TIPE 2021/2022 : Recherche d'un sujet orienté maths/info

1 Analyse du thème

Pour les concours de l'année 2023, le thème des Tipe est **"La ville"**.

Le texte de cadrage officiel pour ce thème n'est pas encore publié.
Il faut comprendre ce thème dans un sens très large, en accordant beaucoup de souplesse sur la façon d'accorder votre sujet avec le thème.
Le thème n'impose pas vraiment le choix du sujet mais il détermine sa coloration, il influence de développement et la structure précise de votre projet.

2 Choix du sujet

2.1 Méthodologie

Un Tipe est d'autant meilleur qu'il est personnel, original et maîtrisé. L'idéal est ainsi de se passer des conseils ci-dessous et d'adopter sa propre démarche. La suite peut cependant vous guider un peu.

En mathématiques, un bon sujet de Tipe se construit de la manière suivante :
- Identifier aussi précisément que possible une problématique que l'on cherche à résoudre.
- Choisir parmi le corpus disponible une théorie mathématique permettant de modéliser cette problématique.
- Faire tourner la machine mathématique pour obtenir des propriétés ou bien pour réaliser des simulations informatiques.
- Revenir à la problématique initiale et étudier ce qu'apporte la modélisation, tout en critiquant ses inévitables limites.

Par exemple, la problématique pourrait être "comment organiser une ~~forêt~~ ville pour limiter la probabilité de propagation d'un incendie ?".
Si une telle problèmatique ne vous vient pas à l'esprit, vous pouvez partir d'un domaine des mathématiques ou de l'informatique qui vous intéresse, en rechercher un domaine d'application (compatible avec le thème), pour finalement dégager une problématique.
Alors, c'est cette problématique qui servira de fil conducteur à l'élaboration de votre Tipe ainsi qu'à son exposé en concours.

2.2 Où et comment chercher un sujet ?

Comme point de départ pour la recherche d'un sujet, un moteur de recherche sur internet est tout à fait adapté, à condition de savoir quoi chercher et comment chercher. Le "quoi" correspondant au paragraphe précédent, passons au "comment".

Tout l'art de cette recherche tient selon moi dans l'insertion des bons mots clés dans le moteur de recherche. Par exemple, si vous entrez "chaînes de Markov", vous accèderez à une foule de documents généraux sur les chaînes de Markov ... pas très utiles pour démarrer un Tipe. Si maintenant vous entrez "chaînes de Markov ville" ou même "ville chaîne de Markov", on n'obtient pas grand chose. Cependant avec les mots clés "urbanisme chaînes de Markov", vous accédez assez vite à des articles présentant comment les chaînes de Markov sont utilisées pour modéliser des situations urbaines. Vous pouvez alors commencer à dégager une problématique plus précise et à circonscrire l'étude des chaînes de Markov autour de cette problématique.

Lorsque le sujet est pointu, une telle recherche peu être infructueuse par manque de documents sur internet. Dans ce cas, il faut aller chercher des documents en Anglais, beaucoup plus nombreux, en insérant dans le moteur de recherche les mots clés correctement traduits en Anglais.

Il est fréquent que le premier document consulté soit une page Wikipédia. Il ne faudra bien sûr pas s'en contenter, mais cela permet souvent de dégrossir le sujet.

Lorsque vous récupérez un document intéressant, ayez le réflexe de consulter la bibliographie. Cela rend deux services :
- elle vous permet d'accéder à d'autres articles, qui eux-mêmes ont une bibliographie pertinente ;
- elle vous donne des noms de spécialistes du domaine. S'ils sont français, voire parisiens, vous pouvez les contacter, c'est important pour votre Tipe.

Les documents utilisés pour un Tipe ne doivent pas se limiter à des pages web ou des articles scientifiques. Il est bon d'inclure des ouvrages de référence, des livres donc, qui contiennent les bases du domaine auquel votre Tipe fait référence. C'est là qu'un passage au CDI ou en bibliothéque universitaire peut être bénéfique.

3 Une (toute) petite liste d'idées de sujets :

Il s'agit de sujets assez classiques, mais un sujet classique peut être un très bon sujet si vous savez le présenter de manière brillante et originale. Le lien avec le thème est le plus souvent laissé à votre imagination.

3.1 La percolation

Il s'agit d'un modèle mathématique assez simple qui a un comportement analogue à un changement de phase : on part du graphe complet dont les sommets sont les points

à coordonnées entières de $\mathbb{R}^2$ mais pour chaque arête, on décide de la conserver ou non avec probabilité p. On obtient un graphe aléatoire dont les propriétés changent brutalement lorsque p passe par une valeur critique.
C'est mathématiquement accessible et informatiquement intéressant. Les liens avec le thème sont nombreux. C'est par exemple utilisé pour étudier la propagation d'un incendie dans une ville.

