# DM 25

## Problème 1

### Partie I

Soit $f$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $i \in \mathbb{N}$, lorsque $f$ est $i$ fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on note $f^{(i)}$ la dérivée $i$-ème de $f$.
Pour tout $i \in \mathbb{N}$, lorsque $f^{(i)}$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$, on note $M_i = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(i)}(x)|$.

**1°)** Pour cette seule question, on suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(2x)$.
Pour tout $i \in \mathbb{N}$, calculer $M_i$.

**2°)** On suppose que $f$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$.
On suppose également que $f$ et $f''$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.
Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$, $|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| \leq h^2 M_2$.
En déduire que $f'$ est bornée et que $M_1 \leq \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_2 h}{2}$.

**3°)** Lorsque $f$ est de classe $C^2$ et que $f$ et $f''$ sont bornées sur $\mathbb{R}$,
montrer que $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

**4°)** Montrer de même que, si $f$ est de classe $C^3$ sur $\mathbb{R}$ et que $f$ et $f^{(3)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$, alors $M_1 \leq \dfrac{1}{2}\left(9M_0^2M_3\right)^{1/3}$.
$f''$ est-elle également bornée sur $\mathbb{R}$ ?

### Partie II

Dans toute cette partie, $n$ est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $f$ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $C^n$, telle que $f$ et $f^{(n)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

**5°)** Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, lorsque $x$ tend vers 0,

$$(e^x - 1)^m = \sum_{j=0}^{m} \left( \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} k^j \right) \frac{x^j}{j!} + o(x^m).$$

En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} (-1)^{m-k} k^j = \begin{cases} 0 \text{ si } j \in \{1, \dots, m-1\} \\ m! \text{ lorsque } j = m \end{cases}$.

**6°)** Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\left| \sum_{j=1}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} h^j \right| \leq \frac{M_n h^n}{n!} + 2M_0$.

À l'aide de la question 5, montrer que $f^{(n-1)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.
Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $M_k$ est bien défini.

**7°)** Lorsque $f$ n'est pas constante, montrer que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $M_k > 0$.

**8°)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(s_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite croissante de réels strictement positifs. Montrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $(s_1 s_2 \dots s_k)^n \leq (s_1 s_2 \dots s_n)^k$.

**9°)** En déduire que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$.
*Indication* : on pourra poser $s_k = 2^{k-1} \dfrac{M_k}{M_{k-1}}$,

## Problème 2

Dans tout ce problème, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite de réels.
Lorsque $(s_0, s_1) \in \mathbb{R}^2$, on définit la suite réelle $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont les premiers termes sont $s_0$ et $s_1$ et dont les autres termes sont donnés par la relation de récurrence suivante : pour tout $n \geq 1$, $s_{n+1} = s_n + a_{n-1} s_{n-1}$.

### Partie I

**1°)** On suppose pour cette question que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$. On suppose de plus que $s_0 \geq 0$ et $s_1 > 0$.
**a)** Préciser le sens de variation de la suite $(s_n)_{n \geq 1}$.
**b)** Pour tout $n \geq 2$, montrer que $s_{n+1} \leq s_n e^{a_{n-1}}$.
**c)** Montrer que la suite $(s_n)$ et la série $\sum a_n$ ont la même nature.

**2°)** On suppose pour cette question que la série $\sum a_n$ est absolument convergente et on considère la suite $(v_n)$ définie par
$v_0 = |s_0|$, $v_1 = |s_1|$ et, pour $n \geq 1$, $v_{n+1} = v_n + |a_{n-1}| v_{n-1}$.
Comparer $|s_n|$ et $v_n$.
Montrer que la série $\sum |s_{n+1} - s_n|$ converge puis que la suite $(s_n)$ est convergente.

**3°)** On suppose dans cette question que $a_n = a^n$, où $a$ est un réel de l'intervalle $]0, 1[$, et que la limite $L$ de la suite $(s_n)$ est non nulle.
En fonction de $L$ et de $a$, déterminer un équivalent de $s_{k+1} - s_k$ puis un équivalent de $L - s_n$.

**4°)** On suppose dans cette question que $a_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ et que la limite $L$ de la suite $(s_n)$ est non nulle.
**a)** Montrer que $L - s_n \sim \dfrac{L}{n}$.
**b)** Déterminer un équivalent de $s_n - L + \dfrac{L}{n}$ en fonction de $L$.

## Partie II

Dans toute cette partie, on suppose que $a_n$ est strictement positif pour tout entier naturel $n$ et que la série $\sum a_n$ est convergente. On note $L(s_0, s_1)$ la limite de la suite $(s_n)$.

**5°)** Montrer que $L$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Dans toute la suite de cette partie, on suppose que $(s_0, s_1) \neq (0,0)$.

**6°)** Montrer que s'il existe un indice $m \in \mathbb{N}$ tel que $s_m = 0$, alors $L(s_0, s_1) \neq 0$.

**7°)** Montrer que $\mathrm{Ker}(L) \neq \mathbb{R}^2$ et que $\mathrm{Ker}(L) \neq \{0\}$.

Ainsi $\mathrm{Ker}(L)$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ (on ne demande pas de le démontrer).
On dira que la suite $(s_n)$ est alternée si $s_n s_{n+1} < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**8°)** Montrer que le couple de réels $(s_0, s_1)$ est dans $\mathrm{Ker}(L)$ si et seulement si la suite $(s_n)$ est alternée.

**9°)** Lorsqu'on impose la condition $(s_0, s_1) \in \mathrm{Ker}(L)$, montrer que le rapport
$r_0 = -\dfrac{s_1}{s_0}$ ne dépend pas de $(s_0, s_1)$.

**10°)** On suppose dans cette question que le couple $(s_0, s_1)$ appartient à $\mathrm{Ker}(L)$ et on pose $r_n = -\dfrac{s_{n+1}}{s_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Prouver que, pour tout entier $n \geq 1$, $r_n = -1 + \dfrac{a_{n-1}}{r_{n-1}}$ et $0 < r_n < a_n$.
Déterminer la nature des séries $\sum r_n$, $\sum s_n$ et $\sum |s_n|$.

Pour tout entier naturel $n$, on considère la fonction
$f_n : [0, +\infty[ \longrightarrow [0, +\infty[$ définie par $f_n(x) = \dfrac{a_n}{1+x}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n = f_0 \circ f_1 \circ \cdots \circ f_n$ et $p_n = g_n(0)$.

**11°)** Etablir que $f_n$ et $g_n$ sont monotones et dérivables.
Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $|g_n'(x)| \leq a_0 a_1 \cdots a_n$.
En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $|p_n - p_{n-1}| \leq a_0 a_1 \cdots a_n$.

**12°)** Montrer que $p_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} r_0$.