(E)| \leq |E|$, avec égalité si et seulement si f est injective, et
$|f(E)| \leq |F|$, avec égalité si et seulement si f est surjective.

Propriété. Si $f : E \longrightarrow F$ avec $|E| = |F| < \infty$, alors f injective $\iff f$ surjective $\iff f$ bijective .

Propriété. S'il existe une injection de A dans B et si B est fini, alors A est fini et $|A| \leq |B|$.
S'il existe une surjection de A dans B et si A est fini, alors B est fini et $|A| \geq |B|$.

Principe des tiroirs.
Principe des bergers.

Listes et combinaisons

p-listes, p-arrangements, p-combinaisons.
Bijection entre les p-arrangements de E et les injections de $\mathbb{N}_p$ dans E.

Nombre de p-arrangements dans un ensemble de cardinal n : $n(n-1)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.

$|\mathcal{S}_n| = n!$.

Nombre de p-combinaisons d'éléments d'un ensemble de cardinal n : $\binom{n}{p} \triangleq \dfrac{A_{n,p}}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$.

Coefficients binomiaux

Formule : $\forall n, p \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Formule comité-président : Pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Formule comité-bureau : si $p \leq k \leq n$, $\binom{k}{p} \times \binom{n}{k} = \binom{n}{p} \times \binom{n-p}{k-p}$.

Formule du triangle de Pascal : Si $n \geq 1$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.

Remarque. On convient parfois que, pour tout $n, p \in \mathbb{Z}$ tels que $\neg(0 \leq p \leq n)$, $\binom{n}{p} = 0$.

Formule du binôme de Newton : On se place dans un anneau $(A, +, \times)$. Soit a_1 et a_2 deux éléments de A qui commutent, c'est-à-dire tels que $a_1 a_2 = a_2 a_1$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ (a_1 + a_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_1^k \ a_2^{n-k}.$$

Formule du multinôme : (Hors programme). Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a_1, \ldots, a_p$ p éléments d'un anneau A qui commutent deux à deux. Alors

$$(a_1 + \cdots + a_p)^n = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_p \in \mathbb{N} \\ \text{tel que } i_1+\cdots+i_p=n}} \frac{n!}{i_1! \times \cdots \times i_p!} a_1^{i_1} \times \cdots \times a_p^{i_p}.$$

Petit théorème de Fermat : Soit $p \in \mathbb{P}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $n^p \equiv n$ modulo p.
En particulier, si $n \notin p\mathbb{Z}$, alors $n^{p-1} \equiv 1$ modulo p.

Sommes et produits : quelques techniques

Sommes et produits télescopiques.

Séparation des indices pairs et impairs.

Fonction génératrice d'une famille de complexes $(u_k)_{m \leq k \leq n}$: $x \longmapsto \sum_{k=m}^{n} u_k x^k$.

Sommes des termes d'une suite arithmétique, d'une suite géométrique.

Formule de Bernoulli : Si a et b commutent dans un anneau A, $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$.

Sommes doubles : $\sum_{\substack{m \leq k \leq n \\ p \leq \ell \leq q}} u_{k,\ell}$.

Sommes triangulaires : $\sum_{m \leq k \leq \ell \leq n} u_{k,\ell}$.

Prévisions pour la semaine prochaine :

Les complexes.