DS 8 : un corrigé

Le barème comporte 62 points.

Exercice 1 (sur 3 points) :

On pose $t = 1 - x$, de sorte que t tend vers 0 lorsque x tend vers 1. Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1 - t + \sqrt{1-t}} \\ &= (1 - t + (1 - \tfrac{t}{2} + \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2})\tfrac{t^2}{2} + o(t^2))^{\frac{1}{2}} \\ &= (2 - \tfrac{3t}{2} - \tfrac{t^2}{8} + o(t^2))^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2}(1 - \tfrac{3t}{4} - \tfrac{t^2}{16} + o(t^2))^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2}(1 - \tfrac{3t}{4}(1 + \tfrac{t}{12} + o(t))\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8}.\tfrac{9t^2}{16}(1 + o(1))) \\ &= \sqrt{2} - \tfrac{3\sqrt{2}}{8}t - \sqrt{2}\tfrac{t^2}{16}(\tfrac{1}{2} + \tfrac{9}{8}) + o(t^2), \end{aligned}$$

donc $f(x) = \sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{8}(x-1) - \frac{13\sqrt{2}}{128}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$.

Exercice 2 (sur 4 points) :

$(n+1)^{1+\frac{1}{n}} = exp((1 + \frac{1}{n})\ln(n+1))$,

or $\ln(n+1) = \ln(n(1+\frac{1}{n})) = \ln(n) + ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln(n) + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$, donc

$(n+1)^{1+\frac{1}{n}} = exp\Big(\ln(n) + \dfrac{\ln(n)}{n} + o(\dfrac{\ln(n)}{n})\Big) = exp(\ln(n))\exp\Big(\dfrac{\ln(n)}{n} + o(\dfrac{\ln(n)}{n})\Big)$.

Or $\dfrac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $(n+1)^{1+\frac{1}{n}} = n\Big(1 + \dfrac{ln(n)}{n} + o(\dfrac{\ln(n)}{n})\Big) = n + \ln(n) + o(\ln(n))$.

De même, $(n+1)^{1-\frac{1}{n}} = exp\Big((1 - \dfrac{1}{n})(\ln(n) + \dfrac{1}{n} + o(\dfrac{1}{n}))\Big) = n\exp\Big(-\dfrac{\ln(n)}{n} + o(\dfrac{\ln(n)}{n})\Big)$,

donc $(n+1)^{1-\frac{1}{n}} = n - \ln(n) + o(\ln(n))$.

Ainsi, $a_n \sim \dfrac{2\ln(n)}{n^\alpha}$ [Il s'agit d'une série de Bertrand.]

$\diamond$ *P*remier cas. Supposons que $\alpha \leq 1$.

Alors, pour $n \geq 3$, $\dfrac{2\ln(n)}{n^\alpha} \geq \dfrac{2}{n}$, donc $\sum a_n$ diverge.

$\diamond$ *D*euxième cas. Supposons que $\alpha > 1$.

Il existe $\gamma \in]1, \alpha[$. $\dfrac{2\ln(n)}{n^\alpha} = o(\dfrac{1}{n^\gamma})$ donc $\sum a_n$ est convergente.

Problème : restes de Cauchy des séries de Riemann

Ce problème s'inspire très largement de la première moitié du sujet de Centrale MP 2011.

Partie I (sur 5 points) : Formule de Taylor

1°) (sur 2 points) Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $R(n)$ la propriété suivante :
$f(b) = f(a) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$

Pour $n = 0$, f étant de classe C^1 sur $[a, b]$, d'après le cours, $f(a) = f(b) + \displaystyle\int_a^b f'(t)\, dt$, ce qui prouve $R(0)$.
Pour $n \geq 0$, supposons $R(n)$. En intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt &= \Big[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \Big]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\, dt \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\, dt,\end{aligned}$$

donc d'après l'hypothèse de récurrence,
$f(b) = f(a) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\, dt$, ce qui prouve $R(n+1)$.
D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R(n)$.

