MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 7 : du lundi 22 novembre au vendredi 26.

Liste des questions de cours

1°) Si A et B sont deux parties d'un ensemble E, exprimer en justifiant les fonctions indicatrices de $E \setminus A$, $A \cap B$ et $A \cup B$ en fonction des fonctions indicatrices de A et B.

2°) Montrer que $f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$, mais que l'inclusion réciproque peut être fausse.

3°) Enoncer et démontrer une propriété concernant l'image réciproque d'une réunion.

4°) Quelles relations d'inclusion a-t-on entre A et $f(f^{-1}(A))$ et entre B et $f^{-1}(f(B))$? Démontrez-le. Que se passe-t-il lorsque f est injective (respectivement : surjective) ?

5°) Pour une application $f\ : E \longrightarrow F$ quelconque, montrer que l'application $\begin{array}{cccc} \overline{f}: & E/R & \longrightarrow & f(E) \\ & \overline{x} & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est une bijection, pour une relation d'équivalence R bien choisie.

6°) Montrer que $g \circ f$ injective $\implies f$ injective et $g \circ f$ surjective $\implies g$ surjective.

7°) Montrer que les applications injectives sont simplifiables à gauche et que les applications surjectives sont simplifiables à droite.

8°) Si $E \neq \emptyset$, montrer que $f\ :\ E \longrightarrow F$ est injective si et seulement si il existe $g\ :\ F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = Id_E$.
Montrer que $f\ :\ E \longrightarrow F$ est surjective si et seulement si il existe $g\ :\ F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = Id_F$.

9°) Dans un monoïde, si x est inversible à gauche et à droite, montrer qu'il possède un unique inverse. Si x et y sont inversibles, donner en justifiant l'inverse de xy.

10°) Montrer que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable.

11°) Montrer qu'une réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

12°) Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Les thèmes de la semaine

1 Les réels

En révision.

2 Applications

2.1 Généralités

Définition d'une application de E dans F, d'une famille d'éléments de E indexée par I.

Exemples : la fonction vide, l'application identité, l'indicatrice d'une partie d'un ensemble.
Indicatrice du complémentaire, d'une intersection, d'une réunion.

Majorant, minimum, borne supérieure etc. d'une fonction ou d'une famille.

Restriction et corestriction d'une application.

Composée d'applications. Associativité de la composition.

Applications croissantes, décroissantes, monotones.
Propriétés des applications monotones vis à vis de la composition, l'addition, le produit.

2.2 Images directes et réciproques

Définition des images directes et réciproques d'une partie par une application.

Propriétés des images directes et réciproques vis à vis de la réunion, l'intersection et le complémentaire.

2.3 Injectivité et surjectivité

Injections, surjections, bijections.

Si $f\ : E \longrightarrow F$ alors $\begin{array}{rccc} \overline{f}: & E/R & \longrightarrow & f(E) \\ & \overline{x} & \longmapsto & f(x) \end{array}$ est une bijection, où R est la relation d'équivalence sur E définie par $xRy \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$.

Une composée d'injections (resp : surjections, bijections) est une injection (resp : surjection, bijection).

$g \circ f$ injective $\implies f$ injective et $g \circ f$ surjective $\implies g$ surjective.

Bijection réciproque d'une bijection f.
Si f et g sont bijectives, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Si f est bijective, alors $f(f^{-1}(B)) = B$ et $f^{-1}(f(A)) = A$.

Propriété. (HP) Les applications injectives sont simplifiables à gauche et les applications surjectives sont simplifiables à droite.

Propriété. (HP) Si $E \neq \emptyset$, alors $f\ :\ E \longrightarrow F$ est injective si et seulement si il existe $g\ :\ F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = Id_E$.

Propriété. (HP) $f\ :\ E \longrightarrow F$ est surjective si et seulement si il existe $g\ :\ F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = Id_F$.

3 Lois internes

Lorsque Δ est une loi interne sur E, on dit que (E, Δ) est un magma.

Magma associatif, magma unitaire.
Un monoïde est un magma associatif et unitaire.

Élément d'un monoïde inversible à gauche ou à droite, unicité de l'inverse.

Un groupe est un monoïde dans lequel tout élément est inversible.

Définition d'un anneau.

Attention : On a seulement donné les définitions d'un groupe et d'un anneau, mais nous n'avons pas encore vu les notions de sous-groupes, idéaux, morphismes, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ etc.

4 Cardinal d'un ensemble

Ensembles finis, ensembles infinis
Le cardinal d'un ensemble fini E est noté $\text{Card}(E)$, $\#E$ ou $|E|$.

Propriété. Soit A un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et soit B un ensemble quelconque.
B est fini de cardinal n si et seulement si il existe une bijection de A sur B.

Propriété. Soit A un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Soit B une partie de A.
Alors B est un ensemble fini et $|B| \leq |A|$, avec égalité si et seulement si $B = A$.

Propriété. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. A est finie si et seulement si elle est majorée.
En particulier, $\mathbb{N}$ est infini.

Attention : Ici aussi, on a seulement donné la définition d'un ensemble fini. Le cours sur le dénombrement sera une partie du prochain programme de colles.

5 Ensembles dénombrables

Un ensemble est au plus dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Lemme technique : I est fini ou dénombrable si et seulement s'il existe une suite croissante $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de I dont la réunion est égale à I. On dit alors que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite adaptée à I.

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

Une réunion au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.
Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

Prévisions pour la semaine prochaine :

Dénombrement et sommes finies.