DS 3 : un corrigé

Bases de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Le barème comporte un total de 60 points.

Partie 1 : familles libres de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. (sur 19 points)

1°) (1 point) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1+(-1)^n \neq 0$ si et seulement si n est pair, or l'ensemble des nombres pairs est infini, donc la famille $(1+(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas presque nulle, ce n'est pas un élément de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$.

2°) (1 point) Supposons que I est un ensemble fini. Soit $a = (a_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$. Alors $\{i \in I \ / \ \alpha_i \neq 0\}$ est une partie de I, donc est fini. Ainsi, $a \in \mathbb{R}^{(I)}$. Ainsi, lorsque I est fini, $\mathbb{R}^{(I)} = \mathbb{R}^I$.
Pour la réciproque, établissons la contraposée : supposons que I est un ensemble infini. Pour tout $i \in I$, posons $\alpha_i = 1$. Alors la famille $a = (\alpha_i)_{i\in I}$ est dans $\mathbb{R}^I$, mais elle n'est pas presque nulle, donc $\mathbb{R}^I \neq \mathbb{R}^{(I)}$.
En conclusion, la CNS cherchée est que I soit un ensemble fini.

3°) (3 points)
$\diamond$ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $\alpha_k = \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor$. Notons $a = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. $\alpha_k = 0 \Longleftrightarrow \frac{n}{2^k} < 1 \Longleftrightarrow \ln n < k \ln 2 \Longleftrightarrow k > \frac{\ln n}{\ln 2}$,
donc $\alpha_k \neq 0 \Longleftrightarrow k \le \frac{\ln n}{\ln 2} \Longleftrightarrow k \le \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor$.
Ainsi a est une famille presque nulle de réels et g est correctement défini d'après l'énoncé.
$\diamond$ En tant que composée de fonctions croissantes, pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est croissante sur $[0,1]$, puis en tant que somme de fonctions croissantes, g est croissante sur $[0,1]$, donc g possède un max sur $[0,1]$, égal à $g(1)$.
De plus $g(1) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor e \le e \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\ln n}{\ln 2} \rfloor} \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor$, or pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor \le \frac{n}{2^k} \le n$, donc $g(1) \le en\Big(\left\lfloor \frac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor + 1\Big)$. Ceci prouve que, pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) \le en\Big(\frac{\ln n}{\ln 2} + 1\Big)$.

4°) (1 point) Soit $x \in \mathbb{R}$. $2\text{ch}x = e^x + e^{-x}$ et $2\text{sh}x = e^x - e^{-x}$, donc $\text{ch}x + \text{sh}x = \exp(x)$. Ceci montre que $\exp - \text{ch} - \text{sh} = 0$, donc $\{\exp, \text{ch}, \text{sh}\}$ est liée.

5°) (1 point)

$$\begin{aligned}
A \text{ est libre} &\iff \neg\Big[\exists (a_f)_{f\in A} \in \mathbb{R}^{(A)}, (\exists f \in A,\ \alpha_f \neq 0) \wedge \Big(\sum_{f\in A} \alpha_f f = 0\Big)\Big] \\
&\iff \forall (\alpha_f)_{f\in A} \in \mathbb{R}^{(A)},\ \neg\Big[(\exists f \in A,\ \alpha_f \neq 0) \wedge \Big(\sum_{f\in A} \alpha_f f = 0\Big)\Big] \\
&\iff \forall (\alpha_f)_{f\in A} \in \mathbb{R}^{(A)},\ (\forall f \in A,\ \alpha_f = 0) \vee \neg\Big(\sum_{f\in A} \alpha_f f = 0\Big) \\
&\iff \Big[\forall (\alpha_f)_{f\in A} \in \mathbb{R}^{(A)},\ \sum_{f\in A} \alpha_f f = 0 \Longrightarrow (\forall f \in A,\ \alpha_f = 0)\Big],
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

