

Filtrage linéaire

Julien Cubizolles

Lycée Louis le Grand

vendredi 3 décembre 2021

- Tout signal (électrique, sonore...) peut être altéré, déformé lors de son émission, propagation, lecture.

- ▶ Tout signal (électrique, sonore...) peut être altéré, déformé lors de son émission, propagation, lecture.
- ▶ Pour les phénomènes linéaire il s'agit d'une modification d'amplitude et de phase de chacun des harmoniques, qui ne dépend que sa pulsation ω , et pas de son amplitude.

- ▶ Tout signal (électrique, sonore...) peut être altéré, déformé lors de son émission, propagation, lecture.
- ▶ Pour les phénomènes linéaire il s'agit d'une modification d'amplitude et de phase de chacun des harmoniques, qui ne dépend que sa pulsation ω , et pas de son amplitude.
- ▶ Le système physique réalise un **filtrage linéaire**, caractérisé par une **fonction de transfert**

- Filtrage recherché par construction
- Le réglage graves/aigus/ (karaoke ?) d'un amplificateur de hifi correspond à une amplification sélective des fréquences basses ou élevées,
 - Le **circuit d'accord** d'un poste de radio permet de sélectionner par filtrage un domaine de fréquence très étroit correspondant à une seule station émettrice sans être gêné par les autres stations.

- Défauts non contrôlés
- ▶ le son est différemment atténué au cours de la traversée d'un mur : les aigus sont filtrés.
 - ▶ un haut-parleur mécanique est incapable de reproduire fidèlement des sons très aigus, tout comme l'oreille est incapable de les percevoir.

1. Transformation d'un signal

2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire

3. Diagramme de Bode d'un filtre

4. Filtres du 1^{er} ordre

5. Exemples de filtres du 2^e ordre

1. Transformation d'un signal

1.1 Spectre

1.2 Filtrage par un quadripôle

2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire

3. Diagramme de Bode d'un filtre

4. Filtres du 1^{er} ordre

5. Exemples de filtres du 2^e ordre

Décomposition en sinusôides : fonctions périodiques

Fonctions périodiques : série de Fourier

La plupart des fonctions $Y(t)$ T -périodiques peuvent être décomposées en une **série de Fourier**¹ :

$$Y(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} Y_p \cos(\omega_p t + \psi_p) \quad \text{avec : } \omega_p = \frac{2\pi p}{T}$$

La fonction $Y_p \cos(\omega_p t + \psi_p)$, $p > 1$ est dite **harmonique de rang p** . Celle de rang 1 est nommée **harmonique fondamental**.

J. B. F. Fourier, mathématicien français (1768-1830).

Décomposition en sinusôides : fonctions périodiques

Fonctions périodiques : série de Fourier

La plupart des fonctions $Y(t)$ T -périodiques peuvent être décomposées en une **série de Fourier**¹ :

$$Y(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} Y_p \cos(\omega_p t + \psi_p) \quad \text{avec : } \omega_p = \frac{2\pi p}{T}$$

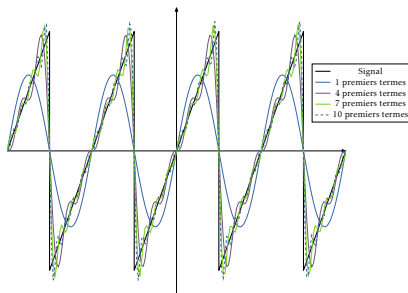
La fonction $Y_p \cos(\omega_p t + \psi_p)$, $p > 1$ est dite **harmonique de rang p** . Celle de rang 1 est nommée **harmonique fondamental**.

J. B. F. Fourier, mathématicien français (1768-1830).

- ▶ chaque **composante de Fourier/harmonique** est caractérisé par son amplitude Y_p et sa phase ψ_p (on a $\psi_0 = 0$ par convention)
- ▶ Y_0 est la **composante continue** (stationnaire) du signal, ie sa valeur moyenne :

$$\langle s \rangle = Y_0$$

Décomposition en sinusôides : fonctions périodiques

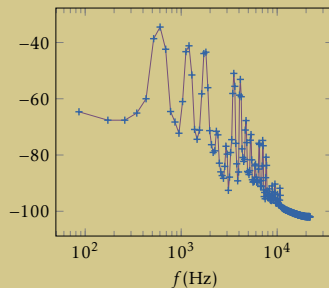


Construction :

- ▶ animation
- ▶ phet normal modes et
- ▶ phet Fourier

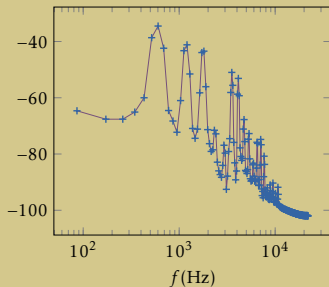
Représentation

Exemple (Spectre d'une corde de guitare)



