DM 27 : un corrigé
Polynômes de Bernstein et théorème de Stone-Weierstrass

Partie I : Polynômes de Bernstein

1°)
◇ D'après le cours, $\deg(B_{n,k}) = \deg(X^k) + \deg((1-X)^{n-k})) = k + n - k = n$.
◇ $B_{n,k}(X) = X^k Q(X)$ où $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $Q(0) = 1 \neq 0$, donc 0 est racine de $B_{n,k}$ de multiplicité k. En particulier, 0 est racine de $B_{n,k}$ si et seulement si $k \geq 1$.
◇ De même, on montre que 1 est racine de $B_{n,k}$ de multiplicité $n-k$. En particulier, 1 est racine de $B_{n,k}$ si et seulement si $k \leq n-1$.

2°) D'après la formule du binôme de Newton, $B_{n,k} = X^k \displaystyle\sum_{h=0}^{n-k} \binom{n-k}{h} (-X)^h$,

donc $B_{n,k} = \displaystyle\sum_{h=0}^{n-k} \binom{n-k}{h} (-1)^h X^{k+h}$. En posant $j = h+k$,

on obtient $B_{n,k} = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{n-k}{j-k} (-1)^{j-k} X^j$.

3°) $X^k = X^k(X+(1-X))^{n-k} = X^k \displaystyle\sum_{h=0}^{n-k} \binom{n-k}{h} X^h (1-X)^{n-k-h}$, donc en posant

$j = k+h$, $X^k = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} \binom{n-k}{j-k} X^j (1-X)^{n-j} = \sum_{j=k}^{n} \binom{n-k}{j-k} B_{n,j}$.

4°) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Il existe $(p_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k X^k$, donc

d'après la question précédente, $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k \sum_{j=k}^{n} \binom{n-k}{j-k} B_{n,j}$. Ainsi,

$P(X) = \displaystyle\sum_{\substack{j,k\in\mathbb{N}^2\\0\leq k\leq j\leq n}} p_k \binom{n-k}{j-k} B_{n,j} = \sum_{j=0}^{n}\Big(\sum_{k=0}^{j} p_k \binom{n-k}{j-k}\Big)B_{n,j}$. Ceci montre qu'il existe $(\alpha_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k B_{n,k}$.

Donc $(B_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$, or cette famille est de cardinal $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$, donc c'est une base.

5°) Pour tout $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq k \leq n$, posons $I_{n,k} = \displaystyle\int_0^1 B_{n,k}(t)\,dt$.

$\diamond$ Supposons que $0 \leq k < n$ et intégrons par parties :

$I_{n,k} = \Big[\dfrac{t^{k+1}}{k+1}(1-t)^{n-k}\Big]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{k+1}}{k+1}(n-k)(1-t)^{n-k-1}\,dt$, donc $I_{n,k} = \dfrac{n-k}{k+1} I_{n,k+1}$.

$\diamond$ On peut en déduire par récurrence descendante finie sur $k \in \{0,\ldots,n\}$ que $R(k)$: $I_{n,k} = I_{n,n}\displaystyle\prod_{h=k}^{n-1}\frac{n-h}{h+1}$.

En effet, c'est vrai pour $k = n$ car le produit est alors vide, donc il est égal à 1.

De plus, si $R(k+1)$ est vrai pour $0 \leq k < n$,

alors $I_{n,k} = \dfrac{n-k}{k+1}I_{n,k+1} = \dfrac{n-k}{k+1} \times I_{n,n}\displaystyle\prod_{h=k+1}^{n-1}\frac{n-h}{h+1} = I_{n,n}\prod_{h=k}^{n-1}\frac{n-h}{h+1}$.

$\diamond$ De plus $I_{n,n} = \dfrac{1}{n+1}$, donc pour tout $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq k \leq n$,

$I_{n,k} = \dfrac{(n-k)!}{\left[\frac{(n+1)!}{k!}\right]} = \dfrac{1}{(n+1)\binom{n}{k}}$.

6°) Pour tout $j \in \{0,\ldots,n\}$, $B'_{n,j} = jX^{j-1}(1-X)^{n-j} - (n-j)X^j(1-X)^{n-j-1}$: c'est en particulier vrai lorsque $j = 0$ ou $j = n$, en travaillant dans $\mathbb{R}(X)$ (ensemble des fractions rationnelles). Ainsi,

$Q'(X) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j} j\alpha_j X^{j-1}(1-X)^{n-j} - \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}(n-j)\alpha_j X^j(1-X)^{n-j-1}$.

