TD 25 : corrigé de trois exercices

Exercice 25.11 :

- Pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$, donc (1) : $\sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} a_{i,j}^2 = n$.

Soit $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$. $a_{i,j}^2 \leq \sum_{i'=1}^{n} a_{i',j}^2 = 1$, donc $|a_{i,j}| \leq 1$ et $|a_{i,j}| \geq a_{i,j}^2$.
On déduit alors de (1) que $\sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} |a_{i,j}| \geq n$.

- Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$.

Posons $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Alors $u(e) = (\sum_{j=1}^{n} a_{i,j})_{1\leq j\leq n}$ et $\sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} a_{i,j} =< u(e), e >$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que $| < u(e), e > | \leq \|u(e)\| \|e\|$, mais A étant orthogonale, u est un automorphisme orthogonal, donc $\|u(e)\| = \|e\|$.
On en déduit que $|\sum_{i,j} a_{i,j}| \leq \|e\|^2 = n$.

Exercice 25.12 :

1°)

◇ M est une matrice orthogonale si et seulement si ses colonnes constituent une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$, donc si et seulement si $\sigma = 0$ et $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
Or $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$, donc $a^2 + b^2 + c^2 = S^2 - 2\sigma$.
Ainsi, M est orthogonale si et seulement si $\sigma = 0$ et $S^2 - 2\sigma = 1$, donc si et seulement si $\sigma = 0$ et $S \in \{-1, 1\}$.

◇ [Lorsqu'on sait déjà qu'une matrice est orthogonale, elle est directe si et seulement si son déterminant est égal à 1.]
Pour calculer le déterminant de M, effectuons l'opération
$C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3$. Ainsi, $det(M) = S \begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 1 & a & c \\ 1 & b & a \end{vmatrix}$.
D'après la règle de Sarrus, $det(M) = S(a^2 + b^2 + c^2 - ab - cb - ac) = S((S^2 - 2\sigma) - \sigma)$, ainsi $det(M) = S^3 - 3S\sigma$.

Ceci prouve que M est une matrice de rotation si et seulement si $\sigma = 0$, $S \in \{-1, 1\}$ et $S^3 - 3S\sigma = 1$, ce qui est équivalent à $\sigma = 0$ et $S = 1$.

2°) $\diamond$ D'après les relations entre coefficients et racines d'un polynôme, M est une matrice de rotation si et seulement si (a, b, c) est un système de racines réelles d'un polynôme de la forme $X^3 - X^2 + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

$\diamond$ Soit $k \in \mathbb{R}$. Notons $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & t^3 - t^2 + k \end{array}$.

$f'(t) = 3t^2 - 2t = t(3t - 2)$. Ainsi f est croissante sur $\mathbb{R}_-$, décroissante entre 0 et $\frac{2}{3}$, puis croissante sur $[\frac{2}{3}, +\infty[$. Ainsi, f admet exactement trois racines réelles comptées avec multiplicité si et seulement si $f(0) \geq 0$ et $f(\frac{2}{3}) \leq 0$,

or $f(0) = k$ et $f(\dfrac{2}{3}) = \dfrac{8}{27} - \dfrac{4}{9} + k = \dfrac{8 - 4 \times 3 + 27k}{27} = \dfrac{27k - 4}{27}$,

donc f admet exactement trois racines réelles comptées avec multiplicité si et seulement si $k \in [0, \frac{4}{27}]$.

3°) On a $1 = a+b+c = a+2b$ et $0 = ab+ac+bc = 2ab+b^2$, or $b \neq 0$, donc $2a+b = 0$. Ainsi $b = -2a$ et la première égalité donne $1 = a - 4a$, donc $a = -\frac{1}{3}$ et $b = \frac{2}{3}$.

Ainsi $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

C'est à la fois une matrice de rotation et une matrice symétrique, donc f est une symétrie orthogonale et une rotation : il s'agit d'un retournement dont l'axe est l'ensemble des vecteurs invariants par f. On vérifie que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est invariant par M donc il dirige l'axe.

