MPSI 2

Programme des colles de mathématiques.

Semaine 25 : du lundi 16 au vendredi 20 mai.

Espaces vectoriels et matrices

Les notions suivantes d'algèbre linéaire ne sont pas connues pour le moment par les étudiants :

— théorie des systèmes linéaires (seulement connnue en dimension 2) ;
— projecteurs et symétries.
— Matrices de passage et formules de changement de bases, matrices équivalentes ;
— Trace d'un endomorphisme (mais la trace d'une matrice est connue) ;
— hyperplans et dualité ;
— les déterminants ;
— la théorie de la réduction.

Liste des questions de cours

1°) Montrer l'associativité du produit matriciel.

2°) Calculer le produit $E_{i,j}E_{h,k}$ de deux matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3°) En notant $\tilde{M}$ l'application linéaire canoniquement associée à la matrice M, montrer que $M \longmapsto \tilde{M}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

4°) Donner l'inverse d'une matrice inversible de taille 2, en justifiant.

5°) Enoncer et démontrer les formules de Cramer pour un système de Cramer de deux équations linéaires.

6°) Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, on pose $c_i = (\delta_{i,j})_{1\leq j\leq n} \in \mathbb{K}^n$ et $F_i = \text{Vect}(c_k)_{1\leq k\leq i}$. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que M est triangulaire supérieure ssi, pour tout $j \in \{1,\ldots,n\}$, F_j est stable par $\tilde{M}$.

7°) Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et préciser les éléments diagonaux du produit de deux matrices triangulaires supérieures.

8°) Enoncer et démontrer une propriété concernant la transposée du produit de deux matrices.

9°) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stables par passage à l'inverse. Montrer qu'ils sont supplémentaires et calculer leurs dimensions.

10°) Enoncer et démontrer une propriété relative à la trace du produit de deux matrices. En déduire que deux matrices semblables ont la même trace.

11°) Soit $u \in L(E,F)$ et soit H un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ dans E. Montrer que $u|_H^{Im(u)}$ est un isomorphisme.

12°) Enoncer puis démontrer un théorème reliant la matrice d'une composée d'applications linéaires avec le produit de leurs matrices.

1 La structure d'espace vectoriel

Révision du programme de la semaine 13.

2 Les matrices

2.1 Vocabulaire

Matrices rectangles, carrées, matrices lignes, colonnes.
Matrices triangulaires supérieures et inférieures, matrices diagonales, matrices scalaires.

On identifiera $\mathbb{K}^n$ avec $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,1)$ (ensemble des matrices colonnes).

2.2 Opérations sur les matrices

$\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Base canonique de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$.

Convention : Lorsque A est une matrice, on notera $A_{i,j}$ son coefficient de position (i,j).

Produit matriciel. Associativité, distributivité par rapport à l'addition.

Si $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$, on note $\tilde{M}$ l'application linéaire canoniquement associée à M.
$M \longmapsto \tilde{M}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$ dans $L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.

Noyau et image d'une matrice.

2.3 L'algèbre des matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, ., \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, ni commutative ni intègre dès que $n \geq 2$.

matrices nilpotentes.

$M \longmapsto \tilde{M}$ est un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n)$ dans $L(\mathbb{K}^n)$.
$A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n)$ est inversible si et seulement si $\tilde{A}$ est inversible dans $L(\mathbb{K}^n)$, auquel cas $\widetilde{A^{-1}} = \tilde{A}^{-1}$.
$A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n)$ est inversible ssi pour tout $X \in \mathbb{K}^n$, il existe un unique $Y \in \mathbb{K}^n$ tel que $AX = Y$.

Une matrice carrée est inversible si et seulement si elle l'est à droite (resp : à gauche).

Inverse d'une matrice carrée de taille 2.
Formule de Cramer pour un système de 2 équations linéaires.

Sous-algèbres des matrices diagonales, des matrices triangulaires supérieures et inférieures.

