DM 14 : Corrigé

Problème 1 :
Décomposition d'un anneau

Partie I : Anneaux décomposables

1°) On suppose que A est un corps.
$\diamond$ Soit $x \in A$ que l'on suppose nilpotent. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$. Alors x^n n'est pas inversible, or l'ensemble des inversibles d'un anneau est toujours un groupe multiplicatif, donc x n'est pas inversible. Or A est un corps, donc $x = 0$. Réciproquement 0 est toujours nilpotent, donc dans un corps, 0 est l'unique élément nilpotent.
$\diamond$ Supposons que $x \in A$ est idempotent : $x^2 = x$, donc $x(x-1) = 0$, or un corps est toujours intègre, donc $x = 0$ ou $x = 1$. La réciproque étant claire, les idempotents d'un corps sont exactement ses éléments neutres 0 et 1.

2°)
$\diamond$ Soit $\overline{k} \in \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel $\overline{k}^n = 0$. Ainsi $12 \mid k^n$, donc 2 et 3 interviennent nécessairement dans la décomposition primaire de k. Ainsi k est un multiple de 6 et $\overline{k} \in \{0, \overline{6}\}$. Réciproquement $\overline{6}^2 = 0$, donc les nilpotents de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ sont exactement $\overline{0}$ et $\overline{6}$.
$\diamond$ Évaluons les carrés dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$: $\overline{2}^2 = \overline{4} = \overline{-2}^2$, $\overline{3}^2 = \overline{9} = \overline{-3}^2$, $\overline{4}^2 = \overline{4} = \overline{-4}^2$, $\overline{5}^2 = \overline{1} = \overline{-5}^2$, donc les idempotents de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ sont exactement 0, 1, $\overline{4}$ et $\overline{-3} = \overline{9}$.

3°) Soit $(x, y) \in B \times C$. (x, y) est idempotent si et seulement si $(x, y)^2 = (x, y)$, c'est-à-dire si et seulement si $(x^2, y^2) = (x, y)$ ou encore $(x^2 = x) \wedge (y^2 = y)$, donc si et seulement si x et y sont idempotents.
Ainsi, $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ et $(1, 1)$ sont 4 éléments idempotents de $B \times C$ deux à deux distincts.

4°) Ae est l'idéal engendré par e, donc d'après le cours, c'est un sous-groupe additif de A. La multiplication dans Ae est associative et distributive par rapport à l'addition, par restriction de ces propriétés valables sur A en entier.
Si $ae, be \in Ae$, $(ae).(be) = abe \in Ae$, donc le produit est une loi interne sur Ae.
Enfin, pour tout $ae \in Ae$, $ae.e = ae^2 = ae$, donc e est l'élément neutre pour le produit dans Ae.
En résumé, Ae est un anneau (il est bien non nul et commutatif), pour les restrictions à Ae des lois de A, mais avec e comme élément neutre.

5°)
$\diamond$ $(1-e)^2 = 1-2e+e = 1-e$, donc $1-e$ est idempotent.
On a bien $e(1-e) = e-e^2 = 0$.
$\diamond$ Montrons que l'application $\varphi\ :\ A \longrightarrow [Ae]\times[A(1-e)]$ est un morphisme d'anneaux.
$\varphi(1) = (e, 1-e)$: c'est bien l'élément neutre pour la multiplication de l'anneau produit $[Ae]\times[A(1-e)]$.Soit $x, y \in A$.
$\varphi(x+y) = ((x+y)e, (x+y)(1-e)) = (xe, x(1-e)) + (ye, y(1-e)) = \varphi(x)+\varphi(y)$ et $\varphi(xy) = (xye, xy(1-e)) = (xyee, xy(1-e)(1-e)) = (xe, x(1-e)) \times (ye, y(1-e))$, donc $\varphi(xy) = \varphi(x)\times\varphi(y)$.
Ceci prouve bien que φ est un morphisme d'anneaux.
$\diamond$ Soit $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$: $0 = \varphi(x) = (xe, x(1-e))$, donc $x = xe + x(1-e) = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ et φ est injective.
$\diamond$ Soit $(ae, b(1-e)) \in [Ae]\times[A(1-e)]$. Posons $x = ae + b(1-e)$.
Alors $xe = ae^2 + b(1-e)e = ae$ car $(1-e)e = 0$ et de même, $x(1-e) = b(1-e)$ donc $\varphi(x) = (ae, b(1-e))$, ce qui prouve que φ est surjective.
En conclusion, φ est un isomorphisme d'anneaux.

