DM 21 : Centrale PSI 2009

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel. Il n'est pas à rendre. Un corrigé sera fourni en fin de vacances.

L'énoncé comporte quelques questions de programmation. En 2009, les programmes de CPGE prévoyaient l'utilisation de Maple ou de Mathematica. Vous pouvez répondre à ces questions en utilisant Python.

Calculatrices autorisées

Définitions et notations

On rappelle le résultat suivant : Toute partie X **non vide** de $\mathbf{N}$ possède un plus petit élément noté $\min X$.

On rappelle les points suivants de Maple :

- La liste contenant l'unique élément a est notée $[a]$.
- Le couple (a, b) sera représenté par la liste $[a, b]$.
- Pour ajouter l'élément x (qui peut être un couple) en queue de la liste L on invoque : $L := [\mathrm{op}(L), x]$

Et pour Mathematica :

- La liste contenant l'unique élément a est notée `{a}`.
- Le couple (a, b) sera représenté par la liste `{a,b}`.
- Pour ajouter l'élément x (qui peut être un couple) en queue de la liste L on invoque : `L=Append[L,x]`

On dira qu'une série à termes réels est semi-convergente si elle converge sans converger absolument.

On dira qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs complexes vérifie la propriété (P_1) si pour toute suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ bornée, la série $\sum a_n\, u_n$ converge.

On dira qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs réelles vérifie la propriété (P_2) si pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, la convergence de la série $\sum u_n$ entraîne celle de la série $\sum a_n\, u_n$.

L'objectif du problème est d'étudier, en particulier à l'aide de méthodes algorithmiques, des propriétés et des contre-exemples de la théorie des suites et des séries et de caractériser simplement les suites qui vérifient (P_1) ou (P_2).

Les parties I et II sont indépendantes.

Les correcteurs tiendront compte de la présentation, particulièrement de la position correcte des indices.

Partie I - Réorganisation des termes d'une série semi-convergente

On se donne un réel x. On note, pour $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et on se propose de construire une bijection s de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{N}^*$ telle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_{s(n)} = x$.

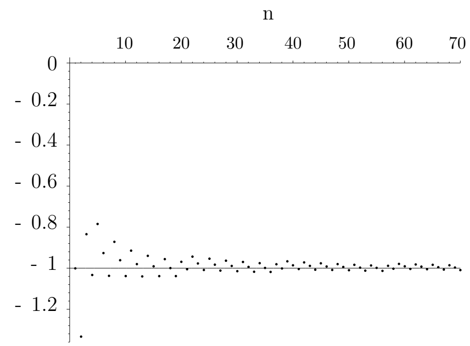
I.A - On définit simultanément par récurrence trois suites d'entiers naturels $(p_n)_{n\geqslant 0}$, $(q_n)_{n\geqslant 0}$ et $(s_n)_{n\geqslant 1}$ et une suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ de réels de la manière suivante :

- $p_0 = q_0 = 0$, $S_0 = 0$
- pour tout $n \in \mathbf{N}$, si $S_n > x$ alors :
  $q_{n+1} = 1 + q_n, \quad p_{n+1} = p_n, \quad s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1$
  sinon : $q_{n+1} = q_n, \quad p_{n+1} = 1 + p_n, \quad s_{n+1} = 2p_{n+1}$
  Dans les deux cas : $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}}$

On aura intérêt à comprendre la construction précédente sous forme algorithmique.

I.A.1) Écrire une fonction `suite` qui prend en argument x et l'entier n et qui renvoie l'affichage de la liste (ou tableau si l'on préfère) $[s_1, s_2, \dots, s_n]$.

I.A.2) En modifiant la fonction précédente de façon à ce qu'elle retourne le dessin simultané de la liste des points de coordonnées $(n, S_n)_{n\leqslant 70}$ et de la droite horizontale d'ordonnée x (on ne demande pas d'écrire cette nouvelle fonction), on obtient pour $\quad x = -1, \quad n = 70$ le dessin suivant :



Que constate-t-on pour la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$? Expliquer le principe de l'algorithme.

I.B - On pose dorénavant, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $s(n) = s_n$.

