# Feuille d'exercices 1.
# révisions (réels, complexes, récurrence), fonctions, trigonométrie

## Réels

**Exercice 1.1 :** (niveau 1)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{(x+3)(x-1)} \geq 2x-1$.

**Exercice 1.2 :** (niveau 2)
**Inégalité de Cauchy-Schwarz.**

**1°)** Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$.

**2°)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que, pour tout $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big)$.

**3°)** En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$.

**4°)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$.

**5°)** Montrer que, pour tout réels $x, y, z$ strictement positifs,
$\displaystyle\sqrt{\frac{x+y}{x+y+z}} + \sqrt{\frac{x+z}{x+y+z}} + \sqrt{\frac{y+z}{x+y+z}} \leq \sqrt{6}$.

**Exercice 1.3 :** (niveau 3)

**1°)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \ldots, x_{n+1}$ des réels de l'intervalle $[0,1]$. Montrer qu'il existe $i, j \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 \leq i < j \leq n+1$ et $|x_i - x_j| \leq \frac{1}{n}$.

**2°)** Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ avec $x > 0$.
Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $q \geq N$ et $|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$.

**3°)** On admettra que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, $|\sqrt{2} - \dfrac{p}{q}| \geq \dfrac{c}{q^2}$.

## Récurrence

**Exercice 1.4 :** (niveau 1)

**1°)** Déterminer l'unique racine positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$, que l'on notera $\varphi$ (c'est le nombre d'or).
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{n+2} = \varphi^{n+1} + \varphi^n$.

**2°)** On désigne par $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \alpha\varphi^n + \beta\Big(\frac{-1}{\varphi}\Big)^n$.

**Exercice 1.5 :** (niveau 1)
Soit $(u_n)$ une suite d'entiers naturels ne prenant jamais deux fois la même valeur et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq n$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$.

**Exercice 1.6 :** (niveau 1)
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}$.

**Exercice 1.7 :** (niveau 2)
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} [(2k+1)!] \geq [(n+1)!]^{n+1}$.

**Exercice 1.8 :** (niveau 2)
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$.

## Complexes

**Exercice 1.9 :** (niveau 1)
Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations $z^4 = i$ et $z^3 = -1$.

**Exercice 1.10 :** (niveau 1)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(1+i)z^2 + (1-i)z + 2(1+i) = 0$.

**Exercice 1.11 :** (niveau 1)
Déterminer le lieu géométrique des points $M$ dont l'affixe $z$ vérifie $\dfrac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R}$.

**Exercice 1.12 :** (niveau 1)
Soit $a$ et $b$ deux complexes de module 1 tels que $ab \neq -1$. Montrer que $\dfrac{a+b}{1+ab}$ est réel.

**Exercice 1.13 :** (niveau 1)
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

**1°)** Si $a + ib = c + id$ alors $a = c$ et $b = d$.

**2°)** On a $|2+i| = \sqrt{2^2 + i^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$.

**3°)** L'ensemble des points dont l'affixe est d'argument nul est la droite réelle.

**4°)** Si $z_1^3$ et $z_2^3$ sont conjugués alors $z_1$ et $z_2$ sont conjugués.

**Exercice 1.14 :** (niveau 1)
Déterminer les nombres complexes $u$ et $v$ tels que $|u + iv|^2 = u^2 + v^2$.

**Exercice 1.15 :** (niveau 1)
Pour $n \geq 1$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

## Applications

**Exercice 1.16 :** (niveau 1)
Déterminer le domaine de définition de la fonction $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$.

**Exercice 1.17 :** (niveau 1)
Soit $f$ une application de $E$ dans $F$ et $g$ une application de $F$ dans $G$.
Prouvez les implications suivantes :

**1°)** Si $g \circ f$ est injective alors $f$ est injective.
Si $g \circ f$ est injective et $f$ surjective alors $g$ est injective.

**2°)** Si $g \circ f$ est surjective alors $g$ est surjective.
Si $g \circ f$ est surjective et $g$ injective alors $f$ est surjective.

**Exercice 1.18 :** (niveau 1)
Lorsque $a \in \mathbb{R}$, on note $f_a$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
pour tout $x > 0$, $f_a(x) = x + a$ et pour tout $x \leq 0$, $f_a(x) = x - a$.
Pour quels $a$ l'application $f_a$ est-elle injective (resp : surjective) ?

**Exercice 1.19 :** (niveau 2)

**1°)** Lorsque $f$ est une application strictement monotone de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer qu'elle est injective.

**2°)** Donner un exemple d'application définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, injective mais non strictement monotone.

**Exercice 1.20 :** (niveau 2)
Déterminer les applications $f$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \ f(x) + xf(1 - x) = 1 + x.$$

**Exercice 1.21 :** (niveau 2)
Déterminer toutes les fonctions $f \ : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x - f(y)) = 2 - x - y.$$

**Exercice 1.22 :** (niveau 2)
On note $f$ l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x, xy - y^3)$.
$f$ est-elle injective ? Est-elle surjective ?

## Trigonométrie

**Exercice 1.23 :** (niveau 1)
En passant par les complexes, montrer que $\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$.

**Exercice 1.24 :** (niveau 1)
Résoudre l'équation $3\cos(5x) = \cos(2x) + \cos(12x)$.

**Exercice 1.25 :** (niveau 2)
En exprimant $\cos(3\theta)$ et $\cos(4\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$, montrer que $\cos(\frac{2\pi}{7})$ n'est pas rationnel.

**Exercice 1.26 :** (niveau 2)
Résoudre l'inéquation $2\sin x - 1 < \sqrt{1 - 4\cos^2 x}$.

**Exercice 1.27 :** (niveau 3)
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$.

**Exercice 1.28 :** (niveau 3)

**1°)** Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\cos((n+1)x) = 2\cos(nx)\cos(x) - \cos((n-1)x).$$

**2°)** En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n$ tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $2\cos(n\theta) = T_n(2\cos\theta)$.

