

Toutes les trajectoires seront étudiées dans le vide et on négligera le poids. Les vitesses seront, sauf mention explicite du contraire, non relativistes.
On s'efforcera d'utiliser de préférence l'énergie et des raisonnements géométriques plutôt que d'établir les équations horaires pour l'étude des mouvements dans les champs magnétiques.

Exercices d'application : Oscilloscope et spectrographe de masse, réflectron (à traiter par l'énergie)

Culture en sciences physiques : Oscilloscope et spectrographe de masse, champs électromagnétique et étude de trajectoires, vitesses relativistes, chambre à bulles

Corrigés en TD : Oscilloscope, spectrographe de masse, réflectron, champs électromagnétiques et trajectoires

Champ électrostatique

Exercice 1 : Déviation électrique et oscilloscope

On étudie le mouvement d'une particule chargée sous l'effet d'un champ électrique « uniforme par morceaux » créé par une paire de plaques parallèles orthogonales à \vec{e}_z et par une autre paire de plaques parallèles orthogonales à \vec{e}_x . Les plaques orthogonales à \vec{e}_z sont de plus percées de deux trous sur la même droite $z = 0, y = 0$ (Figure 1).

On admet que le champ électrique peut être considéré uniforme entre chaque paire de plaques et nul partout ailleurs.

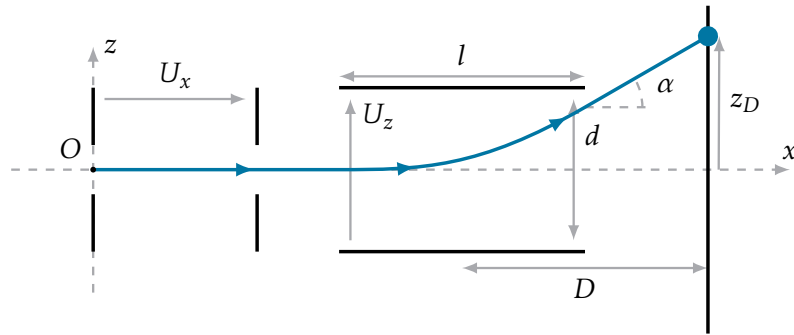


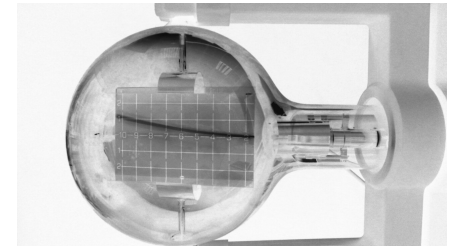
FIG. 1 : Accélération et déflexion d'un faisceau électronique par deux champs électriques uniformes.

1. La particule est un électron, de charge $q = -e$ et de masse m , injecté avec une vitesse négligeable au point O . Quels doivent être les signes des tensions U_z et U_x entre les paires de plaques pour que :

- Elle soit accélérée par la première paire de plaques.
- Elle soit déviée vers les $z > 0$ par la deuxième paire.

On supposera ces conditions réalisées par la suite.

2. Déterminer le module de la vitesse, noté v_0 , de l'électron quand celui-ci sort de la première paire de plaques.
3. Les plaques de la deuxième paire sont distantes de d .
 - (a) Déterminer les expressions de $x(t)$ et $z(t)$ quand l'électron se trouve entre les plaques de la deuxième paire et en déduire l'équation de la trajectoire.
 - (b) Déterminer en particulier sa position et la direction de son vecteur vitesse quand l'électron sort au bout d'une distance l .
 - (c) Quelle est la trajectoire ultérieure ? Déterminer en particulier l'ordonnée z_D du point d'impact sur un écran placé à une distance D du milieu de la deuxième paire de plaques. Les caractéristiques de la particule chargée importent-elles ?
4. Ce dispositif modélise un oscilloscope à tube cathodique. Quelle doit être la tension U_z pour qu'une tension U_x de $3,0 \cdot 10^3 \text{ V}$ produise un impact en $z_D = 1,0 \text{ cm}$ pour $D = 20 \text{ cm}$, $l = 5,0 \text{ cm}$ et $d = 1,0 \text{ cm}$?
5. La photographie ci-contre représente un tel oscilloscope cathodique. Déterminer à l'aide de la trajectoire observée le rapport des tensions U_x et U_z .



Exercice 2 : Réflectron

Un réflectron est un dispositif utilisant un champ électrostatique uniforme pour séparer des particules chargées dont les rapports q/m diffèrent. Dans toute la suite, on considérera $q > 0$.

1. Pourquoi le dispositif étudié dans l'exercice 1 ne peut-il pas convenir ?

Dans un réflectron, les particules chargées se propagent :

- tout d'abord dans une région où \vec{E} est nul ;
- puis pénètrent dans une région où $\vec{E} = -E\vec{e}_x$ est uniforme et répulsif (avec $E \geq 0$) ;
- et repartent enfin dans la région où \vec{E} est nul pour atteindre un détecteur.

On s'intéresse à la durée Δt_{tot} totale de leur trajet. On note \mathcal{E}_c l'énergie cinétique de la particule quand elle est en O . Elle leur a été fournie par la traversée d'une différence de potentiel U_0 : on a donc $\mathcal{E}_c = qU_0$.

2. Déterminer la durée Δt_1 au bout de laquelle la particule a parcouru la distance L_1 .
3. (a) Quelle est la nature du mouvement quand la particule est dans le champ \vec{E} ? À quelle condition la particule fait-elle demi-tour dans cette zone ?
(b) Quel est le vecteur vitesse quand elle ressort du champ \vec{E} après réflexion ?
(c) Déterminer dans ce cas le temps Δt_E passé dans le champ \vec{E} .
4. (a) Déterminer la durée Δt_2 au bout de laquelle la particule atteint le détecteur situé à la distance L_2 .
(b) En déduire la durée totale Δt_{tot} , nommée « temps de vol », du trajet du point O jusqu'au détecteur. Montrer que ce dispositif permet de distinguer des particules selon la valeur de leur rapport q/m .

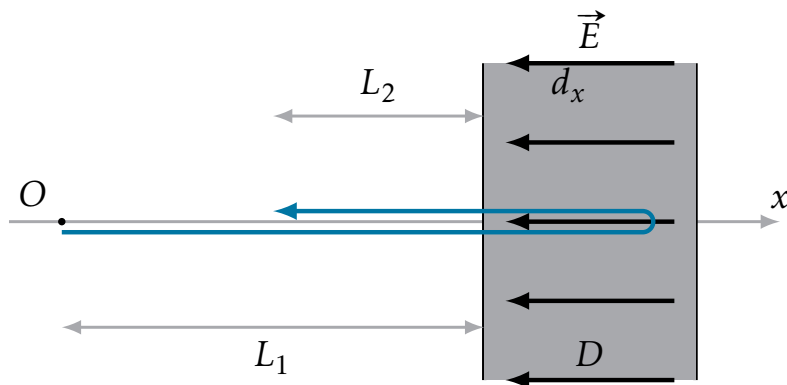


FIG. 2 : Trajet d'un faisceau électronique dans un réflectron. On a décalé l'aller et le retour pour plus de lisibilité bien qu'ils soient superposés.

