Résumé de cours :
Semaine 20, du 14 février au 18.

Topologie dans un espace métrique (suite)

Pour tout ce chapitre, on fixe un espace métrique (E, d) non vide.

1 Adhérence et intérieur (suite)

Définition. Soit A une partie de E. Soit $x \in A$.
On dit que x est isolé dans A si et seulement si il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V \cap A = \{x\}$, c'est-à-dire si et seulement si $x \notin \overline{A \setminus \{x\}}$.

Définition. Soit A une partie de E. Soit $x \in E$.
On dit que x est un point d'accumulation de A si et seulement si, pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, $(V \cap A) \setminus \{x\} \neq \emptyset$, c'est-à-dire si et seulement si $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$.

Propriété. Les points adhérents de A sont les points de E situés à une distance nulle de A.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. Une partie de E est dense dans E si et seulement si elle rencontre toutes les boules ouvertes de E.

Propriété. Une partie A de E est dense dans E si et seulement si $\overline{A} = E$.

Définition. Soit $A \subset E$. La frontière de A est $Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A} = \overline{A} \cap (E \setminus \mathring{A})$.

Propriété. Soit A une partie de E. $[A \setminus Fr(A)] = \mathring{A} \subset A \subset \overline{A} = [A \cup Fr(A)]$.

Propriété. A ouvert $\iff A \cap Fr(A) = \emptyset$. A fermée $\iff Fr(A) \subset A$.

2 Caractérisation par les suites

Propriété. $a \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a.
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. A est dense dans E si et seulement si pour tout $l \in E$, il existe $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$.

Propriété. A est fermé si et seulement si toute suite convergente d'éléments de A a pour limite un élément de A.

Propriété. Soit G un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie ou infinie.
Tout sous-espace vectoriel de G de dimension finie est fermé.

3 Topologie induite sur une partie

Propriété. Les boules, ouverts, fermés et voisinages pour la topologie induite sur A sont respectivement les traces sur A des boules centrées dans A, des ouverts, des fermés et des voisinages pour la topologie de E.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si B est une partie de A, l'adhérence de B pour la topologie induite sur A est la trace sur A de l'adhérence de B pour la topologie globale sur E.

Propriété. Soit B une partie de A. B est dense dans A si et seulement si $A \subset \overline{B}$.

4 Les compacts

Définition. Une partie A de E est compacte si et seulement si toute suite d'éléments de A admet au moins une valeur d'adhérence dans A.

Propriété. Tout compact de E est fermé et borné.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit A un compact de E et $B \subset A$: B est compact si et seulement s'il est fermé.

Théorème. Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées.

Théorème. Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $E_1, \ldots, E_p$ p $\mathbb{K}$-espaces vectoriels norméset $A_1, \ldots, A_p$ p compacts respectivement dans $E_1, \ldots, E_p$. Alors $A_1 \times \cdots \times A_p$ est un compact de $E_1 \times \cdots \times E_p$.
Il faut savoir le démontrer.

Théorème (hors programme) : Caractérisation de la compacité par la propriété de Borel Lebesgue. Soit A une partie de E. Les assertions suivantes sont équivalentes.
i) A est compact.
ii) Pour tout ensemble I et pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ telle que $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, il existe une partie J finie de I telle que $A \subset \bigcup_{i\in J} U_i$: de tout recouvrement de A par des ouverts, on peut en extraire un recouvrement fini.
iii) Pour tout ensemble I et pour toute famille de fermés $(F_i)_{i\in I}$ telle que $A \cap \bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, il existe une partie J finie de I telle que $A \cap \bigcap_{i\in J} F_i = \emptyset$.

Propriété. Si $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, alors l'ensemble $\{x_n / n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$ est un compact de E.
Il faut savoir le démontrer.

Limite en un point

On fixe deux espaces métriques E et F, ainsi qu'une fonction $f : E \longrightarrow F$, dont le domaine de définition sera noté $\mathcal{D}_f$.

Notation. On fixe une partie A de $\mathcal{D}_f$. On fixe également a, qui peut être infini. On suppose qu'il existe au moins une suite $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$. On fixe aussi l dans $F \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$.

5 Caractérisation séquentielle

Définition. $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a en appartenant à A si et seulement si $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \left(x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \Longrightarrow f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l\right)$. Dans ce cas, on note $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$.

