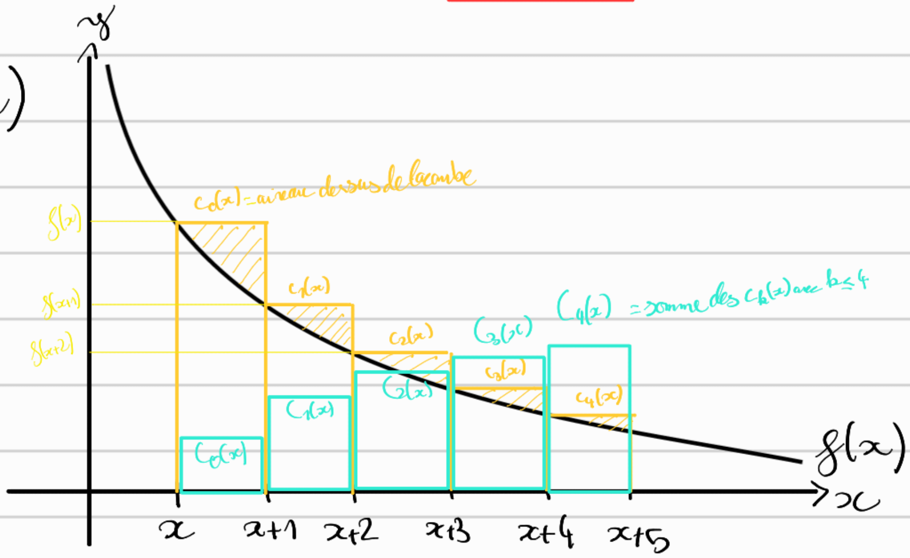
Gutsche
Patrick

# DM24

1) a)




b) Soit $k \in \mathbb{N}$. $f \searrow$ donc pour tout $t \in [x+k, x+k+1]$,
$f(t) \geq f(x+k+1)$.

Donc $\displaystyle\int_{x+k}^{x+k+1} f(t)dt \geq f(x+k+1)$

donc $c_k(x) \leq f(x+k) - f(x+k+1)$

c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $t \in [x+k, x+k+1]$, $f(t) \leq f(x+k)$

donc $\displaystyle\int_{x+k}^{x+k+1} f(t)dt \leq f(x+k)$ donc $c_k(x) \geq 0$

$\rightarrow \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \big(f(x+k) - f(x+k+1)\big) = f(x) - f(x+n+1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$ donc cette série CV vers $f(x)$

$\rightarrow c_k(x)$ converge car $c_k(x) \leq f(x+k) - f(x+k+1) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

$\rightarrow$ Donc $\sum c_k(x)$ est à termes positifs et majorée par une série convergente donc $\sum c_k(x)$ converge

$\rightarrow$ Donc $C(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(x) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \big(f(x+k) - f(x-k+1)\big) = f(x)$

2) a) $f : x \mapsto e^{-x}$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et décroissante, (car $\frac{d}{dx}(e^{-x}) = -e^{-x} \leq 0$)
elle est continue et tend vers 0 en $+\infty$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$c_k(x) = e^{-x-k} - \int_{x+k}^{x+k+1} e^{-t}\,dt = e^{-x-k} - \left[-e^{-x}\right]_{x+k}^{x+k+1}$$

$$= e^{-x-k-1}$$

$$\text{Donc } C(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-x-k-1} = e^{-x-1} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k} = e^{-x-1} \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{e^{-x}}{e-1}$$

b) Soit $f : x \longmapsto \frac{1}{x(x+1)}$. $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$, continue, tend vers 0, et décroissante.
Donc $C(x)$ existe.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $c_k(x) = \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} - \int_{x+k}^{x+k+1} \frac{1}{t(t+1)}\,dt$

$$= \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} - \int_{x+k}^{x+k+1} \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} - \left[\ln t\right]_{x+k}^{x+k+1} + \left[\ln(t+1)\right]_{x+k}^{x+k+1}$$

$$= \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} - \ln\frac{x+k+1}{x+k} + \ln\frac{x+k+2}{x+k+1}$$

$$= \frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k+1} - \ln\frac{x+k+1}{x+k} + \ln\frac{x+k+2}{x+k+1}$$

$$= \left(\frac{1}{x+k} - \ln\frac{x+k+1}{x+k}\right) - \left(\frac{1}{x+k+1} - \ln\frac{x+k+2}{x+k+1}\right)$$

ce qui est télescopique. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$C_n(x) = \frac{1}{x} - \ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+n+1} + \ln\frac{x+n+2}{x+n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{x} + \ln\frac{x}{x+1}$$
$$= \frac{1}{x} + \ln x - \ln(x+1)$$