5. On envoie un faisceau de particules d'énergies cinétiques initiales comprises dans un intervalle de largeur $\Delta\mathcal{E}_c$ autour de la valeur moyenne \mathcal{E}_{c0} , avec $\Delta\mathcal{E}_c \ll \mathcal{E}_{c0}$.

- Quel est l'effet de cette dispersion des énergies cinétiques ?
- On pose $y = \sqrt{2\mathcal{E}_c}$. Tracer l'allure de Δt_{tot} en fonction de y .
- En déduire qu'on peut choisir l'intensité E du champ pour minimiser la dispersion des temps de vol de particules d'énergies cinétiques initiales différentes quelle que soit la valeur de leur rapport q/m .
- Calculer la valeur de E optimale pour une tension accélératrice de $U_0 = 2,0 \text{ kV}$ et une longueur totale $L_1 + L_2 = 1,6 \text{ m}$. Calculer la durée de trajet correspondante pour le cation monochargé de $(\text{Re}(\text{Br})_3)_3$ de masse $m = 1300 \times 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Champ magnétostatique

Exercice 3 : Déflexion magnétique et spectrographe de masse

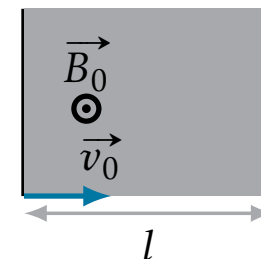


FIG. 3 : Champ magnétique uniforme dans une zone limitée.

On produit un champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ uniforme dans une région limitée de l'espace $0 \leq x \leq l$. Une particule de masse m et de charge $q < 0$ entre en un point O choisi comme origine des coordonnées avec la vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$.

- Déterminer sa trajectoire tant qu'elle est dans la région où règne \vec{B}_0 .
- Montrer que, si v_0 est supérieure à une valeur qu'on déterminera, la particule sort de cette région. On note $(x = l; y)$ les coordonnées du point de sortie.
 - Déterminer y et le module de la vitesse \vec{v} au point de sortie.
 - Déterminer également l'angle α de déflexion entre \vec{v} et \vec{v}_0 .
- On souhaite utiliser cette déflexion pour séparer des particules de même charge q et de masse différente (différents isotopes ionisés d'un même atome par exemple). On réalise ainsi un *spectrographe de masse*. Dans cet appareil, les particules sont préalablement accélérées par une différence de potentiel U entre deux électrodes planes distantes de d à partir d'une vitesse initiale qu'on considérera nulle.
 - Faire un schéma du dispositif : les électrodes sont des plaques orthogonales à \vec{e}_x .
 - Déterminer $x(t)$ entre les électrodes ainsi que la vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ acquise par les particules en fonction de U , q et m après la traversée de la région accélératrice.
 - Les particules entrent ensuite dans une région de champ \vec{B}_0 : déterminer, quand elle existe, leur position de sortie.
 - Montrer que la déflexion magnétique étudiée précédemment permet de séparer physiquement des particules de même charge et de masse différente. Peut-elle séparer des particules de même charge spécifique q/m ?

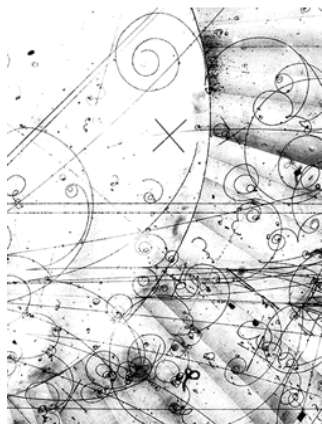
On étudie dans l'exercice 5 le cas d'une particule pénétrant dans la région où règne \vec{B} en n'étant pas tout à fait orthogonale à \vec{B} .

Exercice 4 : Chambre à bulles

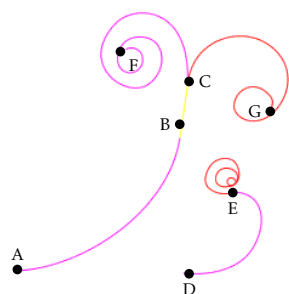
La figure 4 présente un cliché de la chambre à bulles du Fermilab dans lequel des protons énergétiques sont envoyés dans une mixture de Ne et H.

Sur ce cliché, on s'intéresse à des trajectoires d'électrons et de positrons antiparticule de l'électron, de même masse et de charge opposée, produits par collision des protons incidents avec ceux de la mixture H et (Ne). Les trajectoires observées sont celles de particules chargées.

- Il règne dans la chambre à bulles un champ magnétique de direction orthogonale au plan de la figure.
 - Justifier qu'un champ magnétique permet de courber les trajectoires. Établir l'expression du rayon R de la trajectoire d'une particule de charge q dans un champ magnétique uniforme de norme B en fonction de sa quantité de mouvement p . On admet que cette formule reste valable en mécanique relativiste.



(a) Cliché de chambre à bulle.



(b) Traces à interpréter.

FIG. 4

- (b) Comment varie l'énergie cinétique d'une particule décrivant une trajectoire circulaire dans un champ magnétique uniforme? Comment interpréter le fait que les trajectoires observées forment des spirales.
- Les petites spirales isolées sont les trajectoires d'électrons dits «Compton» éjectés d'un atome par un photon. Quel est le sens du champ magnétique?
 - Identifier la nature des particules qui suivent les trajectoires $(A \rightarrow B)$, $(D \rightarrow E)$, $(C \rightarrow F)$ et $(C \rightarrow G)$.
 - Sur la portion $B \rightarrow C$, la particule observée est un photon. Décrire les processus sur la portion $(A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F/G)$.
 - La distance BC est de 11 cm et le champ magnétique a une intensité de 3 T. En déduire des approximations de la quantité de mouvement et de l'énergie des particules sur les différentes portions des trajectoires.

En E , on observe la collision entre deux particules, la particule incidente communiquant toute sa quantité de mouvement à la cible. Ceci n'est possible que si leurs masses sont égales : cette observation a historiquement permis de vérifier l'égalité des masses de l'électron et du positron.

Exercice 5 : Focalisation électronique, sélecteur de particules

Une source radioactive, ponctuelle, placée à l'origine O des coordonnées, émet des électrons (masse m , charge $-e$) autour de O , dans un cône d'axe Oy et de demi-angle au sommet α . Les électrons sont émis avec des vitesses de même norme v . On considère que les électrons sont émis dans le plan xOy . Il règne dans la région $x \geq 0$, $y \geq 0$ un champ magnétique uniforme \vec{B} , orthogonal au plan xOy .

On place un écran (E) , orthogonal à Oy , passant par O . On perce au point O' , de l'axe Ox , un trou de diamètre A_1A_2 , centré en O' . On pose $OA_2 = D$, $A_1A_2 = d$. On donne $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.

- Préciser le sens de \vec{B} et la norme de la vitesse des électrons émis selon Oy pour qu'ils sortent en A_2 . On donne $B = 2,25 \cdot 10^{-3}$ T et $D = 5 \cdot 10^{-2}$ m.

