DS 3

Les calculatrices sont interdites.

Bases de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et lemme de Zorn

Partie 1 : familles libres de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Notation. Tout au long de cette partie, on notera E, ou parfois $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition. Soit I un ensemble et $a = (\alpha_i)_{i \in I}$ une famille de réels indexée par I. On dit que a est presque nulle si et seulement si $\{i \in I \ / \ \alpha_i \neq 0\}$ est un ensemble fini.

Notation. On note $\mathbb{R}^I$ l'ensemble de toutes les familles de réels indexées par I et on note $\mathbb{R}^{(I)}$ l'ensemble des familles presque nulles de réels indexées par I.

1°) La famille $(1 + (-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle un élément de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$?

2°) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{R}^I = \mathbb{R}^{(I)}$.

Notation. Soit A une partie de E et $a = (\alpha_f)_{f \in A} \in \mathbb{R}^{(A)}$.
Si $B = \{f \in A \ / \ \alpha_f \neq 0\}$, alors $\displaystyle\sum_{f \in B} \alpha_f f$ est une somme finie d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On convient de poser $\displaystyle\sum_{f \in A} \alpha_f f = \sum_{f \in B} \alpha_f f$.

3°) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note f_k l'élément de E défini par $f_k(x) = e^{(x^k)}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $g = \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}} \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor f_k$. Montrer que g est correctement définie.

Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $g(x) \leq en\left(\dfrac{\ln n}{\ln 2} + 1\right)$.

Définition. Soit A une partie de E.
On dit que A est liée si et seulement si il existe $(\alpha_f)_{f \in A} \in \mathbb{R}^{(A)}$ telle que

- il existe $f \in A$ telle que $\alpha_f \neq 0$;
- $\displaystyle\sum_{f \in A} \alpha_f f = 0$.

4°) Montrer que $\{\exp, \mathrm{ch}, \mathrm{sh}\}$ est une partie liée de E.

Définition. Si A est une partie de E, on dit que A est libre si et seulement si A n'est pas liée.

5°) Soit A une partie de E. Montrer que A est libre si et seulement si, pour tout $(\alpha_f)_{f \in A} \in \mathbb{R}^{(A)}$, $\displaystyle\sum_{f \in A} \alpha_f f = 0 \Longrightarrow (\forall f \in A, \ \ \alpha_f = 0)$.

6°) Montrer que $\{\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \mathrm{th}\}$ est libre.

7°) Montrer que $\{x \longmapsto \sin(x^n) \ / \ n \in \mathbb{N}^*\}$ est une partie libre de E.

8°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons c_n l'élément de E défini par $c_n(x) = \cos(nx)$ et notons s_n l'élément de E défini par $s_n(x) = \sin(nx)$. On note $A = \{c_n \ / \ n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{s_n \ / \ n \in \mathbb{N}^*\}$.
Pour tout $f, g \in A$ avec $f \neq g$, montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)g(x) \ dx = 0$.
En déduire que A est libre.

Définition. Si A est une partie de E, on note $\mathrm{Vect}(A) = \left\{ \sum_{f \in A} \alpha_f f \ / \ (\alpha_f)_{f \in A} \in \mathbb{R}^{(A)} \right\}$.

9°) On note B la réunion des deux parties de E définies en questions 7 et 8.
Montrer que $\mathrm{Vect}(B)$ est strictement inclus dans l'ensemble des applications de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Partie II : Existence d'une base de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Définition. Soit $(E, \leq_E)$ un ensemble ordonné.
On dit qu'une partie A de E est totalement ordonnée si et seulement si la restriction de $\leq_E$ sur A est un ordre total sur A.

10°) Démontrer que dans un ensemble ordonné $(E, \leq)$, toute partie finie, non vide et totalement ordonnée possède un maximum.

Définition. Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et C une partie de E. On dit que C est un crible de E si et seulement si : $\forall x \in C, \ \ \forall y \in E, \ \ y \leq x \Longrightarrow y \in C$.
Le fait que C est un crible de E sera noté $C \lhd E$.

