Feuille d'exercices 22.
Matrices

Exercice 22.1 : (niveau 1)
Déterminer la matrice M canoniquement associée à l'application linéaire f, de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y-2x+z \end{pmatrix}$.
Déterminer le noyau et l'image de la matrice M.

Exercice 22.2 : (niveau 1)
On pose $E = \mathbb{R}_2[X]$. On note $U = 1$, $V = 1 - X$ et $W = (1-X)^2$.

1°) Montrer que (U, V, W) est une base de E.

2°) On pose $\begin{array}{rccc} v : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & P(2) \end{array}$, $\begin{array}{rccc} d : & E & \longrightarrow & E \\ & P & \longmapsto & P' \end{array}$
et $\begin{array}{rccc} f : & E & \longrightarrow & E \\ & P & \longmapsto & P(X+1) - P(X-1) \end{array}$.
Montrer que v, d et f sont des applications linéaires et donner leur matrice dans la base (U, V, W).

Exercice 22.3 : (niveau 1)

1°) Soit $M, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que P est inversible. On pose $D = P^{-1}MP$.
Montrer que, pour tout $k \geq 0$, $M^k = PD^kP^{-1}$.

2°) On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Déterminer P^{-1} et calculer $D = P^{-1}MP$.
Pour tout $k \geq 0$, calculer D^k puis M^k.

Exercice 22.4 : (niveau 1)
Calculez le rang de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & a & b \\ c & c & d & d \\ ac & bc & ad & bd \end{pmatrix}$, où a, b, c et d sont 4 réels quelconques.

Exercice 22.5 : (niveau 1)

1°) Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n)$ qui commutent avec D.

2°) Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n)$ qui commutent avec toutes les matrices diagonales.

Exercice 22.6 : (niveau 1)
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Démontrer que $A^2 - Tr(A)A + \det(A)I_2 = 0$.
En déduire qu'il existe deux suites $(\alpha_n), (\beta_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$.
En déduire le calcul de $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 22.7 : (niveau 1)
Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 22.8 : (niveau 1)
Φ désigne l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même définie par $\Phi(P) = P(X) - P(X-1)$.

1°) Donner la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

2°) Donner $Ker(\Phi)$ et $Im(\Phi)$.

Exercice 22.9 : (niveau 1)
Soit $a \in \mathbb{C}^*$. On note f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + a\overline{z}$.

1°) Montrer que f est $\mathbb{R}$-linéaire mais qu'elle n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire.

2°) Déterminer la matrice de f dans la $\mathbb{R}$-base $(1, i)$.

3°) Déterminer les noyau et image de f.

Exercice 22.10 : (niveau 1)
E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
u désigne un endomorphisme de $L(E)$ tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.
Chercher une base de E dans laquelle la matrice de u a une forme simple.

Exercice 22.11 : (niveau 1)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension paire $n = 2p$ et $f \in L(E)$.
Etablir l'équivalence des trois propositions :
1) $f^2 = 0$ et $\text{rg}(f) = p$;
2) $\text{Im}f = \text{Ker}f$;
3) il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 22.12 : (niveau 1)
Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$ et $a_0,..,a_n$ $n+1$ réels distincts.

1°) Pour tout $k\in\{0,\dots,n\}$, on note Φ_k la forme linéaire sur E définie par : $\Phi_k(P)=P(a_k)$. Montrer que $(\Phi_k)_{0\le k\le n}$ est une base de $L(E,\mathbb{R})$.

2°) Montrer qu'il existe un unique polynôme $A\in E$ tel que, pour tout $P\in E$, $\displaystyle\int_0^1 P(t)dt=\sum_{k=0}^{n}A(a_k)P(a_k)$.

Exercice 22.13 : (niveau 2)
On pose $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&3\\1&0&4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&1&3\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}$.

1°) Vérifier que $A^3-7A^2+13A=3I_3$. En déduire que A est inversible.

2°) La matrice B est-elle inversible ? Calculer B^3.

3°) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que M satisfait la relation polynomiale $a_pM^p+\cdots+a_1M+a_0I_n=0$, où $p\ge 1$, $a_0,\dots,a_p\in\mathbb{K}$ et $a_p\neq 0$. On suppose de plus que M ne satisfait pas de relation polynomiale (avec des coefficients non tous nuls) de degré strictement inférieur à p.
A quelle condition la matrice M est-elle inversible ?