- En supposant α petit, exprimer d en fonction de D et α pour que tous les électrons émis dans le cône puissent traverser le trou. Calculer numériquement d en prenant $\alpha = 0,1$ rad.

- Pourquoi peut-on parler de focalisation électronique?

Exercice 6 : Actions d'un champ magnétique et d'une force de rappel

Une particule de masse m et charge q se déplace dans un plan xOz . Elle subit l'action d'une force de rappel $\vec{f} = -k\vec{OM} = -k\vec{r}$, ainsi que l'action d'un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 \vec{e}_y$, dirigé selon \vec{e}_y .

- À quelle condition le mouvement pourra-t-il effectivement être plan?
 - Écrire les équations différentielles du mouvement de $M(x, 0, z)$.
- On pose $u = x + jz$, en notation complexe. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par u . On posera $\omega_0^2 = k/m$.
- Montrer que dans le mouvement de M apparaissent deux pulsations ω_+ et ω_- que l'on exprimera en fonction de deux pulsations ω_0 et ω_c .
- Quelle est la nature du mouvement pour $\omega_0 \gg \omega_c$.

Exercice 7 : Vitesses relativistes dans un synchrotron

Les accélérateurs de particules performants permettent d'atteindre des vitesses proches de celle de la lumière. Dans ces conditions, les grandeurs cinétiques pertinentes sont :

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_c = (\gamma - 1)mc^2 \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

- Tracer les allures des courbes de p et de \mathcal{E}_c en fonction de v et comparer au cas non relativiste. On vérifiera en particulier qu'on retrouve les formules non relativistes pour $v \ll c$.
- Un synchrotron est une machine de grande taille servant à accélérer des particules chargées. Une fois accélérées, elles se déplacent à très grande vitesse dans un «anneau de stockage» (Figure 5), leur trajectoire se composant d'une succession de portions rectilignes. Le faisceau est dévié entre chaque portion rectiligne par un champ magnétique qu'on considérera uniforme à l'aide du phénomène décrit à l'exercice 3.

La présentation du synchrotron Soleil de l'article «Soleil : Une source de lumière synchrotron de troisième génération» du *Bulletin de l'Union des Physiciens* n°855 en donne les caractéristiques suivantes :

«Ayant atteint 2,75 GeV grâce aux deux accélérateurs, les électrons sont alors injectés dans l'anneau de stockage de 364 m de circonférence où 32 aimants de courbure [...] assurent [...] le guidage du faisceau.»

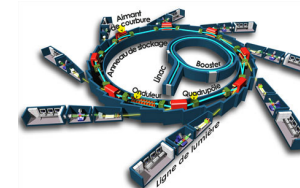


FIG. 5 : Vue d'artiste du synchrotron Soleil.

- Les électrons sont-ils relativistes?
- Quelle doit être la déflexion angulaire produite par chaque aimant?

- (c) Adapter la formule non relativiste donnant l'angle de déviation de l'exercice « déflexion magnétique et spectrographe de masse » au cas relativiste et en déduire l'intensité du champ magnétique nécessaire. La longueur d de chaque élément de courbure est $d = 1,0\text{m}$.

Autres structures

Exercice 8 : Électron émis par un fil cylindrique

Un conducteur cylindrique très long, d'axe Oz et de section circulaire de rayon a est parcouru par un courant d'intensité I . Il crée à une distance r de l'axe du fil un champ magnétique orthoradial $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$ (pour $r \geq a$). Il existe une probabilité non nulle pour qu'un électron soit émis par ce fil, avec une vitesse initiale que l'on supposera radiale.

1. Montrer que le mouvement sera plan.
2. Établir l'équation différentielle du mouvement et en déduire une relation entre \dot{z} et r .
3. En déduire la distance maximale à laquelle l'électron peut s'éloigner du fil.

Exercice 9 : Champs électromagnétiques

On étudie le mouvement d'une particule de charge q et de masse m soumise à la fois à un champ électrique \vec{E}_0 et un champ magnétique \vec{B}_0 , tous deux uniformes.

1. Déterminer la nature du mouvement si les deux champs sont colinéaires.
2. On considère désormais le cas où les deux champs sont orthogonaux : on a $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x$ et $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_y$, avec E_0 et B_0 des constantes positives.
 - (a) On étudie les composantes de la force de Lorentz dans un référentiel, noté \mathcal{R}' , en translation à la vitesse \vec{V}_0 uniforme par rapport au référentiel, noté \mathcal{R} , du laboratoire. Le vecteur vitesse, noté \vec{v}' , d'un point dans le référentiel \mathcal{R}' est relié au vecteur vitesse \vec{v} dans le référentiel \mathcal{R} par $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}_0$. Que peut-on dire de la force de Lorentz dans le référentiel \mathcal{R}' ? En déduire que les champs électrique et magnétique dans \mathcal{R}' ont respectivement pour expression :

$$\vec{E}'_0 = \vec{E}_0 + \vec{V}_0 \wedge \vec{B}_0 \quad \vec{B}'_0 = \vec{B}_0.$$

- (b) Quelle est la dimension du vecteur $(\vec{E}_0 \wedge \vec{B}_0)/B_0^2$?
- (c) Montrer qu'il existe un référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel \mathcal{R} dans lequel le champ est purement magnétique. En déduire la trajectoire dans le référentiel \mathcal{R} d'un point matériel animé d'un vecteur vitesse initial dirigé dans le plan orthogonal à \vec{e}_y .

Exercice 10 : Filtre de Wien

Une particule de charge $q > 0$ et de masse m pénètre en O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_y$ ($v_0 > 0$) dans une zone de l'espace ($y > 0$) où règnent les champs uniformes et stationnaires $\vec{E} = E_0 \vec{e}_z$ et $\vec{B} = B_0 \vec{e}_x$ ($E_0 > 0$ et $B_0 > 0$).

1. (a) Montrer, en considérant la force de Lorentz, que le mouvement peut être rectiligne uniforme pour une valeur particulière de v_0 qu'on déterminera en fonction de \vec{E} et \vec{B} .
(b) Expliquer comment ce dispositif peut être utilisé pour sélectionner des particules en fonction de leur vitesse. On réalise ainsi un *filtre de Wien*.

