

Mouvement dans le champ d'une force centrale conservative

Julien Cubizolles

Lycée Louis le Grand

lundi 21 avril 2022

Mouvement dans le champ d'une force centrale conservative

Julien Cubizolles

Lycée Louis le Grand

lundi 21 avril 2022

1. Forces centrales conservatives

2. Lois générales de conservation

3. Mouvement dans un champ de force newtonien : généralités

4. Cas du mouvement circulaire

1. Forces centrales conservatives

1.1 Expression de la force

1.2 Exemples

2. Lois générales de conservation

3. Mouvement dans un champ de force newtonien : généralités

4. Cas du mouvement circulaire

Expression de la force

Définition (Force centrale)

La force \vec{F} à laquelle est soumis un point matériel situé au point M d'un référentiel \mathcal{R} est dite **centrale** s'il existe un point O fixe de \mathcal{R} tel que \vec{F} reste toujours colinéaire à \overrightarrow{OM} au cours du mouvement de M .

Les caractères central et conservatif de la force restreignent les expressions possibles

Expression de la force

Expression d'une force centrale conservative


Soit un point matériel de position M soumis à la force \vec{F} centrale de centre O , repéré par le vecteur \vec{e}_r tel que $\overrightarrow{OM} = \underbrace{r}_{\geq 0} \vec{e}_r$. La force \vec{F} est conservative ssi son intensité ne dépend que de la distance $r = OM$. On a alors :

$$\vec{F} = F_r(r) \vec{e}_r \quad \text{et} \quad F_r(r) = - \frac{d\mathcal{E}_{\text{pot}}(r)}{dr},$$

avec $\mathcal{E}_{\text{pot}}(r)$ une énergie potentielle associée qui ne dépend également que de r . La force est dite :

répulsive pour $F_r(r) > 0$ ie $\mathcal{E}_{\text{pot}}(r)$ décroissante,

attractive pour $F_r(r) < 0$ ie $\mathcal{E}_{\text{pot}}(r)$ croissante.

- ▶ La résultante $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ de forces \vec{F}_i centrales de **même** centre O et conservatives ($\mathcal{E}_{\text{pot}_i}$), est également centrale de centre O et conservative, $\mathcal{E}_{\text{pot}} = \sum_i \mathcal{E}_{\text{pot}_i}$.
- ▶  si les centres sont différents, elle ne sera **que** conservative.

1. Forces centrales conservatives

1.1 Expression de la force

1.2 Exemples

2. Lois générales de conservation

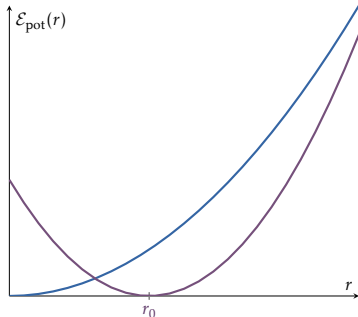
3. Mouvement dans un champ de force newtonien : généralités

4. Cas du mouvement circulaire

Oscillateur spatial

Rappel harmonique vers le centre de force :

$$\vec{F} = -k \vec{r} \quad \text{ou : } \vec{F} = -k (r - r_0) \vec{e}_r$$



Oscillateur spatial

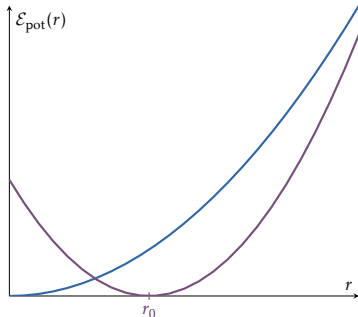
Rappel harmonique vers le centre de force :

$$\vec{F} = -k \vec{r}$$

$$\mathcal{E}_{\text{pot}} = \frac{kr^2}{2}$$

ou : $\vec{F} = -k(r - r_0) \vec{e}_r$

$$\mathcal{E}_{\text{pot}} = \frac{k(r - r_0)^2}{2}$$

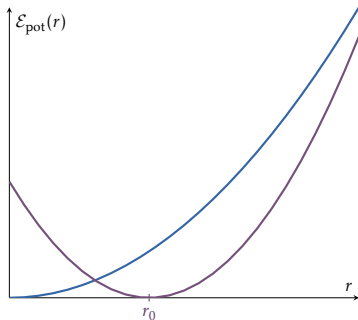


Oscillateur spatial

Rappel harmonique vers le centre de force :

$$\vec{F} = -k \vec{r} \quad \text{ou : } \vec{F} = -k (r - r_0) \vec{e}_r$$

$$\mathcal{E}_{\text{pot}} = \frac{kr^2}{2} \quad \mathcal{E}_{\text{pot}} = \frac{k(r - r_0)^2}{2}$$

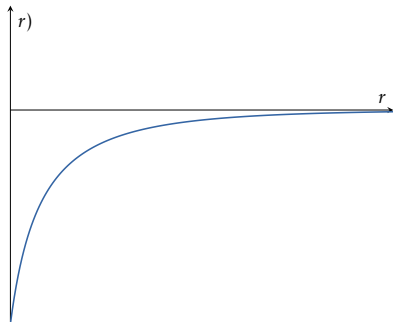


- ▶ attractive pour $k > 0$, on peut également envisager $k < 0$ répulsive
- ▶ modèle d'un jokari, modèle de Thomson de l'électron élastiquement lié

Énergie potentielle de Yukawa (Nobel 1949)

modèle de l'interaction (forte) entre nucléons (protons et neutrons) à courte distance ($\approx 1 \text{ fm} = 1 \cdot 10^{-15} \text{ m}$)

$$\mathcal{E}_{\text{pot}}(r) = -g \frac{e^{-r/a}}{r}$$

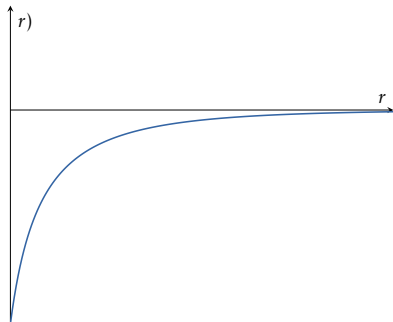


Énergie potentielle de Yukawa (Nobel 1949)

modèle de l'interaction (forte) entre nucléons (protons et neutrons) à courte distance ($\approx 1 \text{ fm} = 1 \cdot 10^{-15} \text{ m}$)

$$\mathcal{E}_{\text{pot}}(r) = -g \frac{e^{-r/a}}{r}$$

$$\vec{F}(r) = -\frac{g}{r} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a} \right) e^{-r/a} \vec{e}_r$$



1. Forces centrales conservatives

2. Lois générales de conservation

3. Mouvement dans un champ de force newtonien : généralités

4. Cas du mouvement circulaire

1. Forces centrales conservatives

2. Lois générales de conservation

2.1 Constantes du mouvement

2.2 Énergie potentielle effective

2.3 Nature du mouvement

3. Mouvement dans un champ de force newtonien : généralités

4. Cas du mouvement circulaire

Conservation du moment cinétique et planéité : rappel

Planéité d'un mouvement à force centrale

Soit un point matériel soumis à une force centrale de centre O fixe dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g .

