Feuille d'exercices 2.
Dérivation et intégration.

Exercice 2.1 : (niveau 1)
Simplifier les expressions $\cos(2\arccos x)$, $\sin(2\arccos x)$ et $\tan(2\arcsin x)$.

Exercice 2.2 : (niveau 1)
Sans en rechercher les domaines de définition, calculer les dérivées des fonctions suivantes :
$f(x) = \cos\left(e^{3x\sin(\ln x)}\right)$, $g(x) = (\ln^3(x^2+1) - \ln(x^2+1))^5$ et $h(x) = \dfrac{\sin x^2}{(x+\ln x)^9}$.

Exercice 2.3 : (niveau 1)
Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = (x^2-1)e^{2x}, \quad g(x) = x^3 e^{-x^2}, \quad h(x) = \ln^2 x.$$

Exercice 2.4 : (niveau 1)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_1^e t^n \ln t \; dt$.

Exercice 2.5 : (niveau 1)
Calcul de $\int (\cos t)^4 (\sin t)^2 dt$.

Exercice 2.6 : (niveau 1)
Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe une unique primitive F de f telle que $\displaystyle\int_0^1 F(t)\; dt = 0$.

Exercice 2.7 : (niveau 1)
Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Lorsque g est donnée par l'une des formules suivantes, montrer que g est dérivable et calculer g' :

1°) $g(x) = \displaystyle\int_{2x}^{x^2} f(t)\; dt.$

2°) $g(x) = \displaystyle\int_0^x x f(t)\; dt.$

3°) $g(x) = \int_0^x f(t+x)\ dt.$

Exercice 2.8 : (niveau 1)
Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Calculer la limite lorsque x tend vers 0 de $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\ dt$.

Exercice 2.9 : (niveau 1)
Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^1 f(t)\ dt = \frac{1}{2}$.
Montrer que f possède un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $\ell \in [0,1]$ tel que $f(\ell) = \ell$.

Exercice 2.10 : (niveau 1)
Calculer $A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\sqrt{1+\tan^2 x}\ dx$ et $B = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt$.

Exercice 2.11 : (niveau 1)
Calcul de $\int (\cos^4 t)(\sin^3 t)\ dt$.

Exercice 2.12 : (niveau 2)
Résoudre l'équation (E) : $2\text{arcsin}\ x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

Exercice 2.13 : (niveau 2)
Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\arctan(t) = \arcsin\Big(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\Big)$.

Exercice 2.14 : (niveau 1)

1°) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la limite en 1 de la fonction $x \longmapsto \frac{x^\alpha - 1}{x^\beta - 1}$.

2°) Soit $f\ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable. Soit $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer la limite en a de $x \longmapsto \frac{xf(a) - af(x)}{x-a}$.

Exercice 2.15 : (niveau 2)
Calculer la dérivée n-ième de $f\ :\ x \longmapsto \cos^2 x$ et de $g\ :\ x \longmapsto \frac{2x}{x^2-1}$.

Exercice 2.16 : (niveau 2)
Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que
$\forall\ x \in \mathbb{R}, \forall\ a \in \mathbb{R}_+^*\ : f(x) = \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} f(t)dt$.

Exercice 2.17 : (niveau 2)
Calculer $I = \int_{-2}^{1} \frac{x}{x^2+4x+13}dx$.

Exercice 2.18 : (niveau 2)
Déterminez les applications continues f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :
$\int_a^b f(t)dt = (b-a) \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$.

Exercice 2.19 : (niveau 2)
Calculer les primitives des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}, \quad g(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}, \quad h(x) = \frac{(\ln x)^2}{x},$$
$$i(x) = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}, \quad j(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x}}, \quad k(x) = \mathrm{th}x,$$
$$\ell(x) = \frac{x^3}{1+x^2}, \quad m(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}, \quad n(x) = \tan^2 x, \quad p(x) = (1+\tan x)^2.$$

Exercice 2.20 : (niveau 2)
Etude de la fonction $f(t) = \dfrac{t^2-2t-1}{t} e^{-1/t}$

Exercice 2.21 : (niveau 2)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \tan(x) dx$.
Calculer les limites de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(nI_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2.22 : (niveau 2)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\, dx$.