Dans la première somme, on pose $i = j - 1$:

$Q'(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i+1}(i+1)\alpha_{i+1}X^i(1-X)^{n-i-1} - \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}(n-j)\alpha_j X^j(1-X)^{n-j-1}$.

De plus, d'après la formule comité-président, pour tout $j \in \{0,\ldots,n-1\}$,

$\dbinom{n}{j+1}(j+1) = n\dbinom{n-1}{j}$ et $\dbinom{n}{n-j}(n-j) = n\dbinom{n-1}{n-j-1} = n\dbinom{n-1}{j}$,

donc $Q'(X) = n\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}(\alpha_{j+1}-\alpha_j)\binom{n-1}{j}B_{n-1,j}$.

7°) Soit $r \in \mathbb{N}$. On note $R(r)$ l'assertion suivante : pour tout $n \geq r$, pour tout

$(\alpha_0,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$, si l'on pose $Q(X)=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\alpha_j B_{n,j}$,

alors $Q^{(r)}(X)=\dfrac{n!}{(n-r)!}\displaystyle\sum_{j=0}^{n-r}\Big(\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-1)^{r-k}\alpha_{j+k}\Big)\binom{n-r}{j}B_{n-r,j}$.

◇ Pour $r=0$, on vérifie que $\displaystyle\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-1)^{r-k}\alpha_{j+k}=\alpha_j$, donc $R(0)$ est vraie.

◇ Pour $r\geq 0$, on suppose $R(r)$. Soit $n\geq r+1$ et $(\alpha_0,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$.
Posons $Q(X)=\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\alpha_j B_{n,j}$. D'après $R(r)$,

$$Q^{(r)}(X)=\frac{n!}{(n-r)!}\sum_{j=0}^{n-r}\Big(\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-1)^{r-k}\alpha_{j+k}\Big)\binom{n-r}{j}B_{n-r,j}.$$

On peut alors appliquer la question précédente (c'est-à-dire $R(1)$) en remplaçant n par $n-r$. On obtient que $Q^{(r+1)}=(n-r)\dfrac{n!}{(n-r)!}\displaystyle\sum_{j=0}^{n-r-1}\beta_j\binom{n-r-1}{j}B_{n-r-1,j}$, où

$$\begin{aligned}\beta_j &=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-1)^{r-k}\alpha_{j+1+k}-\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-1)^{r-k}\alpha_{j+k}\\ &=\sum_{h=1}^{r+1}\binom{r}{h-1}(-1)^{r-(h-1)}\alpha_{j+h}+\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-1)^{r-k+1}\alpha_{j+k}\\ &=\alpha_{j+r+1}+(-1)^{r+1}\alpha_j+\sum_{k=1}^{r}\Big(\binom{r}{k-1}+\binom{r}{k}\Big)(-1)^{r-k+1}\alpha_{j+k},\end{aligned}$$

donc d'après la relation du triangle de Pascal,

$\beta_j=\displaystyle\sum_{k=0}^{r+1}\binom{r+1}{k}(-1)^{r+1-k}\alpha_{j+k}$, donc

$Q^{(r+1)}=\dfrac{n!}{(n-(r+1))!}\displaystyle\sum_{j=0}^{n-r-1}\Big(\sum_{k=0}^{r+1}\binom{r+1}{k}(-1)^{r+1-k}\alpha_{j+k}\Big)\binom{n-r-1}{j}B_{n-r-1,j}$, ce qui prouve $R(r+1)$.

D'après le principe de récurrence, la propriété est démontrée.

Partie II : Théorème de Stone-Weierstrass

8°) Soit $x\in[0,1]$.

◇ $B_n(1)(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=(x+(1-x))^n=1$ d'après la formule du binôme de Newton, donc $B_n(1)=1$.

◇ $B_n(X)(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}x^k(1-x)^{n-k}$, or d'après la formule comité-président,

$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

donc $B_n(X)(x) = x\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{(n-1)-(k-1)}$. Ainsi, toujours d'après la formule du binôme de Newton, $B_n(X) = X$.

$\diamond$ Lorsque $n = 1$, $B_1(f)(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, donc $B_1(X^2) = X$. Supposons maintenant que $n \geq 2$.

