

MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 19 : du lundi 21 mars au vendredi 25.

Liste des questions de cours

- 1°) Pour la notion de limite d'une fonction en un point, montrer l'équivalence entre la caractérisation séquentielle et la caractérisation par ε .
- 2°) Donner les trois caractérisations de la continuité de f en a .
- 3°) Que peut-on dire lorsque f et g sont continues et coïncident sur une partie dense dans A ? Démontrez-le.
- 4°) Démontrer le théorème de la limite monotone dans le cas d'une fonction croissante et majorée sur un intervalle majoré.
- 5°) Montrer qu'un produit cartésien d'un nombre fini de compacts est compact.
- 6°) Énoncer et démontrer le TVI.
- 7°) Énoncer et démontrer le théorème de caractérisation de la continuité par des ouverts.
- 8°) Énoncer puis démontrer un théorème relatif à la continuité des applications linéaires.
- 9°) Que dire de l'image directe d'un compact par une application continue? Démontrez-le.
- 10°) Énoncer et démontrer l'équivalence entre la caractérisation par ε et la caractérisation séquentielle de la continuité uniforme d'une application.
- 11°) Montrer que les réciproques de la proposition "lispchitzienne" \implies "uniformément continue" \implies "continue" sont fausses.

Première partie

À réviser : topologie, cf programme de colles précédent.

Deuxième partie

Limites de fonctions et continuité

Par défaut, E et F sont deux espaces métriques et f est une fonction de E dans F , définie sur \mathcal{D}_f .

1 Limite en un point

Notation. On fixe une partie A de \mathcal{D}_f . On fixe également a , qui peut être infini. On suppose qu'il existe au moins une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$. On fixe aussi l dans $F \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$.

1.1 Caractérisation séquentielle

Définition. $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l$ si et seulement si $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \left(x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a \implies f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \right)$.

Unicité de la limite.

Lorsque $F = \mathbb{C}$ et $l \in \mathbb{C}$, $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} \ell$ si et seulement si $(\operatorname{Re}(f)(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} \operatorname{Re}(\ell)) \wedge (\operatorname{Im}(f)(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} \operatorname{Im}(\ell))$.

Propriété. Si $A \subset B \subset \mathcal{D}_f$ et si $f(x) \xrightarrow[x \in B]{x \rightarrow a} l$, alors $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l$.

1.2 Caractérisation par “ ε ”

Si $a \in E$ et $l \in F$, $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l \iff \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \forall x \in A (d(x, a) \leq \alpha \implies d(f(x), l) \leq \varepsilon)$.

Adaptation aux cas des limites infinies.

1.3 Caractérisation par voisinages

Voisinages de $\pm\infty$ dans \mathbb{R} , voisinages de ∞ dans E .

Propriété. $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l \iff \forall V \in \mathcal{V}(l) \exists U \in \mathcal{V}(a) f(U \cap A) \subset V$.

Caractère local de la notion de limite : Pour tout $U_0 \in \mathcal{V}(a)$, $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l \iff f(x) \xrightarrow[x \in A \cap U_0]{x \rightarrow a} l$.

Lorsque $E = \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, limite à gauche et à droite en a de $f(x)$.

$f(x) \xrightarrow[x \rightarrow a]{x \rightarrow a} l$ si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x > a]{x \rightarrow a} l$ et $f(x) \xrightarrow[x < a]{x \rightarrow a} l$.

2 Continuité en un point

Définition. Soit $a \in \mathcal{D}_f$. f est continue en a si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x \in \mathcal{D}_f]{x \rightarrow a} f(a)$.

Propriété. Si $a \notin \overline{\mathcal{D}_f \setminus \{a\}}$ (on dit que a est un point isolé de \mathcal{D}_f), f est toujours continue en a .

Si $a \in \overline{\mathcal{D}_f \setminus \{a\}}$, f est continue en a si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}]{x \rightarrow a} f(a)$.

Les applications lipschitziennes sont continues.

Si f est continue en a , alors $f|_A$ est aussi continue en a .

Lorsque $E = \mathbb{R}$, continuité à gauche et à droite.

Prolongement par continuité.

Si f et g sont continues et coïncident sur une partie dense dans A , alors f et g coïncident sur A .

3 Théorèmes de composition

Pour que $g(f(x)) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} m$, il suffit que $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l$ et $g(y) \xrightarrow[y \in B]{y \rightarrow l} m$.

Si $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} b$ et si g est continue en b , alors $g(f(x)) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} g(b)$.

Continuité d'une composée.

Limite en un point d'une application à valeurs dans un produit de \mathbb{K} -espaces vectoriels normés.

Continuité en un point d'une application à valeurs dans un produit de \mathbb{K} -espaces vectoriels normés.

4 Opérations algébriques sur les limites

4.1 Somme de deux applications à valeurs vectorielles

Si $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l$ et $g(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l'$, alors $(f + g)(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l + l'$.

C'est valable pour des limites infinies, à condition d'éviter la forme indéterminée $\infty - \infty$.

La somme de deux applications continues est continue.

4.2 Produit d'une application scalaire par une application vectorielle

Si $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l$ et $g(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} l'$, alors $(fg)(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} ll'$.

C'est valable pour des limites infinies, à condition d'éviter la forme indéterminée $0 \times \infty$.

Le produit d'une application scalaire continue par une application vectorielle continue est continue.

Le \mathbb{K} -espace vectoriel des applications continues d'une partie d'un \mathbb{K} -espace vectoriel normé dans un autre \mathbb{K} -espace vectoriel normé.

La \mathbb{K} -algèbre des applications continues d'une partie d'un \mathbb{K} -espace vectoriel normé dans \mathbb{K} .

5 Cas des fonctions à valeurs dans \mathbb{R} .

Passage à la limite sur une inégalité *large*.

Principe du tunnel : Si $f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R}$ et $\alpha < \ell < \beta$, alors, au voisinage de a , $\alpha < f(x) < \beta$.

Principe des gendarmes.

Théorème de la limite monotone.

Si $f :]m, M[\rightarrow \mathbb{R}$ est monotone, elle possède en tout point une limite à droite et une limite à gauche.

6 Continuité globale

6.1 Cas des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI).

Une fonction continue de I dans \mathbb{R} est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Théorème de la bijection.

6.2 Continuité et ouverts

f est continue si et seulement si les images réciproques des ouverts (resp : fermés) sont des ouverts (resp : fermés) relatifs de \mathcal{D}_f .

6.3 Continuité d'une application linéaire.

$f \in L(E, F)$ est continue si et seulement si elle est bornée sur la boule unité de E , ou encore si et seulement si il existe k tel que $\forall x \in E \quad \|f(x)\| \leq k\|x\|$.

En exercice : le \mathbb{K} -espace vectoriel normé des endomorphismes continus sur E .

6.4 Continuité et compacité

L'image directe d'un compact par une application continue est un compact.

Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est continue avec A compact, alors f est bornée et elle atteint ses bornes,

L'image directe d'un segment de \mathbb{R} par une application continue à valeurs réelles est un segment.

6.5 La continuité uniforme

Caractérisation par ε et caractérisation séquentielle de la continuité uniforme d'une application.

Composée d'applications uniformément continues.

"lispchitzienne" \implies "uniformément continue" \implies "continue", mais les réciproques sont fausses.

Théorème de Heine.

Prévisions pour la semaine prochaine :

o, O, équivalents et développements limités.