6°) (2 points) Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\text{ch} + \beta\text{sh} + \gamma\text{th} = 0$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\alpha\text{ch}(x) + \beta\text{sh}(x) + \gamma\text{th}(x) = 0$.
En particulier, pour $x = 0$, on obtient $\alpha = 0$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\beta\text{sh}(x) + \gamma\text{th}(x) = 0$, donc en simplifiant par $\text{sh}(x)$ qui est non nul pour $x \in \mathbb{R}^*$, on en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\beta + \gamma\dfrac{1}{\text{ch}x} = 0$.
Si l'on suppose que $\gamma \neq 0$, on en déduit que l'application ch est constante sur $\mathbb{R}^*$, donc que sa dérivée, égale à sh, est nulle sur $\mathbb{R}^*$, ce qui est faux. Ainsi, $\gamma = 0$, puis $\beta = 0$.
Ceci prouve que $\{\text{ch}, \text{sh}, \text{th}\}$ est libre.

7°) (3 points) Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N}^*)}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \sin(x^n) = 0$.
Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\alpha_n \neq 0$. Alors $\{n \in \mathbb{N}^* \ /\ \alpha_n \neq 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc elle possède un minimum, que l'on notera m. Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, (1) : $\displaystyle\sum_{n\geq m} \alpha_n \frac{\sin(x^n)}{x^m} = 0$ et $\alpha_m \neq 0$.
$\dfrac{\sin t}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $x^m \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, car $m \geq 1$, donc par composition des limites, $\dfrac{\sin x^m}{x^m} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n > m$, $\dfrac{\sin(x^n)}{x^m} = x^{n-m}\dfrac{\sin(x^n)}{x^n} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, si l'on fait tendre x vers 0 dans la relation (1), on obtient que $\alpha_m = 0$, ce qui est faux. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

8°) (4 points) $\diamond$ Soit $f, g \in A$ avec $f \neq g$.
Premier cas : Il existe $k, h \in \mathbb{N}^*$ tels que $f = c_k$ et $g = c_h$, avec $k \neq h$.
$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\ dx = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(k-h)x + \cos(k+h)x}{2}\ dx$ et $k - h \neq 0$,
donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\ dx = \frac{1}{2}\Big[\frac{\sin(k-h)x}{k-h} + \frac{\sin(k+h)x}{k+h}\Big]_0^{2\pi} = 0$,
Second cas : Il existe $k, h \in \mathbb{N}^*$ tels que $f = s_k$ et $g = s_h$, avec $k \neq h$.
$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\ dx = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(k-h)x - \cos(k+h)x}{2}\ dx$,

donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\ dx = \frac{1}{2}\Big[\frac{\sin(k-h)x}{k-h} - \frac{\sin(k+h)x}{k+h}\Big]_0^{2\pi} = 0.$
Troisième cas : Il existe $k, h \in \mathbb{N}^*$ tels que $f = c_k$ et $g = s_h$. fg étant 2π-périodique, d'après le cours, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\sin(hx)\ dx = 0$ par imparité. On procède de même lorsqu'il existe $k, h \in \mathbb{N}^*$ tels que $f = s_k$ et $g = c_h$.
En conclusion, pour tout $f, g \in A$ avec $f \neq g$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\ dx = 0.$

◇ Soit $(\alpha_f)_{f\in A} \in \mathbb{R}^{(A)}$ telle que $\displaystyle\sum_{f\in A} \alpha_f f = 0$. Soit $g \in A$.

$$\begin{aligned}
0 = & \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{f\in A} \alpha_f f(x)\Big) g(x)\ dx \\
= & \int_0^{2\pi} \Big(\sum_{f\in A, \alpha_f\neq 0} \alpha_f f(x)\Big) g(x)\ dx \\
= & \sum_{f\in A, \alpha_f\neq 0} \alpha_f \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\ dx \text{ (car c'est une somme finie)},
\end{aligned}$$

donc si $\alpha_g \neq 0$, alors dans la somme précédente, tous les termes sont nuls sauf celui d'indice g. Ainsi, $0 = \alpha_g \displaystyle\int_0^{2\pi} g(x)^2\ dx$. Alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} g(x)^2\ dx = 0$, or $x \longmapsto g^2(x)$ est continue et positive, donc d'après un théorème du cours, elle est identiquement nulle sur $[0, 2\pi]$, ce qui est faux car $g \in A$. Donc $\alpha_g = 0$, pour tout $g \in A$, ce qui prouve que A est libre.

