DM 26 : corrigé

1 Théorème de d'Alembert-Gauss

1°) Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après le corollaire de l'inégalité triangulaire,
$|S(z)| = |a_n z^n - \sum_{k=0}^{n-1}(-a_k z^k)| \geq |a_n z^n| - |\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k|$, or d'après l'inégalité triangulaire,
$|\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k z^k|$, donc $|S(z)| \geq |a_n z^n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k z^k| = R(|z|)$.

2°) $\{|S(z)| \ / \ z \in \mathbb{C}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, minorée par 0, donc d'après la propriété de la borne inférieure, on peut définir $m = \inf\{|S(z)| \ / \ z \in \mathbb{C}\}$.

3°) On suppose que S est de degré n, donc $|a_n| \neq 0$ et $R(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} |a_n|t^n \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Or $|S(t)| \geq R(|t|)$, donc d'après le principe des gendarmes, $|S(t)| \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, il existe $A > 0$ vérifiant : pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geq A$, $|S(z)| \geq m + 1$.

4°) La boule fermée de centre 0 et de rayon A, notée B est fermée bornée dans $\mathbb{C}$, donc c'est un compact de $\mathbb{C}$. De plus, S est polynomiale, donc par composition, $z \longmapsto |S(z)|$ continue. D'après le cours, la restriction sur B de $z \longmapsto |S(z)|$ est bornée et elle atteint ses bornes. En particulier, il existe $\alpha \in B$ tel que, pour tout $\beta \in B$, $|S(\alpha)| \leq |S(\beta)|$.
Mais, si $\beta \in \mathbb{C} \setminus B$, alors $|\beta| \geq A$, donc $|S(\beta)| \geq m + 1$.
On en déduit que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|S(z)| \geq \min(m+1, |S(\alpha)|)$, donc $\min(m+1, |S(\alpha)|)$ est un minorant de $\{|S(z)| \ / \ z \in \mathbb{C}\}$. Ainsi, par définition de la borne inférieure, $m \geq \min(m+1, |S(\alpha)|)$. Ceci implique que $|S(\alpha)| \leq m+1$ puis que $m \geq |S(\alpha)|$. Mais $|S(\alpha)| \in \{|S(z)| \ / \ z \in \mathbb{C}\}$, donc $|S(\alpha)| = m$.

5°) Par définition, P est un polynôme de degré n tel que $P(0) = 1$, donc il s'écrit $P(X) = 1 + \sum_{k=1}^{n} b_k X^k$ avec $b_n \neq 0$.
L'ensemble $\{k \in \{1, \ldots, n\}/b_k \neq 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc elle possède un minimum que l'on notera q. Alors $b_q \neq 0$ et $P(X) = 1 + \sum_{k=q}^{n} b_k X^k$.

6°) Soit $r \in]0, (\frac{1}{\rho})^{\frac{1}{q}}[$. On pose $z = re^{i\frac{\pi-\theta}{q}}$. Par inégalité triangulaire, $P(z)| \leq |1 + b_q z^q| + \sum_{k=q+1}^{n} |b_k||z|^k$. Or $b_q z^q = \rho e^{i\theta} r^q e^{i(\pi-\theta)} = -\rho r^q$, donc $P(z)| \leq |1 - \rho r^q| + \sum_{k=q+1}^{n} |b_k| r^k$. De plus, $0 < r < (\frac{1}{\rho})^{\frac{1}{q}}$, donc $\rho r^q < 1$, ce qui permet d'écrire $|P(z)| \leq 1 - \rho r^q + \sum_{k=q+1}^{n} |b_k| r^k$.

7°) Ainsi, pour tout $r \in]0, (\frac{1}{\rho})^{\frac{1}{q}}[$, $|P(z)| - 1 \leq -\rho r^q + \sum_{k=q+1}^{n} |b_k| r^k \underset{r \to 0}{\sim} -\rho r^q < 0$, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $r \in]0, \varepsilon[$, $|P(z)| - 1 < 0$, ce qui est faux car pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| = \dfrac{|S(z+\alpha)|}{m} \geq 1$. Ainsi, l'hypothèse sous laquelle on s'est placé est fausse : $S(\alpha) = 0$, donc le polynôme S possède au moins une racine complexe.

