Les espaces vectoriels

Table des matières

Notation. $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque.
Selon le programme, "en pratique, $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$".

Notation. Symbole de Kronecker : Si i et j sont deux objets mathématiques, on convient que $\delta_{i,j} = 0$ lorsque $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = 1$ lorsque $i = j$.

1 La structure d'espace vectoriel

1.1 Définition et exemples

Définition.
Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un triplet $(E, +, .)$, où E est un ensemble tel que

— $(E, +)$ est un groupe abélien,

— "." est une application $\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\alpha, x) & \longmapsto & \alpha.x \end{array}$ (on dit que "." est une loi sur E à domaine d'opérateurs externe $\mathbb{K}$) tel que, pour tout $x, y \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$,
  — $\alpha.(x+y) = (\alpha.x) + (\alpha.y)$,
  — $(\alpha+\beta).x = (\alpha.x) + (\beta.x)$,
  — $(\alpha \times \beta).x = \alpha.(\beta.x)$,
  — $1_{\mathbb{K}}.x = x$.

Remarque. Lorsque E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, ses éléments seront appelés des vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ seront appelés des scalaires.

Exemples.
◇ $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .
◇ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et I un ensemble quelconque.
Alors l'ensemble E^I des familles $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E indexées par I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si l'on convient que $(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x_i + y_i)_{i\in I}$ et, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha.(x_i)_{i\in I} = (\alpha.x_i)_{i\in I}$.
De même, l'ensemble $\mathcal{F}(I, E)$ des applications de I dans E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si l'on convient que, pour tout $f, g \in \mathcal{F}(I, E)$ et $\alpha \in K$, pour tout $x \in I$,
$(f+g)(x) \stackrel{\Delta}{=} f(x) + g(x)$ et $(\alpha.f)(x) \stackrel{\Delta}{=} a.(f(x))$.
◇ En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
◇ Si $\mathbb{L}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$, alors $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{L}$-espace vectoriel.
◇ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, mais aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
◇ L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites de scalaires est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
◇ $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel en convenant que, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha.P = \alpha \times P$, le dernier produit étant au sens du produit de deux polynômes.
◇ L'ensemble $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Propriété. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:
— $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$ et $\lambda.0_E = 0_E$;
— $(-1_{\mathbb{K}}).x = -x$;
— $(\lambda - \mu)x = \lambda.x - \mu.x$;
— $\lambda x = 0 \Longleftrightarrow (\lambda = 0) \vee (x = 0)$;
— $(\lambda x = \lambda y) \wedge (\lambda \neq 0) \Longrightarrow x = y$;
— $(\lambda x = \mu x) \wedge (x \neq 0) \Longrightarrow \lambda = \mu$.

Démonstration.
— Pour x fixé dans E, $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & E \\ \lambda & \longmapsto & \lambda x \end{array}$ est un morphisme de groupe, donc $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$.
Pour λ fixé dans $\mathbb{K}$, $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda x \end{array}$ est un morphisme de groupe, donc $\lambda.0_E = 0_E$.
— φ étant un morphisme de groupes additifs, $\varphi(-1_{\mathbb{K}}) = -\varphi(1_{\mathbb{K}})$, donc $(-1_{\mathbb{K}}).x = -(1_{\mathbb{K}}.x) = -x$.

— $(\lambda - \mu)x = \lambda x + (-\mu)x = \lambda x + ((-1_{\mathbb{K}})\mu)x = \lambda x + (-1_{\mathbb{K}}).(\mu x) = \lambda.x - \mu.x$.
— Si $\lambda \neq 0$, $\lambda x = 0 \Longrightarrow (\lambda)^{-1}(\lambda x) = 0 \Longrightarrow x = 0$,
donc $\lambda x = 0 \Longrightarrow (\lambda = 0) \vee (x = 0)$.

□

Définition. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $((E_i, +, .))_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ une famille de n $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On structure $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ en un $\mathbb{K}$-espace vectoriel en convenant que
— $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in E,\ \ \forall y = (y_1, \ldots, y_n) \in E,\ \ x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$,
— $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \ \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in E,\ \ \alpha.x = (\alpha.x_1, \ldots, \alpha.x_n)$.

1.2 Sous-espaces vectoriels

Propriété et définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E. F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les restrictions des lois "+" (à F^2) et "." (à $\mathbb{K} \times F$), avec le même élément neutre 0_E si et seulement si
— $F \neq \emptyset$;
— $\forall (x, y) \in F^2$, $x + y \in F$ (stabilité de la somme de deux vecteurs) ;
— $\forall (\alpha, x) \in \mathbb{K} \times F$, $\alpha.x \in F$ (stabilité du produit externe).
Cet ensemble de conditions est équivalent à
— $F \neq \emptyset$;
— $\forall (\alpha, x, y) \in \mathbb{K} \times F \times F$, $\alpha.x + y \in F$ (stabilité par combinaison linéaire).
Dans ce cas, on dit que F est un ***sous-espace vectoriel*** de E.

Démonstration.
Exercice, en s'inspirant du cours sur les groupes. □

Exemple. $\{0_E\}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) et E est le plus grand sous-espace vectoriel de E.

Remarque. En particulier, un sous-espace vectoriel F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un sous-groupe additif de E, donc
on a toujours que $0_E \in F$: 0_E est appelé le vecteur nul.
Ainsi, pour tout sous-espace vectoriel F de E, l'inclusion $\{0\} \subset F$ est garantie. En pratique, pour montrer qu'un sous-espace vectoriel F est égal à $\{0\}$, on se contente de montrer que $F \subset \{0\}$, sans même mentionner l'inclusion réciproque.

Méthode : pour montrer qu'un ensemble F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, il est pratique lorsque c'est possible, de trouver un ensemble E, que l'on sait déjà être un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, qui contient F. Il suffit alors de montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, ce qui évite de vérifier les nombreux axiomes d'espaces vectoriels.

Propriété de transitivité : Un sous-espace vectoriel d'un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E.

Exemples.
— $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
— Si $\mathbb{L}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$, alors $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{L}$-sous-espace vectoriel du $\mathbb{L}$-espace vectoriel $\mathbb{K}$.

— $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ / \ x+y+z=0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
— Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, $\left\{ (x_i)_{1 \leq i \leq n} \ / \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.
— $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
— Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, l'idéal engendré par A dans $\mathbb{K}[X]$, i.e $A\mathbb{K}[X]$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
— L'ensemble $C^p([0,1], \mathbb{C})$ des applications de classe C^p de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$, où $p \in \mathbb{N}$, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{C})$.
— L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' = y' + 2y$ est un sous-espace vectoriel de $D^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, lequel est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
— L'ensemble $l^1(\mathbb{C}) = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \ / \ \sum a_n \text{ ACV}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Définition. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et I un ensemble quelconque.
Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de E^I. On dit que c'est une famille presque nulle si et seulement si $\{i \in I / x_i \neq 0\}$ est un ensemble fini.
On note $E^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles de E^I.

Propriété. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et I un ensemble quelconque.
$E^{(I)}$ est un sous-espace vectoriel de E^I.

Démonstration.
La famille nulle appartient à $E^{(I)}$, donc $E^{(I)} \neq \emptyset$.
Soit $((a_i), (b_i), \alpha, \beta) \in E^{(I)} \times E^{(I)} \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.
Soit $i \in I$. Si $a_i = 0$ et $b_i = 0$, alors $\alpha a_i + \beta b_i = 0$. La contraposée de cette implication est : $\forall i \in I \ [\alpha a_i + \beta b_i \neq 0 \Longrightarrow (a_i \neq 0 \text{ ou } b_i \neq 0)]$, donc
$\{i \in I / \alpha a_i + \beta b_i \neq 0\} \subset (\{i \in I / a_i \neq 0\} \cup \{i \in I / b_i \neq 0\})$, ainsi $\{i \in I / \alpha a_i + \beta b_i \neq 0\}$ est fini, ce qui prouve que $\alpha(a_i) + \beta(b_i) \in E^{(I)}$. □

1.3 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Propriété. Soit I un ensemble non vide, éventuellement infini. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors l'intersection $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.
Notons $F = \bigcap_{i \in I} F_i$. Pour tout $i \in I$, $0_E \in F_i$, donc $0_E \in F$. Ainsi, $F \neq \emptyset$.
Soit $x, y \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Soit $i \in I$: $x, y \in F_i$ et F_i est un sous-espace vectoriel, donc $\alpha x + y \in F_i$. C'est vrai pour tout $i \in I$, donc $\alpha x + y \in F$.
Ceci démontre que F est bien un sous-espace vectoriel de E. □

Exercice. Qu'en est-t-il avec la réunion ?

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie de E.
Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E contenant A.
$\mathcal{S}$ est non vide car $E \in \mathcal{S}$.
Alors $\bigcap_{F\in\mathcal{S}} F$ est un sous-espace vectoriel de E contenant A et, par construction, c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant A. On le note $\mathrm{Vect}(A)$.

Exemple. $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0\}$, puisque $\{0\}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E.
Si F est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, $\mathrm{Vect}(F) = F$.

Propriété. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A et B deux parties de E.

$$\text{Si } A \subset B, \text{ alors } \mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B).$$

Démonstration.
$\mathrm{Vect}(B)$ est un sous-espace vectoriel contenant A, donc il est plus grand (au sens de l'inclusion) que $\mathrm{Vect}(A)$. □

Définition. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On appelle ***combinaison linéaire*** de vecteurs de cette famille tout vecteur s'écrivant sous la forme

$$\boxed{\sum_{i\in I} \alpha_i x_i, \text{ où } (\alpha_i)_{i\in I} \text{ est une famille } \textit{presque nulle} \text{ de scalaires,}}$$

c'est-à-dire un élément de $\mathbb{K}^{(I)}$.

