DS 5 : un corrigé

Questions préliminaires

1°)
$\diamond$ L'addition n'est pas une loi interne sur $\mathbb{C}^*$, car par exemple, 1 et -1 sont dans $\mathbb{C}^*$, mais $1 + (-1) = 0$ n'est pas dans $\mathbb{C}^*$. A fortiori, $(\mathbb{C}^*, +)$ n'est pas un groupe.
$\diamond$ D'après le cours, $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps, donc $\mathbb{C}^*$ est l'ensemble des inversibles de l'anneau $(\mathbb{C}, +, \times)$ et, toujours d'après le cours, c'est donc un groupe pour la multiplication.

2°) $\diamond$ Soit $x \in G$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $R(n)$ l'assertion : $g(x^n) = g(x)^n$.
Pour $n = 0$, on sait d'après le cours sur les morphismes de groupes que
$g(x^0) = g(1) = 1 = g(x)^0$, d'où $R(0)$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, supposons $R(n)$ et montrons $R(n+1)$.
$g(x^{n+1}) = g(x^n.x) = g(x^n).g(x)$ car g est un morphisme, donc d'après $R(n)$, $g(x^{n+1}) = g(x)^n g(x) = g(x)^{n+1}$, ce qui prouve $R(n+1)$.
D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(x^n) = g(x)^n$.
Soit maintenant $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$. Alors, par définition de x^n, $g(x^n) = g((x^{-n})^{-1})$, donc d'après le cours sur les morphismes de groupes, $g(x^n) = (g(x^{-n}))^{-1}$, or $-n \in \mathbb{N}$, donc ce qui précède permet d'écrire que $g(x^n) = (g(x)^{-n})^{-1} = g(x)^n$, ce qu'il fallait démontrer.
$\diamond$ En notation additive, si g est un caractère d'un groupe $(G, +)$, on a donc : pour tout $x \in G$ et $a \in \mathbb{Z}$, $g(ax) = g(x)^a$.

Partie 1 : Caractères de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{R}$

3°) Soit g un caractère de $\mathbb{Z}$.
D'après la question précédente, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $g(a) = g(a \times 1) = g(1)^a$, donc si g est un caractère, il existe $r \in \mathbb{C}^*$ tel que, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $g(a) = r^a$.
Réciproquement, si g est de la forme $a \longmapsto r^a$, où $r \in \mathbb{C}^*$, on vérifie aisément que, pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$, $g(a+b) = g(a)g(b)$, donc g est bien un caractère de $\mathbb{Z}$. En conclusion, les caractères de $\mathbb{Z}$ sont exactement les applications de la forme $\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ a & \longmapsto & r^a \end{array}$, où $r \in \mathbb{C}^*$.

4°)

$\diamond$ Pour tout $r, s \in \mathbb{R}$, on a $g(r+s) = g(r)g(s)$, et g est dérivable, donc en dérivant selon r à s fixé, on obtient, pour tout $r, s \in \mathbb{R}$, $g'(r+s) = g'(r)g(s)$. De plus, en dérivant selon s à r fixé, on obtient, pour tout $r, s \in \mathbb{R}$, $g'(r+s) = g(r)g'(s)$.
Ainsi, pour tout $r, s \in \mathbb{R}$, $g'(r)g(s) = g(r)g'(s)$. De plus $g(0) = 1$, car g est un morphisme de groupes, donc, en remplaçant le couple (r, s) par $(0, t)$, on obtient que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = g(0)g'(t) = g'(0)g(t)$, ce qu'il fallait démontrer en posant $c = g'(0)$.
$\diamond$ Posons $h(t) = g(t)e^{-ct}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. h est dérivable et $h'(t) = e^{-ct}(g'(t) - cg(t))$, donc $h'(t) = 0$, ce qui prouve que h est une application constante. Or $h(0) = g(0) = 1$, donc h est l'application constante égale à 1. Ainsi, on a montré que si g est un caractère dérivable sur $\mathbb{R}$, alors il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $g = (t \longmapsto e^{ct})$.
Réciproquement, si g est de cette forme, on vérifie aisément que $g(r+s) = g(r)g(s)$ pour tout $r, s \in \mathbb{R}$.
En conclusion, l'ensemble des caractères dérivables de $\mathbb{R}$ est $\{t \longmapsto e^{ct} \ / \ c \in \mathbb{C}\}$.

