Résumé de cours :
Semaine 16, du 17 janvier au 21.

Les équations différentielles (fin)

1 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 (fin)

1.1 Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Ici, $(E)\ :\ y" + ay' + by = f(x)$, où $f\ :\ I \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue, et où a et b sont des constantes.
L'équation homogène associée est $(H)\ :\ y" + ay' + by = 0$.

1.1.1 Résolution de (H) : Il faut savoir le démontrer.

$\chi = X^2 + aX + b$ est appelé le polynôme caractéristique de (H) ou de (E).
• *Premier cas.* Si $\Delta = a^2 - 4b \neq 0$, χ admet deux racines complexes distinctes λ et μ.
Alors $(H) \Longleftrightarrow \exists (u,v) \in \mathbb{K}^2\ \ \forall x \in \mathbb{R}\ \ y(x) = ue^{\lambda x} + ve^{\mu x}$.
Cas particulier où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *avec* $\Delta < 0$: alors $\lambda = \alpha + i\beta$ et $\mu = \alpha - i\beta$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $(H) \Longleftrightarrow \exists (u,v) \in \mathbb{R}^2\ \ \forall x \in \mathbb{R}\ \ y(x) = ue^{\alpha x}\cos\beta x + ve^{\alpha x}\sin\beta x$.
• *Deuxième cas.* Si $\Delta = 0$: χ admet une racine double notée λ.
Alors $(H) \Longleftrightarrow \exists (u,v) \in \mathbb{K}^2\ \ \forall x \in \mathbb{R}\ \ y(x) = e^{\lambda x}(u + xv)$.

1.1.2 Résolution de l'équation avec second membre

Théorème. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ et un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ tels que
$\forall x \in I \quad f(x) = e^{\lambda x}P(x)$. Alors (E) admet une solution particulière de la forme $x \longmapsto Q(x)e^{\lambda x}$, où Q est une application polynomiale.
Plus précisément, (E) admet sur I une solution particulière de la forme $x \longrightarrow x^m e^{\lambda x}Q(x)$ où Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de même degré que P, avec $m = 0$ lorsque λ n'est pas racine de χ, avec $m = 1$ lorsque λ est une racine simple de χ et avec $m = 2$ lorsque λ est une racine double de χ.

Remarque. Ce théorème est aussi valable pour les équations différentielles de la forme
$(E)\ :\ y' + by = e^{\lambda x}P(x)$ où $P \in \mathbb{K}[X]$: (E) admet sur I une solution particulière de la forme $x \longmapsto Q(x)e^{\lambda x}$, où Q est une application polynomiale.
Plus précisément, (E) admet une solution particulière de la forme $x \longrightarrow x^m e^{\lambda x}Q(x)$ où Q est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de même degré que P, avec $m = 0$ lorsque $\lambda \neq -b$ et $m = 1$ lorsque $\lambda = -b$ (dans ce cas, $\chi = X + b$).

Remarque. Lorsque $f(x)$ est de la forme $f(x) = P(x)\cos(\omega x)$ où $\omega \in \mathbb{R}$, ou bien de la forme $f(x) = P(x)\sin(\omega x)$, on peut appliquer ce qui précède en se ramenant à $x \longmapsto P(x)e^{i\omega x}$.

Remarque. Plus généralement, lorsque $f(x)$ est de la forme $P(x)e^{Q(x)}$, où P et Q sont des polynômes, on peut chercher une solution particulière de la forme $H(x)e^{Q(x)}$, où H est aussi un polynôme.

2 Equations à variables séparables (hors programme)

2.1 Equations à variables séparées

Notation.
Soient I et K deux intervalles infinis et soient $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $b : K \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications continues.
L'équation différentielle $(E)\ :\ a(t) - b(y)y' = 0$ est appelée une équation est à variables séparées.
Si A et B sont des primitives de a et de b respectivement,
$(E) \Longleftrightarrow \dfrac{d\big(A(t) - B(y(t))\big)}{dt} = 0$, donc les courbes intégrales de (E) ont pour équations cartésiennes $A(x) = B(y) + C$, où $C \in \mathbb{R}$.
En pratique, on écrira $(E) \Longleftrightarrow a(t)dt = b(y)dy \Longleftrightarrow A(t) = B(y) + C$.

