DM 25 : corrigé

Problème 1.

Ce problème est largement inspiré du sujet "Centrale 2001 PC".

Partie I

1°) D'après le cours, f est de classe C^∞.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $R(n)$ l'assertion suivante :
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = 2^n \cos(2x + n\frac{\pi}{2})$.
On a clairement $R(0)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $R(n)$.
On sait que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dt}(\cos t) = \cos(t + \frac{\pi}{2})$, donc en dérivant la relation $R(n)$, on obtient $f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1}\cos(2x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})$, ce qui prouve $R(n+1)$.
D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = 2^n \cos(2x + n\frac{\pi}{2})$.
Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $f^{(i)}$ est bornée et $M_i = 2^i$.

2°)
$\diamond$ Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$.
En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à f entre x et $x+h$, on obtient $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{h^2 M_2}{2}$, puis la même inégalité entre x et $x-h$ donne $|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leq \frac{h^2 M_2}{2}$. Alors, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| &= | \ (f(x+h) - f(x) - hf'(x)) \\ &\qquad -(f(x-h) - f(x) + hf'(x)) \ | \\ &\leq | \ f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \\ &\qquad +|f(x-h) - f(x) + hf'(x) \ | \\ &\leq h^2 M_2. \end{aligned}$$

$\diamond$ Alors, d'après le corollaire de l'inégalité triangulaire,
$2|hf'(x)| - |f(x+h) - f(x-h)| \leq h^2 M_2$, donc
$2|hf'(x)| \leq h^2 M_2 + |f(x+h)| + |f(x-h)| \leq h^2 M_2 + 2M_0$.
On en déduit que f' est bornée et que,
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}$.

Ainsi, $\dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_2 h}{2}$ est un majorant de $\{|f'(x)| \ / \ x \in \mathbb{R}\}$, donc il est plus grand que le plus petit des majorants. Ceci démontre que $M_1 \leq \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_2 h}{2}$. Par la suite, ce raisonnement sera appelé un *passage à la borne supérieure.*

3°) On suppose que f est de classe C^2 et que f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$. D'après la question précédente, M_1 est défini, et pour tout $h > 0$, $M_1 \leq \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_2 h}{2}$.

$\diamond$ Si $M_2 = 0$, alors $f'' = 0$ donc il existe $C, D \in \mathbb{R}$ tels que $f = (x \longmapsto Cx + D)$, mais f est bornée sur $\mathbb{R}$, donc $C = 0$ puis $f' = 0$. Ainsi $M_1 = 0$ et on a bien $M_1 \leq \sqrt{2M_0 M_2}$.

$\diamond$ Supposons maintenant que $M_2 > 0$, ce qui impose également $M_0 > 0$ (car si $M_0 = 0$, alors $f = 0$, donc $f'' = 0$).

La fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $v(h) = \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_2 h}{2}$ a pour dérivée $v'(h) = \dfrac{M_2 h^2 - 2M_0}{2h^2}$ qui s'annule pour $h_0 = \sqrt{\dfrac{2M_0}{M_2}}$.

On calcule $v(h_0) = \sqrt{\dfrac{M_0 M_2}{2}} + \dfrac{\sqrt{2M_0 M_2}}{2} = \sqrt{M_0 M_2}\Big(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big) = \sqrt{2M_0 M_2}$.

Alors $M_1 \leq v(h_0) = \sqrt{2M_0 M_2}$.

4°)

$\diamond$ Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$. On applique de même l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 entre x et $x + h$ puis entre x et $x - h$:

$|f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \dfrac{h^2}{2} f''(x)| \leq \dfrac{h^3 M_3}{6}$ et

$|f(x-h) - f(x) + hf'(x) - \dfrac{h^2}{2} f''(x)| \leq \dfrac{h^3 M_3}{6}$.

