

Induction de Lorentz

Exercice 1 : Freinage d'un mobile en translation

On considère une spire carrée de côté a , en translation rectiligne selon l'axe Ox (la spire est guidée dans un plan horizontal, sans frottements, par un dispositif non représenté). Le champ magnétique est nul, sauf dans le domaine $0 \leq x \leq \ell$, où il est alors uniforme et stationnaire, égal à $B\vec{e}_z$.

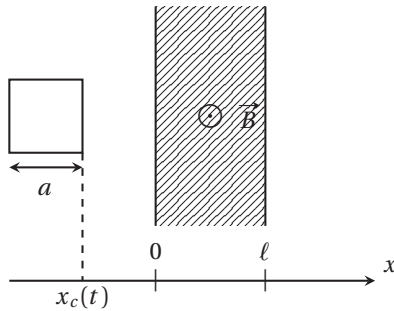


FIG. 1 : Spire carrée en translation, freinée au passage dans le champ magnétique.

On utilise un repère cartésien direct $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, et on considère $\ell > a$. La position du cadre est représentée par l'abscisse $x_C(t)$ de son segment droit (voir Figure 1). On lance le cadre avec une vitesse $v_0\vec{e}_x$ depuis la partie de champ magnétique nul correspondant à $x < 0$. Le cadre pénètre dans la zone de champ magnétique à $t = 0$ et on étudie ensuite la dynamique du cadre, au cours de sa traversée dans la zone de champ magnétique. Le circuit défini par le cadre a une masse m et présente une résistance R , et on néglige son inductance propre dans cet exercice. On considère le cas $a < \ell$.

1. Entrée dans la zone de champ magnétique $0 \leq x \leq a$.
 - (a) Exprimer la force électromotrice induite dans le circuit défini par le cadre, pour $0 \leq x_C \leq a$.
 - (b) En déduire la force de Laplace qui s'exerce sur le cadre pendant cette phase.
 - (c) Déterminer l'expression de la vitesse $v_x(t)$, puis de l'abscisse $x_C(t)$ pour $0 \leq x_C \leq a$. On introduira la constante de temps $\tau = \frac{mR}{a^2 B^2}$.
 - (d) Déterminer la date t_1 correspondant à $x_C(t_1) = a$, en fonction de v_0 , τ et a .
2. Adapter ces raisonnements à la suite du mouvement pour en déduire la vitesse finale, notée v_∞ du cadre lorsqu'il est entièrement sorti de la zone où règne le champ magnétique.
3. Déterminer l'énergie dissipée par effet Joule au cours du mouvement, qu'on exprimera en fonction de v_0 et v_∞ . Que retrouve-t-on ?

Exercice 2 : Freinage d'un pendule en rotation

On considère une spire formant un pendule pesant de masse m , dont la position angulaire est repérée par l'angle $\alpha(t)$, comme indiqué sur la Figure 2. La spire est caractérisée par son rayon ℓ et sa largeur angulaire θ_s . Son moment cinétique par rapport à l'axe Oz s'écrit $L_z(t) = J_z \omega(t)$, avec $\omega = \dot{\alpha}(t)$. Le champ magnétique vaut $B_0\vec{e}_z$ dans la zone hachurée de largeur angulaire $2\theta_B > \theta_s$ et il est nul en dehors. On lâche la spire sans vitesse initiale avec un angle $\alpha(0) = -1,5\theta_s$. Le champ de pesanteur est $-g\vec{e}_y$. On note ℓ_G la distance entre le point O et le centre de gravité de la spire.

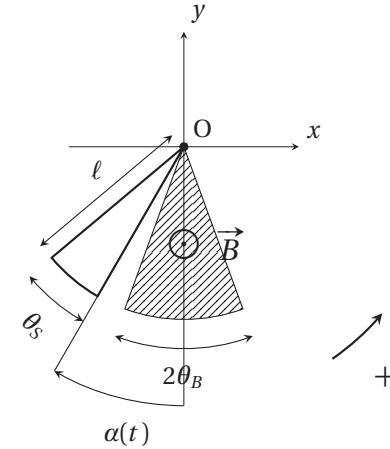


FIG. 2 : Pendule-spire freiné par le passage dans un champ magnétique. Avec les orientations choisies, la partie droite du pendule entre dans la zone de champ magnétique pour $\alpha = -\theta_B$.

1. (a) En l'absence totale de champ magnétique, rappeler l'équation différentielle régissant l'évolution de l'angle α .
 (b) Dans la limite de petits angles, montrer que l'on obtient un oscillateur harmonique et exprimer la période des oscillations.
2. Avec le champ magnétique présent dans la zone hachurée, expliquer qualitativement les phénomènes physiques qui se manifestent et les différentes phases du mouvement à envisager pour écrire l'équation différentielle sur $t \mapsto \alpha(t)$.
3. Dans cette question, on cherche à écrire l'équation différentielle portant sur $t \mapsto \alpha(t)$ dans la phase où le pendule a été lâché comme indiqué sur la figure et entre dans la zone de champ magnétique, c'est-à-dire pour $-\theta_B < \alpha < -\theta_B + \theta_s$.
 - (a) Pour $-\theta_B < \alpha < \theta_B + \theta_s$, exprimer le flux du champ magnétique à travers la spire.
 - (b) En déduire la force électromotrice puis l'intensité du courant.
 - (c) Déterminer le moment résultant par rapport à l'axe Oz .

(d) Déterminer l'équation différentielle portant sur $t \mapsto \alpha(t)$. Exprimer une constante de temps τ qui traduit la force de freinage associée au phénomène d'induction.

(e) Quelle hiérarchie doit-on avoir entre T_0 et τ pour pouvoir observer de nombreuses oscillations du pendule ?

Exercice 3 : Principe d'un moteur à courant continu à entrefer cylindrique

On étudie un modèle simple de moteur à courant continu, utilisant la géométrie cylindrique commune à la majorité des moteurs.

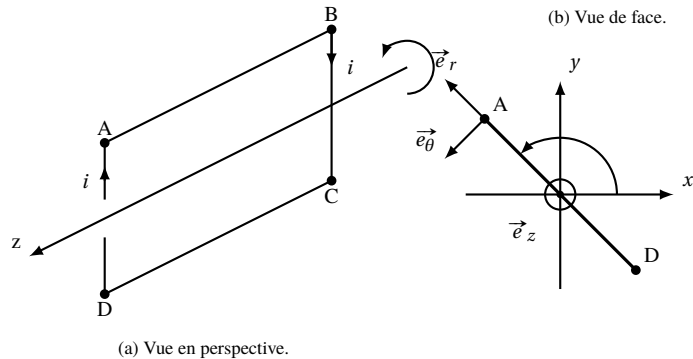


FIG. 3 : Géométrie simplifiée retenue pour le rotor (circuit induit).

Le rotor sera modélisé par une unique spire rectangulaire $ABCD$, de rayon R et de longueur ℓ , représentée sur la Figure 3, entraînée en rotation autour de l'axe Oz .

Une source de courant continu alimente cette spire et nous notons i l'intensité du courant dans ce circuit correspondant, orienté dans le sens $ABCD$ indiqué sur la figure.

Cette spire est soumise à un champ magnétique que nous modéliserons par un champ de direction radiale en chaque point (au sens des coordonnées cylindriques), dirigé selon \vec{e}_r pour $x > 0$ et selon $-\vec{e}_r$ pour $x < 0$:

- $\vec{B}(x < 0) = -B_0 \vec{e}_r$;
- $\vec{B}(x > 0) = +B_0 \vec{e}_r$.

En pratique, ce champ magnétique est développé grâce à des pièces polaires, fixes dans le référentiel d'étude, qui constituent le stator (voir Figure 4) et la spire que nous considérons est obtenue en réalisant des enroulements sur une pièce cylindrique qui guide les lignes de champ magnétique.

Couple moteur. Déterminer l'expression du moment résultant (couple moteur) en fonction de B_0 , R , ℓ et i .

Système collecteurs — balais. 1. Si la spire est toujours alimentée par la même intensité i , expliquer le problème rencontré lorsque la spire a effectué un demi-tour.