- ▶ Le **moment cinétique en O** , $\vec{\sigma}_{IO}(M) = \sigma_O \vec{e}_z$, est conservé.
- ▶ La trajectoire est **inscrite dans le plan orthogonal à $\vec{\sigma}_{IO}(M)$** passant par O , ie le plan défini par la position et la vitesse initiales. On a donc :

$$\vec{\sigma}_{IO}(M) = m \vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0 = mr^2 \dot{\theta} \vec{e}_z \equiv \sigma_c \vec{e}_z.$$

- ▶ on pourra choisir l'orientation de \vec{e}_z pour avoir $\sigma_c > 0$
- ▶ cas particulier : le mouvement sera rectiligne selon une droite passant par O si $\vec{OM} \propto \vec{v}$, ie $\vec{\sigma}_{IO}(M) = \vec{0}$

Constante des aires : rappel

Théorème (Constante des aires)

*Dans un mouvement à force centrale la **vitesse aréolaire** est une constante, nommée **constante des aires**.*

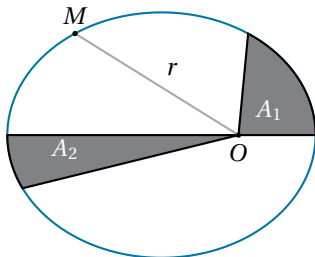
- ▶ *L'aire balayée pendant une durée Δt par le rayon vecteur \overrightarrow{OM} est proportionnelle à Δt .*
- ▶ *En particulier, le mouvement de M autour de O s'effectue toujours dans le même sens.*

Constante des aires : rappel

Théorème (Constante des aires)

Dans un mouvement à force centrale la **vitesse aréolaire** est une constante, nommée **constante des aires**.

- ▶ L'aire balayée pendant une durée Δt par le rayon vecteur \overrightarrow{OM} est proportionnelle à Δt .
- ▶ En particulier, le mouvement de M autour de O s'effectue toujours dans le même sens.



Les aires A_1 et A_2 balayées pendant un même intervalle de temps sont égales.

Un seul degré de liberté

Les caractéristiques de la force vont nous ramener à l'étude d'un problème **à un degré de liberté**

Un seul degré de liberté

Les caractéristiques de la force vont nous ramener à l'étude d'un problème **à un degré de liberté**

Un seul degré de liberté

Les caractéristiques de la force vont nous ramener à l'étude d'un problème à un degré de liberté

force conservative l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{\text{pot}}(r)$ est conservée

Un seul degré de liberté

Les caractéristiques de la force vont nous ramener à l'étude d'un problème à un degré de liberté

force conservative l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{\text{pot}}(r)$ est conservée

force centrale $\overrightarrow{\sigma}_{IO}(M)$ conservé :

Un seul degré de liberté

Les caractéristiques de la force vont nous ramener à l'étude d'un problème à un degré de liberté

force conservative l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{\text{pot}}(r)$ est conservée

force centrale $\vec{\sigma}_{/O}(M)$ conservé :

► mouvement plan : $z = 0, \dot{z} = 0$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$

Un seul degré de liberté

Les caractéristiques de la force vont nous ramener à l'étude d'un problème à un degré de liberté

force conservative l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{\text{pot}}(r)$ est conservée

force centrale $\overrightarrow{\sigma}_{IO}(M)$ conservé :

- ▶ mouvement plan : $z = 0, \dot{z} = 0$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$
- ▶ $r^2\dot{\theta} = cste$: $\dot{\theta}$ s'exprime en fonction de r .

Un seul degré de liberté

Les caractéristiques de la force vont nous ramener à l'étude d'un problème à un degré de liberté

force conservative l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{\text{pot}}(r)$ est conservée

force centrale $\overrightarrow{\sigma}_{/O}(M)$ conservé :

- ▶ mouvement plan : $z = 0, \dot{z} = 0$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$
- ▶ $r^2\dot{\theta} = cste$: $\dot{\theta}$ s'exprime en fonction de r .

On n'a plus que du r et du \dot{r} dans l'intégrale première du mouvement.

1. Forces centrales conservatives

2. Lois générales de conservation

2.1 Constantes du mouvement

2.2 Énergie potentielle effective

2.3 Nature du mouvement

3. Mouvement dans un champ de force newtonien : généralités

4. Cas du mouvement circulaire

Énergie potentielle effective

Énergie potentielle effective

Soit un point matériel de position M dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , soumis à une force centrale de centre O , conservative, d'énergie potentielle associée $\mathcal{E}_{\text{pot}}(r)$.

En notant $r = OM$ et $\vec{\sigma}_c$ son moment cinétique en O , constant, la conservation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = cste \quad \text{avec : } \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \mathcal{E}_{\text{pot}}(r) + \frac{\sigma_c^2}{2mr^2},$$

nommée **énergie potentielle effective associée au mouvement**. L'étude du mouvement radial est formellement identique à celle d'un point matériel de masse m , animé d'un mouvement à un seul degré de liberté (la seule coordonnée étant r) dans \mathcal{R}_g et soumis à une force conservative d'énergie potentielle $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$.

Énergie potentielle effective

Énergie potentielle effective

Soit un point matériel de position M dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , soumis à une force centrale de centre O , conservative, d'énergie potentielle associée $\mathcal{E}_{\text{pot}}(r)$.

En notant $r = OM$ et $\vec{\sigma}_c$ son moment cinétique en O , constant, la conservation de l'énergie s'écrit :

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = cste \quad \text{avec : } \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \mathcal{E}_{\text{pot}}(r) + \frac{\sigma_c^2}{2mr^2},$$

nommée **énergie potentielle effective associée au mouvement**. L'étude du mouvement radial est formellement identique à celle d'un point matériel de masse m , animé d'un mouvement à un seul degré de liberté (la seule coordonnée étant r) dans \mathcal{R}_g et soumis à une force conservative d'énergie potentielle $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$.