Si l'on pose $A = f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \dfrac{h^2}{2} f''(x)$

et $B = f(x-h) - f(x) + hf'(x) - \dfrac{h^2}{2} f''(x)$, alors $A - B = f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)$, or $|A - B| \leq |A| + |B| \leq \dfrac{h^3 M_3}{3}$, donc par le corollaire de l'inégalité triangulaire, $2h|f'(x)| - |f(x+h) - f(x-h)| \leq \dfrac{h^3 M_3}{3}$, puis

$2h|f'(x)| \leq \dfrac{h^3 M_3}{3} + |f(x+h)| + |f(x-h)| \leq \dfrac{h^3 M_3}{3} + 2M_0$.

Ainsi f' est bornée sur $\mathbb{R}$, donc M_1 est bien défini, et par passage au sup,

$M_1 \leq \dfrac{h^2 M_3}{6} + \dfrac{M_0}{h}$, pour tout $h > 0$.

Supposons que $M_3 > 0$, ce qui impose également que $M_0 > 0$: La fonction définie par $v(h) = \dfrac{M_0}{h} + \dfrac{M_3 h^2}{6}$ a pour dérivée $v'(h) = \dfrac{M_3 h^3 - 3M_0}{3h^2}$ qui s'annule pour $h_0 = \left(\dfrac{3M_0}{M_3}\right)^{1/3}$. On calcule

$$v(h_0)=\frac{M_0M_3^{\frac13}}{(3M_0)^{\frac13}}+\frac{M_3 9^{\frac13}M_0^{\frac23}}{6M_3^{\frac23}}=\frac{(M_0^2M_3)^{\frac13}}{3^{\frac13}}+\frac{(M_3M_0^2 9)^{\frac13}}{6}=(9M_3M_0^2)^{\frac13}\Big(\frac13+\frac16\Big).$$

Ainsi, $M_1\le v(h_0)=\dfrac12(9M_0^2M_3)^{1/3}$.

Si $M_3=0$, $f'''=0$, donc f est un polynôme de degré inférieur à 2, de la forme $x\longmapsto ax^2+bx+c$. Si $a\neq 0$, alors au voisinage de $+\infty$, $|f(x)|\sim |a|x^2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui est faux car f est bornée. Ainsi, $a=0$ puis de même, $b=0$. Ainsi f est une fonction constante, donc $f'=0$. Alors $M_1=0$ et l'inégalité précédente est encore valable.

◇ f' et $f^{(3)}$ étant bornées sur $\mathbb{R}$, la question 2 appliquée à f' montre que f'' est bornée sur $\mathbb{R}$.

Partie II

5°)

◇ D'après la formule du binôme de Newton,

$(e^x-1)^m=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}e^{kx}$, or au voisinage de 0, on sait que $e^t=\displaystyle\sum_{j=0}^{m}\frac{t^j}{j!}+o(t^m)$,

donc pour tout $k\in\{0,\dots,n\}$, comme $kx \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$, par composition,

$e^{kx}=\displaystyle\sum_{j=0}^{m}\frac{k^jx^j}{j!}+o(x^m)$.

Ainsi, la première égalité devient

$(e^x-1)^m=\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}\Big(\sum_{j=0}^{m}\frac{k^jx^j}{j!}\Big)+o(x^m)$,

puis en intervertissant les deux symboles de sommation,

$(e^x-1)^m=\displaystyle\sum_{j=0}^{m}\Big(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}k^j\Big)\frac{x^j}{j!}+o(x^m)$.

◇ Par ailleurs,

$(e^x-1)^m=(x+o(x))^m=[x(1+o(1))]^m=x^m(1+o(1))=x^m+o(x^m)$, donc par unicité du développement limité, on obtient que, pour tout $j\in\{1,\dots,m-1\}$,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}k^j=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}k^j=0$,

et pour $j=m$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}k^j=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{m-k}k^j=m!$.

6°)

◇ Soit $x\in\mathbb{R}$ et $h\in\mathbb{R}_+^*$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$:

$|f(x+h)-f(x)-\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j|\le\frac{M_nh^n}{n!}$.

On en déduit que $\left|\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j\right| \leq \frac{M_nh^n}{n!} + |f(x+h) - f(x)[\leq \frac{M_nh^n}{n!} + 2M_0$.

