DM 20 : corrigé

Répartition des nombres premiers

Ce problème est très largement inspiré du sujet donné au Capes externe en 2008. Ce dernier fournit des notes historiques et des compléments mathématiques que vous pouvez consulter pour parfaire votre culture mathématique.

Partie I : $\pi(n) = O\Big(\dfrac{n}{\ln n}\Big)$.

1°) Selon la formule du binôme de Newton,

$2^{2m+1} = (1+1)^{2m+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k}$,

donc $4^m \times 2 = 2^{2m+1} \geq \dbinom{2m+1}{m} + \dbinom{2m+1}{m+1}$,

or $\dbinom{2m+1}{m} = \dbinom{2m+1}{(2m+1)-m} = \dbinom{2m+1}{m+1}$, donc $4^m \times 2 \geq 2\dbinom{2m+1}{m+1}$, ce qu'il fallait démontrer.

2°) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in \mathbb{P}$ tel que $m+1 < p \leq 2m+1$.

Alors p divise $\displaystyle\prod_{k=m+2}^{2m+1} k = \frac{(2m+1)!}{(m+1)!} = m!\binom{2m+1}{m+1}$, or p est premier avec $m!$, donc d'après le théorème de Gauss, p divise $\dbinom{2m+1}{m+1}$, pour tout $p \in \mathbb{P}$ tel que $m+1 < p \leq 2m+1$, donc d'après le cours d'arithmétique, $\displaystyle\prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ m+1<p\leq 2m+1}} p$ divise le coefficient binomial $\dbinom{2m+1}{m+1}$.

3°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $R(n)$ la propriété $\displaystyle\prod_{p\in\mathbb{P}_n} p \leq 4^n$.

Pour $n = 1$, $\displaystyle\prod_{p\in\mathbb{P}_n} p = 1$, car c'est un produit vide, d'où $R(1)$.

Pour $n = 2$, $\displaystyle\prod_{p\in\mathbb{P}_n} p = 2 \leq 16 = 4^2$, donc $R(2)$ est vraie.

Supposons que $n \geq 2$ et que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $R(k)$ est vrai.
Si $n+1$ est pair, $n+1$ étant différent de 2, il n'est pas premier,
donc $\displaystyle\prod_{p \in \mathbb{P}_{n+1}} p \ = \prod_{p \in \mathbb{P}_n} p \leq 4^n \leq 4^{n+1}$.
Supposons maintenant que $n+1$ est impair. $n+1 \geq 3$, donc il existe $m \geq 1$ tel que $n+1 = 2m+1$. Alors $\displaystyle\prod_{p \in \mathbb{P}_{n+1}} p \ = \Big(\prod_{p \in \mathbb{P} \cap [0, m+1]} p\Big) \times \Big(\prod_{p \in \mathbb{P} \cap [m+2, 2m+1]} p\Big)$.
$m \geq 1$, donc $m+1 \leq 2m = n$.
Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, $\displaystyle\prod_{p \in \mathbb{P} \cap [0, m+1]} p \ \leq 4^{m+1}$.

De plus, d'après la question 2, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\displaystyle\prod_{p \in \mathbb{P} \cap [m+2, 2m+1]} p = k \binom{2m+1}{m+1}$, or $\displaystyle\prod_{p \in \mathbb{P} \cap [m+2, 2m+1]} p$ et $\displaystyle\binom{2m+1}{m+1}$ sont dans $\mathbb{N}^*$, donc $k \in \mathbb{N}^*$. On en déduit que $\displaystyle\prod_{p \in \mathbb{P} \cap [m+2, 2m+1]} p \leq \binom{2m+1}{m+1}$, puis d'après la première question, que $\displaystyle\prod_{p \in \mathbb{P} \cap [m+2, 2m+1]} p \leq 4^m$.
Ainsi, en combinant ces différentes inégalités, on obtient $\displaystyle\prod_{p \in \mathbb{P}_{n+1}} p \ \leq 4^{m+1} \times 4^m = 4^{n+1}$, ce qui démontre $R(n+1)$.
Le principe de récurrence forte permet de conclure.

4°) $\displaystyle e^m = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^k}{k!} > \frac{m^m}{m!}$, donc $\displaystyle m! > \left(\frac{m}{e}\right)^m$.