2. Expliquer comment le système collecteurs-balais de la Figure 5 permet de résoudre ce problème.

Force électromotrice induite. Lorsque la spire rectangulaire se déplace dans le champ extérieur, il apparaît une force électromotrice dans le circuit associé à la spire. Déterminer l'expression de cette f.é.m. e en exprimant la nullité de la somme de la puissance des forces de Laplace et de la puissance de cette f.é.m. induite.

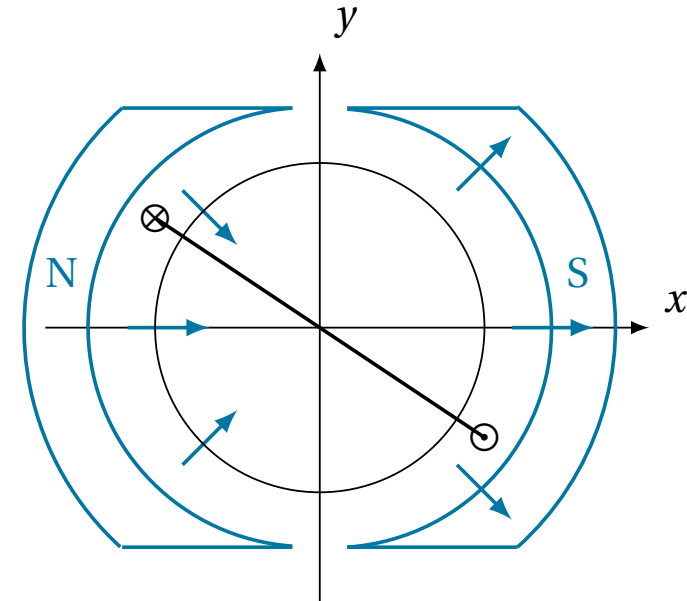
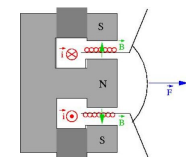


FIG. 4 : Une spire rectangulaire placée dans un entrefer cylindrique. Les flèches représentent le champ magnétique en six points de l'entrefer, région de l'espace contenue entre les pièces polaires du stator, et le noyau sur lequel on bobine le circuit dit induit.

Exercice 4 : Comportement fréquentiel d'un haut-parleur

Un haut-parleur produit une vibration sonore à partir d'un signal électrique variable issu d'un enregistrement sonore.

Dans un haut-parleur électrodynamique une membrane vibrante est liée à une bobine placée dans un aimant permanent produisant un champ radial pour que les forces de Laplace soient dirigées selon l'axe de la bobine. Une suspension exerce une force de rappel sur la membrane ^a. La bobine est alimentée par un générateur de tension reproduisant fidèlement le signal sonore à reproduire.



^aillustration http://electroacoustique.univ-lemans.fr/cours/Grain3.2/co/M3G2_FR_web.html

Pour étudier son comportement fréquentiel, on simplifie sa géométrie en le modélisant par un rail de Laplace de masse m et de longueur l soumis à une force de rappel élastique \vec{F}_e caractérisée par une raideur k et à une force de frottement due à l'air \vec{F}_a d'amplitude égale à αv avec α une constante positive et $v = \dot{x}$ la vitesse de translation de la barre.

Le circuit est caractérisé par une auto-impédance L , une résistance R et est plongé dans un champ magnétique d'intensité B_0 orthogonal au plan du circuit. L'ensemble est alimenté par un générateur de force électromotrice E à la

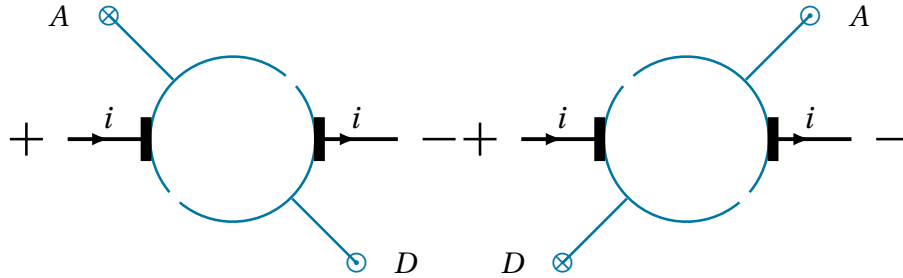


FIG. 5 : Système balais-collecteurs pour le redressement du courant à chaque demi-tour du rotor. Les balais sont les petits rectangles pleins. Les collecteurs sont représentés par les arcs de cercle.

pulsation ω .

- Justifier que le sens du champ magnétique n'a pas d'importance en régime sinusoïdal établi.
- Établir les équations différentielles couplées vérifiées par l'intensité i dans le circuit et par la vitesse \dot{x} de la barre. En déduire l'intensité complexe \underline{I} en fonction de E, ω , des paramètres du circuit et des caractéristiques mécaniques.
 - On introduit les paramètres $(B_0 \ell)^2 / \alpha$, $(B_0 \ell)^2 / k$ et $(B_0 \ell)^2 / m$ dont on précisera la dimension. Quelle est la nature du filtre ainsi constitué ?
 -
- Peut-on toujours utiliser le formalisme de l'amplitude complexe si l'intensité de la force de frottement varie non plus linéairement avec v mais comme son carré v^2 .
 - Justifier qualitativement qu'un signal électrique à ω produira alors également des harmoniques à la pulsation 2ω . Quelle conséquence cela aura-t-il sur la fidélité du haut-parleur ?

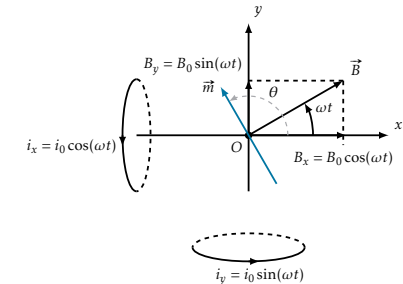
Exercice 5 : Aimant entraîné par un champ tournant (machine synchrone)

On cherche à entraîner en rotation autour de l'axe Oz un aimant considéré ponctuel¹ situé en O . On utilise pour cela le champ tournant créé par deux bobines identiques d'axes Ox et Oy , situées à la même distance de O et parcourues par un courant de même intensité oscillant à la pulsation ω . On désigne par B_0 l'intensité du champ que chacune produit en O .

- Quel doit être le déphasage entre les intensités dans chaque bobine pour produire un champ tournant d'intensité constante ?
 - L'aimant est caractérisé par son moment magnétique \vec{m} , de norme constante. Quelle est l'expression du couple $\mathcal{C}_{/Oz}$ des forces de Laplace qu'il subit en fonction de \vec{m} et \vec{B} ?

¹On modélise ainsi le fonctionnement d'un moteur synchrone. L'aimant en rotation représente le rotor constitué d'un bobinage parcouru par un courant continu et qui présente ainsi un moment magnétique.

- L'aimant est contraint à tourner dans le plan xOy par une liaison pivot et on note θ l'angle entre \vec{e}_x et la direction du vecteur \vec{m} , qui reste toujours celle de l'axe Sud-Nord de l'aimant. On note enfin J le moment d'inertie de l'aimant par rapport à l'axe Oz . Dans un premier temps, seul le couple des forces de Laplace s'exerce sur l'aimant.



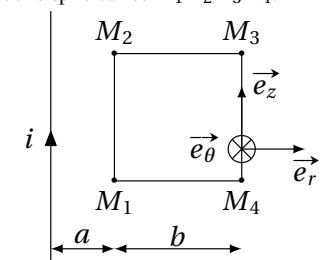
- Établir l'équation différentielle d'évolution de l'angle θ et en déduire que l'aimant peut être animé d'un mouvement de rotation à une vitesse angulaire constante dont on donnera la valeur. Que peut-on alors dire de l'angle entre l'aimant et le champ \vec{B} au cours du mouvement ?
 - On considère pour cette question que l'aimant est soumis à un couple résistant par rapport à Oz , noté $-\Gamma$ avec $\Gamma \geq 0$. Déterminer la valeur maximale de Γ , notée Γ_{\max} pour laquelle l'aimant peut de nouveau tourner à vitesse constante. Quel est alors l'angle entre \vec{B} et \vec{m} ? On exprimera Γ_{\max} en fonction de B_0 et m .
- On considère de nouveau que l'aimant n'est soumis qu'au couple des forces de Laplace.
 - Établir l'équation différentielle d'évolution de l'angle α défini par $\alpha(t) \equiv \omega t - \theta(t)$. Décrire les solutions.
 - À l'instant $t = 0$, on a $\theta = 0$ et l'aimant est animé de la vitesse angulaire $\omega(1 - \beta)$ avec $0 < \beta \ll 1$. Établir l'expression de $\alpha(t)$ et en déduire celle de $\theta(t)$.