5°) Soit g un caractère continu de $\mathbb{R}$.
Si, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^\varepsilon g(t)\ dt = 0$, alors en dérivant par rapport à ε, on obtient que $g(\varepsilon) = 0$ pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$, ce qui est faux car g est à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. Ainsi, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^\varepsilon g(t)\ dt \neq 0$.
Pour tout $r \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^\varepsilon g(r+t)\ dt = g(r)\int_0^\varepsilon g(t)\ dt$, puis par changement de variables, $\displaystyle g(r)\int_0^\varepsilon g(t)\ dt = \int_r^{r+\varepsilon} g(t)\ dt$, donc en notant G une primitive de g, on peut écrire que, pour tout $r \in \mathbb{R}$, $g(r) = \dfrac{G(r+\varepsilon) - G(r)}{\int_0^\varepsilon g(t)dt}$, or G est de classe C^1, donc, ε étant fixé, g est aussi de classe C^1.
Ainsi, l'ensemble des caractères continus de $\mathbb{R}$ est inclus dans l'ensemble des caractères dérivables de $\mathbb{R}$. L'inclusion réciproque étant évidente, d'après la question précédente, l'ensemble des caractères continus de $\mathbb{R}$ est $\{t \longmapsto e^{ct} \ / \ c \in \mathbb{C}\}$.

Partie 2 : Liberté de l'ensemble des caractères

Cas d'un groupe commutatif

6°) Soit $x, y \in G$. On a $g(x+y) = g(x)g(y)$,
or $\displaystyle g(x+y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x+y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(x)g_i(y)$ et $\displaystyle g(x)g(y) = \sum_{1 \le i,j \le n} \lambda_i\lambda_j g_i(x)g_j(y)$,
donc $\displaystyle\sum_{i=1}^n g_i(x)\Big(\lambda_i g_i(y) - \sum_{j=1}^n \lambda_i\lambda_j g_j(y)\Big) = 0$.

Fixons y dans G et posons, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\mu_i = \lambda_i g_i(y) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j g_j(y)$. Alors on peut écrire que $\sum_{i=1}^{n} \mu_i g_i = 0$, or $(g_1, \ldots, g_n)$ est supposé libre, donc pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $0 = \mu_i = \lambda_i(1-\lambda_i)g_i(y) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_i \lambda_j g_j(y)$. Mais cette égalité étant vraie pour tout $y \in \mathbb{R}$, la liberté de $(g_1, \ldots, g_n)$ impose que $\lambda_i(1-\lambda_i) = 0$, et $\lambda_i \lambda_j = 0$ pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$ avec $i \neq j$.
Cependant g est non nul, car g est à valeurs dans $\mathbb{C}^*$, donc il existe $i_0 \in \mathbb{N}_n$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. Alors on peut affirmer que $\lambda_{i_0} = 1$ et que pour tout $j \in \mathbb{N}_n \setminus \{i_0\}$, $\lambda_j = 0$.
Ceci prouve que $g = g_{i_0}$, ce qu'il fallait démontrer.

7°) D'après le cours, il suffit de montrer que toute partie finie de $\mathcal{G}$ est libre, ce que l'on va démontrer par récurrence sur le cardinal de la partie finie.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $R(n)$ l'assertion suivante : toute famille de n caractères distincts de G est libre.
Pour $n = 0$, une famille vide est toujours libre, d'où $R(0)$.
Pour $n = 1$, si $g \in \mathcal{G}$, alors $g \neq 0$, donc la famille (g) est libre, d'où $R(1)$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $R(n)$ et montrons $R(n+1)$.
Soit $g_1, \ldots, g_{n+1}$ $n+1$ caractères de G que l'on suppose distincts deux à deux.
Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i g_i = 0$.
Supposons qu'il existe $i_0 \in \mathbb{N}_{n+1}$ tel que $\alpha_{i_0} \neq 0$. Quitte à réordonner les vecteurs $g_1, \ldots, g_{n+1}$, on peut supposer que $i_0 = n+1$.
Alors $g_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$, en posant $\lambda_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_{n+1}}$.
D'après $R(n)$, $(g_1, \ldots, g_n)$ est libre, donc d'après la question précédente, il existe $i \in \mathbb{N}_n$ tel que $g_{n+1} = g_i$, ce qui est faux par hypothèse. Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}_{n+1}$, $\alpha_i = 0$, ce qui prouve que la famille $(g_1, \ldots, g_{n+1})$ est libre. On a montré $R(n+1)$.
Le principe de récurrence permet de conclure.

