DS 10 : un corrigé

Partie I

1°) a)
Notons $e = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Pour $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$, notons $u_{i,j}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans e est $E_{i,j}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $u_{i,j}(e_k) = \delta_{k,j} e_i$.
Soit $l \in \mathbb{N}_n$. $u_{i,j} \circ u_{h,k}(e_l) = u_{i,j}(\delta_{k,l} e_h) = \delta_{k,l}\delta_{j,h} e_i$, donc $u_{i,j} \circ u_{h,k}(e_l) = \delta_{j,h} u_{i,k}(e_l)$.
Ainsi, $u_{i,j} \circ u_{h,k} = \delta_{j,h} u_{i,k}$, puis en prenant les matrices de ces endomorphismes,
$\boxed{E_{i,j}E_{h,k} = \delta_{j,h}E_{i,k}}$.

1°) b)
$\boxed{\text{La famille } (E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ est la base canonique de } \mathcal{M}_n.}$

1°) c)
$i \neq j$, donc $I_n + \lambda E_{i,j}$ est une matrice triangulaire supérieure ou inférieure dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1.
On en déduit que $\boxed{det(I_n + \lambda E_{i,j}) = 1}$.

1°) d)
• $(I_n + \lambda E_{i,j})(I_n + \mu E_{h,k}) = I_n + \lambda E_{i,j} + \mu E_{h,k} + \lambda\mu\delta_{j,h}E_{i,k}$, or $j \neq h$, donc
$\boxed{(I_n + \lambda E_{i,j})(I_n + \mu E_{h,k}) = I_n + \lambda E_{i,j} + \mu E_{h,k}}$.
• En particulier, $(I_n + \lambda E_{i,j})(I_n - \lambda E_{i,j}) = I_n + \lambda E_{i,j} - \lambda E_{i,j} = I_n$, donc
$\boxed{\text{l'inverse de } I_n + \lambda E_{i,j} \text{ est } I_n - \lambda E_{i,j}}$.

2°) a)
Notons $L_1, \ldots, L_n$ les lignes de la matrice A.
Si $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n$, d'après le cours,
pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, la $i^{\text{ème}}$ ligne de BA est égale à $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}L_j$.
En particulier, lorsque $B = I_n + \lambda E_{i,j}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$ avec $i \neq j$, les lignes de BA sont celles de A, sauf la $i^{\text{ème}}$ ligne qui est égale à $L_i + \lambda L_j$.
Ainsi, en multipliant A à gauche par la matrice de transvection $I_n + \lambda E_{i,j}$, on modifie seulement la $i^{\text{ème}}$ ligne de A en lui ajoutant le produit de la $j^{\text{ème}}$ ligne par λ, ce qui correspond à la transformation de la matrice A par l'opération élémentaire

$L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$.

2°) b)
Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice A.
Si $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n$, d'après le cours,

pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, la $i^{\text{ème}}$ colonne de AB est égale à $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} C_j b_{j,i}$.

Ainsi, en multipliant A à droite par la matrice de transvection $I_n + \lambda E_{i,j}$, on modifie seulement la $j^{\text{ème}}$ colonne de A en lui ajoutant le produit de la $i^{\text{ème}}$ colonne par λ, ce qui correspond à la transformation de la matrice A par l'opération élémentaire $C_j \longleftarrow C_j + \lambda C_i$.

3°)
- Soit $M, N \in \mathcal{M}_n$. On définit sur $\mathcal{M}_n$ la relation binaire R en convenant que $M\ R\ N$ si et seulement si il existe deux matrices P et Q de $\mathcal{M}_n$, produits de matrices de transvection, telles que $N = PMQ$.

La relation R est réflexive, car I_n est un produit vide de transvection.
La relation R est symétrique car, d'après la question 1.d, l'inverse d'une matrice de transvection est une matrice de transvection, donc l'inverse d'un produit de matrices de transvection est encore un produit de matrices de transvection.
Si $M\ R\ N$ et $N\ R\ O$, où $M, N, O \in \mathcal{M}_n$, alors il existe P, Q, P', Q', produits de matrices de transvection, telles que $N = PMQ$ et $O = P'NQ'$. Alors $O = (P'P)M(QQ')$, donc $M\ R\ O$.
Ceci démontre que R est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n$.
On nous demande donc de démontrer que la classe d'équivalence de A contient une matrice $B = (b_{i,j})$ telle que $b_{1,1} = 1$ et, pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, $b_{i,1} = b_{1,i} = 0$.

- *P*remier cas. On suppose que $a_{1,1} = 1$.

D'après la question 2, A est équivalente modulo R à la matrice déduite de A par la succession d'opérations élémentaires suivante : pour q variant de 2 à j,
$L_q \longleftarrow L_q - a_{q,1}L_1$ et pour q variant de 2 à j, $C_q \longleftarrow C_q - a_{1,q}C_1$, et, si l'on note $B = (b_{i,j})$ cette nouvelle matrice, on a bien $b_{1,1} = 1$ et, pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, $b_{i,1} = b_{1,i} = 0$.

- *D*euxième cas. On suppose qu'il existe $i \in \{2, \dots, n\}$ tel que $a_{i,1} \neq 0$.

A est équivalente modulo R à la matrice A', déduite de A par l'opération élémentaire $L_1 \longleftarrow L_1 + \dfrac{1 - a_{1,1}}{a_{i,1}} L_i$. Or, le coefficient de position $(1, 1)$ de A' est égal à

$a_{1,1} + \dfrac{1 - a_{1,1}}{a_{i,1}} a_{i,1} = 1$, donc on peut appliquer le premier cas à la matrice A'.