5°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons p_n le n-ième nombre premier.
$(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite strictement croissante d'entiers non nuls, donc on montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n \geq n$.
Ainsi, $\displaystyle\pi(n)! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times \pi(n) \leq p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_{\pi(n)} = \prod_{p \in \mathbb{P} \cap [0, n]} p \leq 4^n$.
Alors, d'après la question précédente, en prenant le logarithme,
$\pi(n) \ln(\pi(n)) - \pi(n) = \ln \left[\left(\frac{\pi(n)}{e}\right)^{\pi(n)} \right] \leq \ln(\pi(n)!) \leq n \ln 4$.

6°) a) Pour tout $x \in [1, +\infty[$, notons $f(x) = x \ln x - x$.
f est dérivable sur $[1, +\infty[$ et $f'(x) = \ln x \geq 0$. De plus $\{x \in [1, +\infty[\ / \ f'(x) = 0\}$ est réduit au singleton $\{1\}$, donc f est bien strictement croissante.
b) Pour tout $t \geq 0$, $\ln(1+t) \leq t$, car en posant $g(t) = t - \ln(1+t)$, $\displaystyle g'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t} \geq 0$ lorsque $t \in \mathbb{R}_+$, donc g est croissante sur $\mathbb{R}_+$, ce qui prouve que $g(t) \geq g(0) = 0$.
Ainsi $\ln(n_0) = \ln(1 + (n_0 - 1)) \leq n_0 - 1 \leq e n_0$, or $n_0 \geq 3$, donc $\ln(n_0) > 0$,
donc $\displaystyle e \frac{n_0}{\ln n_0} \geq 1$. Alors d'après la stricte croissance de f sur $[1, +\infty[$,

$f\left(e\dfrac{n_0}{\ln n_0}\right) < f(\pi(n_0)) \le n_0 \ln 4$ d'après la question précédente,
or $f\left(e\dfrac{n_0}{\ln n_0}\right) = e\dfrac{n_0}{\ln n_0}(1+\ln n_0 - \ln\ln n_0 - 1)$, donc $\dfrac{e}{\ln n_0}(\ln n_0 - \ln\ln n_0) < \ln 4$.
Ainsi, $1 - \dfrac{\ln\ln n_0}{\ln n_0} < \dfrac{\ln 4}{e}$, puis $\dfrac{e-\ln 4}{e} < \dfrac{\ln\ln n_0}{\ln n_0}$.

c) Posons $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
$g'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$, donc g croît lorsque $x \in]0,e]$ puis décroît pour $x \in [e,+\infty[$. Ainsi g atteint son maximum en e : pour tout $x > 0$, $g(x) \le g(e) = \dfrac{1}{e}$.

d) En particulier, avec $x = \ln n_0 > 0$, $\dfrac{e-\ln 4}{e} < \dfrac{\ln\ln n_0}{\ln n_0} = g(\ln n_0) \le \dfrac{1}{e}$, donc $e < 1 + \ln 4$, ce qui est faux car $e > 2.717 > 2.387 > 1 + \ln(4)$.
Ainsi l'hypothèse sous laquelle on s'est placé est fausse : pour tout $n \ge 3$, $\pi(n) \le e\dfrac{n}{\ln n}$.

Partie II : une formule de Legendre

7°) $p \ge 2$, donc p^k tend vers $+\infty$ lorsque $k \to +\infty$. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p^k > n$, ce qui prouve que $\{k \in \mathbb{N} \ / \ n < p^k\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. D'après le cours, elle possède un minimum, ce qui prouve l'existence de k_0.
Comme $n \ge 2$, il vient $k_0 \ge 1$ et cet entier k_0 vérifie $p^{k_0-1} \le n < p^{k_0}$,
donc $k_0 - 1 \le \dfrac{\ln n}{\ln p} < k_0$. Ainsi $k_0 = 1 + \left\lfloor \dfrac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor$.

8°) $\diamond$ Si p^{k+1} divise a, alors p^k divise également a. Donc $U_{k+1} \subseteq U_k$.
$\diamond$ Si $k < k_0$, $p^k \le n$, donc $p^k \in U_k \setminus U_{k+1}$. Ainsi U_{k+1} est strictement inclus dans U_k.
$\diamond$ Si $U_k \neq \emptyset$, il existe $a \in \{1,\ldots,n\}$ tel que $p^k \mid a$. Alors $p^k \le a \le n$ donc $k < k_0$.
Par contraposée, si $k \ge k_0$, $U_k = \emptyset$.