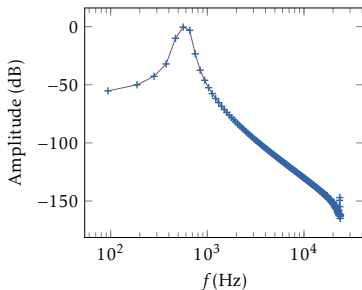
Représentation

Exemple (Spectre d'une corde de guitare)



- ▶ Abscisse = fréquence, ordonnée = amplitude
- ▶ les pulsations vont de 0 (continu/stationnaire) à l'infini, les amplitudes Y_p décroissent globalement quand $p \rightarrow \infty$
- ▶ on obtient ce spectre avec un oscilloscope numérique ou un **analyseur de spectre**

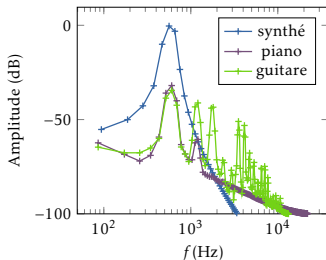
Spectre d'un signal



sinusoïde pure

- ▶ une seule composante de Fourier
- ▶ l'analyse numérique d'un son (de durée finie, avec un échantillonnage discret) ne peut pas donner une amplitude nulle pour les autres fréquences
- ▶ on mesure un pic très marqué

Spectre d'un signal



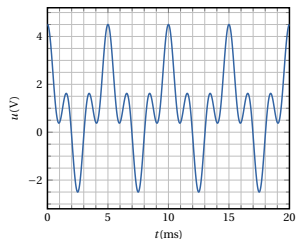
- ▶ les trois sons ont la même hauteur (ré4 587 Hz)
- ▶ le son du synthétiseur est le plus pur
- ▶ celui de la guitare contient le plus d'harmoniques

Exercice : décomposition de Fourier et valeur efficace

On considère le signal représenté sur la figure ci-dessous, qu'on cherche à décomposer selon :

$$u(t) = U_0 + U_1 \cos(2\pi f_1 t) + U_p \cos(2\pi f_p t)$$

- 1 Déterminer graphiquement la fréquence du fondamental f_1 et le rang p de l'harmonique f_p .
- 2 En déduire les valeurs du décalage U_0 et des amplitudes U_1 et U_p .
- 3 En déduire le carré de la valeur efficace U_{eff}^2 du signal en fonction de U_0^2 , U_1^2 et U_p^2 .
- 4 Que deviendrait U_{eff} si on avait :



$$u(t) = U_0 + U_1 \cos(2\pi f_1 t) + U_p \cos(2\pi f_p t + \pi/2)?$$

Quelle serait alors l'allure du signal ?

Correction

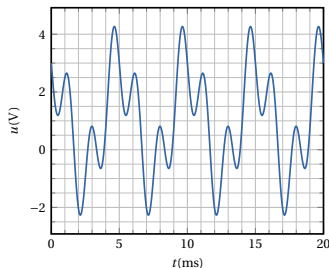
phet Fourier ou animation

1 $f_1 = 200\text{Hz}$, $n = 3$

2 $U_0 = 1\text{V}$, $U_1 = 2\text{V}$,
 $U_3 = 1,5\text{V}$

3 $u_{\text{eff}}^2 = U_0^1 + U_1^2/2 + U_3^2/2.$

4 u_{eff} inchangé



Égalité de Parseval

- ▶ la puissance moyenne associée à un signal $s(t)$ est proportionnelle au carré de la valeur efficace de l'amplitude du signal :

Égalité de Parseval

- la puissance moyenne associée à un signal $s(t)$ est proportionnelle au carré de la valeur **efficace** de l'amplitude du signal :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = RI_{eff}^2 = GU_{eff}^2$$

Égalité de Parseval

- ▶ la puissance moyenne associée à un signal $s(t)$ est proportionnelle au carré de la valeur efficace de l'amplitude du signal :
 - ▶ $\langle \mathcal{P} \rangle = RI_{eff}^2 = GU_{eff}^2$
 - ▶ idem en acoustique ou \mathcal{P} est proportionnelle au carré de la valeur efficace de la surpression

Égalité de Parseval

- ▶ la puissance moyenne associée à un signal $s(t)$ est proportionnelle au carré de la valeur efficace de l'amplitude du signal :
 - ▶ $\langle \mathcal{P} \rangle = RI_{eff}^2 = GU_{eff}^2$
 - ▶ idem en acoustique ou \mathcal{P} est proportionnelle au carré de la valeur efficace de la surpression
- ▶ on montre que :

Égalité de Parseval

- ▶ la puissance moyenne associée à un signal $s(t)$ est proportionnelle au carré de la valeur efficace de l'amplitude du signal :
 - ▶ $\langle \mathcal{P} \rangle = RI_{eff}^2 = GU_{eff}^2$
 - ▶ idem en acoustique où \mathcal{P} est proportionnelle au carré de la valeur efficace de la surpression
- ▶ on montre que :

Théorème (de Parseval)

Le carré de la valeur efficace d'un signal $s(t)$ périodique est la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques :

$$s_{eff}^2 = Y_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty} Y_{p,eff}^2 = Y_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Y_p^2}{2}$$