- *T*roisième cas. On suppose qu'il existe $i \in \{2, \dots, n\}$ tel que $a_{1,i} \neq 0$.

On raisonne comme au deuxième cas en utilisant la matrice A' déduite de A par l'opération élémentaire $C_1 \longleftarrow C_1 + \dfrac{1 - a_{1,1}}{a_{1,i}} C_i$.

- *Q*uatrième cas. On suppose que l'on n'est dans aucun des cas précédents. Ainsi, $a_{1,1} \neq 1$ et, pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, $a_{1,i} = a_{i,1} = 0$.

Si $a_{1,1}=0$, la première ligne et la première colonne de A sont nulles, ce qui est faux, donc $a_{1,1}\neq 0$. On peut alors appliquer le deuxième cas à la matrice $A'=(I_n+a_{1,1}E_{2,1})A$, dont le coefficient de position $(2,1)$ est égal à $a_{1,1}$.

4°)

• Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante : pour tout $A\in\mathcal{M}_n\setminus\{0\}$, de rang r, A est équivalente modulo R à une matrice diagonale $B=(b_{i,j})$ telle que

i) pour tout $i\in\mathbb{N}_{r-1}$, $b_{i,i}=1$,

ii) pour tout $i\in\{r+1,\dots,n\}$, $b_{i,i}=0$,

iii) Si $r<n$, $b_{r,r}=1$ et si $r=n$, $b_{r,r}=det(A)$.

• Pour $n=2$, soit $A\in\mathcal{M}_2\setminus\{0\}$ une matrice dont le rang est noté r.
L'une des colonnes de A est non nulle, donc, quitte à ajouter cette colonne à la première colonne, on peut supposer, en restant dans la même classe d'équivalence de A, que la première colonne de A est non nulle, ce qui permet d'appliquer la troisième question.
Ainsi, A est équivalente à une matrice B de la forme $\begin{pmatrix}1&0\\0&b\end{pmatrix}$, où $b\in\mathbb{R}$.
D'après 1.c, tout produit de matrices de transvection est déterminant égal à 1, donc $b=\det(B)=\det(A)$, donc $R(2)$ est prouvée.

• Pour $n\geq 2$, supposons $R(n)$ et prouvons $R(n+1)$.
Soit $A\in\mathcal{M}_{n+1}\setminus\{0\}$ une matrice dont le rang est noté r.
L'une des colonnes de A est non nulle, donc, quitte à ajouter cette colonne à la première colonne, on peut supposer, en restant dans la même classe d'équivalence de A, que la première colonne de A est non nulle, ce qui permet d'appliquer la troisième question.
Ainsi, A est équivalente à une matrice C qui se décompose par blocs sous la forme suivante : $C=\begin{pmatrix}1&0_{1,n}\\0_{n,1}&A'\end{pmatrix}$, où $A'\in\mathcal{M}_n$.

◇ On notera que $rg(A)=1+rg(A')$: en effet, $rg(A)=rg(C)=rg(e_1,C_2,\dots,C_{n+1})$ où C_j désigne la j-ième colonne de C.
On a $Vect(C_2,\dots,C_{n+1})\cap Vect(e_1)=\{0\}$,
donc $rg(A)=dim(Vect(e_1)\oplus Vect(C_2,\dots,C_{n+1}))=1+rg(C_2,\dots,C_{n+1})=1+rg(A')$.

◇ Si $A'=0$, $r=1$, donc B vérifie les propriétés i), ii) et iii) de l'assertion $R(n+1)$.

◇ Si $A'\neq 0$, d'après $R(n)$, il existe deux produits de transvections, notés P et Q tels que $PA'Q=B$ vérifie les propriétés de l'assertion $R(n)$.
Or, si T est une matrice de transvection de $\mathcal{M}_n$, on vérifie que la matrice blocs $\begin{pmatrix}1&0_{1,n}\\0_{n,1}&T\end{pmatrix}$ est une matrice de transvection de $\mathcal{M}_{n+1}$. On en déduit que si T est un produit de matrices de transvection, alors la matrice blocs $\begin{pmatrix}1&0_{1,n}\\0_{n,1}&T\end{pmatrix}$ est aussi un produit de matrices de transvection.
Or $\begin{pmatrix}1&0_{1,n}\\0_{n,1}&P\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0_{1,n}\\0_{n,1}&A'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0_{1,n}\\0_{n,1}&Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0_{1,n}\\0_{n,1}&B\end{pmatrix}$, donc A et C sont équivalentes à la matrice $\begin{pmatrix}1&0_{1,n}\\0_{n,1}&B\end{pmatrix}$, laquelle vérifie les propriétés requises pour l'assertion $R(n+1)$.

5°) Notons G_n le groupe engendré par les transvections.
L'inverse d'une matrice de transvection est encore une matrice de transvection d'après 1.d, donc d'après le cours, G_n est l'ensemble des produits de matrices de transvection.
Toute matrice de transvection est de déterminant égal à 1,
donc $G_n \subset \{A \in \mathcal{M}_n / det(A) = 1\}$.
Réciproquement, soit $A \in \mathcal{M}_n$ telle que $\det(A) = 1$. Alors A est non nulle, donc on peut appliquer la question précédente. On en déduit que A est équivalente modulo R à I_n, c'est-à-dire qu'il existe $(P, Q) \in G_n^2$ tel que $A = PI_nQ = PQ$. Ainsi, $A \in G_n$.
En conclusion, $G_n = \{M \in \mathcal{M}_n \ / \ \det(M) = 1\}$, ce qu'il fallait démontrer.