2°) (sur 2 points) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
$\diamond$ Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à $f(t) = e^{-t}$ entre $a = x$ et $b = 0$. On obtient que $f(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(0-x)^k + \int_x^0 \frac{(0-t)^n}{n!}(-1)^{n+1} e^{-t}\, dt$, donc $1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} e^{-x} + \frac{1}{n!} \int_0^x t^n e^{-t}\, dt$. On en déduit que $\displaystyle\int_0^x t^n e^{-t}\, dt = n! \Big(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} e^{-x} \Big)$.
$\diamond$ En conservant l'entier n fixé, on fait maintenant tendre x vers $+\infty$. D'après le théorème des croissances comparées, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $x^k e^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\displaystyle\int_0^x t^n e^{-t} dt \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} n!$.
Cela signifie que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est définie et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$.

3°) (sur 1 point) On applique la formule de Taylor avec reste intégral entre k et $k+1$:
$f(k+1) = f(k) + \displaystyle\sum_{h=1}^{n} \frac{1}{h!} f^{(h)}(k) + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$
En effectuant le changement de variable $t = x + k$, on obtient que

$$f(k+1)=\sum_{h=0}^{n}\frac{1}{h!}f^{(h)}(k)+\frac{1}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(x+k)(1-x)^2\,dx.$$

Partie II (sur 4 points) : Convergence des séries de Riemann

4°) (sur 1 point)
Pour tout $x\in[k-1,k]\subset[a,+\infty[$, $f(x+1)\leq f(k)\leq f(x)$ par décroissance de f donc $\displaystyle\int_{k-1}^{k}f(x+1)\,\mathrm{d}x\leq\int_{k-1}^{k}f(k)\,\mathrm{d}x\leq\int_{k-1}^{k}f(x)\,\mathrm{d}x$, soit, en effectuant le changement de variable $t=x+1$ dans la première intégrale, $\displaystyle\int_{k}^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}x\leq f(k)\leq\int_{k-1}^{k}f(x)\,\mathrm{d}x$.

5°) (sur 3 points) Si $\alpha>1$, on a donc, en appliquant ce qui précède à $f:\ t\mapsto\frac{1}{t^\alpha}$ qui est bien continue et décroissante sur $[1,+\infty[$,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\leq 1+\int_1^n\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}=1+\left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_1^n=1+\frac{1}{\alpha-1}-\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\leq 1+\frac{1}{\alpha-1}$$

et la série $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^\alpha}$ est une série à termes réels positifs dont la suite des sommes partielles est majorée : elle est donc convergente.
Si $\alpha\leq1$, on a donc, en appliquant la question 4 à $f:\ t\mapsto\frac{1}{t}$ qui est continue et décroissante sur $[1,+\infty[$,

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geq\int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}=[\ln(t)]_1^{n+1}=\ln(n+1)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$$

et la série $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^\alpha}$ est donc divergente.
Ainsi $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha>1$.

6°) (les 3 points de la question précédente comprennent cette question)
La majoration a été vue lors de la question précédente et la minoration est immédiate car $\dfrac{1}{1^\alpha}=1$, donc $\forall\alpha>1,\ 1\leq S(\alpha)\leq1+\dfrac{1}{\alpha-1}$.

Partie III (sur 8 points) : Première étude asymptotique du reste

7°) (sur 3 points) Soit $n,N\in\mathbb{N}^*$ avec $2\leq n\leq N$. D'après la question 4,

$\displaystyle\int_n^{N+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}\leq\sum_{k=n}^N\frac{1}{k^\alpha}\leq\int_{n-1}^N\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, or $\displaystyle\int_n^N\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}=\Big[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\Big]_n^N\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$, donc en faisant tendre N vers $+\infty$ dans l'encadrement précédent, on obtient que
$\displaystyle\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\leq R_n(\alpha)\leq\frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}$, puis
$\displaystyle 0\leq R_n(\alpha)-\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\leq\frac{1}{\alpha-1}\Big(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}-\frac{1}{n^{\alpha-1}}\Big)$. Or

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}-\frac{1}{n^{\alpha-1}}&=\frac{1}{n^{\alpha-1}}\Big(\frac{1}{(1-\frac{1}{n})^{\alpha-1}}-1\Big)\\&=\frac{1}{n^{\alpha-1}}(1+(\alpha-1)\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})-1)\sim\frac{\alpha-1}{n^\alpha}.\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\frac{1}{\alpha-1}\Big(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}}-\frac{1}{n^{\alpha-1}}\Big)=\mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^\alpha}\Big)$, ce qui démontre que
$\displaystyle 0\leq R_n(\alpha)-\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\leq\mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^\alpha}\Big)$, donc que $\displaystyle \underline{R_n(\alpha)=\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}+O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)}$.