- ☠ analogie valable uniquement pour le mouvement radial : $m\dot{r}^2/2$ n'est pas toute l' \mathcal{E}_c du vrai P.M.
- ☠ l'expression de $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ dépend des conditions initiales car $\sigma_c = m|\vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0|$.

1. Forces centrales conservatives

2. Lois générales de conservation

2.1 Constantes du mouvement

2.2 Énergie potentielle effective

2.3 Nature du mouvement

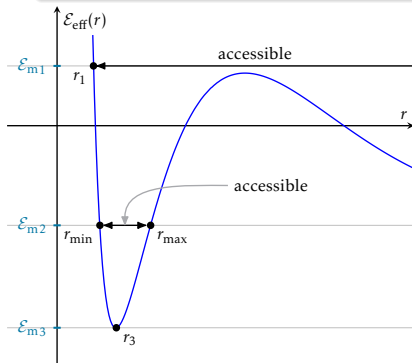
3. Mouvement dans un champ de force newtonien : généralités

4. Cas du mouvement circulaire

Nature du mouvement

Intégrale première

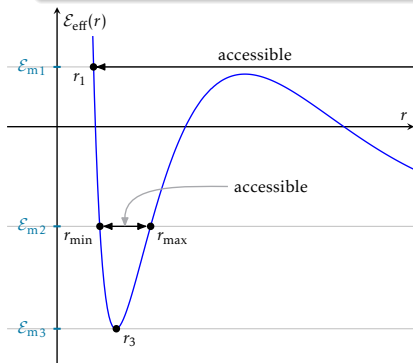
$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \mathcal{E}_m \rightarrow \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \leq \mathcal{E}_m$$



Nature du mouvement

Intégrale première

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \mathcal{E}_m \rightarrow \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \leq \mathcal{E}_m$$

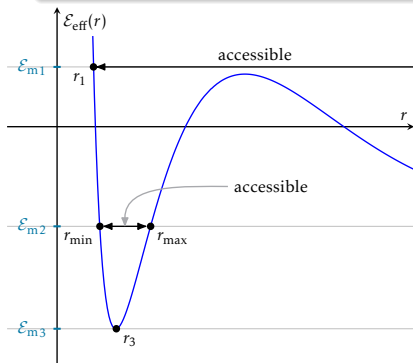


- \mathcal{E}_{m1} : état de diffusion, cercle de rebroussement de rayon r_1

Nature du mouvement

Intégrale première

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \mathcal{E}_m \rightarrow \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \leq \mathcal{E}_m$$

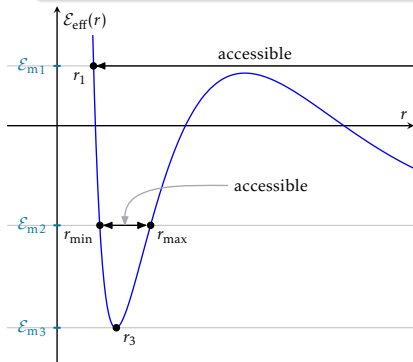


- \mathcal{E}_{m1} : état de diffusion, cercle de rebroussement de rayon r_1
- \mathcal{E}_{m2} : état lié entre deux cercles de rebroussement de rayons r_{\min} et r_{\max}

Nature du mouvement

Intégrale première

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \mathcal{E}_m \rightarrow \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \leq \mathcal{E}_m$$



- ▶ \mathcal{E}_{m1} : état de diffusion, cercle de rebroussement de rayon r_1
- ▶ \mathcal{E}_{m2} : état lié entre deux cercles de rebroussement de rayons r_{\min} et r_{\max}
- ▶ \mathcal{E}_{m3} : état lié, mouvement circulaire uniforme ($r = \text{cste} \rightarrow \dot{\theta} = \text{cste}$) de rayon r_3

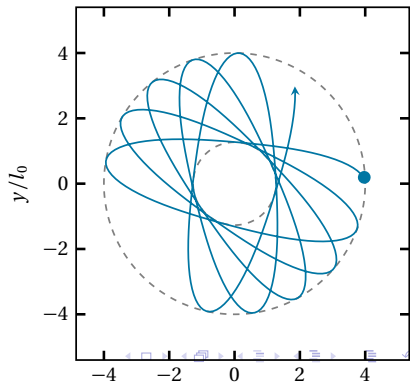
Interprétation graphique

- ▶ $\sigma_c^2 / (2mr^2)$ représente une **barrière de potentiel répulsive** (centrifuge) qui domine en $r = 0$ sur l'exemple précédent. Elle sera en revanche absente si $\sigma_c = 0$ (mouvement rectiligne).
- ▶ dans l'exemple précédent, on n'atteint jamais le centre bien que la force soit attractive

Interprétation graphique

- ▶ $\sigma_c^2 / (2mr^2)$ représente une **barrière de potentiel répulsive** (centrifuge) qui domine en $r = 0$ sur l'exemple précédent. Elle sera en revanche absente si $\sigma_c = 0$ (mouvement rectiligne).
- ▶ dans l'exemple précédent, on n'atteint jamais le centre bien que la force soit attractive

l'étude de $\mathcal{E}_{p,eff}$ ne renseigne pas immédiatement sur θ ; la trajectoire n'est en particulier **pas nécessairement fermée** (cas d'un oscillateur harmonique de longueur au repos non nulle).



1. Forces centrales conservatives

2. Lois générales de conservation

3. Mouvement dans un champ de force newtonien : généralités

4. Cas du mouvement circulaire

1. Forces centrales conservatives

2. Lois générales de conservation

3. Mouvement dans un champ de force newtonien : généralités

3.1 Définition

3.2 Énergie potentielle effective et nature des mouvements

3.3 Exemples fondamentaux

3.4 Nature des trajectoires

3.5 Énergie d'un état lié

3.6 Lois de Kepler

4. Cas du mouvement circulaire

Définition

Pour la gravitation et l'électrostatique : \mathcal{E}_{pot} en $1/r$, attractive ou répulsive, quels types de mouvements peut-on observer ?

Définition

Pour la gravitation et l'électrostatique : \mathcal{E}_{pot} en $1/r$, attractive ou répulsive, quels types de mouvements peut-on observer ?

Définition (Champ de force newtonien)

Un champ de force est dit **newtonien** si la force à laquelle est soumis un point matériel est de la forme : $\vec{F} = \frac{-K}{r^2} \vec{e}_r$, où r est la distance du P.M. à un point fixe O du référentiel d'étude \mathcal{R} . O est le **centre** du champ de force.

Le mouvement dans un tel champ de force est dit **keplerien** s'il s'effectue dans un référentiel galiléen. Il est alors conservatif et on lui associe l'énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_{\text{pot}}(r) = -\frac{K}{r} + \text{cste.}$$

On choisira toujours $\mathcal{E}_{\text{pot}}(r) = -\frac{K}{r}$, ie \mathcal{E}_{pot} nulle à l'infini du centre.

