Feuille d'exercices 4.
Relations binaires.

Exercice 4.1 : (niveau 1)
On définit sur $\mathbb{R}$ la relation binaire R par : $x\ R\ y \Longleftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1$.

1°) Montrer que R est une relation d'équivalence.

2°) Déterminer la classe d'équivalence de $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.2 : (niveau 1)
On considère la relation R sur $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \ (x\ R\ y) \Longleftrightarrow (x^2 - y^2 = x - y).$$

1°) Vérifier que R est une relation d'équivalence.

2°) Déterminer l'ensemble quotient.

Exercice 4.3 : (niveau 1)
Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné.
Pour tout $x, y \in E$, on convient que $x\ C\ y \Longleftrightarrow (x \leq y) \vee (y \leq x)$.
Ainsi, $x\ C\ y$ si et seulement si x et y sont comparables.
La relation binaire C est-elle réflexive, est-elle symétrique, est-elle transitive ?

Exercice 4.4 : (niveau 1)
Soient E un ensemble et A une partie de E. On considère la relation R sur $\mathcal{P}(E)$ définie par :

$$\forall X, Y \in \mathcal{P}(E),\ \ (X\ R\ Y) \Longleftrightarrow (X \cap A = Y \cap A).$$

1°) Démontrer que R est une relation d'équivalence.

2°) Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. Déterminer la classe d'équivalence de X.

Exercice 4.5 : (niveau 1)
On considère la relation $\preceq$ sur $\mathbb{N}$ définie par :

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^2,\ \ (n \preceq m) \Longleftrightarrow \exists p \in \mathbb{N},\ \ m = n^p.$$

Vérifier que $\preceq$ est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ?

Exercice 4.6 : (niveau 1)

R est une relation binaire sur un ensemble E. On suppose que R est réflexive et transitive (on dit que R est un préordre).

1°) On définit la relation binaire S par : $\forall x, y \in E,\ \ xSy \Longleftrightarrow (xRy) \wedge (yRx)$.
Montrer que S est une relation d'équivalence.

2°) Pour tout $\overline{x}, \overline{y} \in E/S$, on pose $\overline{x}\overline{R}\overline{y} \Longleftrightarrow xRy$.
Montrer que $\overline{R}$ est correctement définie et que c'est une relation d'ordre.

3°) Montrer que la relation R de divisibilité est un préordre sur $\mathbb{Z}$.
Quelles sont les classes d'équivalence de la relation S associée ?
La relation d'ordre associée est-elle totale ?

Exercice 4.7 : (niveau 2)

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné.
Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
- Toute partie non vide de E possède un minimum.
- "$\leq$" est un ordre total et il n'existe aucune suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E strictement décroissante.

On dit dans ce cas que "$\leq$" est un bon ordre sur E.

Exercice 4.8 : (niveau 2)

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. On dit qu'une partie X de E est libre si ses éléments sont 2 à 2 non comparables.
On note $L(E)$ l'ensemble des parties libres de E. On définit sur $L(E)$ la relation R par :

$$X\ R\ Y \Longleftrightarrow (\forall x \in X,\ \ \exists y \in Y,\ \ x \leq y).$$

1°) Montrer que R est une relation d'ordre.

2°) Montrer que la fonction $Id_{L(E)}$ est croissante de $(L(E), \subset)$ dans $(L(E), R)$.

3°) Sa réciproque est-elle croissante ?

Exercice 4.9 : (niveau 2)

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.
Pour tout $a \in A$, on note $C_A(a)$ l'ensemble des éléments de A qui sont comparables avec a.
On note B l'ensemble des $a \in A$ tels que $C_A(a)$ possède un maximum.
Montrer que l'ensemble des éléments maximaux de A est égal à $\{\max(C_A(a)) \ /\ a \in B\}$.

Exercice 4.10 : (niveau 2)

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et (v_n) sont deux suites de réels, on convient que $(u_n)\ R\ (v_n)$ si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exists p, q \geq n,\ \ (u_p \leq v_n) \wedge (v_q \leq u_n)$.

1°) R est-elle une relation d'ordre ? Est-elle une relation d'équivalence ?

2°) Notons c une suite constante. Déterminer les suites u telles que $u\ R\ c$.

Exercice 4.11 : (niveau 2)
Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(E^E)$. On note $\mathcal{F} = \{X \in \mathcal{P}(E)/\forall f \in \mathcal{A},\ \ f(X) \subset X\}$. Montrer que pour l'inclusion, toute partie non vide de $\mathcal{F}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\mathcal{F}$.

