TD 22 : corrigé des deux premiers exercices

Exercice 22.1 :

◇ D'après le cours, la première colonne de M est $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$. On détermine de même les autres colonnes de M, donc $M = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\-2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

◇ Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$X \in \mathrm{Ker}(M) \Longleftrightarrow MX = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y & = 0\\ -2x+y+z & = 0\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y & = -x\\ z & = 3x\end{cases}$,

donc $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$.

◇ Si l'on connaît la formule du rang, alors $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\mathrm{Ker}(M)) + \dim(\mathrm{Im}(M))$, donc $\mathrm{Im}(M)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^2$, ce qui montre que $\mathrm{Im}(M) = \mathbb{R}^2$.

Directement, soit $Y = \begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Soit $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Alors $MX = Y \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y & = u\\ -2x+y+z & = v\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y & = -x+u\\ z & = 3x-u+v\end{cases}$, donc pour tout $Y \in \mathbb{R}^2$, il existe $X \in \mathbb{R}^3$ tel que $MX = Y$. Ainsi, $\tilde{M}$ est surjective et $\mathrm{Im}(M) = \mathbb{R}^2$.

Exercice 22.2 :

1°) C'est une famille de polynômes de degrés étagés, donc c'est classique, mais il faut savoir en détailler la démonstration :
$dim(E) = 3 = Card(U, V, W)$, donc il suffit de montrer que (U, V, W) est libre.
Supposons que $uU + vV + wW = 0$ avec $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$. En dérivant deux fois, on obtient $2w = 0$, donc $w = 0$. Ainsi $uU + vV = 0$. En dérivant une fois, on obtient $-v = 0$, donc $v = 0 = u$: la famille est bien libre.

2°) $U(2) = 1$, $V(2) = -1$ et $W(2) = 1$, donc la matrice de la forme linéaire v en prenant $1 \in \mathbb{R}$ comme base d'arrivée est $V = (1 \ -1 \ 1)$.

La matrice de d est $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ car $W' = 2(X-1)$.

$f(U) = 0$, $f(V) = 1 - (X+1) - [1 - (X-1)] = -2 = -2U$

et $f(W) = X^2 - (X-2)^2 = 4X - 4 = -4U$, donc $F = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.