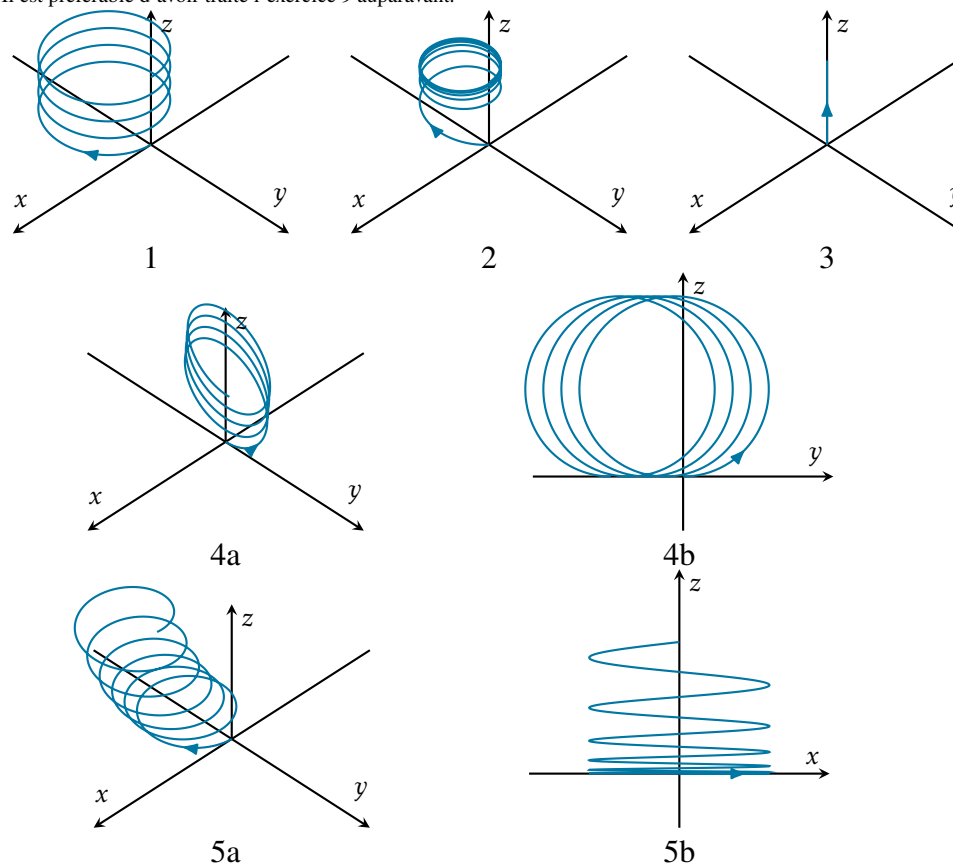
2. On considère maintenant que la vitesse initiale a toujours la direction \vec{e}_y mais une intensité $v = v_0 + \Delta v$.

- (a) Utiliser les résultats de l'exercice précédent pour déterminer à quelle distance d_{\max} maximale de l'axe Oy la particule passe? On l'exprimera en fonction de la pulsation cyclotron $\omega_c = \frac{|q|B_0}{m}$ et de Δv .
- (b) Quelle est alors la valeur de y ?
- (c) En déduire où placer un trou sur l'axe Oy pour réaliser un filtre très sélectif en vitesse.

Exercice 11 : Étude de trajectoires

Dans chacune des trajectoires ci-dessous, une charge ponctuelle de charge $q > 0$ part de l'origine. Proposer, en les justifiant, la direction et le sens d'un champ électrique et/ou du champ magnétique stationnaires compatibles avec la trajectoire observée dans lesquels se meut la particule. On ne cherchera pas à résoudre les équations du mouvement.

Les figures 4a et 4b (resp. 5a et 5b) sont deux vues de la même trajectoire sous deux angles différents. Il est préférable d'avoir traité l'exercice 9 auparavant.



Correction de l'exercice 1

1. L'électron est soumis à la force $\vec{F} = -e\vec{E}$. On souhaite donc que le champ \vec{E} soit dirigé vers les x décroissants entre les plaques verticales et vers les z décroissants entre les plaques horizontales. Comme $\vec{E}_x = -\frac{dV}{dx}\vec{e}_x$ est dans le sens des potentiels décroissants, on doit avoir V croissant entre les plaques, c'est-à-dire $U_x \geq 0$ et de même $U_z \geq 0$. On vérifie bien que l'électron, de charge négative, est attiré vers la plaque au potentiel le plus élevé, celle de charge positive.
2. La conservation de l'énergie mécanique entre un point de potentiel V_a , où la vitesse est nulle, et un point de potentiel V_b , où son module est v_0 , s'écrit :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - eV_b = -eV_a \text{ soit : } v_0 = \sqrt{\frac{2eU_x}{m}}.$$

3. (a) Le champ électrostatique uniforme a pour expression $\vec{E} = -\frac{U_z}{d}\vec{e}_z$. Le mouvement est uniformément accéléré, d'accélération uniforme $\vec{a}(M) = -\frac{e\vec{E}}{m} = \frac{eU_z}{dm}\vec{e}_z$. Les conditions initiales étant $x = 0, z = 0, \dot{x} = v_0, \dot{z} = 0$, on a :

$$\begin{cases} x &= v_0 t \\ z &= \frac{eU_z}{2dm} t^2. \end{cases}$$

On en déduit :

$$t = \frac{x}{v_0} \text{ soit : } z = \frac{eU_z}{2dmv_0^2} x^2 = \frac{U_z}{4dU_x} x^2.$$

- (b) L'électron sort donc en $z = U_z l^2 / (4U_x d)$.

La tangente de l'angle α entre le vecteur vitesse et le vecteur \vec{e}_x est la pente de la tangente à la trajectoire.

Celle-ci a pour expression $\frac{dz}{dx} = U_z x / (2U_x d)$.

On a donc, en $x = l$:

$$\tan(\alpha) = \frac{U_z l}{2U_x d}.$$

- (c) Le mouvement ultérieur est rectiligne uniforme : c'est la tangente à la parabole décrite entre les plaques au point de sortie. En notant $z = f(x)$ l'équation de cette parabole, sa tangente au point d'abscisse $x = l$ a pour équation :

$$g(x) = f(l) + f'(x_l)(x - x_l) = f(l) + (x - x_l) \tan(\alpha) \text{ soit : } g(x) = \frac{U_z l^2}{4U_x d} + \frac{U_z l}{2U_x d} (x - l).$$

L'écran est placé en $x = D + l/2$, on a donc :

$$z_D = g(D + l/2) = \frac{U_z l D}{2U_x d}.$$

Cette position ne dépend que des caractéristiques électriques et géométriques du dispositif mais pas de la charge ni de la masse des particules.

4. On calcule :

$$U_z = \frac{2z_D d U_x}{l D} = 6,0 \cdot 10^1 \text{ V}.$$

5. Remarquons tout d'abord que la déviation étant vers $+\vec{e}_z$, la plaque de plus haut potentiel est celle du dessus. Dans la zone entre les plaques horizontales, le mouvement est uniformément accéléré selon \vec{e}_z , d'accélération $\ddot{z} = eU_z / (dm)$. On a donc :

$$\begin{cases} x(t) &= v_x(x=0) = \sqrt{\frac{2eU_x}{m}} t \\ z(t) &= \frac{eU_z t^2}{2dm} \end{cases}$$

On en déduit l'équation de la trajectoire :

$$z(x) = \frac{\ell^2}{4d} \frac{U_z}{U_x}.$$

On observe que pour $\ell = 8,3 \text{ cm}$, on a $z \approx 1,2 \text{ cm}$ avec $d = 6 \text{ cm}$. On calcule donc $U_z / U_d = 0,5$.

