Résumé de cours :
Semaine 17, du 24 janvier au 28.

Espaces vectoriels normés (suite)

1 Distance

Définition. Soit E un espace vectoriel normé .
On appelle distance associée à la norme $\|.\|$ de E, l'application $d: \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & \|x-y\| \end{array}$.

Définition. Soient E un espace vectoriel normé dont la distance associée est notée d et A une partie de E. La restriction de d à A^2 est appelée la distance induite par d sur A.

Propriété. Avec les notations précédentes, pour tout $x, y, z \in E$,
- $d(x,y) \in \mathbb{R}_+$ (positivité) ;
- $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ (séparation) ;
- $d(x,y) = d(y,x)$ (symétrie) ;
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (inégalité triangulaire).

Définition. On appelle espace métrique tout couple (E,d) où E est un ensemble et où $d : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une application telle que, pour tout $x, y, z \in E$,
- $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ (séparation) ;
- $d(x,y) = d(y,x)$ (symétrie) ;
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (inégalité triangulaire).

Les seuls espaces métriques qui sont au programme sont les (A, d_A) où A est une partie d'un espace vectoriel normé E et où d_A est la distance induite sur A par la distance associée à la norme de E.

Propriété. Soit E un espace vectoriel normé dont la distance associée est notée d.
Alors $\forall (x,y,z) \in E^3 \ \ d(x+z, y+z) = d(x,y)$.
Cette propriété ne se généralise pas aux espaces métriques.

Propriété. Corollaire de l'inégalité triangulaire.
Soit E un espace vectoriel normé dont la distance associée est notée d.
Alors $\forall (x,y,z) \in E^3 \ \ |d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z)$.

Définition. Soient E un espace vectoriel normé et $(a,r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$.
La boule ouverte centrée en a de rayon r est l'ensemble $B_o(a,r) = \{x \in E / d(a,x) < r\}$.
La boule fermée de centre a et de rayon r est l'ensemble $B_f(a,r) = \{x \in E / d(a,x) \leq r\}$.
La sphère de centre a et de rayon r est l'ensemble $S(a,r) = \{x \in E / d(a,x) = r\}$.

Définition. Dans un espace métrique, la boule unité est la boule fermée de centre 0 et de rayon 1.

Propriété. (non généralisable aux espaces métriques)
Les boules d'un espace vectoriel normé sont des convexes.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soient E un espace métrique, A et B deux parties non vides de E et $a \in E$.
On note $d(a, A) = \inf_{x \in A} d(a, x)$. C'est la distance de a à A.
On note $d(A, B) = \inf_{(x,y) \in A \times B} d(x, y)$. C'est la distance de A à B.
On appelle diamètre de A la quantité $\delta(A) = \sup_{(x,y) \in A^2} d(x, y) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Propriété. Dans un espace métrique, $\delta(B_f(a, r)) \leq 2r$.

Propriété. (non généralisable aux espaces métriques)
Soient E un espace vectoriel normé non nul et $(a, r) \in E \times \mathbb{R}_+^*$. Alors $\delta(B_f(a, r)) = 2r$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Dans un espace métriquue, si $\emptyset \neq A \subset B$, alors $\delta(A) \leq \delta(B)$.

Définition et propriété. Soient E un espace vectoriel normé et A une partie de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) $\{\|x\| / x \in A\}$ est borné.

ii)Pour tout $x_0 \in E$, $\{\|x - x_0\| / x \in A\}$ est borné.

iii) Pour tout $x_0 \in E$, il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que $A \subset B_f(x_0, R)$.

iv) Il existe $(x_0, R) \in E \times \mathbb{R}_+$ tel que $A \subset B_f(x_0, R)$.

Dans ce cas, on dit que A est bornée.

Définition. Soient A un ensemble, E un espace vectoriel normé et $f : A \longrightarrow E$ une application.
On dit que f est bornée si et seulement si $f(A)$ est une partie bornée de E.

Propriété. Soient A un ensemble non vide et E un espace vectoriel normé .
On note $\mathcal{B}(A, E)$ l'ensemble des applications bornées de A dans E.
Pour $f \in \mathcal{B}(A, E)$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{a \in A} \|f(a)\|$.
Alors $(\mathcal{B}(A, E), \|.\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé .
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit E un espace vectoriel normé . On note $l^\infty(E)$ l'ensemble des suites bornées à valeurs dans E. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^\infty(E)$, on note $\|(x_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|$.
Alors $(l^\infty(E), \|.\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé .

