TD 23 : corrigé de certains exercices

Exercice 22.13 :

1°) $E = Im(f) + Im(g)$, donc $n = dim(E) = rg(f) + rg(g) - dim(Im(f) \cap Im(g))$.
De même, $n = dim(E) = dim(Ker(f)) + dim(Ker(g)) - dim(Ker(f) \cap Ker(g))$.
Sommons ces deux relations en utilisant la formule du rang :
$2n = 2n - dim(Im(f) \cap Im(g)) - dim(Ker(f) \cap Ker(g))$.
Ainsi, $dim(Im(f) \cap Im(g)) + dim(Ker(f) \cap Ker(g)) = 0$, ce qui permet de conclure.

2°) C'est faux en dimension infinie : il suffit de prendre $E = \mathbb{K}[X]$, et pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $f(P) = P'$ et $g(P) = 0$.
$Im(f) + Im(g) = Im(f) = E$ et $Ker(f) + Ker(g) = Ker(f) + E = E$.

Exercice 22.16 :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$,
$u(P) = \lambda P \Longleftrightarrow \forall x \in]0,1[,\ \ x(x-1)P'(x) = (\lambda - b - ax)P(x)$.
Par décomposition en éléments simples, $\dfrac{\lambda - b - ax}{x(x-1)} = \dfrac{b-\lambda}{x} + \dfrac{\lambda - b - a}{x-1}$, donc
$u(P) = \lambda P \Longleftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}\ \ P(x) = Ce^{(b-\lambda)\ln x + (\lambda - b - a)\ln(1-x)} = Cx^{b-\lambda}(1-x)^{\lambda-b-a}$.
Supposons que $f\ :\ x \longmapsto x^{b-\lambda}(1-x)^{\lambda-b-a}$ est une application polynomiale. Au voisinage de 0, $f(x) \sim x^{b-\lambda}$, donc $b - \lambda \in \mathbb{N}$.
De même, au voisinage de 1, $f(x) \sim (1-x)^{\lambda-b-a}$, donc $\lambda - b - a \in \mathbb{N}$.
Dans ce cas, $-a = (b-\lambda) + (\lambda - b - a) \in \mathbb{N}$.
Ainsi, lorsque $-a \notin \mathbb{N}$, le spectre de u est vide.
Supposons maintenant que $-a \in \mathbb{N}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors
$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \Longleftrightarrow (b-\lambda, \lambda - b - a) \in \mathbb{N}^2 \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ \ \lambda = b - k$ et $-k - a \in \mathbb{N}$, donc
$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \Longleftrightarrow \exists k \in \{0, \ldots, -a\},\ \ \lambda = b - k$.
Ainsi, lorsque $-a \in \mathbb{N}$, on dispose de $-a+1$ valeurs propres et pour chaque valeur propre λ, le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par le polynôme $x \longmapsto x^{b-\lambda}(1-x)^{\lambda-b-a}$.

Exercice 22.18 :

1°) Soit $g \in L(F, E)$.

$$\begin{aligned} g \in V &\Longleftrightarrow [\forall x \in E\ \ f \circ g[f(x)] = 0] \\ &\Longleftrightarrow [\forall y \in Im(f)\ \ f \circ g(y) = 0] \\ &\Longleftrightarrow [\forall y \in Im(f)\ \ g(y) \in Ker(f)] \\ &\Longleftrightarrow g(Im(f)) \subset Ker(f). \end{aligned}$$

2°) [Pour cet exercice, on peut construire les matrices des éléments de V, dans des bases bien choisies.]

Soient $(b_1,\ldots,b_r)$ une base de $Im(f)$ que l'on complète en une base $b=(b_1,\ldots,b_p)$ de F et $a=(a_1,\ldots,a_{n-r})$ une base de $Ker(f)$, que l'on complète en une base $a=(a_1,\ldots,a_n)$ de E.

D'après la première question, $g\in V$ si et seulement s'il existe $A\in\mathcal{M}_{n-r,r}$, $B\in\mathcal{M}_{n-r,p-r}$ et $C\in\mathcal{M}_{r,p-r}$ telles que la matrice de g dans les bases b et a se décompose en blocs sous la forme suivante : $Mat(g,b,a)=\begin{pmatrix} A & B\\ 0_{r,r} & C\end{pmatrix}$.