Correction de l'exercice 2

1. On a vu à l'exercice 1 que l'utilisation successive de deux champs électriques uniformes orthogonaux produit une déflexion indépendante du rapport q/m .
2. Son mouvement est rectiligne uniforme, de vitesse $\vec{v} = \sqrt{2\mathcal{E}_c / m} \vec{e}_x$. Elle parcourt donc la distance L_1 en $\Delta t_1 = L_1 \sqrt{m / (2\mathcal{E}_c)} = L_1 \sqrt{m / (2qU_0)}$.
3. (a) Le mouvement est rectiligne, uniformément accéléré. On applique le théorème de l'énergie cinétique entre l'entrée dans le champ \vec{E} , où l'énergie cinétique est \mathcal{E}_c , et le point d'arrêt situé à une distance $d_x \leq D$, où l'énergie cinétique est nulle. Le travail de la force électrique est $-qEd_x$ et on a donc :

$$0 - \mathcal{E}_c = -qEd_x.$$

On doit donc avoir $\mathcal{E}_c \leq qED$ pour que la particule fasse demi-tour.

- (b) Le champ électrique étant conservatif, son travail est nul entre l'entrée et la sortie du champ \vec{E} par le même point. Le vecteur vitesse a simplement changé de sens et vaut désormais $-\sqrt{2\mathcal{E}_c / m} \vec{e}_x$.

- (c) La loi de la quantité de mouvement s'écrit, en projection sur \vec{e}_x , $m \frac{d\dot{x}}{dt} = -qE = \text{cste}$. On l'intègre entre l'entrée dans \vec{E} où $\dot{x} = \sqrt{2\mathcal{E}_c / m}$ et la sortie où on a : $\dot{x} = -\sqrt{2\mathcal{E}_c / m}$.

$$-2m \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_c}{m}} = -qE \Delta t_E \text{ soit : } \Delta t_E = \frac{2m}{qE} \sqrt{\frac{2\mathcal{E}_c}{m}}.$$

4. (a) On a de nouveau un mouvement rectiligne uniforme, soit $\Delta t_2 = L_2 \sqrt{m / (2\mathcal{E}_c)}$.

- (b) On en déduit :

$$\Delta t_{\text{tot}} = (L_1 + L_2) \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}_c}} + \frac{2}{qE} \sqrt{2m\mathcal{E}_c} = \sqrt{\frac{m}{q}} \left(\frac{L_1 + L_2}{\sqrt{2U_0}} + \frac{2}{E} \sqrt{2U_0} \right).$$

À tension accélératrice U_0 fixée, le temps de vol ne dépend que du rapport q/m .

5. (a) Des particules de rapport e/m différentes pourront arriver en même temps si certaines sont trop rapides ou trop lentes : le signal sera brouillé.

(b) On reprend l'expression du temps de vol en fonction de l'énergie cinétique :

$$\Delta t_{\text{tot}} = (L_1 + L_2) \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{E}_c}} + \frac{2}{qE} \sqrt{2m\mathcal{E}_c} = \sqrt{m} \left(\frac{L_1 + L_2}{y} + \frac{2}{qE} y \right).$$

La courbe se comporte comme $1/y$ quand y tend vers 0 et comme y quand il tend vers l'infini. On obtient l'allure représentée sur la Figure 6.

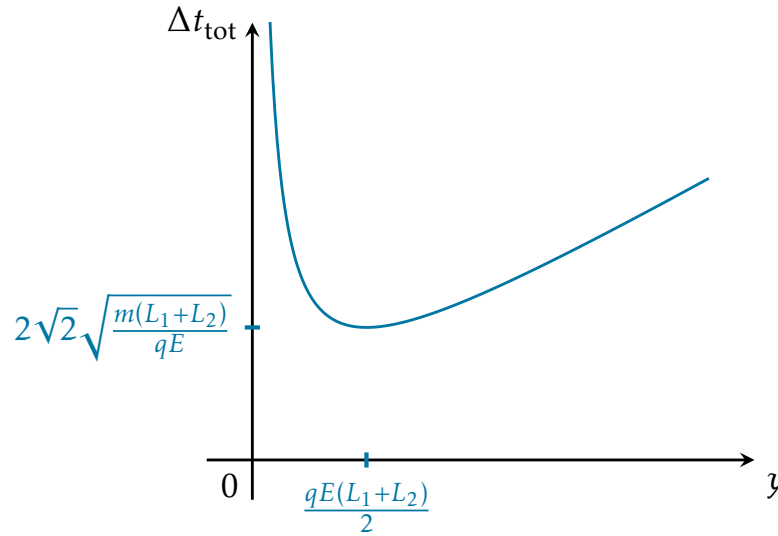


Fig. 6 : Variation du temps de vol avec l'énergie cinétique initiale.

(c) La dispersion des temps de vol sera minimale pour la valeur de y annulant sa dérivée, soit :

$$\sqrt{m} \left(-\frac{L_1 + L_2}{y^2} + \frac{2}{qE} \right) = 0 \text{ soit : } y = \sqrt{\frac{qE(L_1 + L_2)}{2}}.$$

Avec $y = \sqrt{2qU_0}$, cette condition se réécrit $U_0 = E(L_1 + L_2)/4$: elle est indépendante du rapport q/m comme on le souhaite. On détermine l'expression de Δt_{tot} quand cette condition est remplie :

$$\Delta t_{\text{tot}} = 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{(L_1 + L_2)m}{qE}}.$$

(d) On calcule :

$$E = \frac{4U_0}{L_1 + L_2} = 5,0 \cdot 10^3 \text{ V} \quad \text{et} \quad 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{(L_1 + L_2)m}{qE}} = 1,85 \cdot 10^{-4} \text{ s}.$$

Correction de l'exercice 3

1. Son vecteur vitesse est initialement orthogonal au champ magnétique, elle décrira donc un cercle de rayon $R = \frac{v_0}{\omega_c}$, avec $\omega_c = \frac{|q|B_0}{m}$. La Figure 7 représente par exemple la trajectoire d'un électron de charge $e < 0$.
2. Elle sortira de cette zone si $R > l$, soit $v_0 > \frac{eBl}{m}$.
 - (a) Elle décrit un cercle d'équation cartésienne $x^2 + (y - R)^2 = R^2$ et sort en $x = l$ pour $y = R - \sqrt{R^2 - l^2}$. Le champ magnétique ne travaillant pas, la norme de la vitesse de sortie est toujours v_0 et $\vec{v} = v_0 (\cos(\alpha)\vec{e}_x + \sin(\alpha)\vec{e}_y)$.
 - (b) On lit sur la Figure $\sin(\alpha) = \frac{l}{R} = \frac{lqB_0}{v_0 m}$.

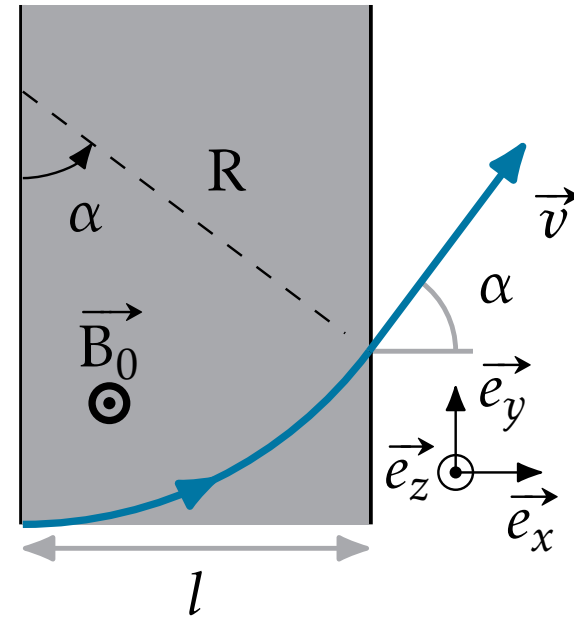


Fig. 7 : Trajectoire d'un électron dans une zone de champ magnétique uniforme.