Définition

Définition (Champ de force newtonien)

Un champ de force est dit **newtonien** si la force à laquelle est soumis un point matériel est de la forme : $\vec{F} = -\frac{K}{r^2} \vec{e}_r$, où r est la distance du P.M. à un point fixe O du référentiel d'étude \mathcal{R} . O est le **centre** du champ de force.

Le mouvement dans un tel champ de force est dit **keplerien** s'il s'effectue dans un référentiel galiléen. Il est alors conservatif et on lui associe l'énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_{\text{pot}}(r) = -\frac{K}{r} + \text{cste.}$$

On choisira toujours $\mathcal{E}_{\text{pot}}(r) = -\frac{K}{r}$, ie \mathcal{E}_{pot} nulle à l'infini du centre.

- ▶ force centrale et conservative
- ▶ attractive ssi $K > 0$

1. Forces centrales conservatives

2. Lois générales de conservation

3. Mouvement dans un champ de force newtonien : généralités

3.1 Définition

3.2 Énergie potentielle effective et nature des mouvements

3.3 Exemples fondamentaux

3.4 Nature des trajectoires

3.5 Énergie d'un état lié

3.6 Lois de Kepler

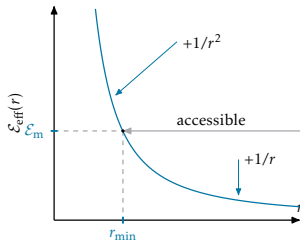
4. Cas du mouvement circulaire

Allure de $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$

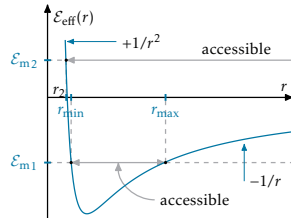
Énergie potentielle effective

$$\mathcal{E}_{p,\text{eff}} = \underbrace{-\frac{K}{r}}_{\text{gouverne en } \infty} + \underbrace{\frac{\sigma_c^2}{2mr^2}}_{\text{gouverne en } 0}$$

Allure de $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$



- ▶ force et barrière centrifuge répulsives : états de diffusion quelle que soit \mathcal{E}_m (toujours positive)
- ▶ distance minimale d'approche r_{min}



- ▶ état de diffusion pour $\mathcal{E}_m > 0$
- ▶ état lié entre deux cercles de rebroussement pour $\mathcal{E}_m < 0$

Nature du mouvement

Nature du mouvement et signe de l'énergie mécanique

La nature du mouvement dans un champ de force newtonien dépend du signe de l'énergie mécanique :

- ▶ Pour $\mathcal{E}_m > 0$, l'état est **de diffusion**,
- ▶ Pour $\mathcal{E}_m < 0$, l'état est **lié**.


Nature du mouvement

Nature du mouvement et signe de l'énergie mécanique

La nature du mouvement dans un champ de force newtonien dépend du signe de l'énergie mécanique :

- ▶ Pour $\mathcal{E}_m > 0$, l'état est **de diffusion**,
- ▶ Pour $\mathcal{E}_m < 0$, l'état est **lié**.
- ▶ pour déterminer la nature du mouvement, on calculera le plus souvent \mathcal{E}_m avec $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_0^2 + \mathcal{E}_{\text{pot}}(r_0)$, sans utiliser $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$.
- ▶ les valeurs des rayons de rebroussement (r_{\min}, r_{\max}, r_2) sont solutions de l'équation :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{\text{eff}}(r).$$

- ▶  : \mathcal{E}_m est toujours définie à une constante près : c'est le choix « $\mathcal{E}_{\text{pot}} = 0$ quand $r \rightarrow \infty$ » qui donne une importance particulière à $\mathcal{E}_m = 0$

1. Forces centrales conservatives

2. Lois générales de conservation

3. Mouvement dans un champ de force newtonien : généralités

3.1 Définition

3.2 Énergie potentielle effective et nature des mouvements

3.3 Exemples fondamentaux

3.4 Nature des trajectoires

3.5 Énergie d'un état lié

3.6 Lois de Kepler

4. Cas du mouvement circulaire

Interaction électrostatique

Interaction électrostatique

La force exercée par un point matériel **immobile** de position P et de **charge** q_P sur un point matériel **immobile** de position M et de **charge** q_M est :

$$\vec{F}_{P \rightarrow M} = \frac{q_M q_P}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3} = \frac{q_M q_P}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_{PM}}{PM^2} \quad \text{avec : } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9 \cdot 10^9 \text{ S} \cdot \text{I}.$$

Le **champ** de force de P est donc **newtonien**, avec $K = -\frac{q_P q_M}{4\pi\epsilon_0}$. L'**énergie potentielle** de M dans ce champ de force sera :

Interaction électrostatique

Interaction électrostatique

La force exercée par un point matériel **immobile** de position P et de **charge** q_P sur un point matériel **immobile** de position M et de **charge** q_M est :

$$\vec{F}_{P \rightarrow M} = \frac{q_M q_P}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3} = \frac{q_M q_P}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_{PM}}{PM^2} \quad \text{avec : } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9 \cdot 10^9 \text{ S} \cdot \text{I}.$$

Le **champ** de force de P est donc **newtonien**, avec $K = -\frac{q_P q_M}{4\pi\epsilon_0}$. L'**énergie potentielle** de M dans ce champ de force sera :

$$\mathcal{E}_{\text{pot}} = \frac{q_P q_M}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Interaction électrostatique

Interaction électrostatique

La force exercée par un point matériel **immobile** de position P et de **charge** q_P sur un point matériel **immobile** de position M et de **charge** q_M est :

$$\vec{F}_{P \rightarrow M} = \frac{q_M q_P}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3} = \frac{q_M q_P}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_{PM}}{PM^2} \quad \text{avec : } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9 \cdot 10^9 \text{ S} \cdot \text{I}.$$

Le **champ** de force de P est donc **newtonien**, avec $K = -\frac{q_P q_M}{4\pi\epsilon_0}$. L'**énergie potentielle** de M dans ce champ de force sera :

$$\mathcal{E}_{\text{pot}} = \frac{q_P q_M}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

- ▶ Cette expression est également valable pour la force exercée par **P immobile** sur **M mobile**.
- ▶ pour une distance proton-électron $\ll 5$ m, cette force domine le poids

Interaction gravitationnelle

Interaction gravitationnelle

La force exercée par un point matériel de position P et de **masse pesante** m_P sur un point matériel de position M et de **masse pesante** m_M est :

$$\vec{F}_{P \rightarrow M} = -\mathcal{G} \frac{m_P m_M}{PM^3} \vec{PM} = -\mathcal{G} \frac{m_P m_M}{PM^2} \vec{e}_{PM}$$

avec : $\mathcal{G} = 6,672(10) 10^{-11} \text{N.m}^2\text{kg}^{-2}$.