Notation. Soit $(A, \leq)$ un ensemble ordonné et $a \in A$. On note $A^{<a} = \{x \in A \ / \ x < a\}$ (on rappelle que $x < a$ signifie que $x \leq a$ et $x \neq a$).

11°) Soit $(A, \leq)$ un ensemble ordonné et $a \in A$. Montrer que $A^{<a} \lhd A$.

12°) Soit $(B, \leq)$ un ensemble ordonné et A une partie de B telle que $A \lhd B$.
Montrer que, pour tout $a \in A$, $A^{<a} = B^{<a}$.

13°) Quelles sont les cribles de $\mathbb{Z}$?

Définition. Soit $(E, \leq_E)$ un ensemble ordonné. On dit que E est inductif si et seulement si toute partie totalement ordonnée de E possède un majorant.

On admettra qu'en utilisant l'axiome du choix, on peut démontrer le théorème suivant :
Lemme de Zorn : tout ensemble ordonné inductif possède un élément maximal.

Définition. Soit X un ensemble et $\mathcal{E}$ une partie non vide de $\mathcal{P}(X)$ (les éléments de $\mathcal{E}$ sont donc des parties de X). On dit que $\mathcal{E}$ est de caractère fini si et seulement si, pour tout $A \subset X$, les conditions suivantes sont équivalentes :

— $A \in \mathcal{E}$;

— Toute partie finie B de A appartient à $\mathcal{E}$.

14°) Soit X un ensemble et $\mathcal{E}$ une partie non vide de $\mathcal{P}(X)$.
On suppose que $\mathcal{E}$ est de caractère fini.
Montrer que, pour la relation d'inclusion, $\mathcal{E} \lhd \mathcal{P}(X)$.
Montrer que $\emptyset \in \mathcal{E}$.

15°) Soit X un ensemble et $\mathcal{E}$ une partie non vide de $\mathcal{P}(X)$.
On suppose que $\mathcal{E}$ est de caractère fini.
Montrer que $\mathcal{E}$ est inductif pour la relation d'inclusion.

16°) Notons à nouveau E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que l'ensemble des parties libres de E est de caractère fini.

Définition. Soit A une partie de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On dit que A est une base de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ si et seulement si A est libre et $\mathrm{Vect}(A) = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

17°) En utilisant le lemme de Zorn, montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ possède au moins une base.

Partie III : théorème de Zermelo.

Définition. Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. On dit que $(E, \leq)$ est bien ordonné (ou bien que $\leq$ est un bon ordre sur E) si et seulement si toute partie non vide de E possède un minimum. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la relation d'ordre $\leq$ utilisée, on dit simplement que E est bien ordonné.

18°) Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. Montrer que E est bien ordonné si et seulement si E est totalement ordonné et s'il n'existe pas de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E strictement décroissante.

19°) Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné admettant un maximum noté m. Si $E \setminus \{m\}$ est bien ordonné, montrer que E est aussi bien ordonné.

20°) Soit X un ensemble quelconque. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble de tous les couples (A, R) tels que A est une partie de X et R est un bon ordre sur A.
Si (A, R) et (B, S) sont deux éléments de $\mathcal{E}$, on convient que $(A, R) \leq (B, S)$ si et seulement si

— $A \subset B$;

— pour tout $x, y \in A$, $x \ R \ y \Longleftrightarrow x \ S \ y$;

— Dans l'ensemble ordonné (B, S), $A \lhd B$.

Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{E}$.

21°) Soit $\mathcal{F}$ une partie totalement ordonnée de $\mathcal{E}$. Posons $M = \bigcup\limits_{(A,R)\in\mathcal{F}} A$.

Lorsque $x, y \in M$, on convient que $x \ U \ y$ si et seulement si $x \ R \ y$, où $(A, R) \in \mathcal{F}$ avec $x, y \in A$.
Montrer que la relation binaire U est correctement définie et que c'est une relation d'ordre sur M.

22°) Avec les notations de la question précédente, montrer que (M, U) est bien ordonné.

23°) Montrer que $\mathcal{E}$ est inductif.

24°) En utilisant le lemme de Zorn, en déduire le théorème de Zermelo :
montrer que tout ensemble X possède un bon ordre.