Induction de Neumann

Exercice 6 : Inductance mutuelle entre une spire et un fil.

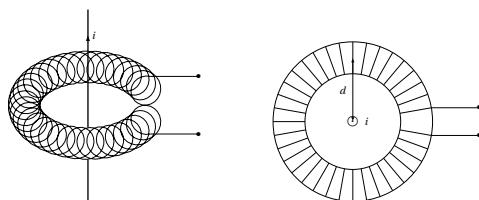
On considère un fil rectiligne infini parcouru par un courant d'intensité i et une spire carrée $M_1 M_2 M_3 M_4$.

- Déterminer l'expression du flux du champ magnétique développé par le fil à travers le circuit défini par la spire $M_1 M_2 M_3 M_4$ en fonction de μ_0, i, a et b .
- En appliquant la définition de l'inductance mutuelle entre le fil et la spire, en déduire l'expression de cette inductance mutuelle M en fonction de μ_0, a, b .



Exercice 7 : Pince ampèremétrique

Pour mesurer l'intensité efficace d'un courant alternatif dans une installation électrique, on peut utiliser une pince ampèremétrique dont cet exercice présente le principe de fonctionnement.



On cherche donc à mesurer l'intensité du courant alternatif qui circule dans un fil assimilé à un fil rectiligne infini, choisi selon l'axe Oz. On choisit un système de coordonnées cylindriques, avec une base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. L'intensité qui circule dans le sens des z croissant est de la forme $i = I_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t)$. On dispose autour du fil un circuit constitué d'un ensemble de N spires circulaires, chacune d'une aire S , qu'on modélise par un tore disposé autour du fil. Avec le système de coordonnées utilisé, le vecteur surface de chaque spire est selon \vec{e}_θ .

1. Avec une intensité de 1,0A, que vaut le champ magnétique à une distance $d = 2,0$ cm. On donne $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$. Le champ magnétique est-il uniforme sur le disque délimité par chaque spire ?

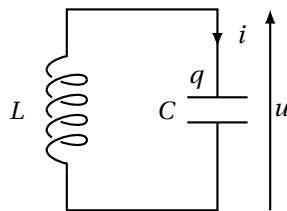
Dans la suite, on confondra le champ magnétique moyen sur le disque délimité par chaque spire avec sa valeur au centre de cette spire, à la distance d du fil.

2. Exprimer la force électromotrice e développée aux bornes du circuit constitué par les N spires.
3. En déduire l'expression de la valeur efficace E_{eff} de la tension mesurée avec cette pince ampèremétrique en fonction $\mu_0, S, \omega, I_{\text{eff}}, d$.
4. Quel doit être l'ordre de grandeur de N pour avoir une tension de l'ordre de 0,1V pour un courant de l'ordre de 100A ? On prendra les paramètres géométriques : $d \approx 3$ cm ; $S \approx 1$ cm², à la pulsation $\omega = 2\pi \times 50$ Hz :

Exercice 8 : Boucle de détection

On présente schématiquement le principe de fonctionnement d'une « boucle de détection ». Ce dispositif permet de détecter une voiture se présentant devant une barrière (sortie d'une aire de stationnement typiquement), de façon à en actionner l'ouverture.

1. (a) On considère le circuit LC de la figure ci-contre. Déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension aux bornes du condensateur.
- (b) Quelle est la forme générale des solutions de l'équation précédente ?



2. On admet dans la suite que l'on dispose de deux dispositifs analogues délivrant chacun une tension sinusoïdale dont la pulsation dépend d'une inductance L , comme dans l'oscillateur LC de la question précédente. L'un des

deux oscillateurs a une inductance fixée et l'autre voit son inductance varier lorsque la carcasse métallique de la voiture est à proximité. En l'absence de perturbation, les deux oscillateurs oscillent en phase, avec la même amplitude.

- (a) Expliquer qualitativement comment la présence d'une masse métallique à proximité d'un solénoïde est susceptible de faire varier son inductance propre.
- (b) On note $u_1(t) = U_0 \cos(\omega_0 t)$ la tension délivrée par l'oscillateur de référence et $u_2(t) = U_0 \cos(\omega_1 t)$ celle délivrée par l'oscillateur qui ressent la présence de l'automobile. La différence $\omega_1 - \omega_0$ est faible en valeur relative par rapport à ω_0 . On cherche à détecter l'apparition d'une modulation à basse fréquence dans le signal obtenu en sommant ces deux tensions. Exprimer le signal $u_1(t) + u_2(t)$ sous la forme d'un produit faisant intervenir deux pulsations très différentes ω_m et $\Delta\omega$, à exprimer en fonction de ω_0 et ω_1 .
- (c) Représenter l'allure de ce signal en mettant en évidence une modulation à basse fréquence des oscillations rapides.

Exercice 9 : Plaque à induction

On illustre le principe des plaques à induction sur un modèle simple. La partie épaisse du fond de la casserole est modélisée par un ensemble de quatre spires circulaires concentriques, de diamètres respectifs D_1, D_2, D_3, D_4 . On notera R_1, R_2, R_3, R_4 les résistances électriques de ces spires. La casserole est soumise à un champ magnétique variable, orthogonal au fond de la casserole, sous la forme :

$$\vec{B} = B_0 \sin(\omega t) \vec{e}_z.$$

1. Exprimer la force électromotrice e_k induite dans le circuit associé à la spire k ($k = 1, 2, 3, 4$).
2. En déduire l'expression de l'intensité $i_k(t)$ en fonction de ω, B_0, D_k, R_k .
3. Exprimer la puissance instantanée dissipée par effet Joule dans l'ensemble des quatre spires.
4. On rappelle la formule suivante, utilisée par exemple pour calculer une valeur efficace en régime sinusoïdal, $\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{2}$. Exprimer la moyenne temporelle de la puissance dissipée par effet Joule.
5. Les spires sont toutes réalisées avec un conducteur de conductivité γ , de section S . On rappelle qu'un tronçon de conducteur de conductivité γ , de longueur ℓ et de section S a une résistance électrique $R = \frac{1}{\gamma} \frac{\ell}{S}$. Exprimer la puissance dissipée en fonction de γ, B_0, ω, S et des $\{D_k\}$.
6. Les fréquences utilisées sont de l'ordre de quelques dizaines de kilohertz. D'après la dépendance en fréquence, est-il pertinent de choisir des fréquences élevées ?

Exercice 10 : Résonances de circuits couplés

On considère une bobine de rayon $R = 2$ cm et de longueur $\ell = 10$ cm sur laquelle sont enroulées $N = 2000$ spires. On néglige toute les résistances.

1. (a) Estimer son auto-inductance notée L dans le cas idéal.
- (b) On forme un circuit L-C avec cette bobine et un condensateur de capacité $C = 1$ μF . Déterminer sa fréquence de résonance.
2. On couple ce circuit LC à un circuit identique par mutuelle : on note M la valeur de leur inductance mutuelle.

- Quelle serait l'expression de M ? On la note M_{\max} et on suppose par la suite que $M = \alpha M_{\max}$ avec α une constante vérifiant $\alpha < 1$. Qu'obtient-on donc dans le cas $\alpha = 1 - \beta$, avec $\beta \ll 1$. On se place dans cette condition dans toute la suite.
- Décrire l'évolution des courants i_1 et i_2 . Quelles données supplémentaires doit-on connaître pour déterminer complètement i_1 et i_2 ?
- Discuter qualitativement le cas où les deux bobines ne sont plus identiques.