9°) $\diamond$ Par définition, pour tout $k \in \{0,\ldots,k_0-1\}$, $\Omega_k \subset \{1,\ldots,n\}$,
donc $\displaystyle\bigcup_{0\le k<k_0} \Omega_k \subset \{1,\ldots,n\}$.
Réciproquement, soit $a \in \{1,\ldots,n\}$. Posons $k = v_p(a)$. Alors $p^{v_p(a)} \le a \le n$, donc $v_p(a) < k_0$ et $a \in \Omega_{v_p(a)}$. Ainsi, $a \in \displaystyle\bigcup_{0\le k<k_0} \Omega_k$.
On a donc prouvé que $\displaystyle\bigcup_{0\le k<k_0} \Omega_k = \{1,\ldots,n\}$.
$\diamond$ Soit $k, k' \in \{0,\ldots,k_0-1\}$ et $a \in \Omega_k \cap \Omega_{k'}$. Alors $k = v_p(a) = k'$, donc si $k \neq k'$, Ω_k et $\Omega_{k'}$ sont disjoints.
$\diamond$ Soit $k \in \{0,\ldots,k_0-1\}$. Alors $k = v_p(a)$ si et seulement si p^k est un multiple de a alors que p^{k+1} n'est pas un multiple de a, donc $\Omega_k = U_k \setminus U_{k+1}$. Ainsi, d'après la question précédente, $\Omega_k \neq \emptyset$.

10°) $\diamond$ Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$.

En effet, $ab = \Big(\prod_{q\in\mathbb{P}} q^{v_q(a)}\Big)\times\Big(\prod_{q\in\mathbb{P}} q^{v_q(b)}\Big)$, tous ces produits étant constitués d'un nombre fini de facteurs différents de 1, donc $ab = \prod_{q\in\mathbb{P}} q^{v_q(a)+v_q(b)}$ et on conclut en utilisant l'unicité de la décomposition de ab en produit de nombres premiers.

$\diamond$ Or $n! = \prod_{1\le k\le n} k$, donc $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{n} v_p(k)$. De plus la famille $(\Omega_h)_{h\in\mathbb{N}}$ forme une partition de $\{1,\dots,n\}$, donc $v_p(n!) = \sum_{h=0}^{+\infty}\sum_{k\in\Omega_h} v_p(k) = \sum_{h=0}^{+\infty} h|\Omega_h|$, ces sommes étant finies car pour $h\ge k_0$, $\Omega_h = U_h\setminus U_{h+1} = \emptyset$.

$\diamond$ Soit $k\in\mathbb{N}$: les éléments de U_k sont $p^k, 2p^k, \dots, jp^k, \dots$ avec $jp^k\le n$, c'est-à-dire $j \le \left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor$. Donc $|U_k| = \left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor$.

Or $\Omega_k = U_k\setminus U_{k+1}$ et $U_{k+1}\subset U_k$, donc $|\Omega_k| = \left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}}\right\rfloor$.

$\diamond$ On en déduit :

$$\begin{aligned} v_p(n!) &= \sum_{k=0}^{k_0-1}\left(k\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor - k\left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}}\right\rfloor\right)\\ &= \sum_{k=0}^{k_0-1}\left(k\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor - (k+1)\left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}}\right\rfloor\right) + \sum_{k=0}^{k_0-1}\left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}}\right\rfloor\\ &= 0 - 0 + \sum_{k\ge 0}\left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}}\right\rfloor \text{ (par téléscopage)}\\ &= \sum_{k\ge 1}\lfloor \frac{n}{p^k}\rfloor \end{aligned}$$

Partie III : un théorème de Mertens

11°) On sait que $x-1 < \lfloor x\rfloor \le x$. Donc, par la formule de Legendre,
$v_p(n!) \le \sum_{k\ge 1}\frac{n}{p^k} = \frac{n}{p}\,\frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{n}{p-1} = \frac{n}{p} + (\frac{n}{p-1} - \frac{n}{p}) = \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}$.
De plus $v_p(n!) = \sum_{k\ge 1}\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor \ge \left\lfloor \frac{n}{p}\right\rfloor > \frac{n}{p} - 1$.

