Résumé de cours :
Semaine 28, du 9 mai au 13.

1 Matrice d'une application linéaire (suite)

Propriété. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, munis de bases e et f et soit $u \in L(E,F)$. Alors $\text{rg}(\text{mat}(u,e,f)) = \text{rg}(u)$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives $p > 0$ et $n > 0$. Soient $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $f = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F.
L'application $\begin{array}{ccc} L(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) \\ u & \longmapsto & \text{mat}(u,e,f) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Théorème. Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, munis de bases e, f et g. Soient $u \in L(E,F)$ et $v \in L(F,G)$. Alors, $\text{mat}(v \circ u, e, g) = \text{mat}(v,f,g) \times \text{mat}(u,e,f)$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives $p > 0$ et $n > 0$, munis des bases $e = (e_1, \dots, e_p)$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$, et soit $u \in L(E,F)$.
On note M la matrice de u dans les bases e et f.
Soit $(x,y) \in E \times F$. On note X la matrice colonne des coordonnées de x dans la base e, et Y celle des coordonnées de y dans la base f. Alors,

$$\boxed{u(x) = y \Longleftrightarrow MX = Y.}$$

Propriété. On reprend les notations précédentes. Lorsque $n = p$, u est un isomorphisme si et seulement si M est une matrice inversible et dans ce cas, $\text{mat}(u,e,f)^{-1} = \text{mat}(u^{-1}, f, e)$.

Propriété. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n, muni d'une base e. L'application $\begin{array}{ccc} L(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \text{mat}(u,e) \end{array}$ est un isomorphisme d'algèbres.

2 Les systèmes linéaires

2.1 Trois interprétations d'un système linéaire

Définition. Une équation linéaire à p inconnues scalaires est une équation de la forme
$(E)\ :\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_p x_p = b$, où $\alpha_1, \dots, a_p, b \in \mathbb{K}$ sont des paramètres, et où $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{K}$ sont les inconnues.

Notation. Fixons $(n,p) \in \mathbb{N}^{*2}$ et considérons un système linéaire à n équations et p inconnues, c'est-à-dire un système d'équations de la forme suivante :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{cccccc} \alpha_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{1,p}x_p & = b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & \\ \alpha_{i,1}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{i,p}x_p & = b_i \\ \vdots & & & & \vdots & \\ \alpha_{n,1}x_1 & + & \cdots & + & \alpha_{n,p}x_p & = b_n \end{array} \right. ,$$

où, pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,p\}$, $\alpha_{i,j} \in \mathbb{K}$, pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, $b_i \in \mathbb{K}$, les p inconnues étant $x_1,\ldots,x_p$, éléments de $\mathbb{K}$.

Le vecteur $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est appelé le second membre du système, ou bien le membre constant. Lorsqu'il est nul, on dit que le système est homogène.

Première interprétation. *Combinaison linéaire de vecteurs.*

Notons $C_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{n,1} \end{pmatrix}$, $C_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{1,2} \\ \vdots \\ \alpha_{i,2} \\ \vdots \\ \alpha_{n,2} \end{pmatrix}$, …, $C_p = \begin{pmatrix} \alpha_{1,p} \\ \vdots \\ \alpha_{i,p} \\ \vdots \\ \alpha_{n,p} \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Il s'agit de $p+1$ vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Alors $(S) \Longleftrightarrow x_1C_1 + x_2C_2 + \cdots + x_pC_p = B$.

Définition. On dit que (S) est ***compatible*** si et seulement s'il admet au moins une solution.

Propriété. (S) est compatible si et seulement si $B \in \mathrm{Vect}(C_1,\ldots,C_p)$.

Deuxième interprétation. *Matricielle.* Notons M la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont C_1, …, C_p, et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$. Alors $(S) \Longleftrightarrow MX = B$.

Définition. On dit que (S) est un ***système de Cramer*** si et seulement si $n = p$ et si M est inversible. Dans ce cas, (S) admet une unique solution.

Troisième interprétation. *A l'aide d'une application linéaire.*
Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions p et n munis de bases
$e = (e_1,\ldots,e_p)$ et $f = (f_1,\ldots,f_n)$. On note u l'unique application linéaire de $L(E,F)$ telle que $\mathrm{mat}(u,e,f) = M$, x le vecteur de E dont les coordonnées dans e sont X et b le vecteur de F dont les coordonnées dans f sont B. Alors $(S) \Longleftrightarrow u(x) = b$.

Définition. On dit que (S) est un ***système homogène*** si et seulement si $b = 0$.

Définition. Le système homogène associé à (S) est $(S_H)\ : u(x) = 0$.

Propriété. L'ensemble des solutions de (S_H) est $\mathrm{Ker}(u)$.
C'est un sous-espace vectoriel de dimension $p - r$, où r désigne le rang de u (ou de M).