$B_n(X^2)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k^2}{n^2}x^k(1-x)^{n-k}$, or $k^2 = k(k-1) + k$ donc

$B_n(X^2)(x) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\frac{k(k-1)}{n^2}x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n^2}x^k(1-x)^{n-k}$, or d'après la formule comité-président-vice-président,

$k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$,

donc $B_n(X^2)(x) = x^2\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}\frac{n-1}{n}x^{k-2}(1-x)^{(n-2)-(k-2)} + \frac{1}{n}B_n(X)(x)$. Ainsi,

$B_n(X^2) = \dfrac{n-1}{n}X^2 + \dfrac{1}{n}X$, ce qui est encore vrai lorsque $n = 1$.

9°)

$\diamond$ Pour tout $f \in \mathcal{C}$, $B_n(f)$ est un polynôme, donc $B_n(f) \in \mathcal{C}$.

De plus, on vérifie que, pour tout $f, g \in \mathcal{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $B_n(\alpha f + g) = \alpha B_n(f) + B_n(g)$, donc $B_n \in L(\mathcal{C})$.

$\diamond$ Soit $f \in \mathcal{C}$. Soit $x \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned}
|B_n(f)(x)| &= \Big|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\Big(\frac{k}{n}\Big)x^k(1-x)^{n-k}\Big| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Big|f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big|\times|x^k(1-x)^{n-k}| \text{ (par inégalité triangulaire)} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\|f\| \times |x^k(1-x)^{n-k}| \\
&= \|f\|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \times x^k(1-x)^{n-k} \text{ (car } 0 \leq x^k(1-x)^{n-k}) \\
&= \|f\|,
\end{aligned}$$

Ainsi, $\|f\|$ est un majorant de $\{|B_n(f)(x)| \ / \ x \in [0, 1]\}$, or la borne supérieure est le plus petit des majorants, donc $\|B_n(f)\| \leq \|f\|$ (par la suite, cet argument sera appelé un passage à la borne supérieure). De plus, B_n est linéaire, donc d'après le cours, B_n est continue.

10°) Soit $x \in [0, 1]$.

$B_n(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{\frac{1}{n}}x)^k(1-x)^{n-k} = (e^{\frac{1}{n}}x + 1 - x)^n = (1 + x(e^{\frac{1}{n}} - 1))^n$.

Ainsi, $B_n(f) = (1 + X(e^{\frac{1}{n}} - 1))^n$.
$B_n(f)(x) = e^{n\ln(1+x(\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})))} = e^{n(\frac{x}{n}+o(\frac{1}{n}))} = e^{x+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^x$.

11°)

$\diamond$ On a déjà vu que $0 \leq x^k(1-x)^{n-k}$, donc $S_{n,\delta}(x) \geq 0$.

$\diamond$ Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$ tel que $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta$, $\delta^2 \leq \left(\frac{k}{n} - x\right)^2$, donc

$$\begin{aligned}
\delta^2 S_{n,\delta}(x) &\leq \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ |\frac{k}{n}-x|\geq\delta}} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^2 - 2x\frac{k}{n} + x^2\right] \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
&= B_n(X^2)(x) - 2xB_n(X)(x) + x^2B_n(1)(x) \\
&= \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{1}{n}x - 2x^2 + x^2,
\end{aligned}$$

donc $S_{n,\delta}(x) \leq \dfrac{x - x^2}{n\delta^2}$.

De plus, $x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$, donc $S_{n,\delta}(x) \leq \dfrac{1}{4n\delta^2}$.

12°)

$\diamond$ Soit $x \in [0,1]$ et $\delta > 0$.

$f(x) - B_n(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)x^k(1-x)^{n-k}$, donc par inégalité triangulaires, $|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \displaystyle\sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ |\frac{k}{n}-x|<\delta}} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} + A$,

où $A = \displaystyle\sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ |\frac{k}{n}-x|\geq\delta}} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$.

Or, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq |f(x)| + \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq 2\|f\|$,
donc $A \leq 2\|f\|S_{n,\delta}(x)$, ce qu'il fallait démontrer.

