

DS 8 : énoncé

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1 :

Calculer un développement limité de $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ au voisinage de 1 à l'ordre $o((x-1)^2)$.

Exercice 2 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha} ((n+1)^{1+\frac{1}{n}} - (n-1)^{1-\frac{1}{n}}).$$

Problème : restes de Cauchy des séries de Riemann

L'objet de ce problème est de donner une approximation de la somme des séries de

Riemann convergentes $S(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ où α est un réel strictement supérieur à 1. Pour

cela, on étudie le reste : $R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Partie I : Formule de Taylor

Dans cette partie, I désigne un intervalle de \mathbb{R} contenant au moins deux éléments et f désigne une application de classe C^∞ de I dans \mathbb{C} .

1°) Soit $a, b \in I$ avec $a < b$ et $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n :

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

2°) Soit $n \in \mathbb{N}$. En posant $f(t) = e^{-t}$, déduire de la question précédente

que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\int_0^x t^n e^{-t} dt = n! \left(1 - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} e^{-x}\right)$.

En déduire que $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$.

3°) Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $[k, k+1] \subset I$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(k+1) = \sum_{h=0}^n \frac{1}{h!} f^{(h)}(k) + \frac{1}{n!} \int_0^1 f^{(n+1)}(t+k)(1-t)^n dt.$$

Partie II : Convergence des séries de Riemann

4°) Soit f une fonction réelle, définie continue et décroissante sur $[a, +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$.
 Montrer, que pour tout entier $k \in [a+1, +\infty[$, on a $\int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx$

5°) En déduire la nature de la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.

En cas de convergence, on pose $S(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

6°) Pour tout réel $\alpha > 1$, montrer que $1 \leq S(\alpha) \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}$.

Partie III : Première étude asymptotique du reste

Dans la suite du problème, on fixe un réel α strictement supérieur à 1 et pour tout entier naturel non nul n , on pose $R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

7°) En utilisant l'encadrement de la question 4,

montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, $R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

8°) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$.

Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$

où A_k est un réel vérifiant $0 \leq A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$.

9°) En déduire que lorsque n tend vers $+\infty$, $R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$

On pourrait répéter le procédé pour obtenir un développement asymptotique plus précis de $R_n(\alpha)$, mais la partie suivante va nous donner une méthode plus rapide.

Partie IV : Nombres de Bernoulli

On fixe un intervalle I de \mathbb{R} contenant au moins deux éléments.

On souhaite construire par récurrence sur p une suite de réels $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et une famille de réels $(b_{\ell,p})_{\substack{p \geq 2 \\ 1 \leq \ell \leq p-1}}$ telles que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on dispose de la propriété $R(p)$ suivante : pour toute fonction f de I dans \mathbb{C} de classe C^∞ , la fonction g définie par

$$g = a_0 f + a_1 f' + \dots + a_{p-1} f^{(p-1)} \text{ vérifie : } g' + \frac{1}{2!} g'' + \frac{1}{3!} g^{(3)} + \dots + \frac{1}{p!} g^{(p)} = f' + \sum_{\ell=1}^{p-1} b_{\ell,p} f^{(p+\ell)},$$

de sorte que la quantité $g' + \frac{1}{2!} g'' + \frac{1}{3!} g^{(3)} + \dots + \frac{1}{p!} g^{(p)}$ ne dépend pas de $f'', f^{(3)}, \dots, f^{(p)}$.

10°) Déterminer des réels a_0, a_1 et $b_{1,2}$ pour lesquels $R(1)$ et $R(2)$ sont vraies.

11°) Soit $p \geq 2$. On suppose construits (a_0, \dots, a_{p-1}) et $(b_{\ell,k})_{\substack{2 \leq k \leq p \\ 1 \leq \ell \leq k-1}}$ pour lesquels $R(1), \dots, R(p)$ sont vraies. Déterminer a_p et $(b_{\ell,p+1})_{1 \leq \ell \leq p}$ pour lesquels $R(p+1)$ est vraie.

12°) En utilisant $f(t) = e^{xt}$, où x est un réel quelconque,

montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$, $a_p = - \sum_{i=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-i}}{i!}$.

13°) Calculer a_2, a_3 et a_4 .

14°) En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|a_p| \leq 1$.

15°) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, montrer que la série $\sum_{p \in \mathbb{N}} a_p z^p$ est convergente.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on note $\varphi(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p$.

16°) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

Montrer qu'on peut écrire $\left(\sum_{n=1}^N \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{p=0}^N a_p z^p \right) = z + r_N$, où $r_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$.

17°) En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ vérifiant $|z| < 1$, on a $\varphi(z) = \frac{z}{e^z - 1}$.

18°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\varphi(t)$ admet au voisinage de 0 le développement limité à l'ordre n suivant : $\varphi(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k + o(t^n)$.

19°) Montrer que $a_{2k+1} = 0$ pour tout entier $k \geq 1$.

Les nombres $b_n = n! a_n$ sont appelés nombres de Bernoulli.

Partie V : Seconde étude asymptotique du reste

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$, où α est un réel strictement supérieur à 1.

Dans cette partie, on fixe un entier naturel p tel que $p \geq 2$ et on note :

$$g = a_0 f + a_1 f' + \dots + a_{2p-1} f^{(2p-1)}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $R(k) = g(k+1) - g(k) - f'(k)$.

20°) En utilisant la question 3, montrer qu'il existe un réel A tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|R(k)| \leq Ak^{-(2p+\alpha)}$.

21°) En déduire que $R_n(\alpha)$ admet le développement asymptotique suivant :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = - (a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + \dots + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n)) + O\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$$

22°) Donner le développement asymptotique de $R_n(3)$ correspondant au cas $\alpha = 3$ et $p = 3$.