6°)
$\diamond$ Lemme 1 : deux anneaux isomorphes ont le même nombre d'éléments idempotents.
En effet, soit f un isomorphisme d'un anneau A vers un anneau B. Pour tout $x \in A$, $x^2 = x \Longleftrightarrow f(x^2) = f(x)$, car f est bijective, donc $x^2 = x \Longleftrightarrow f(x)^2 = f(x)$. Ainsi, si l'on note I_A et I_B les ensembles des éléments idempotents de A et de B, $I_B = f(I_A)$, donc I_A et I_B ont le même cardinal.
$\diamond$ Supposons que A est décomposable. Alors d'après la question 3 et le lemme 1, il possède au moins 4 idempotents, donc en prenant la contraposée, si les seuls éléments idempotents de A sont 0 et 1, alors A est indécomposable.
Réciproquement, si A possède au moins un idempotent e différent de 0 et de 1, d'après la question 5, A est décomposable.

7°) $\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante : si un anneau A possède au plus n éléments idempotents, alors A est isomorphe au produit cartésien d'un nombre fini d'anneaux indécomposables.
Pour $n = 2$, d'après la question précédente, si A possède au plus deux idempotents (nécessairement égaux à 0 et 1), alors A est indécomposable, donc c'est le produit cartésien d'un unique anneau indécomposable, ce qui prouve $R(2)$.
Pour $n \geq 3$, supposons $R(n-1)$ et considérons un anneau A qui possède au plus n éléments idempotents. S'il en possède moins de $n-1$, d'après $R(n-1)$, A est isomorphe au produit cartésien d'un nombre fini d'anneaux indécomposables. Supposons maintenant qu'il possède exactement n idempotents.
$n \geq 3$, donc A possède au moins un idempotent e différent de 0 et de 1. D'après la question 4, A est isomorphe à $[Ae]\times[A(1-e)]$.
Notons b et c le nombre d'idempotents de Ae et de $A(1-e)$ respectivement. D'après le lemme 1 et la question 3, $n = bc$, mais $b \geq 2$ et $c \geq 2$, car 0 et 1 sont toujours nilpotents, donc $b < n$ et $c < n$. On peut donc appliquer $R(n-1)$ aux anneaux Ae

et $A(1-e)$. Ainsi il existe un isomorphisme d'anneaux φ_1 (resp : φ_2) de Ae (resp : $A(1-e)$) dans $B_1 \times \cdots \times B_p$ (resp : $B_{p+1} \times \cdots \times B_{p+q}$), où les B_i sont des anneaux indécomposables.
Posons, pour tout $x \in A$, $\Psi(x) = (x_1, \ldots, x_{p+q})$, où $(x_1, \ldots, x_p) = \varphi_1(xe)$
et $(x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}) = \varphi_2(x(1-e))$.
On vérifie aisément que Ψ est un isomorphisme d'anneaux, ce qui prouve $R(n)$.
D'après le principe de récurrence, la question est démontrée.
$\diamond$ Soit A un anneau possédant un nombre fini d'idempotents. Il existe des anneaux indécomposables $B_1, \ldots, B_n$ et un isomorphisme d'anneaux f de A dans $B_1 \times \cdots \times B_n$.
Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, les idempotents de B_i sont exactement 0 et 1. D'après la question 3, les idempotents de $B_1 \times \cdots \times B_n$ sont les $(d_1, \ldots, d_n)$ où pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $d_i \in \{0, 1\}$. Ils sont donc au nombre de 2^n. Le lemme 1 permet de conclure.

