

MPSI 2  
Programme des colles de mathématiques.  
Semaine 13 : du lundi 24 janvier au vendredi 28.

### Liste des questions de cours

- 1°) Montrer qu'une intersection quelconque de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
- 2°) Si  $A$  une partie d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ , précisez les éléments de  $\text{Vect}(A)$ , en justifiant.
- 3°) Montrer que  $L(E, F)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
- 4°) Décrire les formes linéaires de  $\mathbb{K}^n$ .
- 5°) Si  $u$  et  $v$  sont deux endomorphismes qui commutent, montrer que  $\text{Im}(u)$  et  $\text{Ker}(u)$  sont stables par  $v$ .
- 6°) On considère l'équation suivante en l'inconnue  $P \in \mathbb{R}[X]$ ;  $(E) : P(X+1) - P(X) = 2X + 1$ . Montrer que  $(E)$  est une équation linéaire puis la résoudre.
- 7°) Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, montrer que  $L(E)$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre.
- 8°) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $u \in GL(E)$ . Montrer que  $w \mapsto u w u^{-1}$  est un automorphisme de l'algèbre  $L(E)$ .
- 9°) Énoncer et démontrer le théorème de la base incomplète.
- 10°)  $\dim(E_1 \times \cdots \times E_n) = ?$  : énoncé et démonstration.
- 11°) Si  $e = (e_i)_{i \in I}$  est une base de  $E$  et  $f = (f_i)_{i \in I} \in F^I$ , montrer qu'il existe une unique application linéaire  $u \in L(E, F)$  telle que  $u(e_i) = f_i$  et donner une CNS portant sur  $(f_i)$  pour que  $u$  soit injective (resp : surjective).
- 12°) Soit  $A$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre et  $B$  une sous-algèbre de  $A$  de dimension finie. Soit  $b \in B$ . Montrer que si  $b$  est inversible dans  $A$ , alors  $b^{-1} \in B$ .

### Thème de la semaine : les espaces vectoriels

**Il s'agit du premier chapitre d'algèbre linéaire. Ainsi, les notions suivantes ne sont pas maîtrisées par les élèves, voire complètement inconnues des élèves :**

- **Les matrices ;**
- rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire ;
- théorie des systèmes linéaires (ils savent cependant résoudre des systèmes linéaires simples) ;
- projecteurs et symétries.
- Trace d'un endomorphisme ;
- hyperplans et dualité ;
- les déterminants ;
- la théorie de la réduction.

# 1 La structure algébrique d'espace vectoriel

**Notation.**  $\mathbb{K}$  désigne un corps quelconque.

## 1.1 Définition et exemples

Vecteurs et scalaires.

Exemples :  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{K}[X]$ ,  $E^I$ , sur-corps de  $\mathbb{K}$ , produit d'espaces vectoriels.

Sous-espaces vectoriels.

## 1.2 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Une intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

$$\text{Vect}(A) = \left\{ \sum_{a \in A} \alpha_a a / (\alpha_a)_{a \in A} \in \mathbb{K}^{(A)} \right\}.$$

Droite vectorielle.

Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Alors  $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$  n'est pas modifié si l'on effectue l'une des *opérations élémentaires* suivantes :

- échanger  $x_{i_0}$  et  $x_{i_1}$ , où  $i_0, i_1 \in I$  avec  $i_0 \neq i_1$  ;
- multiplier  $x_{i_0}$  par  $\alpha \in \mathbb{K}$  avec  $\alpha \neq 0$  ;
- ajouter à l'un des  $x_i$  une combinaison linéaire des autres  $x_j$ .

Somme de  $p$  sous-espaces vectoriels.

Somme directe de  $p$  sous-espaces vectoriels (seulement la définition, aucun développement pour le moment).

## 1.3 Les applications linéaires

Morphisme, isomorphisme, endomorphisme, automorphisme, forme linéaire.

Dual de  $E$  :  $E^* = L(E, \mathbb{K})$ .

Si  $u$  est linéaire,  $u(\text{Vect}(x_i)_{i \in I}) = \text{Vect}(u(x_i))_{i \in I}$ .

Composée de deux applications linéaires.

Isomorphisme réciproque.

$L(E, F)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Sous-espace stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.

Images directe et réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire.

Noyau et image d'une application linéaire.

Si  $u$  et  $v$  sont deux endomorphismes qui commutent, alors  $\text{Im}(u)$  et  $\text{Ker}(u)$  sont stables par  $v$ .

$$uv = 0 \iff \text{Im}(v) \subset \text{Ker}(u).$$

Équation linéaire  $(E)$  :  $f(x) = y$  en l'inconnue  $x \in E$ , où  $f \in L(E, F)$  et  $y \in F$ .