6°) a)
Soit $(a, \alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n$ avec $\alpha \neq \beta$. $n \geq 3$, donc il existe $j \in \mathbb{N}_n \setminus \{\alpha, \beta\}$. Ainsi, en posant $M = (I_n + aE_{\alpha,j})(I_n + E_{j,\beta})(I_n + aE_{\alpha,j})^{-1}(I_n + E_{j,\beta})^{-1}$, on calcule :

$$\begin{aligned} M &= (I_n + aE_{\alpha,j})(I_n + E_{j,\beta})(I_n - aE_{\alpha,j})(I_n - E_{j,\beta}) \\ &= (I_n + aE_{\alpha,j} + E_{j,\beta} + aE_{\alpha,\beta})(I_n - aE_{\alpha,j} - E_{j,\beta} + aE_{\alpha,\beta}) \\ &= I_n - aE_{\alpha,j} - E_{j,\beta} + aE_{\alpha,\beta} + aE_{\alpha,j} - aE_{\alpha,\beta} + E_{j,\beta} + aE_{\alpha,\beta} \\ &= I_n + aE_{\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

6°) b)
Soit T une matrice de transvection. D'après a), il existe deux matrices de transvection T' et $T"$ telles que $T = T'T"T'^{-1}T"^{-1}$, donc

$$\begin{aligned} f(T) &= f(T')f(T")f(T'^{-1})f(T"^{-1}) = f(T')f(T'^{-1})f(T")f(T"^{-1}) \\ &= f(T'T'^{-1})f(T"T"^{-1}) = f(I_n)f(I_n) = f(I_n), \end{aligned}$$

or I_n est diagonale, donc $f(I_n)$ est égal au produit de ses coefficients diagonaux. Ainsi $f(I_n) = 1$. On en déduit que, pour tout matrice A de transvection, $\boxed{f(A) = 1}$. C'est donc encore vrai pour tout élément de G_n.

6°) c)
Soit $A \in \mathcal{M}_n$.
Si $A = 0$, A est diagonale, donc $f(A) = 0 = det(A)$.
Si $A \neq 0$, en notant r le rang de A, il existe $(P, Q) \in G_n^2$ tel que
la matrice $B = PAQ = (b_{i,j})$ est diagonale avec $b_{i,i} = 1$ pour tout $i \in \mathbb{N}_{r-1}$, $b_{i,i} = 0$ pour tout $i > r$, $b_{r,r} = 1$ si $r < n$ et $b_{r,r} = det(A)$ si $r = n$.
$f(A) = f(P)f(A)f(Q) = f(PAQ) = f(B)$, or $f(B) = 0$ si $rg(A) < n$, et
$f(B) = det(A)$ si $rg(A) = n$. Ainsi, dans tous les cas, $f(A) = f(B) = det(A)$.
On a donc montré que $\boxed{f = det}$.

Partie II

1°)
- Soit $(A, B, \lambda, \mu) \in \mathcal{M}_n \times \mathcal{M}_n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Notons $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\lambda A+\mu B) &= \mathrm{Tr}((\lambda a_{i,j}+\mu b_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}) = \sum_{i=1}^n(\lambda a_{i,i}+\mu b_{i,i})\\ &= \lambda\sum_{i=1}^n a_{i,i}+\mu\sum_{i=1}^n b_{i,i} = \lambda\mathrm{Tr}(A)+\mu\mathrm{Tr}(B),\end{aligned}$$

donc Tr est une forme linéaire.

- Soit $(A,B)\in\mathcal{M}_n^2$. Notons $A=(a_{i,j})$ et $B=(b_{i,j})$.

$\mathrm{Tr}(AB)=\displaystyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{j,i}=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n b_{j,i}a_{i,j}=\mathrm{Tr}(BA)$.

2°) a)

$\sigma(E_{i,j})=\sigma(E_{i,i}E_{i,j})=\sigma(E_{i,j}E_{i,i})=\sigma(0)=0$, donc $\boxed{\sigma(E_{i,j})=0}$.

2°) b)

Soit $(i,j)\in\mathbb{N}_n^2$ avec $i\neq j$.

$\sigma(E_{i,i})=\sigma(E_{i,j}E_{j,i})=\sigma(E_{j,i}E_{i,j})=\sigma(E_{j,j})$.

2°) c)

Soit $M\in\mathcal{M}_n$. Notons $M=(m_{i,j})$. σ étant linéaire,

$$\begin{aligned}\sigma(M) &= \sigma(\sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}} m_{i,j}E_{i,j}) = \sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}} m_{i,j}\sigma(E_{i,j})\\ &= \sum_{i=1}^n m_{i,i}\sigma(E_{i,i}) = \sigma(E_{1,1})\sum_{i=1}^n m_{i,i} = \sigma(E_{1,1})\mathrm{Tr}(M).\end{aligned}$$

3°)

- Pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}_n^2$ tel que $i\neq j$, $E_{i,j}=E_{i,i}E_{i,j}-E_{i,j}E_{i,i}\in\mathcal{T}$ et, pour tout $i\in\{2,\dots,n\}$, $E_{i,i}-E_{1,1}=E_{i,1}E_{1,i}-E_{1,i}E_{i,1}\in\mathcal{T}$, donc la réunion des familles $(E_{i,i}-E_{1,1})_{2\le i\le n}$ et $(E_{i,j})_{i\neq j}$ est une famille de vecteurs de $\mathcal{T}$, que l'on notera e.

Montrons que e est une famille libre.

