Résumé de cours :
Semaine 10, du 22 novembre au 26.

Les complexes (suite)

1 Le module (fin)

Propriété. Le module est une norme sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire que l'application $|.| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes : Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

— $|z| \geq 0$ (positivité),
— $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$ (séparation),
— $|\alpha z| = |\alpha| \times |z|$ (homogénéité),
— $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire).

Il faut savoir le démontrer.

Distance entre complexes : Lorsque $x, y \in \mathbb{C}$, la quantité $d(x, y) = |x - y|$ est appelée la distance entre les deux complexes x et y.
La fonction distance vérifie les propriétés suivantes : pour tout $x, y, z \in \mathbb{C}$,

— Positivité : $d(x, y) \in \mathbb{R}_+$.
— $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$: d permet de *séparer* les complexes.
— Symétrie : $d(x, y) = d(y, x)$.
— Inégalité triangulaire : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Définition. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

— La boule fermée de centre a et de rayon r est $B_f(a, r) = \{z \in \mathbb{C}/|z - a| \leq r\}$. C'est le disque de centre a et de rayon r.
— Lorsque $r > 0$, la boule ouverte de centre a et de rayon r est $B_o(a, r) = \{z \in \mathbb{C}/d(a, z) < r\}$. C'est le disque ouvert de centre a et de rayon r.
— La sphère de centre a et de rayon r est $S(a, r) = \{z \in \mathbb{C}/d(a, z) = r\}$. C'est le cercle de centre a et de rayon r.

Définition. $S(0, 1)$ s'appelle la sphère unité ou bien le cercle unité. Il est noté $\mathbb{U}$.

Propriété. $\boxed{\text{Pour tout } z \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{U} \Longleftrightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}}$.

Théorème.
Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$, avec égalité si et seulement si $z' = 0$ ou bien $\frac{z}{z'} \in \mathbb{R}_+$.
Il faut savoir le démontrer.

Généralisation : (hors programme) $|z_1 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + \cdots + |z_n|$, avec égalité si et seulement si, pour tout i, j tels que $1 \leq i < j \leq n$, $(z_j = 0) \vee (\frac{z_i}{z_j} \in \mathbb{R}_+)$.

Il faut savoir le démontrer.

Corollaire de l'inégalité triangulaire :

— Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$.
— Pour tout $a, b, c \in \mathbb{C}$, $|d(a,b) - d(b,c)| \leq d(a,c)$.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Une partie A de $\mathbb{C}$ est bornée si et seulement si il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $a \in A$, $|a| \leq R$, c'est-à-dire si et seulement si A est incluse dans un disque centré en 0.

2 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

2.1 Fonctions bornées

Définition. Soit E un ensemble quelconque et f une application de E dans $\mathbb{C}$.
On dit que f est bornée sur E si et seulement si $\{f(x)/x \in E\}$ est une partie bornée de $\mathbb{C}$.

Notation. Soit f une application d'un ensemble E dans $\mathbb{C}$.
On note $\mathrm{Re}(f) : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Re}(f(x)) \end{array}$ et $\mathrm{Im}(f) : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Im}(f(x)) \end{array}$. On les appelle les parties réelle et imaginaire de l'application f.

Propriété. Avec ces notations, f est bornée sur E si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont bornées.

2.2 Dérivation

Définition. Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une application. On verra plus loin que f est continue (resp : dérivable, k fois dérivable, de classe C^k où $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$) si et seulement si les applications $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues (resp : dérivables, k fois dérivables, de classe C^k où $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$). De plus, lorsque f est k fois dérivable, où $k \in \mathbb{N}^*$, on verra que,
pour tout $t \in I$, $f^{(k)}(t) = [\mathrm{Re}(f)]^{(k)}(t) + i[\mathrm{Im}(f)]^{(k)}(t)$.

Propriété. Les formules suivantes, déjà admises pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont aussi valables pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, ainsi que nous le démontrerons plus tard.
Les fonctions qui interviennent dans ces formules sont toutes supposées dérivables sur un intervalle. On se limite éventuellement à un sous-intervalle pour s'assurer que les quantités qui interviennent dans les formules sont bien définies. :

— Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.
— $(fg)' = f'g + fg'$.
— $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.
— $\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - g'f}{g^2}$.
— Si $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, alors $(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$.
— Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(f^n)' = nf' \times f^{n-1}$.

Formule de Leibniz : Soient f et g deux applications d'un intervalle I dans $\mathbb{C}$. Si f et g sont n fois dérivables sur I, alors fg est n fois dérivable sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

2.3 Intégration

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue. Pour tout $a, b \in I$, on pose

$$\int_a^b f(t)\ dt = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\ dt + i \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\ dt.$$

Remarque. Ainsi, $\mathrm{Re}\Big(\int_a^b f(t)\ dt\Big) = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\ dt$ et $\mathrm{Im}\Big(\int_a^b f(t)\ dt\Big) = \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\ dt$.

