DM 24 : Corrigé

Partie I

1°) a) Soit $k \in \mathbb{N}$: $c_k(x)$ représente l'aire de la partie du rectangle de base $[x+k, x+k+1]$ et de hauteur $f(k)$ située au-dessus du graphe de f (faire une figure). $C_n(x)$ représente la somme de ces aires lorsque k varie de 0 à n (à représenter sur la figure).

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. f est décroissante, donc pour tout $t \in [x+k, x+k+1]$, $f(t) \geq f(x+k+1)$. En intégrant cette inégalité, on obtient $\displaystyle\int_{x+k}^{x+k+1} f(t)\,dt \geq f(x+k+1)$, donc $c_k(x) \leq f(x+k) - f(x+k+1)$.

c) Soit $x > 0$.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(f(x+k)-f(x+k+1)) = f(x)-f(x+n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$, donc la série télescopique $\sum(f(x+k)-f(x+k+1))$ est convergente et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(f(x+k)-f(x+k+1)) = f(x)$.

Or on a également, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in [x+k, x+k+1]$, $f(t) \leq f(x+k)$, donc $\displaystyle\int_{x+k}^{x+k+1} f(t)\,dt \leq f(x+k)$, puis $c_k(x) \geq 0$.

Ainsi $\sum c_k(x)$ est une série à termes positifs vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_k(x) \leq f(x+k) - f(x+k+1)$, avec $\sum(f(x+k)-f(x+k+1))$ convergente. Alors, d'après le cours, la série $\sum c_k(x)$ est convergente.

De plus, $C(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(x) \leq \sum_{k=0}^{+\infty}(f(x+k)-f(x+k+1)) = f(x)$.

2°) a) On suppose que $f(x) = e^{-x}$ pour tout $x > 0$.

f est bien continue, décroissante et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc f vérifie les hypothèses de l'énoncé, ce qui prouve l'existence de $C(x)$ pour tout $x > 0$.

Soit $x > 0$. $c_k(x) = e^{-x-k} - [-e^{-x}]_{x+k}^{x+k+1} = e^{-x-k-1}$, donc

$C(x) = e^{-x-1}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(e^{-1})^k = e^{-x-1}\frac{1}{1-\frac{1}{e}}$, ainsi, $C(x) = \dfrac{e^{-x}}{e-1}$.

b) On suppose que $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$ pour tout $x > 0$.

f est bien continue, décroissante et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc f vérifie les hypothèses de l'énoncé, ce qui prouve l'existence de $C(x)$ pour tout $x > 0$. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} c_k(x) &= \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} - \int_{x+k}^{x+k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} + \left[\ln\left(\frac{t+1}{t}\right)\right]_{x+k}^{x+k+1} \\ &= \left(\frac{1}{x+k} - \ln\left(\frac{x+k+1}{x+k}\right)\right) - \left(\frac{1}{x+k+1} - \ln\left(\frac{x+k+2}{x+k+1}\right)\right), \end{aligned}$$

ce qui est télescopique. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+n+1} + \ln\left(\frac{x+n+2}{x+n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x} + \ln x - \ln(x+1).$$

Ainsi, pour tout $x > 0$, $C(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x - \ln(x+1)$.

3°) Soit $x > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $d_k(x) = c_k(x) - (f(x+k) - f(x+k+1))$, or on a vu que les deux séries $\sum c_k(x)$ et $\sum(f(x+k) - f(x+k+1))$ sont convergentes, donc $\sum d_k(x)$ est également convergente

et $D(x) = C(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(f(x+k) - f(x+k+1)) = C(x) - f(x)$.