$\diamond$ Soit $\varepsilon > 0$. f est continue sur $[0,1]$ qui est compact, donc d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue. Ainsi, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in [0,1]$ avec $|x - y| \leq \delta$, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

$\dfrac{\|f\|}{2n\delta^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\dfrac{\|f\|}{2n\delta^2} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Soit $n \geq N$. Soit $x \in [0,1]$. D'après l'inégalité précédemment démontrée,
$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq 2\|f\|S_{n,\delta}(x) + \displaystyle\sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ |\frac{k}{n}-x|<\delta}} \frac{\varepsilon}{2} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$,

donc $|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \dfrac{\|f\|}{2n\delta^2} + \dfrac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$.

Alors, par passage à la borne supérieure, on en déduit que $\|f - B_n(f)\| \le \varepsilon$, ce qu'il fallait démontrer.

13°) D'après la question précédente,
$\left|\int_0^1 (f(t) - B_n(f)(t))\ dt\right| \le \int_0^1 |f(t) - B_n(f)(t)|\ dt \le \int_0^1 \|f - B_n(f)\|\ dt$, donc
$\left|\int_0^1 (f(t) - B_n(f)(t))\ dt\right| \le \|f - B_n(f)\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, d'après le principe des gendarmes, $\int_0^1 B_n(f)(t)\ dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(t)\ dt$.

Mais par ailleurs, $\int_0^1 B_n(f)(t)\ dt = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \int_0^1 B_{n,k}(t)\ dt$, donc d'après la question 5, $\int_0^1 B_n(f)(t)\ dt = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)$, ce qui permet de conclure.

14°) D'après l'hypothèse, par combinaison linéaire, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,
$\int_0^1 P(x)f(x)\ dx = 0$, donc en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^1 B_n(f)(x)f(x)\ dx = 0$.

D'autre part, $\left|\int_0^1 (B_n(f)(x) - f(x))f(x)\ dx\right| \le \|B_n(f) - f\|\|f\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc d'après le principe des gendarmes, $\int_0^1 B_n(f)(x)f(x)\ dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f^2(t)\ dt$.

On en déduit que $\int_0^1 f^2(t)\ dt = 0$, or f^2 est positive et continue, donc f^2 est identiquement nulle. On a bien montré que $f = 0$.

Partie III : convergence uniforme des dérivées

15°)

◇ D'après la question 7,
$$[B_n(f)]^{(r)} = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \Big(\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} (-1)^{r-k} f\Big(\frac{j+k}{n}\Big)\Big) \binom{n-r}{j} B_{n-r,j}.$$

◇ En particulier, avec $r = 1$, on obtient que pour tout $x \in [0, 1]$,
$$[B_n(f)]'(x) = n \sum_{j=0}^{n-1} \Big(f\Big(\frac{j+1}{n}\Big) - f\Big(\frac{j}{n}\Big)\Big) \binom{n-1}{j} B_{n-1,j}.$$

Si l'on suppose que f est croissante, alors pour tout $j \in \{0, \ldots, n-1\}$,
$f\Big(\frac{j+1}{n}\Big) - f\Big(\frac{j}{n}\Big) \ge 0$, donc $B_n(f)'(x) \ge 0$, ce qui prouve que $B_n(f)$ est aussi croissante.

◇ Lorsque $n = 1$, $B_1(f)$ est un polynôme de degré inférieur à 1, donc c'est une fonction toujours convexe (et concave). Supposons maintenant que $n \ge 2$. Alors d'après la formule précédente avec $r = 2$, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$[B_n(f)]''(x) = n(n-1)\sum_{j=0}^{n-2}\left(f\left(\frac{j}{n}\right) - 2f\left(\frac{j+1}{n}\right) + f\left(\frac{j+2}{n}\right)\right)\binom{n-2}{j}B_{n-2,j}.$$

Supposons que f est convexe.

Soit $j \in \{0,\dots,n-2\}$. Alors, par inégalité de convexité,

$f\left(\frac{j+1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{2}\left[\frac{j}{n} + \frac{j+2}{n}\right]\right) \le \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{j}{n}\right) + f\left(\frac{j+2}{n}\right)\right]$,

donc $f\left(\frac{j}{n}\right) - 2f\left(\frac{j+1}{n}\right) + f\left(\frac{j+2}{n}\right) \ge 0$. Alors $[B_n(f)]''(x) \ge 0$, ce qui prouve que $B_n(f)$ est aussi convexe.

