MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 9 : du lundi 06 décembre au vendredi 10.

Liste des questions de cours

1°) Démontrer l'inégalité triangulaire, pour $|z + z'|$, avec son cas d'égalité.

2°) CNS pour que $|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n|$: énoncé et démonstration.

3°) Enoncer et démontrer la formule de Taylor avec reste intégral.

4°) Pour $t \in \mathbb{R}$, développer e^t en série (entière).

5°) Si une série converge, montrer que son terme général tend vers 0.

6°) Montrer que, pour tout $u, v \in \mathbb{C}$, $e^u e^v = e^{u+v}$.

7°) Etablir les développement en série entière de cos et sin.

8°) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$.

9°) Linéariser $\cos^3 \theta$ en utilisant les complexes.

10°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$.

11°) Expliquer comment déterminer les racines n-ièmes du complexe $z = re^{i\varphi}$.

12°) Présenter la méthode de calcul des racines carrées d'un complexe lorsqu'il est donné sous la forme $x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

13°) Soit $s, p \in \mathbb{C}$. Résoudre le système $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$.

Les thèmes de la semaine

Dénombrement et sommes finies

cf programme de la semaine dernière.

Formules de Leibniz et de Taylor avec reste intégral

Ces formules sont établies dans le chapitre sur les complexes, ci-dessous, elles pourront donc faire l'objet d'exercices.

Les complexes, sans géométrie

Pour construire l'exponentielle complexe, j'ai mis en place quelques notions portant sur les séries (cf 6.1), qui pourront faire l'objet d'une question de cours (cf ci-dessus), mais ces notions ne seront pas utilisées dans les exercices pour le moment.

Ce programme de colles ne comprend pas la géométrie du plan complexe : angles, colinéarité et orthogonalité, similitudes directes et indirectes.

1 Construction de $\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ est un corps, dont $\mathbb{R}$ est un sous-corps.

Partie réelle, partie imaginaire, écriture algébrique d'un complexe.
Imaginaires purs.

2 Le plan complexe

Affixe d'un point M, image $M(z)$ d'un complexe z.
Affixe d'un vecteur, vecteur image d'un complexe.

Interprétation géométrique de l'addition entre complexes.

$z' - z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M(z)M(z')}$.

Interprétation géométrique du produit d'un complexe par un réel.

3 La conjugaison

Propriété. $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$ et $z \in i\mathbb{R} \iff \overline{z} = -z$.

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

Propriété. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

4 Le module

Propriété. $\forall z \in \mathbb{C},\ |z|^2 = z\overline{z}$.

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Propriété. $|z| = |\overline{z}|$, $|zz'| = |z| \times |z'|$, $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.

Inégalité triangulaire, corollaire de l'inégalité triangulaire.

Parties bornées.

5 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

5.1 Dérivation

Définition. On admet pour le moment que $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est k fois dérivable si et seulement si les applications $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont k fois dérivables et que $f^{(k)}(t) = [\mathrm{Re}(f)]^{(k)}(t) + i[\mathrm{Im}(f)]^{(k)}(t)$.

On admet la généralisation aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ des formules usuelles de dérivation : linéarité, produit, quotient, puissance entière, composition (pour $f \circ g$ avec $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$).

Formule de Leibniz.

5.2 Intégration

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue, on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\ dt + i \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\ dt$.
On admet la généralisation aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ des propriétés usuelles de l'intégrale : linéarité, relation de Chasles, inégalité triangulaire, $x \longmapsto \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en x_0, changement de variable et intégration par parties

Formule de Taylor avec reste intégral.
Application : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^t = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$.

6 L'exponentielle complexe

6.1 Quelques résultats sur les séries

Définition d'une suite convergente de complexes, d'une série convergente.

Si $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors $\overline{z_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \overline{\ell}$.

Si une série converge, son terme général tend vers 0, mais la réciproque est fausse.

L'absolue convergence implique la convergence (admis pour le moment).

Définition d'une série alternée, théorème spécial des séries alternées (TSSA), admis pour le moment.

6.2 Construction de l'exponentielle complexe

$\forall z \in \mathbb{C},\ e^z = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$: c'est un prolongement de l'exponentielle réelle.

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{(e^z)} = e^{\overline{z}}$.

Propriété. Pour tout $u, v \in \mathbb{C}$, $e^u e^v = e^{u+v}$.

Corollaire. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$ et $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$.

Propriété. $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$.

Théorème. $e^z \in \mathbb{U} \Longleftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.

Définition de cos et sin par les formules d'Euler.
Développement en série entière de cos et sin.

Décroissance de cos entre 0 et 2, définition de $\frac{\pi}{2}$ comme unique racine de cos sur $[0, 2]$.

Etude des variations et de la périodicité de cos et sin

Paramétrage du cercle unité : l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array}$ est périodique et sa plus petite période est 2π. Sa restriction à $[0, 2\pi[$ est bijective.

6.3 Arguments d'un complexe

Ecriture trigonométrique (ou exponentielle, ou polaire) : $z = \rho e^{i\theta}$.
Lorsque $\rho \geq 0$, on a $\rho = |z|$. On dit alors que θ est un argument de z noté $\arg(z)$, défini à 2π près.

Argument d'un produit, d'un quotient, d'une puissance entière.
Argument de l'opposé, $(\arg(z_1) \equiv \arg(z_2) \text{ modulo } 2\pi) \iff \dfrac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}_+^*$.

Interprétation géométrique du produit dans $\mathbb{C}$.

$e^z = \rho e^{i\theta} \iff (\exists k \in \mathbb{Z},\ \ z = \ln(\rho) + i\theta + 2ik\pi)$.
L'application exponentielle $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & e^z \end{array}$ est surjective et $2i\pi$ périodique.

Formule de Moivre.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\dfrac{d}{dt}(e^{zt}) = ze^{zt}$.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $x^\alpha \triangleq e^{\alpha \ln x}$, $\dfrac{d}{dt}(t^\alpha) = \alpha t^{\alpha - 1}$.

Technique de l'angle moyen.

Technique de linéarisation.

Polynômes de Tchebychev.

7 Équations polynomiales

7.1 Racines n-ièmes d'un complexe

$\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\frac{\pi}{n}} / k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{2ik\frac{\pi}{n}} / k \in [\![0, n-1]\!]\}$. C'est le groupe cyclique d'ordre n, engendré par $e^{2i\frac{\pi}{n}}$.
La somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.
Racines n-ièmes d'un complexe quelconque.

7.2 Équations du second degré

7.2.1 Racines carrées

Méthode de calcul des racines carrées d'un complexe donné sous forme cartésienne $x + iy$.

7.2.2 Racines d'un trinôme

Discriminant, formule donnant les racines d'un trinôme, racine double.

$\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases}$ si et seulement si $\{z_1, z_2\}$ est l'ensemble des racines du trinôme $X^2 - sX + p$.

Prévisions pour la semaine prochaine :

Géométrie du plan complexe, groupes (début).