Il s'agit de nouveau d'un champ de force **newtonien**, avec maintenant $K = \mathcal{G} m_P m_M$. Dans ce champ de force, l'énergie potentielle de M sera :

Interaction gravitationnelle

Interaction gravitationnelle

La force exercée par un point matériel de position P et de **masse pesante** m_P sur un point matériel de position M et de **masse pesante** m_M est :

$$\vec{F}_{P \rightarrow M} = -\mathcal{G} \frac{m_P m_M}{PM^3} \vec{PM} = -\mathcal{G} \frac{m_P m_M}{PM^2} \vec{e}_{PM}$$

avec : $\mathcal{G} = 6,672(10) 10^{-11} \text{ N.m}^2\text{kg}^{-2}$.

Il s'agit de nouveau d'un champ de force **newtonien**, avec maintenant $K = \mathcal{G} m_P m_M$. Dans ce champ de force, l'énergie potentielle de M sera :

$$\mathcal{E}_{\text{pot}} = -\mathcal{G} \frac{m_P m_M}{r}.$$

Forces centrales conservatives

Lois générales de conservation

Mouvement dans un champ de force newtonien : **généralités**

Cas du mouvement circulaire

Définition

Énergie potentielle effective et nature des mouvements

Exemples fondamentaux

Nature des trajectoires

Énergie d'un état lié

Lois de Kepler

Cadre du modèle

Cadre du modèle

- ▶ électron : $q = -e = -1,602\,176\,53(14) \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $m_e = 9,109\,382\,6(16) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Cadre du modèle

- ▶ électron : $q = -e = -1,602\,176\,53(14) \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $m_e = 9,109\,382\,6(16) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- ▶ proton $q = +e$, $m_p = 1,672\,621\,71(29) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Cadre du modèle

- ▶ électron : $q = -e = -1,602\,176\,53(14) \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $m_e = 9,109\,382\,6(16) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- ▶ proton $q = +e$, $m_p = 1,672\,621\,71(29) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Cadre du modèle

- ▶ électron : $q = -e = -1,602\,176\,53(14) \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $m_e = 9,109\,382\,6(16) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- ▶ proton $q = +e$, $m_p = 1,672\,621\,71(29) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

$$\frac{f_{\text{grav}}}{f_{\text{elec}}} = \frac{\mathcal{G}m_em_p4\pi\epsilon_0}{e^2} = 4,4 \cdot 10^{-40} \ll 1$$

Cadre du modèle

- ▶ électron : $q = -e = -1,602\,176\,53(14) \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $m_e = 9,109\,382\,6(16) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- ▶ proton $q = +e$, $m_p = 1,672\,621\,71(29) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

$$\frac{f_{\text{grav}}}{f_{\text{elec}}} = \frac{\mathcal{G}m_em_p4\pi\epsilon_0}{e^2} = 4,4 \cdot 10^{-40} \ll 1$$

- ▶ la gravité sera négligeable pour des particules élémentaires chargées,

Cadre du modèle

- ▶ électron : $q = -e = -1,602\,176\,53(14) \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $m_e = 9,109\,382\,6(16) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- ▶ proton $q = +e$, $m_p = 1,672\,621\,71(29) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

$$\frac{f_{\text{grav}}}{f_{\text{elec}}} = \frac{\mathcal{G}m_em_p4\pi\epsilon_0}{e^2} = 4,4 \cdot 10^{-40} \ll 1$$

- ▶ la gravité sera négligeable pour des particules élémentaires chargées,
- ▶ pour la gravitation l'expression est valable pour des corps non ponctuels à **symétrie sphérique** quelle que soit la distance qui les sépare !

Cadre du modèle

- ▶ électron : $q = -e = -1,602\,176\,53(14) \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $m_e = 9,109\,382\,6(16) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- ▶ proton $q = +e$, $m_p = 1,672\,621\,71(29) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

$$\frac{f_{\text{grav}}}{f_{\text{elec}}} = \frac{\mathcal{G}m_em_p4\pi\epsilon_0}{e^2} = 4,4 \cdot 10^{-40} \ll 1$$

- ▶ la gravité sera négligeable pour des particules élémentaires chargées,
- ▶ pour la gravitation l'expression est valable pour des corps non ponctuels **à symétrie sphérique** quelle que soit la distance qui les sépare !
- ▶ la gravité ne sera importante que pour des corps **neutres et *très massifs**

Cadre du modèle

- ▶ électron : $q = -e = -1,602\,176\,53(14) \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $m_e = 9,109\,382\,6(16) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- ▶ proton $q = +e$, $m_p = 1,672\,621\,71(29) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

$$\frac{f_{\text{grav}}}{f_{\text{elec}}} = \frac{\mathcal{G} m_e m_p 4\pi\epsilon_0}{e^2} = 4,4 \cdot 10^{-40} \ll 1$$

- ▶ la gravité sera négligeable pour des particules élémentaires chargées,
- ▶ pour la gravitation l'expression est valable pour des corps non ponctuels **à symétrie sphérique** quelle que soit la distance qui les sépare !
- ▶ la gravité ne sera importante que pour des corps **neutres et *très massifs**
- ▶ la mécanique quantique est nécessaire pour l'étude de l'atome mais, par exemple, les caractéristiques du mouvement de l'électron dans un atome d'hydrogène (**énergie, rayon caractéristique, moment cinétique**) sont les **mêmes que celles déterminées en mécanique classique**

