

Certaines questions sont bien traitées.
Des erreurs et des imprécisions.

Bonne autocorrection mais quantité limitée.

DM 27

Partie I

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, et $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$.

$$B_{n,k} = x^k (1-x)^{n-k} = \cancel{x^k} \cdot \cancel{x^{n-k}} \quad \text{or } n > k \text{ donc } B_{n,k} = 0.$$

Sit $x \in \mathbb{R}$, $B_{n,k}(x) = 0 \Leftrightarrow x^k = 0$ or $(1-x)^n = 0$ or x a une racine de multiplicité k si $k \neq n$.

1 de multiplication $n-k$ si $k \neq n$. Sinon c'est pas de racines car $x^0 = 1$

2) Soit $k \in \mathbb{N}_n$

$$B_{n,k} = x^k (1-x)^{n-k} \stackrel{\text{notion}}{=} x^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-x)^j 1^{n-k-j}$$

$$= x^k \sum_{j=k}^n \binom{n-k}{j-k} (-x)^{j-k}$$

$$= x^k \sum_{j=k}^n \binom{n-k}{j-k} (-1)^{j-k} x^{j-k}$$

$$= \sum_{j=k}^n \binom{n-k}{j-k} (-1)^{j-k} x^j$$

B

$$3) x^k = x^k 1^{n-k} = x^k (x + (1-x))^{n-k} = x^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} x^j (1-x)^{n-k-j}$$

$$= x^k \sum_{j=k}^n \binom{n-k}{j-k} x^j (1-x)^{n-j}$$

$$= \sum_{j=k}^n \binom{n-k}{j-k} x^j (1-x)^{n-j}$$

$$= \sum_{j=k}^n \binom{n-k}{j-k} B_{n,j}(x)$$

4) Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Il existe $(a_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tq $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$

en utilisant 3): on a donc $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{j=k}^n \binom{n-k}{j-k} B_{n,j}(x)$

$$= \sum_{0 \leq k \leq j \leq n} a_k \binom{n-k}{j-k} B_{n,j} = \sum_{j=0}^n B_{n,j} \times \sum_{k=0}^j a_k \binom{n-k}{j-k}$$

Dès lors il existe $(b_j)_{0 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tq $P(x) = \sum_{j=0}^n b_j B_{n,j}$

Donc $(B_{n,j})_{0 \leq j \leq n}$ est génératrice.

De plus $\#\{B_{n,j} / 0 \leq j \leq n\} = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[x])$

Donc $(B_{n,j})_{0 \leq j \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

B

~~$$5) \int_0^1 B_{n,k}(t) dt = \int_0^1 t^k - t^{n-k} dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} - \frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

Faux \rightarrow RF

$$= \frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-k-1}{(k+1)(n+1)} = \frac{n-k}{(k+1)(n+1)}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

$$\frac{k+1}{n-k} = \frac{(k+1)(n-k-1)!}{(n-k)!} = \frac{(k+1)(n-(k+1))! k!}{(n-k)! k!}$$

ça va suivre raisonnable
je mets aussi simple

$$= \frac{(k+1)! (n-(k+1))!}{(n-k)! k!} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

Faux~~

Donc $\int_0^1 B_{n,k}(t) dt = \frac{1}{(n+1)\binom{n}{k}}$

6)

Partie II : Théorème de Stone - Weierstraß

$$8) B_n(1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n,k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times \frac{k}{n} (1-x)^{n-k} \xrightarrow{\text{Norton}} (x+1-x)^n = 1$$

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k}{n} B_{n,k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{car l'appréciation précédent } k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

$$= x \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-1-(k-1)}$$

$$\xrightarrow{\text{Norton}} x(x+1-x)^n = x$$

$$B_n(x^2) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{et } k^2 = k^2 - k + k = k(k-1) + k \text{ donc}$$

$$B_n(x^2) = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{k(k-1)}{n^2} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{k}{n^2} x^k (1-x)^{n-k}$$

D'après la formule "comté à deux présidents" $k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$ pour $2 \leq k \leq n$

Donc $B_n(x^2) = x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-2-(k-2)} + \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{n} x^k (1-x)^{n-k}$

comté-pendant

$$\text{Donc } B_n(X^2) = X^2 \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} X$$