16°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0,\dots,n\}$. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe $t_{n,k} \in]\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}[$ tel que $f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}f'(t_{n,k})$.

De plus, $|t_{n,k} - \frac{k}{n}| \le |t_{n,k} - \frac{k}{n+1}| + |\frac{k}{n+1} - \frac{k}{n}| \le \frac{1}{n+1} + n|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}| = \frac{2}{n+1}$.

Soit $\varepsilon > 0$. f' étant uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in [0,1]$ avec $|x-y| \le \delta$, $|f'(x) - f'(y)| \le \varepsilon$.

$\frac{2}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \ge N$, $\frac{2}{n+1} \le \delta$.

Soit $n \ge N$ et $k \in \{0,\dots,n\}$. Alors

$\left|(n+1)\left[f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right)\right] - f'\left(\frac{k}{n}\right)\right| = \left|f'(t_{n,k}) - f'\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le \varepsilon$,

car $|t_{n,k} - \frac{k}{n}| \le \frac{2}{n+1} \le \delta$.

17°)

◇ Montrons d'abord que $B_{n+1}(f)' - B_n(f') \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Pour tout $x \in [0,1]$,

$$B_{n+1}(f)'(x) - B_n(f')(x) \overset{(1)}{=} \sum_{k=0}^{n}\left((n+1)\left[f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right)\right] - f'\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k}B_{n,k}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question précédente, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$\forall n \ge N,\ \forall k \in \{0,\dots,n\},\ \left|(n+1)\left[f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right)\right] - f'\left(\frac{k}{n}\right)\right| \le \varepsilon.$

Soit $n \ge N$. Pour tout $x \in [0,1]$, d'après la relation (1) et l'inégalité triangulaire, $|B_{n+1}(f)'(x) - B_n(f')(x)| \le \sum_{k=0}^{n}\varepsilon\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \varepsilon$. Ainsi, par passage au sup, on a montré que $\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \ge N,\ \|B_{n+1}(f)' - B_n(f')\| \le \varepsilon$.

◇ On sait d'après la question 12 que $B_n(f') \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f'$,

donc $B_{n+1}(f)' = [B_{n+1}(f)' - B_n(f')] + B_n(f') \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f'$, puis $[B_n(f)]' \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f'$.

18°) **a)** Il s'agit d'un polynôme d'interpolation de Lagrange, donc d'après le cours,

$P(X) = \sum_{k=0}^{r} g(k)L_k(X)$, où $L_k(X) = \prod_{\substack{0\le h\le r\\ h\ne k}}\frac{X-h}{k-h}$.

Or $\prod_{\substack{0\le h\le r\\ h\ne k}}(k-h) = \left(\prod_{h=0}^{k-1}(k-h)\right) \times (-1)^{r-k}\prod_{h=k+1}^{r}(h-k) = (-1)^{r-k}k!(r-k)!$, donc

$$P(X)=\sum_{k=0}^{r} g(k)\frac{(-1)^{r-k}}{k!(r-k)!}\prod_{\substack{0\le h\le n\\ h\ne k}}(X-h).$$

b) Soit $k\in\{0,\dots,r-1\}$. L'application $P-g$ s'annule en k et $k+1$, donc d'après le lemme de Rolle, il existe $\alpha_{k,1}\in]k,k+1[$ tel que $(P-g)'(\alpha_{k,1})=0$.
De même, pour tout $k\in\{0,\dots,r-2\}$, $(P-g)'$ s'annule en $\alpha_{k,1}$ et $\alpha_{k+1,1}$, donc il existe $\alpha_{k,2}\in]\alpha_{k,1},\alpha_{k+1,1}[$ tel que $(P-g)''(\alpha_{k,2})=0$.
Par récurrence sur h, on peut donc montrer que, pour tout $h\in\{1,\dots,r\}$, il existe une famille $(\alpha_{k,h})_{0\le k\le r-h}$ strictement croissante de réels de $]0,r[$ en lesquels $(P-g)^{(h)}$ s'annule.
En particulier, lorsque $h=r$, $(P-g)^{(r)}(\alpha_{0,r})=0$. Posons $x=\alpha_{0,r}$.
P est un polynôme de degré inférieur à r, donc $P^{(r)}(x)$ est égal à son coefficient de degré r multiplié par $r!$. Ainsi, d'après la question a), $P^{(r)}(x)=r!\sum_{k=0}^{r} g(k)\frac{(-1)^{r-k}}{k!(r-k)!}$.