Remarque. La précision "*presque nulle*" est inutile lorsque I est fini, mais lorsque I est infini, c'est elle qui garantit que l'expression $\sum_{i\in I} \alpha_i x_i$ a bien un sens.

Propriété. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A une partie de E. Alors $\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de A, i.e :

$$\boxed{\mathrm{Vect}(A) = \left\{ \sum_{a\in A} \alpha_a a / (\alpha_a)_{a\in A} \in \mathbb{K}^{(A)} \right\}.}$$

Démonstration.
Notons $B = \left\{ \sum_{a\in A} \alpha_a a / (\alpha_a)_{a\in A} \in \mathbb{K}^{(A)} \right\}$.
⋄ Montrons que B est un espace vectoriel.
$B \neq \emptyset$, car $\mathbb{K}^{(A)}$ possède au moins la famille identiquement nulle, pour laquelle la combinaison linéaire associée est le vecteur nul.
Si $x = \sum_{a\in A} \alpha_a a$ et $y = \sum_{a\in A} \alpha'_a a$ sont deux éléments de B, pour tout $(c, d) \in \mathbb{K}^2$, $cx + dy = \sum_{a\in A} (c\alpha_a + d\alpha'_a)a$ et $(c\alpha_a + d\alpha'_a)_{a\in A} = c(\alpha_a)_{a\in A} + d(\alpha'_a)_{a\in A} \in \mathbb{K}^{(A)}$ car $\mathbb{K}^{(A)}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Ainsi, $cx + dy \in B$, ce qui prouve que B est un sous-espace vectoriel de E.

◇ De plus, $A \subset B$. En effet, en convenant que $\delta_{a,b} = \begin{cases} 0 \text{ si } a \neq b \\ 1 \text{ si } a = b \end{cases}$ [c'est le symbole de Kronecker], pour tout $b \in A$, $b = \sum_{a \in A} \delta_{a,b} a \in B$.

◇ Soit maintenant C un sous-espace vectoriel de E contenant A. Alors il contient toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A, donc il contient B. Ainsi, B est bien le plus petit sous-espace vectoriel contenant A. □

Notation. Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E,
on note $\mathrm{Vect}(x_i)_{i \in I} = \mathrm{Vect}(\{x_i \ / \ i \in I\})$.

Remarque. En particulier, lorsque A est fini, en notant $A = \{x_1, \dots, x_n\}$,
$\mathrm{Vect}(A) = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \ / \ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}\}$.
Notamment, si $u \in E$ avec $u \neq 0$, $\mathrm{Vect}(\{u\}) = \{\alpha u / \alpha \in \mathbb{K}\}$ est appelé la droite vectorielle engendrée par le vecteur u, que l'on note aussi $\mathrm{Vect}(u)$ et $\mathbb{K}u$.

Exemple. Notons $H = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + 3y = 0\}$. On vérifie que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in H \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \ \begin{cases} y = \lambda \\ x = -3\lambda \end{cases} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$,
donc $H = \mathrm{Vect}(\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\}) \triangleq \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exemple. Notons $F = \{\begin{pmatrix} x + 2y \\ x + y \\ x \end{pmatrix} \ / \ x, y \in \mathbb{R}\}$.

$F = \{x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ / \ x, y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$.

Propriété. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $x, y \in E$ et A une partie de E.
Si $x \in \mathrm{Vect}(A)$, alors $\mathrm{Vect}(A \cup \{x\}) = \mathrm{Vect}(A)$.
S'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $a \in \mathrm{Vect}(A)$ tels que $x = \lambda y + a$,
alors $\mathrm{Vect}(A \cup \{x\}) = \mathrm{Vect}(A \cup \{y\})$.

Démonstration.
◇ Supposons que $x \in \mathrm{Vect}(A)$. $A \subset A \cup \{x\}$, donc $\mathrm{Vect}(A \cup \{x\}) \supset \mathrm{Vect}(A)$.
De plus $A \cup \{x\} \subset \mathrm{Vect}(A)$, donc $\mathrm{Vect}(A \cup \{x\}) \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{Vect}(A)) = \mathrm{Vect}(A)$.
◇ On suppose que $x = \lambda y + a$, avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $a \in A$.
$x \in \mathrm{Vect}(A \cup \{y\})$, donc $A \cup \{x\} \subset \mathrm{Vect}(A \cup \{y\})$, puis $\mathrm{Vect}(A \cup \{x\}) \subset \mathrm{Vect}(A \cup \{y\})$.
De plus $y = \frac{1}{\lambda}(x - a) \in \mathrm{Vect}(A \cup \{x\})$, donc $A \cup \{y\} \subset \mathrm{Vect}(A \cup \{x\})$,
puis $\mathrm{Vect}(A \cup \{y\}) \subset \mathrm{Vect}(A \cup \{x\})$. □

Propriété. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors $\mathrm{Vect}(x_i)_{i \in I}$ n'est pas modifié si l'on effectue l'une des *opérations élémentaires* suivantes :

— échanger x_{i_0} et x_{i_1}, où $i_0, i_1 \in I$ avec $i_0 \neq i_1$;
— multiplier x_{i_0} par $\alpha \in \mathbb{K}$ avec $\alpha \neq 0$;
— ajouter à l'un des x_i une combinaison linéaire des autres x_j.

Démonstration.
On a vu que $\text{Vect}(x_i)_{i\in I} = \Big\{ \sum_{i\in I} \alpha_i x_i \ / \ (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \Big\}$, donc les deux premières affirmations sont simples à vérifer.
La dernière affirmation résulte de la propriété précédente ; en effet, soit $i_0 \in I$ et $y = \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \beta_i x_i$ une combinaison linéaire des vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ différents de x_{i_0}. En posant $A = \{x_i \ / \ i \in I\}$ et $B = \{x_i \ / \ i \in I \setminus \{i_0\}\}$, d'après la propriété précédente, $\text{Vect}(B \cup \{x_{i_0} + y\}) = \text{Vect}(B \cup \{x_{i_0}\}) = \text{Vect}(A)$. □

Définition. Soit $E_1, \dots, E_p$ p sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
On note $E_1 + \cdots + E_p \stackrel{\Delta}{=} \{x_1 + \cdots + x_p \ / \ \forall i \in \{1, \dots, p\}, \ x_i \in E_i\} = \sum_{i=1}^{p} E_i$.

Propriété. Avec les notations précédentes, $\sum_{i=1}^{p} E_i = \text{Vect}\Big(\bigcup_{i=1}^{p} E_i \Big)$.

Définition. Ainsi, avec les notations précédentes, lorsque $x \in E$,
$x \in \sum_{i=1}^{p} E_i \Longleftrightarrow \exists (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, \ x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.
On dit que la somme $\sum_{i=1}^{p} E_i$ est directe si et seulement si, pour tout $x \in E$,
$x \in \sum_{i=1}^{p} E_i \Longleftrightarrow \exists \, ! \ (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, \ x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.
Dans ce cas, la somme est notée $E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ ou bien $\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.
La somme est directe si et seulement si pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$,
$\sum_{i=1}^{p} x_i = 0 \Longleftrightarrow \forall i \in \mathbb{N}_p, \ x_i = 0$.

Démonstration.
cf le chapitre d'algèbre linéaire. □

Propriété. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Alors $F + G$ est une somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Démonstration.
cf le chapitre d'algèbre linéaire. □

1.4 Les applications linéaires

Définition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Une application f de E dans F est une application linéaire (on dit aussi un morphisme ou un homomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels) si et seulement si

$$\forall(\alpha, x, y) \in \mathbb{K} \times E \times E \;\; f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y),$$

ce qui est équivalent à

$$\forall \alpha \in \mathbb{K},\;\; \forall x, y \in E,\;\; f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ et } f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

Un ***isomorphisme*** est un morphisme bijectif.
Un ***endomorphisme*** est un morphisme de E dans lui-même.
Un ***automorphisme*** est un endomorphisme bijectif.
Une ***forme linéaire*** est une application linéaire à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exemple.

— L'application constante $x \longmapsto 0_E$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E dans lui-même est un endomorphisme.

— Id_E est un automorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

— L'application $z \longmapsto \overline{z}$ est un automorphisme involutif sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, mais ce n'est pas un endomorphisme de $\mathbb{C}$-espace vectoriel . Ce n'est pas une forme linéaire.

— L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & f(1) \end{array}$ est une forme linéaire.

— L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & [x \longmapsto f(x + 1)] \end{array}$ est un automorphisme, dont le morphisme réciproque est $f \longmapsto (x \longmapsto f(x - 1))$.

— $\begin{array}{ccc} C([-1, 1], \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)t^2 \, dt \end{array}$ est une forme linéaire.

— Pour tout $A \in \mathbb{C}[X]$, $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\ P & \longmapsto & AP \end{array}$ est un endomorphisme.

— $\begin{array}{ccc} D^2([0, 1], \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f'' \end{array}$ est linéaire.

— $\begin{array}{ccc} l^1(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \end{array}$ est une forme linéaire.

Définition. Les homothéties (vectorielles) du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont les applications de la forme $\lambda.Id_E$, où $\lambda \in \mathbb{K}$. Ce sont des endomorphismes.

Notation.

— On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

— On pose $L(E) \stackrel{\Delta}{=} L(E, E)$.

— On pose $L(E,\mathbb{K}) = E^*$;
c'est l'ensemble des formes linéaires, appelé le dual de E.

Propriété. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$ sont exactement les applications de la forme $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_i)_{1\le i\le n} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \end{array}$, où $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{K}^n$.

Démonstration.
On vérifie que ces applications sont bien des formes linéaires. Réciproquement, si f est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^n$, alors on peut écrire, pour tout $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$,

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = f\Big(\sum_{i=1}^n x_i(\delta_{i,j})_{1\le j\le n}\Big) = \sum_{i=1}^n x_i\alpha_i \text{ avec } \alpha_i = f\Big((\delta_{i,j})_{1\le j\le n}\Big). \quad \square$$

Propriété. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_i)_{1\le i\le n}$ une famille de n $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On pose $E = E_1 \times \cdots \times E_n$. Soit $i \in \mathbb{N}_n$, on note $p_i : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E_i \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$.
p_i s'appelle la $i^{\text{ème}}$ ***projection***. C'est un morphisme surjectif d'espaces vectoriels.