Propriété. Lorsque E et F sont des espaces vectoriels normés, si l'on remplace l'une des normes sur E ou F par une norme équivalente, la condition $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$ est inchangée.

Propriété. **Unicité de la limite.** Si $F \neq \mathbb{R}$, on impose que $l, l' \in F \cup \{\infty\}$ et si $F = \mathbb{R}$, on impose que $l, l' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$: Si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$ et $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l'$, alors $l = l'$.

Propriété. On suppose que $F = \mathbb{C}$ et que $l \in \mathbb{C}$.
Alors $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si $(\mathrm{Re}(f)(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell)) \ \wedge \ (\mathrm{Im}(f)(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(\ell))$.

Propriété. Si $A \subset B \subset \mathcal{D}_f$ et si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in B}}{\longrightarrow} l$, alors $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$.

6 Caractérisation par "ε"

Propriété. Si $a \in E$ et $l \in F$,
$f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in A \ (d(x,a) \le \alpha \Longrightarrow d(f(x),l) \le \varepsilon)$.
Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Dans (1), on peut prendre les deux dernières inégalités indifféremment strictes ou larges.

Propriété. On peut adapter cette caractérisation dans le cas où a et l sont éventuellement infinis. On obtient par exemple :

- Si $l \in F$ et $E = \mathbb{R}$,
  $f(x) \underset{\substack{x\to+\infty\\ x\in A}}{\longrightarrow} l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists M \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in A \ (x \ge M \Longrightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon)$.
- Si $a \in E$ et $F = \mathbb{R}$,
  $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} +\infty \Longleftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}_+^* \ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in A \ (\|x - a\| \le \alpha \Longrightarrow f(x) \ge M)$.
- Si $a = \infty$ et $l \in F$, en choisissant $e_0 \in E$,
  $f(x) \underset{\substack{x\to\infty\\ x\in A}}{\longrightarrow} l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists M \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in A \ (d(x,e_0) \ge M \Longrightarrow d(f(x),l) \le \varepsilon)$.
- Si $a = \infty$ et $l = \infty$, en fixant $e_0 \in E$ et $f_0 \in F$, $f(x) \underset{\substack{x\to\infty\\ x\in A}}{\longrightarrow} \infty$ si et seulement si
  $\forall M \in \mathbb{R}_+^* \ \exists N \in \mathbb{R}_+^* \ \forall x \in A \ (d(x,e_0) \ge N \Longrightarrow d(f(x),f_0) \ge M)$.

Remarque. Une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ peut être vue comme la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & E \\ n & \longmapsto & x_n \end{array}$, définie sur $\mathbb{N}$ qui est une partie non majorée de $\mathbb{R}$. La notion de limite d'une suite dans un espace métrique devient donc un cas particulier de la notion de limite d'une fonction en $+\infty$.

7 Caractérisation par voisinages

Définition. Dans $\mathbb{R}$, on appelle voisinage de $+\infty$ toute partie contenant un intervalle $]c,+\infty[$ où $c \in \mathbb{R}$ et voisinage de $-\infty$ toute partie contenant un intervalle $]-\infty, c[$.
Ainsi $\mathcal{V}(+\infty) = \{V \subset \mathbb{R} / \exists c \in \mathbb{R}\ \ ]c,+\infty[\subset V\}$ et $\mathcal{V}(-\infty) = \{V \subset \mathbb{R} / \exists c \in \mathbb{R}\ \ ]-\infty, c[\subset V\}$.

Définition. On suppose que E n'est pas borné. Soit $e \in E$. On appelle voisinage dans E de ∞ toute partie contenant le complémentaire d'une boule fermée centrée en e.
Ainsi $\mathcal{V}(\infty) = \{V \subset E / \exists R > 0\ \ E \setminus B_f(e,R) \subset V\}$. On vérfie que $\mathcal{V}(\infty)$ ne dépend pas de e.

Propriété. Avec les définitions précédentes de voisinages, on a encore :
Une intersection de deux voisinages de a est un voisinage a.
Toute partie contenant un voisinage de a est un voisinage de a.

Remarque.
Avec ces nouvelles définitions, les hypothèses portant sur a et A énoncées au début du présent paragraphe se résument ainsi : $\boxed{\text{tout voisinage } V \text{ de } a \text{ rencontre } A}$.