On admettra pour le moment que les intégrales vérifient les propriétés suivantes :

Propriété. Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.
Soit f et g deux applications continues de I dans $\mathbb{C}$. Soit $a, b \in I$.

- Linéarité : Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.
- Relation de Chasles : Pour tout $c \in I$, $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f + \int_c^b f$.
- Inégalité triangulaire : $\left|\int_a^b f(t)\ dt\right| \leq \int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} |f(t)|\ dt$.

Définition. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{C}$ que l'on suppose continue.
On dit que F est une primitive de f sur I si et seulement si F est dérivable et $F' = f$.
Si F_0 est une primitive de f, alors les autres primitives de f sont exactement les applications $F_0 + k$, où k est une fonction constante.

Théorème : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{C}$ que l'on suppose continue. Soit $x_0 \in I$. Alors $x \longmapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en x_0.

Corollaire. Soit f une application continue d'un intervalle I dans $\mathbb{C}$.
Si F est une primitive de f, alors pour tout $a, b \in I$, $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \triangleq [F(t)]_a^b$.

Corollaire. Si f est C^1 de I dans $\mathbb{C}$, pour tout $a, b \in I$, $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$.

Notation. L'écriture "$\int f(t)\ dt = F(t) + k, t \in I$" signifiera que f est continue de I dans $\mathbb{C}$ et que l'ensemble des primitives de f est $\{F + k / k \in \mathbb{C}\}$.

Changement de variable :
si $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue et si $\varphi : J \longrightarrow I$ est de classe C^1, alors $\forall(\alpha, \beta) \in J^2$
$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$. Cette égalité correspond au changement de variable $x = \varphi(t)$.

Intégration par parties : soit $u : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et $v : I \longrightarrow \mathbb{C}$ deux applications de classe C^1 sur I.
Pour tout $(a, b) \in I^2$, $\int_a^b u(t)v'(t)\ dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\ dt$.
On a aussi : $\int u(t)v'(t)\ dt = u(t)v(t) - \int u'(t)v(t)\ dt,\ \ t \in I$.

Théorème. Formule de Taylor avec reste intégral.
Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une application de classe C^{k+1} sur $[a, b]$. Alors

$$f(b) = f(a) + \sum_{h=1}^{k} \frac{(b-a)^h}{h!} f^{(h)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)dt.$$

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$.

Il faut savoir le démontrer.

3 L'exponentielle complexe (début)

Définition. Une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de complexes converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists N \in \mathbb{N},\ \ \forall n \geq N,\ \ |z_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On dit que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Définition. La série de complexes $\sum z_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente. On note alors $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} z_k$.

Propriété. Si $\sum z_n$ est une série convergente de complexes, alors $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
La réciproque est fausse : on peut avoir $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors que la série $\sum z_n$ diverge.
Il faut savoir le démontrer.

Théorème. Si $\sum |z_n|$ converge alors $\sum z_n$ est une série convergente. On dit alors que la série $\sum z_n$ est absolument convergente.

Définition. Pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente. Ceci permet de prolonger l'exponentielle réelle sur $\mathbb{C}$, en convenant que $\forall z \in \mathbb{C},\ \ e^z = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$.

Propriété. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes qui converge vers $\ell \in \mathbb{C}$. Alors $\overline{z_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \overline{\ell}$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{(e^z)} = e^{\overline{z}}$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Pour tout $u, v \in \mathbb{C}$, $e^u e^v = e^{u+v}$.
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$ et $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.

Propriété. $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$.
Il faut savoir le démontrer.

Théorème. $e^z \in \mathbb{U} \iff z \in i\mathbb{R}$.

Formules d'Euler :

$$\boxed{\cos\theta \triangleq \mathrm{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta \triangleq \mathrm{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}.$$

De plus,

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}.$$

Propriété. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}$ et $\sin\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. sin est une fonction impaire et cos est une fonction paire.
cos et sin sont de classe C^∞ et $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$.
Il faut savoir le démontrer.
Formule circulaire : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Formule d'addition : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Définition. On appelle série alternée toute série réelle de la forme $\sum(-1)^n\alpha_n$ ou $\sum(-1)^{n+1}\alpha_n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \in \mathbb{R}_+$.

Théorème spécial des séries alternées (TSSA).
Soit $\sum a_n$ une série alternée. On dit qu'elle est spéciale alternée lorsque la suite $(|a_n|)$ est décroissante et tend vers 0. Dans ce cas, $\sum a_n$ est convergente.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n}^{+\infty} a_k$ est du signe de son premier terme a_n et $|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k| \leq |a_{n+1}|$.

Propriété. L'application cos est strictement décroissante sur $[0,2]$ et elle possède un unique zéro sur $[0,2]$, que l'on notera $\frac{\pi}{2}$: c'est la **définition** de π.

Propriété. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$ et $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x)$.
On dispose des tableaux de variations suivants :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1
$\sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

2π est la plus petite période de cos, ainsi que de sin.

Propriété. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a^2+b^2 = 1$.
Il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$.