8°) (sur 2 points) D'après la question 3, avec $n=2$,

$$f(k+1)=f(k)+f'(k)+\frac{1}{2}f''(k)+\frac{1}{2}\int_0^1 f^{(3)}(k+x)(1-x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Or $\forall t\in\mathbb{R}_+^*, f'(t)=\dfrac{1}{t^\alpha},\ f''(t)=-\dfrac{\alpha}{t^{\alpha+1}},\ f^{(3)}(t)=\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{t^{\alpha+2}}$. On a donc

$$f(k+1)-f(k)=\frac{1}{k^\alpha}-\frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\int_0^1\frac{(1-t)^2}{(k+t)^{\alpha+2}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{k^\alpha}-\frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}}+A_k$$

avec $\displaystyle 0\leq A_k\leq\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\int_0^1\frac{1}{k^{\alpha+2}}\,\mathrm{d}t$.
On a donc $\displaystyle \underline{\forall k\in\mathbb{N}^*,\ f(k+1)-f(k)=\frac{1}{k^\alpha}-\frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}}+A_k\text{ avec }0\leq A_k\leq\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\frac{1}{k^{\alpha+2}}}$.

9°) (sur 3 points) On peut écrire l'égalité ci-dessus sous la forme
$\displaystyle\frac{1}{k^\alpha}=f(k+1)-f(k)+\frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}}-A_k$ avec $A_k=O\left(\frac{1}{k^{\alpha+2}}\right)$.
La série $\displaystyle\sum_{k\geq1}(f(k+1)-f(k))$ est une série télescopique qui converge puisque $f(n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et les séries $\displaystyle\sum_{k\geq1}\frac{1}{k^{\alpha+1}}$ et $\displaystyle\sum_{k\geq1}\frac{1}{k^{\alpha+2}}$ sont des séries de Riemann convergentes. On a donc, par linéarité de la somme, $\displaystyle R_n(\alpha)=-f(n)+\frac{\alpha}{2}R_n(\alpha+1)-\sum_{k=n}^{+\infty}A_k$. Or, par sommation de relation de comparaison pour des séries convergentes, on a $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}A_k=O(R_n(\alpha+2))$.
D'autre part d'après la question 7 appliquée à $\alpha+1$ et $\alpha+2$,

$R_n(\alpha+1) = \dfrac{1}{\alpha n^\alpha} + O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$ et $R_n(\alpha+2) = \dfrac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}} + O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+2}}\right) = O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$.

Finalement, $\underline{R_n(\alpha) = \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \dfrac{1}{2n^\alpha} + O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+1}}\right)}$.

Partie IV (sur 27 points) : Nombres de Bernoulli

10°) (sur 2 points) Soit f une fonction de classe C^∞ de I dans $\mathbb{C}$.

$\diamond$ Pour $p = 1$, posons $g = f$. Alors $g' = f'$, donc $g' = f' + \sum_{\ell=1}^{p-1} b_{\ell,p} f^{(p+\ell)}$, car la dernière somme est vide. Ceci démontre qu'en choisissant $\boxed{a_0 = 1}$, la propriété $R(1)$ est vérifiée.

$\diamond$ Pour $p = 2$, soit a_1 un réel pour le moment quelconque. Posons $g = f + a_1 f'$. Alors $g' + \frac{1}{2}g'' = f' + a_1 f'' + \frac{1}{2}(f'' + a_1 f^{(3)})$. Ainsi, en posant $\boxed{a_1 = -\frac{1}{2} \text{ et } b_{1,2} = -\frac{1}{4}}$, $g' + \frac{1}{2}g'' = f' + \sum_{\ell=1}^{p-1} b_{\ell,p} f^{(p+\ell)}$, de sorte que la propriété $R(2)$ est vérifiée : en effet, a_1 et $b_{1,2}$ ne dépendent pas de f.