Propriété. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in L(E,F)$ et $(x_i)_{i\in I} \in E^I$.
Alors, $\forall (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ $u\left(\sum_{i\in I} \alpha_i x_i\right) = \sum_{i\in I} \alpha_i u(x_i)$.

Démonstration.
• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante :
pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$ et $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{K}^n$, $u\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i u(x_i)$.
◇ Pour $n = 1$, $R(1)$ est claire.
◇ Pour $n \ge 1$, supposons $R(n)$.
Soient $(x_1,\dots,x_{n+1}) \in E^{n+1}$ et $(\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$.
$u\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i\right) = u\left(\alpha_{n+1}x_{n+1} + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = \alpha_{n+1}u(x_{n+1}) + u\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right)$, car u est linéaire.
Ainsi, en utilisant $R(n)$, $u\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i\right) = \alpha_{n+1}u(x_{n+1}) + \sum_{i=1}^n \alpha_i u(x_i)$, ce qui prouve $R(n+1)$.
D'après le principe de récurrence, $R(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
• Soient $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ et $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$. Notons $J = \{i \in I / \alpha_i \ne 0\}$. J est de cardinal fini.
Premier cas. Supposons que $J = \emptyset$.
D'après les conventions du cours sur les groupes,

$u\left(\sum_{i\in I}\alpha_i x_i\right)=u\left(\sum_{i\in\emptyset}\alpha_i x_i\right)=u(0)=0=\sum_{i\in\emptyset}\alpha_i u(x_i)=\sum_{i\in I}\alpha_i u(x_i)$.
Deuxième cas. Supposons que $J\neq\emptyset$ et posons $n=card(J)$. $n\in\mathbb{N}^*$, donc on peut appliquer $R(n)$, ce qui permet de conclure. □

Propriété. Soit $u\in L(E,F)$ et $(x_i)_{i\in I}\in E^I$. Alors $u\Big(\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}\Big)=\mathrm{Vect}(u(x_i))_{i\in I}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\mathrm{Vect}(u(x_i))_{i\in I} &= \Big\{\sum_{i\in I}\alpha_i u(x_i)/(\alpha_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^{(I)}\Big\}\\ &=\Big\{u(\sum_{i\in I}\alpha_i x_i)/(\alpha_i)_{i\in I}\in\mathbb{K}^{(I)}\Big\}=u\Big(\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}\Big).\end{aligned}$$ □

Propriété. La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

Propriété. Si $f:E\longrightarrow F$ est un isomorphisme, f^{-1} est encore un isomorphisme.

Démonstration.
Soit $(x',y')\in F^2$ et $\alpha\in\mathbb{K}$. Notons $x=f^{-1}(x')$ et $y=f^{-1}(y')$.
$f(\alpha x+y)=\alpha f(x)+f(y)=\alpha x'+y'$,
donc $\alpha f^{-1}(x')+f^{-1}(y')=\alpha x+y=f^{-1}(f(\alpha x+y))=f^{-1}(\alpha x'+y')$. □

Propriété. Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, alors
$L(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .

Démonstration.
$L(E,F)\neq\emptyset$.
Soit $\alpha\in\mathbb{K}$ et $u,v\in L(E,F)$. Pour tout $\beta\in\mathbb{K}$ et $x,y\in E$,

$$\begin{aligned}(\alpha u+v)(\beta x+y) &= \alpha[u(\beta x+y)]+v(\beta x+y)\\ &=\alpha\beta u(x)+\alpha u(y)+\beta v(x)+v(y)\\ &=\beta(\alpha u+v)(x)+(\alpha u+v)(y),\end{aligned}$$

donc $\alpha u+v\in L(E,F)$.
Ainsi, $L(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E,F)$. □

Propriété. Soit φ une application linéaire. Alors φ reste linéaire si on la restreint ou si on la corestreint à des sous-espaces vectoriels. Plus précisément, en supposant que φ est un morphisme entre les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F, alors
pour tout sous-espace vectoriel E' de E, $\varphi|_{E'}$ est un morphisme de E' vers F et
pour tout sous-espace vectoriel F' de F, $\boxed{\text{si } \forall x\in E,\ \varphi(x)\in F'}$, alors $\varphi|^{F'}$ est un morphisme de E vers F'.

Définition. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $u\in L(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est ***stable*** par u, ou que u ***stabilise*** F si et seulement si $u(F)\subset F$.
Dans ce cas, l'***endomorphisme induit*** par u sur F est $\begin{array}{cccc} v: & F & \longrightarrow & F\\ & x & \longmapsto & u(x)\end{array}$.
C'est un élément de $L(F)$, que par abus, on note souvent $u|_F$ et que l'on appelle la restriction de u à F (il y a bien sûr ambiguïté).

Propriété. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E' un sous-espace vectoriel de E et F' un sous-espace vectoriel de F. Soit f un morphisme de E dans F.

Alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F et $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

$\diamond$ $E' \neq \emptyset$, donc $f(E') \neq \emptyset$.
Soit $(x', y') \in f(E')^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Il existe $(x, y) \in E'^2$ tel que $x' = f(x)$ et $y' = f(y)$.
$\alpha x' + y' = f(\alpha x + y) \in f(E')$, car, E' étant un sous-espace vectoriel, $\alpha x + y \in E'$.
$\diamond$ $f(0) = 0 \in F'$, car F' est un sous-espace vectoriel, donc $0 \in f^{-1}(F')$.
Ainsi, $f^{-1}(F') \neq \emptyset$.
Soit $(x, y) \in [f^{-1}(F')]^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. $f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y) \in F'$, car $f(x) \in F'$, $f(y) \in F'$ et F' est un sous-espace vectoriel. Ainsi, $\alpha x + y \in f^{-1}(F')$. $\square$

Remarque. Si f est une application linéaire, c'est en particulier un morphisme de groupes additifs, donc on dispose de $\text{Ker}(f) = f^{-1}\{0\}$ et de $Im(f)$.
D'après la propriété précédente, ce sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. De plus,

Propriété. Soit f une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F.
Alors f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0\}$ et
f est surjective si et seulement si $Im(f) = F$.

Remarque. Une forme linéaire non nulle est toujours surjective.

Démonstration.

Soit $f \in L(E, \mathbb{K}) \setminus \{0\}$. $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel non nul de $\mathbb{K}$, donc il existe $x \in \mathbb{K}^*$ tel que $x \in \text{Im}(f)$. Alors $\text{Vect}(x) \subset \text{Im}(f)$, or $\text{Vect}(x) = \{\lambda x / \lambda \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}$. $\square$

Propriété. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u, v) \in L(E)^2$.
Si u et v commutent, alors $Im(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont stables par v.

Démonstration.

- Soit $x \in v(Im(u))$.

Il existe $y \in Im(u)$ tel que $x = v(y)$ et il existe $z \in E$ tel que $y = u(z)$.
Ainsi, $x = v \circ u(z) = u(v(z)) \in Im(u)$. On a montré que $Im(u)$ est stable par v.

- Soit $x \in v(\text{Ker}(u))$. Il existe $y \in \text{Ker}(u)$ tel que $x = v(y)$.

Ainsi $u(x) = u(v(y)) = v(u(y)) = v(0) = 0$ car $y \in \text{Ker}(u)$.
Donc $x \in \text{Ker}(u)$. On a montré que $\text{Ker}(u)$ est stable par v. $\square$

Propriété. Soit $u, v \in L(E)$. Alors $uv = 0 \iff Im(v) \subset \text{Ker}(u)$.

Démonstration.

En effet, $uv = 0 \iff [\forall x \in E,\ \ u(v(x)) = 0] \iff [\forall y \in Im(v),\ \ u(y) = 0]$. $\square$

Définition. Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in L(E, F)$. Soit $y \in F$. L'équation $(E)\ :\ f(x) = y$ en l'inconnue $x \in E$ est appelée une équation linéaire.

Exemples.

— L'équation différentielle $(E)\ :\ z' + z \sin t = \cos t$ est une équation linéaire, en posant $E = D^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $F = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $y = (t \longmapsto \cos t)$ et $f\ :\ z \longmapsto z' + z.\sin$.

— L'équation aux différences finies $(E)\ :\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 3$ est une équation linéaire, en posant $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = F$, $y = (3)_{n \in \mathbb{N}}$ et $f\ :\ (u_n) \longmapsto (u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n)$.

— Lorsque $A, B \in \mathbb{K}[X]$, l'équation de Bezout $(E)\ :\ UA+VB=1$ est une équation linéaire, en posant $E=\mathbb{K}[X]^2$, $F=\mathbb{K}[X]$, $y=1$ et $f\ :\ (U,V)\longmapsto UA+VB$.

Propriété. Avec les notations précédentes, l'équation sans second membre associée à (E) est l'équation $(H)\ :\ f(x)=0$, dont l'ensemble des solutions est $\mathcal{S}_H=\mathrm{Ker}(f)$: notamment l'ensemble des solutions de l'équation homogène est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
L'équation (E) est compatible, c'est-à-dire qu'elle possède au moins une solution $x_0\in E$, si et seulement si $y\in\mathrm{Im}(f)$.
Dans ce cas, $\mathcal{S}_E=x_0+\mathcal{S}_H$: la solution générale de (E) s'obtient en ajoutant à une solution particulière de (E) la solution générale de (H).