Soient $(\alpha_{i,i})_{2\le i\le n}$ et $(\alpha_{i,j})_{i\neq j}$ deux familles de réels telles que

$\displaystyle\sum_{i=2}^n\alpha_{i,i}(E_{i,i}-E_{1,1})+\sum_{i\neq j}\alpha_{i,j}E_{i,j}=0$.

Ainsi, $0=-\Big(\displaystyle\sum_{i=2}^n\alpha_{i,i}\Big)E_{1,1}+\sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}_n^2\\(i,j)\neq(1,1)}}\alpha_{i,j}E_{i,j}$. Or la famille $(E_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$ est libre, donc, pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}_n^2$ tel que $(i,j)\neq(1,1)$, $\alpha_{i,j}=0$. Ainsi, la famille e est libre.

On en déduit que $\dim(\mathcal{T})\ge card(e)=n^2-1$.

- D'autre part, pour tout $(A,B)\in\mathcal{M}_n^2$, $\mathrm{Tr}(AB-BA)=\mathrm{Tr}(AB)-\mathrm{Tr}(BA)=0$, donc, la trace de toute combinaison linéaire de matrices de la forme $AB-BA$ est nulle. Ainsi, $\mathcal{T}\subset\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.

On en déduit que $\dim(\mathcal{T})\le\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}))=n^2-rg(\mathrm{Tr})$.

Or Tr est une forme linéaire non nulle (car, par exemple, $\mathrm{Tr}(I_n)=n\neq0$), donc $rg(\mathrm{Tr})=1$, ce qui prouve que $\dim(\mathcal{T})\le n^2-1$.

Ainsi, $\boxed{\dim(\mathcal{T})=n^2-1}$.

• Soit $A \in \mathcal{H} \cap \mathcal{T}$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$.
De plus, $A \in \mathcal{T}$, donc $0 = \text{Tr}(A) = n\lambda$. On en déduit que $\lambda = 0$ puis que $A = 0$. Ainsi $\mathcal{H} \cap \mathcal{T} = \{0\}$, ce qui prouve que la somme de $\mathcal{T}$ et de $\mathcal{H}$ est directe.
De plus, $\mathcal{H}$ est la droite vectorielle engendrée par I_n, donc $\dim(\mathcal{T} \oplus \mathcal{H}) = n^2 - 1 + 1 = n^2$.
Ainsi, $\mathcal{T} \oplus \mathcal{H} = \mathcal{M}_n$.

4°)

$$\begin{aligned} F_{h,k}^{-1} F_{i,j} F_{h,k} &= (I_n - E_{h,k})(I_n + E_{i,j})(I_n + E_{h,k}) \\ &= (I_n - E_{h,k} + E_{i,j} - \delta_{k,i} E_{h,j})(I_n + E_{h,k}) \\ &= I_n - E_{h,k} + E_{i,j} - \delta_{k,i} E_{h,j} + E_{h,k} + \delta_{j,h} E_{i,k} - \delta_{k,i} \delta_{j,h} E_{h,k} \\ &= I_n + E_{i,j} - \delta_{k,i} E_{h,j} + \delta_{j,h} E_{i,k} - \delta_{k,i} \delta_{j,h} E_{h,k}. \end{aligned}$$

5°)
Soit $(i, k) \in \mathbb{N}_n^2$ tel que $i \neq k$. D'après la question précédente,
$F_{i,k}^{-1} F_{i,i} F_{i,k} = I_n + E_{i,i} + E_{i,k} = F_{i,i} + E_{i,k}$, donc
$\theta(F_{i,i}) = \theta((F_{i,i} F_{i,k}) F_{i,k}^{-1}) = \theta(F_{i,k}^{-1} F_{i,i} F_{i,k}) = \theta(F_{i,i}) + \theta(E_{i,k})$,
ce qui prouve que $\theta(E_{i,k}) = 0$, pour tout couple $(i, k) \in \mathbb{N}_n^2$ tel que $i \neq k$.
Soit $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$ tel que $i \neq j$.
$F_{j,i}^{-1} F_{i,j} F_{j,i} = I_n + E_{i,j} - E_{j,j} + E_{i,i} - E_{j,i}$,
donc $\theta(F_{i,j}) = \theta(F_{j,i}^{-1} F_{i,j} F_{j,i}) = \theta(F_{i,j}) - \theta(E_{j,j}) + \theta(E_{i,i}) - \theta(E_{j,i})$, or $\theta(E_{i,j}) = 0$, donc $\theta(E_{j,j}) = \theta(E_{i,i})$.
En reprenant alors la démonstration de la question 2.c, on montre qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\theta = \lambda \text{Tr}$.

Partie III

• Remarquons que la définition donnée par l'énoncé pour un automorphisme d'algèbre n'est pas exactement celle du cours. En effet, selon l'énoncé, pour que A soit un automorphisme de $\mathcal{L}(E)$, il n'est pas nécessaire que $A(Id) = Id$.

1°) a.
◇ $Id_{\mathcal{L}(E)} \in \mathcal{A}ut(E)$, donc $\mathcal{A}ut(E)$ est non vide.
◇ Soit $(A, B) \in \mathcal{A}ut(E)^2$. Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$.
$(A \circ B)(u \circ v) = A(B(u \circ v)) = A(B(u) \circ B(v)) = (A \circ B)(u) \circ (A \circ B)(v)$.
De plus, $A \circ B$ est linéaire et bijective en tant que produit d'applications linéaires et bijectives, donc $A \circ B \in \mathcal{A}ut(E)$.
◇ Soit $A \in \mathcal{A}ut(E)$. Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)$.
$A^{-1}[u \circ v] = A^{-1}[A(A^{-1}(u)) \circ A(A^{-1}(v))] = A^{-1}(A[A^{-1}(u) \circ A^{-1}(v)]) = A^{-1}(u) \circ A^{-1}(v)$.
De plus, A^{-1} est linéaire et bijective, donc $A^{-1} \in \mathcal{A}ut(E)$.
Ceci démontre que, pour la composition des applications, $\mathcal{A}ut(E)$ est un sous-groupe de $S(E)$, l'ensemble des bijections de E dans E.

b.