9°) (3 points) ◇ Pour tout $f \in B$, f est d'après le cours de classe C^∞, en tant que composée d'applications de classe C^∞, donc pour tout $(\alpha_f)_{f\in B} \in \mathbb{R}^{(B)}$, $\displaystyle\sum_{f\in B} \alpha_f f$ est aussi de classe C^∞, en tant que somme finie d'applications de classe C^∞. Ceci montre que $\mathrm{Vect}(B)$ est inclus dans l'ensemble des applications de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
◇ Pour tout $f \in B$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on remarque que $|f(x)| \leq 1$, donc pour tout $(\alpha_f)_{f\in B} \in \mathbb{R}^{(B)}$, si l'on note $g = \displaystyle\sum_{f\in B} \alpha_f$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|g(x)| \leq \displaystyle\sum_{f\in B} |\alpha_f|$. Ainsi, tous les éléments de $\mathrm{Vect}(B)$ sont des applications bornées sur $\mathbb{R}$. L'application $x \longmapsto x$, par exemple, est de classe C^∞, mais n'est pas bornée, donc l'inclusion précédente est stricte.

Partie II : applications du lemme de Zorn (21 points)

10°) (2 points) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $R(n)$ l'assertion : pour toute partie finie de E de cardinal n, totalement ordonnée, cette partie possède un maximum. Raisonnons par récurrence.
Pour $n = 1$, si A est une partie de E de cardinal 1, c'est un singleton de la forme $\{a\}$ avec $a \in E$. Il est clair que a est le maximum de A.

Pour $n \geq 1$, supposons $R(n)$ et démontrons $R(n+1)$.
Soit A une partie de E de cardinal $n+1$, totalement ordonnée.
$n+1 \geq 1$, donc il existe $a \in A$. $A \setminus \{a\}$ est de cardinal n, donc d'après $R(n)$, $A \setminus \{a\}$ possède un maximum, noté m.
A est totalement ordonné, donc a et m sont comparables.
Si $a \leq m$, alors m est le maximum de A.
Si $m \leq a$, alors a est le maximum de A.
Dans tous les cas, A possède un maximum, ce qui prouve $R(n+1)$.

11°) (1 point) Soit $c \in A^{<a}$ et $x \in A$ tel que $x \leq c$. On a $x \leq c \leq a$, donc $x \leq a$. De plus si $x = a$, alors $a \leq c \leq a$, donc $c = a$ ce qui est faux. Ainsi $x \in A^{<a}$, ce qu'il fallait démontrer.

12°) (1 point) Soit $a \in A$.
$A \subset B$, donc $A^{<a} = \{x \in A \ / \ x < a\} \subset \{x \in B \ / \ x < a\} = B^{<a}$.
De plus, si $x \in B^{<a}$, on a $x \leq a$, $a \in A$ et A est un crible de B, donc $x \in A$. On a toujours $x < a$, donc $x \in A^{<a}$. Ainsi, $B^{<a} \subset A^{<a}$.
En conclusion, on a montré que $A^{<a} = B^{<a}$.

13°) (4 points) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, notons $]-\infty, n] = \{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \leq n\}$. Il est clair que $]-\infty, n]$ est un crible sur $\mathbb{Z}$: en effet, pour tout $c \in]-\infty, n]$, pour tout $y \in \mathbb{Z}$ tel que $y \leq c$, par transitivité de $\leq$, on obtient que $y \leq n$, donc que $y \in]-\infty, n]$. De plus, $\mathbb{Z}$ et $\emptyset$ sont des cribles sur $\mathbb{Z}$.
Réciproquement, soit C un crible sur $\mathbb{Z}$, différent de $\mathbb{Z}$ et de $\emptyset$.
Il existe $d \in \mathbb{Z} \setminus C$.
Soit $c \in C$. Si $d \leq c$, comme $C \lhd \mathbb{Z}$, alors $d \in C$, ce qui est faux. Ainsi $c < d$, pour tout $c \in C$, donc C est majoré. De plus C est non vide, donc il possède un maximum que l'on notera n.
Pour tout $c \in C$, par définition du maximum, $c \leq n$, donc $c \in]-\infty, n]$. Réciproquement, si $c \in]-\infty, n]$, alors $c \leq n$ et $n \in C$, or $C \lhd \mathbb{Z}$, donc $c \in C$. On en déduit bien que $C =]-\infty, n]$, où $n \in \mathbb{Z}$.

