Feuille d'exercices 16.
Topologie

Exercice 16.1 : (niveau 1)
Montrer que $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Exercice 16.2 : (niveau 1)
Montrer que $\{x + iy \in \mathbb{C} \; / \; x, y \in \mathbb{R}, \;\; x^2 + y^2 \leq 3, \;\; x^3 + y^3 - 3xy \geq 0\}$ est un compact de $\mathbb{C}$.

Exercice 16.3 : (niveau 1)
Montrer que $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \ln(x^2 + y^2 + 1)\sin(z) < e^{x+z} \text{ et } x + y - z > 1\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 16.4 : (niveau 2)
Si F est un fermé d'un espace métrique, montrer qu'il existe une suite décroissante d'ouverts $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Exercice 16.5 : (niveau 2)
On note $E = l^\infty(\mathbb{R})$ et $F = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. F est-il un ouvert ou un fermé de E ?

Exercice 16.6 : (niveau 2)
E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, où $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. A et B sont deux parties de E. On suppose que A est ouvert. Montrer que $\overline{A \cap B} = \overline{A \cap \overline{B}}$.

Exercice 16.7 : (niveau 2)
Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E.
On note $\delta(A)$ le diamètre de A.
Montrer que $\delta(A) = \delta(\overline{A})$. A-t-on $\delta(A) = \delta(\mathring{A})$?

Exercice 16.8 : (niveau 2)
Soit F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E tel que $\mathring{F} \neq \emptyset$. Montrer que $F = E$.

Exercice 16.9 : (niveau 2)
E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et F est un fermé de E.

1°) Soit K une partie compacte de E.
Montrer que $F+K=\{f+k/(f,k)\in F\times K\}$ est fermé.

2°) On pose $F=\{(x,0)/x\in\mathbb{R}\}$ et $K=\{(x,e^x)/x\in\mathbb{R}\}$. Montrer que F et K sont deux fermés de $\mathbb{R}^2$ mais que $F+K$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 16.10 : (niveau 2)
Soit A et B deux ouverts d'un espace vectoriel normé E.
Montrer que $A+B$ est ouvert. Est-ce vrai avec des fermés ?

Exercice 16.11 : (niveau 2)
Soit A une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E. Montrer que $\overline{A}$ est compact si et seulement si toute suite d'éléments de A admet une valeur d'adhérence **dans** E.

Exercice 16.12 : (niveau 2)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et A une partie de E. On dit que $l\in E$ est un point d'accumulation de A si et seulement si $l\in\overline{A\setminus\{l\}}$.
Montrer que l'ensemble des points d'accumulation de A est un fermé.

Exercice 16.13 : (niveau 2)
On dit qu'un point a d'une partie A est isolé dans A si et seulement si il existe un voisinage V de a tel que $V\cap A=\{a\}$.
Soit A une partie sans point isolé. Soit B une partie dense dans A. Montrer que pour tout $a\in A$ et pour tout voisinage V de a, $V\cap B$ est infini.

Exercice 16.14 : (niveau 2)
Soit A une partie convexe d'un espace vectoriel normé E.
Montrer que $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}$ sont aussi convexes.

Exercice 16.15 : (niveau 3)
Théorème du point fixe. Soit A une partie complète non vide de E et
$f\ :A\longrightarrow A$ une application k-contractante où $k\in[0,1[$.

1°) Montrer qu'il existe au plus un vecteur $l\in E$ tel que $f(l)=l$ (on dit que l est un point fixe de f).

2°) Soit $(x_n)\in A^{\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation de récurrence suivante : $\forall n\in\mathbb{N}\ \ x_{n+1}=f(x_n)$, avec $x_0\in A$.
a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $d(x_n,x_{n+1})\leq k^n d(x_0,x_1)$.
b) Montrer que (x_n) converge et que sa limite est un point fixe de f.

Exercice 16.16 : (niveau 3)
Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. On considère la relation $\mathcal{U}$ sur U définie par :

$$\forall x, y \in U,\ \ (x\ \mathcal{U}\ y) \Longleftrightarrow ([x, y] \subset U),$$

où $[x, y]$ désigne le segment joignant x à y même lorsque $x > y$.

1°) Démontrer que $\mathcal{U}$ est une relation d'équivalence sur U.

2°) Démontrer que les classes d'équivalence de U sont des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Justifier que l'ensemble quotient $U/\mathcal{U}$ est dénombrable.

3°) Qu'a-t-on ainsi démontré ?

Exercice 16.17 : (niveau 3)
$l^\infty(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des suites bornées de réels ; c'est un espace vectoriel normé si on le munit de la norme infinie.
Parmi les ensembles suivants, déterminer lesquels sont des fermés de $l^\infty(\mathbb{R})$:
- ◇ l'ensemble des suites croissantes bornées,
- ◇ l'ensemble des suites bornées admettant 0 pour valeur d'adhérence,
- ◇ l'ensemble $\mathcal{P}_T$ des suites T-périodiques, où $T \in \mathbb{N}^*$,
- ◇ la réunion $\bigcup_{T\in\mathbb{N}^*} \mathcal{P}_T$.

Exercices supplémentaires :

Exercice 16.18 : (niveau 2)
Montrez que si U et V sont deux ouverts disjoints d'un espace vectoriel normé, alors $\overset{\circ}{\overline{U}} \cap \overset{\circ}{\overline{V}} = \emptyset$.

Exercice 16.19 : (niveau 2)
On dit qu'un point a d'une partie A est isolé dans A si et seulement si il existe un voisinage V de a tel que $V \cap A = \{a\}$.
Soit A une partie sans point isolé. Soit B une partie dense dans A. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $b_1, \dots, b_p$ p éléments de B. Montrer que $B \setminus \{b_1, \dots, b_p\}$ est dense dans A.

Exercice 16.20 : (niveau 2)
On munit $C([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme de la convergence en moyenne.

1°) Pour tout entier $n \geq 3$, on note f_n l'élément de E défini par les relations suivantes. $f_n(t) = 0$ lorsque $t \in [0, \frac{1}{2}]$, $f_n(t) = n(t - \frac{1}{2})$ lorsque $t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}]$ et $f_n(t) = 1$ lorsque $t \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$.
Montrer que f_n est une suite de Cauchy de E.

2°) Montrer que E n'est pas un espace de Banach.

Exercice 16.21 : (niveau 3)
Montrer que $l^1(\mathbb{C})$ est un espace de Banach.

Exercice 16.22 : (niveau 3)
On note $E = l^1(\mathbb{C}) = \{(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / \sum |z_n| \text{ CV } \}$ et on note A l'ensemble des suites géométriques (u_n) de E telles que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1$.
A est-il fermé ? A est-il ouvert ?

Exercice 16.23 : (niveau 3)
Soit S un ensemble non dénombrable de réels.

1°) Montrer que S admet au moins un point d'accumulation ℓ, ce qui signifie que $\ell \in \overline{S \setminus \{\ell\}}$.

2°) Montrer que S possède au moins un ensemble dénombrable de points d'accumulation.

3°) Montrer que l'ensemble des points d'accumulation est un fermé.

4°) Montrer que l'ensemble des points d'accumulation de S n'est pas dénombrable.