• Soit $g \in \mathcal{GL}(E)$. Soit $(u,v) \in \mathcal{L}(E)^2$.
$A_g(u \circ v) = g \circ u \circ v \circ g^{-1} = g \circ u \circ g^{-1} g \circ v \circ g^{-1} = A_g(u) \circ A_g(v)$,
et, si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $A_g(\lambda u + \mu v) = g \circ (\lambda u + \mu v) g^{-1} = \lambda A_g(u) + \mu A_g(v)$.
De plus, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $A_g \circ A_{g^{-1}}(u) = A_{g^{-1}} \circ A_g(u) = u$, donc $A_g \in \mathcal{A}ut(E)$.
• Ainsi, l'application χ est correctement définie.
Montrons que c'est un morphisme de groupes. Soit $(g, g') \in \mathcal{GL}(E)^2$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
$A_g \circ A_{g'}(u) = g \circ g' \circ u \circ g'^{-1} g^{-1} = (g \circ g') \circ u \circ (g \circ g')^{-1} = A_{g \circ g'}(u)$, donc $A_g \circ A_{g'} = A_{g \circ g'}$.
• Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $A_{\lambda I_n} = Id_{\mathcal{L}(E)}$, donc χ n'est pas injective.

2°) a)
Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $(x, g(x))$ est liée, donc il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = \lambda_x x$.
Il reste à montrer que l'application $x \longmapsto \lambda_x$ est constante sur $E \setminus \{0\}$.
Soit $(x, y) \in (E \setminus \{0\})^2$.
*P*remier cas. On suppose que (x, y) est libre.
Alors $x + y \neq 0$. Ainsi, on peut écrire :
$\lambda_{x+y}(x+y) = g(x+y) = g(x) + g(y) = \lambda_x x + \lambda_y y$, donc $(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0$.
Alors ce qui précède implique que $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.
*D*euxième cas. On suppose que (x, y) est lié.
$\dim(E) = n \geq 2$, donc il existe $z \in E$ tel que (x, z) et (z, y) sont libres. D'après le premier cas, $\lambda_x = \lambda_z = \lambda_y$.
Ainsi, dans tous les cas, $\lambda_x = \lambda_y$. Notons λ la valeur constante de l'application $x \longmapsto \lambda_x$ définie sur $E \setminus \{0\}$. Alors, $g = \lambda Id$.

2°) b)
Soit $g \in \mathrm{Ker}(\chi)$. $A_g = Id$, donc, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $g \circ u \circ g^{-1} = u$. En particulier, pour tout $u \in \mathcal{GL}(E)$, $g = u^{-1} \circ g \circ u$. D'après la formule de changement de base, la matrice de g est la même dans toute base de E.
Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Supposons que $(x, g(x))$ est libre. On peut alors compléter cette famille en une base de E. Dans cette base, la matrice de g a pour première colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, donc c'est le cas dans toute base de E.
Or $(x, -g(x))$ est également un système libre que l'on peut compléter en une base de E. Dans cette base, la première colonne de la matrice de g est égale à $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. C'est impossible, donc $(x, g(x))$ est une famille liée.
D'après la question a), il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g = \lambda Id$. De plus $g \in \mathcal{GL}(E)$, donc $\lambda \neq 0$.
Réciproquement, si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a déjà remarqué lors de la première question que $\lambda Id \in \mathrm{Ker}(\chi)$.

En conclusion, $\boxed{\mathrm{Ker}(\chi) = \{\lambda Id/\lambda \in \mathbb{R}^*\}}$.

3°) a)

- Soit $(\lambda, \mu, y, y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E \times E$.

$$\begin{aligned} u_{\varphi,x}(\lambda y + \mu y') &= \varphi(\lambda y + \mu y')x = (\lambda\varphi(y) + \mu\varphi(y'))x \\ &= \lambda(\varphi(y)x) + \mu(\varphi(y')x) = \lambda u_{\varphi,x}(y) + \mu u_{\varphi,x}(y'). \end{aligned}$$

Ainsi, $u_{\varphi,x} \in \mathcal{L}(E)$.

- Si $\varphi = 0$ ou si $x = 0$, alors $u_{\varphi,x} = 0$, donc son image est $\{0\}$ et son noyau est E.

Pour la suite de cette question, on suppose que $\varphi \neq 0$ et que $x \neq 0$.

- Soit $z \in E$. $z \in \mathrm{Ker}(u_{\varphi,x}) \iff \varphi(z)x = 0 \iff \varphi(z) = 0$, donc $\boxed{\mathrm{Ker}(u_{\varphi,x}) = \mathrm{Ker}(\varphi)}$

Il s'agit d'un hyperplan de E.

Ainsi, $\mathrm{Ker}(u_{\varphi,x}) \neq E$, donc $u_{\varphi,x} \neq 0$ et $rg(u_{\varphi,x}) \geq 1$.

De plus, $Im(u_{\varphi,x}) \subset Vect(x)$ et $Vect(x)$ est une droite vectorielle,

donc $\boxed{Im(u_{\varphi,x}) = Vect(x)}$.