14°) (2 points)
$\diamond$ Soit $E \in \mathcal{E}$ et $A \in \mathcal{P}(X)$ tel que $A \subset E$.
Soit B une partie finie de A. Alors B est une partie finie de E, or $E \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{E}$ est de caractère fini, donc $B \in \mathcal{E}$. Ainsi, toute partie finie de A appartient à $\mathcal{E}$, donc $A \in \mathcal{E}$.
Ceci prouve que $\mathcal{E}$ est un crible de $\mathcal{P}(X)$ pour la relation d'inclusion.
$\diamond$ $\mathcal{E}$ est non vide par hypothèse, donc il existe $A \in \mathcal{E}$, or $\emptyset \subset A$ et $\mathcal{E} \lhd \mathcal{P}(X)$, donc $\emptyset \in \mathcal{E}$.

15°) (4 points) Soit $\mathcal{A}$ une partie totalement ordonnée de $\mathcal{E}$. Posons $M = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Dans $\mathcal{P}(X)$, pour la relation d'inclusion, M est un majorant de $\mathcal{A}$. Il suffit donc de montrer que $M \in \mathcal{E}$, mais $\mathcal{E}$ est de caractère fini, donc il suffit de montrer que, pour toute partie finie B de M, $B \in \mathcal{E}$.

Soit B une partie finie de M. Si $B = \emptyset$, d'après la question précédente, $B \in \mathcal{E}$. Supposons maintenant que B est non vide.
Pour tout $b \in B$, il existe $A_b \in \mathcal{A}$ telle que $b \in A_b$.
$\mathcal{A}$ est totalement ordonnée, donc $\{A_b \ / \ b \in B\}$ est une partie finie non vide et totalement ordonnée. D'après la question 10, elle possède un maximum, que l'on notera A'. Alors, pour tout $b \in B$, $b \in A_b \subset A'$, donc $B \subset A'$. Or $A' \in \mathcal{A} \subset \mathcal{E}$. Alors d'après la question précédente, $B \in \mathcal{E}$, ce qu'il fallait démontrer.

16°) (3 points) Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des parties libres de E. En partie I, on a vu des exemples de parties libres, donc $\mathcal{E}$ est bien une partie non vide de $\mathcal{P}(E)$.
Soit $A \in \mathcal{E}$. Soit B une partie finie de A. Montrons que B est libre.
Soit $(\alpha_f)_{f\in B} \in \mathbb{R}^{(B)} = \mathbb{R}^B$ (d'après la question 2) tel que $\sum\limits_{f\in B} \alpha_f f = 0$.
Pour tout $f \in A \setminus B$, posons $\alpha_f = 0$. Alors $(a_f)_{f\in A} \in \mathbb{R}^{(A)}$ et $\sum\limits_{f\in A} \alpha_f f = \sum\limits_{f\in B} \alpha_f f = 0$, or A est libre, donc $\alpha_f = 0$, pour tout $f \in A$. En particulier, $\alpha_f = 0$ pour tout $f \in B$, donc B est libre. Ainsi, si $A \in \mathcal{E}$, toute partie finie de A appartient à $\mathcal{E}$.
Réciproquement, soit $A \in \mathcal{P}(E)$ telle que toute partie finie de A appartient à $\mathcal{E}$. Montrons que A est libre.
Soit $(\alpha_f)_{f\in A} \in \mathbb{R}^{(A)}$ telle que $\sum\limits_{f\in A} \alpha_f f = 0$. Notons $B = \{f \in A \ / \ \alpha_f \neq 0\}$. Alors B est finie, donc B est libre, et $0 = \sum\limits_{f\in A} \alpha_f f = \sum\limits_{f\in B} \alpha_f f$, donc pour tout $f \in B$, $\alpha_f = 0$. Cela signifie que $B = \emptyset$, c'est-à-dire que $\alpha_f = 0$ pour tout $f \in A$, ce qu'il fallait démontrer.