$\diamond$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Par inégalité triangulaire, on déduit du point précédent que
$$\left|\sum_{h=1}^{n-1}(-1)^h\begin{pmatrix} n-1 \\ h \end{pmatrix}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j\right| \leq \sum_{h=1}^{n-1}\begin{pmatrix} n-1 \\ h \end{pmatrix}\Big(\frac{M_nh^n}{n!} + 2M_0\Big).$$
En permutant les sommations sur h et j et en utilisant la question 5 avec $m = n-1$,
$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{n-1}(-1)^h\begin{pmatrix} n-1 \\ h \end{pmatrix}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{f^{(j)}(x)}{j!}h^j &= \sum_{j=1}^{n-1}\Big(\sum_{h=1}^{n-1}(-1)^h\begin{pmatrix} n-1 \\ h \end{pmatrix}h^j\Big)\frac{f^{(j)}(x)}{j!} \\ &= (-1)^{n-1}f^{(n-1)}(x),\end{aligned}$$
donc l'inégalité précédente se met sous la forme :
$|f^{(n-1)}(x)| \leq C_1M_n + C_2M_0$ où C_1 et C_2 sont des quantités indépendantes de x. Ceci prouve que $f^{(n-1)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

$\diamond$ Soit $k \in \{2, \ldots, n\}$. Supposons que $f^{(k)}$ est bornée. On applique le résultat précédent en remplaçant n par k. Ainsi, $f^{(k-1)}$ est bornée. Or on a supposé que $f^{(n)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$, donc par récurrence descendante, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $f^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et M_k est bien défini. C'est aussi vrai pour $k = 0$ par hypothèse.

7°) Supposons que f n'est pas constante. Soit $k \in \{0, \ldots, n\}$. Supposons que $M_k = 0$. Alors $f^{(k)}$ est identiquement nulle, donc par intégrations successives, f est une fonction polynomiale de la forme $x \longmapsto \displaystyle\sum_{h=0}^{N} a_hx^h$ avec $a_N \neq 0$ et $N \geq 1$ car f n'est pas constante. Alors au voisinage de $+\infty$, $|f(x)| \sim |a_N|x^N \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui est faux car f est bornée sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $M_k > 0$.

8°) $(s_1 \times \cdots \times s_k)^n = (s_1 \times \cdots \times s_k)^k(s_1 \times \cdots \times s_k)^{n-k} \leq (s_1 \times \cdots \times s_k)^k s_k^{k(n-k)}$, car la suite (s_i) est croissante et car les s_i sont strictement positifs, donc, en utilisant à nouveau la croissance de (s_i),
$(s_1 \times \cdots \times s_k)^n \leq (s_1 \times \cdots \times s_k)^k(s_{k+1} \times \cdots \times s_n)^k = (s_1 \times \cdots \times s_n)^k$.

9°) Si f est constante, l'inégalité demandée est évidente. On suppose donc que f n'est pas constante. D'après la question précédente, pour tout
$k \in \{0, \ldots, n\}$, $M_k > 0$, donc on peut poser $s_k = 2^{k-1}\dfrac{M_k}{M_{k-1}}$ pour $k \in \mathbb{N}_n$.

Soit $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. $\dfrac{s_{k+1}}{s_k} = 2\dfrac{M_{k+1}M_{k-1}}{M_k^2} \geq 1$ d'après la question 3 appliquée à $f^{(k-1)}$, qui est bien de classe C^2. Ainsi, la suite $(s_k)_{1\leq k\leq n}$ est une suite croissante de réels strictement positifs, donc d'après la question précédente, $(s_1s_2 \ldots s_k)^n \leq (s_1s_2 \ldots s_n)^k$. Il s'agit de produits télescopiques. Ainsi
$\left(\dfrac{M_k}{M_0}2^{0+1+\ldots+(k-1)}\right)^n \leq \left(\dfrac{M_n}{M_0}2^{1+\ldots+(n-1)}\right)^k$ d'où $M_k^n \leq M_n^kM_0^{n-k}2^{\frac{kn(n-1)}{2}-\frac{nk(k-1)}{2}}$
d'où enfin $M_k \leq M_n^{\frac{k}{n}}M_0^{1-\frac{k}{n}}2^{\frac{k(n-k)}{2}}$.