Partie II

4°) $\diamond$ Soit $g, h \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$|\alpha g(x) + h(x)| \leq |\alpha||g(x)| + |h(x)| \leq |\alpha|\|g\| + \|h\|$, donc $\alpha g + h$ est bornée et $|\alpha|\|g\| + \|h\|$ est un majorant de $\{|\alpha g(x) + h(x)| \ / \ x \in \mathbb{R}_+^*\}$, donc il est plus grand que le plus petit des majorants, c'est-à-dire sa borne supérieure. Ainsi, $\alpha g + h \in E$ et (principe du passage à la borne supérieure) $\|\alpha g + h\| \leq |\alpha|\|g\| + \|h\|$.
Ainsi E est stable par combinaison linéaire, or il est non vide, donc c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
$\diamond$ L'inégalité précédente avec $\alpha = 1$ prouve l'inégalité triangulaire.
$\diamond$ L'inégalité précédente avec $h = 0$ prouve que $\|\alpha g\| \leq |\alpha|\|g\|$.
Si α est non nul, on peut dans cette inégalité remplacer (α, g) par $(\frac{1}{\alpha}, \alpha g)$; on obtient $\|g\| \leq |\frac{1}{\alpha}|\|\alpha g\|$, donc $\|\alpha g\| = |\alpha|\|g\|$. De plus cette inégalité est évidente lorsque $\alpha = 0$.
$\diamond$ Clairement, $\|g\| \geq 0$ et si $\|g\| = 0$, alors pour tout $x \in E$, $0 \leq |g(x)| \leq \|g\| = 0$, donc g est identiquement nulle.
En conclusion, on a montré que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel sur lequel $\|.\|$ et bien une norme.

5°) **a)** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On peut écrire $|g_n(x) - g(x)| \leq d(g_n, g) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc d'après le principe des gendarmes, $g_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(x)$.
b) Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ avec $x < y$. Alors
$\left|\displaystyle\int_x^y g_n(t)\,dt - \int_x^y g(t)\,dt\right| \leq \int_x^y |g_n(t) - g(t)|\,dt \leq \int_x^y d(g_n, g) = (y-x)d(g_n, g) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$

donc $\displaystyle\int_x^y g_n(t)\ dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_x^y g(t)\ dt$.

6°) $\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$. $g_n(x) = \dfrac{\sqrt{(x-1)^2+\frac{1}{n}}}{x+1} \leq \dfrac{\sqrt{(x-1)^2+1}}{x+1}$,
or $(x-1)^2+1 = x^2-2x+2 \leq 2x^2+4x+2 = 2(x+1)^2$, donc $g_n(x) \leq \sqrt{2}$. Ainsi g_n est borné, c'est bien un élément de E.

$\diamond$ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x+1} = \dfrac{|x-1|}{x+1}$.

Posons $g(x) = \dfrac{|x-1|}{x+1}$ pour tout $x > 0$. On a $0 \leq g(x) \leq \dfrac{|x|+1}{x+1} = 1$, donc $g \in E$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $|g_n(x)-g(x)| = \dfrac{\sqrt{(x-1)^2+\frac{1}{n}} - \sqrt{(x-1)^2}}{x+1} \leq \sqrt{(x-1)^2+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{(x-1)^2}$,
donc en utilisant la quantité conjuguée,

$$|g_n(x)-g(x)| = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{(x-1)^2+\frac{1}{n}}+\sqrt{(x-1)^2}} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{n}}.$$

Par passage au sup, on en déduit que $d(g_n,g) \leq \sqrt{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par principe des gendarmes, $d(g_n,g) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui démontre que g_n tend vers g dans E, pour la distance d.

7°) $\diamond$ D'après les théorèmes usuels, g_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc (g_n) est une suite d'éléments de $C^1(E)$. De plus, $g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g \in E$. Mais g n'est pas dans $C^1(E)$. En effet,
$\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h} = \dfrac{|h|}{(2+h)h} = \text{sgn}(h)\dfrac{1}{2+h}$, où sgn est la fonction signe. Ainsi ce taux d'accroissement tend vers $\frac{1}{2}$ lorsque $h \to 0^+$ et vers $-\frac{1}{2}$ lorsque $h \to 0^-$. Ceci montre que g possède en 1 une dérivée à gauche différente de sa dérivée à droite, donc g n'est pas dérivable en 1 et $g \notin C^1(E)$. On en déduit, d'après la caractérisation séquentielle des fermés, que $C^1(E)$ n'est pas un fermé.