Exercice 22.14 : (niveau 2)
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, inverser la matrice $\begin{pmatrix}1&a&a^2&\cdots&a^{n-1}\\0&1&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\ddots&a^2\\\vdots&&\ddots&1&a\\0&\cdots&\cdots&0&1\end{pmatrix}$, à l'aide de la matrice

$J=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\ddots&0\\\vdots&&\ddots&0&1\\0&\cdots&\cdots&0&0\end{pmatrix}$.

Exercice 22.15 : (niveau 2)
On suppose que le corps $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle.
Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AB-BA\neq I_n$.
Donner un exemple d'espace vectoriel E et d'endomorphismes $u,v\in L(E)$ tels que $uv-vu=Id_E$.

Exercice 22.16 : (niveau 2)
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n)$ telle que : $\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}|$.

Montrer que A est inversible.

Exercice 22.17 : (niveau 2)
Fixons M appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1°) Montrer que l'application $A \longmapsto Tr(AM)$ où A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2°) A-t-on ainsi toutes les formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 22.18 : (niveau 2)
Notons $(E_{i,j})_{(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit σ une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, telle que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, \ \ \sigma(AB) = \sigma(BA)$.

1°) Pour tout $i, j, k, h \in \{1, \ldots, n\}$, montrer que $E_{i,j}E_{k,h} = \delta_{j,k}E_{i,h}$.

2°) Pour $i \neq j$, calculer $\sigma(E_{i,j})$.

3°) Comparer $\sigma(E_{i,i})$ et $\sigma(E_{j,j})$.

4°) En déduire l'ensemble des applications linéaires σ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, telles que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \quad \sigma(AB) = \sigma(BA)$.

Exercice 22.19 : (niveau 2)
Calculer le rang de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le $(i, j)^{\text{ème}}$ coefficient est égal à $\sin(i+j)$.

Exercice 22.20 : (niveau 2)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1°) Montrer que $\text{rg}(A) = 1$ si et seulement si il existe $X, Y \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tels que $A = X^tY$.

2°) On suppose que $\text{rg}(A) = 1$.
a) Montrer que $A^2 = \text{Tr}(A)A$.
b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $(I_n + A)^k$.

Exercice 22.21 : (niveau 2)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1°) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ avec $A^n = 0$, $AB = BA$ et $B \neq 0$.
Montrer que $rg(AB) < rg(B)$.

2°) Soit $A_1, \ldots, A_n$ n matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent deux à deux. Montrer que $A_1 \times \cdots \times A_n = 0$.

Exercice 22.22 : (niveau 2)
Polynômes d'interpolation d'Hermite :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. $n_0, \dots, n_p$ désignent $p+1$ entiers strictement positifs tels que $n_0 + \cdots n_p = n$.
Soient $a_0, \dots, a_p$ $p+1$ éléments d'un sous-corps de $\mathbb{C}$ noté $\mathbb{K}$, et pour tout $i \in \{0, \dots, p\}$, pour tout $j \in \{0, \dots, n_i - 1\}$, soit $u_{i,j} \in \mathbb{K}$.
Montrer qu'il existe un unique polynôme u de degré strictement inférieur à n tel que pour tout $i \in \{0, \dots, p\}$ et pour tout $j \in \{0, \dots, n_i - 1\}$, $u^{(j)}(a_i) = u_{i,j}$.

Exercice 22.23 : (niveau 2)
E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. G est un sous-espace vectoriel de F.
On suppose que E et G sont de dimensions finies. Soit $u \in L(E, F)$.
Montrer que $dim(u^{-1}(G)) = dim(E) - rg(u) + dim(Im(u) \cap G)$.

Exercice 22.24 : (niveau 2)
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie $s \geq 1$. Montrer que les suites $(Ker(f^n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Im(f^n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont stationnaires à partir du même rang $p \leq s$ et que l'on a alors : $Ker(f^p) \oplus Im(f^p) = E$.

Exercice 22.25 : (niveau 3)
E, F, G et H désignent 4 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $f \in L(E, F)$, $g \in L(F, G)$ et $h \in L(G, H)$. Montrer que $rg(gf) + rg(hg) \leq rg(g) + rg(hgf)$.

Exercice 22.26 : (niveau 3)
Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n)$ et $B \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p)$. On note Ψ l'application de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$ dans $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$ définie par : $\Psi(M) = AMB$.
Montrer que $Tr(\Psi) = Tr(A) \times Tr(B)$.