Problème 2

Ce problème est extrait du sujet "Centrale 1997 MP".

Partie I

1°) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $R(n)$ l'assertion : $s_n \geq 0$.
Par hypothèse, on a $R(0)$ et $R(1)$.
Pour $n \geq 1$, supposons $R(n)$ et $R(n-1)$.
Alors $s_{n+1} = s_n + a_{n-1}s_{n-1} \geq 0$, d'où $R(n+1)$.
D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n \geq 0$.
Alors, pour tout $n \geq 1$, $s_{n+1} = s_n + a_{n-1}s_{n-1} \geq s_n$, ce qui prouve que $(s_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
b) Soit $n \geq 2$: $s_{n+1} = s_n + a_{n-1}s_{n-1} \leq s_n + a_{n-1}s_n$, car $n-1 \geq 1$ et $(s_k)_{k\geq 1}$ est croissante. Ainsi, $s_{n+1} \leq s_n(1 + a_{n-1})$, or pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \geq 1 + t$, donc $s_{n+1} \leq s_n e^{a_{n-1}}$.
c) $\diamond$ On suppose que la série $\sum a_n$ converge.
Par récurrence, on déduit de l'inégalité précédente que, pour tout $n \geq 2$,
$s_n \leq s_2 \exp(\sum_{k=1}^{n-2} a_k) \leq s_2 \exp(\sum_{k=1}^{+\infty} a_k)$.
Ainsi la suite $(s_n)_{n\geq 2}$ est croissante et majorée, donc elle converge.
$\diamond$ On suppose maintenant que la suite (s_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.
Pour tout $n \geq 1$, $s_n \geq s_1$, donc $\ell \geq s_1 > 0$.
Pour $n \geq 2$, $s_{n-1} > 0$, donc $a_{n-1} = \frac{s_{n+1} - s_n}{s_{n-1}} \sim \frac{1}{\ell}(s_{n+1} - s_n)$. Ainsi $\sum a_n$ a même nature que $\sum (s_{n+1} - s_n)$. Mais $\sum_{k=1}^{n} (s_{k+1} - s_k) = s_{n+1} - s_1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - s_1$,
donc $\sum (s_{n+1} - s_n)$ et $\sum a_n$ sont convergentes.

2°) $\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $R(n)$ l'assertion : $|s_n| \leq v_n$.
Par hypothèse, on a $R(0)$ et $R(1)$.
Pour $n \geq 1$, supposons $R(n)$ et $R(n-1)$.
$|s_{n+1}| = |s_n + a_{n-1}s_{n-1}| \leq |s_n| + |a_{n-1}||s_{n-1}| \leq v_n + |a_{n-1}|v_{n-1}$, d'après l'hypothèse de récurrence. Ainsi, $|s_{n+1}| \leq v_{n+1}$, ce qui prouve $R(n+1)$.
$\diamond$ Pour $n \geq 1$, $0 \leq |s_{n+1} - s_n| = |a_{n-1}||s_{n-1}| \leq |a_{n-1}|v_{n-1} = v_{n+1} - v_n$.
La première partie de la question 1.c reste valable lorsque $s_1 = 0$ (l'hypothèse $s_1 \neq 0$ n'intervient pas), donc on peut l'appliquer en remplaçant la suite (s_n) par la suite (v_n).
Or $\sum |a_n|$ converge, donc (v_n) converge. Alors la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge, donc la série $\sum |s_{n+1} - s_n|$ est convergente.
$\diamond$ Ceci prouve que $\sum (s_{n+1} - s_n)$ est absolument convergente,

mais $\sum_{k=1}^{n}(s_{k+1}-s_k)=s_{n+1}-s_1$, donc la suite (s_n) est convergente.

3°) L existe d'après la question 2, car la série géométrique $\sum a^n$ est convergente.