$\diamond$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, posons $h_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 1 \\ \frac{1}{n} \text{ si } x > 1 \end{cases}$.
h_n et l'application identiquement nulle (notée 0) sont dans E et pour tout $x > 0$, $|h_n(x) - 0| \leq \frac{1}{n}$, donc $d(h_n, 0) \leq \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, $h_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Mais $h_n \in E \setminus C^1(E)$ et $0 \in C^1(E)$, donc $E \setminus C^1(E)$ n'est pas fermé et $C^1(E)$ n'est pas ouvert.

8°) Soit (g_n) une suite d'éléments de $C^0(E)$ et $g \in E$ tels que $g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\varepsilon > 0$.
$g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $d(g_n, g) \leq \frac{\varepsilon}{3}$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $|g_n(t) - g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
g_N est continue en x, donc il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, si $|t-x| < \alpha$, alors $|g_N(t) - g_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|t-x| < \alpha$. $|g(x)-g(t)| = |g(x)-g_N(x)+g_N(x)-g_N(t)+g_N(t)-g(t)|$, donc par inégalité triangulaire,

$|g(x)-g(t)| \leq |g(x)-g_N(x)|+|g_N(x)-g_N(t)|+|g_N(t)-g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$.
On a ainsi montré que g est continue en x, pour tout $x>0$, donc $g \in C^0(E)$.
Ainsi, $C^0(E)$ est un fermé de E.

9°) $\diamond$ Soit $k \in \mathbb{N}$. Notons F une primitive de f, qui existe car f est continue, et qui est de classe C^1. Alors, pour tout $x>0$, $c_k(x)=f(x+k)-(F(x+k+1)-F(x+k))$, donc c_k est une application continue.

$\diamond$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $g_n=\sum_{k=1}^{n} c_k$: g_n est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x>0$, en notant $g(x)=\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$, $g_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(x)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x>0$,

$0 \leq g_n(x) \leq \sum_{k=1}^{n}(f(x+k)-f(x+k+1)) = f(x+1)-f(x+n+1) \leq f(x+1)$, or f est décroissante donc $0 \leq g_n(x) \leq f(1)$, donc g_n est bornée.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n \in C^0(E)$.
Soit $x>0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq g_n(x) \leq f(1)$, donc en faisant tendre n vers $+\infty$, $0 \leq g(x) \leq f(1)$, ce qui montre que $g \in E$.
$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x>0$,

$|g(x)-g_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} c_k(x) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}(f(x+k)-f(x+k+1)) = f(n+1+x) \leq f(n+1)$, donc par passage au sup, $d(g,g_n) \leq f(n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g$.
$\diamond$ $C^0(E)$ étant un fermé de E, on en déduit que $g \in C^0(E)$, donc g est continue. Or $C=c_0+g$, donc C est continue.
$\diamond$ Pour tout $x>0$, on a vu que $0 \leq C(x) \leq f(x)$, or $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc par principe des gendarmes, $C(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

10°) **a)** Soit $\varepsilon>0$. $0 \leq \int_x^{x+1} f(t)\,dt = \int_x^{x+\varepsilon} f(t)\,dt + \int_{x+\varepsilon}^{x+1} f(t)\,dt$, or f est décroissante, donc $0 \leq \int_x^{x+1} f(t)\,dt \leq \varepsilon f(x)+(1-\varepsilon)f(x+\varepsilon) \leq \varepsilon f(x)+f(\varepsilon)$.
Or $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$, donc il existe α tel que, pour tout $x \in]0,\alpha]$, $f(x) \geq f(\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon}$. Ainsi, lorsque $x \in]0,\alpha]$, $0 \leq \int_x^{x+1} f(t)\,dt \leq \varepsilon f(x)+\varepsilon f(x)=2\varepsilon f(x)$.