Exemple. Pour résoudre l'équation linéaire $(E)\ :\ P(X+1)-P(X)=2X+1$, en l'inconnue $P\in\mathbb{R}[X]$, on résout d'abord $(H)\ :\ P(X+1)-P(X)=0$: Si P est solution de (H), pour tout $n\in\mathbb{N}$, $P(n)-P(0)=0$, donc par rigidité des polynômes, $P(X)-P(0)=0$, ainsi, la réciproque étant claire, $\mathcal{S}_H=\mathbb{R}$.
On cherche ensuite une solution particulière, ou bien on la devine.
Ainsi $\mathcal{S}_E=\{X^2+c\ /\ c\in\mathbb{R}\}$.

1.5 Dessiner des vecteurs

Introduction : Un espace vectoriel possède un élément particulier, le vecteur nul, donc il ne présente pas la propriété d'homogénéité de notre espace physique. Pour modéliser ce dernier à partir de la notion d'espace vectoriel, il faut donc trouver le moyen de faire du vecteur nul un élément indiscernable des autres vecteurs. C'est pourquoi nous compliquons la structure d'espace vectoriel pour définir la notion d'espace affine. C'est indispensable si nous voulons utiliser l'espace physique (le tableau ou votre feuille) pour dessiner des vecteurs.

Définition. On appelle $\mathbb{K}$-***espace affine*** tout triplet $(\mathcal{E}, E, +_{\mathcal{E}})$, où $\mathcal{E}$ est un ensemble non vide, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (dont la loi additive sera notée $+_E$) et où $+_{\mathcal{E}}$ est une application $\begin{array}{ccc}\mathcal{E}\times E & \longrightarrow & \mathcal{E}\\ (M,x) & \longmapsto & M+_{\mathcal{E}}x\end{array}$ vérifiant les propriétés suivantes.

i) Pour tout $M\in\mathcal{E}$, l'application $\begin{array}{ccc}E & \longrightarrow & \mathcal{E}\\ x & \longmapsto & M+_{\mathcal{E}}x\end{array}$ est une bijection.
ii) $\forall (M,x,y)\in\mathcal{E}\times E\times E\ \ (M+_{\mathcal{E}}x)+_{\mathcal{E}}y=M+_{\mathcal{E}}(x+_E y)$.

Les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés des ***points*** et E est appelé la ***direction*** de $\mathcal{E}$.

Remarque. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E.
Le groupe $(E,+)$ opère sur $\mathcal{E}$ selon l'action $\begin{array}{ccc}E\times\mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E}\\ (x,M) & \longmapsto & M+x\end{array}$.
De plus, pour tout $M\in\mathcal{E}$, l'orbite de M pour cette action est $\mathcal{E}$ en entier.

Démonstration.
$\mathcal{E}$ vérifie les propriétés i) et ii) de la définition d'un espace affine. En tenant compte de ii), pour montrer que $\begin{array}{ccc}E\times\mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E}\\ (x,M) & \longmapsto & M+x\end{array}$ est une action de groupe, il reste à établir que, pour tout $M\in\mathcal{E}$, $M+\overrightarrow{0}=M$.

Soit $M \in \mathcal{E}$. D'après i), $x \longmapsto M + x$ est une bijection de E dans $\mathcal{E}$, donc il existe un unique $x \in E$ tel que $M + x = M$.
Ainsi, $M + \overrightarrow{0} = (M + x) + \overrightarrow{0} = M + (x + \overrightarrow{0}) = M + x = M$.
Soit $M \in \mathcal{E}$. L'orbite de M est $\{M + x / x \in E\}$, c'est-à-dire $\mathcal{E}$ d'après la surjectivité de l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ x & \longmapsto & M + x \end{array}$. □

Remarque. Par la suite, pour signifier que le triplet $(\mathcal{E}, E, +_{\mathcal{E}})$ est un espace affine, on écrira que "$\mathcal{E}$ est un espace affine de direction E".
De plus, lorsque le contexte permet de connaître la direction sans ambiguïté, on se contentera d'écrire que "$\mathcal{E}$ est un espace affine".

Notation. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et $(A, B) \in \mathcal{E}^2$.
D'après i), il existe un unique vecteur x tel que $A +_{\mathcal{E}} x = B$. On note $x = \overrightarrow{AB}$ ou encore $x = B -_{\mathcal{E}} A$.

Remarque. Cette dernière notation est souvent commode car on peut établir que les règles de calcul relatives aux opérations "$+_{\mathcal{E}}$" (point$+_{\mathcal{E}}$vecteur) et "$-_{\mathcal{E}}$" (point$-_{\mathcal{E}}$point) sont formellement les mêmes que celles que vérifient l'addition et la soustraction sur $\mathbb{R}$.
Prenons l'exemple de la relation de ***Chasles*** :
si $(A, B, C) \in \mathcal{E}^3$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (B - A) + (C - B) = C - A = \overrightarrow{AC}$.

Remarque. La loi "$+_{\mathcal{E}}$" du triplet $(\mathcal{E}, E, +_{\mathcal{E}})$ est différente de la loi "$+_E$" qui structure E comme un groupe abélien. Cependant il est pratique de les désigner par le même symbole. La propriété ii) devient alors naturelle, car elle ressemble à une propriété d'associativité.
Par la suite, nous désignerons donc "$+_{\mathcal{E}}$" et "$+_E$" par le même symbole additif "+".

Définition. Soient $\mathcal{E}$ un espace affine de direction E et (A, B, C, D) quatre points de $\mathcal{E}$. $ABCD$ est un ***parallélogramme*** si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Remarque. Dans les propriétés i) et ii) définissant un espace affine, lorsqu'un point M de $\mathcal{E}$ intervient, c'est toujours quantifié de la manière suivante : "$\forall M \in \mathcal{E}\ \ldots$".
Ainsi, dans un espace affine, tous les points ont la même importance. C'est bien un espace homogène, contrairement aux espaces vectoriels.
En fait, les propriétés qui suivent montrent que cette différence entre la notion de $\mathbb{K}$-espace vectoriel et celle de $\mathbb{K}$-espace affine est la seule qui soit vraiment pertinente.

Propriété. Soient $(\mathcal{E}, E, +)$ un $\mathbb{K}$-espace affine et A un point de $\mathcal{E}$. On peut structurer $\mathcal{E}$ comme un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ en définissant les lois "+" et "." suivantes :
pour tout $(M, N, \alpha) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathbb{K}$,

- $M + N = A + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$,
- $\alpha.M = A + (\alpha.\overrightarrow{AM})$.

Remarque. Cette propriété montre que tout $\mathbb{K}$-espace affine est assimilable à un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dès lors que l'on a choisi un point A, qui jouera le rôle de vecteur nul. Bien sûr, si l'on change de point origine, on change la structure d'espace vectoriel, puisque les lois "+" et "." dépendent de A. Cet espace vectoriel s'appelle le vectorialisé de $\mathcal{E}$ d'origine A.

Propriété réciproque. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le triplet $(E, E, +)$, où "+" est la loi qui structure E en un groupe abélien, est un $\mathbb{K}$-espace affine. Ainsi, E peut être muni d'une structure d'espace affine, que l'on dit canoniquement associé à l'espace vectoriel E.

Remarque. La propriété précédente, dont la démonstration est simple, mérite quelques commentaires.
Une structure algébrique sur un ensemble A peut être interprétée comme un mode d'interaction entre ses éléments. Si un ensemble possède plusieurs structures, c'est que les interactions entre ses éléments peuvent être classifiées selon plusieurs modes.
La propriété précédente affirme que tout espace vectoriel E peut être naturellement structuré comme un espace affine. Les éléments peuvent donc interagir de plusieurs façons selon que l'on privilégie la structure d'espace vectoriel (les éléments sont vus comme des vecteurs) ou la structure d'espace affine (les éléments sont vus comme des points).
Par exemple, si $(x, y) \in E^2$, la quantité $x + y$ admet deux interprétations différentes. C'est la somme de deux vecteurs, ou bien c'est la somme d'un vecteur et d'un point. On peut vérifier que le résultat est le même quelle que soit l'interprétation, mais dans le premier cas, $x + y$ sera interprété comme un vecteur et dans le second cas comme un point.
De la même façon, si $(A, B) \in E^2$, la quantité $A - B$ peut être interprétée comme la somme du vecteur A avec l'opposé du vecteur B, ou bien comme la différence des deux points A et B. On peut également vérifier que le résultat ne dépend pas de l'interprétation, ce qui prouve que, avec d'autres notations :
$\forall (A, B) \in E^2 \ \overrightarrow{AB} = B + (-A)$.

Convention. En accord avec le programme, les seuls espaces affines que nous utiliserons sont les espaces affines canoniquement associés à un espace vectoriel.

Remarque. Avant le $XIX^{\text{ème}}$ siècle, les mathématiciens concevaient la géométrie comme l'étude de l'espace physique et se fondaient sur une axiomatique datant d'Euclide (315-255 avant J.-C.), qui manipulait des notions mal définies (points, droites ...).
Mais au $XIX^{\text{ème}}$, la lente apparition des géométries non euclidiennes (des géométries fondées sur une axiomatique légèrement différente de celle d'Euclide et néanmoins cohérente) a montré qu'il est possible d'imaginer des géométries indépendamment de l'univers dans lequel nous vivons.
Le développement parallèle des structures algébriques et de la logique formelle a permis à la fin du $XIX^{\text{ème}}$ de donner des bases solides à la géométrie ... mais aussi de la détacher complètement de l'univers physique, auquel il n'est en effet jamais fait mention dans la présentation actuelle.
Le modèle d'espace affine euclidien de dimension 3 est en première approximation cohérent avec les observations que l'on peut faire de notre univers, mais la nature de cette cohérence n'est pas comprise.