◇ $s_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L\neq 0$, donc $s_n\sim L$, puis $s_{n+1}-s_n=a_{n-1}s_{n-1}\sim a^{n-1}L$.

◇ La série $\sum a^{n-1}$ est convergente et positive, donc on peut appliquer le théorème de sommation des relations d'équivalence. Ainsi,

$$\sum_{k=n}^{+\infty}(s_{k+1}-s_k)\sim\sum_{k=n}^{+\infty}a^{k-1}L=La^{n-1}\frac{1}{1-a}.$$

D'autre part, pour $N\geq n$, $\sum_{k=n}^{N}(s_{k+1}-s_k)=s_{N+1}-s_n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} L-s_n$,

donc $L-s_n\sim\dfrac{La^{n-1}}{1-a}$.

4°) **a)** De même $s_{n+1}-s_n\sim La_{n-1}=\dfrac{L}{n(n+1)}=L\Big(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\Big)$, donc par sommation des relations d'équivalence, $L-s_n\sim L\sum_{k=n}^{+\infty}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})=\frac{L}{n}$.

b) Soit $n\geq 1$. Posons $\varepsilon_n=s_n-L+\dfrac{L}{n}$.

$\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n=s_{n+1}-s_n-\dfrac{L}{n}+\dfrac{L}{n+1}=a_{n-1}s_{n-1}-L(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$,

donc $\varepsilon_{n+1}-\varepsilon_n=\dfrac{1}{n(n+1)}(s_{n-1}-L)\sim\dfrac{1}{n(n+1)}(-\dfrac{L}{n-1})\sim-\dfrac{L}{n^3}$.

De plus, $\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}=\dfrac{1}{n^2}(1-\dfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^2})=\dfrac{1}{n^2}(1-(1-\dfrac{2}{n}+o(\dfrac{1}{n})))$,

donc $\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}=\dfrac{2}{n^3}+o(\dfrac{1}{n^3})\sim\dfrac{2}{n^3}$.

Ainsi, d'après le théorème de sommation des relations d'équivalence,

$$\sum_{k=n}^{+\infty}(\varepsilon_{k+1}-\varepsilon_k)\sim\frac{L}{2}\sum_{k=n}^{+\infty}(\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{1}{k^2})=-\frac{L}{2n^2},$$

or $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\sum_{k=n}^{+\infty}(\varepsilon_{k+1}-\varepsilon_k)=-\varepsilon_n$.

Finalement $\varepsilon_n\sim\dfrac{L}{2n^2}$ et $s_n=L-\dfrac{L}{n}+\dfrac{L}{2n^2}+o(\dfrac{1}{n^2})$.

Partie II

5°) L'application L est bien définie d'après la question 2.

Fixons $(s_0,s_1,t_0,t_1)\in\mathbb{R}^4$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.

Notons (s_n) et (t_n) les suites associées, vérifiant les relations : $s_{n+1} = s_n + a_{n-1}s_{n-1}$ et $t_{n+1} = t_n + a_{n-1}t_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.
Ainsi, $s_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L(s_0, s_1)$ et $t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L(t_0, t_1)$.
Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \alpha s_n + t_n$. Alors, pour tout $n \geq 1$,
$w_{n+1} = \alpha(s_n + a_{n-1}s_{n-1}) + (t_n + a_{n-1}t_{n-1}) = w_n + a_{n-1}w_{n-1}$, donc la suite (w_n) satisfait la relation de récurrenc de l'énoncé. Ainsi, $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L(w_0, w_1) = L(\alpha s_0 + t_0, \alpha s_1 + t_1)$.
Mais $w_n = \alpha s_n + t_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha L(s_0, s_1) + L(t_0, t_1)$. Ainsi, d'après l'unicité de la limite, $L(\alpha s_0 + t_0, \alpha s_1 + t_1) = \alpha L(s_0, s_1) + L(t_0, t_1)$: on a prouvé la linéarité de L.

