# Résumé de cours :
# Semaine 9, du 15 novembre au 19.

## 1 Sommes finies et dénombrement (suite et fin)

### 1.1 Listes et combinaisons

**Vocabulaire :** Soit $E$ un ensemble et $p \in \mathbb{N}$.
- Une $p$-liste (aussi appelée un p-uplet) d'éléments de $E$ est un élément de $E^p$.
- Un $p$-arrangement d'éléments de $E$ est une $p$-liste dont les éléments sont deux à deux distincts.
- Une p-combinaison de $E$ est une partie de $E$ de cardinal $p$.

**Propriété.** Le nombre de $p$-listes d'éléments de $E$ est égal à $n^p$ (c'est $|E|^p$).

**Propriété.** Si $a = (e_1, \dots, e_p)$ est un p-arrangement de $E$, l'application $\begin{array}{rccc} f_a : & \mathbb{N}_p & \longrightarrow & E \\ & i & \longmapsto & e_i \end{array}$ est une injection. De plus, $a \longmapsto f_a$ est une bijection de l'ensemble $A_p$ des p-arrangements de $E$ vers l'ensemble $I_p$ des injections de $\mathbb{N}_p$ dans $E$.
Il faut savoir le démontrer.

**Théorème.** Le nombre de $p$-arrangements dans un ensemble de cardinal $n$ est égal à $n(n-1)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$. C'est aussi le nombre d'injections d'un ensemble à $p$ éléments vers un ensemble à $n$ éléments.

**Corollaire.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\mathcal{S}_n| = n!$. Plus généralement, factorielle de $n$ est le nombre de bijections d'un ensemble de cardinal $n$ dans un autre ensemble de cardinal $n$.

**Théorème.** Le nombre de $p$-combinaisons d'éléments d'un ensemble de cardinal $n$, c'est-à-dire le nombre de parties de $p$ éléments incluses dans un ensemble de cardinal $n$ est égal à

$$\binom{n}{p} \triangleq \frac{A_{n,p}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}.$$

Cette quantité s'appelle le coefficient binomial "$p$ parmi $n$".
Il faut savoir le démontrer.

### 1.2 Les coefficients binomiaux

**Formule :** $\forall n, p \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq p \leq n$, $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

**Formule comité-président :** Pour tout $n, k \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

La preuve combinatoire est à connaître.

**Formule comité-bureau :** si $p \leq k \leq n$, $\binom{k}{p} \times \binom{n}{k} = \binom{n}{p} \times \binom{n-p}{k-p}$.

La preuve combinatoire est à connaître.

**Formule du triangle de Pascal :** $\forall n, p \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq p < n$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$.

La preuve combinatoire est à connaître.

**Remarque.** Il est souvent pratique de convenir que, pour tout $n, p \in \mathbb{Z}$ tels que $\neg(0 \leq p \leq n)$, $\binom{n}{p} = 0$.

**Représentation graphique du triangle de Pascal :** À connaître.

**Formule du binôme de Newton :** On se place dans un anneau $(A, +, \times)$. Soit $a_1$ et $a_2$ deux éléments de $A$ qui commutent, c'est-à-dire tels que $a_1a_2 = a_2a_1$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (a_1 + a_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_1^k\ a_2^{n-k}.$$

Les deux preuves sont à connaître.

**Formule du multinôme :** (Hors programme). Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a_1, \ldots, a_p$ $p$ éléments d'un anneau $A$ qui commutent deux à deux. Alors

$$(a_1 + \cdots + a_p)^n = \sum_{\substack{i_1, \ldots, i_p \in \mathbb{N} \\ \text{tel que } i_1 + \cdots + i_p = n}} \frac{n!}{i_1! \times \cdots \times i_p!}\ a_1^{i_1} \times \cdots \times a_p^{i_p}.$$

**Formule de Leibniz :** Soient $f$ et $g$ deux applications d'un intervalle $I$ dans $\mathbb{R}$. Si $f$ et $g$ sont $n$ fois dérivables sur $I$, alors $fg$ est $n$ fois dérivable sur $I$ et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

Il faut savoir le démontrer.

