Résumé de cours :
Semaine 2, du 13 au 17 septembre.

1 Dérivation et intégration (suite)

1.1 Dérivation et monotonie

Théorème. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, où I est un **intervalle** de $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable sur I.

— f est constante sur I si et seulement si f' est identiquement nulle sur I.
— f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ \ f'(x) \geq 0$.
— f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ \ f'(x) \leq 0$.
— Si $f'(x)$ est de signe constant sur I et si $\{x \in I / f'(x) = 0\}$ est fini, alors f est strictement monotone.

Il faut savoir redémontrer les propriétés suivantes. Il faut aussi les connaître pour les utiliser éventuellement sans démonstration.

— pour tout $x > 0$, $\sin x < x$.
— Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.
— Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \mathrm{sgn}(t) \times \frac{\pi}{2}$.

1.2 Intégration

Définition. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $f\ :\ [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On note $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ (prononcer "intégrale de a à b de f(t) dt") l'aire comprise entre l'axe des abscisses (noté Ox) et le graphe de f, en comptant positivement les aires au dessus de l'axe Ox (donc lorsque $f(x) \geq 0$) et négativement les aires situées au dessous de l'axe Ox (lorsque $f(x) \leq 0$).

Convention : Avec les notations et hypothèses précédentes, on convient que
$\displaystyle\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$ et que $\displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$.

Propriété. Soit I un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.
Soit f et g deux applications continues de I dans $\mathbb{R}$.
Soit $a, b \in I$ (on peut avoir $a < b$, $b < a$ ou bien $a = b$).

— Linéarité : Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.
— Relation de Chasles : Pour tout $c \in I$, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Soit $a, b \in I$: **on suppose maintenant que** $a \leq b$.

— Positivité : si $f \geq 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geq 0$.
— Croissance de l'intégrale : si $f \leq g$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

— Inégalité triangulaire : $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.

Propriété. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application **continue et positive**, telle que $\int_a^b f(t)dt = 0$. Alors f est identiquement nulle sur $[a, b]$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et soit f et g deux applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors $\left|\int_a^b f(t)g(t)\ dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2\ dt} \times \sqrt{\int_a^b g(t)^2\ dt}$,
avec égalité si et seulement si f et g sont colinéaires,
c'est-à-dire si et seulement si $f = 0$ ou bien il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in [a, b]$, $g(x) = \lambda f(x)$.

1.3 Primitivation

Définition. Soit I un intervalle et f une application continue de I dans $\mathbb{R}$.
On dit que F est une primitive de f sur I si et seulement si F est dérivable et $F' = f$.

Propriété. Avec les hypothèses et notations précédentes, si F_0 est une primitive de f, alors les autres primitives de f sont exactement les applications $F_0 + k$, où k est une fonction constante.

Théorème : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans $\mathbb{R}$ que l'on suppose continue. Soit $x_0 \in I$. Alors $x \longmapsto \int_{x_0}^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en x_0.

Corollaire. Soit f une application continue d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$.
Si F est une primitive de f, alors pour tout $a, b \in I$, $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \triangleq [F(t)]_a^b$.

Corollaire. Si f est une application de classe C^1 sur $[a, b]$, $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$.

Notation. L'écriture "$\int f(t)dt = F(t) + k, t \in I$" signifiera que f est continue sur I et que l'ensemble des primitives de f est $\{F + k / k \in \mathbb{R}\}$.

Il faut savoir calculer les primitives suivantes :
$\int \cos t dt$, $\int x^\alpha dx$ (où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$), $\int \cos^2 x dx$, $\int \frac{dx}{1 + x^2}$ et $\int \frac{2x dx}{(x^2 + 1)^2}$.

Propriété. Avec $a \neq 0$, si $\int f(t)dt = F(t) + k$, alors $\int f(at + b)dt = \frac{1}{a} F(at + b) + k$.

Remarque. Si f est une application continue d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ et si $u : J \longrightarrow I$ et $v : J \longrightarrow I$ sont des applications dérivables sur un intervalle J, on calcule la dérivée de $t \longmapsto \int_{u(t)}^{v(t)} f(x)dx$ en utilisant une primitive F de f :
$\int_{u(t)}^{v(t)} f(x)dx = F(v(t)) - F(u(t))$ a pour dérivée $v'(t)f(v(t)) - u'(t)f(u(t))$.