Égalité de Parseval

- ▶ la puissance moyenne associée à un signal $s(t)$ est proportionnelle au carré de la valeur efficace de l'amplitude du signal :
 - ▶ $\langle \mathcal{P} \rangle = RI_{eff}^2 = GU_{eff}^2$
 - ▶ idem en acoustique où \mathcal{P} est proportionnelle au carré de la valeur efficace de la surpression
- ▶ on montre que :

Théorème (de Parseval)

Le carré de la valeur efficace d'un signal $s(t)$ périodique est la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques :

$$s_{eff}^2 = Y_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty} Y_{p,eff}^2 = Y_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Y_p^2}{2}$$

Égalité de Parseval

- la puissance moyenne associée à un signal $s(t)$ est proportionnelle au carré de la valeur efficace de l'amplitude du signal :
 - $\langle \mathcal{P} \rangle = RI_{eff}^2 = GU_{eff}^2$
 - idem en acoustique ou \mathcal{P} est proportionnelle au carré de la valeur efficace de la surpression
- on montre que :

Théorème (de Parseval)

Le carré de la valeur efficace d'un signal $s(t)$ périodique est la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques :

$$s_{eff}^2 = Y_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty} Y_{p,eff}^2 = Y_0^2 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Y_p^2}{2}$$

- la puissance d'un signal est donc la somme des puissances de chacun de ses harmoniques, quels que soient leurs déphasages

Décomposition en sinusôides : fonctions quelconques

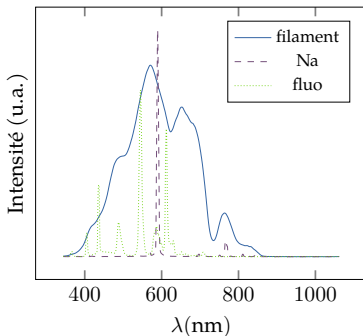
- ▶ d'une certaine manière une fonction non périodique est une fonction de **période infinie**, donc de **pulsation nulle**

Décomposition en sinusôides : fonctions quelconques

- ▶ d'une certaine manière une fonction non périodique est une fonction de **période infinie**, donc de **pulsation nulle**
- ▶ au lieu de ne prendre que les pulsations multiples de ω , on prend **toutes** les pulsations en effectuant une somme continue (intégrale)

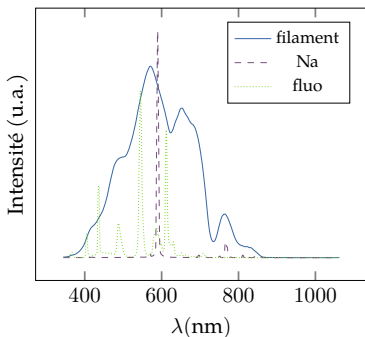
Décomposition en sinusôides : fonctions quelconques

- ▶ d'une certaine manière une fonction non périodique est une fonction de **période infinie**, donc de **pulsation nulle**
- ▶ au lieu de ne prendre que les pulsations multiples de ω , on prend **toutes** les pulsations en effectuant une somme continue (intégrale)



Décomposition en sinusôides : fonctions quelconques

- ▶ d'une certaine manière une fonction non périodique est une fonction de **période infinie**, donc de **pulsation nulle**
- ▶ au lieu de ne prendre que les pulsations multiples de ω , on prend **toutes** les pulsations en effectuant une somme continue (intégrale)

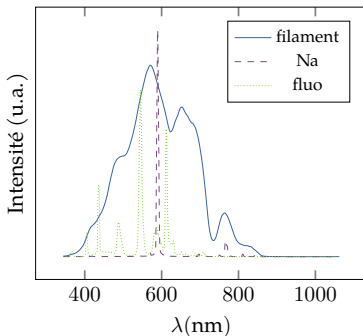


Lampe à filament

- ▶ spectre (en λ) continu
- ▶ pas de fondamental/harmoniques

Décomposition en sinusôides : fonctions quelconques

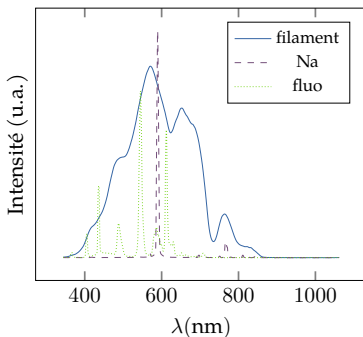
- ▶ d'une certaine manière une fonction non périodique est une fonction de **période infinie**, donc de **pulsation nulle**
- ▶ au lieu de ne prendre que les pulsations multiples de ω , on prend **toutes** les pulsations en effectuant une somme continue (intégrale)



Lampe à décharge (Na) :
spectre discret avec une raie
principale (+ quelques détails
pas discernables ici)

Décomposition en sinusôides : fonctions quelconques

- ▶ d'une certaine manière une fonction non périodique est une fonction de **période infinie**, donc de **pulsation nulle**
- ▶ au lieu de ne prendre que les pulsations multiples de ω , on prend **toutes** les pulsations en effectuant une somme continue (intégrale)