## 1.3 Sommes et produits : quelques techniques

### 1.3.1 Télescopage

$\sum_{k=m}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_m$ et $\sum_{k=m+1}^{n+1} (u_{k-1} - u_k) = u_m - u_{n+1}$.

## 1.4 Séparation des indices pairs et impairs

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} u_k + \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} u_k = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} u_{2p} + \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} u_{2p+1}.$$

### 1.4.1 Fonction génératrice

Soit $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$ et soit $(u_k)_{m \leq k \leq n}$ une famille de complexes. La fonction génératrice de cette famille est l'application polynomiale $P\ :\ x \longmapsto \sum_{k=m}^{n} u_k x^k$.

Si $P$ est connu, on peut en déduire plusieurs sommes : $\sum_{k=m}^{n} u_k = P(1)$, $\sum_{k=m}^{n} k u_k = P'(1)$, $\sum_{k=m}^{n} k(k-1)u_k = P''(1)$, $\sum_{k=m}^{n} \frac{u_k}{k+1} = \int_0^1 P(t)dt$ etc.

#### 1.4.2 Quelques formules

**Somme arithmétique :** Une suite $(u_n)$ de complexes est arithmétique de raison $r$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = u_n + r$. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$ et $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k = \frac{u_m + u_n}{2}(n - m + 1)$.

**Formule de Bernoulli :** Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Soit $a$ et $b$ deux éléments de $A$ qui commutent (i.e $ab = ba$). Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$.

Il faut savoir le démontrer.

**Somme géométrique :** Une suite $(u_n)$ de complexes est géométrique de raison $r$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = r u_n$. Dans ce cas, $u_n = u_0 r^n$ et $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k = \frac{u_{n+1} - u_m}{r - 1}$.

### 1.5 Sommes doubles

$$\sum_{\substack{m \le k \le n \\ p \le \ell \le q}} u_{k,\ell} = \sum_{k=m}^{n} \sum_{\ell=p}^{q} u_{k,\ell} = \sum_{\ell=p}^{q} \sum_{k=m}^{n} u_{k,\ell}.$$

**Propriété.** Dans un anneau, $\displaystyle\sum_{\substack{m \le k \le n \\ p \le \ell \le q}} v_k w_\ell = \Big(\sum_{k=m}^{n} v_k\Big)\Big(\sum_{\ell=p}^{q} w_\ell\Big)$.

#### 1.5.1 Sommes triangulaires

$$\sum_{m \le k \le \ell \le n} u_{k,\ell} = \sum_{k=m}^{n} \sum_{\ell=k}^{n} u_{k,\ell} = \sum_{\ell=m}^{n} \sum_{k=m}^{\ell} u_{k,\ell}.$$

Il faut savoir le démontrer.

#### 1.5.2 Produits

Toutes les propriétés précédentes, lorsqu'elles étaient valables dans un monoïde commutatif $(G, +)$ sont valables en notation multiplicative dans un monoïde commutatif $(G, \times)$.

## 2 Les complexes (début)

### 2.1 Construction de $\mathbb{C}$

**Propriété.** $\mathbb{C}$ est un corps, dont $\mathbb{R}$ est un sous-corps et dont les lois sont définies par

$$\boxed{\forall a, b, c, d \in \mathbb{R},\ \begin{cases} (a + ib) + (c + id) & = (a + c) + i(b + d) \\ (a + ib) \times (c + id) & = (ac - bd) + i(ad + bc) \end{cases}}$$

Si $z \neq 0$, $\boxed{\text{l'inverse de } z = a + ib \text{ est } \dfrac{a - ib}{a^2 + b^2}}$.

**Définition.** $\forall z \in \mathbb{C},\ \ \exists! a, b \in \mathbb{R},\ \ z = a + ib$. On note $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.
L'écriture du complexe $z$ sous la forme $z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$ s'appelle l'écriture algébrique de $z$.