12°) $n! = \prod_{k=1}^{n} k$, donc les nombres premiers qui divisent $n!$ sont des diviseurs d'un $k\in\{1,\dots,n\}$, donc sont inférieurs à n. Ainsi, $n! = \prod_{p\in\mathbb{P}_n} p^{v_p(n!)}$, puis en passant au log, $\ln(n!) = \sum_{p\in\mathbb{P}_n} v_p(n!)\ln p$.

L'encadrement de la question précédente donne alors :

$$n\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{\ln p}{p}-\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\ln p<\ln n!\leq n\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{\ln p}{p}+n\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{\ln p}{p(p-1)}.$$

13°) Soit $r\in\mathbb{N}^*$.

$$\sum_{m=2^{r-1}+1}^{2^r}\frac{\ln m}{m(m-1)}\leq\sum_{m=2^{r-1}+1}^{2^r}\ln(2^r)\frac{1}{m(m-1)}=\ln(2^r)\sum_{m=2^{r-1}+1}^{2^r}\Big(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\Big),\text{ donc}$$

$$\sum_{m=2^{r-1}+1}^{2^r}\frac{\ln m}{m(m-1)}\leq r\ln 2\Big(\frac{1}{2^{r-1}}-\frac{1}{2^r}\Big)=\frac{r}{2^r}\ln 2.$$

14°) Fixons $N\in\mathbb{N}^*$: Pour tout $x\in]0,1[$,

$$\sum_{r=1}^{N}rx^{r-1}=\frac{d}{dx}\Big(\sum_{r=0}^{N}x^r\Big)=\frac{d}{dx}\Big(\frac{x^{N+1}-1}{x-1}\Big)=\frac{(N+1)x^N(x-1)-(x^{N+1}-1)}{(x-1)^2},\text{ ainsi}$$

d'après les croissances comparées, $\sum_{r=1}^{N}rx^{r-1}$ tend vers $\frac{1}{(x-1)^2}$ lorsque N tend vers $+\infty$ à x fixé.

Ceci prouve que la série $\sum_{r\geq 1}rx^{r-1}$ converge et que $\sum_{r=1}^{+\infty}rx^{r-1}=\frac{1}{(x-1)^2}$.

15°) Soit $M\in\mathbb{N}$ avec $M\geq 2$.

D'après la question 7 avec $p=2$, il existe $R\in\mathbb{N}^*$ tel que $M\leq 2^R$.

Pour tout $m\geq 2$, $\frac{\ln m}{m(m-1)}\geq 0$,

donc $\sum_{m=2}^{M}\frac{\ln m}{m(m-1)}\leq\sum_{m=2}^{2^R}\frac{\ln m}{m(m-1)}=\sum_{r=1}^{R}\sum_{m=2^{r-1}+1}^{2^r}\frac{\ln m}{m(m-1)}$.

Ainsi, d'après la question 13, $\sum_{m=2}^{M}\frac{\ln m}{m(m-1)}\leq\sum_{r=1}^{R}\frac{r}{2^r}\ln 2$.

Or d'après la question précédente avec $x=\frac{1}{2}$, la série $\sum_{r\geq 1}\frac{r}{2^{r-1}}$ converge et $\sum_{r=1}^{+\infty}\frac{r}{2^{r-1}}=4$,

donc $\sum_{m=2}^{M}\frac{\ln m}{m(m-1)}\leq 2\ln 2=\ln 4$.

La suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_{m\geq 2}\frac{\ln m}{m(m-1)}$ est ainsi majorée, donc cette série converge et $\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{\ln m}{m(m-1)}\leq\ln 4$.

16°) **a)** Soit $u\in[0,1]$. Soit $N\in\mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}\frac{u^k}{k}=\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k-1}u^k\int_0^1 t^{k-1}\,dt=\int_0^1\sum_{k=0}^{N-1}(-t)^k u^{k+1}\,dt=\int_0^1 u\frac{1-(-ut)^N}{1+ut}\,dt.$$

16.b) On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}\frac{u^k}{k} = [\ln(1+ut)]_{t=0}^{t=1} - R_N$, où $\displaystyle R_N = \int_0^1 u\frac{(-ut)^N}{1+ut}\,dt$.

