DS 1

Les calculatrices sont interdites.

Dans tout le sujet, I désigne un intervalle inclus dans $\mathbb{R}$ contenant au moins deux éléments.

Partie I : fonctions convexes

On admettra que, parce que I est un intervalle, pour tout $x, y \in I$ et $\alpha \in [0,1]$, $\alpha x + (1-\alpha)y \in I$.

Lorsque f est une application de I dans $\mathbb{R}$, on rappelle que f est une dite convexe sur I si et seulement si, pour tout $x, y \in I$ et $\alpha \in [0,1]$, $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)$. On rappelle également que lorsque f est dérivable sur I, f est convexe sur I si et seulement si sa dérivée f' est croissante sur I.

1°) Montrer que l'application exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

2°) Soit f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$ et soit a et b deux réels.
On suppose que f et g sont convexes sur I et que a et b sont positifs.
Montrer que $af + bg$ est convexe sur I.

3°) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit φ une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $t \in [a,b]$, $\varphi(t) \geq 0$.
Pour tout $x \in I$ et $t \in [a,b]$, $f(x,t)$ désigne un réel. On suppose que,

- pour tout $t \in [a,b]$, l'application $x \longmapsto f(x,t)$ est convexe sur I ;
- pour tout $x \in I$, l'application $t \longmapsto f(x,t)$ est continue sur $[a,b]$.

Montrer que l'application $x \longmapsto \int_a^b f(x,t)\varphi(t)\,dt$ est bien définie et qu'elle est convexe sur I.

4°) Soit f une application de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{R}$ que l'on suppose de classe C^2.
On suppose également que f est convexe sur $[0, 2\pi]$.
Montrer que $\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\,dt \geq 0$ (on pourra intégrer par parties).

5°) Soit f une application de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est deux fois dérivable sur $[-1,1]$ et que, pour tout $x \in [-1,1]$, $2f'(x) + xf''(x) \geq 1$.
Montrer que $\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx \geq \dfrac{1}{3}$.

6°) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x_1, \dots, x_n \in I$, pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in I$.

6°) b) Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x_1, \dots, x_n \in I$, pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $f\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\Big) \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$. (inégalité de Jensen).

7°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n$ n réels positifs ou nuls. On appelle moyenne arithmétique de $x_1, \dots, x_n$ la quantité $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ et moyenne géométrique la quantité $\Big(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i\Big)^{\frac{1}{n}}$. Montrer que la moyenne géométrique est inférieure à la moyenne arithmétique (il s'agit de l'inégalité arithmético-géométrique).

8°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $1 + \Big(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k\Big)^{\frac{1}{n}} \leq \displaystyle\prod_{k=1}^{n} [(1 + x_k)^{\frac{1}{n}}]$.

Partie 2 : fonctions log-convexes

Lorsque f est une application de I dans $\mathbb{R}_+^*$, on dit que f est log-convexe sur I si et seulement si $\ln \circ f$ est convexe.

9°) Montrer que l'application $x \longmapsto \dfrac{1}{x^3}$ est log-convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

10°) Montrer que si f est log-convexe sur I , alors elle est convexe sur I.
La réciproque est-elle vraie ?

11°) On suppose que f est une application deux fois dérivable de I dans $\mathbb{R}_+^*$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les dérivées de f pour que f soit log-convexe.

Soit f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}_+^*$ que l'on suppose log-convexes.

12°) Montrer que fg est log-convexe.

13°) Déduire de la question 11 que, lorsque f et g sont deux fois dérivables, alors $f + g$ est log-convexe.

On suppose à nouveau que f est une application quelconque de I dans $\mathbb{R}_+^*$.

14°) Montrer que f est log-convexe sur I si et seulement si pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'application $x \longmapsto e^{ax} f(x)$ est convexe sur I.

15°) Démontrer le résultat de la question 13 sans supposer que f et g sont deux fois dérivables.

16°) Soit J un second intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux éléments.

Soit g une application de I dans J que l'on suppose convexe et h une application de J dans $\mathbb{R}$ que l'on suppose convexe et croissante.
Montrer que $h \circ g$ est convexe.
Plus généralement, la composée de deux applications convexes est-elle toujours convexe ?

17°) Montrer que f est log-convexe sur I si et seulement si pour tout $\alpha > 0$, $x \longmapsto f(x)^\alpha$ est convexe.

Partie III : Inégalité de Hölder

On fixe un réel p dans $]1, +\infty[$.
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

18°) Montrer qu'il existe un unique réel q non nul tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}) \geq \frac{1}{p} \ln x + \frac{1}{q} \ln y$.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.
On note E l'ensemble des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$.

19°) Soit f et g deux éléments de E.

a) Montrer que $\displaystyle\int_a^b |f(t)g(t)|\ dt \leq \frac{1}{p} \int_a^b |f(t)|^p\ dt + \frac{1}{q} \int_a^b |g(t)|^q\ dt$.

b) En déduire l'inégalité de Hölder : $\displaystyle\int_a^b |f(t)g(t)|\ dt \leq \Big(\int_a^b |f(t)|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \times \Big(\int_a^b |g(t)|^q \Big)^{\frac{1}{q}}$.

20°) Pour tout $f \in E$, on note $\displaystyle\|f\|_p = \Big(\int_a^b |f(t)|^p\ dt \Big)^{\frac{1}{p}}$.
Montrer que, pour tout $f, g \in E$, $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ (inégalité triangulaire).

21°) On suppose maintenant que p et q sont deux réels strictement positifs quelconques et on note r l'unique réel strictement positif tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$.
Montrer que, pour tout $f, g \in E$, $\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

22°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \ldots, p_n$ n réels strictement posititfs. On note r l'unique réel strictement positif tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{p_k} = \frac{1}{r}$.

Montrer que, pour tout $f_1, \ldots, f_n \in E$, $\displaystyle\Big\| \prod_{k=1}^n f_k \Big\|_r \leq \prod_{k=1}^n \|f_k\|_{p_k}$.