Exercice 22.27 : (niveau 3)
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, n un entier supérieur ou égal à 2 et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $a = a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$.
On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles :

$$\forall i \in \{2, \dots, n\} \ \exists (\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{R}^2 \ \forall x \in]a_{i-1}, a_i[\ f(x) = \alpha_i x + \beta_i.$$

1°) Montrer que $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2°) Pour $f \in \mathcal{F}$, on pose $\varphi(f) = (f(a_1), f(a_2) - f(a_1), ..., f(a_n) - f(a_{n-1}))$.
A l'aide de φ, montrer que $dim(\mathcal{F}) \leq n$.

3°) Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on pose $\begin{array}{rccc} f_j : & [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x - a_j| \end{array}$.
Montrer que $(f_j)_{j \in \mathbb{N}_n}$ est une base de $\mathcal{F}$.

4°) Montrer que les éléments convexes de $\mathcal{F}$ sont ceux de la forme :

$$x \longmapsto \alpha x + \beta + \sum_{j=2}^{n-1} \gamma_j |x - a_j|, \text{ où } \forall j \in \{2, \dots, n-1\} \ \gamma_j \geq 0.$$

Exercice 22.28 : (niveau 3)
Pour tout $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on dit que A est positive si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], a_{i,j} \geq 0$.
Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que A est monotone si A est inversible et A^{-1} est positive.

1°) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est monotone si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \ AX$ positive $\Longrightarrow X$ positive.

2°) Soit $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}_+^n$ et $A = \begin{pmatrix} 2+a_1 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2+a_n \end{pmatrix}$ (les coefficients sont égaux à 0 hors de la diagonale, et des sur- et sous-diagonales). Montrer que A est monotone.

Exercices supplémentaires

Exercice 22.29 : (niveau 1)
Déterminer la matrice dans les bases canoniques de l'application linéaire f de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par $f(P) = (P(1), P(2), P(3), P(4))$.

Exercice 22.30 : (niveau 1)
Soit A, B, C trois matrices non nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $ABC = 0$.
Montrer qu'au moins 2 de ces matrices ne sont pas inversibles.

Exercice 22.31 : (niveau 1)
Soit A et B deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que A et B commutent si et seulement si AB est symétrique.

Exercice 22.32 : (niveau 1)
On note $E = \mathbb{R}_n[X]$. f désigne l'endomorphisme de E défini par : pour tout $P \in E$, $f(P) = P - P'$.

1°) Montrer que f est bijective
  a) sans la matrice de f,
  b) avec la matrice de f.

2°) Montrer que pour tout $Q \in E$, il existe P tel que $P - P' = Q$. Donner une expression de P en fonction de Q.

Exercice 22.33 : (niveau 1)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, ..., u_n)$ un système de n vecteurs de rang r. Soit $m \in \mathbb{N}_n$. Notons s le rang de $(u_1, ..., u_m)$.

1°) Montrer que $\text{Vect}(u_1, \ldots, u_n) = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_m) + \text{Vect}(u_{m+1}, \ldots, u_n)$.

2°) Montrer que $n - r \geq m - s$.

Exercice 22.34 : (niveau 1)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et a et b deux éléments de $L(E)$. Montrer que $|rg(a) - rg(b)| \leq rg(a+b) \leq rg(a) + rg(b)$.

Exercice 22.35 : (niveau 1)
On suppose que $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = AB - BA$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathrm{Tr}(A^p)$.

Exercice 22.36 : (niveau 2)
Soit A et B deux matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{R}$: on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.
Résoudre l'équation suivante, en l'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$X + Tr(X)A = B.$$

Exercice 22.37 : (niveau 2)
Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^{*2}$. On note M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le $(i,j)^{\text{ème}}$ coefficient est égal à $(p+i+j-2)^2$. Déterminer le rang de M.

Exercice 22.38 : (niveau 2)
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AMB = 0$.
Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

Exercice 22.39 : (niveau 2)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer qu'il existe $u \in L(E)$ tel que $F = Im(u)$ et $G = Ker(u)$ si et seulement si $dim(F) + dim(G) = dim(E)$.

Exercice 22.40 : (niveau 2)
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices de taille n à coefficients réels.
$S_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :
Pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ $a_{i,i} \geq a_{i,j} \geq 0$, et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

1°) Montrer que pour tout P appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $Tr({}^tPP) \geq 0$.

2°) Montrer que pour tout P appartenant à $S_n(\mathbb{R})$, $Tr({}^tPP) \leq Tr(P)$.

