Gutsche
Patrick

DM16

Un ensemble convenable.
Les questions abordées sont bien traitées.

Partie I : applications bilinéaires

1) Soit $a,b,x,y \in \mathbb{R}$. Notons $\varphi : \begin{array}{l}\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longrightarrow xy\end{array}$.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\varphi(\alpha a + b, y) = (\alpha a + b)y = \alpha a y + by = \alpha \varphi(a,y) + \varphi(b,y)$

et $\varphi(a, \alpha x + y) = a(\alpha x + y) = \alpha a x + ay = \alpha \varphi(a,x) + \varphi(a,y)$

Donc φ est bien une application bilinéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre. Si on note $\varphi : \begin{array}{l}A^2 \longrightarrow A \\ (x,y) \longrightarrow xy\end{array}$, le calcul précédent est valable donc $\begin{array}{l}A^2 \longrightarrow A \\ (x,y) \longrightarrow xy\end{array}$ est bien une application bilinéaire

2) Soit $f,g \in E$, $u,v \in F$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$

$$b(\alpha f + g, u) = \int_0^1 (\alpha f + g)(t)\,(u(t) + 2u'(t))\,dt$$
$$= \alpha \int_0^1 f(t)(u(t) + 2u'(t))\,dt + \int_0^1 g(t)(u(t) + 2u'(t))\,dt$$
$$= \alpha\, b(f,u) + b(g,u)$$

$$b(f, \alpha u + v) = \int_0^1 f(t)\,((\alpha u + v)(t) + 2(\alpha u + v)'(t))\,dt$$
$$= \int_0^1 f(t)(\alpha u(t) + v(t) + 2\alpha u'(t) + 2v'(t))\,dt$$
$$= \alpha \int_0^1 f(t)(u(t) + 2u'(t))\,dt + \int_0^1 f(t)(v(t) + 2v'(t))\,dt$$
$$= \alpha\, b(f,u) + b(f,v)$$

donc b est bilinéaire

3) $\mathcal{F}(E \times F, G)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrons que $\mathcal{B}(E,F;G)$ est un sous-espace vectoriel.

- On a bien $0_{\mathcal{F}} \in \mathcal{B}(E,F;G)$
- Soit $u,v \in \mathcal{B}(E,F;G)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

Soit $a,b \in E$, $x,y \in F$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$(\lambda u+v)(\alpha a+b,x) = \lambda u(\alpha a+b,x) + v(\alpha a+b,x)$

$= \lambda(\alpha u(a,x)+u(b,x)) + \alpha v(a,x)+v(b,x)$

$= \alpha(\lambda u+v)(a,x) + (\lambda u+v)(b,x)$

$(\lambda u+v)(a,\alpha x+y) = \lambda(\alpha u(a,x)+u(a,y)) + \alpha v(a,x)+v(a,y)$

$= \alpha(\lambda u+v)(a,x) + (\lambda u+v)(a,y)$

Donc $\lambda u+v \in \mathcal{B}(E,F;G)$

Donc $\mathcal{B}(E,F;G)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E\times F,G)$ donc c'est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel

Partie II. Unicité du produit tensoriel

5) Soit G un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $\ell \in \mathcal{L}(P,G)$. $u : E\times F \to P$

donc $\ell \circ u : E\times F \to G$

Montrons que $\ell\circ u \in \mathcal{B}(G,F;G)$

Soit $x,y \in E$, $z,t \in F$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\ell\circ u(\alpha x+y,z) \underset{\nearrow}{=} \ell(\alpha u(x,z)+u(y,z)) \underset{\nearrow}{=} \alpha\ell(u(x,z)) + \ell(u(y,z))$

car u bilinéaire et ℓ est linéaire

$\ell\circ u(x,\alpha z+t) = \ell(\alpha u(x,z)+u(x,t)) = \alpha\ell(u(x,z)) + \ell(u(x,t))$

Donc $\ell\circ u \in \mathcal{B}(E,F;G)$.

Notons $\varphi : \begin{array}{l} \mathcal{L}(P,G) \to \mathcal{B}(E,F;G) \\ \ell \mapsto \ell\circ u \end{array}$. Montrons que φ est une application linéaire

Soit $f,g \in \mathcal{L}(P,G)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $x,y \in E\times F$

$\varphi(\alpha f+g)((x,y)) = (\alpha f+g)(u(x,y)) = \alpha f(u(x,y)) + g(u(x,y))$

$= \alpha\varphi(f)(x,y) + \varphi(g)(x,y)$

$= (\alpha\varphi(f)+\varphi(g))(x,y)$

donc φ est linéaire.

Partie III : quotient d'espaces vectoriels

7) Soit $x,y,z \in E$.

Réflexivité : $x-x=0 \in F$ car F est un sev de E.

Symétrie : Supposons $x R y$. alors $y-x \in F$ donc $-(x-y) \in F$ car F est un sev donc $y R x$

Transitivité : Supposons $x R y$ et $y R z$. $x-y \in F$ et $y-z \in F$ or F sev donc $x-y+y-z = x-z \in F$. donc $x R z$.

Donc R est une relation d'equivalence.