3°) b)

Supposons que $u_{\varphi,x}$ est un projecteur non nul. $x \in Im(u_{\varphi,x})$, donc $x = u_{\varphi,x}(x) = \varphi(x)x$.

De plus, $x \neq 0$ car $u_{\varphi,x} \neq 0$, donc $\varphi(x) = 1$.

Réciproquement, supposons que $\varphi(x) = 1$. Soit $y \in E$.

$u_{\varphi,x}^2(y) = u_{\varphi,x}(\varphi(y)x) = \varphi(y)\varphi(x)x = \varphi(y)x = u_{\varphi,x}(y)$, donc $u_{\varphi,x}^2 = u_{\varphi,x}$.

En conclusion, $\boxed{u_{\varphi,x} \text{ est un projecteur non nul si et seulement si } \varphi(x) = 1.}$

4°)

Soit $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$. Pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $u_{e_j^*,e_i}(e_k) = e_j^*(e_k)e_i = \delta_{j,k}e_i$, donc, en notant e la base $(e_1, \ldots, e_n)$, $\boxed{mat(u_{e_j^*,e_i}, e) = E_{i,j}}$. On en déduit que

a) d'après I.1.a, pour tout $(i, j, h, k) \in \mathbb{N}_n^4$, $u_{i,j} \circ u_{h,k} = \delta_{j,h}u_{i,k}$, et que

b) la famille $(u_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ est une base, en tant qu'image de la base canonique de $\mathcal{M}_n$ par l'isomorphisme réciproque de $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n \\ u & \longmapsto & mat(u, e) \end{array}$

5°) a)

◇ *R*éflexivité. Soit $p \in \mathcal{P}$. $p = p^2$, donc $p \leq p$.

◇ *A*ntisymétrie. Soit $(p, q) \in \mathcal{P}^2$ tel que $p \leq q$ et $q \leq p$. Alors $p = p \circ q = q$.

◇ *T*ransivité. Soit $(p, q, r) \in \mathcal{P}^3$ tel que $p \leq q$ et $q \leq r$.

Alors $p \circ r = (p \circ q) \circ r = p \circ (q \circ r) = p \circ q = p$ et $r \circ p = r \circ (q \circ p) = (r \circ q) \circ p = q \circ p = p$, donc $p \leq r$.

- Soit D une droite vectorielle et H un supplémentaire de D dans E. Notons p le projecteur sur D parallèlement à H et q le projecteur sur H parallèlement à D.

$\dim(D) = 1$ et $\dim(H) = n - 1 > 0$, donc p et q sont deux projecteurs non nuls.

De plus, $p \circ q = q \circ p = 0$, donc p et q ne sont pas comparables pour la relation d'ordre de l'énoncé. Ainsi, $\boxed{\text{cette relation d'ordre n'est pas totale}}$.

5°) b)

Soit $p \in \mathcal{P}$.

- "i)$\Longrightarrow$ii)". On suppose que $rg(p) = 1$.

Soit $q \in \mathcal{P}$ tel que $q \leq p$. Ainsi, $q = p \circ q = q \circ p$.
On en déduit que $Im(q) \subset Im(p)$ et que $\mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Ker}(q)$.
$q \neq 0$, donc $1 \leq rg(q) \leq rg(p) = 1$, donc $rg(q) = rg(p)$. Ainsi, $Im(p)$ et $Im(q)$ ont la même dimension, et, d'après la formule du rang, $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Ker}(q)$ ont également la même dimension. Ainsi, p et q sont tous les deux égaux au projecteur sur $Im(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$. On a donc prouvé que $p = q$.
Ainsi, p est un élément minimal de $\mathcal{P}$.
• "ii)$\Longrightarrow$iii)". On suppose que p est minimal.
$p \neq 0$, donc $Im(p) \neq \{0\}$. Ainsi, il existe $d_1 \in Im(p) \setminus \{0\}$.
Complétons (d_1) en une base de $Im(p)$ notée $(d_1, \ldots, d_r)$ et notons $(d_{r+1}, \ldots, d_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(p)$.
p étant un projecteur, $E = Im(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$, donc $d = (d_1, \ldots, d_n)$ est une base de E.
Notons $d^* = (d_1^*, \ldots, d_n^*)$ sa base duale.
$d_1^*(d_1) = 1$, donc, d'après 3.b, $u_{d_1^*,d_1} \in \mathcal{P}$.
Soit $y \in E$. $p \circ u_{d_1^*,d_1}(y) = p(d_1^*(y)d_1) = d_1^*(y)p(d_1) = d_1^*(y)d_1$ car $d_1 \in Im(p)$, donc $p \circ u_{d_1^*,d_1} = u_{d_1^*,d_1}$.
De plus, $u_{d_1^*,d_1} \circ p(y) = d_1^*(p(y))d_1 = d_1^*[(p(y) - y) + y]d_1 = d_1^*(y)d_1$, car
$p(y) - y \in \mathrm{Ker}(p) = Vect(d_{r+1}, \ldots, d_n)$. Ainsi, $u_{d_1^*,d_1} \circ p = u_{d_1^*,d_1}$.
Donc $u_{d_1^*,d_1} \leq p$, or p est minimal, donc $p = u_{d_1^*,d_1}$ et $d_1^*(d_1) = 1$.
• "iii)$\Longrightarrow$i)". On suppose qu'il existe $(\varphi, x) \in E^* \times E$ tel que $p = u_{\varphi,x}$ avec $\varphi(x) = 1$.
D'après 3.b, $p \in \mathcal{P}$, et, d'après 3.a, $rg(p) = 1$.