Ceci prouve que, lorsque x tend vers 0, $\int_x^{x+1} f(t)\,dt$ est négligeable devant $f(x)$.

b) $C(x)=f(x)-\int_x^{x+1} f(t)\,dt+\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(f(x+k+1)-\int_{x+k+1}^{x+k+2} f(t)\,dt\Big)$, donc au voisinage de 0, $C(x)=f(x)+o(f(x))+C(x+1)$.

C est continue en 1, donc $C(x+1) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} C(1)$. Ainsi, au voisinage de 0, $C(x+1)$ est bornée : $C(x+1) = O(1) = o(f(x))$, car $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty$.
Finalement, $C(x) = f(x) + o(f(x)) \sim f(x)$.

11°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g'_n \in C^0(E)$, $g'_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} h$ et $C^0(E)$ est fermé, donc $h \in C^0(E)$.
Pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, $g_n(x) = g_n(1) + \int_1^x g'_n(t)\, dt$, donc d'après la question 5.b, $g_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} g(1) + \int_1^x h(t)\, dt$, or $g_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} g(x)$, donc par unicité de la limite, $g(x) = g(1) + \int_1^x h(t)\, dt$.
Ainsi g est une primitive de l'application continue h, donc g est de classe C^1 et $g' = h$.

Partie III

12°) f est décroissante, donc f' est majorée par 0 et elle est croissante, donc d'après le théorème de la limite monotone, il existe $\ell \in \mathbb{R}_-$ tel que $f'(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $\ell = \sup_{x>0} f'(x)$.
Supposons que $\ell < 0$. Alors pour $x > 1$,
$f(x) = f(1) + \int_1^x f'(t)\, dt \leq f(1) + \int_1^x \ell\, dt = f(1) + (x-1)\ell \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$, donc $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$, ce qui est faux. Ainsi, $\ell = 0$ et $f'(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

13°) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. Si F désigne une primitive de f,
$c_k(x) = f(x+k) - (F(x+k+1) - F(x+k))$, donc c_k est de classe C^1 et
$c'_k(x) = f'(x+k) - (f(x+k+1) - f(x+k))$.
Posons à nouveau, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x)$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, $g_n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k(x)$. On a déjà vu que g_n et g sont dans E. De plus g_n est de classe C^1, donc $g_n \in C^1(E)$.
$c'_k(x) = f'(x+k) - \int_{x+k}^{x+k+1} f'(t)\, dt$, donc $-c'_k(x) = (-f')(x+k) - \int_{x+k}^{x+k+1} (-f')(t)\, dt$, mais $-f'$ est une application continue sur $\mathbb{R}_+^*$, décroissante et qui tend vers 0 en $+\infty$, donc elle vérifie les hypothèses de la première partie, hormis le fait qu'elle ne s'annule pas, mais on n'a jamais utilisé cette hypothèse. On peut donc lui appliquer les résultats intermédiaires prouvés en question 9 : $\sum_{k=1}^{n}(-c'_k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty}(-c'_k)$, donc $g'_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} h$, en posant $h(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c'_k$, et $h \in E$.
Alors, d'après la question 11, g est de classe C^1 et $g' = h$.