8) Montrons que l'addition de E/F est bien définie, donc $\overline{x+y}$ ne dépend que de $\bar{x}$ et $\bar{y}$, donc si $\overline{x'} = \bar{x}$ et $\overline{y'} = \bar{y}$ alors $\overline{x+y} = \overline{x'+y'}$. Si $\bar{x} = \bar{x'}$ et $\bar{y} = \bar{y'}$, alors $x-x' \in F$ et $y-y' \in F$ donc $(x+y)-(x'+y') = (x-x')+(y-y') \in F$ donc $\overline{x+y} = \overline{x'+y'}$

Il faut aussi que $\overline{\lambda x}$ dépend seulement de $\bar{x}$. supposons $\bar{x} = \overline{x'}$ on a donc $x-x' \in F$, or F est un sev donc $\alpha(x-x') \in F$ donc $\overline{\alpha x} = \overline{\alpha x'}$

* Montrons que E/F est un $\mathbb{K}$-ev :

→ Soit $x, y, z \in E$. $\bar{x}+(\bar{y}+\bar{z}) = \overline{x+(y+z)} = (\bar{x}+\bar{y})+\bar{z}$ donc associativité.

→ $\bar{x}+\bar{y} = \overline{x+y} = \overline{y+x} = \bar{y}+\bar{x}$ donc commutativité.

→ $\forall x \in E$, $\bar{0}+\bar{x} = \overline{0+x} = \bar{x} = \bar{x}+\bar{0} = \bar{x}$ donc $\bar{0}$ est l'élément neutre.

→ $\forall x \in E$, $\bar{x}+\overline{-x} = \bar{0}$ donc $\overline{-x} = -\bar{x}$

Donc $(E/F, +)$ est un groupe commutatif. Soit $x, y \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

→ $\alpha(\bar{x}+\bar{y}) = \alpha(\overline{x+y}) = \overline{\alpha x + \alpha y} = \alpha\bar{x} + \alpha\bar{y}$

→ $(\alpha+\beta)\bar{x} = \overline{(\alpha+\beta)x} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{x}$

→ $(\alpha\beta)\bar{x} = \overline{(\alpha\beta)x} = \alpha\overline{(\beta x)} = \alpha(\beta\bar{x})$

→ $1_{\mathbb{K}}\bar{x} = \overline{1_{\mathbb{K}} x} = \bar{x}$

Donc $(E/F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev.

B

9) Soit $\varphi : \begin{array}{l} G \to E/F \\ x \mapsto \bar{x} \end{array}$. φ linéaire d'après 8) donc pour tout $x, y \in G$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $\varphi(\alpha x+y) = \alpha\varphi(x)+\varphi(y)$ donc φ est linéaire.

Soit $x \in \ker\varphi$. On a alors $\bar{x} = 0 = \bar{0}$ donc $x \in F$. Donc $x \in F \cap G = \{0\}$ donc $\ker\varphi = \{0\}$ donc f injective.

Soit $z \in E/F$. Il existe $x \in E$ tq $z = \bar{x}$. Or $E = F+G$, donc il existe $y \in F$ et $\varepsilon \in G$ tq $x = y+\varepsilon$. Donc $z = \bar{y}+\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}$ car $y \in F$ donc $\bar{y} = \bar{0} = 0$. Donc $z = \varphi(\varepsilon)$ donc φ surjective.

Donc φ est un isomorphisme de G sur E/F.

Partie IV - Existence du produit tensoriel

11) $\to \{0\}^I \in \mathbb{K}^{(I)}$ donc $\mathbb{K}^{(I)} \neq \emptyset$

$\to$ Soit $(a_i),(b_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $i \in I$.

(H) $a_i = 0 \wedge b_i = 0$ alors $\lambda a_i + b_i = 0$. Par contraposée,
$\forall i \in I,\ \lambda a_i + b_i \neq 0 \Rightarrow (a_i \neq 0$ ou $b_i \neq 0)$ donc
$\{i \in I / \lambda a_i + b_i \neq 0\} \subset \{I \in I / a_i \neq 0\} \cup \{i \in I / b_i \neq 0\}$
donc $\{i \in I / \lambda a_i + b_i\} \neq 0$ est fini donc $\lambda(a_i) + (b_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$

Donc $\mathbb{K}^{(I)}$ est un sev de $\mathbb{K}^I$ donc c'est un $\mathbb{K}$-ev.

12) $\to$ Soit $(a_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i c_i = \sum_{\substack{i \in I \\ a_i \neq 0}} a_i (\delta_{i,j})_{j\in I}$

somme finie donc $\displaystyle -\Big(\sum_{\substack{i\in I\\ a_i \neq 0}} a_i \delta_{i,j}\Big)_{j \in I} = (a_j)_{j\in I} = (a_i)_{i\in I}$

$\to$ Soit $(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$. D'après la "$\to$" précédente, on a bien l'existence et unicité de $(a_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$ tq $(x_i)_{i \in I} = \displaystyle\sum_{i\in I} a_i c_i$.

Partie V - Newton $\Leftrightarrow$ Leibniz

15) pour $n = 0$, $t \in \mathbb{R}$, $\frac{d^n}{dt^n}(e^{at}) = a^0 e^{at}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, Supposons $R(n-1)$: $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(e^{at}) = a^{n-1} e^{at}$

$$\frac{d^n}{dt^n}(e^{at}) = \frac{d}{dt}\Big(\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(e^{at})\Big) = \frac{d}{dt}(a^{n-1}e^{at})$$
$$= a^{n-1} a e^{at} = a^n e^{at}$$

Donc par le principe de récurrence, $R(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\to$ D'après Leibniz: Soit $t \in \mathbb{R}$ $(fg)^{(n)}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t)$
a $fg(t) = e^{(a+b)t}$, donc
$$(a+b)^n e^{(a+b)t} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k e^{at} b^{n-k} e^{bt}.$$ On divisant
par $e^{(a+b)t}$ $(\neq 0)$, on a la formule du binôme de Newton.