11°) (sur 3 points) Soit f une fonction de classe C^∞ de I dans $\mathbb{C}$.

Prenons a_p pour le moment quelconque et notons $g = \sum_{k=0}^{p} a_k f^{(k)}$.

Posons $h = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^{(k)}$, de sorte que $g = h + a_p f^{(p)}$.

D'après $R(p)$, $\sum_{j=1}^{p} \dfrac{1}{j!} h^{(j)} = f' + \sum_{\ell=1}^{p-1} b_{\ell,p} f^{(\ell+p)}$ donc

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p+1} \frac{1}{j!} g^{(j)} &= \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{j!} h^{(j)} + \frac{1}{(p+1)!} h^{(p+1)} + a_p \sum_{j=1}^{p+1} \frac{1}{j!} f^{(p+j)} \\
&= f' + \sum_{\ell=1}^{p-1} b_{\ell,p} f^{(\ell+p)} + \frac{1}{(p+1)!} \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^{(k+p+1)} + a_p f^{(p+1)} + \sum_{j=2}^{p+1} \frac{a_p}{j!} f^{(p+j)} \\
&= f' + \sum_{\ell=2}^{p-1} b_{\ell,p} f^{(\ell+p)} + \frac{1}{(p+1)!} \sum_{k=1}^{p-1} a_k f^{(k+p+1)} + \sum_{j=2}^{p+1} \frac{a_p}{j!} f^{(p+j)} \\
&\quad + b_{1,p} f^{(p+1)} + \frac{a_0}{(p+1)!} f^{(p+1)} + a_p f^{(p+1)}.
\end{aligned}$$

Posons $\boxed{a_p = -b_{1,p} - \dfrac{a_0}{(p+1)!}}$. Alors,

$\displaystyle\sum_{j=1}^{p+1}\frac{1}{j!}g^{(j)}=f'+\sum_{\ell=1}^{p-2}b_{l+1,p}f^{(p+1+\ell)}+\frac{1}{(p+1)!}\sum_{\ell=1}^{p-1}a_\ell f^{(p+1+\ell)}+\sum_{\ell=1}^{p}\frac{a_p}{(\ell+1)!}f^{(p+1+\ell)}$, ce qui est bien de la forme $f'+\displaystyle\sum_{l=1}^{p}b_{l,p+1}f^{(l+p+1)}$ si l'on convient que pour tout $\ell\in\{1,\dots,p-2\}$, $\boxed{b_{\ell,p+1}=b_{\ell+1,p}+\frac{a_\ell}{(p+1)!}+\frac{a_p}{(\ell+1)!}}$, que $\boxed{b_{p-1,p+1}=\frac{a_{p-1}}{(p+1)!}+\frac{a_p}{p!}\text{ et }b_{p,p+1}=\frac{a_p}{(p+1)!}}$.

Par hypothèse, $(a_0,\dots,a_{p-1})$ et $(b_{\ell,k})_{\substack{2\le k\le p\\1\le\ell\le k-1}}$ ne dépendent pas de f, donc c'est encore le cas pour a_p et $(b_{\ell,p+1})_{1\le\ell\le p}$, ce qui prouve $R(p+1)$.

12°) (sur 4 points) Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Soit $x\in\mathbb{R}$. Écrivons $R(p)$ lorsque $I=\mathbb{R}$ et que f est l'application $t\longmapsto e^{xt}$, qui est bien de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

on a alors $\forall t\in\mathbb{R},\ g(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}a_kf^{(k)}(t)=\sum_{k=0}^{p-1}a_kx^k\mathrm{e}^{xt}$ donc, pour $t=0$,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j!}g^{(j)}(0)&=\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j!}\left(\sum_{k=0}^{p-1}a_kx^{k+j}\right)=\sum_{i=1}^{2p-1}\left(\sum_{\substack{j+k=i\\1\le j\le p,\ 0\le k\le p-1}}\frac{a_k}{j!}\right)x^i\\&=a_0x+\sum_{i=2}^{p}\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{a_{i-j}}{j!}\right)x^i+\sum_{l=1}^{p-1}\left(\sum_{\substack{j+k=l+p\\1\le j\le p,\ 0\le k\le p-1}}\frac{a_k}{j!}\right)x^{l+p}\end{aligned}$$

et

$$\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j!}g^{(j)}(0)=f'(0)+\sum_{\ell=1}^{p-1}b_{\ell,p}f^{(\ell+p)}(0)=x+\sum_{\ell=1}^{p-1}b_{\ell,p}x^{\ell+p}.$$