Dieudonné écrit : “Il nous semble aujourd'hui que mathématique et réalité sont presque complètement indépendantes, et leurs contacts plus mystérieux que jamais.”
Dans ce contexte moderne, pour effectuer des figures et des schémas, nous devons pourtant admettre que la feuille de papier peut être vue comme un espace affine ou un espace vectoriel. Il faut savoir représenter un vecteur (par une flèche) et un point (par une croix), il faut savoir ajouter un point et un vecteur, ajouter deux vecteurs et faire le produit d'un réel par un vecteur (cf figure).
On admettra que la feuille de papier munie de ces lois se comporte comme un plan vectoriel (le point correspondant à $\overrightarrow{0}$ étant choisi arbitrairement).
En général, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est représenté par une flèche d'origine A et d'extrémité B, mais il peut également être représenté par une flèche d'origine C et d'extrémité D, lorsque $ABDC$ est un parallélogramme.
Les figures sont du domaine de l'espace physique. Elles ne peuvent donc constituer une démonstration de propriétés propres à un espace mathématique abstrait. Cependant, elles sont une illustration de la démonstration et un guide pour l'intuition.
Parfois, la transcription d'une figure en une démonstration rigoureuse est une évidence. Dans ce cas, on considère que la figure est en elle-même une démonstration.

1.6 La structure d'algèbre

Définition. $(A, +, ., \star)$ est une $\mathbb{K}$-***algèbre*** si et seulement si

• $(A, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ,
• $(A, +, \star)$ est un anneau,
• $\forall(\lambda, a, b) \in \mathbb{K} \times A \times A \;\; \lambda.(a \star b) = (\lambda.a) \star b = a \star (\lambda.b)$.

On dit qu'elle est commutative (ou abélienne) si et seulement si la loi $\star$ est commutative.
On dit qu'elle est intègre si et seulement si l'anneau $(A, +, \star)$ est un anneau intègre.

Exemples.
- $(\mathbb{C}, +, ., .)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre,
- $(\mathbb{R}, +, ., .)$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre,
- et plus généralement, si $\mathbb{K}'$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}'$-algèbre.
- $(\mathbb{K}[X], +, ., \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative et intègre.
- Soit I un ensemble quelconque.

Sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, en posant pour tout $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, $g \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in I$,
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(f \times g)(x) = f(x)g(x),$$
$$\text{et } (\alpha.f)(x) = \alpha f(x).$$
on obtient une structure d'algèbre commutative.
- De même, on structure $\mathbb{K}^I$ comme une algèbre, en posant,

pour tout $(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$, $(y_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ et $\alpha \in \mathbb{K}$,
$$(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x_i + y_i)_{i\in I},$$
$$(x_i)_{i\in I} \times (y_i)_{i\in I} = (x_i y_i)_{i\in I},$$

$$\text{et } \alpha.(x_i)_{i\in I} = (\alpha x_i)_{i\in I}.$$

Propriété. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $(L(E), +, ., \circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. Le groupe des inversibles de $L(E)$ est noté $(GL(E), \circ)$.

Démonstration.
$\diamond$ Soit $u, v, w \in L(E)$. Alors, pour tout $x \in E$,
$[(u+v)\circ w](x) = (u+v)(w(x)) = u(w(x)) + v(w(x)) = [u\circ w + v\circ w](x)$, donc $(u+v)\circ w = u\circ w + v\circ w$, et
$[w\circ(u+v)](x) = w(u(x)+v(x)) = w(u(x)) + w(v(x))$, car w est linéaire, donc $[w\circ(u+v)](x) = [w\circ u + w\circ v](x)$, ce qui montre que $w\circ(u+v) = w\circ u + w\circ v$.
On a ainsi établi la distributivité de la composition par rapport à l'addition.
$\diamond$ Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u, v \in L(E)$. Alors, pour tout $x \in E$,
$[\lambda.(u\circ v)](x) = \lambda.u(v(x))$, $[(\lambda.u)\circ v](x) = (\lambda.u)(v(x)) = \lambda.u(v(x))$ et
$[u\circ(\lambda.v)](x) = u(\lambda.v(x)) = \lambda.u(v(x))$, car u est linéaire,
donc $\lambda.(u\circ v) = (\lambda.u)\circ v = u\circ(\lambda.v)$.
$\diamond$ Les autres propriétés à vérifier sont immédiates. $\square$

Remarque. Plus généralement, si E, F et G sont 3 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, pour tout $f, g \in L(F, G)$ et $h \in L(E, F)$, $(\alpha f + g)\circ h = \alpha f\circ h + g\circ h$ et pour tout $f, g \in L(E, F)$ et $h \in L(F, G)$, $h\circ(\alpha f + g) = \alpha h\circ f + h\circ g$.

Propriété. Soit $(A, +, ., \star)$ une $\mathbb{K}$-algèbre. B est une ***sous-algèbre*** de $(A, +, ., \star)$ si et seulement si B est un sous-anneau et un sous-espace vectoriel , donc si et seulement si

$$\boxed{\begin{array}{ll} \bullet & 1_A \in B. \\ \bullet & \forall (x,y) \in B^2 \quad x+y \in B, \\ \bullet & \forall (\lambda, x) \in \mathbb{K}\times B \quad \lambda x \in B, \\ \bullet & \forall (x,y) \in B^2 \quad x\star y \in B. \end{array}}$$

Exemples.
- $\mathbb{R}$ est une sous-algèbre de la $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathbb{C}$.
- L'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est une sous-algèbre de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$.
- L'ensemble des homothéties sur E est une sous-algèbre de $L(E)$.

Exemple. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors $L_F = \{u \in L(E) \ / \ u(F) \subset F\}$ est une sous-algèbre de $L(E)$.

Définition. Soient $(A+, ., \times)$ et $(B, +, ., \times)$ deux $\mathbb{K}$-algèbres.
Une application $f : A \longrightarrow B$ est un ***morphisme d'algèbres*** si et seulement si

$$\boxed{\begin{array}{ll} \bullet & f(1_A) = 1_B, \\ \bullet & \forall (x,y) \in A^2 \ f(x+y) = f(x) + f(y), \\ \bullet & \forall (x,y) \in A^2 \ f(x\times y) = f(x)\times f(y), \\ \bullet & \forall (x,\alpha) \in A\times\mathbb{K} \ f(\alpha.x) = \alpha.f(x). \end{array}}$$

Exemple. En reprenant les notations de l'exemple précédent, $\begin{array}{ccc} L_F & \longrightarrow & L(F) \\ u & \longmapsto & u|_F \end{array}$ est un morphisme d'algèbres.
En effet, soit $u, v \in L_F$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in F$.
— $(Id_E)|_F = Id_F$.
— $(u+v)|_F(x) = (u+v)(x) = u(x)+v(x) = u|_F(x)+v|_F(x) = (u|_F+v|_F)(x)$, donc $(u+v)|_F = u|_F + v|_F$.
— $(u \circ v)|_F(x) = (u \circ v)(x) = u((v(x)) = u|_F(v(x)) = u|_F(v|_F(x)) = (u|_F \circ v|_F)(x)$, donc $(u \circ v)|_F = u|_F \circ v|_F$.
— $(\alpha v)|_F(x) = (\alpha v)(x) = \alpha[v(x)] = \alpha[v|_F(x)] = (\alpha v|_F)(x)$, donc $(\alpha v)|_F = \alpha v|_F$.

Exemple. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in GL(E)$. Alors l'application $w \longmapsto uwu^{-1}$ est un automorphisme de l'algèbre $L(E)$. Ce type d'automorphisme est appelé un automorphisme *intérieur*.

Propriété. Une composée de morphismes d'algèbres est un morphisme d'algèbre.
L'application réciproque d'un isomorphisme d'algèbres est un isomorphisme d'algèbres.
L'image directe ou réciproque d'une sous-algèbre par un morphisme d'algèbres est une sous-algèbre.

2 Espaces vectoriels de dimensions finies

Notation. Pour ce chapitre, on fixe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et un ensemble quelconque I (éventuellement infini).

2.1 Familles libres et génératrices

Définition. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.
- Elle est ***libre*** si et seulement si

$$\boxed{\forall (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \quad \left(\sum_{i \in I} \alpha_i x_i = 0 \Longrightarrow (\forall i \in I \quad \alpha_i = 0) \right).}$$

- Elle est ***liée*** si et seulement si elle n'est pas libre, c'est-à-dire si et seulement si

$$\boxed{\exists (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \setminus \{0\} \quad \sum_{i \in I} \alpha_i x_i = 0.}$$

- Elle est ***génératrice*** dans E si et seulement si

$$\boxed{\forall x \in E \quad \exists (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \quad \sum_{i \in I} \alpha_i x_i = x.}$$

Ainsi $(x_i)_{i \in I}$ est toujours génératrice dans $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$.

- C'est une ***base*** de E si et seulement si elle est libre et génératrice dans E.

Remarque. Dans la définition d'une famille liée, la condition "$(\alpha_i)_{i\in I} \neq 0$" est essentielle. En effet, si on l'oublie, comme $0 = \sum_{i\in I} 0.x_i$, toute famille serait liée.

Remarque. Lorsque $I = \emptyset$, on dit que $(x_i)_{i\in I}$ est la famille vide.
La famille vide est libre, car la propriété "$\forall i \in \emptyset \;\; \alpha_i = 0$" est vraie.
D'après les conventions du cours sur les groupes, l'unique combinaison linéaire de cette famille est 0, donc la famille vide n'est pas génératrice dans E, sauf si $E = \{0\}$.
En particulier, on remarquera que la famille vide est l'unique base de $\{0\}$.

Exemple. Dans $\mathbb{K}[X]$, la famille $(1, X+1, X-1)$ est liée.
Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la famille $(\cos, \sin)$ est libre, car si $\alpha \sin + \beta \cos = 0$,
alors $0 = \alpha \sin(0) + \beta \cos(0) = \beta$ et $0 = \alpha \sin(\frac{\pi}{2}) + \beta \cos(\frac{\pi}{2}) = \alpha$.

Définition. Deux vecteurs x et y d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont ***colinéaires*** si et seulement si la famille (x, y) est liée.

