

MPSI 2  
Programme des colles de mathématiques.  
Semaine 24 : du lundi 9 au vendredi 13 mai.

## Fractions rationnelles et polynômes

### Liste des questions de cours

- 1°) Pour une fraction rationnelle, montrer l'existence et l'unicité de sa forme irréductible unitaire et préciser quels sont ses autres représentants.
- 2°) Énoncer et démontrer une propriété concernant le degré de la somme de deux fractions rationnelles.
- 3°) Pour tout  $F \in \mathbb{K}(X)$  montrer que  $\deg(F') \leq \deg(F) - 1$ . Montrer que c'est une égalité lorsque  $\text{car}(\mathbb{K}) = 0$  et  $\deg(F) \neq 0$ .
- 4°) Montrer l'existence et l'unicité de la partie entière d'une fraction rationnelle puis présenter la méthode des divisions successives pour la DES de  $\frac{B}{S^m}$  où  $S$  est irréductible.
- 5°) Donner en justifiant la DES de  $\frac{P'}{P}$  et deux expressions du coefficient  $\lambda$  de l'élément simple  $\frac{1}{X - \alpha}$  dans la DES de  $F = \frac{A}{S}$  lorsque  $\alpha$  est un pôle simple de  $F$ .
- 6°) DES de  $F(X) = \frac{2X^2 + 6}{(X^2 - 1)^2}$  dans  $\mathbb{R}(X)$ .
- 7°) DES dans  $\mathbb{C}(X)$  de  $F = \frac{1}{X^n - 1}$ , où  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 8°) Méthode permettant le calcul de  $\int \frac{1-t}{(t^2+t+1)^2} dt$ .
- 9°) Présenter les règles de Bioche et calculer  $\int \cos^4 t \sin^3 t \, dt$ .

## 1 Les polynômes

En révisions.

## 2 Fractions rationnelles

### 2.1 Le corps des fractions rationnelles

Corps des fractions d'un anneau intègre commutatif.

Forme irréductible unitaire d'une fraction rationnelle.

Degré d'une fraction rationnelle, degré d'une somme, d'un produit, d'un quotient.

Racines et pôles, multiplicité d'une racine ou d'un pôle.

$\mathbb{C}(X) \xrightarrow{P \mapsto \bar{P}} \mathbb{C}(X)$  est un isomorphisme de corps.

$\alpha$  est racine (resp : pôle) de  $F \in \mathbb{C}(X)$  de multiplicité  $m$  si et seulement si  $\bar{\alpha}$  est racine (resp : pôle) de  $\bar{F}$  de multiplicité  $m$ .

Fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle.

Si deux fractions rationnelles coïncident pour une infinité de valeurs de  $\mathbb{K}$ , elles sont égales.

Composition  $P \circ F$  où  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $F \in \mathbb{K}(X)$ .

Composition  $F \circ G$  où  $F \in \mathbb{K}(X)$  et  $G \in \mathbb{K}(X) \setminus \mathbb{K}$ .

Dérivation d'une fraction rationnelle, dérivée  $n$ -ième.

$\deg(F') \leq \deg(F) - 1$ , avec égalité lorsque  $\text{car}(\mathbb{K}) = 0$  et  $\deg(F) \notin \{0, -\infty\}$ .

Degré d'une somme, d'un produit, d'un quotient, formule de Leibniz, degré d'une composée.

## 2.2 Décomposition en éléments simples.

Partie entière d'une fraction rationnelle.

Méthode des divisions successives pour la DES de  $\frac{B}{S^m}$  où  $S$  est irréductible.

Le théorème de décomposition en éléments simples. Cas particuliers où  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  puis  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

DES de  $\frac{P'}{P}$ .

Si  $\alpha \in \mathbb{K}$  est un pôle de  $F = \frac{A}{S}$  de multiplicité  $m$ , le coefficient  $\lambda$  de l'élément simple  $\frac{1}{(X - \alpha)^m}$  dans

la DES de  $F$  vérifie  $\lambda = [\widetilde{(X - \alpha)^m F}](\alpha) = \frac{m! \tilde{A}(\alpha)}{\widetilde{S^{(m)}}(\alpha)}$ .

## 2.3 Application au calcul intégral

Primitives d'une fraction rationnelle.

Primitives d'une fraction rationnelle en sin et cos.  
règles de Bioche.

Primitives d'une fraction rationnelle en sh et ch.

## Prévisions pour la semaine suivante :

---

Matrices