Corollaire. Soit $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que $\cos\theta = \cos\varphi$ et $\sin\theta = \sin\varphi$. Alors $\theta \equiv \varphi\ [2\pi]$.

Paramétrage du cercle unité : l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array}$ est périodique et sa plus petite période est 2π. Sa restriction à $[0, 2\pi[$ est bijective.

Définition. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $M : \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & M(t) \end{array}$ une application de classe C^1. Notons $C = \{M(t)/t \in [a,b]\}$: C est une courbe dans le plan complexe, dont l'application M est un paramétrage. Par définition, la longueur de C est égale à $\int_a^b |M'(t)|dt$.

Propriété. Soit $\theta \in [0, 2\pi]$. Notons $C_\theta = \{e^{it}/t \in [0,\theta]\}$: C_θ est une portion du cercle unité. Sa longueur est égale à θ.

4 Arguments d'un complexe

Propriété. Si $z = a+ib$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $e^z = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$.

Définition. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $\rho, \theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = \rho e^{i\theta}$. On dit alors que (ρ, θ) est un couple de coordonnées polaires du point $M(z)$ (l'image du complexe z).

On peut imposer $\rho \geq 0$. Dans ce cas, $\rho = |z|$. On dit alors que θ est un argument de z et l'on note $\theta = \arg(z)$.
Lorsque $z \neq 0$, on peut imposer $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. Dans ce cas, le couple (ρ, θ) est unique.

Définition. Un complexe z possède ainsi deux écritures usuelles :
- l'écriture algébrique : $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, ou bien $z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$;
- l'écriture trigonométrique (ou exponentielle, ou polaire) : $z = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Les relations suivantes font le lien entre ces deux écritures :
lorsque $z = a + ib = \rho e^{i\theta}$ avec $a, b, \rho, \theta \in \mathbb{R}$ et $\rho \geq 0$,
- $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- lorsque $z \neq 0$, $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$;
- Lorsque $a \neq 0$, $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$;
- Lorsque $z \neq 0$ et $\theta \in [0, \pi]$, $\theta = \arccos\Big(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big)$;
- Lorsque $z \neq 0$ et $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\theta = \arcsin\Big(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big)$;
- Lorsque $a \neq 0$ et $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\theta = \arctan\Big(\dfrac{b}{a}\Big)$;
- Lorsque $z \neq 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$, $\theta = 2\arctan\Big(\dfrac{b}{a + \sqrt{a^2+b^2}}\Big)$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriétés de l'argument : Si z, z_1, z_2 sont trois complexes non nuls, alors
- $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi]$;
- $\arg\Big(\dfrac{1}{z}\Big) \equiv \arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$;
- $\arg\Big(\dfrac{z_1}{z_2}\Big) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)\ [2\pi]$;
- pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\arg(z^n) \equiv n \arg(z)\ [2\pi]$;
- $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi]$;
- $(\arg(z_1) \equiv \arg(z_2)\ [2\pi]) \Longleftrightarrow \dfrac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}_+^*$.

Remarque. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\arg(e^z) \equiv \mathrm{Im}(z)\ [2\pi]$.

Interprétation géométrique du produit dans $\mathbb{C}$: Fixons $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$, où $\rho_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$.
La multiplication par z_0, c'est-à-dire l'application $z \longmapsto zz_0$ est la composée de $h\ :\ z \longmapsto \rho_0 z$ avec $r\ :\ z \longmapsto ze^{i\theta_0}$. h s'interprète géométriquement comme une homothétie de centre O et de rapport ρ_0 et r comme la rotation de centre O et d'angle θ_0.

Propriété. Soit $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $e^z = \rho e^{i\theta} \Longleftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z},\ \ z = \ln(\rho) + i\theta + 2ik\pi)$.
En particulier, l'application exponentielle $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & e^z \end{array}$ est surjective et $2i\pi$ périodique.

Il faut savoir le démontrer.

Formule de Moivre : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, $\boxed{e^{int} = (\cos t + i \sin t)^n}$.

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\dfrac{d}{dt}(e^{zt}) = ze^{zt}$.

Définition. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $x^\alpha \stackrel{\Delta}{=} e^{\alpha \ln x}$.

Propriété. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $\dfrac{d}{dt}(t^\alpha) = \alpha t^{\alpha - 1}$.

Technique de l'angle moyen : $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{-\alpha+\beta}{2}}) = 2e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\cos(\dfrac{\alpha-\beta}{2})$
et $e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} - e^{i\frac{-\alpha+\beta}{2}}) = 2ie^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\sin(\dfrac{\alpha-\beta}{2})$.

5 Linéarisation

Définition. Linéariser une expression trigonométrique, c'est transformer un produit de quantités en sin et cos en une somme de sin ou cos. Une méthode de linéarisation consiste à suivre les étapes suivantes :

— On remplace chaque occurrence en cos ou sin par son expression issue des formules d'Euler ;

— On développe les différents produits qui apparaissent alors ;

— On regroupe les différents termes à l'aide des formules d'Euler pour faire apparaître une somme de cos et de sin.