DM 10. un corrigé

Problème 1 : un anneau principal

Partie I

1°) a) Supposons que $\sqrt{n}$ est un rationnel.
Il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ et $p \wedge q = 1$.
Ainsi, $q^2 n = p^2$, donc $q \mid p^2$, mais $q \wedge p^2 = 1$, donc d'après le théorème de Gauss, $q \mid 1$, or $q \in \mathbb{N}^*$, donc $q = 1$, puis $n = p^2$ ce qui contredit les hypothèses de l'énoncé. Ainsi, $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.
b) Soit $\alpha \in \mathbb{Q}[\sqrt{n}]$. Supposons qu'il existe $a, b, a', b' \in \mathbb{Q}$ tels que
$a + b\sqrt{n} = \alpha = a' + b'\sqrt{n}$. Alors $(a' - a) + \sqrt{n}(b' - b) = 0$.
Si $b \neq b'$, alors $\sqrt{n} = \dfrac{a - a'}{b' - b} \in \mathbb{Q}$, ce qui est faux, donc $b = b'$, puis $a' - a = 0$, donc $a = a'$.

2°) a) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}[\sqrt{n}]$. Il existe $a, b, a', b' \in \mathbb{Q}$ tels que $\alpha = a + b\sqrt{n}$ et $\beta = a' + b'\sqrt{n}$.
- $1 = 1 + 0\sqrt{n} \in \mathbb{Q}[\sqrt{n}]$:
- $\alpha - \beta = (a - a') + (b - b')\sqrt{n} \in \mathbb{Q}[\sqrt{n}]$;
- $\alpha\beta = (aa' + nbb') + \sqrt{n}(ba' + b'a) \in \mathbb{Q}[\sqrt{n}]$.

Ainsi, $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
Supposons que $\alpha \neq 0$. Si $a^2 - nb^2 = 0$, alors $|b|\sqrt{n} = |a|$, donc d'après l'unicité de la question précédente, $|a| = |b| = 0$, donc $\alpha = 0$ ce qui est faux. Ainsi, $a^2 - nb^2 \neq 0$ et l'on peut écrire : $\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{a - b\sqrt{n}}{a^2 - nb^2} = \dfrac{a}{a^2 - nb^2} - \dfrac{b}{a^2 - nb^2}\sqrt{n} \in \mathbb{Q}[\sqrt{n}]$.
Ainsi, $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$ est bien un sous-corps de $\mathbb{R}$.
b) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$. Il existe $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$ tels que $\alpha = a + b\sqrt{n}$ et $\beta = a' + b'\sqrt{n}$.
- $1 = 1 + 0\sqrt{n} \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$:
- $\alpha - \beta = (a - a') + (b - b')\sqrt{n} \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$;
- $\alpha\beta = (aa' + nbb') + \sqrt{n}(ba' + b'a) \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$.

Or, $\mathbb{Z}[\sqrt{n}] \subset \mathbb{Q}[\sqrt{n}]$, donc $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$.

3°) a) Posons $\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{Q}[\sqrt{n}] & \longrightarrow & \mathbb{Q}[\sqrt{n}] \\ & z & \longmapsto & \overline{z} \end{array}$.
Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}[\sqrt{n}]$. Il existe $a, b, a', b' \in \mathbb{Q}$ tels que $\alpha = a + b\sqrt{n}$ et $\beta = a' + b'\sqrt{n}$.
$\varphi(\alpha + \beta) = \varphi((a + a') + (b + b')\sqrt{n}) = (a + a') - (b + b')\sqrt{n}$

et $\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)=a-b\sqrt{n}+a'-b'\sqrt{n}$, donc $\varphi(\alpha+\beta)=\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)$. Ainsi φ est un morphisme de groupes. De plus,

— $\varphi(1)=1$;

— $\varphi(\alpha\beta)=\varphi((aa'+nbb')+\sqrt{n}(ab'+ba'))=(aa'+nbb')-\sqrt{n}(ab'+ba')$
 et $\varphi(\alpha)\varphi(\beta)=(a-\sqrt{n}b)(a'-\sqrt{n}b')=(aa'+nbb')-\sqrt{n}(ab'+ba')=\varphi(\alpha\beta)$.