Définition. On dit que $f|_A$ vérifie une certaine propriété au voisinage de a si et seulement s'il existe un voisinage V de a tel que $f|_{V \cap A}$ vérifie cette propriété.
Lorsqu'on énonce une propriété portant sur f au voisinage de $a \in E$, on dit que c'est une propriété locale (de f au voisinage de a). Lorsqu'on énonce une propriété portant sur f au voisinage de ∞ ou de $\pm\infty$, on dit que c'est une propriété asymptotique.

Propriété. $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l \iff \forall V \in \mathcal{V}(l)\ \ \exists U \in \mathcal{V}(a)\ \ f(U \cap A) \subset V$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. **Caractère local (ou asymptotique) de la notion de limite**.
Pour tout $U_0 \in \mathcal{V}(a)$, $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l \iff f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A \cap U_0}}{\longrightarrow} l$.
Ainsi la valeur de l'éventuelle limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a pour x appartenant à A ne dépend pas du comportement global de f sur A mais seulement du comportement de $f|_A$ au voisinage de a.
En particulier, si l'on modifie les valeurs de $f(x)$ lorsque $x \notin U_0$, on ne modifie pas la valeur logique de la proposition $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$.

Définition. Soit $a \in E$ tel que $a \in \overline{\mathcal{D}_f \setminus \{a\}}$. Ainsi, a est un point d'accumulation de $\mathcal{D}_f$. S'il existe $l \in F$ tel que $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}}}{\longrightarrow} l$, on écrit que $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \neq a}}{\longrightarrow} l$ ou même $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$.

Propriété. Soient A et B deux parties de $\mathcal{D}_f$ qui rencontrent tout voisinage de a.
Alors, $(f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$ et $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in B}}{\longrightarrow} l) \iff f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A \cup B}}{\longrightarrow} l$.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. Supposons que $E = \mathbb{R}$ et que $a \in \mathbb{R}$.

- Si $a \in \overline{\mathcal{D}_f \cap]a,+\infty[}$, et si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in \mathcal{D}_f \cap]a,+\infty[}}{\longrightarrow} l$, on note $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x > a}}{\longrightarrow} l$ ou $f(x) \underset{x \to a^+}{\longrightarrow} l$ et $l = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ ou $l = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$. Il s'agit de la notion de limite à droite du réel a.
- De même, si $a \in \overline{\mathcal{D}_f \cap]-\infty, a[}$, et si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in \mathcal{D}_f \cap]-\infty,a[}}{\longrightarrow} l$, on note $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x < a}}{\longrightarrow} l$ ou $f(x) \underset{x \to a^-}{\longrightarrow} l$ et $l = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ ou $l = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$. Il s'agit de la notion de limite à gauche du réel a.

Propriété. On suppose que $E = \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathcal{D}_f \cap]-\infty, a[} \cap \overline{\mathcal{D}_f \cap]a,+\infty[}$.
Alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ si et seulement si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x > a}}{\longrightarrow} l$ et $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x < a}}{\longrightarrow} l$.

Continuité en un point

8 Définitions

Définition. Soit $a \in \mathcal{D}_f$. f est continue en a si et seulement si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in \mathcal{D}_f}}{\longrightarrow} f(a)$.

Propriété. On suppose que $F = \mathbb{C}$. Soit $a \in \mathcal{D}_f$.
f est continue en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues en a.

Propriété. f est continue en a si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :
i) Pour toute suite (x_n) de points de $\mathcal{D}_f$ telle que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$, $f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(a)$.
ii) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \alpha > 0 \;\; \forall x \in \mathcal{D}_f \;\; (d(x, a) \leq \alpha \Longrightarrow d(f(x), f(a)) \leq \varepsilon)$.
iii) $\forall V \in \mathcal{V}(f(a)) \;\; \exists U \in \mathcal{V}(a) \;\; f(U \cap \mathcal{D}_f) \subset V$.

Propriété. Soit $a \in \mathcal{D}_f$.
Si $a \notin \overline{\mathcal{D}_f \setminus \{a\}}$ (on dit que a est un point isolé de $\mathcal{D}_f$), f est toujours continue en a.
Si $a \in \overline{\mathcal{D}_f \setminus \{a\}}$, f est continue en a si et seulement si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}}}{\longrightarrow} f(a)$.

Remarque. Soient $a \in \mathcal{D}_f$ et $U_0 \in \mathcal{V}(a)$. f est continue en a si et seulement si $f|_{\mathcal{D}_f \cap U_0}$ est continue en a. Ainsi la notion de continuité (au point a) est une notion locale.