2.2 Cas général

Notation. Soient I et K deux intervalles infinis. Soient a et d deux applications continues de I dans $\mathbb{R}$ et b et c deux applications continues de K dans $\mathbb{R}$. L'équation $(E)\ :\ a(t)c(y) - b(y)d(t)y' = 0$ est appelée une équation est à variables séparables.
En divisant par $c(y)$ et $d(t)$ on se ramene à une équation à variables séparées.
• Plus précisément, soit $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable. Quitte à restreindre l'intervalle I, on supposera que d ne s'annule pas sur I. Ainsi $(E) \Longleftrightarrow \dfrac{a(t)}{d(t)}c(y) - y'b(y) = 0$.
Il faudra ensuite étudier les possibles raccordements des solutions en chaque zéro de d.
• Si $y_0 \in K$ est un zéro de c, l'application constante $y = y_0$ est une solution de (E). Ainsi chaque zéro de c fournit une solution particulière.
On suppose ensuite que $\forall t \in I\ \ c(y(t)) \neq 0$. Alors $(E) \Longleftrightarrow \dfrac{a(t)}{d(t)} - y'\dfrac{b(y)}{c(y)} = 0$: c'est une équation à variables séparées, donc on est ramené au a). Il reste ensuite à étudier les possibles recollements de ces dernières solutions avec les solutions particulières $y = y_0$ où y_0 est un zéro de c.

Espaces vectoriels normés

3 Définition d'une norme

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . On appelle norme sur E toute application $\|.\|\ : E \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, y, \lambda) \in E \times E \times \mathbb{K}$,
- ⋄ $\|x\| \geq 0$ (positivité).
- ⋄ $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$ ($\|.\|$ est définie),
- ⋄ $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ ($\|.\|$ est homogène), et
- ⋄ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, cette dernière propriété étant appelée l'inégalité triangulaire.

Si $\|.\|$ est une norme sur E, le couple $(E, \|.\|)$ est appelé un espace vectoriel normé.

Remarque. Si E est un espace vectoriel normé , $\|0\| = 0$.

Corollaire de l'inégalité triangulaire. $\forall (x, y) \in E^2\ \ |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.
Il faut savoir le démontrer.

Définition.
Soient E un espace vectoriel normé et $u \in E$. u est unitaire si et seulement si $\|u\| = 1$.
Si $u \neq 0$, on appelle vecteur unitaire associé à u le vecteur $\dfrac{u}{\|u\|}$, qui est bien unitaire.

Définition. Soient E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E.
La restriction à F de la norme de E fait de F un espace vectoriel normé.

Exemple. Sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$, $|.|$ est une norme.

4 Les normes 1, 2 et ∞.

4.1 Cas des sommes finies.

Propriété. Sur $\mathbb{K}^n$, on dispose de trois normes classiques.

$$\begin{array}{rrcl} \|.\|_1 : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x=(x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \|x\|_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i| \end{array},$$

$$\begin{array}{rrcl} \|.\|_2 : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x=(x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \|x\|_2 = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \end{array}, \text{ et}$$

$$\begin{array}{rrcl} \|.\|_\infty : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x=(x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \|x\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} |x_i| \end{array}.$$

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. (Hors programme) Soit $p \in]1,+\infty[$.

Alors $\begin{array}{rrcl} \|.\|_p : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x=(x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \|x\|_p = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{array}$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$.

Remarque. $\forall x \in \mathbb{K}^n \ \ \|x\|_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} \|x\|_\infty$. Cela justifie la notation $\|.\|_\infty$.

Propriété. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et E_1, ..., E_p p $\mathbb{K}$-espaces vectoriels munis de normes respectivement notées $\|.\|_{E_1}$, ..., $\|.\|_{E_p}$. Alors $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ est un espace vectoriel normé si on le munit de l'une des normes classiques suivantes.

$$\begin{array}{rrcl} N_1 : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x=(x_1,\dots,x_p) & \longmapsto & N_1(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^p \|x_i\|_{E_i} \end{array},$$

$$\begin{array}{rrcl} N_2 : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x=(x_1,\dots,x_p) & \longmapsto & N_2(x) = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^p \|x_i\|_{E_i}^2} \end{array}, \text{ et}$$

$$\begin{array}{rrcl} N_\infty : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x=(x_1,\dots,x_p) & \longmapsto & N_\infty(x) = \max\limits_{1\le i\le p} \|x_i\|_{E_i} \end{array}.$$

4.2 Cas des intégrales sur un intervalle compact

Propriété. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$, on dispose de trois normes classiques.

$$\begin{array}{rccl} \|.\|_1 : & \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & f & \longmapsto & \|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f(x)|dx \end{array},$$

$$\begin{array}{rccl} \|.\|_2 : & \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & f & \longmapsto & \|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_a^b |f(x)|^2 dx} \end{array}, \text{ et}$$

$$\begin{array}{rccl} \|.\|_\infty : & \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & f & \longmapsto & \|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x)| \end{array}.$$

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. (Hors programme) Soit $p \in]1,+\infty[$.

Alors $\begin{array}{rccl} \|.\|_p : & \mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & f & \longmapsto & \|f\|_p = \left(\displaystyle\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \end{array}$ est une norme sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$.