2 Fonctions Logarithmes et puissances

2.1 Quelques théorèmes d'analyse

On montrera plus tard les théorèmes suivants :

Théorème de la limite monotone : On pose $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.
Soit $(m, M) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ avec $m < M$. Notons $I =]m, M[$.

Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$ que l'on suppose monotone.
Alors la quantité $f(x)$ possède une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, lorsque x tend vers m (resp : M).

Théorème. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et soit f une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
Alors f est bornée et elle atteint ses bornes, c'est-à-dire
qu'il existe $\alpha, \beta \in [a, b]$ tel que, pour tout $x \in [a, b]$, $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$.

Notation. Pour la suite de ce paragraphe, on fixe un intervalle I de cardinal infini.

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) :
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue à valeurs réelles. Soit $a, b \in I$ avec $a < b$. Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.

Seconde formulation du TVI :
L'image d'un intervalle par une application continue à valeurs réelles est un intervalle.

Théorème. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Théorème de la bijection : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et strictement monotone. Alors f est une bijection de I dans $f(I)$ et $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ est également **continue** et strictement monotone (de même sens de variation que f).

Définition. Soit $f : I \longrightarrow J$ où I et J sont deux intervalles. Soit $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. On dit que f est un C^n-difféomorphisme si et seulement si f est une bijection de I sur J et si f et f^{-1} sont toutes deux de classe C^n.

Caractérisation d'un difféomorphisme : Soit f une application définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. f est un C^n-difféomorphisme de I dans $f(I)$ si et seulement si f est de classe C^n et si, pour tout $x \in I$, $f'(x) \neq 0$.

2.2 Les fonctions ln et exp

La fonction Logarithme népérien : Pour tout $x > 0$, on pose $\ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$.
ln est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. $\ln(1) = 0$.
Pour tout $x > 0$, $\dfrac{d}{dx}(\ln(x)) = \dfrac{1}{x}$.
Il existe un unique $e \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(e) = 1$. e est le nombre de Neper : $e = 2,7 \pm 10^{-1}$.
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$,

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$: A savoir démontrer.
- $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln x$, $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$,
- $\ln(x^n) = n \ln x$,
- $\ln(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -\infty$, $\ln(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\dfrac{\ln(t)}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: A savoir démontrer.

La fonction exponentielle : c'est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.
exp est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\exp(\ln x) = x$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln(\exp(x)) = x$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dx}(\exp(x)) = \exp(x)$.
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$,

- $e^{x+y} = e^x e^y$,
- $e^0 = 1$ et $e^1 = e$,
- $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$, $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$,
- $e^{nx} = (e^x)^n$.

— $e^t \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, $e^t \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. $\dfrac{e^t}{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Représentation graphique de $\ln$ **et** $\exp$: A connaître

Logarithmes et exponentielles en base a.

— Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln_a(x) \triangleq \dfrac{\ln x}{\ln a}$.
  Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$,
  — $\ln_a(xy) = \ln_a x + \ln_a y$,
  — $\ln_a(1) = 0$ et $\ln_a(a) = 1$,
  — $\ln_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln_a x$, $\ln_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln_a x - \ln_a y$,
  — $\ln_a(x^b) = b\ln_a x$,

— Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. $\forall x \in \mathbb{R},\ a^x \triangleq e^{x\ln a} = \exp_a(x)$.
  $\forall x \in \mathbb{R},\ \ln_a(a^x) = x$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ a^{\ln_a x} = x$.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{d}{dx}(a^x) = (\ln a)a^x$.
  Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,
  — $a^{x+y} = a^x a^y$,
  — $a^0 = 1$ et $a^1 = a$, $a^x > 0$,
  — $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$, $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$,
  — pour tout $b \in \mathbb{R}$, $a^{bx} = (a^x)^b$.
  — Pour tout $b > 0$, $a^x b^x = (ab)^x$.

2.3 Fonctions puissances

Définition. Un monôme de degré $n \in \mathbb{N}$ est une application de la forme $x \longmapsto ax^n$, où a est un paramètre réel. Cette application est définie sur $\mathbb{R}$.
Une fonction polynomiale est une somme finie de monômes.
Lorsque $n \in \mathbb{Z}$ avec $n < 0$, $x \longmapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}^*$.
Représentation graphique de $x \longmapsto x^n$ lorsque $n \in \mathbb{Z}$: A connaître.