3.2 Les chaînes de Markov (homogènes)

Il s'agit de processus stochastiques dont l'évolution entre l'instant n et l'instant $n+1$ ne dépend pas du passé, mais seulement de l'état du système à l'instant n. Plus précisément le système peut être dans différents états $e_1, \ldots, e_p$ et la probabilité de passer de l'état e_i à l'instant n à l'état e_j à l'instant $n+1$ ne dépend que de i et de j. Si on la note $p_{i,j}$, la matrice de ces probabilités est appelée la matrice de transition.
Ainsi l'étude des chaînes de Markov est un beau mélange d'algèbre linéaire et de probabilités. Il est en dehors mais à la marge du programme de MP. Il se prête bien à une simulation informatique.
Cependant dans le cadre d'un Tipe, il ne faut pas partir de la théorie des chaînes de Markov, mais plutôt d'un exemple d'application.

Côté algèbre linéaire, les matrices de transition sont des matrices particulières, dont les propriétés essentielles sont recensées par le théorème de Perron-Frobenius.

3.3 Théorie mathématique de l'information

La transmission d'un message à travers un canal de communication doit répondre au cahier des charges suivants :

- être exempte d'erreur, même si le canal est bruité.
- être rapide.
- être secrète, même si le canal est public.
  - Le premier point est résolu par les codes correcteurs d'erreurs ; codages linéaires, codages cycliques, codage de Reed-Solomon ;
  - le second par les algorithmes de compression des données ;
  - le dernier par les algorithmes de crytage des données, RSA notamment et tout ce qui s'y rattache :
    - factorisation d'entiers, avec notamment l'algorithme de Shor sur ordinateurs quantiques ;
    - construction de très grands nombres premiers ;
    - tests de primalité.

3.4 Structures de données et complexité (pour l'option info)

Il existe plusieurs structures de données qui sortent du programme des classes préparatoires et qui pourraient faire l'objet d'un Tipe, notamment les tas binomiaux et les tas de

Fibonacci. L'analyse de leur complexité en temps amorti est assez fine sur le plan mathématique. On peut ensuite les programmer et présenter un algorithme (sur des graphes sans doute) où l'usage de telles structures est avantageux.

3.5 Démographie, épidémiologie

Malheureusement terriblement d'actualité.
Il existe plusieurs manières de modéliser l'évolution d'une population soumise à une épidémie ou bien l'évolution de plusieurs populations en compétition.
Parmi les modèles discrets (où le temps est un entier), on peut étudier le modèle de Leslie, qui fait intervenir des matrices également régies par le théorème de Perron-Frobenius.
Lorsque le temps est modélisé par un réel t, on obtient des modèles continus qui se ramènent à des systèmes différentiels : modèle SIR pour l'épidémiologie, modèle de Lotka-Volterra pour les systèmes proies-prédateurs. On peut compliquer ces modèles pour les adapter à telle ou telle étude particulière, on peut étudier la stabilité de leurs points d'équilibres, on peut aussi s'intéresser au calcul approché des solutions, via la méthode de Runge-Kutta.

3.6 Les fractales

Une fractale est un ensemble de points de $\mathbb{R}^n$ (le plus souvent $n = 2$, voire $n = 3$) présentant des propriétés d'autosimilarité et dont la dimension est non entière.
L'étude de la théorie des fractales comporte de la topologie (partie des mathématiques relative aux notions de distance, de suites d'objets et de convergence de telles suites) et elle nécessite l'étude des différentes définitions de la dimension fractale.
Parmi les applications, on peut citer :
◇ La création d'élégantes images de synthèse, en partant d'une pure fractale douée de certaines propriétés d'autosimilarité et en perturbant sa construction de manière stochastique.
◇ La compression d'une image, en assimilant l'image à une fractale et en stockant les propriétés d'autosimilarité qui définissent cette fractale.
◇ La détection des cellules cancéreuses, en considérant qu'elles sont de dimension fractale différente des cellules saines.

3.7 Deep learning et réseaux de neurones formels

Un neurone formel reçoit en entrée les signaux des neurones branchés en amont, affecte chacun de ces signaux d'un coefficient, appelé l'efficacité synaptique, en fait la somme qu'il compare avec son seuil : il émet un signal en aval si et seulement si la somme est supérieure au seuil. Il s'agit d'une modélisation très rudimentaire des neurones biologiques.

Une partie de l'intelligence artificielle repose sur la simulation informatique de réseaux de tels neurones formels.
Elle a également évolué vers des structures proches des chaînes de Markov ; cf l'apprentissage par renforcement.

3.8 Les générateurs pseudo-aléatoires

Comment construire une suite déterministe qui mime l'aléatoire ? Il existe plusieurs solutions dont les plus connues sont les générateurs pseudo-aléatoires congruentiels et les générateurs à rétroaction linéaire.
Les générateurs pseudo-aléatoires sont souvent nécessaires pour effectuer des simulations sur ordinateur.

3.9 Le chaos déterministe

Il s'agit de l'effet papillon : un battement d'aile d'un papillon peut suffir à déclencher une tempête 3 semaines plus tard. Cette sensibilité aux conditions initiales, que l'on nomme le chaos déterministe, se rencontre pour de nombreux systèmes naturels : météorologie, système solaire (tout au moins si on l'idéalise avec deux corps massifs et un corps de masse négligeable) ...
Le modèle du billard présente l'avantage d'être suffisamment complexe pour posséder un comportement chaotique tout en étant suffisamment simple pour permettre une approche expérimentale (via l'informatique) et une approche théorique (via l'étude de l'instabilité des orbites périodiques).