Cas d'un groupe fini

8°) Soit g un caractère de G. Soit $x \in G$. D'après le cours, $x^n = 1$, donc d'après la question 2, $1 = g(1) = g(x^n) = g(x)^n$, ce qui prouve que $g(x) \in \mathbb{U}_n$.

9°) ◇ Supposons d'abord que $g = h$. Alors $\langle g|h \rangle = \langle g|g \rangle = \frac{1}{n} \sum_{x \in G} |g(x)|^2 = 1$, car d'après la question précédente, pour tout $x \in G$, $g(x) \in \mathbb{U}$.
◇ On suppose maintenant que $g \neq h$. Ainsi, il existe $x_0 \in G$ tel que $g(x_0) \neq h(x_0)$.

Lorsque $z \in \mathbb{U}$, $z\overline{z} = |z|^2 = 1$, donc $\overline{z} = \frac{1}{z}$. Ainsi, d'après la première question, $\langle g|h\rangle = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{x \in G} \frac{g(x)}{h(x)}$. L'application $\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x_0 x \end{array}$ est une bijection, dont la bijection réciproque est $\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x_0^{-1}x \end{array}$, donc par changement de variable,
$\langle g|h\rangle = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{x \in G} \frac{g(x_0 x)}{h(x_0 x)} = \frac{g(x_0)}{h(x_0)}\frac{1}{n}\sum_{x \in G}\frac{g(x)}{h(x)}$ car g et h sont des morphismes.
Ainsi $\langle g|h\rangle = \dfrac{g(x_0)}{h(x_0)}\langle g|h\rangle$, or $\dfrac{g(x_0)}{h(x_0)} \neq 1$, donc le complexe $\langle g|h\rangle$ est bien nul.

10°) G est fini, donc l'ensemble des applications de G dans $\mathbb{U}_n$ étant fini, $\mathcal{G}$ est aussi fini. Soit $(\alpha_g)_{g \in \mathcal{G}} \in \mathbb{C}^{\mathcal{G}}$ une famille de complexes telle que $\displaystyle\sum_{g \in \mathcal{G}} \alpha_g g = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in G$, $\displaystyle\sum_{g \in \mathcal{G}} \alpha_g g(x) = 0$

Soit $h \in \mathcal{G}$. Alors $0 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{x \in G}\Big(\sum_{g \in \mathcal{G}} \alpha_g g(x)\Big)\overline{h(x)} = \sum_{g \in \mathcal{G}} \alpha_g \frac{1}{n}\sum_{x \in G} g(x)\overline{h(x)}$,

donc $0 = \displaystyle\sum_{g \in \mathcal{G}} \alpha_g \langle g|h\rangle$. Alors, d'après la question précédente, $0 = \alpha_h\langle h|h\rangle = \alpha_h$.
Ceci prouve que $\mathcal{G}$ est libre.

Partie 3 : Le groupe dual

11°) $\diamond$ Soit $f, g \in \mathrm{Hom}(G, H)$. Montrons que fg est encore un élément de $\mathrm{Hom}(G, H)$:
Soit $x, y \in G$: $(fg)(xy) = f(xy)g(xy)$ par définition de fg, or f et g sont des morphismes, donc $(fg)(xy) = f(x)f(y)g(x)g(y)$. De plus H est commutatif, donc $(fg)(xy) = f(x)g(x)f(y)g(y) = (fg)(x).(fg)(y)$.
Ainsi, la définition de fg lorsque $f, g \in \mathrm{Hom}(G, H)$ est une loi interne sur $\mathrm{Hom}(G, H)$.
$\diamond$ Pour tout $f, g \in \mathrm{Hom}(G, H)$, pour tout $x \in G$,
$(fg)(x) = f(x)g(x) = g(x)f(x) = (gf)(x)$, car H est abélien, donc $fg = gf$. Cette loi interne est donc commutative.
$\diamond$ Notons $\mathbf{1}$ l'application de G dans H constante, égale à 1_H. On vérifie que, pour tout $x, y \in G$, $\mathbf{1}(xy) = \mathbf{1}(x)\mathbf{1}(y)$, donc $\mathbf{1} \in \mathrm{Hom}(G, H)$.
On vérifie facilement que, pour tout $f \in \mathrm{Hom}(G, H)$, $\mathbf{1}f = f$, donc $\mathbf{1}$ est un élément neutre.
$\diamond$ Pour tout $f, g, h \in \mathrm{Hom}(G, H)$, pour tout $x \in G$,
$(f(gh))(x) = f(x)[(gh)(x)] = f(x)[g(x)h(x)]$, or la multiplication dans H est associative, donc $(f(gh))(x) = [f(x)g(x)]h(x) = ((fg)h)(x)$. Ainsi, $f(gh) = (fg)h$, ce qui prouve l'associativité.
$\diamond$ Soit $f \in \mathrm{Hom}(G, H)$. Pour tout $x \in G$, posons $g(x) = f(x)^{-1}$.
Soit $x, y \in G$: $g(xy) = f(xy)^{-1} = (f(x)f(y))^{-1} = f(y)^{-1}f(x)^{-1}$, or H est commutatif, donc $g(xy) = f(x)^{-1}f(y)^{-1} = g(x)g(y)$. Ceci prouve que $g \in \mathrm{Hom}(G, H)$.

