# Feuille d'exercices 18.
# Calcul asymptotique

**Exercice 18.1 :** (niveau 1)
Développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $e^{\sin t}$.

**Exercice 18.2 :** (niveau 1)
Donner un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\sqrt{k}}$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

**Exercice 18.3 :** (niveau 1)
Donnez des équivalents de

- $\diamond$ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1+t^3}}$ au voisinage de $-1$.
- $\diamond$ $\dfrac{chx - \cos x}{(e^x-1)^{\frac{5}{2}}}$ au voisinage de 0 et de $+\infty$.
- $\diamond$ $\dfrac{\ln t}{\sqrt{1-t}}$ au voisinage de 0 et de 1.

**Exercice 18.4 :** (niveau 1)
Nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n$, où $a_n = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k}}$.

**Exercice 18.5 :** (niveau 1)
Calculer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $\cos(\sqrt{t+t^2})$ : on attend des calculs précis et justifiés.

**Exercice 18.6 :** (niveau 1)
Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de $\sum a_n$ où $a_n = n^a \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

**Exercice 18.7 :** (niveau 1)
Calculer la limite en 0, si elle existe, de $(\sin x)\sin\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$, $(1+\tan x)^{\frac{1}{\sin x}}$, $\dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$, et $\dfrac{\sin(x\ln x)}{x}$.

**Exercice 18.8 :** (niveau 1)
Nature de la série de terme général $a_n = \cos\left(\dfrac{\pi n^2}{2n^2+an+1}\right)$ où $a \in \mathbb{R}$.

**Exercice 18.9 :** (niveau 1)
$\mathrm{DL}_3(0)$ de $f(x) = xe^{\sin x} - \sqrt{1+x}$.

**Exercice 18.10 :** (niveau 1)
Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2+n})$.

**Exercice 18.11 :** (niveau 1)
Donner un équivalent simple en 0 et en $+\infty$ de $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ et de $\ln(4x^4 - 2\cos x + 3)$, .

**Exercice 18.12 :** (niveau 1)
Nature de $\sum u_n$ où $u_n = \ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right)$ , avec $a \in \mathbb{R}$.

**Exercice 18.13 :** (niveau 1)
Déterminer la limite lorsque $x$ tend vers 1 de $\dfrac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$.

**Exercice 18.14 :** (niveau 1)
Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n\sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

**Exercice 18.15 :** (niveau 2)
Donnez des équivalents de
- $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}$ au voisinage de 0 et de 1.
- $f(x) = \dfrac{\sin(ax)}{e^x - 1}$ au voisinage de 0.
- $f(x) = \dfrac{th3x - th2x}{x}$ au voisinage de 0 et de $+\infty$.

**Exercice 18.16 :** (niveau 2)
Donnez des équivalents au voisinage de $+\infty$ de
- $u_n = \left(\dfrac{\ln(n+a)}{\ln(n+b)}\right)^{n\ln(n)}$.
- $a_n = \arccos(\dfrac{2}{\pi}\arctan(n^2))$.

**Exercice 18.17 :** (niveau 2)
Calculer la limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(\frac{k}{n^2})$.

**Exercice 18.18 :** (niveau 2)
Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

**1°)** Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

**2°)** Déterminer $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}_+^*$.

**3°)** Donner un équivalent de $u_n$.

**Exercice 18.19 :** (niveau 2)
Calculer la limite en $+\infty$, si elle existe, de $x\sin(\frac{1}{x})$, $\left(\dfrac{x^4}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}} - x$, $\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x}$, et $\dfrac{\mathrm{sh}\sqrt{x^2+2}}{e^x}$.

**Exercice 18.20 :** (niveau 2)
Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{nu_n}$ et déterminer un équivalent de $u_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 18.21 :** (niveau 2)
$\mathrm{DL}_{100}(0)$ de $f(x) = \ln\Big(\displaystyle\sum_{k=0}^{99} \frac{x^k}{k!}\Big)$.

**Exercice 18.22 :** (niveau 2)
$\mathrm{DL}_2(1)$ de $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$.

**Exercice 18.23 :** (niveau 2)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = e^x + \arctan x - 1$.
Montrer que $f^{-1}$ est définie au voisinage de 0 et déterminer son $\mathrm{DL}_2(0)$.

**Exercice 18.24 :** (niveau 2)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $u_n = \dfrac{1}{\ln(n) + (-1)^n n^\alpha}$. Déterminer la nature de $\sum u_n$.

**Exercice 18.25 :** (niveau 2)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général
$a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}((n+1)^{1+\frac{1}{n}} - (n-1)^{1-\frac{1}{n}})$.

