DM 17 : énoncé

Problème 1 : une équation aux dérivées partielles

Soit f une application de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}$.
La quantité $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$ désigne la dérivée (lorsqu'elle est définie) de l'application $x \longmapsto f(x,y,z)$, où y et z sont considérés comme des constantes. Plus formellement, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}(f(x+h,y,z) - f(x,y,z))$.
Supposons que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$ est définie pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Lorsque c'est défini, on pose alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)$, où $g = \dfrac{\partial f}{\partial x}$.
Le laplacien de f désigne la quantité suivante, lorsqu'elle est définie :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

1°) Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, on pose $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
On note u une application de classe C^2 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et on pose $f = u \circ r$.
a) Exprimer $\dfrac{\partial r}{\partial x}$ en fonction de x et de r.
b) En déduire $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ en fonction de u, u', u'', r et x.
c) Exprimer Δf en fonction de u', u'' et r.

On fixe $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. On souhaite étudier l'équation aux dérivées partielles

$$(E_\omega) \ : \ \Delta f = -\omega^2 f,$$

sous les conditions précédentes, c'est-à-dire lorsque f est de la forme $f = u \circ r$, où u est une application de classe C^2 de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

2°) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $v(t) = tu(t)$.
a) Montrer que f est solution de (E_ω) si et seulement si v vérifie l'équation différentielle $(V) \ : \ v'' + \omega^2 v = 0$.
b) Déterminer les solutions $f = u \circ r$ non nulles de (E_ω) telles que $u(t)$ possède une limite finie lorsque t tend vers 0.

À présent, on suppose que $f = u \circ r$ est l'une des solutions obtenues à la question précédente.

3°) **a)** Montrer que $u'(1) = 0$ si et seulement si $\tan \omega = \omega$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Montrer qu'il existe un unique $\omega_n \in \left]\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi\right[$ tel que $\tan \omega_n = \omega_n$.

c) Soit n et p deux entiers naturels distincts. On suppose que $f_n = u_n \circ r$ (resp : $f_p = u_p \circ r$) est une solution de (E_{ω_n}) (resp : de (E_{ω_p})) telle que $u_n(t)$ (resp : $u_p(t)$) possède une limite finie lorsque t tend vers 0.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 u_n(t)u_p(t)t^2\, dt = 0$, selon les deux méthodes suivantes :

— Par un calcul direct à l'aide des expressions de $u_n(t)$ et de $u_p(t)$ en fonction de t.

— En intégrant par parties, en tenant compte du fait que $t \longmapsto tu_n(t)$ et $t \longmapsto tu_p(t)$ sont solutions de (V).

4°) Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $\omega_n = n\pi + \dfrac{3\pi}{2} - \arctan\Big(\dfrac{1}{\omega_n}\Big)$.

b) Montrer que $\omega_n = n\pi + \dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + \dfrac{\varepsilon_n}{n}$, où ε_n est une suite de réels qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème 2 : La variole

En 1760 Daniel Bernoulli présente à l'académie des sciences de Paris un mémoire intitulé "*Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir*". Il y a adopte les hypothèses simplificatrices suivantes :

— indépendamment de son âge un individu a une probabilité $q.\Delta x$ d'être infecté par la variole durant une période de durée Δx ;

— indépendamment de son âge un individu infecté pour la première fois meurt avec une probabilité p et survit avec une probabilité $1-p$;

— lorsqu'un individu survit après avoir été infecté par la variole, il est immunisé pour le reste de sa vie.

Daniel Bernoulli estime que $p = q = \frac{1}{8}$. On adoptera les notations suivantes :

— On étudie l'évolution d'un groupe d'individus, initialement constitué de P_0 éléments nés la même année, où $P_0 \in \mathbb{N}^*$. On note x l'âge de ces individus, où x décrit $\mathbb{R}_+$.

— La mortalité naturelle à l'âge x, i.e. de causes différentes de la variole, est notée $m(x)$. Autrement dit la probabilité de mourir entre l'âge x et l'âge $x + \Delta x$ est $m(x)\Delta x$.

— Le nombre d'individus encore en vie à l'âge x sans avoir été infectés est noté $S(x)$. C'est un réel positif, et non un entier naturel, car c'est en fait la valeur moyenne du nombre d'individus encore en vie à l'âge x, si l'on répètait cette "expérience" (suivi d'un groupe de P_0 individus) un grand nombre de fois.

— Le nombre d'individus encore en vie à l'âge x et immunisés est noté $R(x)$.

— Le nombre d'individus encore en vie à l'âge x est noté $P(x)$. On a donc $P(x) = S(x) + R(x)$. On convient que $x = 0$ au moment de la naissance des individus. Ainsi, $P(0) = P_0$.

On supposera que les applications S et R sont de classe C^1.

