Correction du DM 30

Afin de pré-corriger votre devoir, merci de tenir compte des commentaires qui suivent et de vous référer au corrigé type présent sur le site. Après la pré-correction, veuillez scanner page à page votre copie, dans le bon sens et déposer sur mon site le fichier au format .pdf.

1°) Il faut montrer que $P(a)+Q(a) = (P+Q)(a)$, car ce n'est pas tout à fait évident, or c'est la première question du sujet. C'est encore plus vrai pour $(PQ)(a) = P(a)Q(a)$.

2°) Pour montrer que $\mathbb{K}[a]$ est une sous-algèbre, il faut éviter de remplir plusieurs pages. On peut se contenter de dire que d'après le cours, l'image d'une algèbre commutative par un morphisme d'algèbres est une sous-algèbre commutative (vous pouvez éventuellement détailler l'aspect commutatif).

4°) Même chose pour montrer que $\text{Ker}(\varphi_a)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$: il suffit de dire que c'est le noyau d'un morphisme d'algèbres et d'invoquer le cours.
Il faut justifier que $\text{Ker}(\varphi_a)$ est engendré par un polynôme unitaire en précisant que ce noyau est non nul.

8°) Un corps n'est pas seulement un anneau dans lequel tout élément non nul est inversible. Il faut également dire que c'est un anneau commutatif et non nul.

9°) D'après la question 8, le polynôme minimal de $2^{\frac{1}{3}}$ est irréductible, or $X^3 - 2$ est un polynôme annulateur unitaire, donc il suffit de montrer qu'il est irréductible pour conclure.

10°) Pour calculer les puissances de la matrice S, le plus simple est de passer par son endomorphisme $\tilde{S}$ canoniquement associé : $\tilde{S}(c_i) = c_{i-1}$ où c est la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

14°) Si X est un vecteur propre de M pour la valeur propre λ, pour montrer que c'est un vecteur propre de $P(M)$, il faut montrer que $P(M)X = P(\lambda)X$, mais il faut aussi répéter que $X \neq 0$.

21°) Dans cette question, c'est l'intégrité de $\mathbb{F}_p[X]$ qui intervient et non celle de $\mathbb{F}_p$.

30°) **a)** L'énoncé fixe u tel que $\pi_\omega(u) = 0$ et suppose que $\pi_\omega(u^p) \neq 0$. On ne peut donc pas "décider" que $u = \omega$: ce serait une faute de logique.