De plus, pour tout $x \in G$, $(fg)(x) = f(x)f(x)^{-1} = 1_H$, donc $fg = \mathbf{1}$. Ceci montre que tout élément de $\mathrm{Hom}(G,H)$ possède un inverse dans $\mathrm{Hom}(G,H)$.

$\diamond$ En conclusion, $\mathrm{Hom}(G,H)$ est un groupe abélien, dont l'élément neutre est $\mathbf{1}$ et tel que, pour tout $f \in \mathrm{Hom}(G,H)$, pour tout $x \in G$, $(f^{-1})(x) = f(x)^{-1}$.

$\diamond$ Lorsque $(H,.) = (\mathbb{C}^*,.)$, qui est bien commutatif, $\mathrm{Hom}(G,H) = \mathcal{G}$, donc $\mathcal{G}$ possède une structure de groupe abélien.

12°)

$\diamond$ Soit $\tau = (a\ b)$ une transposition de $\mathcal{S}_m$. Il existe $\sigma \in \mathcal{S}_m$ telle que $\sigma(a) = 1$ et $\sigma(b) = 2$ (en fait il en existe exactement $(m-2)!$ et $(m-2)! \geq 1$ car $m \geq 2$). Alors on vérifie que $\tau = \sigma^{-1}(1\ 2)\sigma$: en effet, $\sigma^{-1}(1\ 2)\sigma(a) = \sigma^{-1}(1\ 2)(1) = \sigma^{-1}(2) = b = \tau(a)$, $\sigma^{-1}(1\ 2)\sigma(b) = \sigma^{-1}(1\ 2)(2) = \sigma^{-1}(1) = a = \tau(b)$ et lorsque $x \in \mathbb{N}_m \setminus \{a,b\}$,
$\sigma(x) \notin \{1,2\}$ (car σ est injective), donc $(1\ 2)(\sigma(x)) = \sigma(x)$,
puis $\sigma^{-1}(1\ 2)\sigma(x) = \sigma^{-1}\sigma(x) = x = \tau(x)$.

$\diamond$ Soit $g \in \mathcal{G}$. Alors, avec les notations précédentes,
$g((a\ b)) = g(\sigma)^{-1}g((1\ 2))g(\sigma) = g((1\ 2))$, car la multiplication dans $\mathbb{C}$ est commutative.
De plus $g((1\ 2))^2 = g((1\ 2)^2) = g(Id_{\mathbb{N}_m}) = 1$, donc $g((1\ 2)) \in \{1,-1\}$.
Supposons d'abord que $g((1\ 2)) = 1$. Ainsi, pour toute transposition τ de $\mathcal{S}_m$, $g(\tau) = 1$. D'après le cours, si $\sigma \in \mathcal{S}_m$, σ se décompose comme un produit de transpositions. Or g est un morphisme, donc $g(\sigma) = 1$. Ainsi, g est l'application constante égale à 1.
Supposons maintenant que $g((1\ 2)) = -1$, alors en reprenant le raisonnement précédent, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_m$, $g(\sigma) = (-1)^n$ où n est le nombre de transpositions qui interviennent dans la décomposition de σ. Ainsi, g est la signature, notée ε.
Réciproquement, on sait que ces deux applications sont bien des morphimes.
En conclusion, le groupe dual de $\mathcal{S}_m$ est égal $\{1,\varepsilon\}$.