Partie II : anneaux locaux

8°) Si A est un anneau, $U(A) = A \setminus \{0\}$, donc $A \setminus U(A) = \{0\}$: c'est l'idéal engendré par 0.

9°) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{P}$. notons $I = \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} \setminus U(\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})$.
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\overline{n} \in I \iff n \wedge p^k \neq 1 \iff n \wedge p \neq 1 \iff p \mid n$, car p est premier, donc $\overline{n} \in I \iff \exists \overline{a} \in \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z},\ \overline{n} = \overline{p}\ \overline{a}$. Ceci prouve que $I = \overline{p}.\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$: c'est l'idéal engendré par $\overline{p}$, donc $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ est un anneau local.

10°) $\diamond$ Supposons que A est un anneau local.
S'il est décomposable, d'après la question 6, il possède un idempotent e différent de 0 et de 1. Si e était inversible, de $e^2 = e$, on déduirait que $e = 1$ ce qui est faux, donc $e \in I = A \setminus U(A)$. De même, $1 - e \in I$ d'après la question 5. Mais I est un idéal, donc $1 = e + (1-e) \in I$, ce qui est faux car $1 \in U(A)$. Ainsi A est indécomposable.
$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$. On a vu que si n est de la forme p^k avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, alors $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un anneau local. Réciproquement, si n n'est pas de cette forme, on peut écrire $n = ab$ avec $a \geq 2$, $b \geq 2$ et $a \wedge b = 1$. Alors, d'après le théorème chinois, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})$, donc $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est décomposable. D'après le point précédent, il n'est pas local.

11°) Supposons que A est un anneau local. Soit $x \in A$. Si x et $1-x$ sont tous deux non inversibles, alors en notant I l'idéal $A \setminus U(A)$, $1 = x + (1-x) \in I$, ce qui est faux car $1 \in U(A)$. Ainsi, pour tout $x \in A$, x ou $1-x$ est inversible.
Réciproquement, supposons que A est un anneau dans lequel pour tout $x \in A$, x ou $1-x$ est inversible. Notons encore $I = A \setminus U(A)$ et montrons que I est un idéal.

- $0 \in I$, donc $I \neq \emptyset$.
- Soit $x \in I$ et $a \in A$: si ax était inversible, il existerait $b \in A$ tel que $1 = (ax)b = x(ab)$, donc x serait inversible, ce qui est faux. Ainsi $ax \in I$.
- Soit $x, y \in I$. Supposons que $x + y \in U(A)$.
  Ainsi, il existe $b \in A$ tel que $1 = (x+y)b = xb + yb$.

xb ou $1-xb$ est inversible, mais $x \in I$, donc on a déjà vu que xb n'est pas inversible. Ainsi, $1-xb = yb$ est inversible, mais c'est faux car $y \in I$. Ainsi, $x+y \in I$.

I est bien un idéal et A est un anneau local.

Partie III : cas des anneaux finis

12°) $\diamond$ Soit $x \in A$. A est fini et $\mathbb{N}$ est infini, donc l'application $h \longmapsto x^h$ de $\mathbb{N}$ dans A n'est pas injective. Ainsi, il existe $k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $k > \ell$ et $x^k = x^\ell$.
Alors pour tout $a \in \mathbb{N}$, $x^{k+a} = x^{\ell+a}$.
Si l'on pose $T = k-\ell$, $x^{k+T} = x^{\ell+T} = x^k$, puis $x^{(k+a)+T} = x^{k+a}$ pour tout $a \in \mathbb{N}$, donc la suite $(x^h)_{h \geq k}$ est T-périodique.
Soit $b \in \mathbb{N}^*$ tel que $bT \geq k$. Alors $x^{bT} = x^{bT+bT} = [x^{bT}]^2$,
donc x^{bT} est idempotent et $bT \in \mathbb{N}^*$.
$\diamond$ Supposons que A est indécomposable. Soit $x \in A$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que x^n est idempotent, donc d'après la question 6, $x^n \in \{0,1\}$. Si $x^n = 1$, alors x est inversible, d'inverse x^{n-1} et si $x^n = 0$, alors x est nilpotent. Ainsi, tout élément de A est soit inversible, soit nilpotent.