Propriété. Soit $e = (e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.
e est une base de E si et seulement si

$$\boxed{\forall x \in E \quad \exists\,!(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \quad \sum_{i\in I} \alpha_i e_i = x.}$$

Dans ce cas, pour $x \in E$, on appelle coordonnées de x dans la base $(e_i)_{i\in I}$ l'unique famille presque nulle de scalaire $(\alpha_i)_{i\in I}$ telle que $x = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i$.

2.2 Dimension d'un espace vectoriel

Définition. E est de dimension finie si et seulement s'il admet une famille génératrice contenant un nombre fini d'éléments. Sinon, on dit qu'il est de dimension infinie.

Remarque. On dira qu'un espace vectoriel est de "dimension quelconque" lorsqu'il est de dimension finie ou de dimension infinie.

Exemple.
$\mathbb{R}^2 = \{x(1,0) + y(0,1) \;/\; (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1,0),(0,1))$ est de dimension finie.
$\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}(1, X, \ldots, X^n)$ est de dimension finie.

Lemme : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $e_1, \ldots, e_n \in E$.
Toute famille $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ de $n+1$ vecteurs de $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ est liée.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $R(n)$ l'assertion : pour tout $e_1, \ldots, e_n \in E$, toute famille $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ de $n+1$ vecteurs de $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ est liée.
◇ Pour $n = 0$, si $x_1 \in \mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0\}$, x_1 est nul, donc (x_1) est une famille liée.
◇ Supposons que $n \geq 1$ et que $R(n-1)$ est vraie.

Soit $e_1, \ldots, e_n \in E$ et $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ une famille de $n+1$ vecteurs de $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, n+1\}$, il existe $(\alpha_{i,j})_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$ tel que $x_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j} e_i$.

Premier cas : si, pour tout $j \in \{1, \ldots, n+1\}$, $\alpha_{n,j} = 0$, alors $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille de n vecteurs de $\text{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})$, donc d'après $R(n-1)$ elle est liée. Alors $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ est aussi liée.

Second cas : supposons maintenant qu'il existe $j_0 \in \{1, \ldots, n+1\}$ tel que $\alpha_{n,j_0} \neq 0$: nous allons l'utiliser comme un pivot. Quitte à réordonner les vecteurs $x_1, \ldots, x_{n+1}$, on peut supposer que $j_0 = n+1$. Ainsi, $\alpha_{n,n+1} \neq 0$.

Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, posons $y_j = x_j - \frac{\alpha_{n,j}}{\alpha_{n,n+1}} x_{n+1}$: $y_j \in \text{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})$, donc d'après $R(n-1)$, la famille $(y_1, \ldots, y_n)$ est liée. Ainsi, il existe $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que $0 = \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j + \lambda x_{n+1}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$. La famille de scalaires $(\beta_1, \ldots, \beta_n, \lambda)$ est non nulle, donc $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ est liée. $\square$

Corollaire. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de E, alors toute famille libre de E est de cardinal inférieur ou égal à n.

Théorème de la base incomplète : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(e_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E (on ne suppose pas qu'elle contient un nombre fini d'éléments). Soit $J \subset I$ tel que $(e_i)_{i \in J}$ est une famille libre.
Alors il existe un ensemble L avec $J \subset L \subset I$ tel que $(e_i)_{i \in L}$ est une base de E.
Cela signifie que toute famille libre f de E peut être complétée en une base de E à l'aide de vecteurs d'une famille génératrice de E ($\boxed{\text{Inutile :}}$ qui contient f).

Démonstration.
On note D l'ensemble des cardinaux des familles libres $(e_i)_{i \in K}$, où $J \subset K \subset I$.
D est une partie non vide de $\mathbb{N}$. De plus, E est de dimension finie, donc il possède une famille génératrice finie. Notons n son cardinal. Alors d'après le corollaire précédent, D est majorée par n. D possède donc un plus grand élément, noté m et il existe une famille libre $b = (e_i)_{i \in L}$ avec $J \subset L \subset I$ tel que $|L| = m$.
Supposons que, pour tout $i_0 \in I \setminus L$, $e_{i_0} \in \text{Vect}(b)$. Alors pour tout $i \in I$, $e_i \in \text{Vect}(b)$, donc $E = \text{Vect}(e_i)_{i \in I} \subset \text{Vect}(b)$, donc b est génératrice et libre, ce qui prouve que c'est une base de E. Il suffit donc de montrer que pour tout $i_0 \in I \setminus L$, $e_{i_0} \in \text{Vect}(b)$.
Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $i_0 \in I \setminus L$ tel que $e_{i_0} \notin \text{Vect}(b)$.
Posons $L' = L \cup \{i_0\}$. Montrons que $b' = (e_i)_{i \in L \cup \{i_0\}}$ est libre, ce qui contredira la définition de m. Soit $(\alpha_i)_{i \in L \cup \{i_0\}}$ une famille de scalaires telle que $\sum_{i \in L \cup \{i_0\}} \alpha_i e_i = 0$.

Si $\alpha_{i_0} \neq 0$, on peut écrire $e_{i_0} = -\frac{1}{\alpha_{i_0}} \sum_{i \in L} \alpha_i e_i$, ce qui est exclu car $e_{i_0} \notin \text{Vect}(b)$.

Ainsi, $\alpha_{i_0} = 0$, donc $\sum_{i \in L} \alpha_i e_i = 0$, or b est libre, donc pour tout $i \in L$, $\alpha_i = 0$. $\square$

Remarque. En adaptant la démonstration, on a également prouvé les propriétés suivantes, en dimension quelconque :

Propriété. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille libre de vecteurs de E. Soit $e_j \in E$, où $j \notin I$.
La famille $(e_i)_{i\in I\cup\{j\}}$ est libre si et seulement si $e_j \notin \mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I}$.

Propriété.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $g = (e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E.
On dit qu'une sous-famille libre $(e_i)_{i\in J}$ de g est maximale dans g si et seulement si pour tout $i_0 \in I \setminus J$, la famille $(e_i)_{i\in J\cup\{i_0\}}$ est liée.
Si $(e_i)_{i\in J}$ est libre maximale dans g, alors c'est une base de E.

Corollaire. Une famille libre de vecteurs de E est maximale si et seulement si en lui ajoutant un vecteur elle devient liée.
Toute famille libre maximale de vecteurs de E est une base de E.

Corollaire. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

Démonstration.
On applique le théorème de la base incomplète en prenant comme famille génératrice de E la famille $(x)_{x\in E}$ de tous les vecteurs de E. □

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
E admet au moins une base. Toutes les bases de E sont finies et ont même cardinal.
Ce cardinal est appelé la ***dimension*** de E et est noté $\dim(E)$ ou $\dim_{\mathbb{K}}(E)$.

Démonstration.
La famille vide est libre et d'après le corollaire précédent, on peut la compléter en une base.
Soit b et b' deux bases de E, de cardinaux n et n'.
b est génératrice de E et b' est libre, donc $n' = |b'| \leq |b| = n$.
De même on montre que $n \leq n'$. □

Propriété. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n et soit e une famille de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. e est une base de E.
2. e est libre et de cardinal n.
3. e est génératrice et de cardinal n.

Démonstration.
$1 \Longrightarrow 2$ et $1 \Longrightarrow 3$ sont claires.
$2 \Longrightarrow 1$: supposons que e est libre et de cardinal n. On peut la compléter en une base b de E, mais b est alors de cardinal n, donc $e = b$ et e est bien une base de E.
$3 \Longrightarrow 1$: supposons que e est génératrice et de cardinal n. On peut en extraire une base b de E, mais b est alors de cardinal n, donc $e = b$ et e est bien une base de E. □

Propriété. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n.

Toute famille libre de E a au plus n éléments et
toute famille génératrice de E a au moins n éléments.

Remarque. Tout espace de dimension finie possède donc au moins une base. C'est aussi le cas pour les espaces vectoriels de dimension infinie, si l'on accepte l'axiome du choix. Cependant, on peut construire des modèles de ZF dans lesquels $\mathbb{R}$ n'admet aucune base en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

Exemples. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ou infinie.
$\diamond$ $\{0\}$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 0 car $\emptyset$ est une base de $\{0\}$.
$\diamond$ Si $u \in E \setminus \{0\}$, alors (u) est une base de $\text{Vect}(u) = \{\lambda u / \lambda \in \mathbb{K}\}$, donc la droite vectorielle $\text{Vect}(u)$ est de dimension 1.
$\diamond$ Si (u, v) est une famille libre de vecteurs de E, $\text{Vect}(u, v) = \{\alpha u + \beta v / \alpha, \beta \in \mathbb{K}\}$ admet comme base (u, v), donc il est de dimension 2. On dit que $\text{Vect}(u, v)$ est le *plan vectoriel* engendré par (u, v).

Théorème. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque.
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E avec G de dimension finie et $F \subset G$.
Alors F est de dimension finie avec $\dim(F) \leq \dim(G)$.
De plus $[F = G \iff \dim(F) = \dim(G)]$.

Démonstration.
Toute famille libre de F est une famille libre de G, donc elle est de cardinal inférieure à $\dim(G)$. Ainsi, l'ensemble D des cardinaux des familles libres de F est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$, donc elle possède un maximum noté m. Il existe une famille libre de vecteurs de F de cardinal m. Par construction c'est une famille libre maximale de F, donc c'est une base de F. Ainsi F est de dimension finie et $\dim(F) = m \leq n$.
Supposons que $\dim(F) = \dim(G)$. Alors la famille maximale précédente est une famille libre de G de cardinal égal à la dimension de G, donc c'est aussi une base de G. Alors cette famille engendre à la fois F et G, donc $F = G$. $\square$

Remarque. Ainsi, en dimension finie, pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont égaux, il suffit de montrer une inclusion et l'égalité des dimensions.

Propriété. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, dont $(1, i)$ est une base.