17°) (4 points) Reprenons les notations de la question précédente. $\mathcal{E}$ est de caractère fini, donc d'après la question 16, $\mathcal{E}$ est inductif pour la relation d'inclusion. Alors d'après le lemme de Zorn, $\mathcal{E}$ possède un élément maximal, que l'on notera A. Montrons que A est une base.
Déjà, $A \in \mathcal{E}$, donc A est libre.
Raisonnons par l'absurde en supposant que $\mathrm{Vect}(A) \neq E$. Alors il existe $f_0 \in E$ tel que $f_0 \notin \mathrm{Vect}(A)$.
Posons $A' = A \cup \{f_0\}$. Il suffit de montrer que A' est libre, car dans ce cas, $A' \in \mathcal{E}$, $A \subset A'$ et $A \neq A'$, ce qui contredit la maximalité de A et constitue une contradiction.
Soit $(\alpha_f)_{f\in A'} \in \mathbb{R}^{(A')}$ telle que $\sum\limits_{f\in A'} \alpha_f f = 0$. Alors $0 = \alpha_{f_0} f_0 + \sum\limits_{f\in A} \alpha_f f$.
Si $\alpha_{f_0} \neq 0$, alors $f_0 = \sum\limits_{f\in A} \Big(-\dfrac{\alpha_f}{\alpha_{f_0}} \Big) f$, donc $f_0 \in \mathrm{Vect}(A)$, ce qui est faux. Donc $\alpha_{f_0} = 0$, puis $\sum\limits_{f\in A} \alpha_f f = 0$, or A est libre, donc pour tout $f \in A$, $\alpha_f = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Partie III : théorème de Zermelo. (sur 20 points)

18°) (2 points) Notons (1) la propriété "E est bien ordonnné" et (2) la propriété "$\leq$ est un ordre total et il n'existe aucune suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E strictement décroissante".
$\diamond$ (1) $\Longrightarrow$ (2) :
Soit $(a, b) \in E^2$. L'ensemble $\{a, b\}$ est non vide, donc il possède un minimum. Si ce minimum vaut a, alors $a \leq b$. Si ce minimum vaut b, alors $b \leq a$. Ainsi, a et b sont comparables.
Supposons qu'il existe (x_n) strictement décroissante. $\{x_n/n \in \mathbb{N}\}$ est non vide, donc il possède un minimum, noté x_m où $m \in \mathbb{N}$. Alors $x_{m+1} \geq x_m$ par définition de ce minimum, mais $x_{m+1} < x_m$ car la suite décroît strictement. C'est impossible, donc (2) est vérifiée.
$\diamond$ (2) $\Longrightarrow$ (1) : démontrons la contraposée. On suppose donc $\neg(1)$, c'est-à-dire qu'il existe une partie A non vide de E ne possédant pas de minimum.
Pour démontrer $\neg(2)$, supposons que $\leq$ est totale et construisons une suite strictement décroissante.
A est non vide, donc il existe $x_0 \in A$.
A ne possède pas de minimum, donc x_0 n'est pas un minimum de A. Mais l'ordre est total, donc il existe $x_1 \in A$ tel que $x_1 < x_0$.
Pour les mêmes raisons, x_1 n'est pas un minimum de A, donc il existe $x_2 \in A$ tel que $x_2 < x_1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons construits $x_0, \ldots, x_n$ une suite d'éléments de A strictement décroissante.
x_n n'est pas un minimum de A, donc il existe $x_{n+1} \in A$ tel que $x_{n+1} < x_n$.
On construit ainsi par récurrence une suite strictement décroissante d'éléments de E.