Cette égalité étant vraie pour tout $x\in\mathbb{R}$, les polynômes concernés ont les mêmes coefficients. On en déduit que $a_0=1$ et $\forall i\in\{2,\dots,p\},\ \displaystyle\sum_{j=1}^{i}\frac{a_{i-j}}{j!}=0$, donc

$a_{i-1}=-\displaystyle\sum_{j=2}^{i}\frac{a_{i-j}}{j!}$. On peut utiliser cette formule en remplaçant p par $p+1$ et i par $p+1$. On obtient que $\forall p\ge2,\quad a_p=-\displaystyle\sum_{j=2}^{p+1}\frac{a_{p+1-j}}{j!}$.

13°) (sur 2 points) On utilise la relation précédente :

◇ $a_2=-\Big(\frac{a_1}{2!}+\frac{a_0}{3!}\Big)=-\Big(-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\Big)=\frac{3}{12}-\frac{2}{12}$, donc $\boxed{a_2=\frac{1}{12}}$.

◇ $a_3=-\Big(\frac{a_2}{2!}+\frac{a_1}{3!}+\frac{a_0}{4!}\Big)=-\Big(-\frac{1}{24}-\frac{1}{12}+\frac{1}{24}\Big)$, donc $\boxed{a_3=0}$.

$\diamond$ $a_4 = -\Big(\frac{a_3}{2!}+\frac{a_2}{3!}+\frac{a_1}{4!}+\frac{a_0}{5!}\Big) = -\Big(\frac{1}{12\times 6}-\frac{1}{2\times 24}+\frac{1}{120}\Big)$, donc $a_4 = \frac{-10+15-6}{12\times 2\times 3\times 2\times 5}$.
Ainsi, $\boxed{a_4 = -\frac{1}{720}}$.

14°) (sur 3 points) Montrons que $|a_p| \leq 1$ par récurrence sur p.
La propriété est vraie pour $p = 0$ et $p = 1$ car $a_0 = 1$ et $a_1 = -\frac{1}{2}$.
Soit $p \geq 2$. Supposons que pour tout $k \in \{0, \dots, p-1\}$, $|a_k| \leq 1$. Alors d'après la question précédente, $|a_p| = \left|\sum_{j=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-j}}{j!}\right| \leq \sum_{j=2}^{p+1} \frac{|a_{p+1-j}|}{j!}$, donc d'après l'hypothèse de récurrence, $|a_p| \leq \sum_{j=2}^{p+1} \frac{1}{j!} \leq \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{j!} = \mathrm{e} - 2 < 1$.
D'après le principe de récurrence, $\underline{\forall p \in \mathbb{N}, \quad |a_p| \leq 1}$.

15°) (sur 1 point) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. D'après la question précédente, $\forall p \in \mathbb{N}$, $|a_p z^p| \leq |z|^p$, or $\sum |z|^p$ est une série géométrique convergente car $|z| < 1$, donc $\sum_{p\in\mathbb{N}} a_p z^p$ est absolument convergente.

16°) (sur 4 points) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Par distributivité,
$\Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{z^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{p=0}^{N} a_p z^p\Big) = \sum_{\substack{1\leq n\leq N\\ 0\leq p\leq N}} \frac{a_p}{n!} z^{n+p}$, puis par sommation par paquets,
$\Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{z^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{p=0}^{N} a_p z^p\Big) = \sum_{k=1}^{N} \Big(\sum_{\substack{n+p=k\\ n\geq 1}} \frac{a_p}{n!}\Big) z^k + z^{N+1} B_N(z)$, où $B_N(z) = \sum_{\substack{1\leq n\leq N\\ 0\leq p\leq N\\ n+p\geq N+1}} \frac{a_p}{n!} z^{n+p-N-1}$.