13°) Notons encore $\mathcal{G}$ le groupe dual de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

$\diamond$ D'après la question 8, pour tout $g \in \mathcal{G}$, $\varphi(g) = g(\overline{1}) \in \mathbb{U}_n$.

$\diamond$ Soit $g,h \in \mathcal{G}$. $\varphi(gh) = (gh)(\overline{1}) = g(\overline{1})h(\overline{1}) = \varphi(g)\varphi(h)$, donc φ est un morphisme de $\mathcal{G}$ dans $\mathbb{U}_n$.

$\diamond$ Soit $g \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. On a $g(\overline{1}) = 1$, donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, d'après la question 2, $g(\overline{k}) = g(k.\overline{1}) = g(\overline{1})^k = 1$. Ainsi $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{\mathbf{1}\}$, ce qui prouve que φ est injective.

$\diamond$ Soit $\alpha \in \mathbb{U}_n$. Notons $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & \overline{k} & \longmapsto & \alpha^k \end{array}$. g est correctement défini, car si $h,k \in \mathbb{Z}$ avec $\overline{h} = \overline{k}$, alors $k-h$ est un multiple de n, or $\alpha^n = 1$, donc $\alpha^{k-h} = 1$ puis $\alpha^k = \alpha^h$.
Pour tout $h,k \in \mathbb{Z}$, $g(\overline{h}+\overline{k}) = \alpha^k\alpha^h = g(\overline{h})g(\overline{k})$, donc $g \in \mathcal{G}$. De plus $\varphi(g) = g(\overline{1}) = \alpha$, donc φ est une surjection de $\mathcal{G}$ dans $\mathbb{U}_n$.
En conclusion, φ est un isomorphisme de $\mathcal{G}$ dans $\mathbb{U}_n$.

14°) $\diamond$ Lorsque $f \in \mathrm{Hom}(G_1 \times \cdots \times G_m, H)$, on note, pour tout $i \in \mathbb{N}_m$,
$\begin{array}{rccc} \varphi_i(f): & G_i & \longrightarrow & H \\ & x & \longmapsto & f(1_{G_1},\ldots,1_{G_{i-1}},x,1_{G_{i+1}},\ldots,1_{G_m}) \end{array}$.
Soit $i \in \mathbb{N}_m$ et $f \in \mathrm{Hom}(G_1 \times \cdots \times G_m, H)$. Montrons que $\varphi_i(f) \in \mathrm{Hom}(G_i,H)$. En effet, pour tout $x,y \in G_i$,
$$\begin{aligned}\varphi_i(f)(xy) &= f(1_{G_1},\ldots,1_{G_{i-1}},xy,1_{G_{i+1}},\ldots,1_{G_m}) \\ &= f((1_{G_1},\ldots,1_{G_{i-1}},x,1_{G_{i+1}},\ldots,1_{G_m}).(1_{G_1},\ldots,1_{G_{i-1}},y,1_{G_{i+1}},\ldots,1_{G_m})),\end{aligned}$$