13°) $\diamond$ D'après la question 10, si A est local, alors A est indécomposable. Réciproquement, supposons A est indécomposable. Soit x un élément non inversible de A. Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$. Ainsi, $(1-x)\sum_{k=0}^{n-1} x^k = 1 - x^n = 1$, donc $1-x$ est inversible.
Ceci montre que pour tout $x \in A$, x ou $1-x$ est inversible. Alors A est local d'après la question 11.
$\diamond$ Cette propriété devient fausse pour des anneaux de cardinal infini, car $\mathbb{Z}$ constitue un contre-exemple. En effet, $\mathbb{Z}$ est indécomposable car ses seuls idempotents sont 0 et 1, mais il n'est pas local car 3 et $1-3$ ne sont pas inversibles dans $\mathbb{Z}$.

14°)
$\diamond$ Supposons qu'il existe un isomorphisme f de A vers un produit cartésien de corps $K_1 \times \cdots \times K_p$, où $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in A$ un élément nilpotent. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$. Alors $0 = f(0) = f(x^n) = f(x)^n = (x_1, \ldots, x_p)^n$, en posant $f(x) = (x_1, \ldots, x_p)$. Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $x_i^n = 0$, or $x_i \in K_i$ et K_i est un corps, donc d'après la première question, $x_i = 0$. On en déduit que $x = 0$.
$\diamond$ Réciproquement, supposons que A ne possède aucun élément nilpotent non nul. D'après la question 7, il existe un isomorphisme f de A vers un produit cartésien $B_1 \times \cdots \times B_p$ d'anneaux indécomposables et finis.
Soit $i \in \mathbb{N}_p$ et soit $x \in B_i$ avec $x \neq 0$. D'après la question 12, si x n'est pas inversible, il est nilpotent. Alors $f^{-1}(0, \ldots, 0, x, 0, \ldots, 0)$ est un élément nilpotent non nul de A, ce qui est impossible. Ainsi, x est inversible ce qui prouve que B_i est un corps. Alors A est isomorphe à un produit cartésien de corps.

15°) Si n est un produit de nombres premiers deux à deux distincts, d'après le

théorème chinois et le fait que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps pour tout nombre premier p, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe à un produit cartésien de corps.
Si au contraire il existe $p \in \mathbb{P}$ et $a \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = p^2 a$, alors $\overline{pa}$ est un élément nilpotent non nul de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, donc $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas isomorphe à un produit cartésien de corps.

Problème 2 : Nombre d'enroulements de Poincaré

Partie I : groupe d'enroulement de Poincaré

1°) Soit $f \in Hom$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x+1) = f(x) + 1 &\iff f(x+1) - (x+1) = f(x) - x \\ &\iff [f - Id_{\mathbb{R}}](x+1) = [f - Id_{\mathbb{R}}](x), \end{aligned}$$

donc $f \in H$ si et seulement si $f - Id_{\mathbb{R}}$ est une application périodique de période 1.

