DM 20

Partie 1

1) $4^m \times 2 = 2^{2m+1} = (1+1)^{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} \geq \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1}$

$$= \binom{2m+1}{(2m+1)-m} + \binom{2m+1}{m+1}$$

$$= 2\binom{2m+1}{m+1}$$

2) Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{P}$ tq $m+1 \leq p < 2m+1$

$p \mid \prod_{k=m+2}^{2m+1} k = \frac{(2m+1)!}{(m+1)!} = m! \binom{2m+1}{m+1}$ or $p \wedge m! = 1$ donc

D'après Gauss, $p \mid \binom{2m+1}{m+1}$.

Donc $\prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ m+1 \leq p < 2m+1}} p \mid \binom{2m+1}{m+1}$

3)

4) $e^m = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{m^k}{k!} > \frac{m^m}{m!}$ donc $m! > \left(\frac{m}{e}\right)^m$

5) $\forall n \in \mathbb{N}$, soit p_n le n^e nombre premier

$(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \nearrow\nearrow$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n \geq n$ par récurrence

$\pi(n)! = 1 \times \dots \times \pi(n) \leq p_1 \times \dots \times p_{\pi(n)} = \prod_{p \in \mathbb{P} \cap [0,n]} p \leq 4^n$

D'après 4), $\pi(n)\ln(\pi(n)) - \pi(n) = \ln\left[\left(\frac{\pi(n)}{e}\right)^{\pi(n)}\right] \leq \ln(\pi(n)!) \leq n\ln 4$

6) a) Soit f tq pour tout $x \in [1, +\infty[$, $f(x) = x\ln x - x$ f dérivable

$f'(x) = \ln(x) \geq 0$ et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ donc $f \nearrow\nearrow$

b)

c) Soit $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ avec $x \in \mathbb{R}_+^*$

$g'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ donc $g \nearrow$ pour $x \in]0,e]$ et $\searrow x \in [e,+\infty[$

donc g a son maximum en e.

Donc $\forall x > 0$, $g(x) \leq g(e) = \frac{1}{e}$

d) En posant $x = \ln n_0$

$$\frac{e-\ln 4}{e} < \frac{\ln \ln n_0}{\ln n_0} = g(\ln n_0) \leq \frac{1}{e} \text{ donc}$$

$e < 1 + \ln 4$ or $e > 1 + \ln 4$.

C'est absurde donc $\forall n \geq 3$, $\pi(n) \leq e\frac{n}{\ln n}$

Partie II

7) on a $p \geq 2$ donc $p^k \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$. Donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tq

$p^k > n$ donc $\{k \in \mathbb{N} / n < p^k\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$.

Elle possède donc un minimum, donc k_0 existe.

on a $n \geq 2$ donc $k_0 \geq 1$ et $p^{k_0 - 1} \leq n < p^{k_0}$

donc $k_0 - 1 \leq \frac{\ln n}{\ln p} < k_0$ donc $k_0 = 1 + \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor$

8) → 1er cas : $p^{k+1} | a$ alors $p^k | a$ donc $U_{k+1} \subseteq U_k$

→ 2e cas : $k < k_0$, $p^k \leq n$.

Donc $p^k \in U_k \setminus U_{k+1}$. Donc $U_k \subset U_k$

→ 3e cas : Si $U_k \neq \emptyset$, il existe $a \in \{1, ..., n\}$ tq $p^k | a$.

donc $p^k \leq a \leq n$ donc $k < k_0$. Donc Si $k \geq k_0$, $U_k = \emptyset$.

Partie III

11) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ donc

$$v_p(n!) \leq \sum_{k \geq 1} \frac{n}{p^k} = \frac{n}{p} \frac{1}{1-\frac{1}{p}} = \frac{n}{p-1} = \frac{n}{p} + \left(\frac{n}{p-1} - \frac{n}{p}\right)$$

$$= \frac{n}{p} + \frac{n}{p(p-1)}$$

De plus $v_p(n!) = \sum_{k \geq 1} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor \geq \lfloor \frac{n}{p} \rfloor > \frac{n}{p} - 1$

12) $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ donc $\forall p | n!, p | a$ avec $a \in \{1, \dots, n\}$

or $a \leq n$. donc $n! = \prod_{p \in \mathbb{P}_n} p^{v_p(n!)}$

donc $\ln(n!) = \sum_{p \in \mathbb{P}_n} v_p(n!) \ln p$

D'après 11), on a :

$$n \sum_{p \in \mathbb{P}_n} \frac{\ln p}{p} - \sum_{p \in \mathbb{P}_n} \ln p < \ln n! \leq n \sum_{p \in \mathbb{P}_n} \frac{\ln p}{p} + n \sum_{p \in \mathbb{P}_n} \frac{\ln p}{p(p-1)}$$

13) Soit $r \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{m=2^{r-1}+1}^{2^r} \frac{\ln m}{m(m-1)} \leq \sum \ln(2^r) \frac{1}{m(m-1)} = \ln(2^r) \times \sum \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right)$$

$$\leq r \ln(2) \left(\frac{1}{2^{r-1}} - \frac{1}{2^r} \right)$$

$$= \frac{r}{2^r} \ln(2)$$

14) Soit $N \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in]0,1[$:

$$\sum_{r=1}^{N} r x^{r-1} = \frac{d}{dx} \left(\sum_{r=0}^{N} x^r \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^{N+1} - 1}{x - 1} \right)$$

$$= \frac{(N+1) x^N (x-1) - (x^{N+1} - 1)}{(x-1)^2}$$

D'après les CC, $\sum r x^{r-1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{1}{(x-1)^2}$ avec $x \in]0,1[$

Dom $\sum n x^{n-1}$ converge.

Dom $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n+1} = \frac{1}{(x-1)^2}$