DM25

Problème 1

Partie I :

1) D'après les théorèmes usuels, f est bien C^∞.

Soit $R(n)$: $f^{(n)}(x) = 2^n \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$

$f(x) = 2^0 \cos(2x + 0)$ donc $R(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $R(n)$.

$f^{(n+1)}(x) = 2^n \times 2 \sin\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right) = 2^{n+1} \cos\left(2x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)$

Donc on a $R(n+1)$.

D'après le principe de récurrence, $R(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc pour tout $i \in \mathbb{N}$, $f^{(i)}$ est bornée, et $M_i = 2^i$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}_+^*$. On applique l'inégalité de TL entre $x, x+h$ et $x, x-h$:

$$\left|\overbrace{f(x+h) - f(x) - hf'(x)}^{I_1}\right| \leq \frac{h^2}{2} M_2$$

$$\left|\overbrace{f(x-h) - f(x) + hf'(x)}^{I_2}\right| \leq \frac{h^2}{2} M_2$$

Donc $|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| = |I_1 - I_2| \leq |I_1| + |I_2| \leq h^2 M_2$

→ D'après le corollaire de l'inégalité triangulaire, on a :

$$|2hf'(x)| - |f(x+h) - f(x-h)| \leq h^2 M_2$$

Donc $2h|f'(x)| \leq h^2 M_2 + |f(x+h)| + |f(x-h)|$
$\leq h^2 M_2 + 2M_0$

Donc $hf'(x)$ est bornée, donc $|f'(x)| \leq \frac{M_2 h}{2} + \frac{M_0}{h}$

Donc $\frac{M_2 h}{2} + \frac{M_0}{h}$ majore tous les $|f'(x)|$, donc il est plus grand que le plus petit des majorants de $|f'(x)|$.

Donc $M_1 \leq \frac{M_2 h}{2} + \frac{M_0}{h}$. On appelle ça le passage au sup.

3) D'après 2), M_1 existe et $M_1 \leq \frac{M_2 h}{2} + \frac{M_0}{h}$

$\rightarrow$ Si $M_2 = 0$, alors $f(x) = Cx + D$, $C, D \in \mathbb{R}$, car $f''(x) = 0$
Or f bornée, donc $C = 0$, donc $f' = 0$, donc $M_1 = 0$
Donc $M_0 \leq \sqrt{2M_1M_2}$

$\rightarrow$ Si $M_2 > 0$. On a $M_0 > 0$ car sinon on aurait $f = 0$ donc $f'' = 0$.
Soit $g : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ h \rightarrow \frac{M_2 h}{2} + \frac{M_0}{h} \end{array}$. g est dérivable et

$g'(h) = \frac{M_2}{2} - \frac{M_0}{h^2} = \frac{M_2 h^2 - 2M_0}{2h^2}$. $g'(h)$ s'annule en $h_0 = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$

$$g(h_0) = \frac{M_2}{2}\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}} + \frac{M_0}{\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}} = \frac{\sqrt{2M_0M_2}}{2} + \sqrt{\frac{M_0M_2}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{M_0M_2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{M_0M_2}$$

$$= \sqrt{M_0M_2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\sqrt{M_0M_2}$$

Donc $M_1 \leq g(h_0) = \sqrt{2M_0M_2}$

4)

Problème II

Partie I

à détailler

1)a) Par récurrence, on a $s_n \geq 0$ car somme et multiplication de termes positifs.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$: On a $s_{n+1} = s_n + a_{n-1}s_{n-1} \geq s_n$, donc $s_n \nearrow$.

2) Soit $n \geq 2$: on a $s_{n-1} \leq s_n$ donc
$s_{n+1} \leq s_n + a_{n-1}s_n = s_n(1 + a_{n-1})$. Or $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^t \geq t+1$ (car exp est convexe et sa tangente en 0 est $y = t+1$)
Donc $s_{n+1} \leq s_n e^{a_{n-1}}$

c) → (H) $\sum a_n$ converge. par récurrence,

$$s_n \leq s_2 e^{\sum_{k=1}^{n-2} a_k} \leq s_2 e^{\sum_{k=1}^{+\infty} a_k}$$

Donc s_n est croissante et majorée, donc elle converge.

→ (H) (s_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$.

On a $l \geq s_n \geq s_1 > 0$

On a $\forall n \in \mathbb{N}, s_{n-1} > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. on a alors

$a_{n-1} = \frac{s_{n+1} - s_n}{s_{n-1}} \sim \frac{s_{n+1} - s_n}{l}$. Donc $\sum a_n$ a la même nature que $\sum (s_{n+1} - s_n)$.

à expliquer

Or vu que s_n converge, $\sum_{k=1}^{+\infty} (s_{n+1} - s_n) = l - s_1$ est bien définie

Donc $\sum a_n$ CV.

2)

→ Soit $R(n) : |s_n| \leq v_n$

On a bien $R(0)$ et $R(1)$.

Soit $n \geq 1$. Supposons $R(n)$ et $R(n-1)$

$|s_{n+1}| = |s_n + a_{n-1} s_{n-1}| \leq |s_n| + |a_{n+1}||s_{n-1}|$

$\leq v_n + |a_{n+1}| v_{n-1}$ d'après $R(n)$ et $R(n-1)$

$= v_n$. Donc $R(n+1)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, |s_n| \leq v_n$

→ Soit $n \geq 1$. $0 \leq |s_{n+1} - s_n| = |s_n + a_{n-1} s_{n-1} - s_n| = |a_{n-1}||s_{n-1}|$

$\leq |a_{n+1}| v_n$

$= v_{n+1} - v_n$

$\sum a_n$ CV, donc (v_n) CV

Donc $\sum (v_{n+1} - v_n)$ CV, donc $\sum |s_{n+1} - s_n|$ CV d'après 1)c).

Donc $\sum (s_{n+1} - s_n)$ CV.

Or $\sum_{k=1}^{n} (s_{k+1} - s_k) = s_n - s_1$ donc (s_n) CV.

3) $s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L \neq 0$ donc $s_n \sim L$. donc $s_{n+1} - s_n = a_{n-1} s_{n-1} \sim a^{n-1} L$

$\sum a^{n-1}$ CV et positive, donc "par sommation des rel. equi"

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (s_{k+1} - s_k) \sim \sum_{k=n}^{+\infty} a^{k-1} L = \frac{L a^{n-1}}{1-a}$$

De plus $\sum_{k=n}^{N} (s_{k+1} - s_k) = s_{N+1} - s_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} L - s_n$ avec $N \geq n$

Donc $L - s_n \sim \dfrac{L a^{n-1}}{1-a}$

4) a), De même,

$$s_{n+1} - s_n \sim L a^{n-1} = \frac{L}{n(n+1)} = L\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right)$$

donc $L - s_n \sim L \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\right) = \dfrac{L}{n}$.

b)