On notera W l'ensemble de ces matrices.

Notons $\begin{array}{cccc}\varphi: & L(F,E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}\\ & u & \longmapsto & Mat(u,b,a)\end{array}$. D'après le cours, φ est un isomorphisme, donc $dim(V)=dim(\varphi(V))=dim(W)$, or

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_{n-r,r}\times\mathcal{M}_{n-r,p-r}\times\mathcal{M}_{r,p-r} & \longrightarrow & W\\ (A,B,C) & \longmapsto & \begin{pmatrix} A & B\\ 0_{r,r} & C\end{pmatrix}\end{array}$$ est un isomorphisme, donc

$dim(V)=dim(\mathcal{M}_{n-r,r}\times\mathcal{M}_{n-r,p-r}\times\mathcal{M}_{r,p-r})=r(n-r)+(n-r)(p-r)+r(p-r)$.

On en déduit que $dim(V)=np-r^2$.

Exercice 22.20 :

- [Si A est semblable à J, $rg(A)=rg(J)=1$, donc $Ker(A)$ est de dimension 2.

Il serait bon d'établir ce résultat intermédiaire. En effet, en prenant ensuite une base (e_2,e_3) de $Ker(A)$ et en la complétant par un vecteur e_1 correctement choisi on parviendra à conclure.]

$\diamond$ $A^2=0$, donc $Im(A)\subset Ker(A)$. On en déduit que $rg(A)\le dim(Ker(A))$, or, d'après la formule du rang, $dim(Ker(A))=3-rg(A)$, donc $2rg(A)\le 3$. Mais $rg(A)\in\mathbb{N}$, donc $rg(A)\in\{0,1\}$. De plus, $rg(A)\neq 0$ car $A\neq 0$. Ainsi, $rg(A)=1$ et $dim(Ker(A))=2$.

$\diamond$ Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

[Pour obtenir la première colonne de J, il faut choisir $e_1\in\mathbb{R}^3$ tel que $u(e_1)=e_2$. Il suffit pour cela de prendre e_2 dans $Im(u)$, ce qui est possible car $Im(u)\subset Ker(u)$.]

Notons e_2 un vecteur directeur de la droite vectorielle $Im(u)$ et complétons (e_2) en une base (e_2,e_3) de $Ker(u)$.

$e_2\in Im(u)$, donc il existe $e_1\in\mathbb{R}^3$ tel que $u(e_1)=e_2$.

$e_1\notin Ker(u)$ car $u(e_1)=e_2\neq 0$, donc $e=(e_1,e_2,e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Ainsi $mat(u,e)=J$, ce qui prouve que A et J sont semblables.

- Il existe $P\in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A=PJP^{-1}$.

Notons $E^A=\{X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})/AX+XA=0\}$ et $E^J=\{X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})/JX+XJ=0\}$.

$\diamond$ E^A est le noyau de l'application linéaire $\begin{array}{ccc}\mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\\ X & \longmapsto & AX+XA\end{array}$, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Ainsi, on peut s'intéresser à sa dimension. Il en est de même pour E^J.

$\diamond$ Soit $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$X\in E^A\Longleftrightarrow PJP^{-1}X+XPJP^{-1}=0\Longleftrightarrow JP^{-1}XP+P^{-1}XPJ=0$,

donc (1) : $X\in E^A\Longleftrightarrow P^{-1}XP\in E^J$.

Notons $\begin{array}{cccc}\varphi: & E^A & \longrightarrow & E^J\\ & X & \longmapsto & P^{-1}XP\end{array}$ et $\begin{array}{cccc}\psi: & E^J & \longrightarrow & E^A\\ & Y & \longmapsto & PYP^{-1}\end{array}$.

