DM 1
Les intégrales impropres

A) Les fonctions puissances

1°) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$, $x^n = e^{n \ln x}$

Lorsque $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on définira en conséquence x^α par la relation suivante :

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

2°) Lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que l'application $x \longmapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$.

3°) Pour tout $x \in]1, +\infty[$, calculer $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t^2}$ et déterminer la limite de cette quantité lorsque x tend vers $+\infty$.

4°) Pour tout $x \in]0, 1[$, calculer $\displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ et déterminer la limite de cette quantité lorsque x tend vers 0.

Lorsque f est une application continue de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$, on note $\int_a^b f(t)\, dt$ la limite réelle, si elle existe, de $\int_a^x f(t)\, dt$ lorsque x tend vers b.

De même, lorsque f est une application continue de $]a, b]$ dans $\mathbb{R}$ où $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, on note $\int_a^b f(t)\, dt$ la limite réelle, si elle existe, de $\int_x^b f(t)\, dt$ lorsque x tend vers a.

5°) Étudier l'existence des quantités suivantes et, en cas d'existence, préciser leurs valeurs : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

B) Une intégrale doublement impropre

Notons f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}$.

6°) Déterminer le domaine de définition de f.

7°) Lorsque u est un réel tel que $\cos u \neq 0$, on pose $\tan u = \dfrac{\sin u}{\cos u}$ (cette expression se prononce "tangente de u"). Déterminer le domaine de définition de la fonction tan, montrer qu'elle est dérivable et que $\tan'(u) = \dfrac{1}{\cos^2 u}$.

8°) Soit $\alpha \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$. En dérivant, montrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{(\sin\alpha)^2} f(x)\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} \frac{4 \ln \sin u}{\cos^2 u}\, du$, puis en intégrant par parties, en déduire la valeur de $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{(\sin\alpha)^2} f(x)\, dx$.

9°) Montrer que $\dfrac{\ln(t)}{t-1} \underset{t\to 1}{\longrightarrow} 1$ puis en déduire l'existence et la valeur de la quantité $\displaystyle\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{\sin^2(\alpha)} f(x)\, dx$.

10°) On admet que, pour tout $x \in [-1, 1]$, il existe un unique réel dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, noté $\arcsin(x)$ tel que $\sin(\arcsin(x)) = x$. On admet également que l'application arcsin ainsi définie est continue sur $[-1, 1]$.
En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\, dx$.

11°) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx$.

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.
Soit g une application continue de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\displaystyle\int_x^c g(t)\, dt$ converge vers une limite réelle lorsque x tend vers a et tel que $\displaystyle\int_c^x g(t)\, dt$ converge vers une limite réelle lorsque x tend vers b. Ainsi, $\displaystyle\int_a^c g(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_c^b g(t)\, dt$ sont supposées définies.

12°) Montrer que la quantité $\displaystyle\int_a^c g(t)\, dt + \int_c^b g(t)\, dt$ ne dépend pas de c.
On la notera $\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$.

13°) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}\, dx$ est bien définie et donner sa valeur.

C) Un peu de théorie

Pour la suite, f désigne à nouveau une application quelconque.

On admettra le théorème suivant, appelé *théorème de la limite monotone* : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Soit f une application de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ que l'on suppose croissante. Alors $f(t)$ possède une limite réelle lorsque t tend vers b, avec $t \in [a, b[$, si et seulement si f est majorée, c'est-à-dire si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \in [a, b[$, $f(t) \leq M$.

14°) Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Si f est une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, montrer que $\displaystyle\int_x^b f(t)\ dt \underset{x\to a}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\ dt$ et que $\displaystyle\int_a^x f(t)\ dt \underset{x\to b}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\ dt$.

En déduire l'existence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\ dt$.

15°) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Soit f une application continue de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $t \in [a, b[$, $f(t) \geq 0$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est définie si et seulement si l'application $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ est majorée.

16°) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Soit f et g deux applications continues de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $t \in [a, b[$, $0 \leq g(t) \leq f(t)$.

Montrer que si $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est définie, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ est également définie.

En déduire que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\cos t|}{t^2}\ dt$ est définie.

17°) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Soit f une application continue de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in [a, b[$, on pose $f^+(t) = \max(f(t), 0)$ et $f^-(t) = \max(-f(t), 0)$. Exprimer f et $t \longmapsto |f(t)|$ en fonction de f^+ et f^-.

En déduire que si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\ dt$ est définie, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ est aussi définie.

D) Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ dt$

18°) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ dt$ est définie.

19°) Montrer que pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt)$.

20°) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}\ dt$.

Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, on pose $h(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t}$ et on convient que $h(0) = 0$. On admettra que h est une application de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, c'est-à-dire que h est dérivable et que h' est continue.

On admettra également les propriétés suivantes, appelées *inégalité triangulaire* :

— pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $|a + b| \leq |a| + |b|$;

— si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et si f est une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, alors $\left| \int_a^b f(t)\ dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\ dt$.

21°) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ dt = \frac{\pi}{2}$.