Donc $C(x) = \frac{1}{x} + \ln x - \ln(x+1)$

3) partant $k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}_+^*$, $d_k(x) = f(x+k+1) - \int_{x+k}^{x+k+1} f(t)\,dt$
$$= c_k(x) - f(x+k) + f(x+k+1)$$
or $c_k(x)$ et $f(x+k+1) - f(x+k)$ convergent donc $d_k(x)$ converge

$$D(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} d_k(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(x)-f(x+k)+f(x+k+1)$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(x)+\sum_{k=0}^{+\infty} f(x+k+1)-f(x+k)$$

$$=C(x)-f(x).$$

## Partie II

→ Montrer que E est un $\mathbb{R}$-ev

À faire 1 fois.

4) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Soit $g,f\in E$.

$|\lambda f(x)+g(x)|\leq|\lambda||f(x)|+|g(x)|\leq|\lambda|\,\|f\|+\|g\|$. Par passage au sup,

$\|\lambda f+g\|\leq|\lambda|\,\|f\|+\|g\|$

→ avec $\lambda=1$, on a $\|f+g\|\leq\|f\|+\|g\|$ donc ma l'$\leq^{té}$ faire.

→ avec $\lambda\neq0$, $g=0$ : on a $\|f\|\leq\left|\frac{1}{\lambda}\right|\|\lambda f\|$ donc $|\lambda|\,\|f\|\leq\|\lambda f\|$

et avec $g=0$ : $\|\lambda f\|\leq|\lambda|\,\|f\|$

donc $\|\lambda f\|=|\lambda|\,\|f\|$

→ $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ |f(x)|\geq0$ donc $\|f\|=\sup_{x>0}|f(x)|\geq0$.

→ (H) $\|f\|=0$. alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $0\leq|f(x)|\leq\sup_{t>0} f(t)=\|f\|=0$ donc $f=0$.

5) a) Soit $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}_+^*$. On a $|g_n(x)-g(x)|\leq d(g_n,g)$ par définition de d.

Or $d(g_n,g)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc $|g_n(x)-g(x)|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ ← principe des gendarmes

Donc $g_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}g(x)$

b) Soit $x,y\in\mathbb{R}_+^*$ avec $x<y$.

$$\left|\int_x^y g_n(t)dt-\int_x^y g(t)dt\right|=\left|\int_x^y g_n(t)-g(t)dt\right|\leq\int_x^y|g_n(t)-g(t)|dt$$

$$\leq\int_x^y d(g_n,g)\,dt$$

$$=\left[t\,d(g_n,g)\right]_x^y=(y-x)d(g_n,g)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

Donc $\int_x^y g_n(t)dt\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_x^y g(t)dt$

6) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$g_n(x) = \frac{\sqrt{(x-1)^2 + \frac{1}{n}}}{x+1} \leq \frac{\sqrt{(x+1)^2+1}}{x+1} = \frac{\sqrt{x^2-2x+2}}{x+1}$$
$$\leq \frac{\sqrt{2x^2+4x+2}}{x+1}$$
$$= \frac{\sqrt{2(x+1)^2}}{x+1} = \sqrt{2}$$

De plus $g_n(x) \geq 0$ car somme, composition et division de fonctions positives.
Donc $g_n$ est borné, donc $g_n \in E$.

→ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}_+^*$.
$0 \leq g_n(x) = \frac{\sqrt{(x-1)^2+\frac{1}{n}}}{x+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x+1} = \frac{|x-1|}{x+1} \leq \frac{|x|+|1|}{x+1} = 1$ donc $g \in E$.

avec $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{|x-1|}{x+1}$   Mq de $d(g_n, g) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ !!

7) $g_n$ est $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $C^1$. et th usuels

or $g$ n'est pas dérivable en 1. en effet, $\frac{g(1)-g(1+h)}{h} = \frac{-\frac{|1+h-1|}{1+h+1}}{h} = \frac{-|h|}{(2+h)h}$ dans l'autre sens

donc $\frac{g(1)-g(1+h)}{h} \xrightarrow[h\to 0^+]{} -\frac{1}{2}$ mais $\xrightarrow[h\to 0^-]{} \frac{1}{2}$ donc $g$ n'est pas dérivable en 1.
Donc $C_1(E)$ n'est pas fermé.