Tube fluorescent

- ▶ spectre discret avec des raies plus prononcées
- ▶ dues à des poudres choisies pour la teinte
- ▶ pas de fondamental/harmoniques

1. Transformation d'un signal

1.1 Spectre

1.2 Filtrage par un quadripôle

2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire

3. Diagramme de Bode d'un filtre

4. Filtres du 1^{er} ordre

5. Exemples de filtres du 2^e ordre

On étudie des composants modifiant :

- ▶ l'amplitude
- ▶ la phase

des harmoniques pour **filtrer** un signal électronique

Régimes établis

On travaillera uniquement en régimes établis :

Régime stationnaire $U = cste, I = cste$

Régime sinusoïdal établi $\underline{U_m} = \underline{cste}, \underline{I_m} = \underline{cste}$

Schéma électronique d'un quadripôle

- ▶ le plus souvent : $i_A = -i_B$, ($i_C = -i_D$)

Schéma électronique d'un quadripôle

- ▶ le plus souvent : $i_A = -i_B$, ($i_C = -i_D$)
- ▶ on distingue une entrée (u_e, i_e) et une sortie u_s, i_s

Schéma électronique d'un quadripôle

- ▶ le plus souvent : $i_A = -i_B$, ($i_C = -i_D$)
- ▶ on distingue une entrée (u_e, i_e) et une sortie u_s, i_s

Schéma électronique d'un quadripôle

en régime établi :

Définition (Quadripôle linéaire)

Un quadripôle est dit **linéaire** si les tensions d'entrée $\underline{U_{em}}$ et de sortie $\underline{U_{sm}}$ s'expriment comme des combinaisons linéaires des intensités des courants d'entrée $\underline{I_{em}}$ et de sortie $\underline{I_{sm}}$.

Un dipôle :

actif branché en entrée est **une source**,
passif branché en sortie est **une charge**.

Impédances d'entrée et de sortie

pour les cas qu'on rencontrera :

- ▶ son entrée est modélisable comme une impédance, dite d'**entrée**,
- ▶ sa sortie comme un générateur linéaire à source commandée, d'impédance interne dite **de sortie**

Impédances d'entrée et de sortie

pour les cas qu'on rencontrera :

- ▶ son entrée est modélisable comme une impédance, dite d'**entrée**,
- ▶ sa sortie comme un générateur linéaire à source commandée, d'impédance interne dite **de sortie**

$$\underline{Z_e} = \frac{\underline{U_{em}}}{\underline{I_{em}}} \quad \underline{U_{sm}} = \underline{E_s} - \underline{Z_s I_{sm}}$$

Opérateurs idéaux

Définition (Opérateurs idéaux)

Dans les quadripôles fondamentaux, le signal de sortie est **proportionnel** au signal d'entrée. L'opérateur est dit **idéal** si :

- ▶ le signal fourni par la source branchée en entrée **n'est pas perturbé par le quadripôle**,
- ▶ le signal de sortie est **indépendant des caractéristiques de la charge** branchée en sortie.

Amplificateurs et convertisseurs idéaux

Définition (Amplificateurs et convertisseurs idéaux)

On distingue :

Amplificateur idéal de tension $\underline{U_{sm}} = k\underline{U_{em}} : \underline{Y_e} = 0; \underline{Z_s} = 0,$

Convertisseur idéal tension \rightarrow courant $\underline{I_{sm}} = l\underline{U_{em}} : \underline{Y_e} = 0; \underline{Y_s} = 0,$

Convertisseur idéal courant \rightarrow tension $\underline{U_{sm}} = \frac{1}{l}\underline{I_{em}} : \underline{Z_e} = 0; \underline{Z_s} = 0,$

Amplificateur idéal de courant $\underline{I_{sm}} = k\underline{I_{em}} : \underline{Z_e} = 0; \underline{Y_s} = 0.$

Amplificateurs et convertisseurs idéaux

Définition (Amplificateurs et convertisseurs idéaux)

On distingue :

Amplificateur idéal de tension $\underline{U_{sm}} = k \underline{U_{em}} : \underline{Y_e} = 0; \underline{Z_s} = 0,$

Convertisseur idéal tension \rightarrow courant $\underline{I_{sm}} = l \underline{U_{em}} : \underline{Y_e} = 0; \underline{Y_s} = 0,$

Convertisseur idéal courant \rightarrow tension $\underline{U_{sm}} = \frac{1}{l} \underline{I_{em}} : \underline{Z_e} = 0; \underline{Z_s} = 0,$

Amplificateur idéal de courant $\underline{I_{sm}} = k \underline{I_{em}} : \underline{Z_e} = 0; \underline{Y_s} = 0.$

- la constante de proportionnalité peut être complexe, traduisant un déphasage entre l'entrée et la sortie

Amplificateurs et convertisseurs idéaux

Définition (Amplificateurs et convertisseurs idéaux)

On distingue :

Amplificateur idéal de tension $\underline{U_{sm}} = k \underline{U_{em}} : \underline{Y_e} = 0; \underline{Z_s} = 0,$

