MPSI 2
Programme des colles de mathématiques.
Semaine 1 : du lundi 27 septembre au vendredi 1er octobre.

Liste des questions de cours

1°) Si f est une bijection d'une partie E de $\mathbb{R}$ vers une partie F de $\mathbb{R}$, comment déduit-on le graphe de f^{-1} à partir du graphe de f ? Démontrez-le.

2°) Montrer à l'aide des complexes que $\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$.

3°) Résoudre l'équation $\cos x = \cos(\frac{\pi}{3} - 2x)$.

4°) Résoudre l'équation $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2$.

5°) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\sin x < x$.

6°) Pour tout $x \in [-1, 1]$, montrer que $\arccos\, x + \arcsin\, x = \frac{\pi}{2}$.

7°) Si f est une application continue d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ et si $u : J \longrightarrow I$ et $v : J \longrightarrow I$ sont des applications dérivables sur un intervalle J, déterminer la dérivée de $t \longmapsto \displaystyle\int_{u(t)}^{v(t)} f(x)dx$.

8°) Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

9°) Montrer que $\dfrac{\ln(t)}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

10°) Tracer le graphe de $x \longmapsto x^\alpha$, en distinguant les cas où $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$ avec $\alpha < 0$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

11°) Comment le graphe de $x \longmapsto f(ax)$ se déduit-il du graphe de f ? Le démontrer.

12°) Graphes des fontions tan, arctan, sh, ch et th.

13°) Donner (en justifiant) une expression logarithmique de $\mathrm{argsh}(x)$.

14°) Enoncer et démonter le théorème de changement de variable dans une intégrale.

15°) Enoncer et démontrer le théorème d'intégration par parties.

Les thèmes de la semaine

Il s'agit d'une première approche de la dérivation et de l'intégration des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On admet les théorèmes nécessaires et aucune maîtrise théorique n'est attendue des élèves à ce sujet. On définit et l'on étudie les fonctions usuelles.

1 Généralités sur les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Domaine de définition, graphe d'une fonction.

Image, antécédent.
Définition de l'injectivité, de la surjectivité et de la bijectivité (pour des fonctions d'une partie de $\mathbb{R}$ dans une partie de $\mathbb{R}$). Application réciproque d'une bijection.
Construction du graphe de l'application réciproque par symétrie par rapport à la première diagonale.

Parité, imparité, périodicité.

Fonctions majorées, minorées, bornées.

Fonctions monotones, fonctions strictement monotones.

Combinaison linéaires de fonctions, produit et quotient de fonctions.
Composition.

2 Applications polynomiales

Les définitions et propriétés de ce paragraphe sont admises pour le moment. Aucune maîtrise théorique des polynômes n'est attendue à ce stade de l'année.
Définition des polynômes à coefficients réels (vus comme des applications polynomiales pour le moment), degré, racine.
Degré d'un produit.
Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sont des racines distinctes de P, il existe un polynôme Q tel que
$P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_k)Q(x)$.
Le nombre de racines d'un polynôme non nul est inférieur ou égal à son degré.

3 Trigonométrie

3.1 Les fonctions circulaires

Remarque. Concernant l'usage des complexes, on s'appuie pour le moment sur les connaissances de Terminale des élèves. Les complexes seront développés en cours ultérieurement.

Définition. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On admet que le complexe $e^{i\theta}$ est sur le cercle unité et que θ est l'angle $\widehat{M_1 M_0 M_{e^{i\theta}}}$ (en notant M_z le point d'affixe z).
On pose $\cos(\theta) = Re(e^{i\theta})$ et $\sin(\theta) = Im(e^{i\theta})$, c'est-à-dire :

Formules d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.

Définition des fonctions tangente et cotangente.

Dans un triangle rectangle, formules donnant les cosinus, sinus et tangente d'un angle en fonction des longueurs des côtés.

Graphes des fonctions cos, sin et tan.

3.2 Formulaire de trigonométrie

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Formules de symétries : Passage de θ à $-\theta$, $\pi-\theta$, $\pi+\theta$, $\frac{\pi}{2}-\theta$ et $\frac{\pi}{2}+\theta$.
Visualisation de ces formules sur le cercle trigonométrique.

Formule d'addition :
$\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$, $\sin(a+b)$, $\sin(a-b)$, $\tan(a+b)$, $\tan(a-b)$.

Formules de duplication : $\cos(2a)$, $\sin(2a)$ et $\tan(2a)$.

Premières formules de linéarisation :
$\cos^2 a$, $\sin^2 a$, $2\cos a.\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$, $2\sin a.\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$,
$2\sin a.\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.

Formules de factorisation : $\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$
et formules analogues pour $\cos p - \cos q$ et $\sin p \pm \sin q$.
Ces formules sont hors programme, mais l'étudiant doit savoir les retrouver.

Formules (hors programme) : en posant $u = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, on a
$\cos\theta = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin\theta = \dfrac{2u}{1+u^2}$, $\tan\theta = \dfrac{2u}{1-u^2}$.