Démonstration.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $z = x + iy$, donc la famille de complexes $(1, i)$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}$, vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .
De plus, si $x + iy = 0$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on sait alors que $x = y = 0$, donc $(1, i)$ est une famille libre.
Ainsi $(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Ceci prouve que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.
Dans la base $(1, i)$, les coordonnées d'un complexe sont ses parties réelle et imaginaire.
$\square$

Exemple. Prenons $E = \mathbb{R}^2$ et posons $c_1 = (1, 0)$ et $c_2 = (0, 1)$. Montrons que $c = (c_1, c_2)$ est une base de E.

Pour tout $(a,b) \in E$, $(a,b) = a(1,0) + b(0,1)$, donc c est une famille génératrice de E.
De plus, si $ac_1 + bc_2 = 0$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors $0 = ac_1 + bc_2 = (a,b)$, donc $a = b = 0$.
Ainsi c est une base de $\mathbb{R}^2$, que l'on appelle la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
En particulier, on a montré que $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie et que $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$.
La forte ressemblance avec la démonstration précédente provient du fait que l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (a,b) & \longmapsto & a+ib \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
On peut généraliser sans difficulté à $\mathbb{K}^n$:

2.3 Base canonique

Propriété. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n dont une base est $c = (c_1, \ldots, c_n)$, où pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $c_i = (\delta_{i,j})_{1 \le j \le n}$.
c est appelé la *base canonique* de $\mathbb{K}^n$.
Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, les coordonnées de x dans la base c sont exactement ses composantes $x_1, \ldots, x_n$.

On peut encore généraliser :

Propriété. Soit I un ensemble quelconque.
Pour tout $i \in I$, on note $c_i = (\delta_{i,j})_{j \in I}$. Ainsi $c = (c_i)_{i \in I}$ est une famille de $\mathbb{K}^{(I)}$.
C'est une base de $\mathbb{K}^{(I)}$, appelée la *base canonique* de $\mathbb{K}^{(I)}$.
De plus, pour tout $x = (\alpha_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$, $x = \sum_{i \in I} \alpha_i c_i$. Ainsi, les *coordonnées* de x dans la base canonique sont exactement ses composantes.

Démonstration.
Soit $(\alpha_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$. Pour tout $i \in I$, $\alpha_i = \sum_{j \in I} \delta_{i,j} \alpha_j$,
donc $(\alpha_i)_{i \in I} = (\sum_{j \in I} \delta_{i,j} \alpha_j)_{i \in I} = \sum_{j \in I} \alpha_j (\delta_{i,j})_{i \in I}$.
Ainsi $(\alpha_i)_{i \in I} = \sum_{j \in I} \alpha_j c_j$.
Ceci prouve que c est une famille génératrice de $\mathbb{K}^{(I)}$.
De plus, si $\sum_{j \in I} \alpha_j c_j = 0$, $(\alpha_i)_{i \in I} = 0$, donc, pour tout $i \in I$, $\alpha_i = 0$, ce qui prouve que c est aussi une famille libre. □

2.4 Exemples

Propriété. Dans $\mathbb{K}^2$, deux vecteurs $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{K}^2$ si et seulement si $u_1 v_2 - u_2 v_1 \stackrel{\Delta}{=} \det_c(u,v) \neq 0$.

Démonstration.
$\dim(\mathbb{K}^2)=2$, donc

$$\begin{aligned}(u,v) \text{ libre} &\iff (u,v) \text{ est une base de } \mathbb{K}^2\\ &\iff \forall w\in\mathbb{K}^2,\ \exists!(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\ \alpha u+\beta v=w\\ &\iff \forall w\in\mathbb{K}^2,\ \exists!\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^2,\ (u|v)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=w,\end{aligned}$$

où $(u|v)$ désigne la matrice dont les colonnes sont u et v. Ainsi,

$$\begin{aligned}(u,v) \text{ libre} &\iff \widetilde{(u|v)}\in GL(\mathbb{K}^2)\\ &\iff (u|v)\in GL_2(\mathbb{K})\\ &\iff det(u|v)\neq 0\\ &\iff u_1v_2-u_2v_1\neq 0.\end{aligned} \qquad \square$$

Exercice. Soit f un endomorphisme de E. Montrer que f est une homothétie si et seulement si pour tout $u\in E$, $(u,f(u))$ est lié.

Propriété. Toute sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.
Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Propriété. Une famille de vecteurs est libre si et seulement si toute sous-famille finie de cette famille est libre.

Exercice. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \sin(x^n)\end{array}$. La famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle libre ?

Solution : Supposons que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n f_n=0$.

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, (1) : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\alpha_n f_n(x)=0$.

[Pour montrer qu'une famille de fonctions est libre, il existe d'autres méthodes que celle consistant à substituer x par des valeurs bien choisies pour se ramener à un système linéaire dont les inconnues sont les α_n. On peut en effet faire de l'analyse, c'est-à-dire dériver ou intégrer la relation (1). On peut également faire un développement limité de (1) au voisinage d'un point bien choisi.]

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $x^n\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$, donc $f_n(x)=x^n+o(x^n)$.

Ainsi, $0=\alpha_0\sin(1)+\displaystyle\sum_{n\geq 1}(\alpha_n x^n+o(x^n))$.

On suppose qu'il existe un $\alpha_n\neq 0$ avec $n\geq 1$.
Appelons k le plus petit $n\geq 1$ tel que $\alpha_n\neq 0$.
Alors $0=\alpha_0\sin(1)+\alpha_k x^k+o(x^k)$. D'après l'unicité du développement limité (de l'application identiquement nulle), $\alpha_k=0$, ce qui est faux.
Ainsi les α_n sont nuls pour $n\geq 1$. On en déduit que $\alpha_0\sin(1)=0$, donc que α_0 est aussi nul. La famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc libre.

Théorème. Si $E_1,\dots,E_n$ sont n sous-espaces vectoriels de dimensions finies, alors $E_1\times\cdots\times E_n$ est de dimension finie et

$$\dim(E_1\times\cdots\times E_n)=\dim(E_1)+\cdots+\dim(E_n).$$

Démonstration.
Le cas général se déduit du cas où $n = 2$ par récurrence car
$E_1 \times \cdots \times E_n = (E_1 \times \cdots \times E_{n-1}) \times E_n$ (Logique et vocabulaire ensembliste page 7).
Soit donc E et F deux espaces vectoriels de dimensions p et q. Notons $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $f = (f_1, \dots, f_q)$ une base de F.

Pour tout $(x, y) \in E \times F$, avec $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{q} y_j f_j$,

$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = \Big(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i, 0\Big) + (0, \sum_{j=1}^{q} y_j f_j\Big)$, donc

$(x, y) = \sum_{i=1}^{p} x_i(e_i, 0) + \sum_{j=1}^{q} y_j(0, f_j)$: ceci démontre que la concaténation des familles $((e_1, 0), \dots, (e_p, 0))$ et $((0, f_1), \dots, (0, f_q))$ est une famille génératrice de $E \times F$.
Notons g cette famille.

Pour montrer qu'elle est libre, supposons que $\sum_{i=1}^{p} x_i(e_i, 0) + \sum_{j=1}^{q} y_j(0, f_j) = 0$, où $(x_i)_{1 \le i \le p}$ et $(y_j)_{1 \le j \le q}$ sont deux familles de scalaires. D'après le calcul précédent, $(x, y) = 0$, où $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{q} y_j f_j$, or e et f sont libres, donc pour tout i et j, $x_i = y_j = 0$. Ainsi g est une base de $E \times F$.
Alors $\dim(E \times F) = |g| = p + q = \dim(E) + \dim(F)$. $\square$

2.5 Application linéaire associée à une famille de vecteurs

Propriété. Soit $x = (x_i) \in E^I$. Notons $\begin{array}{rccc} \Psi_x : & \mathbb{K}^{(I)} & \longrightarrow & E \\ & (\alpha_i)_{i \in I} & \longmapsto & \sum_{i \in I} \alpha_i x_i \end{array}$.

Ψ_x est une application linéaire.
- x est une famille libre si et seulement si Ψ_x est injective.
- x est une famille génératrice si et seulement si Ψ_x est surjective.
- x est une base si et seulement si Ψ_x est un isomorphisme.

Ψ_x est appelée l'application linéaire associée à la famille de vecteurs x.

Démonstration.
- Soit $((\alpha_i), (\beta_i)) \in (\mathbb{K}^{(I)})^2$.

$\Psi((\alpha_i) + (\beta_i)) = \Psi((\alpha_i + \beta_i)) = \sum_{i \in I} (\alpha_i + \beta_i) x_i = \Psi((\alpha_i)) + \Psi((\beta_i))$.
Soit $((\alpha_i), \lambda) \in \mathbb{K}^{(I)} \times \mathbb{K}$. $\Psi(\lambda(\alpha_i)) = \Psi((\lambda\alpha_i)) = \sum_{i \in I} (\lambda\alpha_i) x_i = \lambda\Psi((\alpha_i))$.
Ainsi Ψ_x est une application linéaire.
- x est libre si et seulement si la seule famille (α_i) presque nulle de scalaires vérifiant

$\Psi_x((\alpha_i)) = 0$ est la famille nulle, donc si et seulement si le noyau de Ψ_x est réduit à $\{0\}$.
• x est génératrice si et seulement si pour tout élément v de E, il existe $(\alpha_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$ telle que $v = \Psi_x((\alpha_i))$, donc si et seulement si Ψ_x est surjective. □

Remarque. Lorsque $e = (e_i)_{i \in I}$ est une base de E, pour tout $x \in E$,
$\boxed{\Psi_e^{-1}(x) \text{ est la famille des coordonnées de } x \text{ dans la base } e}$.

Propriété. Soit $x = (x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.
x est libre si et seulement si, pour tout $y \in \mathrm{Vect}(x)$, il existe une unique famille presque nulle de scalaires $(\alpha_i)_{i \in I}$ telle que $y = \sum_{i \in I} \alpha_i x_i$.