Ainsi φ est un morphisme d'anneaux.
De plus, pour tout $\alpha=a+\sqrt{n}b$, $\varphi(\varphi(\alpha))=\varphi(a-\sqrt{n}b)=a+\sqrt{n}b=\alpha$, donc $\varphi\circ\varphi=Id_{\mathbb{Q}[\sqrt{n}]}$. Ainsi φ est une involution, donc en particulier une bijection.
On a bien montré que φ est un automorphisme involutif d'anneaux.
b) $\diamond$ Soit $z\in\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$. $N(z)=0\iff z\overline{z}=0$, or $\mathbb{R}$ est intègre,
donc $N(z)=0\iff(z=0)\vee(\overline{z}=0)$.
Cependant $\overline{z}=0\Longrightarrow\varphi(\overline{z})=0\Longrightarrow z=0$, donc $N(z)=0\iff z=0$.
$\diamond$ Soit $z,z'\in\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$. $N(zz')=(zz')\overline{(zz')}=zz'\overline{z}\,\overline{z'}$ car φ est un morphisme d'anneaux, donc $N(zz')=(z\overline{z})(z'\overline{z'})=N(z)N(z')$.
c) Soit $z\in\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$.
Supposons que z est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$: il existe $z'\in\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ tel que $zz'=1$. Alors $1=N(1)=N(zz')=N(z)N(z')$, mais $N(z),N(z')\in\mathbb{Z}$, donc $N(z)$ est un entier relatif inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}$. On sait alors que $|N(z)|=1$.
Réciproquement, supposons que $N(z)=\varepsilon\in\{-1,1\}$. On a vu que z est inversible dans $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$ avec $z^{-1}=\dfrac{\overline{z}}{N(z)}=\varepsilon\overline{z}$. Ainsi, $z^{-1}\in\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ et z est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$.

Partie II

4°) a) Soit $\alpha\in\mathbb{Q}$. Posons $a=\lfloor\alpha+\frac{1}{2}\rfloor\in\mathbb{Z}$.
On a $a\le\alpha+\frac{1}{2}<a+1$, donc $-\frac{1}{2}\le\alpha-a\le\frac{1}{2}$, donc $|\alpha-a|\le\frac{1}{2}$.
b) Soit $z=\alpha+\sqrt{n}\beta\in\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$. D'après la question précédente, il existe $a,b\in\mathbb{Z}$ tels que $|\alpha-a|\le\frac{1}{2}$ et $|\beta-b|\le\frac{1}{2}$. Posons $q=a+b\sqrt{n}\in\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$.
$N(z-q)=N((\alpha-a)+\sqrt{n}(\beta-b))=(\alpha-a)^2-n(\beta-b)^2$. Or $0\le(\alpha-a)^2\le\frac{1}{4}$ et $-\frac{3}{4}\le-\frac{n}{4}\le-n(\beta-b)^2\le0$, donc en sommant ces encadrements, $-\frac{3}{4}\le N(z-q)\le\frac{1}{4}$.
Ainsi, $|N(z-q)|<1$.

5°) a) Soit $x,y\in\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ avec $y\neq0$. Posons $z=\frac{x}{y}\in\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$. D'après la question précédente, il existe $q\in\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ tel que $N(\frac{x}{y}-q)<1$.
Posons $r=x-qy\in\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$. $|N(r)|=|N(y(\frac{x}{y}-q))|=|N(y)|\,|N(\frac{x}{y}-q)|<N(y)$, car y étant non nul, $N(y)\neq0$.
On a bien montré qu'il existe $q,r\in\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ tels que $x=qy+r$ et $|N(r)|<|N(y)|$.
b) Le couple (q,r) n'est pas unique, comme le montre le contre-exemple suivant : prenons $x=1$ et $y=2$. On peut écrire $x=0.y+1$ et $1=|N(1)|<|N(y)|=2$, mais aussi $x=1.y-1$ et $1=|N(-1)|<|N(y)|$.

6°) $\diamond$ Posons $I=a_0A$ et montrons que I est un idéal.
$0=a_0\times0\in I$, donc $I\neq\emptyset$.
Soit $x,y\in I$. Il existe $a,b\in A$ tels que $x=a_0a$ et $y=a_0b$. Alors $x-y=a_0(a-b)\in I$.

Ainsi I est un sous-groupe de A.
Soit $a \in A$ et $x \in I$. Il existe $b \in A$ tel que $x = a_0 b$. Alors $ax = a_0(ab)$, car l'anneau est commutatif, donc $ax \in I$.
Ainsi I est un idéal de A, qui contient a_0.
$\diamond$ Si J est un second idéal contenant a_0, alors pour tout $x \in A$, J étant un idéal, $a_0 x \in J$. Ainsi J contient $a_0 A$.
On a bien prouvé que $a_0 A$ est le plus petit idéal de A contenant a_0.