2 Disque de Gerschgorin

2.1 Un exemple

8°) Supposons que x est une racine réelle de P. Ainsi,
$x^3 + (-2+3i)x^2 + (-3-5i)x + (6-2i) = 0$, puis en séparant les parties réelle et imaginaire, $\begin{cases} x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0 \\ 3x^2 - 5x - 2 = 0 \end{cases}$.
La deuxième équation admet pour discriminant $\Delta = 25 + 24 = 7^2$, donc ses racines sont $\dfrac{5 \pm 7}{6}$, soit 2 et $-\frac{1}{3}$. On vérifie alors que $P(2) = 0$, donc 2 est une racine réelle de P.

9°) L'équation $z^2 + 3iz - 3 + i = 0$ admet pour discriminant
$\Delta = -9 - 4(-3+i) = 3 - 4i$. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $3 - 4i = (a+ib)^2$. Alors $a^2 - b^2 = 3$ et $2ab = -4$. De plus $a^2 + b^2 = |3 - 4i| = 5$, donc $a^2 = 4$ et $b^2 = 1$ avec a et b de signes contraires : on vérifie que $\Delta = (2-i)^2$. Les racines de l'équation sont donc $z_1 = \dfrac{-3i - (2-i)}{2} = -1 - i$ et $z_2 = \dfrac{-3i + (2-i)}{2} = 1 - 2i$.

10°) D'après la question 10, $P(X) = (X-2)(X^2 + \alpha X - (3-i))$ avec $-2+3i = \alpha - 2$, donc $\alpha = 3i$. Ainsi, $P(X) = (X-2)(X^2 + 3iX - 3 + i)$, donc d'après la question précédente, les racines de P sont 2, $-1-i$ et $1-2i$, dont les modules sont égaux à 2, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{5}$, lesquels sont bien tous inférieurs à
$A = \max\{|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|\} = \max\{2\sqrt{10}, 1 + \sqrt{34}, 1 + \sqrt{13}\} = 1 + \sqrt{34}$.

2.2 Cas général

11°) Pour tout $x > 0$, notons $f(x) = \dfrac{R(x)}{x^n} = 1 - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^{k-n}$.

Pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $x \longmapsto x^{k-n}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, car $k - n < 0$, or il existe $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que $a_k \neq 0$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $x^{k-n} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, et il existe $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que $a_k \neq 0$, donc $f(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$. Enfin, $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, donc d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]-\infty, 1[$. En particulier, il existe un unique $r > 0$ tel que $f(r) = 0$. Or pour tout $x > 0$, $f(x) = 0 \iff R(x) = 0$, donc R possède une unique racine dans $\mathbb{R}_+^*$.

12°) Par définition, $A \geq 1 + |a_1|$, donc $A > 0$.
$A^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} (A^{k+1} - A^k) + A = \sum_{k=1}^{n-1} A^k (A - 1) + A$, or pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $A \geq 1 + |a_k|$, donc $A^n \geq \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} A^k |a_k| + A \geq \sum_{k=1}^{n-1} A^k |a_k| + |a_0|$. Ainsi, on a prouvé que $R(A) = A^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A^k |a_k| \geq 0$.
Si $r > A$, l'application f de la question précédente étant strictement croissante,
$0 = f(r) > f(A) \geq 0$, ce qui est faux, donc $r \leq A$.

13°) Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de S. D'après la question 1, $|S(z)| \geq R(|z|)$, donc $R(|z|) \leq 0$. Si $z = 0$, alors $0 = |z| \leq r$.
Si $z \neq 0$, alors $|z| > 0$ et $f(|z|) \leq 0$. Si $|z| > r$, alors $f(|z|) > f(r) = 0$ ce qui est faux, donc $|z| \leq r$.
Ainsi, toutes les racines de S sont dans le disque fermé de centre 0 et de rayon r.
Or $r \leq A$, donc toutes les racines de S sont dans le disque fermé de centre 0 et de rayon A.

14°) $\diamond$ Supposons que $a_{n-1} \neq 0$ et que S possède une racine complexe z de module r. $r > 0$, donc $z \neq 0$.
$0 = S(z) = z^n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$, donc $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right| = |-z^n| = |z|^n$.
Par ailleurs, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k z^k| = |z|^n - R(|z|) = |z|^n - R(r) = |z|^n$,
donc $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k\right| = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k z^k|$.