**3°)** Soit $P$ un polynôme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $x \longmapsto x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, où $k \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{Z}$.
Soit $a$ une racine rationnelle de $P$. En écrivant $a$ sous la forme $a = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, et $p$ et $q$ premiers entre eux, montrer que $a \in \mathbb{Z}$.

**4°)** En déduire le théorème de Niven : Soit $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$.
Montrer que si $\cos\theta \in \mathbb{Q}$, alors $\cos\theta \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

## Exercices supplémentaires

### Réels

**Exercice 1.29 :** (niveau 3)
Soient $a, b, c$ trois nombres réels positifs ou nuls. Démontrer que l'un au moins des trois nombres réels $4b(1-c), 4c(1-a)$ et $4a(1-b)$ est inférieur ou égal à 1.

**Récurrence**

**Exercice 1.30 :** (niveau 1)
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2$.
Calculer $u_n$ en fonction de $u_0$ et $n$.

**Exercice 1.31 :** (niveau 1)
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$.

**Exercice 1.32 :** (niveau 1)
*Suites arithmético-géométriques :*
On fixe deux réels $a$ et $b$.
On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.
On souhaite exprimer $u_n$ en fonction de $n$ et de $u_0$.

**1°)** Traiter les cas $a = 1$ et $b = 0$.
Pour la suite, on suppose que $a \neq 1$.

**2°)** Montrer qu'il existe un unique réel $\ell$ tel que $\ell = a\ell + b$.

**3°)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - \ell$.
Calculer $v_n$ en fonction de $n$ et de $v_0$. Conclure.

**4°)** La suite $(u_n)$ est-elle convergente ?

**Exercice 1.33 :** (niveau 1)
Montrer que tout entier supérieur à 2 est un produit de nombres premiers.

**Exercice 1.34 :** (niveau 2)
On considère la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

**1°)** Exprimer $\Delta_n = F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2$ en fonction de $n$.

**2°)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n$ et $F_{n+1}$ sont premiers entre eux.

**Exercice 1.35 :** (niveau 2)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n$ $n$ réels strictement positifs.
On suppose qu'il existe $\varepsilon \in ]0, 1[$ tel que, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $x_ix_j \leq \varepsilon^{|i-j|}$.
Montrer que $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}^n}{1 - \sqrt{\varepsilon}}$.

**Complexes**

**Exercice 1.36 :** (niveau 1)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(1 + i)z^2 + iz + (1 - i) = 0$.

**Exercice 1.37 :** (niveau 1)
Résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$ suivante : $\overline{z} = 2z + j$, où $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$.

**Exercice 1.38 :** (niveau 1)
Déterminer le lieu géométrique des points $M$ dont l'affixe $z$ vérifie $\dfrac{z+4i}{5z-3} \in \mathbb{R}$.

**Exercice 1.39 :** (niveau 1)
Montrer que, pour tout $z$ et $z'$ dans $\mathbb{C}$,
$|z\overline{z'}+1|^2 + |z-z'|^2 = (1+|z|^2)(1+|z'|^2)$.
Donner une formule analogue pour $|z\overline{z'}-1|^2 - |z-z'|^2$.

**Exercice 1.40 :** (niveau 2)
Pour $z \neq -i$, on pose $Z = \dfrac{z^2}{z+i}$.

**1°)** Déterminer l'ensemble $A$ des points $z$ pour lesquels $Z$ est imaginaire pur.

**2°)** Résoudre, pour $a$ réel fixé, $z^2 + 2iaz - 2a = 0$.
Montrer que l'ensemble des solutions est inclus dans $A$.

## Applications

**Exercice 1.41 :** (niveau 1)
Soit $c \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+cx^2}}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\ fois}(x)$.

**Exercice 1.42 :** (niveau 1)
Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Parmi les assertions suivantes, déterminer celles qui sont vraies. On justifiera les réponses.

1. Si $f$ est croissante et $f(a) < f(b)$ alors $a < b$.
2. Si $f$ est croissante et $f(a) \leq f(b)$ alors $a \leq b$.
3. Si $f$ est strictement croissante et $f(a) \leq f(b)$ alors $a \leq b$.

**Exercice 1.43 :** (niveau 3)
Soit $f$ et $g$ deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On suppose que $f$ est surjective, que $g$ est injective et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \geq g(n)$.

**1°)** Montrer que $g$ est bijective.

**2°)** Que peut-on dire de $f$ et $g$ ?

## Trigonométrie

**Exercice 1.44 :** (niveau 2)

**1°)** Résoudre l'équation $\sin(4x) = \sin x$ sur $\mathbb{R}$.

**2°)** À l'aide d'une antilinéarisation, démontrer que

$(\sin(4x) = \sin x) \wedge (\sin x \neq 0) \Longleftrightarrow 8\cos^3 x - 4\cos x - 1 = 0$.

**3°)** Déterminer les solutions de l'équation $8X^3 - 4X - 1 = 0$ (on pourra s'aider d'une solution évidente donnée par la question 1) et en déduire la valeur de $\cos(\frac{\pi}{5})$.

**Exercice 1.45 :** (niveau 3)
Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$.

**Exercice 1.46 :** (niveau 3)

**1°)** Exprimer $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$, lorsque toutes ces quantités sont définies.

**2°)** Exprimer $\tan(a+b+c)$ en fonction de $\tan a$, $\tan b$ et $\tan c$, lorsque toutes ces quantités sont définies.

**3°)** Conjecturer puis démontrer une généralisation.