MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 6 : du lundi 15 novembre au vendredi 19.

Liste des questions de cours

1°) Forme irréductible d'un rationnel : montrer l'existence et l'unicité.

2°) Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

3°) Dans un ensemble ordonné quelconque, si A et B sont deux parties possédant des bornes supérieures et si $A \subset B$, comparez $\sup A$ et $\sup B$. Démontrez-le.

4°) Si S et T sont deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$, montrer que $\sup(S+T) = \sup S + \sup T$.

5°) Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers $\sup(A)$.

6°) Montrer qu'une union d'intervalles possédant un point commun est un intervalle.

7°) Enoncer l'inégalité triangulaire. En déduire son corollaire.

8°) Donner deux définitions d'une partie dense dans $\mathbb{R}$ et montrer qu'elles sont équivalentes.

9°) Enoncer et démontrer les CNS de divisibilité par 2, 5, 10, 3, 9 et 11.

10°) Si $(v_n)_{n\geq 1}$ est une suite de chiffres compris entre 0 et 9, montrer qu'on peut définir $x = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n 10^{-n}$, où $x \in [0,1]$. Montrer que $[x = 1 \iff (\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ v_n = 9)]$.

11°) Soit $a \in \mathbb{N}$ avec $a \geq 2$. Enoncer et démontrer la propriété d'existence et d'unicité du développement en base a du réel x.

Les thèmes de la semaine

1 Arithmétique sur $\mathbb{Z}$

En révision.

2 Les rationnels

Construction de $\mathbb{Q}$.

$(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps, c'est-à-dire que
- $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un anneau,
- $\mathbb{Q}$ n'est pas réduit à $\{0\}$ (on note $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$),
- $\mathbb{Q}$ est commutatif,
- tout élément non nul de $\mathbb{Q}$ est inversible : $\forall x \in \mathbb{Q}^*,\ \ \exists y \in \mathbb{Q}^*,\ \ xy = 1$.

Comme tout corps, $\mathbb{Q}$ est intègre.

Ordre sur $\mathbb{Q}$, valeur absolue.

Forme irréductible d'une fraction rationnelle.

3 Les réels

3.1 Bornes supérieures

Définition de $\sup A$ et $\inf A$ dans un ensemble ordonné quelconque, lien avec la notion de maximum.

$B \subset A \Longrightarrow \sup(B) \leq \sup(A)$, $B \subset A \Longrightarrow \inf(B) \geq \inf(A)$.

Passage à la borne supérieure (resp : inférieure) : $[\forall a \in A,\ \ a \leq e] \Longleftrightarrow \sup(A) \leq e$.

3.2 Une caractérisation de $\mathbb{R}$.

Caractérisation de $\mathbb{R}$: (admise)
Il existe au moins un corps K totalement ordonné dans lequel toute partie non vide majorée admet une borne supérieure. Il est unique à un isomorphisme de corps ordonnés près.

Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

$s = \sup(A) \Longleftrightarrow [\forall a \in A,\ \ a \leq s] \wedge [\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists a \in A,\ \ s - \varepsilon < a]$.
$m = \inf(A) \Longleftrightarrow [\forall a \in A,\ \ a \geq m] \wedge [\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists a \in A,\ \ m + \varepsilon > a]$.

3.3 La droite réelle achevée

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Toute partie de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure et une borne inférieure.

3.4 Les intervalles

Définition. Intervalles ouverts et fermés, segments.

On dit que $A \subset \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $a, b \in A$ avec $a < b$, $[a, b] \subset A$.
Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement ses intervalles.

Une intersection d'intervalles de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Une union d'intervalles possédant un point commun est un intervalle.

3.5 la valeur absolue

L'inégalité triangulaire et son corollaire.

Distance entre réels : $d(x, y) = |x - y|$. Inégalité triangulaire : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

3.6 Propriétés usuelles des réels

$\mathbb{R}$ est archimédien : Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists n \in \mathbb{N},\ \ na > b$.

Parties entières inférieure et supérieure.

$A \subset \mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ssi pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$, il existe $a \in A$ tel que $x \leq a \leq y$,
ou bien ssi pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$.

$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

4 Développement décimal

4.1 Développement décimal d'un entier naturel

Développement d'un entier naturel en base a, où $a \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

CNS de divisibilité par 2, 5, 10, 3, 9 et 11.

4.2 L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux

Définition. $\mathbb{D} = \left\{ \frac{n}{10^k} / n \in \mathbb{Z} \text{ et } k \in \mathbb{N} \right\}$.

Développement décimal d'un élément de $\mathbb{D}$.

4.3 Approximation d'un réel

Définition d'une valeur approchée à ε près, éventuellement par défaut ou par excès.
Le réel x est approché par défaut à 10^{-p} près par le nombre décimal $\dfrac{\lfloor 10^p x \rfloor}{10^p}$.

4.4 Développement décimal d'un réel

Soit $a \in \mathbb{N}$ avec $a \geq 2$.

Si (v_n) est une suite de "chiffres" entre 0 et $a-1$, définition de $x = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n a^{-n} \in [0,1]$: On dit que $(v_n)_{n\geq 1}$ est un développement de x en base a et on note $x = 0, \overline{v_1 v_2 \cdots v_n v_{n+1} \cdots}$.
De plus, $x \in [0,1]$ et $[x = 1 \iff (\forall n \in \mathbb{N}^*, \;\; v_n = a-1)]$.

Théorème. Tout réel de $[0,1[$ admet un unique développement en base a dans $\mathcal{V}$,
où $\mathcal{V} = \{(v_n)_{n\geq 1} / \forall n \in \mathbb{N}^* \;\; v_n \in \mathbb{N} \cap [0,a[\text{ et } \forall N \in \mathbb{N}^* \;\; \exists n \geq N \;\; v_n \neq a-1\}$.

Théorème hors programme : caractérisation d'un rationnel. Soit $x \in [0,1[$. x est un rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.

Prévisions pour la semaine prochaine :

Applications, images directe et réciproque, injectivité et surjectivité. Lois internes.