6°) On suppose qu'il existe un indice $m \in \mathbb{N}$ tel que $s_m = 0$.
Supposons d'abord que $s_{m+1} = 0$. Alors si $m \geq 1$, $s_{m-1} = \dfrac{1}{a_{m-1}}(s_{m+1} - s_m) = 0$, puis par récurrence descendante on montre que, pour tout $i \in \{0, \ldots, m\}$, $s_i = s_{i+1} = 0$. En particulier, pour $i = 0$, $s_0 = s_1 = 0$, ce qui est faux par hypothèse.
Ainsi $s_{m+1} \neq 0$.
Premier cas : Supposons que $s_{m+1} > 0$.
On pose $v_n = s_{m+n}$. Alors la suite (v_n) suit encore la relation de récurrence de l'énoncé. De plus, $v_0 = s_m = 0$ et $v_1 = s_{m+1} > 0$, donc d'après la question 1, la suite (v_n) est croissante. En particulier, $v_n \geq v_1$ pour $n \geq 1$. Mais (v_n) et (s_n) ont la même limite, égale à $L(s_0, s_1)$, donc $L(s_0, s_1) \geq v_1 > 0$. En particulier, $L(s_0, s_1) \neq 0$.
Second cas : Supposons que $s_{m+1} < 0$.
On pose $w_n = -s_n$. La suite (w_n) vérifie encore la relation de récurrence et (w_n) tend vers $-L(s_0, s_1)$. On peut appliquer le premier cas à (w_n), donc on a encore $L(s_0, s_1) \neq 0$.

7°) D'après la question précédente, $L(1, 0)$ et $L(0, 1)$ sont des réels non nuls. Ainsi, L est non nulle donc $\mathrm{Ker}(L) \neq \mathbb{R}^2$.
Posons $\alpha = \dfrac{L(1, 0)}{L(0, 1)}$. Alors $L(1, 0) = \alpha L(0, 1)$, mais L est linéaire donc $L(1, -\alpha) = 0$.
Or $(1, -\alpha) \neq 0$, donc $\mathrm{Ker}(L) \neq \{0\}$.

8°) $\diamond$ Supposons que la suite (s_n) n'est pas alternée.
Ainsi, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $s_m s_{m+1} \geq 0$.
Si $s_m = 0$ ou $s_{m+1} = 0$, d'après la question 6, $(s_n) \notin \mathrm{Ker}(L)$.
Sinon, $s_m s_{m+1} > 0$. Si s_m et s_{m+1} sont strictement positifs, on applique la question 1 à la suite $(v_n) = (s_{n+m})$ pour montrer comme en question 6 que $(s_n) \notin \mathrm{Ker}(L)$. Si s_m et s_{m+1} sont strictement négatifs, on applique la phrase précédente à $(w_n) = (-s_n)$ et on a encore $(s_n) \notin \mathrm{Ker}(L)$.
On a donc montré que si la suite n'est pas alternée, elle n'est pas dans $\mathrm{Ker}(L)$.
$\diamond$ Réciproquement, supposons que la suite (s_n) est alternée.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n s_{n+1} < 0$, donc en passant à la limite, $L(s_0, s_1).L(s_0, s_1) \leq 0$. Nécessairement $L(s_0, s_1) = 0$ et $(s_n) \in \mathrm{Ker}(L)$.

9°) $\mathrm{Ker}(L)$ est une droite vectorielle, donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{Ker}(L) = \mathrm{Vect}\{(a, b)\} = \{(\lambda a, \lambda b) \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

D'après la question précédente, $ab < 0$, donc $a \neq 0$, donc $(1, \frac{b}{a}) \in \mathrm{Ker}(L)$.
Posons $r = -\frac{b}{a}$. Alors $r > 0$ et $(1, -r) \in \mathrm{Ker}(L)$.
Supposons maintenant que $(s_0, s_1) \in \mathrm{Ker}(L) \setminus \{0\}$. $\mathrm{Ker}(L)$ étant une droite vectorielle dirigée par $(1, -r)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $(s_0, s_1) = \lambda(1, -r)$.
On sait que $s_0 s_1 < 0$, donc $s_0 \neq 0$. De plus $-\dfrac{s_1}{s_0} = -\dfrac{-\lambda r}{\lambda} = r$.
Ainsi le rapport $-\dfrac{s_1}{s_0}$ ne dépend pas de $(s_0, s_1) \in \mathrm{Ker}(L) \setminus \{0\}$.