Convertisseur idéal tension → courant $\underline{I_{sm}} = l \underline{U_{em}} : \underline{Y_e} = 0; \underline{Y_s} = 0,$

Convertisseur idéal courant → tension $\underline{U_{sm}} = \frac{1}{l} \underline{I_{em}} : \underline{Z_e} = 0; \underline{Z_s} = 0,$

Amplificateur idéal de courant $\underline{I_{sm}} = k \underline{I_{em}} : \underline{Z_e} = 0; \underline{Y_s} = 0.$

- ▶ la constante de proportionnalité peut être complexe, traduisant un déphasage entre l'entrée et la sortie
- ▶ elle dépendra de la fréquence en RSE traduisant un comportement différent à haute et basse fréquence : on réalise un **filtrage** du signal

Amplificateurs et convertisseurs idéaux

Définition (Amplificateurs et convertisseurs idéaux)

On distingue :

Amplificateur idéal de tension $\underline{U_{sm}} = k\underline{U_{em}} : \underline{Y_e} = 0; \underline{Z_s} = 0,$

Convertisseur idéal tension \rightarrow courant $\underline{I_{sm}} = l\underline{U_{em}} : \underline{Y_e} = 0; \underline{Y_s} = 0,$

Convertisseur idéal courant \rightarrow tension $\underline{U_{sm}} = \frac{1}{l}\underline{I_{em}} : \underline{Z_e} = 0; \underline{Z_s} = 0,$

Amplificateur idéal de courant $\underline{I_{sm}} = k\underline{I_{em}} : \underline{Z_e} = 0; \underline{Y_s} = 0.$

- ▶ la puissance est toujours nulle en entrée ($\underline{U_{em}} = 0$ ou $\underline{I_{em}} = 0$)
- ▶ la puissance en sortie est arbitrairement grande ($\underline{U_{sm}}$ indépendant de $\underline{Y_s}$ par exemple)
- ▶ il y a un gain en énergie (infini!) : il faut nécessairement être branché sur une alimentation qui fournit l'énergie

Quadripôle suiveur

Définition (Quadripôle suiveur)

Un **quadripôle suiveur** est un amplificateur idéal réalisant $\underline{U}_{sm} = \underline{U}_{em}$:

- ▶ en prélevant un courant nul de la source,
- ▶ en pouvant fournir un courant arbitrairement grand à la charge.

Quadripôle suiveur

Définition (Quadripôle suiveur)

Un **quadripôle suiveur** est un amplificateur idéal réalisant $\underline{U}_{sm} = \underline{U}_{em}$:

- ▶ en prélevant un courant nul de la source,
 - ▶ en pouvant fournir un courant arbitrairement grand à la charge.
-
- ▶ c'est un cas particulier d'ampli de tension avec $\underline{k} = 1$
 - ▶ réalisé par un composant **actif** (montage à amplificateur opérationnel)
 - ▶ utilisé par exemple pour corriger les défauts de quadripôles plus intéressants

1. Transformation d'un signal
2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire
3. Diagramme de Bode d'un filtre
4. Filtres du 1^{er} ordre
5. Exemples de filtres du 2^e ordre

1. Transformation d'un signal

2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire

2.1 Définition

2.2 Lien avec l'équation différentielle

2.3 Exercice : le circuit RLC série vu comme un filtre

3. Diagramme de Bode d'un filtre

4. Filtres du 1^{er} ordre

5. Exemples de filtres du 2^e ordre

Fonction de transfert

Définition (Fonction de transfert)

On définit la **fonction de transfert** d'un quadripôle linéaire couplant une grandeur X_e d'entrée à une grandeur de sortie X_s en RSE à la pulsation ω le quotient : $\underline{H}(j\omega) = \frac{X_{sm}}{X_{em}}$.

Fonction de transfert

dans toute la suite, amplificateur de tension par défaut

Théorème de superposition

- ▶ on étudie la sortie en fonction de l'entrée en RSE
- ▶ le théorème de superposition assure que pour une entrée en régime périodique **quelconque**, la sortie sera la somme des sorties correspondant à chacun des harmoniques séparément

Fraction rationnelle

La fonction de transfert d'un quadripôle linéaire couplant X_e à X_s est une fraction rationnelle en $j\omega$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{X_{sm}}}{\underline{X_{em}}} = \frac{\sum_{p=0}^{n_e} \alpha_p (j\omega)^p}{\sum_{p'=0}^{n_s} \alpha'_{p'} (j\omega)^{p'}}.$$

On nomme **ordre du quadripôle** \underline{H} le maximum de (n_e, n_s)

Fraction rationnelle

La fonction de transfert d'un quadripôle linéaire couplant X_e à X_s est une fraction rationnelle en $j\omega$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{X_{sm}}}{\underline{X_{em}}} = \frac{\sum_{p=0}^{n_e} \alpha_p (j\omega)^p}{\sum_{p'=0}^{n_s} \alpha'_{p'} (j\omega)^{p'}}.$$

On nomme **ordre du quadripôle** \underline{H} le maximum de (n_e, n_s)