**Exercice 18.26 :** (niveau 2)
Nature de $\sum a_n$ où $a_n = \arccos(\dfrac{2}{\pi}\arctan(n^2))$.

**Exercice 18.27 :** (niveau 2)
Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$.

**Exercice 18.28 :** (niveau 3)

**1°)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'équation $\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$ admet une unique solution sur $[0, 1]$ notée $a_n$.

**2°)** Montrer que la suite $(a_n)$ est strictement décroissante.

**3°)** Montrer que la suite $(a_n)$ converge vers une limite $l$ que l'on calculera.

**4°)** Donner un équivalent de $a_n - l$.

**Exercice 18.29 :** (niveau 3)

**1°)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\ln(x_n) + nx_n = 0$.

**2°)** Montrer que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

**3°)** Donner un équivalent de $x_n$.

## Exercices supplémentaires

**Exercice 18.30 :** (niveau 1)
Développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $\dfrac{1}{\cos t}$ .

**Exercice 18.31 :** (niveau 1)
On fixe deux réels $a$ et $b$. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ où $u_n = \sin(\dfrac{1}{n}) + a\tan(\dfrac{1}{n}) + b\ln(\dfrac{n+1}{n-1})$.

**Exercice 18.32 :** (niveau 1)
Développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $\ln^2(1 + t)$.

**Exercice 18.33 :** (niveau 1)
Développement limité à l'ordre 6 au voisinage de 0 de $\ln(\cos t)$.

**Exercice 18.34 :** (niveau 1)
Nature de la série $\sum a_n$ où $a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$.

**Exercice 18.35 :** (niveau 1)
Développement limité à l'ordre 6 au voisinage de 0 de $\arcsin^2 t$.

**Exercice 18.36 :** (niveau 1)
Calculez la limite de $(x\mathrm{cotan}(x))^{\mathrm{cotan}(x)}$ lorsque $x$ tend vers 0 par valeurs supérieures.

**Exercice 18.37 :** (niveau 1)
Calculer les limites à gauche et à droite en 0, si elles existent,
de $f(x) = x|1 + \frac{1}{x}|$ et $g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

**Exercice 18.38 :** (niveau 1)
Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln(k)}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Exercice 18.39 :** (niveau 1)
Déterminer la limite lorsque $x$ tend vers 0 de $\frac{x^x - (\sin x)^{\sin x}}{x^3}$.

**Exercice 18.40 :** (niveau 1)

**1°)** $f(x) = \frac{x \sin x}{x+3}$ possède-t-elle une limite en $+\infty$ ?

**2°)** $g(x) = (\sin x)\ln(1+x)$ possède-t-elle une limite en $+\infty$ ?

**3°)** $h(x) = \frac{\sin \frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$ possède-t-elle une limite en 0 ?

**Exercice 18.41 :** (niveau 1)

**1°)** Développement limité de $(sint)^{15}$ à l'ordre 17 au voisinage de 0.

**2°)** Développement limité de $e^{\cos t}$ au voisinage de 0 à l'ordre 4.

**Exercice 18.42 :** (niveau 1)
Soient $a$, $b$ et $c$ trois réels. Déterminez la nature de la série $\sum a_n$ où
$a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3+an^2+bn+c}$.

**Exercice 18.43 :** (niveau 1)
Donnez le développement limité de $(1+sint)^{\frac{1}{t}}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

**Exercice 18.44 :** (niveau 2)
Donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{\ln k}$.

**Exercice 18.45 :** (niveau 2)
Natures de $\sum_{n\geq 1} (\mathrm{ch}(\sqrt{\ln n}))^{-2}$, $\sum_{n\geq 1} \mathrm{argch}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)$ et $\sum \Big((\frac{\pi}{2})^{\frac{3}{5}} - (\mathrm{arctan} n)^{\frac{3}{5}}\Big)$.

**Exercice 18.46 :** (niveau 2)
Donnez un équivalent au voisinage de 0 de $\mathrm{sh}(\sin t) - \sin(\mathrm{sh} t)$.

**Exercice 18.47 :** (niveau 2)
Donnez des équivalents au voisinage de $+\infty$ de

◇ $\frac{n+i}{n^3+i}$.

◇ $u_n = \frac{1}{\ln(n) + (-1)^n n^\alpha}$.

$\diamond$ $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}((n+1)^{1+\frac{1}{n}} - (n-1)^{1-\frac{1}{n}})$.

**Exercice 18.48 :** (niveau 2)
Déterminez la nature de la série $\sum a_n$ où $a_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

**Exercice 18.49 :** (niveau 2)
Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la nature de $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}$.

**Exercice 18.50 :** (niveau 2)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ Calculer lorsqu'elle existe la limite $l$ de $(a_n)$ où :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = \cos^n\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ . Etudier la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(a_n - l)$.