Représentation graphique de $x \longmapsto x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, lorsque x décrit $\mathbb{R}_+^*$: A connaître.
Convention : Pour tout $b \in \mathbb{R}_+^*$, $0^b = 0$ et $\boxed{0^0 = 1}$.

3 Etude d'une fonction

3.1 Plan d'étude

Plan d'étude d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

1. Calcul du domaine de définition de f.
2. Si f est paire, impaire ou/et périodique, on peut réduire le domaine d'étude.
3. Calcul de $f'(x)$ et étude de son signe.
4. Tableau de variations de f. Indiquez notamment les limites de f aux bornes des intervalles.
5. Etude des branches infinies si $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$.

3.2 Etude des branches infinies

Soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. On suppose que $f(x) \underset{x\to\varepsilon\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$.

1. S'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to\varepsilon\infty}{\longrightarrow} \mu$, on dit que le graphe de f admet une direction asymptotique de pente μ.
   - S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) - \mu x \underset{x\to\varepsilon\infty}{\longrightarrow} \alpha$, la droite affine d'équation $y = \mu x + \alpha$ est une asymptote de la courbe au voisinage de $\varepsilon\infty$.
   - Si $f(x) - \mu x \underset{x\to\varepsilon\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, on dit que le graphe de f présente au voisinage de $\varepsilon\infty$ une branche parabolique de pente μ.

     En particulier, lorsque $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to\varepsilon\infty}{\longrightarrow} 0$, on est en présence d'une branche parabolique horizontale.
   - Autres cas : il y a seulement une direction asymptotique.
2. Si $\dfrac{f(x)}{x} \underset{x\to\varepsilon\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$, le graphe de f admet une branche parabolique verticale.
3. Autres cas : on ne peut rien dire.

4 Déformations du graphe

Notation. f désigne une fonction de D dans $\mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}$.

Propriété. On fixe un réel a.
- Le graphe de $x \longmapsto f(x) + a$ se déduit du graphe de f par la translation de vecteur $a\overrightarrow{j}$.
- Le graphe de $x \longmapsto f(x + a)$ se déduit du graphe de f par la translation de vecteur $-a\overrightarrow{i}$. A savoir établir.
- Le graphe de $x \longmapsto f(a - x)$ se déduit du graphe de f par la symétrie orthogonale selon la droite verticale d'abscisse $\frac{a}{2}$.
- Le graphe de $x \longmapsto f(ax)$ se déduit du graphe de f par l'affinité orthogonale d'axe invariant Oy et de coefficient $\frac{1}{a}$, qui correspond, en identifiant un point avec le couple de ses coordonnées, à la tranformation $(x, y) \longmapsto (\frac{x}{a}, y)$ (A savoir établir). Ceci a pour effet,
  - lorsque $a > 1$, d'écraser le graphe de f d'un facteur a vers l'axe des ordonnées, parallèlement à l'axe Ox,
  - lorsque $0 < a < 1$, d'étirer le graphe de f d'un facteur $\frac{1}{a}$ autour de l'axe Oy, parallèlement à l'axe Ox.
- Le graphe de $x \longmapsto af(x)$ se déduit du graphe de f par une affinité d'axe invariant Ox et de coefficient a, i.e par la transformation $(x, y) \longmapsto (x, ay)$.

5 Trigonométrie hyperbolique

Définition. On définit les fonctions usuelles suivantes :
- cosinus hyperbolique : $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$,
- sinus hyperbolique : $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$,
- tangente hyperbolique : $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{th}x = \dfrac{\text{sh}x}{\text{ch}x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

Propriété. Les fonctions sh, ch et th sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et
$\text{ch}' = \text{sh}, \quad \text{sh}' = \text{ch},\ \text{th}'(x) = 1 - \text{th}^2 x = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$.
Il faut connaître les graphes de sh, ch et th.

Toute formule de la trigonométrie circulaire est associée avec une formule duale de la trigonométrie hyperbolique. Cependant, le programme officiel se limite à la formule suivante :
Formule : $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$.

Mais il n'est pas interdit de connaître quelques formules de trigonométrie hyperbolique :
- $\text{ch}(a+b) = \text{ch}a.\text{ch}b + \text{sh}a.\text{sh}b$,
- $\text{sh}(a+b) = \text{sh}a.\text{ch}b + \text{ch}a.\text{sh}b$,
- $\text{ch}^2 a = \dfrac{\text{ch}(2a)+1}{2}$, $\text{sh}^2 a = \dfrac{\text{ch}(2a)-1}{2} \geq 0$.