1. Forces centrales conservatives

2. Lois générales de conservation

3. Mouvement dans un champ de force newtonien : généralités

3.1 Définition

3.2 Énergie potentielle effective et nature des mouvements

3.3 Exemples fondamentaux

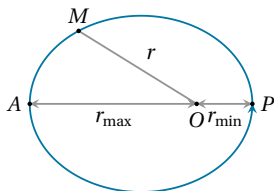
3.4 Nature des trajectoires

3.5 Énergie d'un état lié

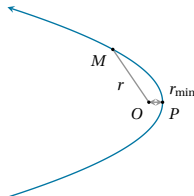
3.6 Lois de Kepler

4. Cas du mouvement circulaire

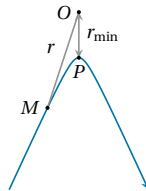
Coniques



État **lié** pour une force
attractive

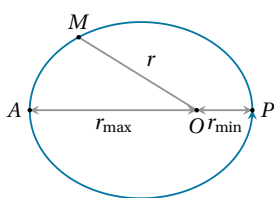


État de **diffusion** pour
une force **attractive**

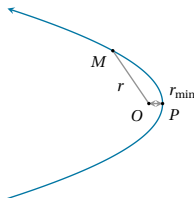


État de **diffusion** pour
une force **répulsive**

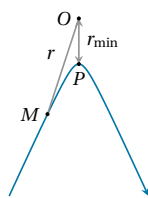
Coniques



État **lié** pour une force
attractive



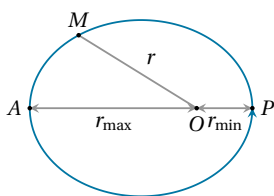
État de **diffusion** pour
une force **attractive**



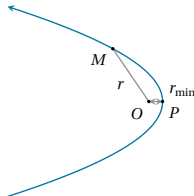
État de **diffusion** pour
une force **répulsive**

- ▶ P = **périastre** (périhélie, périgée), A = **apoastre** (aphélie, apogée)
- ▶ l'état lié est une **ellipse** dont O est un foyer (le cercle est un cas particulier) : il est **remarquable** que la trajectoire soit fermée
- ▶ les états de diffusion sont des **hyperboles** contournée (force attractive) ou évitée (force répulsive) ; on a une **parabole** pour $\mathcal{E}_m = 0$.
- ▶ ellipse pour un satellite autour d'un astre (gravitation), la distance AP est le **grand-axe** de l'ellipse (diamètre pour un cercle)
- ▶ hyperbole « attractive » pour une comète autour du soleil
- ▶ hyperbole « répulsive » pour un proton dévié par un noyau atomique

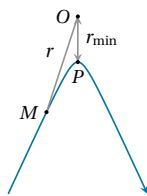
Coniques



État **lié** pour une force
attractive



État de **diffusion** pour
une force **attractive**



État de **diffusion** pour
une force **répulsive**

- ▶ la « forme » d'une conique est décrite par son **excentricité** : e
- ▶ $e = 1$ pour une parabole
- ▶ $e > 1$ pour une hyperbole
- ▶ $e < 1$ pour une ellipse, $e = 0$ pour une cercle
- ▶ pour une ellipse :

$$\frac{r_{\max}}{r_{\min}} = \frac{1+e}{1-e}$$

1. Forces centrales conservatives

2. Lois générales de conservation

3. Mouvement dans un champ de force newtonien : généralités

3.1 Définition

3.2 Énergie potentielle effective et nature des mouvements

3.3 Exemples fondamentaux

3.4 Nature des trajectoires

3.5 Énergie d'un état lié

3.6 Lois de Kepler

4. Cas du mouvement circulaire

Énergie d'un état lié

les paramètres r_{\min} et r_{\max} suffisent pour exprimer \mathcal{E}_m :

Énergie d'un état lié

les paramètres r_{\min} et r_{\max} suffisent pour exprimer \mathcal{E}_m :

Énergie mécanique d'un état lié

L'énergie mécanique d'un point matériel **en état lié** dans un champ de force newtonien attractif d'énergie potentielle $\mathcal{E}_{\text{pot}} = -\frac{K}{r}$ est :

$$\mathcal{E}_m = -\frac{K}{r_{\min} + r_{\max}},$$

avec r_{\min} et r_{\max} les distances minimale et maximale atteintes par le point matériel au cours du mouvement.

En posant $a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2}$ le **demi-grand axe** de l'ellipse, on a également : $\mathcal{E}_m = -\frac{K}{2a}$

1. Forces centrales conservatives

2. Lois générales de conservation

3. Mouvement dans un champ de force newtonien : généralités

3.1 Définition

3.2 Énergie potentielle effective et nature des mouvements

3.3 Exemples fondamentaux

3.4 Nature des trajectoires

3.5 Énergie d'un état lié

3.6 Lois de Kepler

4. Cas du mouvement circulaire

Caractéristiques astronomiques

À partir des observations astronomiques faites par Nicolas Copernic (N. Copernic (1473-1543), astronome polonais.) et Tycho Brahe (T. Brahe (1546-1601), astronome danois), Johannes Kepler (J. Kepler (1571-1630), astronome allemand.) formule vers 1610 les lois suivantes, relatives au mouvement des planètes dans le système solaire :

Caractéristiques astronomiques

À partir des observations astronomiques faites par Nicolas Copernic (N. Copernic (1473-1543), astronome polonais.) et Tycho Brahe (T. Brahe (1546-1601), astronome danois), Johannes Kepler (J. Kepler (1571-1630), astronome allemand.) formule vers 1610 les lois suivantes, relatives au mouvement des planètes dans le système solaire :

Lois de Kepler

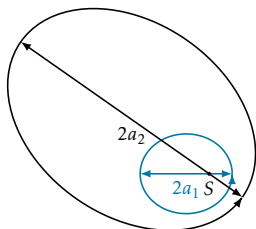
- 1 Chaque planète décrit selon un mouvement périodique, dans le sens direct, une trajectoire elliptique dont le soleil est un foyer.
- 2 L'aire balayée par le rayon vecteur planète-soleil est proportionnelle au temps mis pour la parcourir.
- 3 Si on note T la période de révolution de la planète et a le demi grand axe de l'ellipse, le quotient T^2/a^3 est une constante pour toutes les planètes du système solaire.

Caractéristiques astronomiques

Lois de Kepler

- 1 Chaque planète décrit selon un mouvement périodique, dans le sens direct, une trajectoire elliptique dont le soleil est un foyer.
 - 2 L'aire balayée par le rayon vecteur planète-soleil est proportionnelle au temps mis pour la parcourir.
 - 3 Si on note T la période de révolution de la planète et a le demi grand axe de l'ellipse, le quotient T^2/a^3 est une constante pour toutes les planètes du système solaire.
- ▶ historiquement, Newton a déterminé la force de gravitation (1687) à partir de ces observations
 - ▶ les trajectoires sont pratiquement toutes coplanaires dans le **plan de l'ecliptique** (pour le système solaire)

Caractéristiques astronomiques



- ▶ deux orbites autour du **même astre**
- ▶ $T_1^2/a_1^3 = T_2^2/a_2^3$

Référentiel d'observation

Ces observations sont faites dans le référentiel **héliocentrique**

Référentiel d'observation

Ces observations sont faites dans le référentiel **héliocentrique**

Définition (Référentiels de Copernic et Kepler)

Le référentiel de **Copernic** (\mathcal{R}_C) est le référentiel :

- ▶ dans lequel le centre d'inertie du système solaire est fixe ;
- ▶ dont les axes cartésiens pointent vers trois étoiles fixes.