19°) (2 points) On suppose que $E \setminus \{m\}$ est bien ordonné. Soit A une partie non vide de E.
Si $A = \{m\}$, alors A admet m comme minimum.
Sinon, notons $A' = A \setminus \{m\}$. Si A' était vide, on aurait $A \subset \{m\}$ avec A non vide, donc on aurait $A = \{m\}$, ce qui est faux. Ainsi A' est une partie non vide de $E \setminus \{m\}$ qui est bien ordonné, donc A' possède un minimum, que l'on notera a.
m est le maximum de E, donc $a \leq m$, donc, que m soit ou non élément de A, a est le minimum de A. Ainsi toute partie non vide de E possède un minimum, donc E est bien ordonné.

20°) (3 points)
$\diamond$ Soit $(A, R) \in \mathcal{E}$. On a $A \subset A$, pour tout $x, y \in A$, $x\ R\ y \Longleftrightarrow x\ R\ y$ et $A \lhd A$, donc $(A, R) \leq (A, R)$. Ainsi, $\leq$ est réflexive.
$\diamond$ Soit $(A, R), (B, S) \in \mathcal{E}$ tels que $(A, R) \leq (B, S)$ et $(B, S) \leq (A, R)$.
On a $A \subset B$ et $B \subset A$, donc $A = B$. De plus pour tout $x, y \in A$, $x\ R\ y \Longleftrightarrow x\ S\ y$ donc $R = S$. Ainsi, $(A, R) = (B, S)$, donc $\leq$ est antisymétrique.
$\diamond$ Soit $(A, R), (B, S), (C, T) \in \mathcal{E}$ tels que $(A, R) \leq (B, S)$ et $(B, S) \leq (C, T)$.
On a $A \subset B$ et $B \subset C$, donc $A \subset C$.

Soit $x, y \in A$. On a $x\ R\ y \Longleftrightarrow x\ S\ y$, or $x, y \in B$, donc $x\ S\ y \Longleftrightarrow x\ T\ y$. Ainsi, $x\ R\ y \Longleftrightarrow x\ T\ y$.
Il reste à montrer que dans (C, T), on a bien $A \lhd C$: soit $a \in A$ et $x \in C$ tels que $x\ T\ a$. Alors $a \in B$, or dans (C, T), $B \lhd C$, donc $x \in B$.
Ainsi, $x, a \in B$, donc $x\ S\ a$. De plus, dans (B, S), $A \lhd B$, or $a \in A$, donc $x \in A$, ce qu'il fallait démontrer.
On a donc prouvé que $(A, R) \le (C, T)$, donc $\le$ est transitive.
◇ En conclusion, $\le$ est bien une relation d'ordre sur $\mathcal{E}$.

21°) (3 points)
◇ Soit $x, y \in M$. Il existe $(A, R), (B, S) \in \mathcal{F}$ tel que $x \in A$ et $y \in B$.
$\mathcal{F}$ est totalement ordonné, donc $(A, R) \le (B, S)$ ou $(B, S) \le (A, R)$.
Supposons par exemple que $(A, R) \le (B, S)$. Alors $x, y \in B$.
Ainsi, pour tout $x, y \in M$, il existe $(B, S) \in \mathcal{F}$ tel que $x, y \in B$.
De plus si (C, T) est un autre élément de $\mathcal{F}$ tel que $x, y \in C$, alors si $(B, S) \le (C, T)$, on a $x\ S\ y \Longleftrightarrow x\ T\ y$. C'est encore vrai si $(C, T) \le (B, S)$ et on est nécessairement dans l'un de ces deux cas car $\mathcal{F}$ est totalement ordonné.
On peut donc définir sur M la relation binaire U par : pour tout $x, y \in M$,
$x\ U\ y \Longleftrightarrow x\ R\ y$, où $(A, R) \in \mathcal{F}$ est tel que $x, y \in A$.
◇ Montrons que U est un ordre sur M.