Exercice 11 : Puissances dans un transformateur idéal

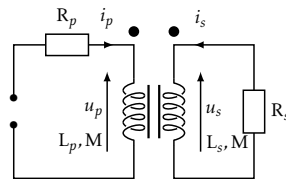
On considère le transformateur représenté sur la figure ci-dessous.

Le circuit primaire (à gauche sur le schéma) est caractérisé par une auto-inductance notée L_p , une inductance mutuelle M et une résistance R_p . Il est alimenté par un générateur idéal de tension d'amplitude E à la pulsation ω .

Le circuit secondaire (à droite sur le schéma) est caractérisé par une auto-inductance notée L_s et la même inductance mutuelle M . La résistance R_s prend en compte à la fois la résistance de la bobine (négligeable le plus souvent) et du dipôle qu'on cherche à alimenter.

Avec les conventions représentées sur le schéma pour les intensités i_1 et i_2 , le coefficient M est positif.

On ne fait dans un premier temps aucune hypothèse sur les relations liant L_s , L_p et M .



- Établir le système d'équations couplées vérifiées par les intensités i_1 et i_2 en régime sinusoïdal établi.
- En déduire le rapport des amplitudes complexes $\underline{I}_s / \underline{I}_p$, puis l'expression de \underline{I}_p en fonction de E et des caractéristiques des circuits.
- On considère maintenant le cas d'un transformateur idéal :
 - ses inductances vérifient $L_s L_p \approx M^2$ et $L_s / L_p = N_s^2 / N_p^2$, avec N le nombre de spires des enroulements,
 - les résistances sont négligeables devant les impédances inductives.
- Simplifier l'expression précédente de \underline{I}_1 pour l'exprimer uniquement en fonction de E , R_s et R_p . Interpréter : à quoi est équivalent le circuit secondaire vu du circuit primaire?
 - Établir les expressions des rapports U_2 / U_1 et I_2 / I_1 . Que peut-on en déduire concernant la puissance reçue par l'enroulement du primaire et celle fournie par l'enroulement du secondaire?
 - Établir l'expression de la puissance moyenne fournie par le générateur d'amplitude E et de celle reçue par R_s et les comparer. Pour quelle valeur du rapport R_s / R_p cette dernière est-elle maximale quand E , R_p et ω sont fixés?

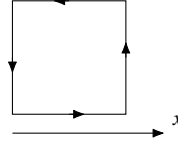
Correction de l'exercice 1

Le flux du champ magnétique à travers le circuit est nul pour $x < 0$. Ce flux va varier pendant la phase d'entrée et pendant la phase de sortie. On aura donc une f.é.m. induite pendant ces deux phases, qui produira un courant induit et donc des forces de Laplace. D'après la loi de Lenz, celles-ci s'opposent au déplacement.

1. (a)

On choisit l'orientation ci-contre pour que le flux du champ magnétique soit positif.

On applique la loi de Faraday $e = -\frac{d\Phi}{dt}$, avec, pendant cette phase, $\Phi = x a B$. On a donc $e = -B a \dot{x}$.



(b)

Le circuit équivalent est représenté ci-contre. L'intensité est donnée par $e = Ri$, d'où $i = -\frac{B a \dot{x}}{R}$. On en déduit la force de Laplace sur le segment droit :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\mathcal{L}a} &= \int_{y=0}^{y=a} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \int_{y=0}^{y=a} i dy \vec{e}_y \wedge B \vec{e}_z \\ \vec{F}_{\mathcal{L}a} &= i a B \vec{e}_x = -\frac{a^2 B^2 \dot{x}}{R} \vec{e}_x.\end{aligned}$$

Les forces de Laplace sur les deux morceaux de segments parallèles à \vec{e}_x sont opposées, leur résultante est nulle.

(c) La deuxième loi de Newton en projection selon \vec{e}_x donne :

$$m \dot{v}_x = \vec{F}_{\mathcal{L}a} \cdot \vec{e}_x = -\frac{a^2 B^2 v_x}{R} \rightarrow v_x = -\frac{v_x}{\tau}, \quad \tau = \frac{Rm}{a^2 B^2}.$$

La solution de cette équation différentielle vérifiant la condition initiale $v_x(0) = v_0$ est :

$$v_x(t) = v_0 \exp(-t/\tau).$$

(d) On cherche l'instant t_1 où $x_C = a$. On intègre l'équation précédente, avec $x_C(0) = 0$:

$$\begin{aligned}v_x &= \dot{x} = v_0 \exp(-t/\tau) \\ x(t) &= \tau v_0 (1 - \exp(-t/\tau)).\end{aligned}$$

On en déduit :

$$t_1 = -\tau \ln[1 - a/v_0 \tau],$$

ainsi que la vitesse à l'instant où il est tout entier dans la zone de champ magnétique :

$$v_x(t_1) = v_0 \exp(-t_1/\tau) = v_0 - \frac{a}{\tau}.$$

2. Lorsque l'ensemble du cadre est dans la zone de champ magnétique, le flux magnétique à travers ce cadre ne varie pas. Il n'y a donc pas de f.é.m. induite, le courant est nul et la force de Laplace aussi. La cadre conserve sa vitesse acquise à la date t_1 , jusqu'au début de la sortie de la zone de champ magnétique.

Le flux varie à nouveau pendant la sortie du cadre, pour $\ell < x < a + \ell$. On a alors $\Phi = Ba(a - (x - \ell))$ et donc $e = -\frac{d\Phi}{dt} = aB\dot{x}$. Le courant circule donc en sens inverse mais, comme la force de Laplace s'exerce maintenant sur la barre située à $x - a$, elle est de nouveau selon $-\vec{e}_x$ et on retrouve la même équation différentielle pour v_x . On peut reprendre les calculs précédents. On peut également reconnaître que l'équation différentielle montre que la trajectoire dans l'espace des phases est une droite de pente $-1/\tau$ dans les zones de freinage, qui ont chacune une longueur a . On retranche donc à chaque traversée d'une frontière la valeur a/τ à la vitesse qui sera donc finalement :

$$v_{x\infty} = v_0 - \frac{2a}{\tau}.$$

3. Pendant la première phase de freinage, on calcule la puissance puis l'énergie :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\infty J} &= Ri^2 = \frac{B^2 a^2 \dot{x}^2}{R} dt \\ \mathcal{E}_{1J} &= \int_{t=0}^{t=t_1} \frac{B^2 a^2 \dot{x}^2}{R} dt = \frac{B^2 a^2}{R} \int_{t=0}^{t_1} v_0^2 e^{-2t/\tau} dt \\ &= \frac{B^2 a^2 v_0^2 \tau}{2R} (1 - e^{-2t_1/\tau}) \\ &= \frac{m}{2} (v_0^2 - v_x^2(t_1)).\end{aligned}$$

De même on calculerait pendant la deuxième phase :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{2J} &= \frac{m}{2} (v_x^2(t_1) - v_{x\infty}^2(t_1)) \\ \mathcal{E}_J &= \mathcal{E}_{1J} + \mathcal{E}_{2J} = \frac{m}{2} (v_0^2 - v_{x\infty}^2(t_1)).\end{aligned}$$

On retrouve évidemment que l'énergie dissipée par effet Joule est le travail résistant de la force de Laplace, égal à la diminution de l'énergie cinétique. Ceci résulte directement de l'équation du couplage électromagnétique : $\mathcal{P}(\vec{F}_{\mathcal{L}a}) + e_{\text{ind}} i = 0$ qui s'écrit ici $\mathcal{P}(\vec{F}_{\mathcal{L}a}) = -Ri^2$.