Définition. On dit que f est continue si et seulement si elle est continue en chaque point de son domaine de définition.

Propriété. Les applications lipschitziennes sont continues.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soient A une partie de $\mathcal{D}_f$ et $a \in A$. Si f est continue en a, alors $f|_A$ est aussi continue en a.

Corollaire. Soit A une partie incluse dans $\mathcal{D}_f$. Si f est continue, alors $f|_A$ est continue.

Définition. On suppose que $E = \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathcal{D}_f$. On dit que f est continue à droite en a si et seulement si $f|_{[a, +\infty[\cap \mathcal{D}_f}$ est continue en a. On définit de même la notion de continuité à gauche.

Propriété. On suppose que $E = \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathcal{D}_f$.
f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a.

Définition. On suppose que f est continue. Soit $D \supset \mathcal{D}_f$. On dit que f se prolonge par continuité sur D si et seulement s'il existe une application $\tilde{f} : D \longrightarrow F$ continue et telle que $\tilde{f}|_{\mathcal{D}_f} = f$.

Définition. Soit $a \in \overline{\mathcal{D}_f} \setminus \mathcal{D}_f$. f admet un prolongement par continuité en a si et seulement si f admet une limite finie en a. Dans ce cas, l'unique prolongement par continuité $\tilde{f}$ de f est donné par $\tilde{f}(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$.

Propriété. Soient $A \subset E$ et f et g deux applications continues de A dans F.
Si f et g coïncident sur une partie dense dans A, alors $f = g$.
Il faut savoir le démontrer.

9 Théorèmes de composition

Notation. Dans ce paragraphe, on fixe un troisième espace métrique noté G et une seconde fonction $g\ : F \longrightarrow G$, définie sur $\mathcal{D}_g$.

Propriété. Soit B une partie de $\mathcal{D}_g$ telle que $f(A) \subset B$. Soit $m \in G \cup \{\infty, +\infty, -\infty\}$.
Pour que $g(f(x)) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} m$, il suffit que $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$ (auquel cas B rencontre tout voisinage de l) et que $g(y) \underset{\substack{y\to l\\ y\in B}}{\longrightarrow} m$.

Corollaire. On suppose que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$ et on fixe $a \in \mathcal{D}_f$.
Si f est continue en a et g en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Corollaire. On suppose que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_g$.
Si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est continue (et définie sur $\mathcal{D}_f$).

Corollaire. On suppose que $f(A) \subset \mathcal{D}_g$. Si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} b$ et si g est continue en b, alors $g(f(x)) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} g(b)$.

Propriété. Limite en un point d'une application à valeurs dans un produit.
Supposons que $F = F_1 \times \cdots \times F_q$, où F_1, ..., F_q sont des espaces vectoriels normés et notons $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) = (f_1(x), \ldots, f_q(x)) \end{array}$.
Soient A une partie de $\mathcal{D}_f$, $a \in \overline{A}$ et $l = (l_1, \ldots, l_q) \in F$. Alors,
$f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$ si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, $f_i(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l_i$.

Propriété. Continuité en un point d'une application à valeurs dans un produit.
Supposons que $F = F_1 \times \cdots \times F_q$, où F_1, ..., F_q sont des espaces vectoriels normés et notons $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) = (f_1(x), \ldots, f_q(x)) \end{array}$. Soit $a \in \mathcal{D}_f$. Alors,
f est continue en a si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, f_i est continue en a.

Propriété. Limite d'une application à valeurs dans un espace de dimension finie. Supposons que F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont une base est $(e_1, \ldots, e_q)$ et notons $f(x) = \sum_{i=1}^{q} f_i(x)e_i$. Soient A une partie de $\mathcal{D}_f$, $a \in \overline{A}$ et $l = \sum_{i=1}^{q} l_i e_i \in F$. Alors,
$f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$ si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, $f_i(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l_i$.

Propriété. Continuité en un point d'une application à valeurs dans un espace de dimension finie. Supposons que F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie dont une base est $(e_1, \ldots, e_q)$ et notons $f(x) = \sum_{i=1}^{q} f_i(x)e_i$. Si $a \in \mathcal{D}_f$, f est continue en a si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, f_i est continue en a.