Exercice 25.16 :

1°) A est symétrique, donc il existe $P \in O(p)$ et une matrice diagonale $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ telles que $A = PDP^{-1} = PD^tP$.

De plus, A est définie positive, donc, pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $\lambda_i \in Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

Posons $\Delta = diag(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_p})$ et $R(A) = P\Delta^tP = P\Delta P^{-1}$.

${}^tR(A) = P^t\Delta^tP = R(A)$, donc $R(A)$ est symétrique.

De plus, $Sp(R(A)) = Sp(\Delta) = \{\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_p}\} \subset \mathbb{R}_+^*$, donc $R(A)$ est définie positive.

Enfin, $R(A)^2 = P\Delta^2P^{-1} = A$.

2°) $\diamond$ Notons $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{2}(x + \dfrac{\lambda}{x}) \end{array}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On remarque que $f(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$, or $u_0 > 0$, donc par récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est correctement défini et appartient à $\mathbb{R}_+^*$.

$\diamond$ f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{\lambda}{x^2})$,

donc $f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x > \sqrt{\lambda}$. Traçons le tableau de variations de f.

x	0		$\sqrt{\lambda}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{\lambda}$	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [\sqrt{\lambda}, +\infty[$.

$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{u_n} - u_n) = \frac{1}{2u_n}(\lambda - u_n^2) \leq 0$. Ainsi, $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante, minorée par $\sqrt{\lambda}$. Elle converge donc vers un réel $l \in [\sqrt{\lambda}, +\infty[$.
f étant continue en l, $l = f(l)$, donc $0 = f(l) - l = \frac{1}{2l}(\lambda - l^2)$, donc $l = \sqrt{\lambda}$.
En conclusion, $\boxed{(u_n)_{n\geq 1} \text{ est une suite décroissante qui tend vers } \sqrt{\lambda}}$.

3°) [La suite $\Delta_n = P^{-1}X_nP$ vérifie les relations $\Delta_0 = I_p$ et $\Delta_{n+1} = \frac{1}{2}(\Delta_n + D\Delta_n^{-1})$, donc c'est une suite de matrices diagonales. Si l'on note $u_{i,n}$ le $i^{\text{ème}}$ coefficient diagonal de Δ_n, la suite $(u_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence de la question précédente, donc elle tend vers $\sqrt{\lambda_i}$, ce qui permet de conclure.
Pour gérer correctement les problèmes d'existence de ces matrices, il est plus simple de commencer par construire les suites $(u_{i,n})$, puis de construire D_n et X_n.]

$\diamond$ Reprenons les notations de la première question. Pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, notons $(u_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de réels définie par les relations suivantes : $u_{i,0} = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1)\ :\ u_{i,n+1} = \frac{1}{2}(u_{i,n} + \frac{\lambda_i}{u_{i,n}})$.
D'après la seconde question, $(u_{i,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est correctement définie et elle converge vers $\sqrt{\lambda_i}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

$\diamond$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\Delta_n = diag(u_{1,n}, \ldots, u_{p,n})$ et $R_n = P\Delta_nP^{-1}$. La suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers Δ, or l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & PMP^{-1} \end{array}$ est continue (elle est linéaire en dimension finie), donc $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\Delta P^{-1} = R(A)$.

$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $u_{i,n} > 0$, donc Δ_n est inversible et, d'après la relation (1), $\Delta_{n+1} = \frac{1}{2}(\Delta_n + D\Delta_n^{-1})$. En multipliant par P à gauche et par P^{-1} à droite, on en déduit que R_n est inversible et que $R_{n+1} = \frac{1}{2}(R_n + AR_n^{-1})$.
De plus $\Delta_0 = diag(1, \ldots, 1) = I_p$, donc $R_0 = I_p$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = X_n$, ce qui montre que la suite (X_n) de l'énoncé est correctement définie et qu'elle converge vers $R(A)$.