Correction de l'exercice 2

1. (a) Pour ce problème en rotation autour d'un axe fixe, on applique le théorème du moment cinétique en projection selon Oz pour obtenir l'équation du mouvement. Le moment résultant des forces de pesanteur correspond au moment du poids exercé au niveau du centre de gravité. On peut donc écrire le moment du poids par rapport à l'axe Oz sous la forme :

$$M_{\text{poids},z} = [\vec{OG} \wedge m \vec{g}] \cdot \vec{e}_z = -m\ell_G g \sin(\alpha - \theta/2).$$

Le théorème du moment cinétique en projection selon Oz donne alors : $\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z$, soit $J_z \dot{\omega} = -m\ell_G \sin(\alpha - \theta/2)$, soit :

$$\ddot{\alpha} = -\frac{m\ell_G}{J_z} \sin(\alpha - \theta/2). \quad (1)$$

- (b) Dans le cas de petites oscillations ($|\alpha| \ll 1$), l'équation précédente devient, en linéarisant le sinus :

$$\ddot{\alpha} = -\omega_0^2 \alpha, \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{m\ell_G g / J_z}.$$

La période des oscillations est donnée par $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{J_z / m\ell_G g}$.

2. Pour $\alpha < -\theta_B$, le flux magnétique est nul, les équations précédentes restent valables, on a des oscillations libres.

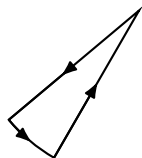
Pour $-\theta_B < \alpha < -\theta_B + \theta_S$, le flux magnétique à travers la spire évolue au cours du temps. Il apparaît donc une force électromotrice, d'après la loi de Faraday, et un courant électrique. En conséquence, des forces de Laplace vont s'exercer, et on constate que les forces qui s'exercent sur la partie droite de la spire ont un moment non nul par rapport à l'axe Oz. D'après la loi de Lenz, le moment de ces forces de Laplace aura tendance à freiner le mouvement.

Pour $-\theta_B + \theta_S < \alpha < \theta_B$, le flux magnétique à travers la spire n'évolue pas, on retombe transitoirement sur des oscillations libres.

Si la vitesse initiale permet d'atteindre $\alpha > \theta_B$, alors le flux magnétique varie à nouveau à la sortie de la zone de champ magnétique. On aura à nouveau une phase de freinage etc.

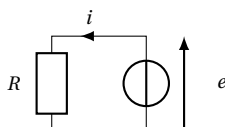
3. (a)

On oriente la spire dans le sens trigonométrique. L'aire de la partie dans le champ magnétique vaut $S = \frac{1}{2}(\alpha - (-\theta_B))\ell^2 = \frac{1}{2}(\alpha + \theta_B)\ell^2$, et le flux magnétique s'écrit donc $\Phi = \frac{1}{2}(\alpha + \theta_B)B\ell^2$.



- (b)

La f.é.m. induite vaut $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{2}\dot{\alpha}B\ell^2$. Le circuit équivalent est représenté ci-contre. L'intensité est donnée par $e = Ri$, d'où $i = -\frac{\dot{\alpha}B\ell^2}{2R}$.



- (c) La force de Laplace par unité de longueur est $i d\vec{r} \vec{e}_r \wedge B\vec{e}_z = -i dr B\vec{e}_\theta$, uniforme. Le moment résultant sur la partie radiale est donc le même que si la résultante s'appliquait au centre du rayon, soit :

$$\mathcal{M}_{Oz}(F_{\mathcal{L}a}) = \frac{i\ell^2 B}{2} = -\frac{(\ell^2 B)^2}{4R} \dot{\alpha}. \quad (2)$$

On ne peut pas ici utiliser la formule $\mathcal{M}_{Oz}(F_{\mathcal{L}a}) = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$ car le circuit électrique ne constitue pas un dipôle puisqu'il n'est pas tout entier plongé dans le champ magnétique. On ne peut pas le considérer comme un objet de taille négligeable devant l'échelle spatiale caractéristique d'évolution du champ magnétique.

La partie orthoradiale de la spire qui est soumise au champ magnétique ne donne pas de contribution au moment selon Oz.

- (d) Le théorème du moment cinétique en projection selon \vec{e}_z devient donc :

$$J_z \ddot{\alpha} = -m\ell_G g \sin \alpha - \frac{(\ell^2 B)^2}{4R} \dot{\alpha},$$

soit, en introduisant une constante de temps τ :

$$\ddot{\alpha} + \frac{\dot{\alpha}}{\tau} + \omega_0^2 \sin \alpha = 0, \quad \tau = \frac{4RJ_z}{(B\ell^2)^2}.$$

- (e) On pourra observer des oscillations, si le temps de relaxation est grand par rapport à la période de ces oscillations libres, c'est-à-dire si l'on vérifie $T_0 \ll \tau$.

Correction de l'exercice 3

1. Couple des forces de Laplace.

On note R le rayon de la spire rectangulaire et ℓ la longueur du segment AB . La force de Laplace sur un élément de courant $i d\vec{\ell}$ centré sur le point M du segment (AB) , supposé en $x < 0$ vaut $i d\ell B\vec{e}_\theta$. Elle est indépendante du point M . Le moment résultant par rapport à l'axe est donc celui de la résultante appliquée au centre du segment. La résultante est immédiatement $iLB\vec{e}_\theta$. Le bras de levier est le même en tout point, égal à R et on obtient finalement :

$$\mathcal{M}_{Oz}(F_{\mathcal{L}a}) = iRB_0\ell. \quad (3)$$

Les forces de Laplace sur les segments CD et DA sont nulles parce que le champ magnétique y est colinéaire à l'élément de circuit.

La force de Laplace sur le côté CD est exactement opposée à celle sur le côté AB , puisque le courant circule en sens inverse alors que le champ magnétique est identique. Ainsi, la résultante des forces est nulle, mais les deux moments par rapport à l'axe Oz s'ajoutent. En sommant les contributions des deux côtés de la spire, on obtient donc :

$$\Gamma_z = +(2RB_0\ell)i \quad (4)$$

2. Redressement : système collecteur-balais

Avec le système décrit jusqu'à présent, le sens des forces de Laplace change de signe à chaque demi-tour effectué par le rotor. En effet, le courant va toujours de A vers B et le champ magnétique est selon $-\vec{e}_r$ pour $x < 0$ et selon $+\vec{e}_r$ pour $x > 0$. La force exercée sur ce segment change donc de signe lorsqu'il franchit ce que l'on appelle la ligne neutre, en $x = 0$.

Pour pouvoir réaliser un entraînement en rotation sans limite sur l'angle effectué, une solution consiste à changer le signe du courant qui circule dans l'induit (le circuit associé au rotor) à chaque demi-tour. On utilise pour cela un système balais-collecteurs. Une géométrie possible pour ce système est représentée sur la Figure 6.

Sur la configuration de la Figure 6a, le segment AB du circuit induit est placé en $x < 0$. Le courant continu arrive du côté < 0 sur le collecteur de gauche et le balai relié au point A frotte sur ce collecteur. Le courant revient par le balai relié au point D et part par le collecteur de droite, du côté $x > 0$.

Sur la configuration de la Figure 6b, le segment AB du circuit induit est placé en $x > 0$. Le balai relié au point A frotte donc cette fois sur le collecteur droit et l'on a donc bien inversé le sens du courant dans chaque segment.

Grâce à ce dispositif, le moment des forces est toujours dans le même sens.

3. Force électromotrice induite - Conversion d'énergie.

La loi de Faraday, telle que présentée dans le programme, ne suffit pas pour faire un calcul direct explicite de la force électromotrice. Le champ magnétique étant en effet toujours radial, son flux à travers la spire est alors toujours nul. Néanmoins, la spire coupe des lignes de champ magnétique dans son mouvement et il apparaît effectivement une force électromotrice d'induction.

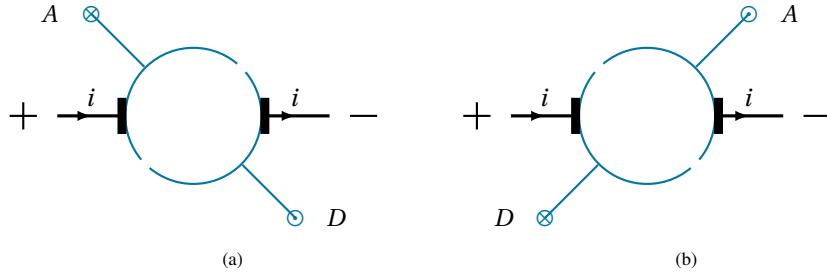


FIG. 6 : Système balais-collecteurs pour le redressement du courant à chaque demi-tour du rotor. Les balais sont les petits rectangles pleins. Les collecteurs sont représentés par les arcs de cercle.