Ainsi, $\displaystyle\ln(1+u) = R_N + \sum_{k=1}^{N}(-1)^{k+1}\frac{u^k}{k}$. Mais par inégalité triangulaire,

$\displaystyle|R_N| \le u^{N+1}\int_0^1 \frac{t^N}{1+ut}\,dt \le \int_0^1 t^N\,dt = \frac{1}{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc la série $\displaystyle\sum_{k\ge1}(-1)^{k+1}\frac{u^k}{k}$ est convergente et $\displaystyle\ln(1+u) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{u^k}{k}$.

16.c) Soit $u \in [0,1]$. La suite $\displaystyle\left(\frac{u^k}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et tend vers 0, donc on peut appliquer le théorème des séries spéciales alternées. On en déduit que $\displaystyle\ln(1+u) - u + \frac{u^2}{2} = \sum_{k=3}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{u^k}{k}$ est du signe de son premier terme, donc est positive, et de même que $\ln(1+u) - u$ est négative. Ainsi, $\displaystyle u - \frac{u^2}{2} \le \ln(1+u) \le u$.

16.d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On applique le résultat précédent avec $u = \frac{1}{n} \in [0,1]$. Ainsi, $\displaystyle\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \le \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{n}$, donc $\displaystyle 1 - \frac{1}{2n} \le n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \le 1$
et $\displaystyle\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \ge \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \ge \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$.

17°) Pour tout $n \ge 2$, posons $\displaystyle\theta_n = \frac{1}{\ln n}(\ln n! - n\ln n + n - 1)$. Nous allons montrer par récurrence que $\theta_n \in [0,1]$.

◇ Pour $n = 2$, $\displaystyle\theta_2 = \frac{\ln 2 - 2\ln 2 + 1}{\ln 2} = -1 + \frac{1}{\ln 2}$,
donc $\displaystyle\theta_2 \in [0,1] \iff 1 \le \frac{1}{\ln 2} \le 2 \iff \frac{1}{2} \le \ln 2 \le 1$, ce qui est vrai.

◇ Pour $n \ge 2$, supposons que $\theta_n \in [0,1]$.
On a $\ln(n+1)! = \ln(n+1) + \ln n! = \ln(n+1) + n\ln n - n + 1 + \theta_n \ln n$
et $\ln(n+1)! = (n+1)\ln(n+1) - n + \theta_{n+1}\ln(n+1)$, donc
$\theta_{n+1}\ln(n+1) = \ln(n+1)! - (n+1)\ln(n+1) + n = -n\ln(n+1) + n\ln n + 1 + \theta_n \ln n$. Ainsi,
$\displaystyle\theta_{n+1} = \frac{1}{\ln(n+1)}(-n(\ln(n+1) - \ln n) + 1 + \theta_n \ln n) = \frac{1}{\ln(n+1)}(1 - n\ln(1+\frac{1}{n}) + \theta_n \ln n)$.
$n\ln(1+\frac{1}{n}) \le 1$, donc $\displaystyle\theta_{n+1} \ge \frac{1}{\ln(n+1)}(\theta_n \ln n) \ge 0$.
De plus, $\displaystyle\theta_{n+1} \le \frac{1}{\ln(n+1)}(1 - (1 - \frac{1}{2n}) + \theta_n \ln n) \le \frac{1}{\ln(n+1)}(\frac{1}{2n} + \ln n)$, car $\theta_n \le 1$.
Or $\displaystyle\frac{1}{\ln(n+1)}(\frac{1}{2n} + \ln n) \le 1 \iff \frac{1}{2n} + \ln n \le \ln(n+1) \iff \frac{1}{2n} \le \ln(1+\frac{1}{n})$, ce qui est vrai, donc $\theta_{n+1} \le 1$.
On a bien montré que $\theta_{n+1} \in [0,1]$.

18°) D'après la question 12,
$$\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{\ln p}{p}\geq\frac{\ln n!}{n}-\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{\ln p}{p(p-1)}=\ln n-1+\frac{1}{n}+\theta_n\frac{\ln n}{n}-\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{\ln p}{p(p-1)},$$
or $\mathbb{P}_n\subset\mathbb{N}\cap[2,n]$, donc $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{\ln p}{p(p-1)}\leq\sum_{m=2}^{n}\frac{\ln m}{m(m-1)}\leq\ln 4$, d'après la question 15,

donc $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{\ln p}{p}\geq\ln n-1-\ln 4+\frac{1}{n}+\theta_n\frac{\ln n}{n}\geq\ln n-1-\ln 4$ car $\theta_n\geq 0$.