or f est un morphisme, donc
$\varphi_i(f)(xy) \;= f((1_{G_1},\ldots,1_{G_{i-1}},x,1_{G_{i+1}},\ldots,1_{G_m})).f((1_{G_1},\ldots,1_{G_{i-1}},y,1_{G_{i+1}},\ldots,1_{G_m}))$
$\qquad\qquad = \varphi_i(f)(x)\varphi_i(f)(x)$.
Ainsi, en posant, pour tout $f \in \mathrm{Hom}(G_1\times\cdots\times G_m,H)$, $\varphi(f)=(\varphi_i(f))_{1\le i\le m}$, l'application φ ainsi définie va de $\mathrm{Hom}(G_1\times\cdots\times G_m,H)$ dans $\mathrm{Hom}(G_1,H)\times\cdots\times\mathrm{Hom}(G_m,H)$.
Il reste à montrer que φ est un isomorphisme.
$\diamond$ Soit $f,g\in\mathrm{Hom}(G_1\times\cdots\times G_m,H)$. Soit $i\in\mathbb{N}_m$. Pour tout $x\in G_i$,
$\varphi_i(fg)(x) \;= (fg)(1_{G_1},\ldots,1_{G_{i-1}},x,1_{G_{i+1}},\ldots,1_{G_m})$
$\qquad\qquad = f(1_{G_1},\ldots,1_{G_{i-1}},x,1_{G_{i+1}},\ldots,1_{G_m})g(1_{G_1},\ldots,1_{G_{i-1}},x,1_{G_{i+1}},\ldots,1_{G_m})$
$\qquad\qquad = \varphi_i(f)(x)\varphi_i(g)(x)$
$\qquad\qquad = (\varphi_i(f)\varphi_i(g))(x)$,
donc $\varphi_i(fg)=\varphi_i(f)\varphi_i(g)$. On en déduit que
$\varphi(fg)=(\varphi_i(fg))_{1\le i\le m}=(\varphi_i(f)\varphi_i(g))_{1\le i\le m}=\varphi(f).\varphi(g)$ d'après la loi d'un groupe produit. Ainsi φ est un morphisme de groupes.
$\diamond$ Soit $f\in\mathrm{Ker}(\varphi)$. Alors $(\varphi_i(f))_{1\le i\le m}=\varphi(f)=(1_{Hom(G_1,H)},\ldots,1_{Hom(G_m,H)})$, donc pour tout $i\in\mathbb{N}_m$, pour tout $x_i\in G_i$, $f(1_{G_1},\ldots,1_{G_{i-1}},x_i,1_{G_{i+1}},\ldots,1_{G_m})=1$.
Soit $x=(x_1,\ldots,x_m)\in G_1\times\cdots\times G_m$. On a
$x=\displaystyle\prod_{i=1}^m(1_{G_1},\ldots,1_{G_{i-1}},x_i,1_{G_{i+1}},\ldots,1_{G_m})$, or f est un morphisme,
donc $f(x)=\displaystyle\prod_{i=1}^m f(1_{G_1},\ldots,1_{G_{i-1}},x_i,1_{G_{i+1}},\ldots,1_{G_m})=1$.
Ainsi, $f=\mathbf{1}$. Donc $\mathrm{Ker}(\varphi)=\{\mathbf{1}\}$, ce qui prouve que φ est injective.
$\diamond$ Soit $(f_1,\ldots,f_m)\in\displaystyle\prod_{i=1}^m\mathrm{Hom}(G_i,H)$.
Pour tout $x=(x_1,\ldots,x_m)\in G_1\times\cdots\times G_m$, posons $f(x)=\displaystyle\prod_{i=1}^m f_i(x_i)$.
Montrons que $f\in\mathrm{Hom}(G_1\times\cdots\times G_m,H)$ et que $\varphi(f)=(f_1,\ldots,f_m)$.
Soit $x=(x_1,\ldots,x_m)\in G_1\times\cdots\times G_m$ et $y=(y_1,\ldots,y_m)\in G_1\times\cdots\times G_m$.
Alors $f(xy)=f((x_1y_1,\ldots,x_my_m))=\displaystyle\prod_{i=1}^m f_i(x_iy_i)=\Big(\prod_{i=1}^m f_i(x_i)\Big)\Big(\prod_{i=1}^m f_i(y_i)\Big)$, car H est abélien. Ainsi, $f(xy)=f(x)f(y)$, ce qui prouve que $f\in\mathrm{Hom}(G_1\times\cdots\times G_m,H)$.
Soit $i\in\mathbb{N}_m$, soit $x_i\in G_i$. Alors
$\varphi_i(f)(x_i)=f(1_{G_1},\ldots,1_{G_{i-1}},x_i,1_{G_{i+1}},\ldots,1_{G_m})=f_i(x_i)$, car pour tout $j\in\mathbb{N}_m\setminus\{i\}$, $f_j(1_{G_j})=1_H$. Ainsi, pour tout $i\in\mathbb{N}_m$, $\varphi_i(f)=f_i$, puis $\varphi(f)=(f_1,\ldots,f_m)$.
Ceci prouve que φ est surjectif.
En conclusion, φ est un isomorphisme.

15°)
$\diamond$ D'après l'énoncé, il existe un isomorphisme f de G dans $G'=\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}\times\cdots\times\mathbb{Z}/n_q\mathbb{Z}$.
Si $g\in\mathrm{Hom}(G',\mathbb{C}^*)$ est un caractère de G', et si $x\in G$, posons $\Psi(g)(x)=g(f(x))$.
Pour tout $x,y\in G$, $\Psi(g)(xy)=g(f(x)+f(y))$, car f est un morphisme de G dans G'. Or g est aussi un morphisme, donc $\Psi(g)(xy)=g(f(x)).g(f(y))=\Psi(g)(x).\Psi(g)(y)$.