Nous pouvons par ailleurs en obtenir l'expression en effectuant un bilan énergétique global. Comme dit en cours, la somme de la puissance des forces de Laplace et de la puissance fournie par la f.é.m. induite est nulle.

En revenant au modèle simple avec une unique spire rectangulaire, on peut donc écrire : $P_L + P_e = 0$, soit $\Gamma\omega + ei = 0$, soit $(2R\ell B_0 i)\omega + ei = 0$, soit $e = -2R\ell B_0\omega$. En notant $\Phi = 2R\ell B_0$, on peut réécrire ce résultat sous la forme :

$$e = -\Phi\omega. \quad (5)$$

On vérifie que l'expression obtenue est bien homogène à la dérivée par rapport au temps d'un flux magnétique, en accord avec la loi de Faraday $e = -\frac{d\Phi}{dt}$.

Correction de l'exercice 4

- En régime sinusoïdal établi, le courant change périodiquement de sens. Un changement de sens du champ magnétique changera la phase des oscillations de la force de Laplace mais ni leur fréquence ni leur amplitude ; or seules ces caractéristiques importent pour la production du son.
- (a) L'équation électrique est :

$$E \cos(\omega t) = Ri + L \frac{di}{dt} - e_{ind} = Ri + L \frac{di}{dt} + B_0 \ell \dot{x}.$$

L'équation mécanique est :

$$m\ddot{x} = F_{ax} + F_{ex} + F_{\mathcal{L}a} = -\alpha\dot{x} - kx + i\ell B_0.$$

En régime sinusoïdal établi, on a donc :

$$E = R\bar{I} + jL\omega\bar{I} + jB_0\ell\omega\bar{X} \quad -m\omega^2\bar{X} = -j\omega\alpha\bar{X} - k\bar{X} + \bar{I}\ell B_0.$$

La deuxième équation donne : $\bar{X} = \bar{I}\ell B_0 / (k - m\omega^2 + j\omega\alpha)$, et la première devient alors :

$$\bar{I} = \frac{E}{R + jL\omega + j\frac{B_0^2\ell^2\omega}{k - m\omega^2 + j\omega\alpha}} = \frac{E}{R + jL\omega + \frac{B_0^2\ell^2}{\alpha + jm\omega + \frac{k}{j\omega}}}.$$

- (b) Tout se passe comme si on avait l'association série d'une résistance R , d'une inductance L et d'un dipôle d'impédance $\frac{B_0^2\ell^2}{\alpha + jm\omega + \frac{k}{j\omega}}$. L'admittance de ce dernier est :

$$\underline{Y} = \frac{\alpha}{(B_0\ell)^2} + j\omega \frac{m}{(B_0\ell)^2} + \frac{1}{j\omega} \frac{k}{(B_0\ell)^2}.$$

On reconnaît donc l'association parallèle d'une résistance $R_{eq} = \frac{(B_0\ell)^2}{\alpha}$, d'une capacité $L_{eq} = \frac{(B_0\ell)^2}{k}$ et d'une capacité $C_{eq} = \frac{(B_0\ell)^2}{m}$.

Les modèles asymptotiques à haute et basse fréquence permettent de déterminer qu'on a un passe-bande (du 3^e ordre). Il s'agit en effet d'un circuit bouchon modifié. On peut déterminer une approximation de sa pulsation de résonance ω_{res} en supposant que l'impédance $jL\omega$ varie peu au voisinage de cette résonance (hypothèse d'autant meilleure que la résonance est fine). On peut alors approximer $jL\omega \approx jL\omega_{res} = \text{cste}$. Deux transformations Thévenin-Norton successives pour associer les deux résistances R_{eq} et R permettent alors de retrouver un bouchon (association parallèle de L_{eq} , C_{eq} en série avec une «résistance» $R_{eq}(R + jL\omega_{res})/(R + R_{eq} + jL\omega_{res})$) présentant une résonance en courant pour $\omega_{res} = 1/\sqrt{R_{eq}L_{eq}}$.

- (a) et (b). Supposons qu'on soit en régime sinusoïdal établi à la pulsation ω , on a alors $v = V \cos(\omega t + \varphi_V)$ et $v^2 = V^2 \cos^2(\omega t + \varphi_V) = V^2(1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_V))/2$. Le passage au carré fait apparaître des composantes à la pulsation 2ω : on ne peut donc pas travailler uniquement avec les amplitudes complexes car l'équation n'est pas linéaire. L'apparition de ces harmoniques est à éviter si on veut que le haut-parleur reproduise fidèlement une sinusoïde à ω .

Correction de l'exercice 5

- (a) Comme vu en cours, les deux courants doivent être déphasés de $\pi/2$.
- (b) Comme vu en cours, le couple ne dépend que de l'angle $\theta - \omega t$ entre le moment magnétique et la direction du champ magnétique. On a ici :

$$\mathcal{C}_{/Oz} = (\vec{m} \wedge \vec{B}_0) \cdot \vec{e}_z = -mB_0 \sin(\theta - \omega t)$$

- (a) On écrit le théorème du moment cinétique pour l'aimant, solide en rotation. On a :

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = \mathcal{C}_{/Oz} = -mB_0 \sin(\theta - \omega t).$$

Pour que la vitesse angulaire soit constante, on doit avoir $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$ et donc $\sin(\theta - \omega t) = 0$ à chaque instant, soit :

$$\theta = \omega t \quad \text{ou} : \theta = \omega t + \pi$$

Dans ces deux cas, l'angle entre le moment magnétique et le champ tournant reste constant.

On peut montrer (on l'illustre à la dernière question) que la première situation est stable alors que la deuxième est instable. On retrouve en effet, dans un référentiel tournant à la même vitesse que le champ tournant, les positions d'équilibre vues en cours dans le cas d'un champ stationnaire.

- (b) Le théorème du moment cinétique s'écrit cette fois :

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = \mathcal{C}_{IOz} - \Gamma = -mB_O \sin(\theta - \omega t) - \Gamma.$$

Le mouvement à vitesse angulaire constante vérifie désormais $mB_O \sin(\theta - \omega t) = -\Gamma$, soit $\sin(\theta - \omega t) = -\Gamma/(mB_O)$. Cette condition ne peut être remplie que si Γ est inférieur à $\Gamma_{\max} \equiv mB_O$. Dans ce cas, le dipôle sera toujours en retard de $\pi/2$ par rapport au champ magnétique tournant.

3. (a) On a $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{d^2\theta}{dt^2}$ et donc :

$$-J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = mB_O \sin(\alpha) \rightarrow \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \Omega^2 \sin(\alpha) = 0,$$

avec $\Omega^2 \equiv mB_O/J$. On reconnaît l'équation canonique d'évolution d'un pendule pesant de pulsation Ω . On aura donc :

- des oscillations quasi sinusoïdales de α autour de 0 si l'angle et la vitesse angulaire initiaux sont suffisamment faibles, ie si l'« énergie » initiale est faible,
- des oscillations non sinusoïdales si l'énergie initiale est intermédiaire,
- un mouvement « révolutif » dans lequel α varie de manière monotone si l'énergie initiale est suffisante.

- (b) On détermine les conditions initiales sur α :

- $\alpha_0 = \theta_0 - 0 = 0$
- $\frac{d\alpha}{dt}(0) = \omega - \frac{d\omega}{dt}(0) = \omega - \omega(1 - \beta) = \beta\omega$

On a donc initialement une faible énergie, l'angle α oscille donc sinusoïdalement selon :

$$\alpha = \frac{\beta}{\Omega} \sin(\Omega t) \rightarrow \theta = \omega t - \alpha = \omega(t - \frac{\beta \sin(\Omega t)}{\Omega}).$$

L'aimant oscille donc autour de la position du champ tournant, qui lui tourne à vitesse constante.