2.4 Transposée d'une matrice

$A \longmapsto {}^tA$ est un isomorphisme involutif d'espaces vectoriels.

${}^t(AB) = {}^tB\ {}^tA$.
Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, ${}^tA \in GL_n(\mathbb{K})$ et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Matrices symétriques et antisymétriques.
$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stables par passage à l'inverse.

2.5 Différentes interprétations du produit matriciel

La j-ème colonne de AB est égale à $A \times$ (la j-ème colonne de B).
Les colonnes de AB sont des combinaisons linéaires des colonnes de A.

Transposition de ces propriétés en termes de lignes.

2.6 Trace d'une matrice

$Tr(AB) = Tr(BA)$.

Matrices semblables.
Deux matrices semblables ont la même trace (réciproque fausse).

2.7 Matrices décomposées en blocs

2.7.1 Matrices extraites

Lorsque I et J sont deux parties finies de $\mathbb{N}$, identification d'une famille $(M_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ avec une matrice possédant $|I|$ lignes et $|J|$ colonnes.

Matrices extraites.

2.7.2 Matrices blocs

Matrices décomposées en blocs.
Matrices diagonales par blocs, triangulaires supérieures ou inférieures par blocs.

Produit matriciel de matrices décomposées en blocs.
Produits et puissances de matrices diagonales par blocs, ou bien triangulaires supérieures par blocs.

3 Rang

3.1 Rang d'une famille de vecteurs

Si x est une famille de vecteurs de E, $\mathrm{rg}(x) \leq \#(x)$ et $\mathrm{rg}(x) \leq \dim(E)$. CNS d'égalité.

$\mathrm{rg}(u(x)) \leq \mathrm{rg}(x)$, avec égalité lorsque $\mathrm{rg}(x) < +\infty$ et u injective.

$\mathrm{rg}(x_i)_{i\in I}$ n'est pas modifié si l'on échange l'ordre de deux vecteurs, si l'on multiplie l'un des vecteurs x_i par un scalaire non nul, ou bien si l'on ajoute à l'un des x_i une combinaison linéaire des autres x_j.

3.2 Rang d'une application linéaire

Si H est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E, alors $u|_H^{\mathrm{Im}(u)}$ est un isomorphisme.
Formule du rang.

$\mathrm{rg}(v \circ u) \leq \inf(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$.

Rang d'une matrice.
On ne modifie pas le rang d'une matrice en la multipliant par une matrice inversible.

3.3 Rang d'une matrice

$rg(M) = rg(\tilde{M})$, le rang de M est égal au rang de ses colonnes.
$\mathrm{rg}(AB) \leq \inf(\mathrm{rg}(A), \mathrm{rg}(B))$.

4 Matrice d'une application linéaire

Notation. $\mathrm{mat}(u, e, f)$, où $u \in L(E, F)$, e base de E et f base de F.

$\mathrm{rg}(\mathrm{mat}(u, e, f)) = \mathrm{rg}(u)$.

Si $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$, l'application linéaire canoniquement associée à M est $\begin{array}{rccc}\tilde{M}: & \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & X & \longmapsto & \tilde{M}(X) = MX\end{array}$.
C'est aussi l'unique application linéaire telle que $\mathrm{mat}(\tilde{M}, \text{bases canoniques}) = M$.

$u \longmapsto \mathrm{mat}(u, e, f)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $L(E, F)$ dans $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$.
$u \longmapsto \mathrm{mat}(u, e)$ est un isomorphisme d'algèbres de $L(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème. $\mathrm{mat}(v \circ u) = \mathrm{mat}(v) \times \mathrm{mat}(u)$.

$\mathrm{mat}(u, e, f)^{-1} = \mathrm{mat}(u^{-1}, f, e)$.

$u(x) = y \Longleftrightarrow MX = Y$.

Prévisions pour la semaine suivante :

Suite et fin de l'algèbre linéaire.