Prouver, pour $n \geqslant 1$, les propriétés suivantes :

$\{s(1), s(2), \dots, s(n)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}$

$p_n + q_n = n$

$S_n = u_{s(1)} + \cdots + u_{s(n)}$

En déduire que s est injective.

I.C -

I.C.1) Démontrer qu'une suite d'entiers convergente est constante à partir d'un certain rang.

I.C.2) On se propose de démontrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ croît vers $+\infty$.

a) On suppose dans un premier temps que cette suite est majorée.

Utiliser le I.C.1) pour démontrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$,

$$S_n > x \quad \text{et} \quad S_n = S_{n_0} - \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1}.$$

En déduire une contradiction.

b) Déduire du raisonnement précédent que la suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$.

I.C.3) Justifier rapidemment que (q_n) tend vers $+\infty$.

I.C.4) Déduire de ce qui précède que s est une bijection de $\mathbf{N}^*$ sur lui-même.

I.D -

I.D.1) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$|S_{n+1} - x| \leqslant |S_n - x| \quad \text{ou} \quad |S_{n+1} - x| \leqslant |u_{s(n+1)}|$$

I.D.2) En déduire que pour tout naturel N, il existe un entier $n > N$ tel que

$$|S_{n+1} - x| \leqslant |u_{s(n+1)}|$$

I.D.3) Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$, $p_n \geqslant 1$ et $q_n \geqslant 1$.

I.D.4) Soit $n \geqslant n_0$. On note $v_n = \max\big(|S_n - x|,\ |u_{2p_{n+1}}|,\ |u_{2q_{n+1}-1}|\big)$.

Démontrer que $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge vers 0.

I.D.5) Démontrer que (S_n) converge vers x et conclure.

I.E -

I.E.1) Démontrer l'existence d'une constante $\gamma > 0$ telle que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1) \ \text{ quand } n \to +\infty.$$

I.E.2) Donner un développement analogue pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$ en fonction de γ.

I.E.3)

a) Justifier, pour tout naturel n tel que $p_n \geqslant 1$ et $q_n \geqslant 1$, l'égalité :

$$S_n = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1}.$$

b) En déduire que :

$$S_n = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{p_n}{n - p_n}\right) - \ln 2 + o(1).$$

c) En déduire un équivalent simple de p_n et de q_n.

d) Déterminer la limite de :

$$\frac{|u_{s(1)}| + |u_{s(2)}| + \cdots + |u_{s(n)}|}{|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n|} \text{ quand } n \to +\infty.$$

Partie II - Suites vérifiant (P_1) et (P_2)

II.A - Montrer qu'une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que la série $\sum a_n$ converge absolument vérifie (P_1).

II.B - Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

II.B.1) Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ possède une limite.

II.B.2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle telle que la série $\sum u_n$ converge.

On note $U_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Prouver, pour tout entier naturel N, la relation :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n u_n = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - a_{n+1}) U_n + a_N U_N.$$

En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie (P_2).

II.C - Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum |a_n|$ diverge. Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres complexes de module 1 telle que la série $\sum a_n\, u_n$ diverge. Caractériser les suites complexes $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant (P_1).

II.D - Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs telle que la série $\sum a_n$ diverge. On se propose de construire une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tendant vers 0 telle que la série $\sum a_n\,\varepsilon_n$ diverge. Pour cela on définit par récurrence trois suites $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ comme suit :

- $p_0 = 0$, $\varepsilon_0 = 1$, $A_0 = a_0$.
- Pour $n \geqslant 1$: $\begin{cases} p_n = 1 + p_{n-1} \text{ et } \varepsilon_n = \dfrac{\varepsilon_{n-1}}{2} & \text{si } A_{n-1} \geqslant p_{n-1} \\ p_n = p_{n-1} \text{ et } \varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} & \text{sinon} \end{cases}$

Dans tous les cas : $A_n = A_{n-1} + a_n\,\varepsilon_n$.

II.D.1) Dans cette question seulement on suppose que $a_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{9}{4(n+1)}$.