Or $C = c_0 + g$, donc C est de classe C^1 et $C' = \sum_{k=0}^{+\infty} c'_k$.
De plus, d'après la question 1.c appliquée à $-f'$, $-C'$ est positive, donc C' est négative et C est décroissante.
14°) **a)** $\frac{1}{2}(f(x+k)+f(x+k+1))$ est l'aire du trapèze (ici, il faut faire une figure) délimité par les points de coordonnées $(x+k,0)$, $(x+k+1,0)$, $(x+k+1,f(x+k+1))$ et $(x+k,f(x+k))$, or d'après l'énoncé ce trapèze contient la portion du plan délimité par le graphe de f, l'axe des abscisses et les droites verticales d'abscisses $x+k$ et $x+k+1$. Ainsi, $u_k(x)$ est égale à l'aire complémentaire entre cette portion du plan et le trapèze, donc $u_k(x)$ est positif.
b) Soit $x > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k(x) = \dfrac{1}{2}(c_k(x) + d_k(x))$, or $\sum c_k(x)$ et $\sum d_k(x)$ convergent, donc la série $\sum u_k(x)$ est convergente et
$U(x) = C(x) + D(x) = C(x) - \frac{1}{2}f(x)$.
15°) Soit $x > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. D'après la relation de Chasles,
$v_k(x) = f(x+k) - \displaystyle\int_{x+k-\frac{1}{2}}^{x+k} f(t)\,dt - \int_{x+k}^{x+k+1} f(t)\,dt - \int_{x+k+1}^{x+k+\frac{1}{2}} f(t)\,dt$, donc pour $n \in \mathbb{N}^*$,
en posant $V_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k(x)$, on obtient :
$V_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k(x) + \sum_{k=1}^{n} \Big(\int_{x+k+\frac{1}{2}}^{x+k+1} f(t)\,dt - \int_{x+k-\frac{1}{2}}^{x+k} f(t)\,dt \Big)$. La dernière somme étant télescopique, $V_n(x) = C(x) - c_0(x) + \displaystyle\int_{x+n+\frac{1}{2}}^{x+n+1} f(t)\,dt - \int_{x+\frac{1}{2}}^{x+1} f(t)\,dt$, or
$0 \le \displaystyle\int_{x+n+\frac{1}{2}}^{x+n+1} f(t)\,dt \le \int_{x+n+\frac{1}{2}}^{x+n+1} f(x+n+\frac{1}{2})\,dt \le \frac{1}{2}f(x+n+\frac{1}{2}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc la série $\sum v_k(x)$ est convergente et
$V(x) = C(x) - f(x) + \displaystyle\int_{x}^{x+1} f(t)\,dt - \int_{x+\frac{1}{2}}^{x+1} f(t)\,dt = C(x) - f(x) + \int_{x}^{x+\frac{1}{2}} f(t)\,dt.$
16°) Soit $x > 0$.
$\diamond$ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k(x) \ge 0$, donc $U(x) \ge 0$, or $U(x) = C(x) - \frac{1}{2}f(x)$, donc $\dfrac{1}{2}f(x) \le C(x)$.
$\diamond$ Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En posant $t = x+k+u$, on obtient :
$v_k(x) = f(x+k) - \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x+k+u)\,du$, donc

$$\begin{aligned} v_k(x) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (f(x+k) - f(x+k+t))\,dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (f(x+k) - f(x+k+t))\,dt + \int_{0}^{\frac{1}{2}} (f(x+k) - f(x+k+t))\,dt. \end{aligned}$$

Dans la première intégrale, on pose $u = -t$:

$$\begin{aligned} v_k(x) &= \int_{\frac{1}{2}}^{0} (f(x+k) - f(x+k-u))\,(-du) + \int_0^{\frac{1}{2}} (f(x+k) - f(x+k+t))\,dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (2f(x+k) - f(x+k+t) - f(x+k-t))\,dt. \end{aligned}$$

Or d'après l'énoncé,
$f(x+k) = f(\frac{1}{2}((x+k+t)+(x+k-t))) \leq \frac{1}{2}(f(x+k+t)+f(x+k-t))$, donc
$2f(x+k) - f(x+k+t) - f(x+k-t) \leq 0$, ce qui prouve que $v_k(x) \leq 0$.

Ainsi, $V(x) \leq 0$, donc d'après la question 15, $C(x) \leq f(x) - \displaystyle\int_x^{x+\frac{1}{2}} f(t)\,dt$.

17°) a) $\diamond$ Supposons que $f'(x)$ est négligeable devant $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.
$0 \leq f(x) - f(x+1)$ car f est décroissante et
$f(x) - f(x+1) = \displaystyle\int_x^{x+1} (-f'(t))\,dt \leq \int_x^{x+1} (-f'(x))\,dt$, car $-f'$ est aussi décroissante,
donc $0 \leq f(x) - f(x+1) \leq (-f'(x))((x+1)-x) = -f'(x)$, ce qui montre que
$f(x) - f(x+1) = O(f'(x)) = O(o(f(x)) = o(f(x))$, donc $f(x+1) \sim f(x)$.