2°)
$\diamond$ Notons $S(\mathbb{R})$ l'ensemble des bijections de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. D'après le cours, $S(\mathbb{R})$ et un groupe pour la loi de composition, c'est le groupe symétrique de $\mathbb{R}$. Montrons que Hom est un sous-groupe de $S(\mathbb{R})$.
$Id_{\mathbb{R}}$ est une bijection continue sur $\mathbb{R}$, donc $Id_{\mathbb{R}} \in$ Hom et Hom $\neq \emptyset$.
Si $f, g \in$ Hom, $f \circ g$ est continue et bijective d'après le cours, donc $f \circ g \in$ Hom.
Si $f \in$ Hom, alors f^{-1} est une bijection et elle est continue d'après le théorème de la bijection. Ceci démontre que Hom est un sous-groupe de $S(\mathbb{R})$.
$\diamond$ Montrons que H est un sous-groupe de Hom.
$Id_{\mathbb{R}}$ est un élément de H, donc $H \neq \emptyset$.
Soit $f, g \in H$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[f \circ g](x+1) = f(g(x+1)) = f(g(x)+1) = f(g(x))+1$, donc $f \circ g \in H$.
Soit $f \in H$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $y = f^{-1}(x)$. On sait que $f(y+1) = f(y)+1 = x+1$, donc en composant cette égalité par f^{-1}, $y+1 = f^{-1}(x+1)$, donc $f^{-1}(x+1) = f^{-1}(x)+1$.
Ainsi, $f^{-1} \in H$. Ceci démontre que H est un sous-groupe de Hom.

3°) $\diamond$ $f - Id_{\mathbb{R}}$ est 1-périodique, donc pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$,
$(f - Id_{\mathbb{R}})(x+m) = (f - Id_{\mathbb{R}})(x)$, puis $f(x+m) = f(x) + m$.
$\diamond$ f est continue et injective, donc d'après le cours f est strictement monotone. Or $f(1) = f(0) + 1 > f(0)$, donc f est strictement croissante.

4°) $\diamond$ Notons $f : x \longmapsto x + \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)$.
f est continue d'après les théorèmes usuels. f est même dérivable avec
$f'(x) = 1 + \cos(2\pi x)$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geq 0$ et f est croissante.
De plus, $f(x) = 0 \iff 2\pi x \in \pi + 2\pi\mathbb{Z} \iff x \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. Ainsi, f' n'est identiquement nulle sur aucun intervalle d'intérieur non vide, donc d'après le cours, f est strictement croissante.

$f(x) \geq x - \frac{1}{2\pi}$, donc d'après le principe des gendarmes, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. De même, $f(x) \leq x + \frac{1}{2\pi}$, donc $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f réalise donc une surjection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, injective car f est strictement croissante. Ainsi, $f \in \text{Hom}$.
$f - Id_{\mathbb{R}}$ est clairement 1-périodique, donc $f \in H$.
$\diamond$ Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Supposons que $x \longmapsto ax + b$ est un élément de H. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a(x + 1) + b = ax + b + 1$, donc $a = 1$.
Réciproquement, si $a = 1$, l'application $f : x \longmapsto x + b$ est une bijection continue telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + 1) = f(x) + 1$, donc $f \in H$.
En conclusion, les applications affines de H sont les $x \longmapsto x + b$ où b est un réel quelconque.

Partie II : nombre d'enroulements de Poincaré

5°) $\diamond$ On suppose que $x \leq y < x + 1$.
H est un groupe, donc $f^n \in H$. Ainsi, f^n est strictement croissante,
donc $f^n(x) \leq f^n(y) < f^n(x + 1) = f^n(x) + 1$. Ainsi $0 \leq f^n(y) - f^n(x) \leq 1$.
Par ailleurs, $-1 \leq x - y \leq 0$, donc en sommant ces deux encadrements,
$-1 \leq f^n(y) - y - (f^n(x) - x) \leq 1$. On en déduit que $|(f^n(y) - y) - (f^n(x) - x)| \leq 1$, puis en divisant par n que $|u_n(y) - u_n(x)| \leq \dfrac{1}{n}$.
$\diamond$ Supposons maintenant que x et y sont quelconques dans $\mathbb{R}$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x \leq y + k < x + 1$ (en prenant $k = \lceil x - y \rceil$). D'après le point précédent, $|u_n(y + k) - u_n(x)| \leq \dfrac{1}{n}$, or u_n est 1-périodique car $f^n \in H$, donc $u_n(y + k) = u_n(y)$ et on a bien encore $|u_n(y) - u_n(x)| \leq \dfrac{1}{n}$.