Exercice 2.23 : (niveau 2)
Calculer la limite lorsque x tend vers 0 de $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt$.

Exercice 2.24 : (niveau 2)
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t) \times \ln^n(\cos t)\, dt$.

Exercice 2.25 : (niveau 2)
On souhaite calculer $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{x}{\sin x} dx$.

1°) Transformer I en posant d'abord $u = \frac{x}{2}$, puis $t = \tan u$.

2°) Soit $\alpha > 0$. En posant $x = \frac{1}{t}$, calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{\alpha}}^{\alpha} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.

3°) Achever le calcul de I.

Exercice 2.26 : (niveau 2)
Calcul de $\int \dfrac{\sqrt{1+\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

Exercice 2.27 : (niveau 3)
Simplifier $f(x) = \arcsin\Big(\dfrac{1+x}{\sqrt{2(1+x^2)}}\Big)$.

Exercice 2.28 : (niveau 3)
Résoudre l'équation suivante, en l'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\arccos\Big(\frac{1-x}{1+x}\Big) + \arcsin\Big(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\Big) = \pi.$$

Exercice 2.29 : (niveau 3)
Lemme de Gronwall :
Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue, telle qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ pour lequel :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \;\; f(x) \leq k \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.
Montrez que f est nulle.

Exercice 2.30 : (niveau 3)
Soit $f \; : \; \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) > 0$ et $f(x)f''(x) \geq f'(x)^2$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \;\; f(x) \geq f(0)e^{x\frac{f'(0)}{f(0)}}.$$

Exercice 2.31 : (niveau 3)
Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}$.
On pourra utiliser que $\displaystyle\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 2.32 : (niveau 3)
a et b sont deux réels tels que $a < b$. On note F l'ensemble des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ qui ne s'annulent en aucun point. Pour tout $f \in F$, on pose $P_f = \displaystyle\Big(\int_a^b f(t)dt\Big)\Big(\int_a^b \frac{dt}{f(t)}\Big)$.

1°) Déterminer le minimum de P_f lorsque f décrit F et préciser pour quels éléments de F ce minimum est atteint.

2°) Montrer que $\{P_f / f \in F\}$ n'est pas majoré.

Exercice 2.33 : (niveau 3)
Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que, pour tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$, $\displaystyle\int_0^1 f(x)x^k\,dx = 0$.
Montrer que f s'annule au moins n fois.

Exercices supplémentaires

Exercice 2.34 : (niveau 1)
Sans en rechercher les domaines de définition, calculer les dérivées des fonctions suivantes :
$f(x) = \dfrac{3x^2}{1-x^2}$, $g(x) = \exp\Big(\dfrac{2x-1}{x^2+2}\Big)$, $h(x) = xe^{-\frac{1}{x^2}}$.

Exercice 2.35 : (niveau 1)
Sans en rechercher le domaine de définition, dérivez les fonctions suivantes :
$f(x) = \ln\sqrt{|\tan x|}$, $g(x) = \sqrt{\sin\frac{1}{x}}$ et $h(x) = \dfrac{1}{2(e^x+e^{-x})^2}$.

Exercice 2.36 : (niveau 1)
Résoudre l'équation $\tan(3x - \frac{\pi}{5}) = \tan(x + 4\frac{\pi}{5})$.

Exercice 2.37 : (niveau 1)
Résoudre l'équation $\arcsin x = \arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13}$.

Exercice 2.38 : (niveau 1)
Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2 x}{1+\tan x}dx$.

Exercice 2.39 : (niveau 1)
Étudier la fonction $f(x) = \arcsin\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}$.

Exercice 2.40 : (niveau 1)

1°) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{th}x = \dfrac{2}{\mathrm{th}(2x)} - \dfrac{1}{\mathrm{th}x}$.

2°) En déduire la valeur, pour $n \in \mathbb{N}$, de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k\mathrm{th}(2^k x)$.