Ainsi, $\Psi(g) \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$. Ceci montre que Ψ est une application de $Hom(G', \mathbb{C}^*)$ dans $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$. Montrons que c'est un isomorphisme.

$\diamond$ Soit $g, h \in \mathrm{Hom}(G', \mathbb{C}^*)$. Pour tout $x \in G$, $\Psi(gh)(x) = (gh)(f(x)) = g(f(x)).h(f(x))$, par définition du produit dans $\mathrm{Hom}(G', \mathbb{C}^*)$,

donc $\Psi(gh)(x) = \Psi(g)(x).\Psi(h)(x) = [\Psi(g).\Psi(h)](x)$. Ainsi, $\Psi(gh) = \Psi(g).\Psi(h)$, ce qui montre que Ψ est un morphisme.

$\diamond$ Si $g \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ est un caractère de G, et si $x \in G'$, posons $\overline{\Psi}(g)(x) = g(f^{-1}(x))$. En appliquant ce qui précède à l'isomorphisme f^{-1}, on peut affirmer que $\overline{\Psi}$ est un morphisme de $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ dans $\mathrm{Hom}(G', \mathbb{C}^*)$.

Soit $g \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$. Pour tout $x \in G$,

$(\Psi \circ \overline{\Psi})(g)(x) = \Psi(\overline{\Psi}(g))(x) = \overline{\Psi}(g)(f(x)) = g(f^{-1}(f(x))) = g(x)$, donc $(\Psi \circ \overline{\Psi})(g) = g$, pour tout $g \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$. Ainsi, $\Psi \circ \overline{\Psi} = Id_{\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)}$. De même on montre que $\overline{\Psi} \circ \Psi = Id_{\mathrm{Hom}(G', \mathbb{C}^*)}$. Ceci prouve que Ψ est bijective, donc c'est bien un isomorphisme.

$\diamond$ Ainsi, $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$, le groupe dual de G, est isomorphe à $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_q\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*)$, lequel est d'après la question précédente isomorphe à $\displaystyle\prod_{i=1}^{m} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*)$.

$\diamond$ Soit $i \in \mathbb{N}_m$. D'après la question 13, $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*)$ est isomorphe à $\mathbb{U}_{n_i}$. Ce dernier est un groupe cyclique d'ordre n_i, donc d'après le cours, il est isomorphe $\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$. Il existe donc un isomorphisme f_i de $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*)$ dans $\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$.

Pour tout $g = (g_1, \ldots, g_m) \in \displaystyle\prod_{i=1}^{m} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*)$, posons $f(g) = (f_i(g_i))_{1 \leq i \leq m}$. On vérifie alors que f est un isomorphisme de $\displaystyle\prod_{i=1}^{m} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*)$ dans $\displaystyle\prod_{i=1}^{m} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$, selon les mêmes techniques que précédemment. Ainsi, par composition d'isomorphismes, on a montré que $\mathcal{G}$ est isomorphe à G : $\mathcal{G}$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_q\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*)$, lequel est isomorphe à $\displaystyle\prod_{i=1}^{m} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}, \mathbb{C}^*)$ qui est isomorphe à $\displaystyle\prod_{i=1}^{m} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z}$ lequel est isomorphe à G d'après l'énoncé.

16°)

$\diamond$ Si G n'est pas abélien, $\mathcal{G}$ est abélien donc $\mathcal{G}$ et G ne sont pas isomorphes.

$\diamond$ On a vu en question 3 que lorsque $G = \mathbb{Z}$, alors $\mathcal{G} = \{g_r \ / \ r \in \mathbb{C}^*\}$, où $g_r : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ a & \longmapsto & r^a \end{array}$. L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ r & \longmapsto & g_r \end{array}$ est une bijection dont la bijection réciproque est $\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ g & \longmapsto & g(1) \end{array}$, donc d'après le cours $G = \mathbb{Z}$ est dénombrable alors que $\mathcal{G}$ n'est pas dénombrable. Il n'existe donc pas de bijection de G dans son groupe dual et donc a fortiori ils ne sont pas isomorphes.