Le référentiel de **Kepler** (\mathcal{R}_K), dit **héliocentrique**, est le référentiel **en translation** par rapport au référentiel de Copernic mais dont l'origine est confondue avec le **centre d'inertie du Soleil**.

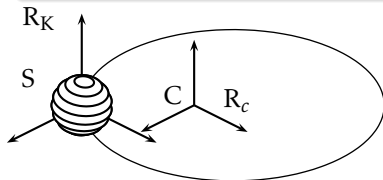
Référentiel d'observation

Définition (Référentiels de Copernic et Kepler)

Le référentiel de **Copernic** (\mathcal{R}_C) est le référentiel :

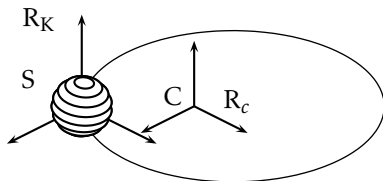
- ▶ dans lequel le centre d'inertie du système solaire est fixe ;
- ▶ dont les axes cartésiens pointent vers trois étoiles fixes.

Le référentiel de **Kepler** (\mathcal{R}_K), dit **héliocentrique**, est le référentiel **en translation** par rapport au référentiel de Copernic mais dont l'origine est confondue avec le **centre d'inertie du Soleil**.



Référentiels de Copernic (\mathcal{R}_C), de Kepler (\mathcal{R}_K). La figure n'est pas à l'échelle, et la trajectoire de \mathcal{R}_K n'est pas elliptique...

Référentiel d'observation



Référentiels de Copernic (\mathcal{R}_C), de Kepler (\mathcal{R}_K). La figure n'est pas à l'échelle, et la trajectoire de \mathcal{R}_K n'est pas elliptique...

- ▶ on admet que \mathcal{R}_C est galiléen avec une très bonne approximation pour les corps se **mouvant dans le système solaire**
- ▶ \mathcal{R}_K est nécessairement « moins galiléen » que \mathcal{R}_C mais on admettra qu'il peut lui aussi être considéré galiléen
- ▶ On peut toujours trouver « plus galiléen » : \mathcal{C} est en mouvement de période $\simeq 200 \cdot 10^6$ ans à une distance $\simeq 30 \cdot 10^3$ années lumières du centre de la galaxie...

Modèle

Dans quel cadre retrouve-t-on ces lois ?

Modèle

Dans quel cadre retrouve-t-on ces lois ?

Modèle

Dans quel cadre retrouve-t-on ces lois ?

► 2^e loi :

Modèle

Dans quel cadre retrouve-t-on ces lois ?

- ▶ 2^e loi : force centrale

Modèle

Dans quel cadre retrouve-t-on ces lois ?

- ▶ 2^e loi : force centrale
- ▶ 1^{re} et 3^e loi :

Modèle

Dans quel cadre retrouve-t-on ces lois ?

- ▶ 2^e loi : force centrale
- ▶ 1^{re} et 3^e loi : une force en $1/r^2$ d'origine le centre du soleil

Modèle

Dans quel cadre retrouve-t-on ces lois ?

- ▶ 2^e loi : force centrale
- ▶ 1^{re} et 3^e loi : une force en $1/r^2$ d'origine le centre du soleil
- ▶ sens direct et coplanaires : cohérent avec une formation des planètes par aplatissement de la nébuleuse solaire initialement en rotation

Modèle

Dans quel cadre retrouve-t-on ces lois ?

- ▶ 2^e loi : force centrale
- ▶ 1^{re} et 3^e loi : une force en $1/r^2$ d'origine le centre du soleil
- ▶ sens direct et coplanaires : cohérent avec une formation des planètes par aplatissement de la nébuleuse solaire initialement en rotation
- ▶ Cohérent avec une description de chaque planète en **symétrie sphérique** soumise uniquement à **l'attraction du soleil**, lui-aussi à **symétrie sphérique**.

Paramètres

Paramètres orbitaux

- ▶ pour la Terre : ellipse d'excentricité 0,02 et $a = 1,495978875 \cdot 10^{11} \text{ m} \simeq 1 \text{ au}$, inclinaison 0 (référence)
- ▶ excentricité maximale mercure $e = 0,2$, rayon maximal neptune 30 au, rayon minimal mercure 0,39 au, inclinaison maximale mercure 7°

Paramètres

Paramètres orbitaux

- ▶ pour la Terre : ellipse d'excentricité 0,02 et $a = 1,495978875 \cdot 10^{11} \text{ m} \simeq 1 \text{ au}$, inclinaison 0 (référence)
- ▶ excentricité maximale mercure $e = 0,2$, rayon maximal neptune 30 au, rayon minimal mercure 0,39 au, inclinaison maximale mercure 7°

- 1 La période de neptune est-elle supérieure ou inférieure à 30 an ?
- 2 Calculer sa valeur

Paramètres

Paramètres orbitaux

- ▶ pour la Terre : ellipse d'excentricité 0,02 et $a = 1,495978875 \cdot 10^{11} \text{ m} \simeq 1 \text{ au}$, inclinaison 0 (référence)
- ▶ excentricité maximale mercure $e = 0,2$, rayon maximal neptune 30 au, rayon minimal mercure 0,39 au, inclinaison maximale mercure 7°

Paramètres physiques

- ▶ pour la Terre : masse $m_T = 5,9736 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, rayon $R_T = 6,371 \cdot 10^6 \text{ m}$
- ▶ masse et rayon maximaux : Jupiter masse $\simeq 320m_T$, rayon $11R_T$
- ▶ masse et rayons minimaux : Mercure masse $0,064m_T$, rayon $\simeq 0,38R_T$

1. Forces centrales conservatives

2. Lois générales de conservation

3. Mouvement dans un champ de force newtonien : généralités

4. Cas du mouvement circulaire

1. Forces centrales conservatives

2. Lois générales de conservation

3. Mouvement dans un champ de force newtonien : généralités

4. Cas du mouvement circulaire

4.1 Caractéristiques générales

4.2 Orbites terrestres

Caractéristiques des orbites circulaires

Définition (Satellite)

Un satellite est un corps en mouvement dans un **état lié** autour d'un astre **beaucoup plus massif**.

L'**orbite** d'un satellite est la trajectoire qu'il décrit autour de l'astre sous l'effet de la force de gravitation.

Caractéristiques des orbites circulaires

Définition (Satellite)

Un satellite est un corps en mouvement dans un **état lié** autour d'un astre **beaucoup plus massif**.