3.
 - (a) Les deux plaques doivent être orthogonales à Ox avec $\frac{dV}{dx} > 0$ pour accélérer des électrons.
 - (b) Le mouvement est uniformément accéléré entre les deux plaques, on a $x(t) = \frac{1}{2} \frac{qUr^2}{dm}$ avec d la distance entre les deux plaques. Par conservation de l'énergie mécanique $\mathcal{E} = \frac{1}{2} mv^2 + qV$, entre $V_1; v = 0$ et $V_2; v_0$, $v_0 = \sqrt{2|qU|/m}$ avec $U = V_2 - V_1$.

(c) En utilisant le résultat précédent la particule sort pour $x = l$ et $y = R \left(1 - \sqrt{1 - l^2/R^2}\right)$ avec $R = \frac{v_0 m}{|q|B} = \frac{\sqrt{2|U|}}{B} \sqrt{\frac{m}{|q|}}$

(d) La position du point de sortie et l'angle de sortie $\alpha = \arcsin \frac{l}{R}$ ne dépendent que de $R = \frac{v_0 m}{|q|B} = \frac{\sqrt{2|U|}}{B} \sqrt{\frac{m}{|q|}}$.
On pourra donc séparer des particules de même charge et de masse différente mais pas des particules de même *masse spécifique* q/m .

Correction de l'exercice 4

- La force magnétique est orthogonale à la vitesse, elle permet donc de courber les trajectoires. Comme vu en cours, on a $p = |q|RB$. En mécanique relativiste, on aura $p = \gamma m v$.
 - La force magnétique ne travaille pas, l'énergie cinétique des particules reste donc constante. Les particules décrivent des spirales car elles perdent de l'énergie par collision avec le fluide, et parce qu'elles rayonnent de l'énergie comme toute particule accélérée.
- Les spirales isolées s'enroulent toutes dans le sens horaire. Comme ce sont des électrons, la règle d'orientation vue en cours assure que le champ magnétique « rentre » dans le plan de la feuille.
 - On identifie la charge des particules grâce au sens de l'enroulement :
 $A \rightarrow B$: positron
 $B \rightarrow C$: particule neutre (un photon)
 $D \rightarrow E$: positron
 $E \rightarrow$: électron
 $C \rightarrow F$: positron
 $C \rightarrow G$: électron
 - Le positron s'annihile avec un électron pour former photon en B , celui-ci donne, par création de paire, un électron et un positron en C . Le positron s'annihile en F pour donner un autre photon. L'électron subit une collision en G qui le fait changer de direction en diminuant assez peu son énergie (puisque le rayon de courbure de sa trajectoire change peu).
- On estime les rayons de courbure sur les différentes trajectoires (par exemple en recherchant les intersections des normales aux trajectoires). Comme sur chacune des trajectoires, l'énergie et la quantité de mouvement diminuent, on mesure le rayon au début ou à la fin de la portion de trajectoire. On mesure environ :

$A \rightarrow B$: $R = 30 \text{ cm}$ et donc $p = eRB = 2,7 \cdot 10^2 \text{ MeV/c}$ (notons qu'il y a peu de freinage dans ce cas),

$D \rightarrow E$: au voisinage du point E , $R = 4,5 \text{ cm}$ et donc $p = 40 \text{ MeV/c}$

$E \rightarrow$: au voisinage du point E , $R = 4,5 \text{ cm}$ et donc $p = 40 \text{ MeV/c}$

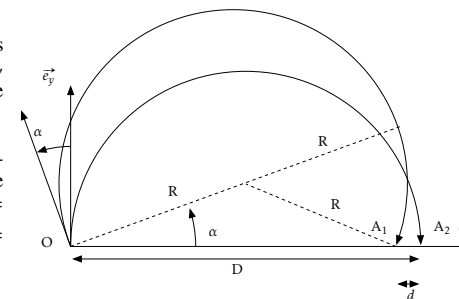
$C \rightarrow F$: au voisinage du point C , $R = 13 \text{ cm}$ et donc $p = 1,2 \cdot 10^2 \text{ MeV/c}$

$C \rightarrow G$: au voisinage du point C , $R = 9 \text{ cm}$ et donc $p = 80 \text{ MeV/c}$.

On vérifie que pour ces valeurs $p/(m_e c)$ est très grand devant 1 puisque $m_e c = 511 \text{ keV/c}$ les particules sont toujours relativistes.

Correction de l'exercice 5

- On doit avoir $\vec{B} = -B_0 \vec{e}_z$ avec $B_0 > 0$ pour recueillir les électrons en A_2 . Ceux qui ont été émis avec $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_y$ en sortiront après avoir parcouru la moitié d'un cercle de diamètre $D = 2 \frac{v}{\omega_c}$, avec $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$ soit $v = \frac{eB_0 D}{2m}$.
- Les électrons émis avec un angle α par rapport à \vec{e}_y parcourent un cercle dont le diamètre fait le même angle avec \vec{e}_x . Ils sortent à une abscisse $D - d$ avec : $D - d = 2R \cos \alpha = D \cos \alpha$, soit $D(1 - \cos \alpha) = d$ et $d = \frac{D\alpha^2}{2} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ pour $\alpha \ll 1$.



- On réalise ici un stigmatisme approché : les faisceaux électroniques paraxiaux ($\alpha \ll 1$) passent tous à proximité du foyer O' .

Correction de l'exercice 6

- La deuxième loi de Newton donne : $m \ddot{\vec{r}} = -k \vec{r} + q \vec{v} \wedge \vec{B}$, soit en projection : $\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = -\omega_c \dot{z} \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_c \dot{x} \end{cases}$.
- La variable complexe $\underline{u} = x + jz$ vérifie l'équation différentielle $\ddot{\underline{u}} - j\omega_c \dot{\underline{u}} + \omega_0^2 \underline{u} = 0$, avec $\omega_c = \frac{qB}{m}$ et $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.
- Les solutions seront des fonctions en $e^{\alpha_{\pm} t}$, avec α_{\pm} solutions du polynôme caractéristique $X^2 - j\omega_c X + \omega_0^2 = 0$:

$$\alpha_{\pm} = \frac{1}{2} j\omega_c \left(1 \pm \sqrt{1 + 4 \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2}} \right) = j\omega_{\pm}$$
- Pour $\omega_0 \gg \omega_c$: $\omega_+ \approx \frac{\omega_c}{2} + \omega_0$ et $\omega_- = \frac{\omega_c}{2} - \omega_0$. L'affixe \underline{u} représentant la position du point se met sous la forme :

$$\underline{u} = X_+ e^{j\omega_+ t} + X_- e^{j\omega_- t} = e^{\frac{j\omega_c t}{2}} \left(X_+ e^{j\omega_0 t} + X_- e^{-j\omega_0 t} \right)$$
 - Le terme $(X_+ e^{j\omega_0 t} + X_- e^{-j\omega_0 t})$ est le celui qui apparaîtrait dans l'étude d'un oscillateur harmonique spatial. Cette trajectoire est une ellipse de Hooke, parcourue « rapidement » à la pulsation ω_0 .
 - La multiplication par $e^{j\omega_c t/2}$ décrit une rotation « lente » des axes propres de l'ellipse à la pulsation $\omega_c/2$.

