Feuille d'exercices 5.
Arithmétique.

Exercice 5.1 : (niveau 1). Pour Quentin Benchetrit.
Si x et y sont deux entiers relatifs impairs, montrez que $x^2 + y^2$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 5.2 : (niveau 1). Pour Bechir Smiri.
Résoudre l'équation $3x^2 + xy = 11$, où les inconnues x et y sont dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 5.3 : (niveau 1). Pour Antoine Bouquet.
Donner le chiffre des unités de $7^{(7^7)}$.

Exercice 5.4 : (niveau 1). Pour Axel Diemer.
On considère une application $f \ : \ \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ vérifiant, pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$,

- $f(m, n) = f(n, m)$,
- $f(m, m) = m$,
- $f(m + n, n) = f(m, n)$.

Déterminer f.

Exercice 5.5 : (niveau 1). Pour Adrien Gentili.
Montrer que $11 | (2^{123} + 3^{121})$.

Exercice 5.6 : (niveau 1). Pour Patrick Gutsche.
Déterminer le nombre de diviseurs de $10!$.

Exercice 5.7 : (niveau 1). Pour Tanguy Niel.
Soit $(a_i)_{1 \leq i \leq 2020}$ une famille d'entiers relatifs telle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{2020} a_i = 0$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{2020} a_i^{37}$ est divisible par 399.

Exercice 5.8 : (niveau 2) Résoudre les systèmes suivants en l'inconnue $x \in \mathbb{Z}$:
$\begin{cases} x \equiv 1 \ [6] \\ x \equiv 2 \ [7] \end{cases}$ et $\begin{cases} 3x \equiv 2 \ [5] \\ 5x \equiv 1 \ [6] \end{cases}$

Exercice 5.9 : (niveau 2). Pour Maxime Kernoa-Jambert.

1°) Montrer que si le carré d'un rationnel est entier, ce rationnel est lui-même un entier.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$. Montrer que $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$.

3°) En déduire que $\sqrt{5}$ est irrationnel.

Exercice 5.10 : (niveau 2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un entier multiple de 2^n dont l'écriture décimale comporte exactement n chiffres, lesquels sont égaux à 1 ou à 2.

Exercice 5.11 : (niveau 2) Soit p un nombre premier différent de 2 et de 5. Montrer que p divise l'un des éléments de l'ensemble $\{1, 11, 111, 1111, 11111, \ldots\}$.

Exercice 5.12 : (niveau 2) Soit p un nombre premier et $k \in \{1, \ldots, p-1\}$.
Montrer que p divise $\binom{p-1}{k} - (-1)^k$.

Exercice 5.13 : (niveau 2) Soient $a, b, n \in \mathbb{N}$ tels que $a \equiv b[n]$. Montrer que $a^n \equiv b^n[n^2]$.

Exercice 5.14 : (niveau 2)

1°) Par combien de 0 se termine le nombre 100!.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait qu'il existe une famille d'entiers naturels $(v_p)_{p\in\mathbb{P}}$ ne contenant qu'un nombre fini d'entiers non nuls telle que $n! = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{v_p}$.
Donner une expression de v_p en fonction de n et p.

Exercice 5.15 : (niveau 3)
On note A l'ensemble des nombres premiers de la forme $4k-1$, où $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que A est infini.

Exercice 5.16 : (niveau 3) Déterminer les rationnels x, y tels que $x^2 + y^2 = 3$.

Exercices supplémentaires

Exercice 5.17 : (niveau 1) Calculer $10^{(10^n)}$ modulo 7 pour tout entier naturel n.

Exercice 5.18 : (niveau 1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 6 divise $n(n^2+5)$.

Exercice 5.19 : (niveau 1) Résoudre dans $\mathbb{N}$, $a \wedge b = 42$ et $a \vee b = 1680$.

Exercice 5.20 : (niveau 1) Déterminer les entiers relatifs x tels que $x-1$ divise $x+3$.

Exercice 5.21 : (niveau 1) Dans $\mathbb{N}$, montrer que la somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par 9.

Exercice 5.22 : (niveau 2) Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ l'équation $x^2 - y^2 - 2x + 6y = 23$.

Exercice 5.23 : (niveau 2) Soit $n \in \mathbb{Z}$. On pose $a = 2n+3$ et $b = 5n-2$. En effectuant un algorithme du type Euclide, déterminer selon les valeurs de n le pgcd de a et b.

Exercice 5.24 : (niveau 2) Montrer que 3^{101} divise $2^{(3^{100})} + 1$.