Correction de l'exercice 6

1. On oriente le circuit dans le sens $M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow M_4$ pour que le flux du champ magnétique à travers la spire soit positif. Le vecteur surface élémentaire s'écrit alors en coordonnées cylindriques : $\vec{\delta S} = dr dz \vec{e}_\theta$. Le flux du champ magnétique développé par le fil, à travers la spire carrée s'écrit :

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{\text{spire}} \vec{B} \cdot \vec{\delta S} = \int_{r=a}^{r=a+b} \int_{z=0}^{z=b} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{e}_\theta \cdot d\vec{r} dz \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_{r=a}^{r=a+b} \frac{1}{r} dr \int_{z=0}^{z=b} dz \\ &= \frac{\mu_0 i b}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{a}\right). \end{aligned}$$

2. La relation qui définit le coefficient d'inductance mutuelle est $\Phi(\text{fil} \rightarrow \text{spire}) = Mi$, on identifie donc l'expression :

$$M = \frac{\mu_0 b}{2\pi} \ln\left(\frac{a+b}{a}\right).$$

Correction de l'exercice 7

1. À deux centimètres de l'axe du fil, le champ magnétique est de l'ordre de $\mu_0 I/(2\pi d) = 1 \cdot 10^{-5}$ T. Ce champ n'est pas uniforme sur chaque spire en toute rigueur, puisque sa norme décroît lorsque l'on s'éloigne du fil.
2. Pour déterminer la f.é.m. induite, on applique la loi de Faraday, $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ et l'on somme les contributions des N spires. Avec la géométrie considérée, le champ magnétique sur chaque spire est systématiquement selon son vecteur surface. Le flux magnétique correspondant à travers les N spires s'exprime donc simplement : $\Phi = NBS$. Il vient donc :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(NB_\theta S)}{dt}.$$

Comme le champ magnétique à distance d a pour norme $B_\theta(t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi d}$, on obtient :

$$e = -\frac{\mu_0 NS}{2\pi d} \frac{di}{dt} = -\frac{\mu_0 NS}{2\pi d} \frac{d(I_{\text{eff}} \sqrt{2} \cos(\omega t))}{dt} = \frac{\mu_0 NS}{2\pi d} \omega I_{\text{eff}} \sqrt{2} \sin(\omega t).$$

3. La valeur efficace de la tension récupérée avec la pince est donc :

$$E_{\text{eff}} = \frac{\mu_0 NS}{2\pi d} \omega I_{\text{eff}}.$$

On obtient une tension efficace proportionnelle à l'intensité efficace du courant alternatif circulant dans le fil.

4. Les pinces reposant sur ce fonctionnement ne permettent de mesurer que des intensités *variables*, et de très grande amplitude. En effet, pour les paramètres géométriques donnés :

$$E = NI \times 2 \cdot 10^{-8} \text{ V} \cdot \text{A}^{-1}.$$

Pour avoir une tension raisonnable, de l'ordre de 0,1 V, on devra donc avoir NI de l'ordre de $1 \cdot 10^5$ A. Pour un courant de l'ordre de 100 A il faudra donc un millier de spires.

Correction de l'exercice 8

1. (a) On écrit l'égalité des tensions aux bornes du condensateur et de la bobine en prêtant attention aux conventions pour les relations courant-tension sur les dipôles :

$$u = \frac{q}{C} = -L \frac{di}{dt} = -LC \frac{d^2 q}{dt^2} \quad \frac{d^2 q}{dt^2} = -\frac{1}{LC} q.$$

On peut encore écrire cette relation sous la forme d'une équation d'oscillateur harmonique : $\frac{d^2 u}{dt^2} = -\omega_0^2 u$, avec la pulsation propre $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

- (b) La solution générale peut s'écrire sous la forme $u(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$, où U_0 et φ sont deux constantes imposées par les conditions initiales. On pourrait aussi écrire la solution générale sous la forme $u(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$.

2. (a) En travaux pratiques, on utilise souvent une bobine à noyau plongeur pour obtenir une inductance variable. Le principe ici est le même. Lorsque la masse métallique est présente, elle s'aimante sous l'effet du champ magnétique développé par le courant dans la bobine d'inductance initiale L . La masse métallique développe en retour un champ magnétique qui donne une contribution au flux magnétique total à travers la bobine. On comprend donc qualitativement qu'une masse métallique à proximité d'une bobine perturbe son inductance.

(b)

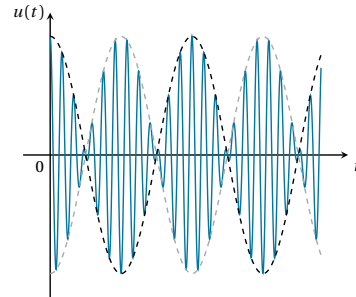
$$u_1(t) + u_2(t) = U_0 [\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega_1 t)]$$

$$u_1(t) + u_2(t) = 2U_0 \left[\cos\left(\frac{\omega_0 + \omega_1}{2} t\right) + \cos\left(\frac{\omega_0 - \omega_1}{2} t\right) \right]$$

$$u(t) = 2U_0 \cos(\omega_m t) \cos(\Delta\omega t),$$

$$\text{avec } \omega_m = \frac{\omega_0 + \omega_1}{2} \text{ et } \Delta\omega = \frac{\omega_0 - \omega_1}{2}.$$

- (c) La somme des deux tensions a l'allure de la figure ci-contre.



Correction de l'exercice 9

1. Considérons la spire de diamètre D_k , orientée comme indiquée sur la figure, dans le sens trigonométrique, avec un vecteur surface selon la verticale ascendante.

On applique la loi de Faraday sur chaque spire :

$$e_k = -\frac{d\Phi_k}{dt}, \quad \Phi_k = \iint_{\text{disque de diamètre } D_k} \vec{B} \cdot \vec{\delta S}.$$

Le champ magnétique est appliqué perpendiculairement au plan horizontal contenant la spire et uniforme. Le flux magnétique s'exprime donc simplement $\Phi_k = \frac{\pi D_k^2}{4} B_0 \sin(\omega t)$ et la f.é.m. induite dans la spire k s'écrit donc :

$$e_k = -\frac{\pi D_k^2}{4} \omega B_0 \cos(\omega t).$$

2. Le circuit équivalent est une f.é.m. e_k qui débite dans une résistance R_k . On a donc simplement

$$i_k = \frac{e_k}{R_k} = -\frac{\pi D_k^2}{4 R_k} \omega B_0 \cos(\omega t).$$

3. La puissance dissipée par la résistance R_k s'écrit $P_{J,k} = R_k i_k^2$. On a donc, dans l'ensemble des quatre spires :

$$P_J = \sum_{k=1}^4 R_k i_k^2 = \sum_{k=1}^4 \left(\frac{\pi D_k^2}{4} \omega B_0 \cos(\omega t) \right)^2 \frac{1}{R_k}.$$

4. La valeur moyenne du terme dépendant du temps vaut :

$$\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{2}.$$

On a donc :

$$\langle P_J \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi \omega B_0}{4} \right)^2 \sum_{k=1}^4 \frac{D_k^4}{R_k}.$$

5. La résistance R_k s'écrit $R_k = \frac{\ell_k}{\gamma S} = \frac{\pi D_k}{\gamma S}$. On a donc :

$$\langle P_J \rangle = \left(\frac{\pi \omega^2 B_0^2 \gamma S}{32} \right) \sum_{k=1}^4 D_k^3.$$

6. On obtient une dépendance quadratique avec la pulsation, ce qui incite à travailler à haute fréquence. On choisit donc des fréquences nettement supérieures à celle du secteur (50 Hz). En revanche, le champ électromagnétique pénètre très peu dans les conducteurs à très haute fréquence pose cependant une limite (effet de peau). On retient donc en pratique des fréquences de l'ordre de 20 kHz à 50 kHz.

Correction de l'exercice 10

1. (a) Comme la longueur ℓ est relativement grande devant le rayon R , on peut utiliser le modèle du solénoïde infini. On calcule donc :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{\ell} = 6,3 \mu\text{H}.$$

- (b) La fréquence de résonance est $\nu = 1/(2\pi\sqrt{LC}) = 63 \text{ kHz}$.

