TD 17 : corrigé de 3 exercices

Exercice 19.19 :

$\diamond$ *U*nicité. Soit $(l,l')\in K^2$ tel que $f(l)=l$ et $f(l')=l'$.
Si $l\neq l'$, $\|l-l'\|=\|f(l)-f(l')\|<\|l-l'\|$, ce qui est faux, donc $l=l'$.
$\diamond$ *E*xistence.
[Il existe $l\in K$ tel que $f(l)=l$ si et seulement si l'application $x\longmapsto\|f(x)-x\|$ admet 0 comme minimum sur K. Ce changement de vocabulaire permet d'utiliser l'hypothèse de compacité.]
L'application $x\longmapsto\|x-f(x)\|$ est continue sur K et K est compact, donc elle est bornée et elle atteint ses bornes. En particulier, il existe $a\in K$ tel que, pour tout $x\in K$, $(1)\ :\ \|x-f(x)\|\geq\|a-f(a)\|$.
Si $f(a)\neq a$, $\|f(f(a))-f(a)\|<\|f(a)-a\|$ ce qui est en contradiction avec (1) pour $x=f(a)$, donc $f(a)=a$.
$\diamond$ Montrons que $x_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}a$.
S'il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que $x_N=a$, alors pour tout $n\geq N$, $x_n=a$, donc $x_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}a$. On peut donc supposer que $x_n\neq a$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $d_n=d(x_n,a)$. Alors $d_{n+1}=d(f(x_n),f(a))<d(x_n,a)=d_n$, donc la suite (d_n) est décroissante et minorée par 0. D'après le cours, il existe $d\in\mathbb{R}_+$ tel que $d_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}d$. Il reste à montrer que $d=0$.
Raisonnons par l'absurde en supposant que $d>0$.
K étant compact, il existe une application $\varphi\ :\ \mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ strictement croissante et $b\in K$ tel que $x_{\varphi(n)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}b$.
D'une part $d_{\varphi(n)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}d$ et d'autre part $d_{\varphi(n)}=d(x_{\varphi(n)},a)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}d(b,a)$, par continuité de la distance. Par unicité de la limite, on en déduit que $d=d(a,b)$. Ainsi, $d(a,b)>0$ et $a\neq b$.
Alors $d_{\varphi(n)+1}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}d$ et $d_{\varphi(n)+1}=d(f(x_{\varphi(n)}),f(a))\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}d(f(b),f(a))$, car f est lipschitzienne donc continue. Ainsi, $d=d(f(b),f(a))$, mais $a\neq b$,
donc $d=d(f(b),f(a))<d(a,b)=d$: c'est impossible, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 19.22 :

1°)
Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points du graphe de f qui converge vers un point $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $x_n\in\mathbb{R}$ tel que $M_n=(x_n,f(x_n))$. Ainsi, $x_n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}a$ et

$f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$, mais f est continue, donc $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a)$. D'après l'unicité de la limite, $b = f(a)$, donc (a, b) est un point du graphe de f. Ceci prouve que le graphe de f est fermé.

2°) Soit (x_n) une suite bornée de réels admettant une unique valeur d'adhérence notée a. Supposons que (x_n) ne converge pas vers a. Ainsi Il existe $\varepsilon > 0$ tel que
$\forall N \in \mathbb{N}\ \exists n \geq N \quad \|x_n - a\| \geq \varepsilon$.
$\{n \in \mathbb{N}/\|x_n - a\| \geq \varepsilon\}$ n'est donc pas majoré. C'est une partie infinie de $\mathbb{N}$. On sait alors qu'il existe une unique bijection φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans cet ensemble. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_{\varphi(n)} - a\| \geq \varepsilon$.
La sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une valeur d'adhérence notée b. Il existe $\varphi' : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\varphi(\varphi'(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_{\varphi(\varphi'(n))} - a\| \geq \varepsilon$, donc en passant à la limite, on obtient que $\|b - a\| \geq \varepsilon$.
Mais $(x_{\varphi(\varphi'(n))})$ est aussi une suite extraite de la suite (x_n), donc b est aussi une valeur d'adhérence de la suite (x_n). Ainsi $b = a$ alors que $\|b - a\| > 0$. C'est impossible, donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$.