Correction de l'exercice 7

On trace ces courbes sur la Figure 8. Le terme γ diverge quand v tend vers c : la quantité de mouvement et l'énergie cinétique ne sont donc pas bornées bien que v le soit par c .

Quand $v \ll c$, γ tend vers 1 et on retrouve $p = mv$. De même, un développement au terme non nul d'ordre le plus bas en v^2/c^2 de $\gamma - 1 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1$ donne $\gamma - 1 = 1 + v^2/(2c^2) - 1 = v^2/(2c^2)$. On retrouve bien $\mathcal{E}_c = mv^2/2$.

- On calcule $v/c = \sqrt{1 - 1/\gamma} = 1 - 1 \cdot 10^{-4}$: les électrons sont relativistes.
- Au cours d'une révolution dans l'anneau, le vecteur vitesse des électrons doit avoir tourné de 360° . Cette rotation étant effectuée en 32 étapes, la rotation à chaque étape doit être de $360/32 = 11^\circ$.

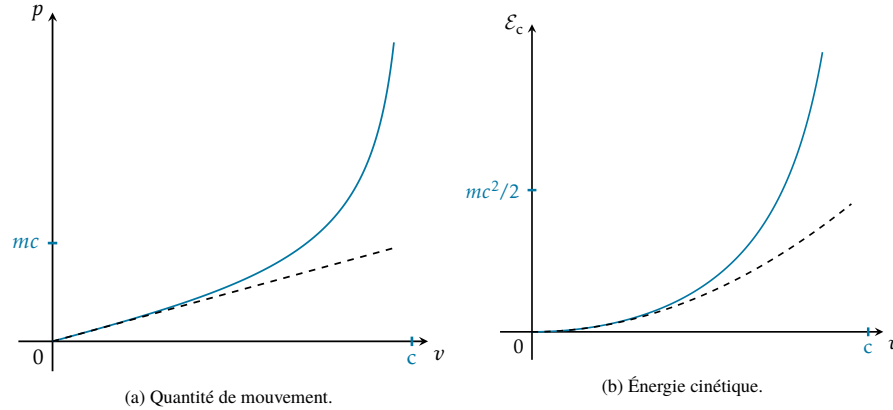


FIG. 8 : Quantité de mouvement p et énergie cinétique \mathcal{E}_c . Les courbes en traits pleins sont celles de la dynamique relativiste. Celles en traits interrompus l'approximation de la mécanique classique.

3. La force magnétique ne travaillant pas, le mouvement dans un champ magnétique uniforme est toujours circulaire uniforme. Il suffit donc de remplacer m par γm dans les expressions non relativistes de l'exercice 3. Le rayon de la trajectoire est donc $R = \frac{\gamma m v}{eB}$ et l'angle θ de déviation après une traversée de $d = 2,0\text{ m}$ vérifie :

$$\sin(\theta) = \frac{deB}{\gamma m v}.$$

Pour la valeur de $\mathcal{E}_c = 2,75\text{ GeV}$, on calcule, pour un électron de masse $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}\text{ kg}$, $v/c \approx 1 - 1 \cdot 10^{-4}$: on peut donc prendre $v = c$. En écrivant $\gamma = 1 + \frac{\mathcal{E}_c}{mc^2}$, on a :

$$\sin(\theta) = \frac{deB}{mc \left(1 + \frac{\mathcal{E}_c}{mc^2}\right)} = 0,37.$$

On calcule alors :

$$B = \frac{mc \left(1 + \frac{\mathcal{E}_c}{mc^2}\right) \sin(\theta)}{de} = 1,7\text{ T}.$$

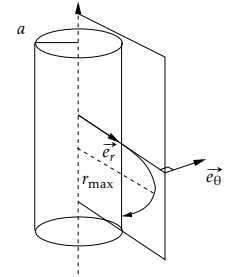
Correction de l'exercice 8

1. Le champ magnétique est orthoradial : $\vec{B} = B_\theta(r) \vec{e}_\theta$. Comme la force magnétique lui est orthogonale, elle n'aura pas de composante selon \vec{e}_θ . La particule ayant initialement un vecteur vitesse selon \vec{e}_r , elle n'acquiert pas de quantité de mouvement selon er et demeure dans le plan vertical contenant l'axe vertical et la position initiale. Dans ce plan la direction du champ magnétique est constante (elle lui est orthogonal) mais il n'est pas uniforme puisque son intensité décroît avec la distance à l'axe.
2. Les équations du mouvement s'écrivent, en coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} \ddot{z} = -\frac{e\mu_0 I}{2\pi m} \frac{\dot{r}}{r} \\ \ddot{r} = \frac{e\mu_0 I}{2\pi m} \frac{\dot{z}}{r} \end{cases}$$
La première équation s'intègre selon :

$$\dot{z} - \dot{z}_0 = \dot{z} = -\frac{e\mu_0 I}{2\pi m} \ln \frac{r}{a}.$$

3. La norme de la vitesse est conservée puisque le champ magnétique ne travaille pas et qu'il n'y a pas de champ électrique. On a donc $\sqrt{\dot{r}^2 + \dot{z}^2} = v_0 = \dot{r}_0 > 0$. La norme de la vitesse axiale \dot{z} sera donc maximale en r_0 pour $\dot{z} = -v_0$ quand le rayon sera maximal en $r_{\max} = ae^{\left(\frac{2\pi m v_0}{e\mu_0 I}\right)}$.



Correction de l'exercice 9

1. Notons \vec{e}_z la direction commune des deux champs, on a $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_z$ et $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$. La force de Lorentz est $\vec{F} = q(E_0 \vec{e}_z + B_0 \vec{v} \wedge \vec{e}_z)$. La force électrique est donc toujours selon \vec{e}_z et la force magnétique toujours dans le plan orthogonal à \vec{e}_z : elles agissent sur des composantes différentes de la vitesse comme si elles étaient seules. Décomposons le vecteur vitesse initial \vec{v}_0 en une composante $v_{0\parallel}$ colinéaire à \vec{e}_z et $\vec{v}_{0\perp}$ orthogonale à \vec{e}_z selon $\vec{v}_0 = v_{0\parallel} \vec{e}_z + \vec{v}_{0\perp}$. Le mouvement est donc :

- uniformément accéléré selon \vec{e}_z , de vecteur accélération $qE_0 \vec{e}_z/m$,
- circulaire uniforme dans la direction orthogonale à \vec{e}_z , de pulsation $\omega_c = |qB_0|/m$ et de rayon $v_{0\perp}/\omega_c$. La norme de la composante de la vitesse orthogonale est à \vec{e}_z n'est en effet pas modifiée par le champ magnétique.