10 Opérations algébriques sur les limites

10.1 Somme de deux applications à valeurs vectorielles

Notation.
Dans ce paragraphe, on fixe une seconde fonction $g\ : E \longrightarrow F$, définie sur $\mathcal{D}_g$.
On suppose que $A \subset \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.

Propriété. Si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$ et $g(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l'$, alors $(f+g)(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l + l'$.

Remarque. C'est valable dans le cadre des limites infinies, à condition d'éviter la forme indéterminée $\infty - \infty$, c'est-à-dire lorsque l et l' sont les deux éléments distincts de $\{+\infty, -\infty\}$.

Propriété. Soit $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$. Si f et g sont continues en a, $f+g$ est continue en a.

Corollaire. La somme de deux applications continues est continue.

10.2 Produit d'une application scalaire par une application vectorielle

Notation. Dans ce paragraphe, on suppose que f est une application de E dans $\mathbb{K}$ et que g est une application de E dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé F. Ainsi f est une "application scalaire" et g est une "application vectorielle". On suppose que $A \subset \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.

Propriété. Si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$ et $g(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l'$, alors $(fg)(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} ll'$.

Remarque. C'est valable dans le cadre des limites infinies, à condition d'éviter la forme indéterminée $0 \times \infty$.

Propriété. Soit $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$. Si f et g sont continues en a, fg est aussi continue en a.

Corollaire. Le produit d'une application scalaire continue par une application vectorielle continue est continue.

Propriété. Soit A une partie de E. L'ensemble $\mathcal{C}(A, F)$ des applications continues de A dans F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $\mathcal{C}(A, \mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Propriété. On suppose que f est une application de E dans $\mathbb{K}^*$.
Si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l \in \mathbb{K}$ alors $(\frac{1}{f})(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} \frac{1}{l}$.

Remarque. Cette propriété est valable avec des limites infinies dans les cas suivants :
- Si $l = \infty$, en convenant que $\frac{1}{\infty} = 0$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $l = 0^+$ (c'est-à-dire que $l = 0$ et que f est strictement positive au voisinage de a), en convenant que $\frac{1}{0^+} = +\infty$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $l = 0^-$, en convenant que $\frac{1}{0^-} = -\infty$.

11 Cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose ici que $F = \mathbb{R}$.

Propriété : passage à la limite sur une inégalité *large* :
Si $\forall x \in A\ \ f(x) \le g(x)$, $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$ et $g(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l'$, alors $l \le l'$.

Principe du tunnel (pour des inégalités strictes) :
Si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ et $\alpha < \ell < \beta$, alors, au voisinage de a, $\alpha < f(x) < \beta$.

Corollaire. Si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$ alors $f|_A$ est bornée au voisinage de a.

Propriété. Principe des gendarmes.
Si $\forall x \in A\ \ h_1(x) \le h_2(x) \le h_3(x)$, $h_1(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$ et $h_3(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$, alors $h_2(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} l$.

Il faut savoir le démontrer.

Remarque. On peut adapter le principe des gendarmes au cas où $l = \pm\infty$.

12 Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème de la limite monotone : Soit $(m, M) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ avec $m < M$ et $f :]m, M[\longrightarrow \mathbb{R}$.
Si f est croissante, alors $f(x) \underset{\substack{x \to M \\ x \in I}}{\longrightarrow} \sup\limits_{y \in I} f(y) \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f(x) \underset{\substack{x \to m \\ x \in I}}{\longrightarrow} \inf\limits_{y \in I} f(y) \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si f est décroissante, alors $f(x) \underset{\substack{x \to M \\ x \in I}}{\longrightarrow} \inf\limits_{y \in I} f(y) \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f(x) \underset{\substack{x \to m \\ x \in I}}{\longrightarrow} \sup\limits_{y \in I} f(y) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $(m, M) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ avec $m < M$ et $f :]m, M[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application monotone. Pour tout $a \in I$, f possède en a une limite à droite, notée $f(a^+)$, et une limite à gauche, notée $f(a^-)$. De plus, si f est croissante, $f(a^-) \leq f(a) \leq f(a^+)$, et si f est décroissante, $f(a^-) \geq f(a) \geq f(a^+)$.
f est discontinue en a si et seulement si $f(a^+) \neq f(a^-)$ et dans ce cas $|f(a^+) - f(a^-)|$ s'appelle le saut de discontinuité de f en a.
Il faut savoir le démontrer.