Déterminer les 6 premiers termes des suites $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Ecrire une procédure *exemple* qui prend en argument l'entier n et retourne la liste :

- en Maple : $[[0, p_0, \varepsilon_0, A_0], [1, p_1, \varepsilon_1, A_1], \ldots, [n, p_n, \varepsilon_n, A_n]]$
- en Mathematica : $\{\{0, p_0, \varepsilon_0, A_0\}, \{1, p_1, \varepsilon_1, A_1\}, \ldots, \{n, p_n, \varepsilon_n, A_n\}\}$

II.D.2)

a) Démontrer que pour tout naturel N, il existe un entier $n > N$ tel que :

$p_n = 1 + p_{n-1}$ (on pourra raisonner par l'absurde).

En déduire qu'on peut définir une suite $(n_k)_{k\in\mathbf{N}}$ strictement croissante d'entiers par :

$$\begin{cases} n_0 = 0 \\ n_{k+1} = \min\{n \in \mathbf{N} \;/\; n > n_k \text{ et } p_n = 1 + p_{n-1}\} \quad \text{pour } k \geqslant 0 \end{cases}.$$

b) Dans le cas général, calculer p_{n_k}, ε_{n_k}.

Prouver que la suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0 et que la série $\sum \varepsilon_n\, a_n$ diverge.

c) Déterminer n_1,n_2 et n_3 pour l'exemple de la question III.B.1).

II.D.3) Dans cette question seulement on suppose que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $a_n = \dfrac{1}{n+1}$.

a) Écrire une fonction `indexer` qui prend en argument l'entier n et qui retourne :

- en Maple, la liste $\big[[0, n_0], [1, n_1], \ldots, [q, n_q]\big]$
- en Mathematica la liste $\big\{\{0, n_0\}, \{1, n_1\}, \ldots, \{q, n_q\}\big\}$

où q est le plus grand des entiers k tel que $n_k \leqslant n$. Par exemple l'appel de `indexer`(10000) retourne :

$$\big[[0,0], [1,1], [2,2], [3,51]\big] \quad \Big(\text{resp. } \big\{\{0,0\}, \{1,1\}, \{2,2\}, \{3,51\}\big\}\Big)$$

b) Soit $k \geqslant 3$ un indice tel que $n_k - 2 > n_{k-1}$. Prouver l'inégalité :

$$k - 1 \leqslant A_{n_k - 1} \leqslant k - 1 + \frac{1}{2^{k-1}\, n_k} \text{ En déduire que } n_{k+1} - 2 > n_k.$$

c) Calculer explicitement la différence $A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1}$ en fonction de k, n_k et n_{k+1}. En déduire, pour $k \geqslant 3$, l' inégalité :

$$\frac{1}{2^k} \ln\left(\frac{n_{k+1}+1}{n_k+1}\right) \leqslant A_{n_{k+1}-1} - A_{n_k-1} \leqslant \frac{1}{2^k} \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right).$$

d) Déduire des deux questions précédentes, pour $k \geqslant 3$, l' inégalité :

$$2^k - \frac{2}{n_k} \leqslant \ln\left(\frac{n_{k+1}}{n_k}\right) \leqslant 2^k + \frac{1}{n_{k+1}} - \ln\left(1 + \frac{1}{n_{k+1}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{n_k}\right).$$

e) En utilisant une série convenable, étudier la convergence de la suite de terme général $(\ln n_k - 2^k)$; puis prouver l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$n_k \underset{k\to+\infty}{\sim} C \exp\left(2^k\right).$$

en déduire que : $\quad A_{n_k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(\ln n_k)}{\ln 2}$.

puis que : $\quad A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(\ln n)}{\ln 2}$.

Que peut-on penser de l'exécution de la fonction `indexer` ?

II.E - Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels quelconques telle que, pour toute suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels tendant vers 0, la série $\sum \varepsilon_n\, a_n$ converge.

a) Prouver que la série $\sum \varepsilon_n\, |a_n|$ converge.

b) En déduire que la série $\sum |a_n|$ converge.

II.F - Soit maintenant $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels telle que, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, la convergence de la série $\sum x_n$ entraîne la convergence de la série $\sum a_n\, x_n$.

II.F.1) Prouver que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

II.F.2) Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle de limite nulle. Prouver la convergence de la série $\sum \varepsilon_n\,(a_{n+1} - a_n)$.

II.F.3) Prouver que la série $\sum |a_{n+1} - a_n|$ converge.

II.F.4) Caractériser les suites vérifiant (P_2).

• • • FIN • • •