6°) a)
Soit $p \in \mathcal{P}$. $p \neq 0$ et A est bijectif, donc $A(p) \neq 0$.
De plus, $A(p)^2 = A(p^2) = A(p)$, donc, $\boxed{\text{si } p \in \mathcal{P}, \text{ alors } A(p) \in \mathcal{P}}$.

6°) b)
Soit p un élément minimal de $\mathcal{P}$.
Montrons que $\boxed{A(p) \text{ est également un élément minimal de } \mathcal{P}}$.
Soit $q \in \mathcal{P}$ tel que $q \leq A(p)$. Ainsi, (1) : $q = q \circ A(p) = A(p) \circ q$.
$A^{-1} \in \mathcal{A}ut(E)$, donc, d'après le a), $r = A^{-1}(q) \in \mathcal{P}$. Alors, en composant (1) par A^{-1}, on obtient : $r = r \circ p = p \circ r$, donc $r \leq p$, or p est minimal, donc $p = r$. On en déduit que $A(p) = A(r) = q$.

6°) c)
Soit $i \in \mathbb{N}_n$. $u_{i,i} \in \mathcal{P}$ et $rg(u_{i,i}) = 1$, donc $u_{i,i}$ est un élément minimal de $\mathcal{P}$. Alors $A(u_{i,i})$ est également un élément minimal de $\mathcal{P}$.
D'après la question 5.b.iii), il existe $(\varphi_i, \varepsilon_i) \in E^* \times E$ tel que $A(u_{i,i}) = u_{\varphi_i,\varepsilon_i}$
et $\varphi_i(\varepsilon_i) = 1$.

6°) d)
• Soit $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$.
Pour tout $y \in E$, $u_{\varphi_i,\varepsilon_i} \circ u_{\varphi_j,\varepsilon_j}(y) = u_{\varphi_i,\varepsilon_i}(\varphi_j(y)\varepsilon_j) = \varphi_j(y)\varphi_i(\varepsilon_j)\varepsilon_i$, donc
$u_{\varphi_i,\varepsilon_i} \circ u_{\varphi_j,\varepsilon_j} = \varphi_i(\varepsilon_j)u_{\varphi_j,\varepsilon_i}$.
D'autre part, $u_{\varphi_i,\varepsilon_i} \circ u_{\varphi_j,\varepsilon_j} = A(u_{i,i} \circ u_{j,j}) = \delta_{i,j}A(u_{i,j})$.

Premier cas. Supposons que $i \neq j$.
Alors $\varphi_i(\varepsilon_j)u_{\varphi_j,\varepsilon_i} = 0$, or $u_{\varphi_j,\varepsilon_i}(\varepsilon_j) = \varepsilon_i \neq 0$, donc $u_{\varphi_j,\varepsilon_i} \neq 0$. Ainsi, $\varphi_i(\varepsilon_j) = 0$.
Deuxième cas. On suppose que $i = j$.
On sait déjà que $\varphi_i(\varepsilon_i) = 1$.
En conclusion, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$, $\boxed{\varphi_i(\varepsilon_j) = \delta_{i,j}}$.

6°) e) Soit $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de réels telle que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varepsilon_i = 0$.

Soit $j \in \mathbb{N}_n$. Alors $0 = \varphi_j(0) = \varphi_j\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varepsilon_i\Big) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\delta_{i,j} = \alpha_j$. Ceci démontre que $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille libre de n vecteurs de E, or $\dim(E) = n$, donc c'est une base de E.
De plus, si $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\varepsilon_i$, alors un calcul similaire donne : $\varphi_j(x) = \alpha_j$. Ceci démontre que $(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$ est la base duale de $(\varepsilon_i)_{1\leq i\leq n}$. On la notera également $(\varepsilon_i^*)_{1\leq i\leq n}$.

7°) a)
$A(u_{i,j}) \circ u_{\varphi_k,\varepsilon_k} = A(u_{i,j} \circ u_{k,k}) = A(0) = 0$.
Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}_n \setminus \{j\}$, $A(u_{i,j})(\varepsilon_k) = A(u_{i,j}) \circ u_{\varphi_k,\varepsilon_k}(\varepsilon_k) = 0$,
donc $Vect((\varepsilon_k)_{\substack{1\leq k\leq n\\ k\neq j}}) \subset \mathrm{Ker}(A(u_{i,j}))$.
De plus, $u_{i,j} \neq 0$, donc $A(u_{i,j}) \neq 0$ et $\dim(\mathrm{Ker}(A(u_{i,j}))) \leq n-1$.
On en déduit que $\boxed{Vect((\varepsilon_k)_{\substack{1\leq k\leq n\\ k\neq j}}) = \mathrm{Ker}(A(u_{i,j}))}$ et que $\boxed{rg(A(u_{i,j})) = 1}$.

7°) b)
$\boxed{A(u_{i,j}) \circ A(u_{j,i}) = A(u_{i,i})}$.
Ainsi, $\varepsilon_i = u_{\varphi_i,\varepsilon_i}(\varepsilon_i) = A(u_{i,i})(\varepsilon_i) = A(u_{i,j})(A(u_{j,i})(\varepsilon_i)) \in Im(A(u_{i,j}))$. De plus, $rg(A(u_{i,j})) = 1$, donc $\boxed{Im(A(u_{i,j})) = Vect(\varepsilon_i)}$.