7°) a) I contient $\{0\}$ en tant que sous-groupe, mais $I \neq \{0\}$, donc il existe $z_0 \in I \setminus \{0\}$. Alors $|N(z_0)| \in \{|N(z)|/z \in I \setminus \{0\}\}$, donc cet ensemble est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et à ce titre il possède un minimum.
b) $y \in I$, donc d'après la question précédente, $yA \subset I$.
Réciproquement, soit $x \in I$. $y \neq 0$, donc d'après la question 5.a, il existe $q, r \in \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ tels que $x = qy + r$ et $|N(r)| < |N(y)|$.
$r = x - qy$, or $x, y \in I$ et I est un idéal donc $r \in I$.
Si $r \neq 0$, $|N(r)| \in \{|N(z)|/z \in I \setminus \{0\}\}$ mais ce n'est pas compatible avec le fait que $|N(r)| < |N(y)| = k_0$.
Ainsi, $r = 0$ puis $x = qy \in yA$. Ceci montre que $I \subset yA$.
En conclusion, $I = yA$.
c) Soit A un sous-anneau de $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$. L'application $p : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\sqrt{n}] & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ a + \sqrt{n}b & \longmapsto & b \end{array}$ est un morphisme de groupes, bien défini d'après la question 1.b, donc $p(A)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. D'après le cours, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p(A) = k\mathbb{Z}$.
$1 \in A$ car A est un sous-anneau.
$k \in p(A)$, donc il existe $\alpha \in A$ tel que $k = p(\alpha)$. Ainsi, il existe $a \in \mathbb{Z}$ tels que $\alpha = a + k\sqrt{n}$. Alors, $k\sqrt{n} = (a + k\sqrt{n}) - a \in A$.
Ainsi, $\{1, k\sqrt{n}\} \subset A$, donc A contient le sous-groupe engendré par $\{1, k\sqrt{n}\}$, c'est-à-dire $B = \mathbb{Z} + k\sqrt{n}\mathbb{Z} = \{a + kb\sqrt{n}/a, b \in \mathbb{Z}\}$.
Réciproquement, si $\alpha \in A$, $p(\alpha) \in p(A) = k\mathbb{Z}$, donc il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que
$\alpha = a + kb\sqrt{n}$, donc $\alpha \in B$.
On a ainsi montré que si A est un sous-anneau de $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A = \mathbb{Z} + k\sqrt{n}\mathbb{Z}$.
Réciproquement, si $k \in \mathbb{N}$, posons $A = \mathbb{Z} + k\sqrt{n}\mathbb{Z}$. $1 \in A$ et si $\alpha, \beta \in A$, on vérifie que $\alpha - \beta \in A$ et que $\alpha\beta \in A$: en effet, lorsque $\alpha = a + kb\sqrt{n}$ et $\beta = a' + kb'\sqrt{n}$, $\alpha\beta = (aa' + k^2 bb'n) + k\sqrt{n}(ab' + ba')$.
Ainsi, $\mathbb{Z} + k\sqrt{n}\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$.
En conclusion, les sous-anneaux de $\mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ sont exactement les $\mathbb{Z} + k\sqrt{n}\mathbb{Z}$, où $k \in \mathbb{N}$.

Problème 2 : une intégrale dépendant d'un paramètre

1°) a) Soit $x, y \in \mathbb{R}+^*$ tels que $x \leq y$.
Pour tout $t \in [0,1]$, $\dfrac{1}{t^3+t+y} \leq \dfrac{1}{t^3+t+x}$, donc par croissance de l'intégrale,
$F(y) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dy}{t^3+t+y} \leq \int_0^1 \frac{dx}{t^3+t+x}$, ce qui montre que F est décroissante.
b) Pour tout $t \in [0,1]$, $t^3+t+x \geq x$, donc $0 \leq \dfrac{1}{t^3+t+x} \leq \dfrac{1}{x}$, puis
$0 \leq F(x) \leq \dfrac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc d'après le principe des gendarmes, $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
c) De plus, pour tout $t \in [0,1]$, $t^3+t+x \leq 2+x$,
donc $\dfrac{1}{2+x} \leq \dfrac{1}{t^3+t+x} \leq \dfrac{1}{x}$, puis $\dfrac{x}{2+x} \leq xF(x) \leq 1$, or $\dfrac{x}{2+x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc d'après le principe des gendarmes, $xF(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