19°) De même d'après la question 12, $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{\ln p}{p}\leq\frac{\ln n!}{n}+\frac{1}{n}\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\ln p$, or d'après la question 3, $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\ln p\leq\ln(4^n)=n\ln 4$, donc
$$\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{\ln p}{p}\leq\ln n-1+\frac{1}{n}+\theta_n\frac{\ln n}{n}+\frac{1}{n}\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\ln p\leq\ln n+\ln 4+\frac{1}{n}+\theta_n\frac{\ln n}{n}-1.$$
Par ailleurs, on a vu au 6.b que $\ln n=\ln(1+(n-1))\leq n-1$,
donc $\displaystyle\frac{1}{n}+\theta_n\frac{\ln n}{n}-1\leq\frac{\ln n-(n-1)}{n}\leq 0$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{\ln p}{p}\leq\ln n+\ln 4$. En conclusion,

$\displaystyle-(1+\ln 4)\leq\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{\ln p}{p}-\ln n\leq\ln 4$, ce qui montre que $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{\ln p}{p}=\ln n+O(1)$.

Partie IV : un théorème de Tchebychev

20°)

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=\frac{1}{n\ln n}-\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)\\&=\frac{1}{n\ln n}-\ln\left(1+\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\right)\\&=\frac{1}{n\ln n}-\ln\left(1+\frac{1}{n\ln n}-\frac{1}{2n^2\ln n}+o\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right)\end{aligned}$$
Posons $\displaystyle t=\frac{1}{n\ln n}-\frac{1}{2n^2\ln n}+o\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)$. On sait que $\ln(1+t)=t+O(t^2)$, or $\displaystyle t^2\sim\frac{1}{n^2\ln^2 n}$, donc $\displaystyle O(t^2)=o(\frac{1}{n^2\ln n})$. Ainsi, $\displaystyle u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2n^2\ln n}+o\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)$.
La série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ est convergente car $\displaystyle u_{n+1}-u_n=o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$, donc, il existe $L\in\mathbb{R}$ tel que, lorsque N tend vers $+\infty$ $\displaystyle u_N-u_2=\sum_{n=2}^{N-1}(u_{n+1}-u_n)\to L$, donc il existe $\ell\in\mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k\ln k}=\ln\ln n+\ell+o(1)$.

21°)

◇ Il s'agit de la transformation d'Abel :

on a $a_n = A_n - A_{n-1}$, donc, en posant $A_0 = 0$, donc

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = \sum_{n=1}^{N}(A_n - A_{n-1})b_n = \sum_{n=1}^{N} A_n b_n - \sum_{n=0}^{N-1} A_n b_{n+1} = A_N b_N + \sum_{n=1}^{N-1} A_n(b_n - b_{n+1}).$$

◇ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, convenons que $\delta(n)$ vaut 1 lorsque $n \in \mathbb{P}$ et vaut 0 sinon.

Posons, pour $n \geq 2$, $a_n = \delta(n)\dfrac{\ln n}{n}$ et $b_n = \dfrac{1}{\ln n}$. Pour $n = 1$, on posera $a_1 = b_1 = 0$.

Alors $\displaystyle\sum_{p \in \mathbb{P}_n} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n} \delta(k)\frac{\ln k}{k} \times \frac{1}{\ln k}$, donc par transformation d'Abel,

$$\begin{aligned}
\sum_{p \in \mathbb{P}_n} \frac{1}{p} &= \frac{1}{\ln n}\sum_{k=2}^{n}\left(\delta(k)\frac{\ln k}{k}\right) + \sum_{k=2}^{n-1}\psi(k)\left(\frac{1}{\ln k} - \frac{1}{\ln(k+1)}\right) \\
&= \frac{\psi(n)}{\ln n} + \sum_{k=2}^{n-1}\psi(k)\left(\frac{\ln(1+1/k)}{(\ln k)(\ln(k+1))}\right).
\end{aligned}$$