Si $k \geq 2$, $\sum_{\substack{n+p=k\\ n\geq 1}} \frac{a_p}{n!} = \sum_{n=1}^{k} \frac{a_{k-n}}{n!} = 0$ d'après la question 12,

et si $k = 1$, $\sum_{\substack{n+p=k\\ n\geq 1}} \frac{a_p}{n!} = a_0 = 1$, donc $\Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{z^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{p=0}^{N} a_p z^p\Big) = z + z^{N+1} B_N(z)$. Il reste donc à montrer que $z^{N+1} B_N(z) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Or, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$ tel que $n + p \geq N + 1$, $\left|\frac{a_p}{n!} z^{n+p-N-1}\right| \leq 1$, donc par inégalité triangulaire, $|B_N(z)|$ est inférieur au cardinal
de $\{(n, p) \in \{1, \dots, N\} \times \{0, \dots, N\} / n + p \geq N + 1\}$, donc est inférieur à $N(N + 1)$.
Ainsi, $0 \leq |z^{N+1} B_N(z)| \leq |z|^{N+1} N(N+1) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après le théorème des croissances comparées, car $|z| < 1$. Le principe des gendarmes permet de conclure.

17°) (sur 2 points) Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que $|z| < 1$. On fait tendre N vers $+\infty$ dans la question précédente. Les séries concernées étant convergentes, on obtient que $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p z^p\right) = z$, donc $(e^z - 1)\varphi(z) = z$.

Supposons que $e^z = 1$, alors en passant aux modules, $\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} = 1$, donc $\mathrm{Re}(z) = 0$. Ainsi, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = i\theta$. Alors $e^{i\theta} = 1$, donc $\theta \equiv 0[2\pi]$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = 2ik\pi$, or $z \neq 0$, donc $|k| \geq 1$ puis $|z| \geq 2\pi > 1$, ce qui est faux. Ainsi, $e^z \neq 1$, ce qui permet d'écrire que $\varphi(z) = \dfrac{z}{\mathrm{e}^z - 1}$.

18°) (sur 2 points)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On peut écrire $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + t^n g(t)$, où $g(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k t^{k-n}$.

Il s'agit donc de montrer que $g(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.

D'après la question 14, on a par inégalité triangulaire :

$0 \leq |g(t)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |t|^{k-n} = \dfrac{|t|}{1-|t|} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. Le principe des gendarmes permet de conclure.

19°) (sur 4 points) Soit $t \in]-1,1[$. Posons $\psi(t) = \varphi(t) + \frac{t}{2}$. ψ est paire sur $]-1,1[$. En effet, d'après la question 17, $\psi(t) = \dfrac{t}{2} + \dfrac{t}{e^t - 1} = \dfrac{2t + t(e^t - 1)}{2(e^t - 1)} = \dfrac{t}{2}\,\dfrac{\mathrm{e}^t + 1}{\mathrm{e}^t - 1} = \dfrac{t}{2}\,\dfrac{\mathrm{e}^{t/2} + \mathrm{e}^{-t/2}}{\mathrm{e}^{t/2} - \mathrm{e}^{-t/2}} = \psi(-t)$, or $\psi(t) = \varphi(t) - a_1 t$, donc d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, on a $\psi(t) = 1 + \sum_{k=2}^{n} a_k t^k + o(t^n)$ et $\psi(t) = \psi(-t) = 1 + \sum_{k=2}^{n} a_k (-1)k t^k + o(t^n)$, donc d'après l'unicité du développement limité, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_{2k+1} = -a_{2k+1}$, donc $a_{2k+1} = 0$.