10°) ◇ Soit $n \geq 1$. $r_n = -\dfrac{s_n + a_{n-1}s_{n-1}}{s_n} = -1 - a_{n-1}\Big(\dfrac{s_n}{s_{n-1}}\Big)^{-1}$, donc $r_n = -1 + \dfrac{a_{n-1}}{r_{n-1}}$.
La suite (s_n) est alterné, donc s_n et s_{n+1} sont non nuls et de signes opposés, donc $r_n > 0$.
Pour $n \geq 1$, $-1 + \dfrac{a_{n-1}}{r_{n-1}} = r_n > 0$, donc $\dfrac{a_{n-1}}{r_{n-1}} > 1$ puis $r_{n-1} < a_{n-1}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n < a_n$.
◇ $0 \leq r_n \leq a_n$ et $\sum a_n$ converge, donc $\sum r_n$ converge également.
En particulier, $r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{|s_{n+1}|}{|s_n|} = r_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors, d'après le critère de d'Alembert, $\sum |s_n|$ converge et $\sum s_n$ converge absolument.

11°)
◇ f_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, car $a_n > 0$ et elle est dérivable. Par composition, g_n est aussi dérivable et monotone. Elle est croissante si n est impair et décroissante si n est pair.
◇ $g_{n+1} = g_n \circ f_{n+1}$, donc pour $x \geq 0$, $g'_{n+1}(x) = f'_{n+1}(x) g'_n(f_{n+1}(x))$,
avec $f'_{n+1}(x) = \dfrac{-a_{n+1}}{(1+x)^2}$, donc $|g'_{n+1}(x)| \leq |a_{n+1}||g'_n(f_{n+1}(x))|$.
On en déduit par récurrence sur n que, pour tout $x \geq 0$, $|g'_n(x)| \leq a_0 a_1 \cdots a_n$. En effet, pour $n = 0$, $|g'_0(x)| = \dfrac{a_0}{(1+x)^2} \leq a_0$, donc l'initialisation de la récurrence est valide.
◇ Soit $n \geq 1$. $|p_n - p_{n-1}| = |g_{n-1}(f_n(0)) - g_{n-1}(0)| = |g'_{n-1}(a)||f_n(0)|$ où $a \in]0, f_n(0)[$ d'après l'égalité des accroissements finis, or $|f_n(0)| = a_n$, donc d'après l'inégalité précédente, $|p_n - p_{n-1}| \leq a_0 a_1 \cdots a_n$.

12°) ◇ Soit $n \geq 1$. $r_n = -1 + \dfrac{a_{n-1}}{r_{n-1}}$ donc $r_{n-1} = \dfrac{a_{n-1}}{1 + r_n} = f_{n-1}(r_n)$.
On en déduit par récurrence que $r_0 = g_{n-1}(r_n)$.
Or $r_n \in]0, a_n[$ et g_{n-1} est strictement monotone, donc $r_0 = g_{n-1}(r_n) \in]g_{n-1}(0), g_{n-1}(a_n)[$.
Mais $g_{n-1}(0) = p_{n-1}$ et $g_{n-1}(a_n) = g_{n-1}(f_n(0)) = g_n(0) = p_n$, donc $r_0 \in]p_{n-1}, p_n[$.
◇ $\sum a_n$ converge, donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq N$, $0 < a_n \leq \frac{1}{2}$. Alors, d'après la question précédente, pour tout $n \geq N$,
$|p_n - p_{n-1}| \leq A(\frac{1}{2})^{n-N+1}$, où $A = \displaystyle\prod_{k=0}^{N-1} a_k$.
Ainsi, $p_n - p_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, or $|p_n - r_0| \leq |p_n - p_{n-1}|$, donc $p_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} r_0$.