3°) Trouver toutes les matrices de $S_n(\mathbb{R})$ telles que l'inégalité précédente soit une égalité.

4°) Dénombrer les matrices de la question précédente.

Exercice 22.41 : (niveau 2)
Soient A et B dans $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est inversible et que $B^n = 0$.
Montrer que $C = I_n + A^{-1}BA$ est inversible et préciser son inverse.

Exercice 22.42 : (niveau 2)
Soit (P_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ telle que :
$\forall n \in \mathbb{N}\ deg(P_{n+1}) > deg(P_n)$. Montrez que (P_n) est une base si et seulement si, pour tout n, $deg(P_n) = n$.

Exercice 22.43 : (niveau 2)
Soient E, F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $(u, v) \in L(E, F)^2$.
Montrer que $dim(Ker(u + v)) \leq dim(Keru \cap Kerv) + dim(Imu \cap Imv)$.

Exercice 22.44 : (niveau 2)
E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On fixe $u \in L(E)$ tel que $u^2 = 0$.
Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ et une base de E dans laquelle la matrice de u a des coefficients tous nuls saufs ceux de position $(i + r, i)$, pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, qui sont égaux à 1.

Exercice 22.45 : (niveau 2)
Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{C}[X]$.

1°) Montrer que F possède une base constituée de polynômes ayant tous le même degré.

2°) Montrer que F possède une base $(P_1, \ldots, P_n)$ pour laquelle la suite $(\deg(P_i))_{1 \leq i \leq n}$ est strictement croissante.

Exercice 22.46 : (niveau 2)
Notons $(E_{i,j})_{(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n)$: ainsi, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $E_{i,j}$ est la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de position (i, j) qui est égal à 1.

1°) Calculer $E_{i,j}E_{k,l}$.

2°) On pose $\mathcal{T} = \text{Vect}(\{AB - BA / (A, B) \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n)^2\})$ et $\mathcal{H} = \{\lambda I_n / \lambda \in \mathbb{R}\}$, où I_n désigne la matrice identité.
Montrer que $dim(\mathcal{T}) = n^2 - 1$ et en déduire que $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n) = \mathcal{T} \oplus \mathcal{H}$.

Exercice 22.47 : (niveau 3)
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in L(E)$.
Notons $\mathcal{P} = \{P(u) / P \in \mathbb{K}[X]\}$ et $\mathcal{C} = \{v \in L(E) / v \circ u = u \circ v\}$.

1°) Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ sont des sous-espaces vectoriels de $L(E)$ et que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}$.

2°) Soit $x \in E$. Montrer que le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant x qui est stable par u est $F_x = \{P(u)(x) / P \in \mathbb{K}[X]\}$.

3°) Si $x \in E$, on dira que x est u-générateur si et seulement si $F_x = E$.
Notons $\varphi_x : \begin{array}{ccc} L(E) & \longrightarrow & E \\ v & \longmapsto & v(x) \end{array}$. Montrer que x est u-générateur si et seulement si $\varphi_{x/\mathcal{P}}$ est surjective.

4°) Montrer que si x est u-générateur alors $\varphi_{x/\mathcal{C}}$ est injective.

En déduire que si E possède un u-générateur, alors $\mathcal{P} = \mathcal{C}$ et E est isomorphe à $\mathcal{C}$.

Exercice 22.48 : (niveau 3)
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1°) Déterminer les endomorphismes f de E tels que $\forall x \in E\ \ (x, f(x))$ est lié.

2°) En déduire $\{g \in L(E)/\forall h \in GL(E)\ \ h \circ g = g \circ h\}$.

3°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note g_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par
$\forall P \in \mathbb{R}_n[X]\ \ g_n(P) = P'$.
On note $C(g_n) = \{f \in L(\mathbb{R}_n[X])/f \circ g_n = g_n \circ f\}$. Déterminer $dim(C(g_n))$, puis déterminer $C(g_n)$.

Exercice 22.49 : (niveau 3)
On note M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, triangulaire supérieure, dont tous les coefficients du triangle supérieur (diagonale comprise) sont égaux à 1. Calculer M^3.

Exercice 22.50 : (niveau 3)
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des permutations σ de $\mathcal{S}_p$ telles que,
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(M_1, \ldots, M_p) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^p$,
$Tr(M_1 \times \cdots \times M_p) = Tr(M_{\sigma(1)} \times \cdots \times M_{\sigma(p)})$.