6°) $\diamond$ Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$. $\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} u_n(f^{kn}(0)) = \dfrac{1}{nm}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}(f^{(k+1)n}(0) - f^{kn}(0))$. Il s'agit d'une somme télescopique, donc $\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} u_n(f^{kn}(0)) = \dfrac{1}{nm}(f^{mn}(0) - 0) = u_{nm}(0)$.
$\diamond$ $|u_{nm}(0) - u_n(0)| = \left|\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}(u_n(f^{kn}(0)) - u_n(0))\right|$, donc par inégalité triangulaire, $|u_{nm}(0) - u_n(0)| \leq \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}|u_n(f^{kn}(0)) - u_n(0))|$, puis d'après la question précédente, $|u_{nm}(0) - u_n(0)| \leq \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n}$.
$\diamond$ Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{2}{N} \leq \varepsilon$.
Soit $p, q \geq N$. Par inégalité triangulaire,

$|u_p(0)-u_q(0)| \leq |u_p(0)-u_{pq}(0)|+|u_{pq}(0)-u_q(0)| \leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q} \leq \frac{2}{N} \leq \varepsilon$, donc $(u_n(0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy. D'après le cours, elle est convergente.

7°) Soit $x \in \mathbb{R}$. $|u_n(x)-u_n(0)| \leq \frac{1}{n}$,
donc $u_n(x) = u_n(0)+o(1) = \rho(f)+o(1)$. De plus $u_n(x) = \dfrac{f^n(x)}{n} - \dfrac{x}{n} = \dfrac{f^n(x)}{n} + o(1)$,
donc $\dfrac{f^n(x)}{n} = \rho(f)+o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \rho(f)$.

Partie III :
Propriété du nombre d'enroulements

8°) Soit $b \in \mathbb{R}$. Notons $f \ : \ x \longmapsto x+b$. $f \in H$ d'après la question 4.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(x) = x+nb$ (par récurrence sur n), donc $u_n(0) = b \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$. Donc $\rho(f) = b$, ce qui montre que ρ est surjectif.

9°) $\diamond$ On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > x$.
$f - Id_{\mathbb{R}}$ est continue sur le compact $[0,1]$, donc elle atteint son minimum : il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x)-x \geq f(x_0)-x_0$. Mais $f - Id_{\mathbb{R}}$ est 1-périodique, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)-x \geq f(x_0)-x_0 = m$. On a bien $m > 0$ car par hypothèse, $f(x_0) > x_0$.
$\diamond$ Par récurrence sur n, on montre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $f^n(x) \geq x+nm$ (en effet, si $f^n(x) \geq x+nm$, f étant croissante,
$f^{(n+1)}(x) \geq f(x+nm) \geq x+nm+m$). Ainsi, $u_n(0) \geq m$, puis en passant à la limite, $\rho(f) \geq m > 0$.
$\diamond$ Supposons maintenant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < x$. Alors en utilisant le maximum de $(f - Id_{\mathbb{R}})|_{[0,1]}$, on montre qu'il existe $m < 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq x+m$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(x) \leq x+nm$, puis que $\rho(f) \leq m < 0$.

10°) $\diamond$ Supposons que $\rho(f) = 0$. Alors d'après la question précédente, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq x$ et il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(y) \geq y$. Ainsi, l'application continue $f - Id_{\mathbb{R}}$ change de signe, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) = z$: f possède donc un point fixe.
Réciproquement, s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = a$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n(a) = a$, donc $\dfrac{f^n(a)}{n} = \dfrac{a}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui prouve que $\rho(f) = 0$.
$\diamond$ Lorsque h est l'application $x \longmapsto x + \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)$, $h(0) = 0$, donc d'après le point précédent, $\rho(h) = 0$.

11°) Soit $f \in H$.
$\diamond$ Supposons qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $f^q(a) = a+p$.
Alors, par récurrence sur n, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{nq}(a) = a+np$: en effet, si $f^{nq}(a) = a+np$, alors $f^{(n+1)q}(a) = f^q(a+np) = f^q(a)+np$ car $np \in \mathbb{Z}$ et $f^q \in H$, donc $f^{(n+1)q}(a) = a+(n+1)p$.

