MPSI 2

Programme des colles de mathématiques.

Semaine 20 : du lundi 28 mars au vendredi 1er avril.

# Comparaison au voisinage d'un point et séries

## Liste des questions de cours

**1°)** Montrer que $\mathbf{O}(\mathbf{O}(f)) = \mathbf{O}(f)$.

**2°)** Montrer que $o(f) + o(f) = o(f)$.

**3°)** Sous des conditions à préciser, montrer que $f(x) \sim g(x) \Longrightarrow \ln(f(x)) \sim \ln(g(x))$.

**4°)** Enoncer précisément puis démontrer le théorème de changement de variable pour les $o$, $O$ et $\sim$.

**5°)** Enoncer et démontrer l'unicité du développement limité.

**6°)** $\mathrm{DL}_2(0)$ de $e^{(\cos\sqrt{t})}$.

**7°)** Enoncer le théorème de sommation des relations de comparaison. Démontrez-le pour les "$o$" en cas de divergence.

**8°)** Moyennes de Cesaro : énoncé et démonstration.

**9°)** Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})$.

**10°)** Nature des séries de Bertrand : énoncé et démonstration.

## 1 $o$, $O$ et $\sim$

**$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.**

**Notation.** $A$ est une partie d'un espace $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $E$. Soit $a \in E \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$. On suppose que tout voisinage de $a$ rencontre $A$.

Les applications considérées sont définies sur $A$ et sont à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

### 1.1 La relation de domination

$f(x) = \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\mathbf{O}}(g(x)) \Longleftrightarrow [\exists V \in \mathcal{V}(a)\ \ \exists C \in \mathbb{R}_+^*\ \ \forall x \in V \cap A\ \ \|f(x)\| \leq C\|g(x)\|]$.

Cas particulier des suites.

Si $g(x) \neq 0$ au voisinage de $a$, $f = \mathbf{O}(g)$ si et seulement si $x \longmapsto \dfrac{\|f(x)\|}{\|g(x)\|}$ est bornée au voisinage de $a$.

$\mathbf{O}(\mathbf{O}(f)) = \mathbf{O}(f)$, $\mathbf{O}(f) + \mathbf{O}(f) = \mathbf{O}(f)$,
Lorsque $\varphi(A) \subset \mathbb{K}$, $\mathbf{O}(\varphi).\mathbf{O}(f) = \mathbf{O}(\varphi.f)$. Si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, lorsque $f(A) \subset \mathbb{R}_+^*$, $\mathbf{O}(f)^\alpha = \mathbf{O}(f^\alpha)$.

Si $f(x) = \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\mathbf{O}}(g(x))$ et si $g(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} 0$, alors $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} 0$.

(Hors programme) Si $(u_n), (v_n) \in {\mathbb{R}_+^*}^{\mathbb{N}}$ vérifient $\forall n \geq N$ $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, alors $u_n = \mathbf{O}(v_n)$.

## 1.2 La relation de prépondérance

$f(x) = \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{o}(g(x)) \iff [\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \;\; \exists V \in \mathcal{V}(a) \;\; \forall x \in V \cap A \;\; \|f(x)\| \leq \varepsilon \|g(x)\|]$.
Cas particulier des suites.
Si $g(x) \neq 0$ au voisinage de $a$, $f = o(g)$ si et seulement si $\dfrac{\|f(x)\|}{\|g(x)\|} \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} 0$.

$o(f) = \mathbf{O}(f)$, $o(\mathbf{O}(f)) = o(f)$ et $\mathbf{O}(o(f)) = o(f)$ (donc aussi $o(o(f)) = o(f)$).
$o(f) + o(f) = o(f)$, Lorsque $\varphi(A) \subset \mathbb{K}$, $o(\varphi).\mathbf{O}(f) = o(\varphi.f)$ et $\mathbf{O}(\varphi).o(f) = o(\varphi.f)$ (donc aussi $o(\varphi).o(f) = o(\varphi.f)$). Si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, lorsque $f(A) \subset \mathbb{R}_+^*$, $o(f)^\alpha = o(f^\alpha)$.

**Théorème des croissances comparées :** Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$ et $a > 1$.

1. Les suites $\ln^\alpha(n)$, $n^\beta$, $a^n$ et $n!$ tendent vers $+\infty$ et chacune est négligeable devant les suivantes.
2. Au voisinage de $+\infty$, les fonctions $\ln^\alpha x$, $x^\beta$ et $e^{\gamma x}$ tendent vers $+\infty$ et chacune est négligeable devant les suivantes.
3. Au voisinage de $0^+$, $|\ln x|^\alpha = o\Big(\dfrac{1}{x^\beta}\Big)$.
4. Au voisinage de $-\infty$, $e^{\gamma x} = o\Big(\dfrac{1}{|x|^\beta}\Big)$.

## 1.3 La relation d'équivalence

### 1.3.1 Définition

$f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\sim} g(x) \iff f = g + o(g)$.
On suppose qu'il existe un voisinage de $a$ sur lequel $g(x)$ ne s'annule jamais et que $f$ et $g$ sont à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors $f \sim g \iff \dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{\substack{x\to a\\ x\in A}}{\longrightarrow} 1$.
La relation "$\sim$" est une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}(A, F)$.

### 1.3.2 Propriétés de stabilité de la relation d'équivalence

**Stabilité du produit.** Si $\varphi \sim \Psi$, avec $\varphi$ et $\Psi$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, et si $f \sim g$, alors $\varphi.f \sim \Psi.g$.
Si $f \sim g$, alors $\|f\| \sim \|g\|$, $\dfrac{1}{f(x)} \sim \dfrac{1}{g(x)}$, $f^\alpha(x) \sim g^\alpha(x)$.

Si $f \sim g$, $f(x)$ et $g(x)$ ont même signe au voisinage de $a$,
elles ont même limite en cas d'existence.

La condition $f = \mathbf{O}(g)$ (respectivement $f = o(g)$, $f \sim g$) est vraie si et seulement si elle l'est en remplaçant $f$ et $g$ par des applications équivalentes.

(Hors programme : ) Sous de bonnes conditions, $f(x) \sim g(x) \Longrightarrow \ln(f(x)) \sim \ln(g(x))$.

Théorème de changement de variable pour les $o$, $O$ et $\sim$.

### 1.3.3 Défauts de stabilité de la relation d'équivalence

En général, si $f(x) \sim g(x)$, $\varphi(f(x)) \not\sim \varphi(g(x))$.

L'équivalence de fonctions au voisinage d'un point n'est pas stable pour la somme.

### 1.4 Les développements limités.

Dans ce paragraphe, on suppose que $E = \mathbb{K}$ et que $a$ est un point d'accumulation de $A$.

#### 1.4.1 Définitions

Développements limités au sens faible et fort, partie principale.

unicité du développement limité.
Cas des fonctions paires ou impaires.

#### 1.4.2 Opérations sur les développements limités

Les règles de calcul établies pour les "$o$" et les "$O$" permettent d'additionner, de multiplier et de composer des développements limités entre eux.

Il est souvent pratique d'écrire le DL $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ sous sa forme normalisée $a_m x^m(1 + \cdots + o(x^{n-m}))$.

#### 1.4.3 Applications

Détermination de la tangente et positionnement local du graphe par rapport à cette tangente.
Détermination d'une asymptote oblique et positionnement asymptotique du graphe par rapport à cette asymptote.

## 2 Séries

Réviser ce qui a déjà été fait.

Théorème de sommation des relations de comparaison.
Application aux moyennes de Cesaro.

Séries de Bertrand (hors programme).

## Prévisions pour la semaine suivante :

Dérivation.