3°) Soient $a \in \mathbb{R}$ et (x_n) une suite qui converge vers a.
Soit b une valeur d'adhérence de la suite $(f(x_n))$. Il existe $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $f(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$.
$(x_{\varphi(n)}, f(x_{\varphi(n)})) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (a, b)$. Ainsi (a, b) est la limite d'une suite d'éléments du graphe de f, or ce dernier est fermé, donc (a, b) est un élément du graphe. Ainsi, $b = f(a)$.
$(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée, donc elle admet au moins une valeur d'adhérence et ce qui précède montre que cette valeur d'adhérence est unique et égale à $f(a)$. D'après la question précédente, $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$. Ceci prouve que f est continue.

4°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. On définit ainsi une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Notons $G = \{(x, \frac{1}{x})/x \neq 0\}$. Soit $(x_n, \dfrac{1}{x_n})$ une suite de G qui converge vers $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Si $a = 0$, alors $\left|\dfrac{1}{x_n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ce qui est faux, donc $a \neq 0$ et $b = \frac{1}{a}$. Ainsi G est fermé.
Le graphe de f est égal à $G \cup \{0\}$, donc il est fermé alors que f n'est pas continue.

Exercice 19.25 :

1°)
$\diamond$ Remarquons que φ est une forme linéaire. Ainsi, elle est continue si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $(u_n) \in E$, $|\varphi((u_n))| \leq k\|(u_n)\|$.

$\diamond$ Pour tout $(u_n) \in E$, $|\varphi((u_n))| \leq \sum_{p=0}^{+\infty} |u_n| = \|(u_n)\|_1$, donc φ est continue pour $\|.\|_1$ et $\|\varphi\| \leq 1$. De plus, lorsque (u_n) est la suite définie par $u_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ 0 \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$,
$1 = |\varphi((u_n))| \leq \|\varphi\| \|(u_n)\|_1 = \|\varphi\|$. Ainsi, $\boxed{\|\varphi\| = 1}$.

$\diamond$ Pour tout $(u_n) \in E$, $|\varphi((u_n))| \leq \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\|(u_n)\|_\infty}{2^p} = 2\|(u_n)\|_\infty$, donc φ est continue pour $\|.\|_\infty$ et $\|\varphi\| \leq 2$.
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Lorsque (u_n) est la suite définie par $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \leq N-1 \\ 0 & \text{si } n \geq N \end{cases}$,
$|\varphi((u_n))| = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2^n} = 2(1 - \frac{1}{2^N})$, donc $2(1 - \frac{1}{2^N}) \leq \|\varphi\| \|(u_n)\|_\infty = \|\varphi\|$. Ainsi, en faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient que $\|\varphi\| \geq 2$, ce qui prouve que $\boxed{\|\varphi\| = 2}$.

2°) [Pour nier la propriété “il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $(u_n) \in E$, $|\varphi((u_n))| \leq kN((u_n))$”, il faut construire une norme N sur E qui soit “négligeable” devant φ.]

Pour tout $(u_n) \in E$, posons $N((u_n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{3^n}$. N est une norme sur E.

Supposons que φ est continue pour N. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $(u_n) \in E$, $|\varphi((u_n))| \leq kN((u_n))$.
Soit $M \in \mathbb{N}$. Lorsque (u_n) est la suite définie par $u_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n = M \\ 0 \text{ si } n \neq M \end{cases}$, on obtient que $\frac{1}{2^M} \leq \frac{k}{3^M}$, donc, pour tout $M \in \mathbb{N}$, $(\frac{3}{2})^M \leq k$, ce qui signifie que la suite géométrique de raison $\frac{3}{2}$ est bornée. C'est faux, donc φ n'est pas continue pour N.