Exercice 4.12 : (niveau 2)
Soit E un ensemble et R une relation binaire sur E. On définit les relations S et A par :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \begin{cases} x\ S\ y \Longleftrightarrow (x\ R\ y) \wedge (y\ R\ x) \\ x\ A\ y \Longleftrightarrow (x\ R\ y) \wedge \neg (y\ R\ x). \end{cases}$$

1°) Montrer que S est symétrique et A est antisymétrique.

2°) Montrer que pour tout $(x,y) \in E^2$, $x\ R\ y \Longleftrightarrow (x\ S\ y) \vee (x\ A\ y)$.

3°) Montrer que si R est transitive, alors S et A le sont, mais que la réciproque est fausse.

Exercice 4.13 : (niveau 2)
Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. On dit que E est bien ordonné lorsque toute partie non vide de E admet un plus petit élément.

1°) a) Démontrer qu'un ensemble bien ordonné est totalement ordonné.
La réciproque est-elle vraie ?
b) Démontrer qu'un ensemble fini et totalement ordonné est bien ordonné.

2°) Démontrer que si $(E, \preceq)$ et $(E, \succeq)$ sont bien ordonnés, alors E est un ensemble fini.

3°) On dit qu'un élément x de E admet un successeur s dans E lorsque

$$x \prec s \text{ et } \forall a \in E,\ \ (x \prec a) \Longrightarrow (s \preceq a),$$

où $\prec$ désigne l'ordre strict associé à $\preceq$.
a) Démontrer que si un élément x de E admet un successeur, alors celui-ci est unique. On le note $\mathrm{succ}(x)$.
b) Dans le cas où E est bien ordonné, démontrer que, pour tout élément x de E, on a l'alternative suivante : ou bien x est un élément maximal (c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'élément plus grand que x dans E) ou bien x admet un successeur.

Exercice 4.14 : (niveau 3)
Lemme de Spilrajn-Marczewski :
Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné fini, de cardinal n. Montrer qu'il existe une bijection croissante φ de E dans $[\![1, n]\!]$.
En déduire qu'on peut munir E d'un ordre total $\leq'$ tel que pour tout $(x,y) \in E^2$, $x \leq y \Longrightarrow x \leq' y$. Un tel ordre est appelé extension linéaire de $(E, \leq)$.

Exercice 4.15 : (niveau 3)

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné fini. On appelle chaîne de E tout sous-ensemble de E totalement ordonné, et cochaîne de E tout sous-ensemble de E formé d'éléments deux à deux incomparables.

Si $(C_1, \ldots, C_m)$ est une famille de cochaînes de E, on dit que c'est une partition en cochaînes de E si et seulement si

— Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, $C_i \neq \emptyset$;

— Pour tout $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq j \Longrightarrow C_i \cap C_j = \emptyset$;

— $E = \bigcup_{i=1}^{m} C_i$.

Montrer que la longueur maximale d'une chaîne de E est égale au minimum du nombre de parties constituant une partition en cochaînes de E.

Exercices supplémentaires :

Exercice 4.16 : (niveau 1)

On considère la relation // sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ définie par :

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \ \ (a, b)//(c, d) \Longleftrightarrow (ad - bc = 0).$$

Démontrer que // est une relation d'équivalence.

Exercice 4.17 : (niveau 1)

Soient E un ensemble non vide et R une relation sur E. On dit que R est symétrico-transitive lorsque, pour tous $x, y, z \in E$, on a $(x \ R \ y) \wedge (y \ R \ z) \Longleftrightarrow (z \ R \ x)$.

Démontrer que R est une relation d'équivalence si et seulement si R est réflexive et symétrico-transitive.

Exercice 4.18 : (niveau 1)

Soient E un ensemble non vide et R une relation sur E qui est transitive et symétrique. Démontrons que R est une relation d'équivalence, autrement dit que R est automatiquement réflexive. Soit $a \in E$. Considérons $b \in E$ tel que $a \ R \ b$. Par symétrie de R, on obtient $b \ R \ a$. Puis par transitivité de R on en déduit que $a \ R \ a$. Ainsi R est bien réflexive, ce qui démontre que c'est une relation d'équivalence.

Trouver l'erreur dans ce raisonnement ! Donner un contre-exemple.

Exercice 4.19 : (niveau 1)

Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des relations d'équivalence définies sur un ensemble E. On dit que, R et R' étant 2 éléments de $\mathcal{R}$, R est plus fine que R' si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad xRy \Rightarrow xR'y.$$

a)Montrez que la relation "plus fin que" est un ordre sur $\mathcal{R}$ et que l'ensemble ordonné $\mathcal{R}$ a un plus grand élément et un plus petit élément.

b)Montrez que R est plus fine que R' si et seulement si toute classe modulo R' est une réunion de classes modulo R.
c)On prend $E = \mathbb{Z}$. Déterminez toutes les congruences qui sont plus ou moins fines qu'une congruence donnée.