2.2 Les opérations élémentaires

Définition. On appelle manipulations ou opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice, les applications de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$ dans $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$ suivantes :

1) Ajouter à une ligne le multiple d'une autre, opération notée : $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$, où $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. C'est une transvection.
2) Multiplier une ligne par un scalaire non nul, notée : $L_i \longleftarrow \alpha L_i$, où $\alpha \in \mathbb{K}^*$. C'est une affinité.
3) Permuter deux lignes, notée : $L_i \longleftrightarrow L_j$, où $i \neq j$. C'est une transposition.

On définirait de même les opérations sur les colonnes.

Propriété. Si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $P_{\sigma\sigma'} = P_\sigma P_{\sigma'}$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété.
En notant $(E_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,n\}^2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$ avec $i \neq j$,

$$L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) \\ M & \longmapsto & (I_n + \lambda E_{i,j})M \end{array}$$

$$L_i \longleftarrow \lambda L_i : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) \\ M & \longmapsto & (I_n + (\lambda-1)E_{i,i})M \end{array}$$

$$L_i \longleftrightarrow L_j : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) \\ M & \longmapsto & P_{(i,j)}M \end{array}$$

De même, en notant $(E_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,p\}^2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $(i,j) \in \{1,\ldots,p\}^2$ avec $i \neq j$, alors

$$C_i \longleftarrow C_i + \lambda C_j : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) \\ M & \longmapsto & M(I_p + \lambda E_{j,i}) \end{array}$$

$$C_i \longleftarrow \lambda C_i : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) \\ M & \longmapsto & M(I_p + (\lambda-1)E_{i,i}) \end{array} .$$

$$C_i \longleftrightarrow C_j : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) \\ M & \longmapsto & MP_{(i,j)} \end{array}$$

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si l'on effectue une série d'opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice M, alors on a multiplié M à gauche par une certaine matrice inversible.
Si l'on effectue une série d'opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice M, alors on a multiplié M à droite par une certaine matrice inversible.

Notation. Soit (S) : $MX = B$ un système linéaire de matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et de vecteur constant $B \in \mathbb{K}^n$. On appellera matrice globale de (S) la matrice à n lignes et $p+1$ colonnes dont les p premières colonnes sont celles de M et dont la dernière colonne est égale à B.

Propriété. Soient $(S) : MX = B$ et $(S') : M'X = B'$. On suppose que l'on peut passer de la matrice **globale** de (S) à celle de (S') à l'aide d'une série d'opérations élémentaires portant uniquement sur les lignes. Alors ces deux systèmes sont équivalents.

Propriété. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que l'on peut transformer, par des opérations élémentaires portant uniquement sur les lignes, la matrice blocs $\boxed{M}\boxed{I_n} \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,2n)$ en une matrice de la forme $\boxed{I_n}\boxed{N} \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,2n)$. Alors M est inversible et $M^{-1} = N$.
Il faut savoir le démontrer.

2.3 Méthode du pivot de Gauss

Notation. On souhaite résoudre le système $(S) : MX = B$ de n équations à p inconnues. La matrice globale du système sera notée $(a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p+1)$. Pour simplifier les notations, si on transforme $(a_{i,j})$ par des opérations élémentaires, le résultat sera encore noté $(a_{i,j})$.

But : Transformer $(a_{i,j})$ de sorte que : $\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,p\} \quad i > j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$.
Pour cela, si l'on suppose que les $r-1$ premières colonnes de $(a_{i,j})$ sont déjà bien formées :
Premier cas : $\forall i \in \{r,\dots,n\} \quad a_{i,r} = 0$: on passe à l'étape suivante.
Second cas : $\exists i_0 \in \{r,\dots,n\} \quad a_{i_0,r} \neq 0$: On dit que $a_{i_0,r}$ est le pivot de l'étape r.
On permute d'abord les lignes L_{i_0} et L_r. Ainsi $a_{r,r} \neq 0$. Ensuite on effectue la série d'opérations élémentaires : for i from $r+1$ to n do $L_i \longleftarrow L_i - \frac{a_{i,r}}{a_{r,r}} L_r$ *od*.
Il faut être capable de présenter cet algorithme en détails.

Remarque. Comme on n'effectue que des opérations élémentaires sur les lignes, les lignes de la matrice finale du système engendrent le même espace vectoriel que les lignes de la matrice initiale. La méthode du pivot permet donc de déterminer une base de l'espace vectoriel engendré par les lignes (ou les colonnes en opérant sur les colonnes) d'une matrice.
La méthode du pivot permet aussi de déterminer une base de l'image d'une application linéaire : On considère sa matrice dans des bases données et on détermine une base de ses vecteurs colonnes en appliquant la méthode du pivot au niveau des colonnes.

2.4 Méthode du pivot total

But : Transformer $(a_{i,j})$ de sorte qu'il existe $s \in \{0, \min(n,p)\}$ vérifiant
$\forall (i,j) \in \mathbb{N}_s^2,\ i > j \Longrightarrow a_{i,j} = 0$, $\forall r \in \mathbb{N}_s,\ a_{r,r} \neq 0$ et $\forall (i,j) \in \{s+1,\dots,n\} \times \{1,\dots,p\},\ a_{i,j} = 0$.
La seule différence par rapport à l'algorithme précédent est qu'on accepte de choisir le pivot de l'étape r parmi les $a_{i,j}$ pour $(i,j) \in \{r,\dots,n\} \times \{r,\dots,p\}$. Notons $a_{i_0,j_0} \neq 0$ le pivot choisi. On échange C_r et C_{j_0} puis on applique les mêmes opérations élémentaires que dans l'algorithme précédent.

