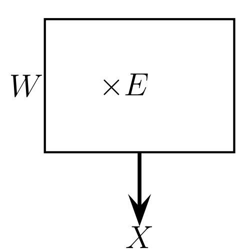
DM 2. Corrigé

Première partie

1°) Pour toute personne X de V, notons $f(X)$ le nombre de personnes qu'elle espionne.
L'ensemble $\{f(X)/X \in V\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, majorée par le cardinal de V. D'après le cours elle admet un maximum, noté m. Il existe donc une personne X_0 dans V tel que $f(X_0) = m$: le nombre de personnes espionnées par X_0 est alors maximal.
2°) Montrons que X_0 est bien un espion, par l'absurde.
Supposons donc que X_0 n'est pas un espion. Il existe alors $Z \in V$ tel que, pour tout $Y \in V$, ou bien X_0 n'espionne pas Y, ou bien Y n'espionne pas Z.
Ainsi, pour tout Y espionné par X_0, Y n'espionne pas Z, donc d'après les hypothèses de l'énoncé, Z espionne Y.
Ainsi, $\{Y \in V/X_0 \text{ espionne } Y\} \subset \{Y \in V/Z \text{ espionne } Y\}$.
En particulier, Z espionne X_0 mais $Z \neq X_0$, donc X_0 n'espionne pas Z alors que Z s'espionne lui-même. L'inclusion précédente est donc stricte.
On en déduit que $f(Z) > f(X_0)$, ce qui est impossible.
3°) Notons W l'ensemble des personnes différentes de X qui espionnent X. W est non vide par hypothèse, donc c'est aussi un village. Alors W possède un espion, noté E. Par construction E espionne X et $E \neq X$: cf figure :

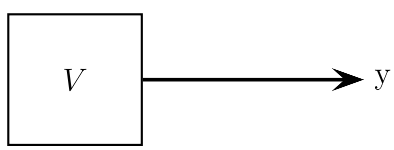


Il suffit donc de montrer que E est un espion pour le village V.
Soit $Z \in V$. Si $Z \in W$, E étant un espion du village W, il existe bien $Y \in V$ tel que E espionne Y qui espionne Z.
Si maintenant $Z \notin W$, alors Z n'espionne pas X ou bien $Z = X$, donc X espionne Z.
Mais $E \in W$, donc E espionne X.
Alors E espionne X qui espionne Z, ce qu'il fallait démontrer.

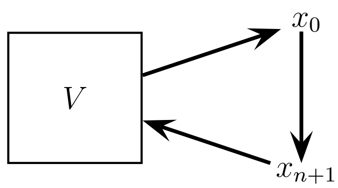
4°) Supposons que E est l'unique espion de V.
Supposons qu'il existe X tel que E n'espionne pas X. Alors $X \neq E$ et X espionne E. D'après la question précédente, il existe un espion différent de E qui espionne E, ce qui est impossible.
On a montré que E espionne tous les éléments de V.
Réciproquement, supposons qu'il existe $E \in V$ tel que E espionne toutes les personnes de V. Alors E est clairement un espion. Montrons que c'est le seul.
Supposons l'existence d'un autre espion F dans V.
E espionne F, donc F n'espionne pas E.
De plus, F étant un espion, il existe $X \in V$ tel que F espionne X qui espionne E. Mais E espionne X, donc $X = E$ ce qui est faux.
En conclusion, V possède un unique espion si et seulement si il existe une personne de V qui espionne toutes les autres.
5°) Supposons que V possède exactement 2 espions E et F, distincts.
D'après la question précédente, il existe $X \in V$ tel que E n'espionne pas X. Alors X espionne E et $X \neq E$, donc d'après la question 3, F espionne E.
De même on montre que E espionne F, ce qui est impossible.

Seconde partie :

Pour dire que X espionne Y, on notera $X \longrightarrow Y$.
1°) On suppose qu'il existe un $V = \{x_1, \dots, x_m\}$, de cardinal m, admettant exactement k espions, où $k \leq m$.
Soit y un élément qui n'est pas dans V. Posons $W = V \cup \{y\}$.



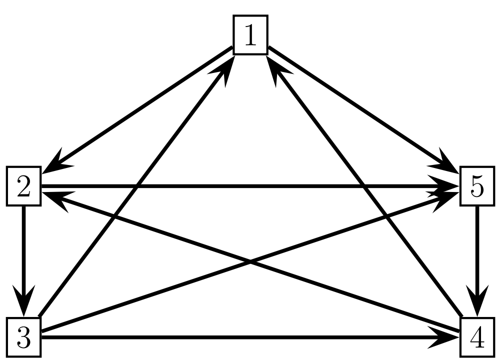
Conformément à la figure ci-dessus, on prolonge la relation d'espionnage sur W en convenant que, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, x_i espionne y. Ainsi W est bien un village, de cardinal $m + 1$.
Les k espions de V espionnent y, donc ce sont aussi des espions pour W.
y n'espionne aucun élément de V, donc il n'atteint aucun élément de V, même en utilisant un intermédiaire. Ainsi y n'est pas un espion dans W.
Si $x \in V$ n'est pas un espion dans V, il existe $x'' \in V$ tel que pour tout $x' \in V$,
$\neg(x \longrightarrow x'$ et $x' \longrightarrow x'')$. Clairement, pour tout $x' \in W = V \cup \{y\}$,
$\neg(x \longrightarrow x'$ et $x' \longrightarrow x'')$. Ainsi x n'est toujours pas un espion dans W.
On a montré que W est un $V(m + 1, k)$. Par récurrence, sur m, on en déduit que s'il existe un $V(n, k)$, alors pour tout $m \geq n$, il existe un $V(m, k)$.
2°) Posons à nouveau $V = \{x_1, \dots, x_n\}$. Soit x_0 et x_{n+1} deux éléments distincts et différents des éléments de V.
Posons $W = \{x_0, \dots, x_{n+1}\}$.