On a donc $g^{(r)}(x)=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-1)^{r-k}g(k)$.

19°) On suppose que f est de classe C^r. D'après la question 15, en remplaçant n par $n+r$, $[B_{n+r}(f)]^{(r)}=\frac{(n+r)!}{n!}\sum_{j=0}^{n}\Big(\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-1)^{r-k}f\Big(\frac{j+k}{n+r}\Big)\Big)\binom{n}{j}B_{n,j}$.

Soit $j\in\{0,\dots,n\}$. Posons $g_{n,j}(x)=f\Big(\frac{j+x}{n+r}\Big)$ pour tout $x\in[0,r]$. L'application $g_{n,j}$ est bien définie car pour $0\le j\le n$ et $0\le x\le r$, $0\le\frac{j+x}{n+r}\le 1$. De plus $g_{n,j}$ est de classe C^r, donc d'après la question précédente, il existe $x_{n,j}\in]0,r[$ tel que $g_{n,j}^{(r)}(x_{n,j})=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-1)^{r-k}g(k)$. Or $g_{n,j}^{(r)}(x)=\Big(\frac{1}{n+r}\Big)^r f^{(r)}\Big(\frac{j+x}{n+r}\Big)$, donc en posant $t_{n,j}=\frac{j+x_{n,j}}{n+r}$, on obtient : $\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(-1)^{r-k}f\Big(\frac{j+k}{n+r}\Big)=\Big(\frac{1}{n+r}\Big)^r f^{(r)}(t_{n,j})$.
On peut alors adapter les raisonnements des questions 16 et 17 :
$\frac{n!(n+r)^r}{(n+r)!}[B_{n+r}(f)]^{(r)}-B_n(f^{(r)})=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\Big(f^{(r)}(t_{n,j})-f^{(r)}\Big(\frac{j}{n}\Big)\Big)B_{n,j}$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $j\in\{0,\dots,n\}$,
$\Big|t_{n,j}-\frac{j}{n}\Big|=\Big|\frac{j+x_{n,j}}{n+r}-\frac{j}{n}\Big|=\Big|\frac{nx_{n,j}-rj}{n(n+r)}\Big|\le\frac{|x_{n,j}|}{n+r}+\frac{rj}{n(n+r)}\le\frac{2r}{n+r}$.
Soit $\varepsilon>0$. $f^{(r)}$ étant uniformément continue, il existe $\delta>0$ tel que, pour tout $x,y\in[0,1]$ avec $|x-y|\le\delta$, $|f^{(r)}(x)-f^{(r)}(y)|\le\varepsilon$.
$\frac{2r}{n+r}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, donc il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n\ge N$, $\frac{2r}{n+r}\le\delta$.

Ainsi, pour tout $n\ge N$ et $j\in\{0,\dots,n\}$, $\Big|f^{(r)}(t_{n,j})-f^{(r)}\Big(\frac{j}{n}\Big)\Big|\le\varepsilon$. On en déduit

comme en question 17 que, pour tout $n \geq N$, $\| \frac{n!(n+r)^r}{(n+r)!}[B_{n+r}(f)]^{(r)} - B_n(f^{(r)})\| \leq \varepsilon$.
Ainsi, $\frac{n!(n+r)^r}{(n+r)!}[B_{n+r}(f)]^{(r)} - B_n(f^{(r)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, or
$\frac{n!(n+r)^r}{(n+r)!} = \frac{(n+r)^r}{(n+r)(n+r-1)\dots(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^r}{n^r} = 1$,
donc $[B_{n+r}(f)]^{(r)} - B_n(f^{(r)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On sait d'après la question 12 que $B_n(f^{(r)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f^{(r)}$,
donc $[B_{n+r}(f)]^{(r)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f^{(r)}$, puis $[B_n(f)]^{(r)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f^{(r)}$.