22°) $\displaystyle\psi(k)\frac{\ln(1+1/k)}{\ln k \ln(k+1)} = \psi(k)\frac{\frac{1}{k} + O(1/k^2)}{\ln^2(k)(1+O(1/k))}$,

or $\dfrac{1}{1+t} = 1 + O(t)$, donc $\dfrac{\frac{1}{k} + O(1/k^2)}{1+O(1/k)} = \dfrac{1}{k}(1+O(\dfrac{1}{k}))(1+O(\dfrac{1}{k})) = \dfrac{1}{k}(1+O(\dfrac{1}{k}))$,

donc $\psi(k)\dfrac{\ln(1+1/k)}{\ln k \ln(k+1)} = \dfrac{\psi(k)}{\ln^2 k} \times \left(\dfrac{1}{k} + O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)\right)$. Alors, en utilisant la question 19,

$$\psi(k)\frac{\ln(1+1/k)}{\ln k \ln(k+1)} = \frac{\ln k + O(1)}{\ln^2 k} \times \left(\frac{1}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = \frac{1}{k \ln k} + O(\frac{1}{k \ln^2 k}),$$

car $\dfrac{1}{k^2 \ln k} = O(\dfrac{1}{k \ln^2 k})$, d'après les croissances comparées.

◇ En posant $u_k = \dfrac{\ln(1+1/k)}{\ln k \ln(k+1)}$, on a donc $\displaystyle\sum_{p \in \mathbb{P}_n} \frac{1}{p} = \sum_{k=2}^{n-1}\psi(k)u(k) + \frac{\psi(n)}{\ln n}$, avec

$\psi(k)u(k) = \dfrac{1}{k \ln k} + v_k$, où v_k est le terme général d'une série absolument convergente :

en effet, si l'on pose $g(t) = \dfrac{1}{t \ln^2 t}$ pour $t \in [2, +\infty[$, la fonction g est positive, continue et décroissante, donc d'après le théorème de comparaison entre séries et intégrales, la série $\displaystyle\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k \ln^2 k}$ a même nature que la suite $\displaystyle\left(\int_2^n \frac{dt}{t \ln^2 t}\right)_{n \geq 2}$, laquelle converge car

$\displaystyle\int_2^n \frac{dt}{t \ln^2 t} = \Big[-\frac{1}{\ln t}\Big]_2^n$.

En notant V_n sa somme partielle d'ordre n, il vient

$$\sum_{k=2}^{n-1}\psi(k)u_k = \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k \ln k} + V_{n-1} = \ln\ln n + \ell + o(1) + V_{n-1} = \ln\ln n + \ell' + o(1).$$

De plus, $\dfrac{\psi(n)}{\ln n} = \dfrac{\ln n + O(1)}{\ln n} = 1 + o(1)$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$

tel que $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{1}{p}=\ln\ln n+\lambda+o(1)$.

23°) $\diamond$ $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{1}{p}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta(k)}{k}$, et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\delta(k)=\pi(n)$, donc par transformation d'Abel,
$\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{1}{p}=\frac{\pi(n)}{n}+\sum_{k=1}^{n-1}\pi(k)(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})=\frac{\pi(n)}{n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\pi(k)}{k(k+1)}$.

$\diamond$ Supposons que $\pi(n)\sim c\dfrac{n}{\ln n}$.

Pour tout $n\geq 2$, $\pi(n)>0$, donc à partir d'un certain rang, $c\dfrac{n}{\ln n}>0$, donc $c>0$.

On a $\dfrac{\pi(n)}{n(n+1)}\sim\dfrac{c}{n\ln n}$, or la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{c}{n\ln n}$ est positive et divergente, car cette fois, la suite $\displaystyle\Big(\int_2^n\frac{dt}{t\ln t}\Big)_{n\geq 2}=\Big(\Big[\ln\ln t\Big]_2^n\Big)$ diverge, donc on peut appliquer le théorème de sommation des équivalents :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\pi(k)}{k(k+1)}\sim c\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\ln k}=c\ln\ln n+O(1)\sim c\ln\ln n$. Mais d'après les questions 22 et 6, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\pi(k)}{k(k+1)}=\sum_{p\in\mathbb{P}_n}\frac{1}{p}-\frac{\pi(n)}{n}=\ln\ln n+O(1)+O(\frac{n}{\ln n}\,\frac{1}{n})\sim\ln\ln n$, donc $c=1$.