Exercice 2.41 : (niveau 2)
Calcul de la limite quand x tend vers $\frac{\pi}{6}$ de : $\dfrac{\arctan(2\sin(x)) - \frac{\pi}{4}}{\cos(3x)}$.

Exercice 2.42 : (niveau 2)
Calculer le sinus, le cosinus et la tangente des nombres réels $\frac{\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12}$ et $\frac{7\pi}{12}$.

Exercice 2.43 : (niveau 2)
Résoudre l'équation $\cos x + \cos 2x - 3\cos 3x = -1$.

Exercice 2.44 : (niveau 2)
Calculer $I = \displaystyle\int_0^2 \sqrt{e^x}dx$, $J = \displaystyle\int_{\frac{\pi^2}{36}}^{\frac{\pi^2}{16}} \frac{dx}{\sqrt{x}\cos^2(\sqrt{x})}$, $K = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\tan x}$ et $L = \displaystyle\int_0^1 e^{e^x+x}dx$.

Exercice 2.45 : (niveau 2)
Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \ dx$.

Exercice 2.46 : (niveau 2)
Calculez $\displaystyle\int_0^{\sin^2 x} \arcsin\sqrt{t}dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}dt$, où $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Exercice 2.47 : (niveau 2)
Soit n un entier naturel. Résoudre l'équation en l'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivante :

$$(\cos x)^n + (\sin x)^n = 1.$$

Exercice 2.48 : (niveau 2)
Soit f une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On admettra qu'une telle application est toujours bornée.
Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (avec $n \in \mathbb{N}$).
Si f est de classe C^1 avec $f(1) \neq 0$,
donner un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2.49 : (niveau 2)
En posant $u = \pi - t$, calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}$.

En posant $u = \dfrac{\pi}{2} - t$, calculer $J = \displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \Big(\int_0^x \frac{dt}{1+\tan^{2018} t}\Big)$.

En posant $u = \sqrt{t^2+t+1} - t$, calculer $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}$.

Exercice 2.50 : (niveau 2)
(oral CCP) : Simplifier l'expression de la fonction $x \longmapsto \arcsin\Big(\dfrac{2x}{1+x^2}\Big)$.

Exercice 2.51 : (niveau 2)
On souhaite calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{3+\sin(2x)}}dx$.

1°) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{3+\sin(2x)}}dx$, puis que $I = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x-\frac{\pi}{4})}{\sqrt{3+\sin(2x)}}dx$.

2°) Poser successivement $t = x - \frac{\pi}{4}$ et $u = \sin t$ pour calculer I.

Exercice 2.52 : (niveau 2)
1°) Soit $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$:
a) Résoudre les inéquations $Atan\theta + Atan\varphi < \frac{\pi}{2}$ et $Atan\theta + Atan\varphi > -\frac{\pi}{2}$.
b) Exprimez $Atan\theta + Atan\varphi$ à l'aide de $Atan\frac{\theta + \varphi}{1 - \theta\varphi}$.
2°) Calculez $a = Atan2 + Atan5 + Atan8$.
3°) Résoudre $Atan(x - 3) + Atanx + Atan(x + 3) = \frac{5\pi}{4}$.

Exercice 2.53 : (niveau 3)
Résoudre l'équation $\cos(\pi \sin(x)) = \sin(\pi \cos(x))$, en l'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.54 : (niveau 3)
Simplifier $f(x) = \arccos\sqrt{\frac{1 + \sin x}{2}} - \arcsin\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$.

Exercice 2.55 : (niveau 3)
On pose $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \cos x \sin x}} dx$ et $J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos x \sin x}} dx$.
Montrer que $I = J$ puis calculer I.

Exercice 2.56 : (niveau 3)
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe a appartenant à $[0, 1]$ tel que pour tout x réel, $f(x) = \int_0^{ax} f(t)dt$.

1°) Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

2°) Montrer que f est la fonction nulle.

Exercice 2.57 : (niveau 3)
Déterminez les applications f continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et vérifiant :
$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3} + \int_0^1 f(x^2)^2 dx$.