- la réponse (sortie/entrée) ne dépend que de ω , pas de l'amplitude de l'entrée

Fraction rationnelle

La fonction de transfert d'un quadripôle linéaire couplant X_e à X_s est une fraction rationnelle en $j\omega$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{X_{sm}}}{\underline{X_{em}}} = \frac{\sum_{p=0}^{n_e} \alpha_p (j\omega)^p}{\sum_{p'=0}^{n_s} \alpha'_{p'} (j\omega)^{p'}}.$$

On nomme **ordre du quadripôle** \underline{H} le maximum de (n_e, n_s)

- ▶ la réponse (sortie/entrée) ne dépend que de ω , pas de l'amplitude de l'entrée
- ▶ stable à haute fréquence pour $n_s \geq n_e$

Fraction rationnelle

La fonction de transfert d'un quadripôle linéaire couplant X_e à X_s est une fraction rationnelle en $j\omega$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{X_{sm}}{X_{em}} = \frac{\sum_{p=0}^{n_e} \alpha_p (j\omega)^p}{\sum_{p'=0}^{n_s} \alpha'_{p'} (j\omega)^{p'}}.$$

On nomme **ordre du quadripôle** \underline{H} le maximum de (n_e, n_s)

- ▶ la réponse (sortie/entrée) ne dépend que de ω , pas de l'amplitude de l'entrée
- ▶ stable à haute fréquence pour $n_s \geq n_e$
- ▶ stable à basse fréquence pour $\alpha'_0 \neq 0$

1. Transformation d'un signal

2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire

2.1 Définition

2.2 Lien avec l'équation différentielle

2.3 Exercice : le circuit RLC série vu comme un filtre

3. Diagramme de Bode d'un filtre

4. Filtres du 1^{er} ordre

5. Exemples de filtres du 2^e ordre

Technique

Lien entre le **comportement fréquentiel** (fonction de transfert) et **temporel** (équation différentielle)

- Fonction de transfert facile à établir à l'aide des impédances complexes :

$$\frac{\underline{X}_{sm}}{\underline{X}_{em}} = \frac{\sum_{p=0}^{n_e} \alpha_p (j\omega)^p}{\sum_{p'=0}^{n_s} \alpha'_{p'} (j\omega)^{p'}} = \underline{H}(j\omega)$$

Technique

Lien entre le **comportement fréquentiel** (fonction de transfert) et **temporel** (équation différentielle)

- Fonction de transfert facile à établir à l'aide des impédances complexes :

$$\frac{\underline{X}_{sm}}{\underline{X}_{em}} = \frac{\sum_{p=0}^{n_e} \alpha_p (j\omega)^p}{\sum_{p'=0}^{n_s} \alpha'_{p'} (j\omega)^{p'}} = \underline{H}(j\omega)$$

- On retrouvera l'équation différentielle en remplaçant $(j\omega)^n$ par $\frac{d^n}{dt^n}$:

$$\sum_{p=0}^{n_e} \alpha_p \frac{d^p x_e}{dt^p} = \sum_{p'=0}^{n_s} \alpha'_{p'} \frac{d^{p'} x_s}{dt^{p'}}$$

Technique

Lien entre le **comportement fréquentiel** (fonction de transfert) et **temporel** (équation différentielle)

- Fonction de transfert facile à établir à l'aide des impédances complexes :

$$\frac{\underline{X}_{sm}}{\underline{X}_{em}} = \frac{\sum_{p=0}^{n_e} \alpha_p (j\omega)^p}{\sum_{p'=0}^{n_s} \alpha'_{p'} (j\omega)^{p'}} = \underline{H}(j\omega)$$

- On retrouvera l'équation différentielle en remplaçant $(j\omega)^n$ par $\frac{d^n}{dt^n}$:

$$\sum_{p=0}^{n_e} \alpha_p \frac{d^p x_e}{dt^p} = \sum_{p'=0}^{n_s} \alpha'_{p'} \frac{d^{p'} x_s}{dt^{p'}}$$

Technique

- ▶ rigoureusement valable si on recherche des solutions périodiques
- ▶ « fonctionne » également pour des solutions non-périodiques (régime libre) si on n'a pas fait de simplifications de la forme :

$$\underline{H} = \frac{1 + j\omega/\omega_0}{1 + j\omega/\omega_0} \underline{F} = \underline{F}$$

1. Transformation d'un signal

2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire

2.1 Définition

2.2 Lien avec l'équation différentielle

2.3 Exercice : le circuit RLC série vu comme un filtre

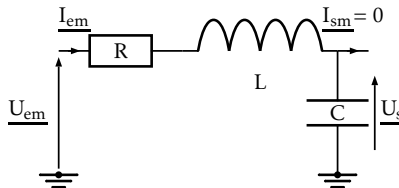
3. Diagramme de Bode d'un filtre

4. Filtres du 1^{er} ordre

5. Exemples de filtres du 2^e ordre

Exercice : le circuit RLC série vu comme un filtre

On réalise un amplificateur de tension à l'aide d'un circuit RLC série comme représenté ci-contre dans lequel par exemple $\underline{U_{em}}$ représente l'amplitude complexe de la tension d'entrée en régime sinusoïdal permanent.