3.3 Equations trigonométriques

$\cos u = \cos v \iff u \equiv \pm v$ modulo 2π.
$\sin u = \sin v \iff (u \equiv v$ modulo $2\pi) \vee (u \equiv \pi - v$ modulo $2\pi)$.
$\tan u = \tan v \iff u \equiv v$ modulo π.
Écriture de $A\cos x + B\sin x$ sous la forme $r\cos(x-\varphi)$.

4 Dérivation

4.1 Définition

Equation de la corde joignant les points du graphe de f d'abscisses x_0 et x_1.

Pour $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, où I est un intervalle, dérivée de f en $x_0 \in I$. Equation de la tangente.

Remarque. Les aspects théoriques concernant les notions de limite et de dérivée seront abordés ultérieurement. L'objectif de ce chapitre est essentiellement de mettre en place des techniques de calculs.

Applications dérivables sur I, de classe D^1 ou C^1 sur I.
Applications n fois dérivables, de classe D^n ou C^n, de classe C^∞.

4.2 Formulaire de dérivation

Dérivée d'une combinaison linéaire de fonctions, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.
Dérivée d'une bijection réciproque.

Dérivées des fonctions trigonométriques.

$\dfrac{d^n}{dx^n}(f(ax+b)) = a^n f^{(n)}(ax+b)$,
$\cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$, $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$,
$\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{1}{1+x}\right) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$.

4.3 Dérivation et monotonie

Théorème admis pour le moment : Soit f dérivable sur un intervalle I. f est constante (resp : croissante, décroissante) sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$ (resp : $f(x) \geq 0, f(x) \leq 0$).
Si $f'(x)$ est de signe constant sur I et si $\{x \in I / f'(x) = 0\}$ est fini, alors f est strictement monotone.

5 Intégration

Définition informelle de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ lorque f est continue, en tant qu'aire algébrique.
Propriétés de l'intégrale (admises) : linéarité, relation de Chasles, croissance de l'intégrale, inégalité triangulaire, inégalité de Cauchy-Schwarz.
Si $f\ :\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et positive avec $\int_a^b f(t)dt = 0$, alors $f = 0$.

6 Primitivation

Primitive d'une application continue, unicité à une constante additive près.
Théorème fondamental de l'analyse (admis) : Si $f\ :\ I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, $x \longmapsto \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en x_0.
Application au calcul d'intégral. Notation $\int f(t)dt$ pour désigner une primitive à une constante près.

7 Fonctions Logarithmes et puissances

7.1 Quelques théorèmes d'analyse

On admet pour le moment le théorème de la limite monotone, le fait qu'une application continue sur un segment atteint ses bornes, le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la bijection.

Definition puis caractérisation d'un C^n difféomorphime entre deux intervalles de $\mathbb{R}$.

7.2 Les fonctions ln et exp

Définition : Pour tout $x > 0$, $\ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$. Propriétés de la fonction logarithme.
On note exp le C^∞-difféomorphisme réciproque, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Propriétés de $x \longmapsto e^x$.
Graphe de ln et exp.

7.3 Fonctions puissances

Graphes de $x \longmapsto ax^n$ sur $\mathbb{R}$ lorsque $n \in \mathbb{N}$, sur $\mathbb{R}^*$ lorsque $n \in \mathbb{Z}$ avec $n < 0$, graphe de $x \longmapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ lorque $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

8 Etude d'une fonction

Plan d'étude, recherche d'asymptotes obliques, de branches paraboliques.

9 Déformations du graphe

- Le graphe de $x \longmapsto f(x) + a$ se déduit du graphe de f par la translation de vecteur $a\overrightarrow{j}$.
- Le graphe de $x \longmapsto f(x + a)$ se déduit du graphe de f par la translation de vecteur $-a\overrightarrow{i}$.
- Le graphe de $x \longmapsto f(a - x)$ se déduit du graphe de f par la symétrie orthogonale selon la droite verticale d'abscisse $\frac{a}{2}$.
- Le graphe de $x \longmapsto f(ax)$ se déduit du graphe de f par l'affinité orthogonale d'axe invariant Oy et de coefficient $\frac{1}{a}$
- Le graphe de $x \longmapsto af(x)$ se déduit du graphe de f par l'affinité d'axe invariant Ox et de coefficient a.

10 D'autres fonctions usuelles

Les fonctions ch, sh et th. Propriétés et graphes.
Formules : $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$, $\mathrm{ch}(a+b)$, $\mathrm{sh}(a+b)$.

Définitions de arccos, arcsin et arctan. Propriétés, dérivées, graphes.

Définitions (hors programme) de argch, argsh et argth. Propriétés, dérivées, graphes. Expressions logarithmiques.

10.1 Calculs d'intégrales

Théorème de changement de variable dans une intégrale.
Intégrale d'une application paire (resp : impaire) sur un intervalle centré en 0.
Si f est continue et T-périodique, $\displaystyle\int_t^{T+t} f(t)\, dt$ ne dépend pas de t.

Intégration par parties.

Prévision pour la semaine prochaine :

Le même programme.