Partie I : L'espérance de vie.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}_+$.

1°) Lorsque $N \in \mathbb{N}^*$, interpréter la quantité $S_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N} f(a + k\frac{b-a}{N})$ comme une somme d'aires de rectangles afin d'expliquer informellement pourquoi $S_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_a^b f(t)dt$. On dit que S_N est une somme de Riemann associée à f.

2°) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{0, \ldots, N\}$, on note A_k le point de coordonnées $(a + k\frac{b-a}{N}, 0)$ et B_k le point de coordonnées $(a + k\frac{b-a}{N}, f(a + k\frac{b-a}{N}))$. Montrer que si l'on approche $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ par la somme des aires des trapèzes $A_k B_k B_{k+1} A_{k+1}$ pour k variant de 0 à $N-1$, on obtient comme valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ la quantité $T_N = \dfrac{b-a}{N}\Big(\dfrac{f(a)+f(b)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} f(a + k\frac{b-a}{N})\Big)$.

3°) L'espérance de vie des P_0 éléments du groupe initial est la moyenne des durées de vie de ces individus, pondérée par le nombre d'individus accédant à chacune de ces durées de vie. Notons T la durée de vie maximale.
Expliquer informellement pourquoi on peut approcher cette espérance de vie par la quantité $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{T}{\Delta x} \rfloor + 1} k\Delta x \times \frac{P(k\Delta x) - P((k+1)\Delta x)}{P_0}$, où Δx est une durée aussi petite que l'on veut.
En déduire qu'une bonne définition mathématique de l'espérance de vie des P_0 individus est $E = -\dfrac{1}{P_0} \displaystyle\int_0^{+\infty} x P'(x) dx$.

4°) **a)** Montrer que $E = \dfrac{1}{P_0} \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x) dx$.
b) L'unité de temps étant l'année, lorsque $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ désigne le nombre d'individus encore en vie après n années.

Montrer qu'une valeur approchée de E est donnée par $\tilde{E} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{P_0} \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(k)$.

Partie II : Équations différentielles.

5°) **a)** Notons ΔS la variation de $S(x)$ entre x et $x + \Delta x$. Expliquer informellement pourquoi $\Delta S = -qS(x)\Delta x - m(x)S(x)\Delta x$, puis pourquoi on peut considérer que S est

une solution de l'équation différentielle $(E_S)\ :\ S' = -(m(x)+q)S$.
b) De la même façon, montrer que R satisfait l'équation différentielle
$(E_R)\ :\ R' = q(1-p)S - m(x)R$.

6°) On pose $f = \dfrac{S}{P}$ et on suppose que f est bien définie.
a) Montrer que f satisfait l'équation différentielle $(E_f)\ :\ f' = -qf + pqf^2$.
b) En posant $g = \dfrac{1}{f}$, montrer que $f(x) = \dfrac{1}{(1-p)e^{qx}+p}$.
c) Sous quelles hypothèses s'est-on placé pour effectuer ces calculs ?

7°) On suppose que l'application m est continue.
Intégrer directement les équations (E_S) et (E_R) et retrouver l'expression de $f(x)$ de la question 6.b. Que deviennent les hypothèses de la question 6.c ?

Partie III : Les avantages de la vaccination.

8°) **a)** Daniel Bernoulli estime le nombre de morts par la variole entre l'âge x et l'âge $x+1$ à $\dfrac{1}{2}pq(S(x)+S(x+1))$. Justifier cette formule en utilisant les questions 1 et 2.
On souhaite étudier l'efficacité d'une campagne de vaccination. Dans ce but, on note $P^*(x)$ le nombre d'individus qui seraient encore en vie à l'instant x si l'on suppose que les P_0 individus initiaux sont vaccinés à la naissance et que le vaccin les immunise complètement de la variole.
b) Une table de mortalité permet de connaître $P(n)$ pour tout entier naturel n.
Expliquer comment on peut alors remplir un tableau donnant, pour chaque entier naturel n, les quantités $P(n)$, $S(n)$ et $R(n)$, le nombre de morts par la variole pendant l'année et enfin $P^*(n)$.

9°) Le résultat de la question 4.b permet alors d'estimer les espérances de vie des P_0 individus initiaux, sans vaccination ou avec vaccination. Daniel Bernoulli obtient que l'espérance sans vaccination est $E = 26,57$ ans et que l'espérance avec vaccination est $E^* = 29,65$ ans. Cependant ce dernier calcul ne tient pas compte du risque que comporte l'inoculation du vaccin : on note p' la probabilité de mourir lors de la vaccination (peu après la naissance). On considère que le vaccin est *efficace* si et seulement si l'espérance de vie du groupe initial est supérieure en cas de vaccination. Déterminer la valeur maximale de p'. On pourra aussi critiquer le modèle utilisé.