On en déduit que $\dfrac{f^{nq}(a)}{nq} = \dfrac{a+np}{nq} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{p}{q}$, donc $\rho(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$.
$\diamond$ Réciproquement, supposons qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\rho(f) = \frac{p}{q}$.
Notons $g \ : \ x \longmapsto f^q(x) - p$. $f^q \in H$, donc $g \in H$.
Par récurrence sur n, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $g^n(x) = f^{nq}(x) - np$.
Ainsi, $\dfrac{g^n(0)}{n} = \dfrac{f^{nq}(0)}{nq} q - p \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \rho(f)q - p = 0$. Ainsi $\rho(g) = 0$, donc d'après la question précédente, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $g(a) = a$, c'est-à-dire tel que $f^q(a) = a + p$.

Partie IV : Invariance par conjugaison

12°) Soit $\varphi \in H$. Soit $r \in \mathbb{R}$.
$\varphi - Id_{\mathbb{R}}$ est continue sur le compact $[0,1]$ et elle est 1-périodique, donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq |\varphi(x) - x| \leq M$.
Alors $0 \leq \left| \dfrac{\varphi(nr)}{n} - r \right| = \dfrac{|\varphi(nr) - nr|}{n} \leq \dfrac{M}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{\varphi(nr)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} r$.

13°) Par récurrence, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^n = \varphi^{-1} f^n \varphi$,
donc $\dfrac{\varphi(g^n(x))}{n} = \dfrac{f^n(\varphi(x))}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \rho(f)$ d'après la question 7.

14°) $\diamond$ Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
$\lfloor g^n(x) - n\rho(g) \rfloor \leq g^n(x) - n\rho(g)$, donc $n\rho(g) \leq g^n(x) - \lfloor g^n(x) - n\rho(g) \rfloor$, or φ est croissante, donc $\varphi(n\rho(g)) \leq \varphi(g^n(x) - \lfloor g^n(x) - n\rho(g) \rfloor) = \varphi(g^n(x)) - \lfloor g^n(x) - n\rho(g) \rfloor$ d'après la question 3.
De même, $\lfloor g^n(x) - n\rho(g) \rfloor \geq g^n(x) - n\rho(g) - 1$, donc $n\rho(g) \geq g^n(x) - \lfloor g^n(x) - n\rho(g) \rfloor - 1$, puis $\varphi(n\rho(g)) \geq \varphi(g^n(x)) - \lfloor g^n(x) - n\rho(g) \rfloor - 1$.
On conclut en divisant par n.
$\diamond$ $g^n(x) - n\rho(g) - 1 \leq \lfloor g^n(x) - n\rho(g) \rfloor \leq g^n(x) - n\rho(g)$, donc en divisant par n, $\dfrac{g^n(x) - n\rho(g) - 1}{n} \leq \dfrac{\lfloor g^n(x) - n\rho(g) \rfloor}{n} \leq \dfrac{g^n(x) - n\rho(g)}{n}$, or les deux suites encadrantes tendent vers $\rho(g) - \rho(g) = 0$, donc d'après le principe des gendarmes, $\dfrac{\lfloor g^n(x) - n\rho(g) \rfloor}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors, toujours d'après le principe des gendarmes et d'après la question 13, l'encadrement du point précédent montre que $\dfrac{\varphi(n\rho(g))}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \rho(f)$.
Or d'après la question 12, $\dfrac{\varphi(n\rho(g))}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \rho(g)$, donc d'après l'unicité de la limite, $\rho(f) = \rho(g)$.

15°) La réciproque est fausse : en effet, si l'on prend
$g \ : \ x \longmapsto x + \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x)$ et $f \ : \ x \longmapsto x$, on a vu que $\rho(f) = \rho(g) = 0$, mais f et g ne sont pas conjuguées dans H, car pour tout $\varphi \in H$, $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ Id_{\mathbb{R}} \circ \varphi = Id_{\mathbb{R}} \neq g$.