$\diamond$ À la fin de l'algorithme, le système est compatible si et seulement si $\forall i \in \{s+1,\dots,n\} \quad a_{i,p+1} = 0$: c'est un système d'équations de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de (S).
Si la matrice de (S) est celle d'une application linéaire u dans des bases e et f, ces conditions de compatibilité constituent un système d'équations de $Im(u)$ dans la base f.

Définition. Résoudre un système (S) : $\quad MX = B$ à n équations et p inconnues, c'est déterminer une partie I de $\{1,\dots,p\}$ et une famille $(b_{i,j})_{(i,j)\in(\{1,\dots,p\}\setminus I)\times I}$ telles que :
$\forall i \in \{1,\dots,p\} \setminus I,\ x_i = c_i + \sum_{j\in I} b_{i,j} x_j$. Les $(x_j)_{j\in I}$ sont les inconnues principales et les $(x_i)_{i\in\{1,\dots,p\}\setminus I}$ sont les inconnues secondaires. En résumé, résoudre un système, c'est exprimer les inconnues secondaires en fonction des inconnues principales.

2.5 Méthode de Gauss-Jordan, lorsque le système est de Cramer

But : Transformer la matrice globale en une matrice dont les n premières colonnes correspondent à la matrice I_n, en utilisant uniquement des opérations élémentaires sur les lignes.
Pour cela, comme pour le pivot partiel, à l'étape r, on choisit un pivot $a_{i_0,r} \neq 0$ où $r \leq i_0 \leq n$, ce qui est possible car le système est de Cramer, puis on effectue : $L_{i_0} \longleftrightarrow L_r$,
$\forall i \in \{1,\dots,n\} \setminus \{r\},\ L_i \longleftarrow L_i - \frac{a_{i,r}}{a_{r,r}} L_r$ et $L_r \longleftarrow \frac{1}{a_{r,r}} L_r$.
Il faut être capable de présenter cet algorithme en détails.

Corollaire. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si elle est le produit de matrices de transvections, d'affinités et de transpositions.

3 Sommes et sommes directes

Définition. Si $E_i =$ sev de E, $E_1 + \cdots + E_k = \text{Vect}\left(\bigcup_{i=1}^{k} E_i\right)$.

Propriété. $E_1 + \cdots + E_k = \left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i \ / \ \forall i \in \{1, \ldots, k\} \quad x_i \in E_i \right\}$.

Définition. $\sum_{i=1}^{k} E_i$ est ***directe***, et alors notée $\bigoplus_{1 \leq i \leq k} E_i$, si et seulement si

$\forall (x_1, \ldots, x_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k \quad \left(\sum_{i=1}^{k} x_i = 0 \Longrightarrow (\forall i \in \{1, \ldots, k\} \ \ x_i = 0) \right)$,

ce qui est équivalent à : $\forall x \in \sum_{i=1}^{k} E_i$, $\exists! (x_1, \ldots, x_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k \quad x = \sum_{i=1}^{k} x_i$.

4 Supplémentaires d'un sous-espace vectoriel

Propriété. $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.

Propriété. Si $x \notin F$, F et $\mathbb{K}x$ sont en somme directe.
Deux droites vectorielles distinctes sont en somme directe.

Définition. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont ***supplémentaires*** (dans E) si et seulement si $E = F \oplus G$, i.e $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$, i.e $\forall x \in E$, $\exists! (x_1, x_2) \in F \times G$, $x = x_1 + x_2$.

Propriété. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. F admet au moins un supplémentaire, et pour tout supplémentaire G de F, $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Remarque. En dimension quelconque, tout sous-espace vectoriel de E possède au moins un supplémentaire, si l'on accepte l'axiome du choix.

Propriété. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) : \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \ \ M = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.
De plus $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2}$.
Il faut savoir le démontrer.

5 Propriétés des sommes directes

5.1 Un moyen de définir une application linéaire

Théorème. Soit $(E_i)_{1 \leq i \leq k}$ une famille de k sous-espaces vectoriels de E telle que $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq k} E_i$. Soit F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, soit u_i une application linéaire de E_i dans F.
Il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, la restriction de u à E_i est égale à u_i. Ainsi, pour définir une application linéaire u de E dans F, il suffit de préciser ses restrictions aux sous-espaces vectoriels E_i.

5.2 Formules dimensionnelles

Propriété. $\dim\left(\sum_{i=1}^{k} E_i \right) \leq \sum_{i=1}^{k} \dim(E_i)$, $\boxed{\text{avec égalité si et seulement si la somme est directe}}$.
Il faut savoir le démontrer.