17°)

$\diamond$ Soit $x \in G$ et $g \in \mathcal{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$. Alors $\Psi(x)(g) = g(x) \in \mathbb{C}^*$, donc $\Psi(x)$ est bien une application de $\mathcal{G}$ dans $\mathbb{C}^*$.

$\diamond$ Soit $g, h \in \mathcal{G}$. Soit $x \in G$. $\Psi(x)(gh) = (gh)(x) = g(x)h(x)$, par définition du produit dans $\mathcal{G}$, donc $\Psi(x)(gh) = \Psi(x)(g).\Psi(x)(h)$, ce qui prouve que $\Psi(x)$ est un morphisme de $\mathcal{G}$ dans $\mathbb{C}^*$. Ainsi, $\Psi(x)$ est un élément du dual de $\mathcal{G}$, c'est-à-dire du bidual de G, que l'on notera $\widehat{G}$.
Ceci prouve que Ψ est une application de G dans $\widehat{G}$.
$\diamond$ Soit $x, y \in G$. Soit $g \in \mathcal{G}$.
$\Psi(xy)(g) = g(xy) = g(x)g(y) = \Psi(x)(g).\Psi(y)(g) = (\Psi(x).\Psi(y))(g)$, par définition du produit dans $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \mathbb{C}^*)$, donc $\Psi(xy) = \Psi(x).\Psi(y)$, ce qui prouve que Ψ est un morphisme de groupes.
$\diamond$ Soit $x \in \mathrm{Ker}(\Psi)$. $\Psi(x) = 1_{\widehat{G}}$, donc pour tout $g \in \mathcal{G}$, $1 = \Psi(x)(g) = g(x)$.
Admettons temporairement que $x \neq 1 \Longrightarrow [\exists g \in \mathcal{G},\ \ g(x) \neq 1]$. Alors par contraposée, on a $x = 1$, donc $\mathrm{Ker}(\Psi) = \{1\}$ ce qui prouve que Ψ est injective.
De plus, d'après la question15 appliquée aux groupes abéliens finis G et $\mathcal{G}$, $|G| = |\mathcal{G}| = |\widehat{G}|$, donc Ψ est un isomorphisme de G dans son bidual.
Il reste cependant à démontrer la propriété admise temporairement.
$\diamond$ Premier cas : supposons que G est le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, où $n \in \mathbb{N}^*$. On a vu en question 13 que l'application $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & \overline{k} & \longmapsto & e^{\frac{2i\pi k}{n}} \end{array}$ est un élément de $\mathcal{G}$. De plus, si $g(\overline{k}) = 1$, alors $\dfrac{2\pi k}{n} \equiv 0\ [2\pi]$, donc $k \equiv 0\ [n]$, puis $\overline{k} = 0$. Ainsi, par contraposée, si $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $x \neq 0$, alors $g(x) \neq 1$, donc la propriété est démontrée lorsque G est le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
$\diamond$ Second cas : Supposons qu'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ et $n_1, \ldots, n_q \in \mathbb{N}^*$ tels que $G = \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_q\mathbb{Z}$.
Soit $x = (\overline{k_1}, \ldots, \overline{k_q}) \in G$ tel que $x \neq 0$. Il existe $j \in \mathbb{N}_q$ tel que $\overline{k_j} \neq 0$.
Notons alors $\begin{array}{rccc} g: & G & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & (\overline{h_1}, \ldots, \overline{h_q}) & \longmapsto & e^{\frac{2i\pi h_j}{n_j}} \end{array}$. Il s'agit de la composée du morphisme utilisé au premier cas avec la j-ème projection $\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G_j \\ (\overline{h_1}, \ldots, \overline{h_q}) & \longmapsto & \overline{h_j} \end{array}$, donc $g \in \mathcal{G}$, en tant que composé de morphismes de groupes. De plus, pour les mêmes raisons qu'au premier cas, $g(x) \neq 1$.
$\diamond$ Dernier cas : cas général. $(G, .)$ étant un groupe abélien, d'après l'énoncé, il existe un isomorphisme f de G dans un groupe de la forme $G' = \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_q\mathbb{Z}$.
Soit $x \in G$ avec $x \neq 1$. f étant injective, $f(x) \neq 0$, donc d'après le second cas, il existe $g \in \mathrm{Hom}(G', \mathbb{C}^*)$ tel que $g(f(x)) \neq 1$. Alors $g \circ f$ est un élément du dual de G tel que $(g \circ f)(x) \neq 1$.