φ est correctement définie car, d'après (1), $X \in E^A \Longrightarrow P^{-1}XP \in E^J$, et ψ est définie, car, toujours d'après (1), $PYP^{-1} \in E^A \Longleftarrow Y \in E^J$.
De plus, on vérifie que φ et ψ sont linéaires, que $\varphi \circ \psi = Id_{E^J}$ et que $\psi \circ \varphi = Id_{E^A}$.
On en déduit que E^A et E^J sont isomorphes, donc que $dim(E^A) = dim(E^J)$.
[On a bien ainsi ramené le problème portant initialement sur la matrice A en le même problème, mais portant maintenant sur la matrice réduite J.]
$\diamond$ Soit $X = (x_{i,j}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En interprétant le produit XJ comme une matrice dont les colonnes sont des combinaisons linéaires des colonnes de X, on obtient que
$XJ = \begin{pmatrix} x_{1,2} & 0 & 0 \\ x_{2,2} & 0 & 0 \\ x_{3,2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et en interprétant le produit JX comme une matrice dont les lignes sont des combinaisons linéaires des lignes de X, on obtient que
$JX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Ainsi, $X \in E^J \Longleftrightarrow x_{1,2} = x_{3,2} = x_{1,3} = x_{2,2} + x_{1,1} = 0$.
On en déduit que $E^J = \{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & -a & c \\ d & 0 & e \end{pmatrix} / (a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 \}$.
$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^5 & \longrightarrow & E^J \\ (a, b, c, d, e) & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & -a & c \\ d & 0 & e \end{pmatrix} \end{array}$ est un isomorphisme, donc $dim(E^J) = 5$.
En conclusion, on a montré que $\boxed{dim(E^A) = 5}$.

Exercice 22.24 :

1°) Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont les coefficients sont dans $\mathbb{R}_+^*$.
Notons $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, la $i^{\text{ème}}$ composante de Me vaut $\sum_{j=1} m_{i,j} = 1$, donc $M \in \mathcal{E} \Longleftrightarrow Me = e$.
Mais e est non nul, donc si $M \in \mathcal{E}$ alors 1 est une valeur propre de M.

2°) Soit $(M, N) \in \mathcal{E}^2$. Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}$, le $(i, j)^{\text{ème}}$ coefficient de MN vaut $\sum_{k=1}^{n} m_{i,k} n_{k,j}$, donc les coefficients de MN sont strictement positifs.
$MNe = M(Ne) = Me = e$, donc $MN \in \mathcal{E}$.

3°) Soient $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(M)$.
Il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $MX = \lambda X$.

Soit $i \in \mathbb{N}_n$. Egalons les $i^{\text{èmes}}$ composantes dans la relation précédente : $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} x_j = \lambda x_i$.

D'après l'inégalité triangulaire, en tenant compte du fait que les coefficients de M sont dans $\mathbb{R}_+$, $(1)\ :\ |\lambda||x_i| \leq \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}|x_j|$.

Posons $x = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. Il existe $i_0 \in \mathbb{N}_n$ tel que $x = |x_{i_0}|$.

L'inégalité (1) pour $i = i_0$ implique $|\lambda| x \leq x \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = x$, or $x > 0$ car $X \neq 0$, donc $|\lambda| \leq 1$.

4°) Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{E}$. Soit $\lambda \in Sp(M)$ telle que $|\lambda| = 1$.

Il existe $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $MX = \lambda X$. Il existe $i_0 \in \mathbb{N}_n$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Alors, $|x_{i_0}| = |\lambda x_{i_0}| = \left| \sum_{j=1}^{n} M_{i_0,j} x_j \right| \overset{(1)}{\leq} \sum_{j=1}^{n} M_{i_0,j} |x_j| \overset{2)}{\leq} |x_{i_0}| \sum_{j=1}^{n} M_{i_0,j} = |x_{i_0}|$. On retrouve la même quantité $|x_{i_0}|$ à gauche et à droite de cette succession d'inégalités, donc toutes ces inégalités sont des égalités.

Ainsi, d'après (2), pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $|x_j| = |x_{i_0}|$, ainsi le module de x_j ne dépend pas de j.

Et d'après (1), on est dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, donc il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $M_{i_0,j} x_j \in \mathbb{R}_+ e^{i\theta_0}$, donc l'argument de x_j ne dépend pas de j.

On en déduit que X est colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, donc que $\lambda = 1$.

Ceci démontre en outre que $E_1^M = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, donc si l'on suppose de plus que M est diagonalisable, alors M est semblable à $D = \text{diag}(1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, avec $|\lambda_i| < 1$ pour tout $i \geq 2$, donc M^p tend lorsque p tend vers $+\infty$ vers une matrice semblable à $D = \text{diag}(1, 0, \ldots, 0)$.