**Définition.** Les imaginaires purs sont les $ib$ où $b \in \mathbb{R}$.

**Propriété.** Comme pour tout corps, $\mathbb{C}$ est intègre, c'est-à-dire que, pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, si $zz' = 0$, alors $z = 0$ ou $z' = 0$.

**Propriété.** $\boxed{\frac{1}{i} = -i}$.

**Linéarité des parties réelle et imaginaire :** Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,
$\mathrm{Re}(\alpha z + z') = \alpha \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$ et $\mathrm{Im}(\alpha z + z') = \alpha \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$.

## 2.2 Le plan complexe

**Définition.** On considère un plan $P$ affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On peut alors définir le complexe $z = x + iy$ et le point $M$ de $P$ dont les coordonnées dans le repère $R$ sont $(x, y)$. On dit que $z$ est l'affixe du point $M$ et que $M$ est l'image du complexe $z$.
Si l'on note $M(z)$ l'image du complexe $z$, l'application $z \longmapsto M(z)$ est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $P$ qui permet parfois d'identifier $\mathbb{C}$ avec $P$ (muni de son repère $R$).
On dit également que $z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et que $\overrightarrow{OM}$ est le vecteur image de $z$.
Si l'on note $\overrightarrow{u(z)}$ le vecteur image de $z$, l'application $z \longmapsto \overrightarrow{u(z)}$ est une bijection de $\mathbb{C}$ dans l'ensemble des vecteurs de $P$.
Pour ces raisons, $\mathbb{C}$ est souvent appelé le plan complexe.

**Interprétation géométrique de l'addition entre complexes :**
Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. Avec les notations précédentes, notons $\overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{u_{z'}}$ les vecteurs images de $z$ et $z'$. Alors le vecteur $\overrightarrow{u_z} + \overrightarrow{u_{z'}}$ a pour affixe $z + z'$.
Ainsi, si l'on identifie $\mathbb{C}$ avec l'ensemble des vecteurs de $P$, l'addition entre complexes correspond à l'addition entre vecteurs du plan.
Si l'on visualise les deux complexes $z$ et $z'$ par deux points $M_z$ et $M_{z'}$ du plan $P$, le complexes $z + z'$ est donc le point qui complète $O, M_z, M_{z'}$ en un parallélogramme.

**Interprétation géométrique de la différence de deux complexes :**
Avec les mêmes notations, $z' - z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M(z)M(z')}$.

**Définition.** L'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ est la transformation suivante du plan :
$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & P \\ M & \longmapsto & \Omega + \lambda \overrightarrow{\Omega M} \end{array}.$$

**Interprétation géométrique du produit d'un complexe par un réel :**
Soit $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\alpha z$ est l'affixe du vecteur $\alpha \overrightarrow{OM(z)}$.
Ainsi, $\alpha z$ est aussi l'affixe de l'image de $M(z)$ par l'homothétie de centre $O$ et de rapport $\alpha$.

## 2.3 La conjugaison

**Définition.** Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Le conjugué du complexe $z$ est le complexe $\overline{z} \stackrel{\Delta}{=} x - iy$.

Géométriquement, $\overline{z}$ est le symétrique de $z$ selon l'axe $Ox$ des réels.

**Propriété.** $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$ et $z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow \overline{z} = -z$.

**Propriété.** Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

**Propriété.** Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}$, $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

**Corollaire.** Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $z \in \mathbb{C}^*$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

## 2.4 Le module (début)

**Définition.** Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Le module du complexe $z = x + iy$ est $|z| \triangleq \sqrt{x^2 + y^2}$.

**Interprétation géométrique :**
$|z|$ désigne la distance du point $M(z)$ à l'origine, ainsi que la norme du vecteur $\overrightarrow{u(z)}$.
La distance entre $M(z)$ et $M(z')$ est égale à $|z - z'|$.

**Propriété.** $\forall z \in \mathbb{C},\ \ |z|^2 = z\overline{z}$.

**Propriété.** Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

**Propriété.** Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$,
- $|z| = |\overline{z}|$ (compatibilité du module avec la conjugaison) ;
- $|zz'| = |z| \times |z'|$ (compatibilité du module avec la multiplication) ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$ ;
- si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$.