3) Soit $f \in C$.

par tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \in \mathbb{R}$ et $B_{n,k} \in \mathbb{R}[X]$

Donc $B_n(f) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}$ est un polynôme car somme finie de polynômes

Donc $B_n(f) \in C$

Soit $x \in \mathbb{R}$, $f, g \in C$.

$$B_n(x \cdot f + g) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x \cdot f + g)\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(x \cdot f\left(\frac{k}{n}\right) + g\left(\frac{k}{n}\right) \right) B_{n,k}$$

$$\begin{aligned} &= x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k} \\ &= x B_n(f) + B_n(g) \end{aligned}$$

Donc B_n est un endomorphisme. Mais alors qu'il est continu.

Soit $f \in C$, $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |f\left(\frac{k}{n}\right)| \times |x^k (1-x)^{n-k}| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \|f\| \times |x^k (1-x)^{n-k}| \\ &= \|f\| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (\text{car } x \in [0, 1] \text{ donc } x^k (1-x)^{n-k} \geq 0) \\ &= \|f\| (x+1-x) = \|f\| \end{aligned}$$

Donc $\|f\|$ est un majorant de $\{|B_n(f)(x)| / x \in [0, 1]\}$ et le plus petit de ces majorants donc $\|B_n(f)\| \leq \|f\|$ (On appelle cela passage à la borne sup)

De plus B_n est linéaire car endomorphisme donc B_n continue D'après le cours

$$(10) B_n(f) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{\frac{k}{n}} X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{\frac{1}{n}} X)^k (1-X)^{n-k}$$

$$\stackrel{\text{Newton}}{=} \left(e^{\frac{1}{n}} X + 1 - X \right)^n = (1 + X(e^{\frac{1}{n}} - 1))^n$$

$$\text{Soit } x \in [0, 1]. \quad B_n(f)(x) = \left(1 + x(e^{\frac{1}{n}} - 1) \right)^n$$

$$= \exp(n \ln(1 + x(e^{\frac{1}{n}} - 1)))$$

$$= \exp(n \ln(1 + x(\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))))$$

$$= \exp(n(\frac{x}{n} + o(\frac{1}{n}))) = \exp(x + o(1)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(x)$$

11) Soit $x \in [0,1]$, $x^k(1-x)^{n-k} \geq 0$ car produit de réels positifs donc $S_{n,\delta}(x) \geq 0$.
 Soit $k \in \{0, \dots, n\}$ tq $\left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta$.

$$\text{On a donc } \delta^2 \leq \left(\frac{k}{n} - x \right)^2$$

$$\text{d'où } \delta^2 S_{n,\delta}(x) \leq \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \left(\frac{\delta^2}{n^2} - 2 \frac{kx}{n} + x^2 \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\delta^2}{n^2} B_{n,k} - 2x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x}{n} B_{n,k} + x^2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

$$= B_n(x^2)(x) + 2x B_n(X)(x) - x^2 B_n(1)(x)$$

$$= \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x - 2x^2 + x$$

$$\leq \frac{x - x^2}{n}$$

$$\text{De plus } x - x^2 = -(x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2) + \frac{1}{4} = -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}$$

$$\text{D'où } S_{n,\delta}(k) \leq \frac{1}{40n^2}$$

B

12)

14) C'est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc avec combinaison linéaire,

c'est vrai pour tout polynôme, donc pour $B_n(S)$.

$$\text{D'où } \int_0^1 B_n(S)(x) f(x) dx = 0$$

$$\text{De plus } \left| \int_0^1 B_n(S)(x) f(x) - f^2(x) dx \right| = \left| \int_0^1 (B_n(S)(x) - f(x)) f(x) dx \right| \leq \| B_n(S) - f \|_{L^2} \| f \|_{L^2}$$

D'après le principe des gendarmes $\int_0^1 B_n(S)(x) f(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f^2(x) dx$

Du passage à la limite $\int_0^1 f^2(x) dx = 0$ ou $f^2(x) \geq 0$ donc $f^2 = 0$ donc $f = 0$.

CNP