2 Applications k-Lipschitziennes

Définition. Soient E et F deux espaces métriques, $k \in \mathbb{R}_+$ et $f : E \longrightarrow F$ une fonction dont le domaine de définition sera noté $\mathcal{D}_f$.
f est k-lipschitzienne si et seulement si $\forall (x, y) \in \mathcal{D}_f^2 \; d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$.
Lorsque $k < 1$, on dit que f est k-contractante.
On dit que f est lipschitzienne si et seulement si il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que f est k-lipschitzienne.

Propriété. Une composée d'applications lipschitziennes est lipschitzienne.

Propriété. Soit E un espace vectoriel normé . L'application $\|.\|$ est 1-lipschitzienne.

Propriété. Soient E un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E.
L'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & d(x, A) \end{array}$ est 1-lipschitzienne.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soient E_1, ..., E_p p espaces vectoriels normés dont les normes sont notées N_1, ..., N_p.
On note $E = E_1 \times \cdots \times E_p$.

Soit $i \in \mathbb{N}_p$. L'application $i^{\text{ème}}$ projection $p_i : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E_i \\ x = (x_1, \ldots, x_p) & \longmapsto & x_i \end{array}$ est 1-lipschitzienne lorsque E est muni de l'une de ses trois normes classiques, $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ ou $\|.\|_\infty$.

Remarque. Sur $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, $f \longmapsto f(0)$ n'est pas lipschitzienne pour N_1.
Il faut savoir le démontrer.

3 Normes équivalentes

Définition. Dans un espace vectoriel normé E, deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\forall x \in E\ \ \|x\|_1 \leq \alpha \|x\|_2$ et $\|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$.

Propriété. Avec les notations précédentes, $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes si et seulement si $Id_E\ : (E, \|.\|_1) \longrightarrow (E, \|.\|_2)$ et $Id_E\ : (E, \|.\|_2) \longrightarrow (E, \|.\|_1)$ sont lipschitziennes.

Exemple. Soient E_1, ..., E_p p espaces vectoriels normés dont les normes sont notées N_1, ..., N_p. Sur $E = E_1 \times \cdots \times E_p$, les trois normes classiques, $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont deux à deux équivalentes.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit E un espace vectoriel normé. Sur l'ensemble des normes de E, la relation "être équivalente à" est une relation d'équivalence.

Propriété. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes équivalentes sur E.
Une partie A de E est bornée pour $\|.\|_1$ si et seulement si elle est bornée pour $\|.\|_2$.

Propriété. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que E (resp : F) est muni de deux normes équivalentes, notées $\|.\|_1^E$ et $\|.\|_2^E$ (resp : $\|.\|_1^F$ et $\|.\|_2^F$). Alors $f\ : E \longrightarrow F$ est lipschitzienne pour $\|.\|_1^E$ et $\|.\|_1^F$ si et seulement si elle est lipschitzienne pour $\|.\|_2^E$ et $\|.\|_2^F$.
Il faut savoir le démontrer.

4 limite d'une suite dans un espace métrique

Notation. On fixe un espace métrique noté (E, d).

Définition. Soient $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E et $l \in E$. La suite (x_n) converge vers l si et seulement si (1) : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq N \Longrightarrow d(x_n, l) \leq \varepsilon)$.

Remarque. Dans (1), les deux dernières inégalités peuvent être choisies strictes ou larges.

Remarque. Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, la propriété "$x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$" ne dépend pas du choix de $x_0, \ldots, x_{n_0}$.

Propriété. **Unicité de la limite.**
Si (x_n) converge vers l et vers l', alors $l = l'$. On note $l = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ ou $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. Une suite de vecteurs de E est convergente si et seulement s'il existe $l \in E$ tel que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$. Sinon, on dit que la suite est divergente.

Propriété. Soient (x_n) une suite de vecteurs de E et $l \in E$.
Si $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$, alors $\|x_n\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \|l\|$, mais la réciproque est fausse.
$x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si $\|x_n\| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
$x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l$ si et seulement si $d(x_n, l) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Principe des gendarmes : Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$.
S'il existe une suite de réels (g_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ d(x_n, l) \leq g_n$ et $g_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Propriété. Soit N une seconde norme sur E, équivalente à $\|.\|$.
Alors, pour toute suite (x_n) de E et pour tout $l \in E$, $x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{N}{\longrightarrow}} l \iff x_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\|.\|}{\longrightarrow}} l$.
Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Sur $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, les $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont deux à deux non équivalentes entre elles, où ces normes désignent respectivement la norme de la convergence en moyenne, celle de la convergence en moyenne quadratique et la norme de la convergence uniforme.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Toute suite convergente est bornée.