L'**orbite** d'un satellite est la trajectoire qu'il décrit autour de l'astre sous l'effet de la force de gravitation.

Mouvements circulaires

| grandeur | relation à utiliser | expression |
|--|---|---|
| v | $-\frac{mv^2}{R} = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{R^2}$ | $v^2 = \frac{\mathcal{G}M_T}{R}$ |
| \mathcal{E}_c | | $\frac{1}{2} \frac{\mathcal{G}M_T m}{R}$ |
| $\mathcal{E}_{\text{pot}} = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{R}$ | | $\mathcal{E}_m = \frac{\mathcal{E}_{\text{pot}}}{2} = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{2R}$ |
| T | $\frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R^{3/2}}{\sqrt{\mathcal{G}M_T}}$ | $T = 2\pi R^{3/2} / \sqrt{\mathcal{G}M_T}$ |

3^e loi de Kepler

3^e loi de Kepler : cas circulaire

La période T et le rayon R de l'orbite circulaire d'un de ses satellites autour d'un astre de masse M vérifient :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M}.$$

3^e loi de Kepler

3^e loi de Kepler : cas circulaire

La période T et le rayon R de l'orbite circulaire d'un de ses satellites autour d'un astre de masse M vérifient :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M}.$$

- ▶ on retrouve le cas elliptique avec $a = R$, et la **même valeur de la constante**
- ▶ on retrouve $\mathcal{E}_m = -K/(2a)$

1. Forces centrales conservatives

2. Lois générales de conservation

3. Mouvement dans un champ de force newtonien : généralités

4. Cas du mouvement circulaire

4.1 Caractéristiques générales

4.2 Orbites terrestres

La Terre

On considère des corps soumis à l'attraction gravitationnelle de la Terre (centre O)

$$\frac{\text{masse}}{\text{rayon}} \quad \frac{m_T = 5,9736 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{R_T = 6,371 \cdot 10^6 \text{ kg}}$$

La Terre

On considère des corps soumis à l'attraction gravitationnelle de la Terre (centre O)

$$\frac{\text{masse}}{\text{rayon}} \quad \frac{m_T = 5,9736 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{R_T = 6,371 \cdot 10^6 \text{ kg}}$$

Force subie par une masse ponctuelle m en M ($\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$) :

▶ $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{r^2} \vec{e}_r$

▶ proche de la surface : $F = \frac{\mathcal{G}M_T m}{R_T^2}$ or le poids est $\vec{P} = m \vec{g}$

$$g \simeq \frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2} \quad \vec{F} \simeq -mg \frac{R_T^2}{r^2} \vec{e}_r$$


La Terre

Force subie par une masse ponctuelle m en M ($\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$) :

▶ $\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{r^2}\vec{e}_r$

▶ proche de la surface : $F = \frac{\mathcal{G}M_T m}{R_T^2}$ or le poids est $\vec{P} = m\vec{g}$

$$g \simeq \frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2} \quad \vec{F} \simeq -mg\frac{R_T^2}{r^2}\vec{e}_r$$

 : le poids \vec{P} contient plus que l'attraction gravitationnelle \vec{F} , \vec{F} et \vec{P} sont légèrement différents en intensité et en direction

Référentiels géocentrique et terrestre

pour les orbites autour de la Terre :

Référentiels géocentrique et terrestre

pour les orbites autour de la Terre :

Définition (Référentiel géocentrique)

Le référentiel **géocentrique** est le référentiel :

- ▶ en **translation** par rapport au référentiel de Kepler ;
- ▶ d'origine confondue avec le **centre d'inertie C de la Terre**.

Référentiels géocentrique et terrestre

Mouvement de la Terre dans \mathcal{R}_K

Le mouvement de **révolution** de la Terre dans le référentiel de Kepler est décrit comme :

- ▶ quasi-circulaire (ellipse d'excentricité $e = 0,0167$),
- ▶ de rayon moyen $1 \text{ au} = 1,49597870691(30) \cdot 10^{11} \text{ m} \simeq 150 \cdot 10^6 \text{ km}$ et de période $T_R = 366,26 \text{ jours sidéraux} \simeq 365 \text{ jours}$,
- ▶ dans un plan dit **de l'écliptique**.

Référentiels géocentrique et terrestre

Mouvement du référentiel terrestre

Le référentiel **terrestre**, lié à la Terre, est animé dans le référentiel géocentrique d'un mouvement de rotation autour de l'axe des pôles, dans le sens direct, de période ≈ 24 h.

Différents types d'orbites

orbites basses $h \leq 2000 \text{ km}$ lancement peu coûteux, mais faible zone du globe couverte. Télécom (Starlink par exemple), observation scientifique, ISS (300 km)

orbites moyennes $2 \cdot 10^3 \text{ km} \leq h \leq 36 \cdot 10^3 \text{ km}$ satellites navigation (GPS) qui doivent couvrir une grande partie du globe ($20 \cdot 10^3 \text{ km}$)

orbites hautes $h \geq 36 \cdot 10^3 \text{ km}$: satellites **géostationnaires** de télécommunication (pour antennes TV satellites) et satellites météo, satellites militaires qui doivent pouvoir couvrir tous les autres ...

Exercice

Déterminer les expressions et les valeurs numériques des grandeurs suivantes :

- 1 **1^{re} vitesse cosmique** v_1 : c'est la vitesse d'un satellite en orbite basse $h \ll R_t$, ie la vitesse à lui communiquer pour le satelliser.
- 2 **2^e vitesse cosmique** v_2 : c'est la vitesse nécessaire pour qu'un satellite soit en état de diffusion, ie échappe à l'attraction terrestre.
- 3 On lance un satellite d'une orbite basse avec une vitesse v orthoradiale. Tracer l'allure de la trajectoire :
 - a Pour $v = v_1$
 - b Pour $v = v_2$
 - c Pour $v_1 \leq v \leq v_2$
 - d Pour $v = 2v_2$
- 4 **Altitude d'un satellite géostationnaire** C'est un satellite dont la période de révolution est la même que celle de rotation de la Terre, dans le même sens que celle-ci, et dont l'orbite est dans le plan équatorial. Déterminer le rayon R_g de son orbite.

Indispensable

- ▶ orbites circulaires, à savoir démontrer **directement**
- ▶ formalisme de l' \mathcal{E}_{pot} effective
- ▶ lois de Kepler ($T^2/a^3 = \text{cste}$, pas la valeur de la constante)
- ▶ expression de l'énergie d'un état lié
- ▶ vitesses cosmiques et orbite géostationnaire