Equation homogène associée : l'ensemble des solutions est  $\text{Ker}(f)$ .

$(E)$  est compatible si et seulement si  $y \in \text{Im}(f)$ . Dans ce cas, la solution générale de  $(E)$  s'obtient en ajoutant à une solution particulière de  $(E)$  la solution générale de  $(H)$ .

## 1.4 Espaces affines

Si  $A$  et  $B$  sont deux points d'un  $\mathbb{K}$ -espace affine,  $\overrightarrow{AB} = B - A$  est l'unique vecteur  $x$  tel que  $A + x = B$ .  
Relation de Chasles.

Définition d'un parallélogramme.

Si l'on fixe un point d'un espace affine  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}$  possède naturellement une structure d'espace vectoriel.  
Réciproquement, tout espace vectoriel possède une structure naturelle d'espace affine.

## 1.5 La structure d'algèbre

Algèbre commutative ou non commutative, intègre ou non intègre.

Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, alors  $(L(E), +, \cdot, \circ)$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre.

Le groupe des inversibles de  $L(E)$  est noté  $(GL(E), \circ)$ .

Sous-algèbres.

morphismes d'algèbres.

Automorphismes intérieurs.

Composition de morphismes d'algèbres, isomorphisme réciproque, images directe et réciproque d'une sous-algèbre.

## 2 Familles de vecteurs

**Notation.**  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, où  $\mathbb{K}$  est un corps quelconque.

### 2.1 Familles libres et génératrices

Familles libres, liées, génératrices, bases.

Coordonnées d'un vecteur dans une base.

### 2.2 Dimension d'un espace vectoriel

**Définition.**  $E$  est de dimension finie si et seulement si il possède une famille génératrice finie.

**Lemme :** Toute famille  $(x_1, \dots, x_{n+1})$  de  $n + 1$  vecteurs de  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$  est liée.

Théorème de la base incomplète.

Famille libre maximale.

Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.

Si  $\dim(E) = n$ ,  $e$  est une base de  $E$  si et seulement si  $e$  est libre et de cardinal  $n$ , ou encore si et seulement si  $e$  est génératrice et de cardinal  $n$ .

Si  $F \subset G$ ,  $\dim(F) \leq \dim(G)$ , avec égalité si et seulement si  $F = G$ .

$\dim(E_1 \times \dots \times E_n) = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_n)$ .

### 2.3 Exemples

Base canonique de  $\mathbb{K}^{(I)}$ .

Dans  $\mathbb{K}^2$ , deux vecteurs forment une base si et seulement si leur déterminant est non nul.

## 2.4 Application linéaire associée à une famille de vecteurs

$$\begin{array}{ccc} \Psi_x : & \mathbb{K}^{(I)} & \longrightarrow E \\ \text{Si } x = (x_i) \in E^I, \text{ on note} & (\alpha_i)_{i \in I} & \longmapsto \sum_{i \in I} \alpha_i x_i. \end{array}$$

$x$  est une famille libre (resp : génératrice) si et seulement si  $\Psi_x$  est injective (resp : surjective).

Si  $e = (e_i)_{i \in I}$  est une base de  $E$ , alors  $E$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^{(I)}$ .

## 2.5 Image d'une famille par une application linéaire

**Notation.** Si  $u \in L(E, F)$  et  $x = (x_i)_{i \in I} \in E^I$ , on notera  $(u(x_i))_{i \in I} = u(x)$ . Alors  $\Psi_{u(x)} = u \circ \Psi_x$ .  
Image d'une famille libre (resp : génératrice) par une injection (resp : surjection) linéaire.

Deux espaces de dimensions finies ont la même dimension si et seulement si ils sont isomorphes.  
 $\dim(u(G)) \leq \dim(G)$ , avec égalité lorsque  $u$  est injective.

**Théorème.** Si  $e = (e_i)_{i \in I}$  est une base de  $E$  et  $f = (f_i)_{i \in I} \in F^I$ , il existe une unique application linéaire  $u \in L(E, F)$  telle que  $u(e_i) = f_i$ . CNS portant sur  $(f_i)$  pour que  $u$  soit injective (resp : surjective).

Soit  $u \in L(E, F)$  avec  $\dim(E) = \dim(F)$ , alors  $u$  injective  $\iff u$  surjective  $\iff u$  bijective.

Si  $E$  admet une base  $(e_i)_{i \in I}$ , alors  $L(E, F)$  est isomorphe à  $F^I$ .

$\dim(L(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$ .

## Prévisions pour la semaine prochaine :

Équations différentielles linéaires.