Soit $h \in \{0, \dots, n-2\}$. Alors

$$\begin{aligned}|\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k| &\leq |a_{n-1}z^{n-1} + a_h z^h| + |\sum_{\substack{k=0\\k\neq h}}^{n-2} a_k z^k| \\ &\leq |a_{n-1}z^{n-1}| + |a_h z^h| + |\sum_{\substack{k=0\\k\neq h}}^{n-2} a_k z^k| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k z^k| = |\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k|, \text{ donc}\end{aligned}$$

$$|a_{n-1}z^{n-1} + a_h z^h| + |\sum_{\substack{k=0\\k\neq h}}^{n-2} a_k z^k| = |a_{n-1}z^{n-1}| + |a_h z^h| + |\sum_{\substack{k=0\\k\neq h}}^{n-2} a_k z^k|,$$

puis $|a_{n-1}z^{n-1} + a_h z^h| = |a_{n-1}z^{n-1}| + |a_h z^h|$: nous sommes dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, et $a_{n-1}z^{n-1} \neq 0$, donc d'après le cours, il existe $\lambda_h \in \mathbb{R}_+$ tel que $a_h z^h = \lambda_h a_{n-1} z^{n-1}$, pour tout $h \in \{0, \dots, n-2\}$.

De plus, $\lambda_h = |\lambda_h| = \dfrac{|a_h|}{|a_{n-1}|} r^{h-n+1}$, donc λ_h ne dépend que de r et de S, et non de z.

Alors $z^n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k = \mu z^{n-1}$, en posant $\mu = -a_{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} \lambda_k - a_{n-1}$, or $z \neq 0$, donc $z = \mu$ et μ ne dépend que de r et de S. Ceci prouve l'unicité de z, tel que $S(z) = 0$ avec $|z| = r$, si l'on suppose l'existence.

$\diamond$ Si $S(X) = X^n - 1$, alors $R(X) = X^n - 1$, donc $r = 1$, or S possède n racines distinctes de module 1, donc le résultat précédent peut être faux lorsque $a_{n-1} = 0$.

3 Le théorème d'Eneström-Kakeya (1893 et 1913)

15°) $\diamond$ $S = \dfrac{1}{\alpha_n}(X-1)P = \dfrac{1}{\alpha_n}\Big(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k\Big)$,

donc $S = X^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha_{k-1} - \alpha_k}{\alpha_n} X^k - \dfrac{\alpha_0}{\alpha_n}$.

Ainsi, S est unitaire et $-\dfrac{\alpha_0}{\alpha_n} \neq 0$, donc on peut utiliser les résultats précédents.

Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\dfrac{\alpha_{k-1} - \alpha_k}{\alpha_n} \leq 0$, donc le polynôme R associé à S vérifie $R = S$. Or $S(1) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha_{k-1} - \alpha_k}{\alpha_n} - \dfrac{\alpha_0}{\alpha_n} = 1 + \dfrac{\alpha_0 - \alpha_n}{\alpha_n} - \dfrac{\alpha_0}{\alpha_n} = 0$, donc $r = 1$.

Ainsi, d'après notre solution de la question 13, toutes les racines de S, donc de P ont un module inférieur ou égal à 1.

$\diamond$ On suppose de plus que $\alpha_{n-1} < \alpha_n$. Alors le coefficient de S de degré n est non nul, donc on peut appliquer la question 14 : S possède au plus une racine de module 1. Or 1 est racine de S, donc c'est l'unique racine de module égal à 1. De plus $P(1) \geq \alpha_0 > 0$, donc 1 n'est pas racine de P. Ainsi pour toute racine complexe z de P, $|z| < 1$.

16°) Soit z une racine de Q.

$\diamond$ Posons $P(X) = Q(\gamma X)$: $P(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k \gamma^k X^k$. Ainsi, si l'on note $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$, on a $\alpha_0 > 0$ et pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, $\alpha_{k+1} = b_{k+1}\gamma^{k+1} \geq b_{k+1}\gamma^k \times \frac{b_k}{b_{k+1}}$, par définition de γ, donc $\alpha_{k+1} \geq b_k \gamma^k = \alpha_k$. Ainsi P satisfait les conditions de la question précédente. Ses racines ont donc un module inférieur ou égal à 1.
Or $0 = Q(z) = P(\frac{z}{\gamma})$, donc $|z| \leq \gamma$.