→ $C_1(E)$ n'est pas ouvert : Posons $f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < n \\ \frac{1}{n} \text{ si } x \geq n \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}_+^*$. ← TC, on utilise $x<1$, $x \geq 1$.
$f_n(x) \in E \setminus C_1(E)$, et $0 \in C_1(E)$
or $|f_n(x) - 0| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\frac{1}{n} - 0| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc apcr, $d(f_n, 0) \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $E \setminus C_1(E)$ pas fermé donc $C_1(E)$ pas ouvert.

8) Soit $(g_n) \in C_0(E)^{\mathbb{N}}$ et $g \in E$ tq $g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} g$
Soit $x, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tq pour tout $n \geq N$, $d(g_n, g) < \varepsilon$
D'après 5(a), $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$
D'après la continuité de $g_N$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $|t-x| < \alpha$ $\Rightarrow |g_N(t) - g_N(x)| < \varepsilon$

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ tq $|t-x| < \alpha$.
$|g(t) - g(x)| = |g(t) - g_N(t) + g_N(x) - g_N(t) + g_N(x) - g(x)|$

$$\leq |g(t)-g_N(t)| + |g_N(x)-g_N(t)| + |g_N(x)-g(x)|$$

$$< 3\varepsilon$$

Donc $g$ est continue en $x$ $\left(\text{car } f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ \varepsilon \mapsto 3\varepsilon \end{array} \text{ est une bijection}\right)$

Donc $g \in C_0(E)$ donc $C_0(E)$ est fermé.

g)

# Partie III

12) $f \searrow$ donc $f'$ majorée par 0. or $f' \nearrow$ donc $f'$ converge.

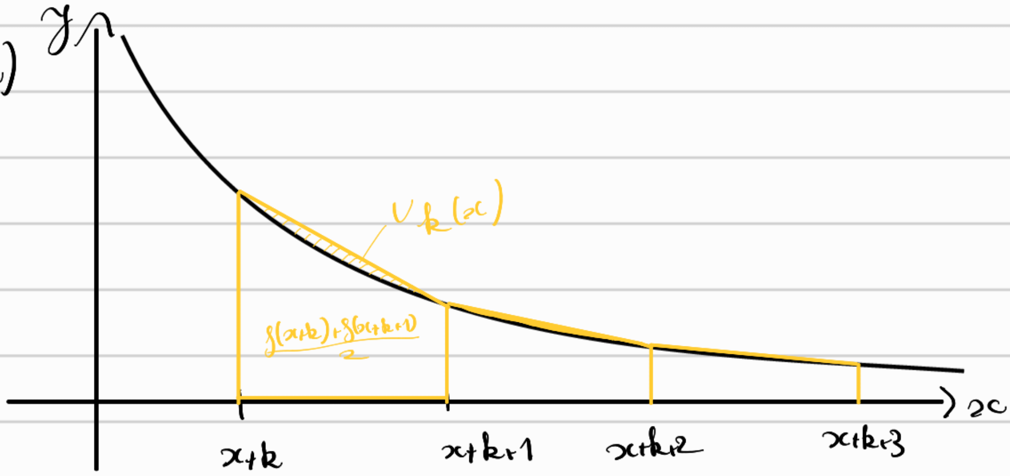
de plus $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

donc pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$ $f(x+h) - f(h) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0^-$

donc $\frac{f(x+h)-f(h)}{h} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{0^-}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$. Donc $f'(x) \to 0$.

13)

14)a)




Donc $u_k(x)$ est l'aire du trapèze $T = (x+k, 0)(x+k+1, 0)(x+k+1, f(x+k+1))(x+k, f(x+k))$ où l'on a enlevé (l'aire sous la courbe de $x_k$ à $x_{k+1}$) $= A$, or $A \subset T$ car $f \searrow$, donc $U_k(x) \geq 0$

b) Soit $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$. $U_k(x) = \frac{c_k(x) + d_k(x)}{2}$ or $\sum c_k$ et $\sum d_k$ CV donc $\sum U_k$ CV.

de plus $U(x) = \frac{C(x) + D(x)}{2} = \frac{C(x) + C(x) + f(x)}{2} = C(x) + \frac{f(x)}{2}$

15)