Démonstration.
x est libre si et seulement si Ψ_x est injective, donc si et seulement si, pour tout $y \in Im(\Psi_x)$, il existe un unique $(\alpha_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ tel que $y = \Psi_x((\alpha_i))$.
Or $Im(\Psi_x) = \{\sum_{i \in I} \alpha_i x_i / (\alpha_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}\} = \mathrm{Vect}(x)$. □

Propriété. Si $e = (e_i)_{i \in I}$ est une base de E, alors E est isomorphe à $\mathbb{K}^{(I)}$.

Démonstration.
Ψ_e est en effet un isomorphisme de $\mathbb{K}^{(I)}$ dans E. □

2.6 Image d'une famille par une application linéaire

Définition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in L(E, F)$ et $x = (x_i)_{i \in I} \in E^I$. La famille $(u(x_i))_{i \in I}$ est appelée l'image de la famille x par l'application linéaire u.
On notera $(u(x_i))_{i \in I} = u(x)$. On remarquera que $x \in E^I$ et que $u(x) \in F^I$.

Propriété. Avec les notations précédentes, $\Psi_{u(x)} = u \circ \Psi_x$.

Démonstration.
Soit $(\alpha_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$.

$$\Psi_{u(x)}((\alpha_i)) = \sum_{i \in I} \alpha_i u(x_i) = u\left(\sum_{i \in I} \alpha_i x_i\right) = (u \circ \Psi_x)((\alpha_i)).$$ □

Théorème.
• L'image d'une famille libre par une injection linéaire est une famille libre.
• L'image d'une famille génératrice par une surjection linéaire est génératrice.
• L'image d'une base par un isomorphisme est une base.

Démonstration.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels , $u \in L(E, F)$ et $x = (x_i)_{i \in I} \in E^I$.
• Supposons que x est libre et que u est injective. Alors u et Ψ_x sont injectives, donc $\Psi_{u(x)}$ est injective en tant que composée de deux applications injectives. Ainsi $u(x)$ est une famille libre.

• Supposons que x est génératrice et que u est surjective. Alors u et Ψ_x sont surjectives, donc $\Psi_{u(x)}$ est surjective en tant que composée de deux applications surjectives. Ainsi $u(x)$ est une famille génératrice. □

Théorème. Deux espaces de dimensions finies ont la même dimension si et seulement si ils sont isomorphes.

Démonstration.
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et m.
Suppose qu'il existe un isomorphisme f de E dans F. Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F, donc $\dim(F) = n = \dim(E)$.
Réciproquement, supposons que $n = m$. On sait que l'application Ψ_e canoniquement associée à e est un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dans E. De même on montre que F et $\mathbb{K}^n$ sont isomorphes, donc E et F sont isomorphes. □

Remarque. On dispose ainsi de deux techniques importantes pour calculer la dimension d'un espace vectoriel E : rechercher une base de E et calculer son cardinal ou bien chercher un isomorphisme entre E et un espace de dimension connue.

> **Exercice.** Montrer que le cardinal d'un corps fini est de la forme p^n où $p \in \mathbb{P}$ et $n \in \mathbb{N}^*$
>
> **Solution :** Soit $\mathbb{L}$ un corps fini. Alors $\mathrm{car}(\mathbb{L}) \neq 0$, donc en posant $p = \mathrm{car}(\mathbb{L})$, $p \in \mathbb{P}$. Notons $\mathbb{K}$ le sous-corps premier de $\mathbb{L}$. On sait que $\mathbb{K}$ est isomorphe à $\mathbb{F}_p$, donc il est de cardinal p.
> $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel , et $(x)_{x\in\mathbb{L}}$ est une famille génératrice finie de $\mathbb{L}$, donc $\mathbb{L}$ est de dimension finie. Posons $n = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{L})$. Alors $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel isomorphe à $\mathbb{K}^n$, donc $|\mathbb{L}| = p^n$.

Propriété. Soit E et F deux espaces de dimensions finies et soit $f \in L(E, F)$.
Si f est injective, alors $\dim(E) \leq \dim(F)$.
Si f est surjective, alors $\dim(E) \geq \dim(F)$.

Propriété. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions quelconques. Soient $u \in L(E, F)$ et G un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors
$u(G)$ est de dimension finie et $\dim(u(G)) \leq \dim(G)$, avec égalité lorsque u est injective.

Démonstration.
$u|_G^{u(G)}$ est surjective. Elle est bijective lorsque u est injective. □

Propriété. L'image d'une famille génératrice par une application linéaire u est une famille génératrice de $Im(u)$.

Démonstration.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels , $u \in L(E, F)$ et $x = (x_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille génératrice de E.
L'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & Im(u) \\ y & \longmapsto & u(y) \end{array}$ est surjective, donc $u(x)$, en tant qu'image de x par cette application, est une famille génératrice de $Im(u)$. □

Propriété. L'image d'une famille liée par une application linéaire est liée.

Démonstration.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels , $u \in L(E,F)$ et $x = (x_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille liée de E. Ainsi il existe $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \setminus \{0\}$ tel que $\sum_{i\in I} \alpha_i x_i = 0$.
$0 = u(\sum_{i\in I} \alpha_i x_i) = \sum_{i\in I} \alpha_i u(x_i)$, donc $u(x)$ est aussi une famille liée. □

Théorème.
On suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une base $e = (e_i)_{i\in I}$.
Soit $f = (f_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de vecteurs d'un second $\mathbb{K}$-espace vectoriel F.
Il existe une unique application linéaire $u \in L(E,F)$ telle que, $\forall i \in I \quad u(e_i) = f_i$.
De plus, $(f_i)_{i\in I}$ est $\left\{\begin{array}{l}\text{libre}\\ \text{génératrice}\\ \text{une base}\end{array}\right.$ si et seulement si u est $\left\{\begin{array}{l}\text{injective}\\ \text{surjective}\\ \text{bijective}\end{array}\right.$.

Démonstration.
Soit $u \in L(E,F)$.

$$\begin{aligned}(\forall i \in I \ \ u(e_i) = f_i) &\iff \forall (\alpha_i) \in \mathbb{K}^{(I)} \ \ \sum_{i\in I} \alpha_i u(e_i) = \sum_{i\in I} \alpha_i f_i \\ &\iff \Psi_{u(e)} = \Psi_f \iff u \circ \Psi_e = \Psi_f \\ &\iff u = \Psi_f \circ \Psi_e^{-1}\end{aligned}$$

car e étant une base Ψ_e est un isomorphisme.
Ainsi il existe une unique application linéaire $u \in L(E,F)$ telle que $\forall i \in I \quad u(e_i) = f_i$.
Il s'agit de $u = \Psi_f \circ \Psi_e^{-1}$.
f est libre si et seulement si Ψ_f est injective, donc si et seulement si $u = \Psi_f \circ \Psi_e^{-1}$ est injective.
f est génératrice si et seulement si Ψ_f est surjective, donc si et seulement si $u = \Psi_f \circ \Psi_e^{-1}$ est surjective. □

Remarque. Ce théorème affirme notamment qu'une application linéaire $u \in L(E,F)$ est injective (resp : surjective, bijective) si et seulement si l'image par u d'une base de E est une famille libre (resp : une famille génératrice, une base) de F.

Corollaire.
Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et soit $u \in L(E,F)$.
Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors u injective $\iff$ u surjective $\iff$ u bijective.

Démonstration.
Notons $n = \dim(E) = \dim(F)$. Soit e une base de E. Alors u est injective si et seulement si $u(e)$ est libre dans F, or $|u(e)| = n = \dim(F)$, donc u est injective si et seulement si $u(e)$ est une base de F, c'est-à-dire si et seulement si u est bijective. On raisonne de même pour la surjectivité. □

Propriété. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$. Alors

$$\begin{aligned}u \text{ inversible dans } L(E) &\iff u \text{ inversible à droite dans } L(E) \\ &\iff u \text{ inversible à gauche dans } L(E)\end{aligned}.$$

Démonstration.
Si u est inversible à droite, il existe $v \in L(E)$ tel que $vu = Id_E$. Alors u est injectif, mais E est de dimension finie, donc u est un isomorphisme, c'est-à-dire que u est inversible dans $L(E)$.
On raisonne de même à gauche. $\square$

> **Exercice.** Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre et B une sous-algèbre de A de dimension finie. Soit $b \in B$. Montrer que si b est inversible dans A, alors $b^{-1} \in B$.
>
> **Solution :** Notons $\begin{array}{rccc} u: & B & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & bx \end{array}$. u est linéaire. De plus, pour $x \in B$, $x \in \mathrm{Ker}(u) \iff bx = 0 \iff b^{-1}bx = 0 \iff x = 0$, donc u est injective. Or B est de dimension finie, donc u est un isomorphisme. En particulier, 1_A possède un antécédent par u : il existe $c \in B$ tel que $bc = 1_A$. Alors $b^{-1} = c \in B$.

Propriété. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une base $(e_i)_{i\in I}$.
Alors $L(E, F)$ est isomorphe à F^I.

Démonstration.
L'application $\begin{array}{rcl} L(E,F) & \longrightarrow & F^I \\ u & \longmapsto & (u(e_i))_{i\in I} \end{array}$ est une application linéaire et le théorème précédent montre que toute famille $(f_i)_{i\in I}$ de F^I admet un unique antécédent pour cette application, donc qu'elle est bijective. Ainsi cette application est un isomorphisme. $\square$

Théorème. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies. Alors

$$\dim(L(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F).$$

Démonstration.
Posons $n = \dim(E)$ et notons $e = (e_i)_{1\le i\le n}$ une base de E. D'après le précédent corollaire, $\dim(L(E, F)) = \dim(F^{\{1,\dots,n\}}) = \dim(F^n) = n \times \dim(F)$. $\square$