**Exercice 18.51 :** (niveau 2)
Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ de $f(x) = (1+\sin x)^x$.

**Exercice 18.52 :** (niveau 2)
Nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n \left((1+\dfrac{1}{n})^{-n} - \dfrac{1}{e}\right)$.

**Exercice 18.53 :** (niveau 2)
Donner un développement asymptotique en $o(\dfrac{1}{n^3})$ de $u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!$.

**Exercice 18.54 :** (niveau 2)
On pose $f(x) = xe^{(x^2)}$.

**1°)** Montrer que $f$ est un $C^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

**2°)** Déterminer un développement limité de $f^{-1}$ au voisinage de 0 à l'ordre 6.

**Exercice 18.55 :** (niveau 2)
Soient $c \in \mathbb{R}_+^*$. On note $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x\sin(x) - c\cos(x) \end{array}$.

**1°)** Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $f$ possède un seul zéro $x_n$ dans l'intervalle $]n\pi, n\pi + \dfrac{\pi}{2}[$.

**2°)** Déterminer un équivalent de $x_n - n\pi$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 18.56 :** (niveau 2)
Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \left(\dfrac{\ln(n+a)}{\ln(n+b)}\right)^{n\ln(n)}$.

**1°)** Montrer que $u_n$ tend vers une limite $l$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**2°)** Déterminer la nature de la série $\sum(u_n - l)$.

**Exercice 18.57 :** (niveau 2)
On note $(u_n)$ la suite définie par $u_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = (n + u_n^{n-1})^{\frac{1}{n}}$.

**1°)** Déterminer la limite de $u_n$.

**2°)** Donner un développement de $u_n$ en $o(\frac{1}{n})$.

**Exercice 18.58 :** (niveau 2)
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^3$, où $I$ est un intervalle ouvert contenant 0.
On suppose qu'au voisinage de 0, $f(x) = x + x^2 + x^3 + o(x^3)$.

**1°)** Montrer que $f^{-1}$ est définie et de classe $C^3$ sur un intervalle ouvert contenant 0.

**2°)** Donner un développement limité de $f^{-1}(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.

**3°)** On suppose maintenant que $f$ est de classe $C^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$, et qu'au voisinage de 0, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k + o(x^n)$.
Donner un développement limité de $f^{-1}$ au voisinage de 0 à l'ordre $n$.

**Exercice 18.59 :** (niveau 2)
Déterminer une application $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ telle qu'au voisinage de $+\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln^n x = o(f(x))$ et $f(x) = o(x^{\frac{1}{n}})$.

**Exercice 18.60 :** (niveau 2)
Soit $(a_n)$ une suite de réels positifs ou nuls.
Montrer que $[\frac{a_n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0] \Longleftrightarrow [e^{a_n} \sim (1 + \frac{a_n}{n})^n]$.

**Exercice 18.61 :** (niveau 3)
On pose $f(x) = \frac{e^{(x^2)} - 1}{x}$ lorsque $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$.
On admet que $f$ réalise un $C^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Déterminer un développement limité de $f^{-1}$ au voisinage de 0 à l'ordre 6.

**Exercice 18.62 :** (niveau 3)
Soit $(a_n)$ une suite de réels telle que $a_n \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Déterminer la nature de $\sum a_n$.

**Exercice 18.63 :** (niveau 3)
Soit $f : x \longmapsto \tan x - \frac{x^2}{x+1}$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $f$ a un seul zéro noté $x_n$ dans $]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.
Donner un développement de $x_n$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$, à la précision $o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$ .

**Exercice 18.64 :** (niveau 3)

**1°)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique réel $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\int_0^{x_n} \frac{t^n}{1+t} dt = \ln(1 + x_n)$.

**2°)** Montrer qu'à partir d'un certain rang, $x_n \in [1, 2]$.

**3°)** Montrer que la suite $(x_n)$ converge et calculer sa limite $\alpha$.

**4°)** Donner un équivalent de $x_n - \alpha$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 18.65 :** (niveau 3)

1°) On note $U$ l'ensemble des suites réelles décroissantes $(u_n)$ telles que $u_n + u_{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$.
Montrez que les éléments de $U$ sont tous équivalents.

2°) Même question avec l'ensemble $V$ des suites réelles positives telles que $v_n + v_{2n} \sim \dfrac{1}{n}$.

**Exercice 18.66 :** (niveau 3)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ et $g_{n+1}(x) \leq g_n(x)$.
On suppose de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = o(g_n(x))$.
Montrer qu'il existe une application $H$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = o(H(x))$ et $H(x) = o(g_n(x))$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.