Exercice 5.25 : (niveau 2) Soient $a \geq 0$ et $n \geq 2$ deux entiers. Montrer les assertions suivantes.

1. Si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.
2. Si $a^n + 1$ est premier, avec $a \geq 2$, alors n est pair.
3. Si $a^n + 1$ est premier, avec $a \geq 2$, alors a est pair et n est une puissance de 2.

Exercice 5.26 : (niveau 2) Montrer que pour tout entier n positif, $n4^{n+1} - (n+1)4^n + 1$ est divisible par 9.

Exercice 5.27 : (niveau 2) Pour tout entier naturel n, on désigne par $f(n)$ la somme des chiffres de l'écriture de n en base 10.
Calculez $fofof(N)$, où $N = 4444^{4444}$.

Exercice 5.28 : (niveau 2) Montrez que si α, β et γ sont trois rationnels tels que $\alpha + \beta\sqrt{2} + \gamma\sqrt{3} = 0$ alors ils sont tous trois nuls.

Exercice 5.29 : (niveau 2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{(2^n)} + 1$. Montrer que F_n et F_m sont premiers entre eux lorsque $n \neq m$.

Exercice 5.30 : (niveau 2) Soit n un entier tel que $n \geq 2$.
Déterminer n nombres entiers consécutifs qui ne sont pas premiers.

Exercice 5.31 : (niveau 2) On suppose que a, b et c sont 3 entiers naturels tels que $a^2 + b^2 = c^2$.
Montrer que 60 divise abc.

Exercice 5.32 : (niveau 2) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Posons $a = m!$ et, pour tout $i \in \{0, \ldots, m\}$, $\alpha_i = a(i+1) + 1$. Montrer que $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$ sont deux à deux premiers entre eux.

Exercice 5.33 : (niveau 2) *Fractions égyptiennes :* On se propose de montrer que tout rationnel de $]0,1[$ s'écrit comme somme d'inverses d'entiers naturels deux à deux distincts.

1°) Soit $x = \frac{m}{n}$ un rationnel de $]0,1[$ avec $m, n \in \mathbb{N}^*$. On note q le quotient de la division euclidienne de n par m.
Si x n'est pas l'inverse d'un entier, montrer qu'il existe m', n'
tels que $x - \dfrac{1}{q+1} = \dfrac{m'}{n'}$ avec $n' \in \mathbb{N}^*$ et $m' \in \{1, \ldots, m-1\}$.

2°) Conclure.

3°) Ecrire $\frac{5}{17}$ comme somme d'inverses d'entiers naturels deux à deux distincts.

Exercice 5.34 : (niveau 3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\{(a,b) \in \mathbb{N}^{*2} / a \vee b = n\}$ et $\{d \in \mathbb{N}^* / d | n^2\}$ ont le même cardinal.

Exercice 5.35 : (niveau 3) (d'après Rallye mathématique d'Alsace 2012)
Mon code secret de téléphone portable est composé de quatre chiffres différents et tous non nuls.
Quand j'effectue la somme de tous les nombres possibles que je peux former avec deux de ces quatre chiffres, dans un sens ou dans un autre, et que je la multiplie par 7, je retrouve mon code.
Sans utiliser un programme informatique, former un raisonnement pour retrouver est code ?

Exercice 5.36 : (niveau 3) Notons $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci, définie par :
$F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} - F_n$.
Notons $\mathcal{F} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ / \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = u_n + u_{n+1}\}$.

1°) Montrer que si $(u_n), (v_n) \in \mathcal{F}$, alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)$ est aussi dans $\mathcal{F}$.

2°) En déduire que, pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+m} = F_n F_{m+1} + F_{n-1} F_m$.

3°) Montrer que, pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, $F_n \wedge F_m = F_{n\wedge m}$.

Exercice 5.37 : (niveau 3) Soit k un entier supérieur ou égal à 2.

1°) Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$ tels que $a \wedge b = 1$.
On suppose que ab est la puissance k-ème d'un entier.
Démontrer que a et b sont (au signe près) des puissances k-èmes d'entiers.

2°) Résoudre l'équation $x^2 + x = y^k$ d'inconnues $x, y \in \mathbb{Z}$.

3°) Soit $p \in \mathbb{P}$. Résoudre l'équation $x^2 + px = y^2$ d'inconnue $x, y \in \mathbb{N}$.
Indication : Distinguer le cas où p divise x du cas contraire.