- Soit $x \in M$. Il existe $(A, R) \in \mathcal{F}$ tel que $x \in A$. Alors $x, x \in A$ et $x\ R\ x$ (car R est réflexif), donc par définition de U, $x\ U\ x$.
  Ainsi, U est réflexif.
- Soit $x, y \in M$ tels que $x\ U\ y$ et $y\ U\ x$.
  Il existe $(A, R), (B, S) \in \mathcal{F}$ tels que $x \in A$ et $y \in B$.
  $\mathcal{F}$ est totalement ordonné, donc (A, R) et (B, S) sont comparables.
  Supposons par exemple que $(A, R) \le (B, S)$. Alors $A \subset B$, donc $x, y \in B$. Ainsi, $x\ S\ y$ et $y\ S\ x$, or S est antisymétrique, donc $x = y$.
  Ainsi U est antisymétrique.
- Soit $x, y, z \in M$ tels que $x\ U\ y$ et $y\ U\ z$.
  Il existe $(A, R), (B, S), (C, T) \in \mathcal{F}$ tels que $x \in A$ et $y \in B$ et $z \in C$.
  D'après la question 10, $\{(A, R), (B, S), (C, T)\}$ (qui est une partie finie non vide totalement ordonnée) possède un maximum. Sans perte de généralité, supposons que ce maximum est égal à (C, T).
  Alors $x, y, z \in C$, donc $x\ T\ y$ et $y\ T\ z$, or T est transitive, donc $x\ T\ z$.
  Ainsi, $x\ U\ z$. Ceci prouve que U est transitive.

22°) (4 points) Soit N une partie non vide de M.
N est non vide, donc il existe $x \in N$. $x \in M$, donc il existe $(A, R) \in \mathcal{F}$ tel que $x \in A$.
$A \cap M$ est alors une partie non vide de A, or R est un bon ordre sur A, donc $A \cap M$ possède un minimum, que l'on notera m : pour tout $y \in A \cap M$, $m\ R\ y$.
Soit $y \in N$. Il existe à nouveau $(B, S) \in \mathcal{F}$ tel que $y \in B$.
Si $(B, S) \le (A, R)$, alors $B \subset A$, donc $y \in A$. Ainsi, $y, m \in A$ et $m\ R\ y$, donc par définition de U, $m\ U\ y$.

Sinon, c'est que $(A, R) \leq (B, S)$, donc pour l'ordre S, $A \lhd B$.
Il suffit de montrer que dans ce cas, $m \ S \ y$. En effet ceci implique que $m \ U \ y$. Alors, pour tout $y \in N$, $m \ U \ y$, or $m \in N$, donc pour l'ordre U, N possède bien un minimum.
Pour cela, raisonnons par l'absurde en supposant que $\neg(m \ S \ y)$. S est un bon ordre, donc il est total, donc $y \ S \ m$. Mais $m \in A$, $y \in B$ et $A \lhd B$, donc $y \in A$. Alors $y \in A \cap M$, donc par définition de m, $m \ R \ y$. Or $(A, R) \leq (B, S)$, donc $m \ S \ y$. De plus S est antisymétrique, donc $y = m$, ce qui est en contradiction avec $\neg(m \ S \ y)$.

23°) (3 points) Ainsi $(M, U) \in \mathcal{E}$. Pour montrer que $\mathcal{E}$ est inductif, il suffit de montrer que (M, U) est un majorant de $\mathcal{F}$:
Soit $(A, R) \in \mathcal{F}$. Alors $A \subset M$.
Par définition de U, pour tout $x, y \in A$, $x \ U \ y \Longleftrightarrow x \ R \ y$.
Pour montrer que $(A, R) \leq (M, U)$, il reste donc à montrer que, pour l'ordre U, $A \lhd M$.
Soit $a \in A$ et $x \in M$ tels que $x \ U \ a$.
Il existe $(B, S) \in \mathcal{F}$ tel que $x \in B$.
$\mathcal{F}$ est totalement ordonné, donc $(A, R) \leq (B, S)$ ou $(B, S) \leq (A, R)$.
Si $(B, S) \leq (A, R)$, alors $B \subset A$, donc $x \in A$.
Si $(A, R) \leq (B, S)$, alors pour l'ordre S, $A \lhd B$.
Or $x, a \in B$ et $x \ U \ a$, donc par définition de U, on a $x \ S \ a$. Sachant que $A \lhd B$ et $x \in B$, on en déduit encore que $x \in A$.
Ceci démontre que $A \lhd M$.