- 1 a Quel intérêt présente l'utilisation en **sortie ouverte**, ie $\underline{I_{sm}} = 0$?
 b L'entrée du quadripôle est-elle idéale ?

- 2 Déterminer l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U_{sm}}}{\underline{U_{em}}}$.

On utilisera la pulsation propre $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et le facteur de qualité Q vérifiant $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$.

- 3 En déduire l'équation différentielle liant $u_s(t)$ à $u_e(t)$.

Correction

En sortie ouverte : diviseur de tension :

$$\frac{U_{cm}}{U_{em}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} \rightarrow \frac{U_{sm}}{U_{em}} = \frac{1}{1 + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2 + \frac{j\omega}{\omega_0 Q}}$$

$$\rightarrow u_e(t) = u_s + \frac{1}{\omega_0 Q} \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 u_s}{dt^2}$$

1. Transformation d'un signal
2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire
- 3. Diagramme de Bode d'un filtre**
4. Filtres du 1^{er} ordre
5. Exemples de filtres du 2^e ordre

1. Transformation d'un signal
2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire
- 3. Diagramme de Bode d'un filtre**
 - 3.1 Fonctions d'un filtre**
 - 3.2 Représentation
4. Filtres du 1^{er} ordre
5. Exemples de filtres du 2^e ordre

Fonctions d'un filtre

Définition (Filtrage d'un signal, bandes passante et coupée)

Un quadripôle linéaire de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ réalise un **filtrage** du signal d'entrée :

en l'amplifiant pour $|\underline{H}(j\omega)| > 1$,

en l'atténuant pour $|\underline{H}(j\omega)| < 1$,

en le déphasant pour $\arg(\underline{H}(j\omega)) \neq 0[2\pi]$

en fonction de sa pulsation ω , indépendamment de son amplitude.

On nomme :

Bande passante le domaine de pulsations que le filtre doit transmettre,

Bande coupée le domaine de pulsations que le filtre doit éliminer (le reste).

Fonctions d'un filtre

Définition (Filtrage d'un signal, bandes passante et coupée)

Un quadripôle linéaire de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ réalise un **filtrage** du signal d'entrée :

en l'amplifiant pour $|\underline{H}(j\omega)| > 1$,

en l'atténuant pour $|\underline{H}(j\omega)| < 1$,

en le déphasant pour $\arg(\underline{H}(j\omega)) \neq 0[2\pi]$

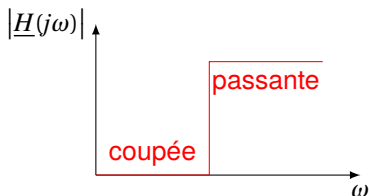
en fonction de sa pulsation ω , indépendamment de son amplitude.

On nomme :

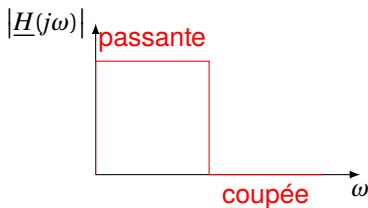
Bande passante le domaine de pulsations que le filtre doit transmettre,

Bande coupée le domaine de pulsations que le filtre doit éliminer (le reste).

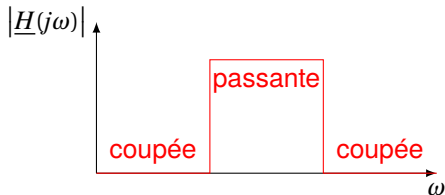
le spectre de la sortie est alors différent du spectre en entrée



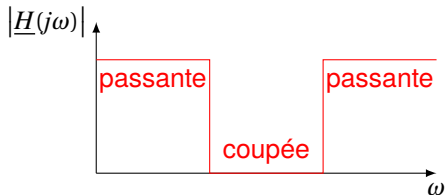
Filtre passe-haut



Filtre passe-bas

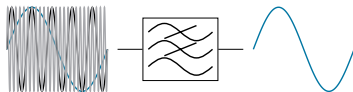


Filtre passe-bande

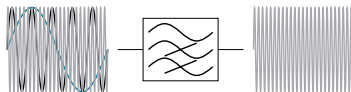


Filtre coupe (réjecteur de) bande

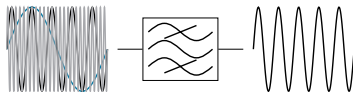
Filtres idéaux



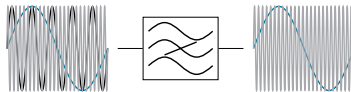
Passe bas : les moyenne et haute fréq



Passe haut : les moyenne et
basse fréquence sont coupées



Passe bande : seules les
moyennes fréquences passent



Coupe bande : seules les
moyennes fréquences sont
coupées

1. Transformation d'un signal
2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire
- 3. Diagramme de Bode d'un filtre**
 - 3.1 Fonctions d'un filtre
 - 3.2 Représentation**
4. Filtres du 1^{er} ordre
5. Exemples de filtres du 2^e ordre

Éléments

Définition (Gain)

On nomme **gain**, noté H , d'un filtre le module de sa fonction de transfert : $H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$. Le **gain en décibel**, noté G_{dB} est défini par $G_{dB} = 20\log H$.