Partie V (sur 11 points) : Seconde étude asymptotique du reste

20°) (sur 5 points) Si $f(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$ alors f donc g sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

On peut ainsi appliquer la question 3 à g avec $n = 2p$:

$$\begin{aligned} g(k+1) &= g(k) + \sum_{j=1}^{2p} \frac{1}{j!} g^{(j)}(k) + \frac{1}{(2p)!} \int_0^1 g^{(2p+1)}(k+t)\,(1-t)^{2p}\,\mathrm{d}t \\ &= g(k) + f'(k) + \sum_{\ell=1}^{2p-1} b_{\ell,2p} f^{(\ell+2p)}(k) \\ &\quad + \frac{1}{(2p)!} \int_0^1 \left(\sum_{i=0}^{2p-1} a_i f^{(i+2p+1)}(k+t) \right) (1-t)^{2p}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

On établit par récurrence sur n que, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\dfrac{\alpha\cdots(\alpha+n-2)}{x^{\alpha+n-1}}$,
donc

$$\begin{aligned}|R(k)| &= \Bigg| \sum_{n=2p+1}^{4p-1} b_{n-2p,2p}(-1)^{n-1}\frac{\alpha\cdots(\alpha+n-2)}{k^{\alpha+n-1}} \\ &\quad + \int_0^1 \left[\sum_{n=2p+1}^{4p} a_{n-2p-1}(-1)^{n-1}\frac{\alpha\cdots(\alpha+n-2)}{(2p)!(k+t)^{\alpha+n-1}}\right](1-t)^{2p}\mathrm{d}t\Bigg| \\ &\leq \sum_{n=2p+1}^{4p-1} |b_{n-2p,2p}|\frac{\alpha\cdots(\alpha+n-2)}{k^{\alpha+n-1}} \\ &\quad + \frac{1}{(2p)!}\int_0^1 \left(\sum_{n=2p+1}^{4p} |a_{n-2p-1}|\frac{\alpha\cdots(\alpha+n-2)}{(k+t)^{\alpha+n-1}}\right)(1-t)^{2p}\,\mathrm{d}t \\ &\leq \left[\sum_{n=2p+1}^{4p}\left(|b_{n-2p,2p}| + \frac{|a_{n-2p-1}|}{(2p)!}\right)\alpha\cdots(\alpha+n-2)\right] k^{-(2p+\alpha)},\end{aligned}$$

en convenant que $b_{2p,2p} = 0$.
Notons A la quantité située entre crochets. Elle est indépendante de k, donc, p et α étant fixés, $\underline{\exists A \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\quad |R(k)| \leq A\, k^{-(2p+\alpha)}}$.

21°) (sur 4 points)
D'après la question précédente, $R(k) = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{k^{2p+\alpha}}\right)$ et $2p+\alpha > 1$ donc la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} R(k)$ est convergente et on a, par sommation des relations de comparaison,
$\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} R(k) = \mathrm{O}\left(R_n(2p+\alpha)\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$ d'après la question 7.
Or $R(k) = g(k+1) - g(k) - \dfrac{1}{k^\alpha}$
où $g(k) = \dfrac{a_0}{(1-\alpha)k^{\alpha-1}} + \displaystyle\sum_{i=1}^{2p-1} a_i(-1)^{i-1}\frac{\alpha\cdots(\alpha+i-2)}{k^{\alpha+i-1}} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, car $\alpha > 1$, donc la série télescopique $\displaystyle\sum_{k\geq 1}(g(k+1)-g(k))$ converge et on a $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} R(k) = -g(n) - R_n(\alpha)$.
On en déduit que $R_n(\alpha) = -g(n) - \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} R(k) = -g(n) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$. De plus, $p \geq 2$, donc d'après la question 19, $a_{2p-1} = 0$. Ceci donne
$\underline{\forall p \geq 2,\ R_n(\alpha) = -\Big(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + \cdots + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n)\Big) + O\left(\dfrac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)}$.

22°) (sur 2 points) Pour $p = 3$, il vient
$R_n(\alpha) = -\left(\dfrac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{2n^\alpha} - \dfrac{\alpha}{12n^{\alpha+1}} + \dfrac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{720n^{\alpha+3}}\right) + O\left(\dfrac{1}{n^{\alpha+5}}\right)$ soit, en particulier, $\underline{R_n(3) = \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{2n^3} + \dfrac{1}{4n^4} - \dfrac{1}{12n^6} + O\left(\dfrac{1}{n^8}\right)}$.