24°) (3 points)
$\diamond$ D'après le lemme de Zorn et la question précédente, $\mathcal{E}$ possède au moins un élément maximal que l'on notera (A, R).
Supposons que $A \neq X$. Alors il existe $x_0 \in X \setminus A$.
$\diamond$ Notons $A' = A \cup \{x_0\}$ et S la relation binaire définie sur A' par :

- pour tout $x, y \in A$, $x \ S \ y \Longleftrightarrow x \ R \ y$;
- pour tout $x \in A$, $x \ S \ x_0$ et $\neg(x_0 \ S \ x)$:
- $x_0 \ S \ x_0$.

On vérifie que S est une relation d'ordre :

- Elle est réflexive car R est réflexive et $x_0 \ S \ x_0$.
- Soit $x, y \in A'$ tels que $x \ S \ y$ et $y \ Sx$.
  Supposons que $x \neq x_0$. Alors $x \in A$, donc $\neg(x_0 \ S \ x)$, donc $y \neq x_0$. Alors $x, y \in A$, $x \ R \ y$ et $y \ R \ x$, donc $x = y$.
  On raisonne de même lorsque $y \neq x_0$.
  Il reste le cas où $x = x_0$ et $y = x_0$, où il est évident que $x = y$.
  Ainsi, S est antisymétrique.
- Soit $x, y, z \in A'$ tel que $x \ S \ y$ et $y \ S \ z$.
  Si $y = z$, on a évidemment que $x \ S \ z$.
  Supposons maintenant que $y \neq z$.
  Si $z = x_0$, alors $y \in A$, or $x \ S \ y$, donc $x \in A$. Alors on sait que $x \ S \ x_0$, donc $x \ S \ z$.

Si $z \neq x_0$, sachant que $y \; S \; z$, on a $y \neq x_0$, puis de même on en déduit que $x \neq x_0$. Alors $x, y, z \in A$ et la transitivité de R prouve que $x \; R \; z$, c'est-à-dire que $x \; S \; z$.

Ainsi S est transitive.

◇ Il est clair que x_0 est le maximum de A' pour S. De plus A est bien ordonné pour R, donc pour S. Alors d'après la question 19, A' est aussi bien ordonné.

◇ On vérifie que $(A, R) \leq (A', S)$:

— $A \subset A'$;

— Pour tout $x, y \in A$, $x \; R \; y \Longleftrightarrow x \; S \; y$;

— Soit $a \in A$ et $x \in A'$ tels que $x \; S \; a$. Alors $x \neq x_0$, donc $x \in A$. Ainsi, $A \lhd A'$.

◇ (A, R) étant par hypothèse maximal dans $\mathcal{E}$, on en déduit que $(A, R) = (A', S)$, donc en particulier que $A = A'$, ce qui est faux.

On a donc montré que $A = X$.

R est alors un bon ordre sur X, ce qu'il fallait démontrer.

Commentaires concernant le problème :

Nous verrons plus tard que la notion de *base* est définie dans le cadre plus général des espaces vectoriels. La partie II s'adapte à tout espace vectoriel et prouve, en admettant l'axiome du choix, que tout espace vectoriel possède une base.

La partie III démontre que Zorn $\Longrightarrow$ Zermelo. À l'aide d'arguments similaires, on démontre que l'axiome du choix implique le lemme de Zorn (en se plaçant sous la théorie ZF des ensembles). Il est assez simple d'établir que le théorème de Zermelo implique l'axiome du choix, car si R est une relation d'équivalence sur un ensemble X, pour choisir un élément dans chaque classe d'équivalence, il suffit de prendre le minimum de cette classe d'équivalence, pour un bon ordre sur X. Ainsi, en se plaçant sous la théorie ZF des ensembles, l'axiome du choix, le lemme de Zorn et le théorème de Zermelo sont équivalents.