2. (a) En influence totale, on aurait $M = \sqrt{L_1 L_2} = \sqrt{L^2} = L$. On a donc ici $M = \alpha L$.

- (b) Les équations différentielles couplées vérifiées par les intensités des courants i_1 et i_2 dans chaque circuit $L - C$ sont :

$$L \frac{d^2 i_1}{dt^2} + M \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{i_1}{C} = 0 \quad L \frac{d^2 i_2}{dt^2} + M \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{i_2}{C} = 0.$$

La somme $i_s \equiv i_1 + i_2$ et la différence $i_d \equiv i_1 - i_2$ sont donc solutions des équations différentielles découplées :

$$(L + M) \frac{d^2 i_s}{dt^2} + \frac{i_s}{C} = 0 \quad (L - M) \frac{d^2 i_d}{dt^2} + \frac{i_d}{C} = 0$$

Comme $M = \alpha L$, on a $L + M = L(1 + \alpha) \geq L$ et $L - M = L(1 - \alpha) \in [0, L]$ et donc :

- i_s oscille à la pulsation $\omega_s = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC(1+\alpha)}}$
- i_d oscille à la pulsation $\omega_d = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC(1-\alpha)}}$.

On a donc $i_s = i_{s0} \cos(\omega_s t + \varphi_s)$ et $i_d = i_{d0} \cos(\omega_s t + \varphi_d)$, avec i_{s0} et i_{d0} les valeurs initiales de i_s et i_d .

$$i_1 = \frac{i_s + i_d}{2} = \frac{i_{s0} \cos(\omega_s t + \varphi_s) + i_{d0} \cos(\omega_d t + \varphi_d)}{2}$$

$$i_2 = \frac{i_s - i_d}{2} = \frac{i_{s0} \cos(\omega_s t + \varphi_s) - i_{d0} \cos(\omega_d t + \varphi_d)}{2}$$

Il faut connaître les valeurs initiales de i_1 et i_2 et de leurs dérivées temporelles pour déterminer les quatre constantes $i_{s0}, i_{d0}, \varphi_s$ et φ_d .

Pour un bon couplage on a $\alpha = 1 - \beta$, avec $\beta \ll 1$ et donc $\omega_s \approx \omega$ et $\omega_d \ll \omega_s$.

Chacun des signaux i_1 et i_2 présente un battement : un signal oscillant à ω_s dont l'enveloppe varie lentement à $\omega_d \ll \omega_s$.

- (c) Dans le cas où les deux auto-inductances sont différentes, on obtiendra qualitativement les mêmes résultats : il apparaîtra deux pulsations propres du système mais qui seront désormais associées à des combinaisons linéaires plus compliquées de i_1 et i_2 .

Correction de l'exercice 11

1. On a :

$$E \cos(\omega t) = R_p i_p + L_p \frac{di_p}{dt} + M \frac{di_s}{dt} \quad \text{et} \quad R_s i_s + L_s \frac{di_s}{dt} + M \frac{di_p}{dt} = 0$$

2. En notation complexe, on obtient :

$$E = R_p \underline{I_p} + j L_p \omega \underline{I_p} + j M \omega \underline{I_s} \quad \text{et} \quad R_s \underline{I_s} + j L_s \omega \underline{I_s} + j M \omega \underline{I_p} = 0$$

La deuxième équation donne :

$$\frac{\underline{I_s}}{\underline{I_p}} = - \frac{j M \omega}{R_s + j L_s \omega}.$$

La première donne alors :

$$\underline{I_p} = \frac{E}{R_p + j L_p \omega + \frac{M^2 \omega^2}{R_s + j L_s \omega}} = \frac{E(R_s + j L_s \omega)}{R_p R_s + j(R_p L_s + R_s L_p) \omega + (M^2 - L_p L_s) \omega^2}$$

3. (a) Les hypothèses permettent de négliger les termes en ω^2 et ceux sans ω . On obtient finalement :

$$\underline{I_p} \approx \frac{E(j L_s \omega)}{j(R_p L_s + R_s L_p) \omega} = \frac{E}{R_p + R_s \frac{L_p}{L_s}}.$$

Tout se passe comme si on n'avait qu'un circuit à une seule maille sans couplage, avec association série des résistances R_p et $R_s L_p / L_s = R_s N_p^2 / N_s^2$.

- (b) Les conditions $M^2 = L_p L_s$ et $L_s / L_p = N_s^2 / N_p^2$ permettent de calculer :

$$\frac{M^2}{L_s^2} = \frac{N_p^2}{N_s^2} \quad \frac{M^2}{L_p^2} = \frac{N_s^2}{N_p^2}.$$

On a alors :

$$\frac{\underline{I_s}}{\underline{I_p}} \approx - \frac{M}{L_s} = - \frac{N_p}{N_s} \quad \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_p}} = \frac{j \omega (L_s \underline{I_s} + M \underline{I_p})}{j \omega (L_p \underline{I_p} + M \underline{I_s})} = \frac{M \left(\underline{I_p} + \frac{L_s}{M} \underline{I_p} \right)}{L_p \left(\underline{I_p} + \frac{M}{L_p} \underline{I_s} \right)} = \frac{M}{L_p} = \frac{N_s}{N_p}.$$

Les valeurs absolues de ces deux rapports sont inverses l'une de l'autre : si le transformateur est élévateur de tension, il abaisse l'intensité.

La puissance instantanée reçue par le primaire est $u_p i_p$, celle fournie par le secondaire est $-u_s i_s = u_p i_p \times N_s N_p / (N_s N_p) = u_p i_p$. Le transformateur transmet bien la puissance du primaire au secondaire, qu'il soit releveur ou abaisseur de tension.

Remarques :

- L'égalité $\underline{U_s} / \underline{U_p}$ n'est pas dépendante de la condition « les résistances sont négligeables devant les impédances inductives ». Elle nécessite seulement que l'influence soit totale et que les résistances internes des bobines soient négligeables. Elle n'impose en particulier pas que R_s qui représente la résistance du dipôle alimenté par le transformateur soit négligeable.
 - Si l'on fait l'approximation $N_s \underline{I_s} = -N_p \underline{I_p}$ (qui elle demande de négliger R_s), le numérateur et le dénominateur de l'expression de $\underline{U_s} / \underline{U_p}$ sont tous les deux nuls : l'approximation est trop violente. Néanmoins ce quotient vaudra toujours N_s / N_p pour tout R_s , comme on vient de le préciser.
- (c) Il n'est pas nécessaire ici d'utiliser les formules de la puissance en régime sinusoïdal établi car on n'a pas de déphasage entre les tensions et les courants sous les hypothèses précédentes.

La puissance instantanée fournie par le générateur, $\mathcal{P}_E(t)$ est :

$$E \cos(\omega t) i_p(t) = \frac{E^2 \cos^2(\omega t)}{R_p + R_s (N_p / N_s)^2}.$$

Comme la valeur moyenne temporelle de $\cos^2(\omega t)$ est 1/2, on obtient :

$$\langle \mathcal{P}_E \rangle = \frac{E^2}{2(R_p + R_s (N_p / N_s)^2)}.$$

On calcule de même la puissance reçue par le résistor R_s :

$$\langle \mathcal{P}_s \rangle = R_s \langle i_s^2 \rangle = R_s \left(\frac{N_p}{N_s} \right)^2 \langle i_p^2 \rangle = R_s \left(\frac{N_p}{N_s} \right)^2 \frac{E^2}{2(R_p + R_s (N_p / N_s)^2)^2} = \frac{E^2}{2R_p} \frac{y}{(1+y)^2},$$

avec $y = R_s N_p^2 / (R_p N_s^2)$.

On vérifie qu'elle est maximale pour $y = 1$, soit $R_p = R_s (N_p / N_s)^2$. On a pour cette valeur $\langle \mathcal{P}_E \rangle = E^2 / (4R_p)$.

On peut donc en choisissant le rapport du transformateur adapter la résistance vue par le primaire pour fournir une puissance maximale au résistor du secondaire.