$\diamond$ Posons maintenant $P(X) = X^n Q(\frac{\beta}{X})$: $P(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k \beta^k X^{n-k}$. Ainsi, si l'on note à nouveau $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$, on a encore $\alpha_0 > 0$ et pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$,
$\alpha_{k+1} = b_{n-(k+1)}\beta^{n-k-1} \geq b_{n-k-1}\beta^{n-k} \times \frac{b_{n-k}}{b_{n-k-1}}$, par définition de β,
donc $\alpha_{k+1} \geq \beta_{n-k}\beta^{n-k} = \alpha_k$. Ainsi P satisfait les conditions de la question précédente. Ses racines sont ont donc un module inférieur ou égal à 1.
Or $Q(\frac{\beta}{X}) = \frac{1}{X^n}P(X)$, donc $Q(X) = Q\Big(\frac{\beta}{\frac{\beta}{X}}\Big) = \frac{X^n}{\beta^n}P(\frac{\beta}{X})$, donc $P(\frac{\beta}{z}) = 0$. Alors $|\frac{\beta}{z}| \leq 1$, donc $|z| \geq \beta$.

4 Le théorème de Cohn (1922)

17°) Posons $P_1 = \frac{1}{\alpha_n}P$. P_1 est unitaire et l'un de ses coefficients non dominants est non nul, donc on peut appliquer à P_1 les résultats des questions 11 à 13 : en posant $R_1(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_n|} X^k$, R_1 possède une unique racine $\rho(P) \in \mathbb{R}_+^*$. C'est donc l'unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $\sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k| x^k = |\alpha_n| x^n$.
De plus, toute racine ζ de P est racine de P_1, donc $|\zeta| \leq \rho(P)$.

18°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $R(n)$ l'assertion : pour tout polynôme P de degré n, il existe $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $P = \alpha_n \prod_{i=1}^{n} (X - \zeta_i)$, où α_n est le coefficient dominant de P.
Pour $n = 1$, $P(X) = \alpha_1 X + \alpha_0 = \alpha_1(X - (-\frac{a_0}{a_1}))$, d'où $R(1)$.
Pour $n \geq 2$, soit P un polynôme de degré n et de coefficient dominant α_n. D'après le théorème de D'Alembert, il existe $\zeta_n \in \mathbb{C}$ tel que $P(\zeta_n) = 0$. D'après le cours, il existe

$Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = \alpha_n(X - \zeta_n)Q$. Q est unitaire de degré $n-1$, donc d'après $R(n-1)$, il existe $(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que $Q = \prod_{i=1}^{n-1}(X - \zeta_i)$. Ainsi, $P = \alpha_n \prod_{i=1}^{n}(X - \zeta_i)$ ce qui prouve $R(n)$.
Le principe de récurrence permet de conclure, quitte ensuite à réordonner les racines de P en fonction de leurs modules.

19°) Soit $k \in \{0, \ldots, n\}$. D'après les relations de Viète,
$\left|\frac{\alpha_k}{\alpha_n}\right| = \left|\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-k} \le n} \zeta_{i_1}\zeta_{i_2}\cdots\zeta_{i_{n-k}}\right| \le \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-k} \le n} |\zeta_{i_1}\zeta_{i_2}\cdots\zeta_{i_{n-k}}|$, par inégalité triangulaire. Or pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $|\zeta_k| \le |\zeta_n|$, donc
$\left|\frac{\alpha_k}{\alpha_n}\right| \le |\zeta_n|^{n-k} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-k} \le n} 1.$
De plus, pour construire un $(n-k)$-uplet $(i_1, i_2, \ldots, i_{n-k})$ d'entiers tel que $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-k} \le n$, il suffit de choisir la partie $\{i_1, i_2, \ldots, i_{n-k}\}$ de $n-k$ éléments parmi les n éléments $1, \ldots, n$, donc $\left|\frac{\alpha_k}{\alpha_n}\right| \le \binom{n}{k} |\zeta_n|^{n-k}$.

20°) $\rho(P)^n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_n|}\rho(P)^k \le \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} |\zeta_n|^{n-k}\rho(P)^k.$

21°) Ainsi, d'après la formule du binôme de Newton, $\rho(P)^n \le (\rho(P) + \zeta_n)^n - \rho(P)^n$, donc $2\rho(P)^n \le (\rho(P) + \zeta_n)^n$, puis $2^{\frac{1}{n}}\rho(P) \le \rho(P) + \zeta_n$, ce qui permet de conclure.