7°) c)
Posons $\boxed{\lambda_{i,j} = \varepsilon_i^*[A(u_{i,j})(\varepsilon_j)]}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}_n \setminus \{j\}$, $A(u_{i,j})(\varepsilon_k) = 0 = \lambda_{i,j}u_{\varphi_j,\varepsilon_i}(\varepsilon_k)$.
De plus, $A(u_{i,j})(\varepsilon_j) \in Im(A(u_{i,j})) = Vect(\varepsilon_i)$,
donc $A(u_{i,j})(\varepsilon_j) = \varepsilon_i^*[A(u_{i,j})(\varepsilon_j)]\varepsilon_i = \lambda_{i,j}u_{\varphi_j,\varepsilon_i}(\varepsilon_j)$.
Ainsi, $A(u_{i,j}) = \lambda_{i,j}u_{\varphi_j,\varepsilon_i}$, car ils coïncident sur les vecteurs de la base $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$.
De plus, $\lambda_{i,j} \neq 0$, car $A(u_{i,j})$ est non nul.

8°) a)
Soit $(i,j,k) \in \mathbb{N}_n^3$. $\lambda_{i,j}\lambda_{j,k}u_{\varphi_j,\varepsilon_i}u_{\varphi_k,\varepsilon_j} = A(u_{i,j})A(u_{j,k}) = A(u_{i,k}) = \lambda_{k,i}u_{\varphi_k,\varepsilon_i}$.
Ainsi, $\lambda_{i,j}\lambda_{j,k}\varepsilon_i = \lambda_{i,j}\lambda_{j,k}u_{\varphi_j,\varepsilon_i}u_{\varphi_k,\varepsilon_j}(\varepsilon_k) = \lambda_{k,i}u_{\varphi_k,\varepsilon_i}(\varepsilon_k) = \lambda_{k,i}\varepsilon_i$, donc $\lambda_{i,j}\lambda_{j,k} = \lambda_{k,i}$.

8°) b)
Soit $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$. $\lambda_{i,j}\lambda_{j,1} = \lambda_{i,1}$ et $\lambda_{j,1} \neq 0$, donc $\lambda_{i,j} = \dfrac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{j,1}}$.

9°) a)

Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, posons $\boxed{\alpha_i = \lambda_{i,1}\varepsilon_i}$ et $\boxed{\alpha_i^* = \frac{1}{\lambda_{i,1}}\varphi_i}$.

Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$, $\alpha_j^*(\alpha_i) = \frac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{j,1}}\varphi_j(\varepsilon_i) = \delta_{i,j}$, donc $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est une base de E dont la base duale est $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*)$.

Soit $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$. Pour tout $y \in E$, $A(u_{i,j})(y) = \frac{\lambda_{i,1}}{\lambda_{j,1}}\varphi_j(y)\varepsilon_i = u_{\alpha_j^*,\alpha_i}(y)$,

donc $A(u_{i,j}) = u_{\alpha_j^*,\alpha_i}$.

9°) b)

Notons g l'unique élément de $\mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $g(e_i) = \alpha_i$.
g transforme la base $(e_1, \ldots, e_n)$ en la base $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, donc $g \in \mathcal{GL}(E)$.
Soit $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$. Pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $g \circ u_{i,j} \circ g^{-1}(\alpha_k) = g \circ u_{i,j}(e_k) = g(\delta_{j,k}e_i) = \delta_{j,k}\alpha_i$ et $A(u_{i,j})(\alpha_k) = u_{\alpha_j^*,\alpha_i}(\alpha_k) = \delta_{j,k}\alpha_i$.
Ainsi, les endomorphismes $g \circ u_{i,j} \circ g^{-1}$ et $A(u_{i,j})$ coïncident sur la base $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, donc ils sont égaux.

9°) c)

A et A_g coïncident sur la base $(u_{i,j})$ de $\mathcal{L}(E)$, donc ils sont égaux. Ceci démontre que $\boxed{\text{tout automorphisme de l'algèbre } \mathcal{L}(E) \text{ est un automorphisme intérieur}}$.

10°)

Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.
Notons (1) : $[\forall (A,u) \in \mathcal{A}ut(E) \times \mathcal{L}(E) \ \ \varphi(A(u)) = \varphi(u)]$
et (2) : $\forall (g,u) \in \mathcal{GL}(E) \times \mathcal{L}(E) \ \ \varphi(g \circ u \circ g^{-1}) = \varphi(u)]$.
D'après ce qui précède, (1) $\Longleftrightarrow$ (2).

- Supposons que (2) est vérifiée.

Alors, pour tout $(u,g) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{GL}(E)$, $\varphi(g \circ u) = \varphi(g \circ (u \circ g) \circ g^{-1}) = \varphi(u \circ g)$.
Notons $\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n \\ & u & \longmapsto & mat(u,e) \end{array}$. D'après le cours, Ψ est un isomorphisme d'algèbres, donc, pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_n \times GL_n$,
$\varphi \circ \Psi^{-1}(BA) = \varphi(\Psi^{-1}(B) \circ \Psi^{-1}(A)) = \varphi(\Psi^{-1}(A) \circ \Psi^{-1}(B)) = \varphi \circ \Psi^{-1}(AB)$.
De plus, $\varphi \circ \Psi^{-1}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n$, donc, d'après II.5, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi \circ \Psi^{-1} = \lambda \mathrm{Tr} = \lambda(\mathrm{Tr} \circ \Psi^{-1})$, si l'on note encore Tr l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \mathrm{Tr}(u) \end{array}$.
Ainsi, si pour tout $(A,u) \in \mathcal{A}ut(E) \times \mathcal{L}(E)$, $\varphi(A(u)) = \varphi(u)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \lambda \mathrm{Tr}$.
La réciproque de cette propriété est simple à vérifier,
en utilisant l'équivalence (1) $\Longleftrightarrow$ (2).