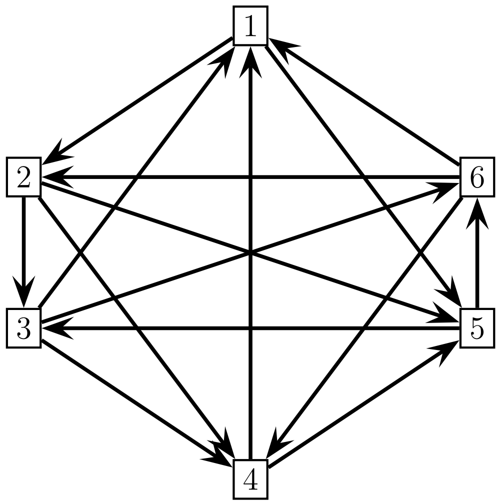
Conformément à la figure ci-dessus, on définit la relation binaire d'espionnage sur W de la manière suivante :
Pour tout $X, Y \in W$, X espionne Y dans W si et seulement si

- $X, Y \in V$ et X espionne Y dans V, ou bien
- $X \in V$ et $Y = x_0$, ou bien
- $X = x_{n+1}$ et $Y \in V$, ou bien
- $X = x_0$ et $Y = x_{n+1}$, ou bien
- $X = Y$.

On vérifie que W est alors bien un village.
Soit $X \in V$. X espionne x_0 qui espionne x_{n+1}, or X est un espion de V, donc X est un espion de W.
Soit $X \in V$. x_0 espionne x_{n+1} qui espionne X, donc x_0 est un espion de W.
De même, x_{n+1} espionne X qui espionne x_0, donc x_{n+1} est aussi un espion de W.
On a montré que W est un $V(n+2, n+2)$.
3°) $V = \{a\}$, où a s'espionne lui-même est un $V(1,1)$.
La question 2 permet de construire un $V(2k+1, 2k+1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis la question 1 permet de construire un $V(n, 2k+1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2k+1$.
On obtient ainsi tous les couples (n,k) (avec $1 \leq k \leq n$) tels que k est impair.
Le procédé de la question 1, tout comme le procédé de la question 2, permettent de passer d'un couple (n,k) à un couple (n',k') où k et k' ont la même parité, donc ces procédés, à partir seulement d'un $V(1,1)$ ne permettent pas d'accéder à d'autres couples (n,k), avec k pair.
4°) Voici un exemple de $V(5,4)$.



En effet, on vérifie que $1, 2, 3$ et 4 sont des espions. Au contraire, 5 n'espionne que 4 lequel n'espionne que 1 et 2, donc 5 n'est pas un espion : il n'atteint pas 3.
5°) Voici un exemple de $V(6,6)$.



6°) Supposons qu'il existe un $V(4,4)$, que l'on note $V = \{A, B, C, D\}$.
Pour tout $M \in V$, notons $E(M)$ le nombre de personnes de V espionnées par M et différentes de M.
Sans perdre en généralité, on peut supposer que $E(A) \geq E(B) \geq E(C) \geq E(D)$.
Si $E(A) = 3$, d'après la question I.4, A est l'unique espion de V, ce qui est faux. Ainsi $E(A) \leq 2$.
Si $E(D) = 0$, alors D n'espionne que lui-même et ce n'est pas un espion, ce qui est faux. Ainsi $E(D) \geq 1$.
De plus pour chacune des $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 6$ paires de V, il y a exactement une relation d'espionnage, donc $S = E(A) + E(B) + E(C) + E(D) = 6$.
Si $E(B) = 1$, alors $S \leq 5$, donc $E(A) = E(B) = 2$,
puis nécessairement, $E(C) = E(D) = 1$.
C et D jouant des rôles symétriques, on peut supposer que $C \longrightarrow D$.
Alors D ne peut espionner C, donc l'unique personne qu'il espionne est A ou B.
A et B jouant des rôles symétriques, on peut supposer que $D \longrightarrow A$.
Alors, avec éventuellement un intermédiaire, C atteint D et A, mais il n'atteint pas B, donc C n'est pas un espion, ce qui est faux.
En conclusion, il n'existe pas de $V(4,4)$.
7°) D'après les questions 4 et 1, pour tout $n > 4$, il existe un $V(n,4)$.
D'après les questions 5, puis 2, puis 1, il existe un $V(n,2p)$ pour tout $p \geq 3$, et $n \geq 2p$.
D'après la question I.4, il n'existe aucun $V(n,2)$ (avec $n \geq 2$).
En conclusion, pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leq k \leq n$, il existe un $V(n,k)$, sauf lorsque $k = 2$ et lorsque $(n,k) = (4,4)$.