22°) 0 n'est pas racine de P, donc $\alpha_0 \neq 0$ et on a toujours $\alpha_n \neq 0$, donc $Q = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^{n-k}$ satisfait les hypothèses portant sur P. Ainsi, d'après la question précédente, $(2^{\frac{1}{n}} - 1)\rho(Q) \le \zeta \le \rho(Q)$, où ζ désigne une racine de Q de module maximal.
Or $Q(X) = X^n P(\frac{1}{X}) = X^n \prod_{i=1}^{n}(\frac{1}{X} - \zeta_i) = \prod_{i=1}^{n}(1 - X\zeta_i) = \beta \prod_{i=1}^{n}(X - \frac{1}{\zeta_i})$, où β est le coefficient dominant de Q. Ainsi, on peut choisir $\zeta = \frac{1}{\zeta_1}$, donc $(2^{\frac{1}{n}} - 1)\rho(Q) \le \frac{1}{\zeta_1} \le \rho(Q)$ et on conclut en passant aux inverses, toutes ces quantités étant strictement positives.

23°) Lorsque $P(X) = X^3 + (-2 + 3i)X^2 + (-3 - 5i)X + (6 - 2i)$, $\rho(P)$ est l'unique solution strictement positive de l'équation $x^3 - \sqrt{13}x^2 - \sqrt{34}x - 2\sqrt{10} = 0$. Par dichotomie, on obtient $\rho(P) = 5,019 \pm 10^{-3}$. De plus le plus grand module des trois racines de P est égal à $\sqrt{5} = 2,236 \pm 10^{-3}$: cela illustre le résultat de la question 17.
On a aussi $(2^{\frac{1}{3}} - 1)\rho(P) = 1,304 \pm 10^{-3}$: cela illustre la question 21.

5 Un dernier résultat

24°) Posons $R_1(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_n|} X^k$. Il existe $i \in \{0, \ldots, n-2\}$ tel que $\alpha_i \neq 0$, donc on peut appliquer les résultats des questions 11 à 13 à $\frac{1}{\alpha_n} P_1$ et à R_1. Or $R_1(\rho(P)) = \Big(\rho(P)^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_n|} \rho(P)^k\Big) + \frac{|\alpha_{n-1}|}{|\alpha_n|} \rho(P)^{n-1} = \frac{|\alpha_{n-1}|}{|\alpha_n|} \rho(P)^{n-1} \geq 0$, donc d'après la question 12, $\rho(P_1) \leq \rho(P)$.

25°) Soit $\zeta \in \mathbb{C}$ une racine de P telle que $|\zeta| > \rho(P_1)$. En particulier, $|\zeta| > 0$. ζ étant racine de P, $\alpha_n \zeta^n + \alpha_{n-1} \zeta^{n-1} = -\sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k \zeta^k$, donc $|\alpha_n \zeta^n + \alpha_{n-1} \zeta^{n-1}| \leq \sum_{k=0}^{n-2} |\alpha_k| |\zeta|^k$,

puis $|\alpha_n \zeta + \alpha_{n-1}| \leq \sum_{k=0}^{n-2} |\alpha_k| \frac{1}{|\zeta|^{n-1-k}}$, or $|\zeta| > \rho(P_1)$, donc

$$|\alpha_{n-1} + \alpha_n \zeta| \leq \sum_{k=0}^{n-2} |\alpha_k| \frac{1}{\rho(P_1)^{n-1-k}} \leq \frac{1}{\rho(P_1)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} |\alpha_k| \rho(P_1)|^k.$$

26°) Soit $\zeta \in \mathbb{C}$ une racine de P. Si z n'est pas dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $\rho(P_1)$, $|z| > \rho(P_1)$, donc d'après la question précédente, $|\alpha_{n-1} + \alpha_n \zeta| \leq \frac{1}{\rho(P_1)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} |\alpha_k| \rho(P_1)|^k = |\alpha_n| \rho(P_1)$ par définition de $\rho(P_1)$, donc $|\zeta - (-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n})| \leq \rho(P_1)$, si bien que ζ est dans le disque de centre $-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$ et de rayon $\rho(P_1)$.

27°) Lorsque $P(X) = X^3 + (-2+3i)X^2 + (-3-5i)X + (6-2i)$, $\rho(P_1)$ est l'unique solution strictement positive de l'équation $x^3 - \sqrt{34}x - 2\sqrt{10} = 0$. Par dichotomie, on obtient $\rho(P_1) = 2,839 \pm 10^{-3}$. De plus, pour cet exemple, $\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} = -2 + 3i$.
D'après la question 10, toutes les racines de P sont dans le disque de centre 0 et de rayon $\rho(P_1)$.