Exercice 4.20 : (niveau 1)

Dénombrer les relations d'ordre sur un ensemble à 3 éléments.

Exercice 4.21 : (niveau 2)

Soit I un ensemble ordonné et $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles ordonnés.
Toutes les relations d'ordre utilisées seront notées "$\leq$".
On pose $E = \{(i,x)/i \in I$ et $x \in E_i\}$ et on le munit de l'ordre suivant :
$(i,x) \leq (j,y) \Longleftrightarrow (i < j$ ou $(i = j$ et $x \leq y))$.
Vérifier que c'est bien un ordre sur E.
On dit qu'un ensemble $(F, \leq)$ est bien ordonné lorsque toute partie non vide de F possède un minimum. Montrer que si I et les E_i sont tous bien ordonnés, alors E est aussi bien ordonné.

Exercice 4.22 : (niveau 2)

Soient R_1 et R_2 deux relations d'équivalence définies sur un ensemble E. On définit sur E la relation binaire $R_2 o R_1$ par :
$\forall (x,z) \in E^2,\ x(R_2oR_1)z \Longleftrightarrow \exists y \in E \quad (xR_1y)$ et (yR_2z).
Montrez que R_2oR_1 est une relation d'équivalence si et seulement si $R_2oR_1 = R_1oR_2$.

Exercice 4.23 : (niveau 3)

Soit R une relation binaire sur un ensemble E. Étant donnés deux éléments x et y de E, on dit que y est un R-antécédent de x si $y\ R\ x$.

1°) Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Pour tout $X \subset E$ non vide, il existe $x \in X$ n'admettant aucun R-antécédent dans X ;
2. Il n'existe pas de suite infinie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1}\ R\ x_n$;
3. Pour tout $X \subset E$,
$\Big(\forall x \in E,\ \ ((\forall y \in E,\ \ (y\ R\ x \Longrightarrow y \in X)) \Longrightarrow x \in X)\Big) \implies X = E.$

Une relation R vérifiant ces propriétés est appelée une relation bien fondée.

2°) Montrer qu'une relation bien fondée est antireflexive (pour tout x, x n'est pas en relation avec lui-même) et antisymétrique.

3°) Une relation d'ordre $\leq$ sur E est appelée une relation de bon ordre si toute partie non vide de E admet un plus petit élément.
(a) Montrer qu'une relation de bon ordre est totale.
(b) Montrer que si $\leq$ est une relation de bon ordre, alors la relation stricte associée $<$ est une relation bien fondée.
(c) Donner un exemple de bon ordre.

Exercice 4.24 : (niveau 3)

Pour tout $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, on convient que
$X\ R\ Y \Longleftrightarrow \forall x \in X,\ \ \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*,\ \ \exists y \in Y,\ \ x - \varepsilon \leq y$
et que $X\ S\ Y \Longleftrightarrow (X\ R\ Y\ et\ Y\ R\ X)$.

1°) Montrer que S est une relation d'équivalence.

2°) Pour tout $X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$,
montrer que $X\ S\ Y$ si et seulement si $\sup_{\overline{\mathbb{R}}}(X) = \sup_{\overline{\mathbb{R}}}(Y)$.

3°) En déduire une bijection entre $\mathcal{P}(\mathbb{Q})/S$ et $\overline{\mathbb{R}}$.

Exercice 4.25 : (niveau 3)

Soit R une relation binaire sur un ensemble X, et x un élément de X.
On pose $xR = \{z \in X/x\ R\ z\}$ et $Rx = \{z \in X/z\ R\ x\}$. Ces deux ensembles sont respectivement appelés section commençante et section finissante de base x.
On définit trois relations sur E par $[x\ T_d\ y \Longleftrightarrow yR \subset xR]$, $[x\ T_g\ y \Longleftrightarrow Rx \subset Ry]$ et $T = T_d \cap T_g$. Ces relations sont appelées respectivement trace à droite, trace à gauche et trace.

1°) Montrer que T_d, T_g et T sont des préordres (c'est-à-dire sont réflexives et transitives).

2°) Une relation binaire R sur X est appelée un tournoi si et seulement si elle est réflexive, antisymétrique et si elle est totale, c'est-à-dire si deux éléments quelconques de X sont toujours comparables.
On suppose que R est un tournoi.
a) Montrer que T_d et T_g sont deux ordres égaux et contenus dans R.
b) Montrer que x est un élément minimal de (X, T) si et seulement si pour tout $y \in X$, il existe $z \in X$ tel que $(x, z) \in R$ et $(z, y) \in R$.
c) Que dire si R est un tournoi transitif ?