$\diamond$ Réciproquement, supposons que $f(x+1) \sim f(x)$ au voisinage de $+\infty$. Alors pour
$x > 1$, $0 \leq -f'(x) \leq \displaystyle\int_{x-1}^{x} (-f'(t))\,dt = f(x-1) - f(x)$, or $f(x+1) \sim f(x)$,
donc en posant $t = x+1$, $f(t) \sim f(t-1)$,
donc $f(x-1) - f(x) = o(f(x))$ et $f'(x) = O(f(x-1) - f(x)) = o(f(x))$.

b) f étant décroissante, $\displaystyle\int_x^{x+\frac{1}{2}} f(t)\,dt \geq \frac{1}{2} f(x+1)$, donc

$$f(x) - \int_x^{x+\frac{1}{2}} f(t)\,dt \leq f(x) - \frac{1}{2}f(x+1) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}(f(x) - f(x+1)) = \frac{1}{2}f(x) + o(f(x))$$

d'après la question précédente. Ainsi, d'après la question 16,
$\dfrac{1}{2}f(x) \leq C(x) \leq \dfrac{1}{2}f(x) + o(f(x))$, or $f(x) > 0$, donc $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{C(x)}{f(x)} \leq \dfrac{1}{2} + o(1)$. Ainsi,
d'après le principe des gendarmes, lorsque x tend vers $+\infty$, $C(x) \sim \frac{1}{2}f(x)$.

c) Posons, pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$. f est bien de classe C^1, décroissante, de limite nulle en $+\infty$. De plus $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, donc f' est croissante.
Enfin, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} = o(f(x))$ au voisinage de $+\infty$,
donc f vérifie toutes les conditions requises.

18°) a) $\diamond$ f est de classe C^1, f est décroissante et de limite nulle en $+\infty$. De plus, $f'(x) = -ae^{-ax}$, donc f' est croissante. Ainsi f vérifie les conditions du début de l'énoncé et du début de cette partie.

$\diamond$ Soit $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}$.
$c_k(x) = e^{-a(x+k)} - \displaystyle\int_{x+k}^{x+k+1} e^{-at}\,dt = e^{-a(x+k)} + \frac{1}{a}\Big[e^{-at}\Big]_{x+k}^{x+k+1}$,
donc $c_k(x) = e^{-a(x+k)}(1 - \dfrac{1}{a}) + \dfrac{1}{a}e^{-a(x+k+1)}$. Ainsi,

$$\frac{C(x)}{f(x)} = (1 - \frac{1}{a}) \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-a})^k + \frac{1}{a} e^{-a} \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-a})^k = \Big[(1 - \frac{1}{a}) + \frac{1}{a} e^{-a}\Big] \frac{1}{1 - e^{-a}}.$$

En conclusion, $\dfrac{C(x)}{f(x)} = \dfrac{e^a(a-1)+1}{a(e^a-1)}$.

b) Posons, pour tout $a > 0$, $h(a) = \dfrac{e^a(a-1)+1}{a(e^a-1)}$. Lorsque a est au voisinage de 0,

$$h(a) = \frac{(1 + a + \frac{a^2}{2} + o(a^2))(a-1)+1}{a((1+a+o(a))-1)} = \frac{\frac{a^2}{2} + o(a^2)}{a^2 + o(a^2)} \sim \frac{\frac{a^2}{2}}{a^2} = \frac{1}{2}, \text{ donc } h(a) \underset{a \to 0}{\longrightarrow} \tfrac{1}{2}.$$

Lorsque a est au voisinage de $+\infty$, $h(a) \sim \dfrac{ae^a}{ae^a} = 1$, donc $h(a) \underset{a \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

Or h est continue, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $m \in]\frac{1}{2}, 1[$, il existe $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $h(a) = m$. En posant alors $f(x) = e^{-ax}$, d'après la question précédente, $\dfrac{C(x)}{f(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} m$ et f satisfait les conditions du début de l'énoncé et du début de cette partie.