2°) a) Soit $a, x \in \mathbb{R}_+^*$. $F_a(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{at+x} = \left[\frac{1}{a}\ln(at+x)\right]_0^1 = \frac{1}{a}\ln\Big(\frac{a+x}{x}\Big)$.
b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $t \in [0,1]$, $t^2 \leq 1$, donc $t^3 \leq t$. Ainsi $t+x \leq t^3+t+x \leq 2t+x$, puis $\dfrac{1}{2t+x} \leq \dfrac{1}{t^3+t+x} \leq \dfrac{1}{t+x}$, donc en intégrant entre 0 et 1, $F_2(x) \leq F(x) \leq F_1(x)$.
c) $F_2(x) = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{2}{x}+1\Big) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$, donc $F(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$.
d) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
$0 \leq F_1(x) - F(x) = \displaystyle\int_0^1 \Big(\frac{1}{t+x} - \frac{1}{t^3+t+x}\Big)\, dt = \int_0^1 \frac{t^3\, dt}{(t+x)(t^3+t+x)}$.
Or, pour tout $t \in [0,1]$, $(t+x)(t^3+t+x) \geq (t+x)(t+x) = (t+x)^2 \geq t^2$, donc
$0 \leq F_1(x) - F(x) \leq \displaystyle\int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}$, puis $0 \leq \dfrac{F_1(x)-F(x)}{-\ln x} \leq \dfrac{1}{-2\ln x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, $\dfrac{F(x)}{-\ln x} = -\dfrac{F_1(x)-F(x)}{-\ln x} + \dfrac{\ln(1+x)-\ln x}{-\ln x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

3°) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En intégrant par parties,
$I_n = \displaystyle\int_0^1 (3t^2+1)(t^3+t)^n \frac{1}{3t^2+1}\, dt = \left[\frac{(t^3+t)^{n+1}}{n+1}\frac{1}{3t^2+1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(t^3+t)^{n+1}}{n+1}\frac{6t}{(3t^2+1)^2}\, dt$,
Donc $I_n = \dfrac{2^{n+1}}{n+1}\dfrac{1}{4} + \dfrac{6}{n+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{t(t^3+t)^{n+1}}{(3t^2+1)^2}\, dt$, ce qu'il fallait démontrer.
b) Pour tout $t \in [0,1]$, $t^3+t \leq 2t$, donc
$\left|\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\int_0^1 \frac{t(t^3+t)^{n+1}}{(3t^2+1)^2}\, dt\right| \leq \frac{1}{2^n}\int_0^1 \frac{t(2t)^{n+1}}{1^2}\, dt = 2\int_0^1 t^{n+2}\, dt = \frac{2}{n+3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
c) $I_n \times \dfrac{n}{2^{n-1}} = \dfrac{n}{n+1} + \dfrac{n}{n+1}\dfrac{12}{2^n}\displaystyle\int_0^1 \frac{t(t^3+t)^{n+1}}{(3t^2+1)^2}\, dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $I_n \sim \dfrac{2^{n-1}}{n}$.

4°) a) Soit $u \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$-u \neq 1$, donc d'après le cours, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-u)^k = \frac{1-(-u)^n}{1+u}$,

donc $\displaystyle\frac{1}{1+u} - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k u^k = \frac{(-1)^n u^n}{1+u}$, puis $\displaystyle\Big|\frac{1}{1+u} - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k u^k\Big| \leq \frac{u^n}{1+u} \leq u^n$.

b) Soit $t \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Appliquons l'inégalité précédente avec $u = \dfrac{t^3+t}{x}$:

$\displaystyle\Big|\frac{1}{1+\frac{t^3+t}{x}} - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{(t^3+t)^k}{x^k}\Big| \leq \frac{(t^3+t)^n}{x^n}$.

On divise cette inégalité par x : $\displaystyle\Big|\frac{1}{x+t^3+t} - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{(t^3+t)^k}{x^{k+1}}\Big| \leq \frac{(t^3+t)^n}{x^{n+1}} \leq \frac{2^n}{x^{n+1}}$.

c) D'après l'inégalité triangulaire relative aux intégrales,

$$\begin{aligned}
\Big|\int_0^1 \frac{dt}{x+t^3+t} - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \int_0^1 \frac{(t^3+t)^k}{x^{k+1}}\, dt\Big| &= \Big|\int_0^1 \Big(\frac{1}{x+t^3+t} - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{(t^3+t)^k}{x^{k+1}}\Big)\, dt\Big| \\
&\leq \int_0^1 \Big|\Big(\frac{1}{x+t^3+t} - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{(t^3+t)^k}{x^{k+1}}\Big)\Big|\, dt \\
&\leq \int_0^1 \frac{2^n}{x^{n+1}}\, dt = \frac{2^n}{x^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, posons $a_k = (-1)^{k-1} I_{k-1}$, puis notons, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\varepsilon(x) = x^n\Big(F(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x^k}\Big)$. D'après ce qui précède, $|\varepsilon(x)| \leq \dfrac{2^n}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

donc $F(x) = \dfrac{a_1}{x} + \dfrac{a_2}{x^2} + \cdots + \dfrac{a_n}{x^n} + \dfrac{\varepsilon(x)}{x^n}$, où ε est une fonction telle que $\varepsilon(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.