Partie IV : vitesse de convergence vers f

20°)
◇ Pour tout $x, y \in [0,1]$, $|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq 2\|f\|$,
donc $\{|f(x) - f(y)| \ / \ (x, y \in [0,1]) \wedge (|x-y| \leq \delta)\}$ est majoré par $2\|f\|$. Cet ensemble étant non vide, $\omega(\delta)$ est bien défini et par passage au sup, $\omega(\delta) \leq 2\|f\|$, donc ω est une application bornée.
◇ Soit $\delta, \delta' \in \mathbb{R}_+$ avec $\delta \leq \delta'$. Alors $\{|f(x) - f(y)| \ / \ (x, y \in [0,1]) \wedge (|x-y| \leq \delta)\}$ est inclus dans $\{|f(x) - f(y)| \ / \ (x, y \in [0,1]) \wedge (|x-y| \leq \delta')\}$, donc d'après le cours, $\omega(\delta) \leq \omega(\delta')$: l'application ω est croissante.

21°) Notons $K = \{(x,y) \in [0,1]^2 \ / \ |x-y| \leq \delta\}$. K est inclus dans la boule unité de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme infinie, donc K est borné. De plus $K = [0,1]^2 \cap \varphi^{-1}([0,\delta])$ où φ est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x,y) = |x-y|$. φ est continue d'après les théorèmes usuels et $[0,\delta]$ est un fermé de $\mathbb{R}$, donc K est un fermé. Ainsi K est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension finie, donc c'est un compact de $\mathbb{R}^2$.
Alors l'application continue $(x,y) \longmapsto |f(x) - f(y)|$ est bornée et elle atteint sa borne supérieure : il existe $(x,y) \in [0,1]^2$ tel que $|x-y| \leq \delta$ et $|f(x) - f(y)| = \omega(\delta)$.

22°) D'après le théorème de la limite monotone, $\omega(\delta) \underset{\delta\to 0^+}{\longrightarrow} \ell = \inf\{\omega(\delta) \ / \ \delta > 0\}$.
Soit $\varepsilon > 0$. f étant uniformément continue, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in [0,1]$, $|x-y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
Alors d'après la question précédente, $\omega(\delta) \leq \varepsilon$, donc $\ell \leq \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$.
On en déduit que $\ell \leq 0$, mais ω est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, donc $\ell = 0$.

23°) Soit $\delta > 0$ et $x, y \in [0,1]$.
Quitte à échanger x et y, on peut supposer que $x \leq y$.
Posons $n = \left\lfloor \frac{y-x}{\delta} \right\rfloor$. Ainsi n est un entier tel que $n \leq \frac{y-x}{\delta} \leq n+1$.
En particulier, $0 \leq \frac{y-x}{n+1} \leq \delta$.
pour tout $k \in \{0, \dots, n+1\}$, posons $x_k = x + k\frac{y-x}{n+1}$. Ainsi,

$|f(x)-f(y)| = |f(x_0)-f(x_{n+1})| = \Big|\sum_{k=0}^{n}(f(x_k)-f(x_{k+1}))\Big| \leq \sum_{k=0}^{n}|f(x_k)-f(x_{k+1})|$, or pour tout $k \in \{0,\ldots,n\}$, $|x_k - x_{k+1}| = \dfrac{y-x}{n+1} \leq \delta$, donc $|f(x_k)-f(x_{k+1})| \leq \omega(\delta)$.

On en déduit que $|f(x)-f(y)| \leq (n+1)\omega(\delta) \leq (n^2+1)\omega(\delta) \leq \omega(\delta)\Big(1+\dfrac{|x-y|^2}{\delta^2}\Big)$.

24°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}|B_n(f)(x)-f(x)| &= \Big|\sum_{k=0}^{n}\Big(f\Big(\frac{k}{n}\Big)-f(x)\Big)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\Big| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n}\Big|f\Big(\frac{k}{n}\Big)-f(x)\Big|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\end{aligned}$$

donc d'après la question précédente, pour tout $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}|B_n(f)(x)-f(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n}\omega(\delta)\Big(1+\frac{|x-\frac{k}{n}|^2}{\delta^2}\Big)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\ &= \omega(\delta)(1+\frac{1}{\delta^2}(x^2-2xB_n(X)(x)+B_n(X^2)(x)) \\ &\leq \omega(\delta)(1+\frac{1}{4n\delta^2}),\end{aligned}$$

d'après le calcul effectué en fin de question 11. En particulier pour $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, après passage au sup, on obtient que $\|B_n(f)-f\| \leq \dfrac{5}{4}\omega\Big(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)$.

Or, par composition des limites, $\omega\Big(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc d'après le principe des gendarmes, on obtient à nouveau que $B_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$.