2. (a) Comme les deux référentiels sont en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre, la loi de composition des vecteurs vitesse donnée assure qu'ils auront le même vecteur accélération, ils sont donc soumis à la même force. La force de Lorentz doit pour cela avoir la même valeur dans les deux référentiels bien que le vecteur vitesse de la particule y soit différent. En notant respectivement \vec{E}'_0 et \vec{B}'_0 les champs dans \mathcal{R}' , on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} q(\vec{E}'_0 + \vec{v} \wedge \vec{B}'_0) &= q(\vec{E}_0 + \vec{v} \wedge \vec{B}_0) \\ q(\vec{E}'_0 + (\vec{v}' + \vec{V}_0) \wedge \vec{B}'_0) &= q(\vec{E}_0 + \vec{v} \wedge \vec{B}_0) \\ q(\vec{E}'_0 + \vec{V}_0 \wedge \vec{B}'_0 + \vec{v}' \wedge \vec{B}'_0) &= q(\vec{E}_0 + \vec{v} \wedge \vec{B}_0) \end{aligned}$$

Il est nécessaire d'avoir : $\begin{cases} \vec{E}'_0 = \vec{E}_0 + \vec{V}_0 \wedge \vec{B}_0 \\ \vec{B}'_0 = \vec{B}_0 \end{cases}$ pour que ce résultat soit vérifié pour tout vecteur vitesse \vec{v}' .

- (b) La dimension d'un champ magnétique est $[B] = [E/v]$. L'expression proposée a donc la dimension d'une vitesse.

- (c) Le vecteur proposé a pour direction $\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z$, posons donc $(\vec{E}_0 \wedge \vec{B}_0) = V_0 \vec{e}_z = (E_0/B_0) \vec{e}_z$. Dans le référentiel, noté \mathcal{R}' , en translation à \vec{V}_0 par rapport à \mathcal{R} , le champ électrique a pour expression :

$$\vec{E}_0' = \vec{E}_0 + \vec{V}_0 \wedge \vec{B}_0 = E_0 \vec{e}_x + \frac{E_0}{B_0} \vec{e}_z \wedge B_0 \vec{e}_y = E_0 \vec{e}_x - E_0 \vec{e}_x = \vec{0}.$$

Le champ est donc purement magnétique dans ce référentiel.

Pour un vecteur vitesse initial dans \mathcal{R} , noté \vec{v}_0 , dirigé dans le plan orthogonal à \vec{e}_y , le vecteur vitesse initial dans \mathcal{R}' est $\vec{v}_0 - \vec{V}_0$, toujours orthogonal à \vec{e}_y . Dans \mathcal{R}' où le champ est purement magnétique, selon \vec{e}_y , le mouvement est circulaire uniforme dans un plan orthogonal à \vec{e}_y . Le mouvement dans \mathcal{R} est donc la composition de la translation rectiligne uniforme à $\vec{V}_0 \vec{e}_z$ et du mouvement circulaire uniforme autour de \vec{e}_y . Il s'agit d'une cycloïde, allongée ou raccourcie.

Correction de l'exercice 10

- (a) Les forces magnétique et électrique auront la même direction \vec{e}_z et des sens opposés si le vecteur vitesse est selon $+\vec{e}_y$. Pour que leur somme soit nulle, il faut qu'ils aient la même norme, soit que : $E_0 = v_0 B_0$, ie $v_0 = E_0/B_0$. Il faut donc avoir $\vec{v}_0 = \frac{E_0}{B_0} \vec{e}_y$.
On peut interpréter ce résultat dans les termes de l'exercice précédent. Considérons le \mathcal{R}' en translation rectiligne uniforme à $v_0 \vec{e}_y$ par rapport au référentiel du laboratoire \mathcal{R} . Les résultats de l'exercice précédent assurent que dans \mathcal{R}' le champ électromagnétique est purement magnétique. Une particule animée de \vec{v}_0 dans \mathcal{R} est par ailleurs immobile dans \mathcal{R}' . Puisque dans ce dernier référentiel il n'y a pas de champ électrique, elle n'est soumise à aucune force et demeure donc immobile dans \mathcal{R}' .
- (b) Seules les particules animées de ce vecteur vitesse pourront avoir une trajectoire rectiligne et, par exemple sortir par un trou aligné avec l'entrée du dispositif.
- (a) Dans le référentiel \mathcal{R}' en translation à $v_0 \vec{e}_y$, la particule n'est soumise qu'à la force magnétique due au champ \vec{B}_0 . Comme elle est initialement animée, dans \mathcal{R}' de la vitesse $\Delta v \vec{e}_y$. Elle décrit donc un mouvement circulaire uniforme de rayon $R = \Delta v / \omega_c = m \Delta v / (q B_0)$ et s'éloigne donc au maximum de la distance $2R$ de l'axe.
(b) Dans \mathcal{R}' Le cercle est parcouru en $2\pi/\omega_c$, elle met donc π/ω_c pour en parcourir la moitié et s'éloigner de la distance $2R$ de l'axe. Dans \mathcal{R} elle aura parcouru la distance $v_0 \pi / \omega_c$.
(c) Cette distance est indépendante de Δv . En plaçant un diaphragme de petit diamètre en ce point, on sélectionnera les particules de vitesse dans \mathcal{R} la plus proche de v_0 puisque les autres seront alors au plus loin de l'axe.

Correction de l'exercice 11

- Cette trajectoire est celle d'une particule dans un champ magnétique uniforme selon \vec{e}_z . Celui-ci est selon $+\vec{e}_z$ puisque l'enroulement est dans la direction donnée par \vec{e}_z et $q > 0$. Le vecteur vitesse initial comporte une composante selon $+\vec{e}_z$, conservée au cours du mouvement.
- Le champ magnétique a les mêmes propriétés que dans le cas précédent mais le pas de l'hélice se réduit selon \vec{e}_z . Il y a donc un champ électrique selon $-\vec{e}_z$ qui produit une accélération selon $-\vec{e}_z$ sans modifier le mouvement de rotation du au champ magnétique.
- On peut n'avoir aucun champ mais aussi des champs magnétique et électrique selon \vec{e}_z et un vecteur vitesse initial selon la même direction.

- On a un mouvement circulaire uniforme dans le plan orthogonal à \vec{e}_x enroulé dans le sens donné par $+\vec{e}_x$, composé avec une translation selon $-\vec{e}_y$ et $-\vec{e}_x$. Les résultats de l'exercice 9 permettent d'expliquer ce mouvement par un champ magnétique selon $-\vec{e}_x$ et un champ électrique selon \vec{e}_z . Le champ électrique est alors purement magnétique dans le référentiel en translation rectiligne uniforme à $\vec{E} \wedge \vec{B} / B^2$ dirigé selon $\vec{e}_z \wedge -\vec{e}_x = -\vec{e}_y$. La translation selon $-\vec{e}_x$, de même direction que le champ \vec{B} , est due à une vitesse initiale non nulle selon cette direction.

- On a maintenant :

- un enroulement autour de $-\vec{e}_z$, soit un champ magnétique selon \vec{e}_z ,
- une dérive selon $-\vec{e}_y$, soit une composante du champ électrique selon \vec{e}_x
- une accélération selon $+\vec{e}_z$ soit une composante du champ électrique selon $+\vec{e}_z$.