DS 2

Les calculatrices sont interdites.

Problème 1 : Irrationnalité et approximation de e.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note I_n la quantité suivante : $I_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^1 t^n (1-t)^n e^t \, dt$.

1°) Calculer I_0 et I_1.

2°) Etudier la fonction $t \longmapsto t(1-t)$ sur l'intervalle $[0,1]$ et tracer son graphe.

3°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \dfrac{e-1}{n!\, 4^n}$.
En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on note $f_n(t) = t^n (1-t)^n$.
Lorsque $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $t \in \mathbb{R}$, exprimer $f_n''(t)$ en fonction de n, $f_{n-1}(t)$ et $f_{n-2}(t)$.
En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $I_n = -2(2n-1)I_{n-1} + I_{n-2}$.

5°) Montrer qu'il existe deux suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers relatifs impairs telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \alpha_n e - \beta_n$.
On précisera les valeurs de $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0$ et β_1 ainsi qu'une relation de récurrence satisfaite par les suites (α_n) et (β_n).

6°) Montrer que $\dfrac{\beta_n}{\alpha_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e$.

7°) Déduire des questions précédentes que e est irrationnel.

8°) Si r, s, r' et s' sont 4 rationnels tels que $r + se = r' + s'e$,
montrer que $r = r'$ et $s = s'$.

9°) Démontrer que pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^\ell e^t \, dt = \ell! e - \sum_{j=0}^{\ell} \frac{\ell!}{j!}$.

10°) Établir une formule analogue pour $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^\ell e^{-t} \, dt$.

11°) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $I_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \int_0^1 (1-t)^{n+k} e^t \, dt$.

En déduire que $\alpha_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!}$.

12°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{e}{n!} \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n u^n e^{-u} \, du$.

En déduire que $e = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^n\frac{(n+k)!}{k!(n-k)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(n+k)!}{k!(n-k)!}}$.

Problème 2 :
distributivité de la réunion par rapport à l'intersection.

Dans tout ce problème, E désigne un ensemble et n est un entier naturel non nul.
$A_1, \ldots, A_n,\ B_1, \ldots, B_n$ désignent $2n$ parties de E.
On note $\mathbb{N}_n$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et n
et $\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}_n$.

L'objet du problème est de montrer selon plusieurs méthodes la propriété (C_n) suivante :

$$(C_n)\ :\ \bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap B_i) = \bigcap_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \Big(\Big(\bigcup_{i\in X} A_i\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_n\setminus X} B_i\Big)\Big).$$

1°) Lorsque $n = 1$, montrer que (C_1) est vraie.

2°) Soit I un ensemble non vide, $(F_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E et G une partie de E. Montrer que $\Big(\bigcap_{i\in I} F_i\Big) \cup G = \bigcap_{i\in I}(F_i \cup G)$ et $\Big(\bigcup_{i\in I} F_i\Big) \cap G = \bigcup_{i\in I}(F_i \cap G)$.

3°) On considère deux nouvelles parties de E, notées A_{n+1} et B_{n+1}.
On note $Q = \{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_{n+1})\ /\ n+1 \in X\}$.
Montrer que $\bigcap_{X\in\mathcal{P}(\mathbb{N}_n)} \Big(\Big(\bigcup_{i\in X\cup\{n+1\}} A_i\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_n\setminus X} B_i\Big)\Big) = \bigcap_{X\in Q} \Big(\Big(\bigcup_{i\in X} A_i\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}_{n+1}\setminus X} B_i\Big)\Big)$.

4°) En déduire une démonstration de (C_n) par récurrence sur n.

5°) Proposer une seconde démonstration de (C_n), en procédant par double inclusion et en passant aux éléments.

6°) Soit I et J deux ensembles non vides. Pour tout $i \in I$ et $j \in J$, on suppose que $A_{i,j}$ est une partie de E. On note $\mathcal{F}(I, J)$ l'ensemble des applications de I dans J.
Montrer que $\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{i,j} = \bigcup_{f\in\mathcal{F}(I,J)}\bigcap_{i\in I} A_{i,f(i)}$.
En déduire que $\bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J} A_{i,j} = \bigcap_{f\in\mathcal{F}(I,J)}\bigcup_{i\in I} A_{i,f(i)}$.

7°) Soit I un ensemble non vide. Pour tout $i \in I$ et $j \in \{0, 1\}$, on suppose que $A_{i,j}$ est une partie de E. On note $\mathcal{P}(I)$ l'ensemble des parties de I. Déduire de la question précédente que $\bigcup_{i\in I}(A_{i,0} \cap A_{i,1}) = \bigcap_{X\in\mathcal{P}(I)} \Big(\Big(\bigcup_{i\in X} A_{i,0}\Big)\bigcup\Big(\bigcup_{i\in I\setminus X} A_{i,1}\Big)\Big)$.
En déduire une nouvelle démonstration de (C_n).