Éléments

Définition (Gain)

On nomme **gain**, noté H , d'un filtre le module de sa fonction de transfert : $H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$. Le **gain en décibel**, noté G_{dB} est défini par $G_{dB} = 20\log H$.

- Origine du dB : unité de rapport de puissance. Pour des tensions efficaces $\underline{U}_{e(eff)}$ et $\underline{U}_{s(eff)}$ branchées sur le même dipôle de conductance g , les puissances actives reçues par le dipôle sont $P_e = gU_{e(eff)}^2$ et $P_s = gU_{s(eff)}^2$, de rapport $P_s/P_e = \left(\frac{U_{s(eff)}}{U_{e(eff)}}\right)^2$.

Éléments

Définition (Gain)

On nomme **gain**, noté H , d'un filtre le module de sa fonction de transfert : $H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$. Le **gain en décibel**, noté G_{dB} est défini par $G_{dB} = 20\log H$.

- ▶ Origine du dB : unité de rapport de puissance. Pour des tensions efficaces $\underline{U}_{e(eff)}$ et $\underline{U}_{s(eff)}$ branchées sur le même dipôle de conductance g , les puissances actives reçues par le dipôle sont $P_e = gU_{e(eff)}^2$ et $P_s = gU_{s(eff)}^2$, de rapport $P_s/P_e = \left(\frac{U_{s(eff)}}{U_{e(eff)}}\right)^2$.
- ▶ Gain en Bel en puissance $\log P_s/P_e$, gain en décibel $10\log P_s/P_e = 20\log \frac{U_{s(eff)}}{U_{e(eff)}} = G_{dB}$ en tension.

Éléments

Définition (Gain)

On nomme **gain**, noté H , d'un filtre le module de sa fonction de transfert : $H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$. Le **gain en décibel**, noté G_{dB} est défini par $G_{dB} = 20\log H$.

- ▶ Origine du dB : unité de rapport de puissance. Pour des tensions efficaces $\underline{U}_{e(eff)}$ et $\underline{U}_{s(eff)}$ branchées sur le même dipôle de conductance g , les puissances actives reçues par le dipôle sont $P_e = gU_{e(eff)}^2$ et $P_s = gU_{s(eff)}^2$, de rapport $P_s/P_e = \left(\frac{U_{s(eff)}}{U_{e(eff)}}\right)^2$.
- ▶ Gain en Bel en puissance $\log P_s/P_e$, gain en décibel $10\log P_s/P_e = 20\log \frac{U_{s(eff)}}{U_{e(eff)}} = G_{dB}$ en tension.
- ▶ Intérêt : oreille et œil ont des sensibilité logarithmiques, et les lois de puissance donnent des droites en échelle logarithmique (cf. cinétique chimique)

Diagramme de Bode²

Définition (Diagramme de Bode)

Le **diagramme de Bode** d'un quadripôle est constitué :

- ▶ de la représentation de son gain en décibel,
- ▶ de l'argument de sa fonction de transfert,

en fonction de $\log \omega / \omega_c$, où ω_c est une pulsation caractéristique du filtre.

²H.W. Bode (1905–1982), ingénieur et chercheur américain.

Diagramme de Bode²

Définition (Diagramme de Bode)

Le **diagramme de Bode** d'un quadripôle est constitué :

- ▶ de la représentation de son gain en décibel,
- ▶ de l'argument de sa fonction de transfert,

en fonction de $\log \omega / \omega_c$, où ω_c est une pulsation caractéristique du filtre.

Définition (Octave et décade)

Une **décade** est un intervalle de fréquence $[\omega_1; \omega_2]$, avec $\omega_2 = 10\omega_1$, soit $\log \frac{\omega_2}{\omega_c} = \log \frac{\omega_1}{\omega_c} + 1$.

Une **octave** est un intervalle de fréquence $[\omega_1; \omega_2]$, avec $\omega_2 = 2\omega_1$, soit $\log \frac{\omega_2}{\omega_c} \simeq \log \frac{\omega_1}{\omega_c} + 0,3$.

²H.W. Bode (1905–1982), ingénieur et chercheur américain.

Diagramme de Bode asymptotique

- ▶ on déterminera des équivalents de $\underline{H}(j\omega)$ dans les régimes limites $\omega \rightarrow \infty$ et $\omega \rightarrow 0$ à l'aide des équivalents des condensateurs et bobines

Diagramme de Bode asymptotique

- ▶ on déterminera des équivalents de $\underline{H}(j\omega)$ dans les régimes limites $\omega \rightarrow \infty$ et $\omega \rightarrow 0$ à l'aide des équivalents des condensateurs et bobines
- ▶ on obtiendra des segments de pente $k \times 20\text{dB}$ par décade ($k \in \mathbb{Z}$)

Diagramme de Bode asymptotique

- ▶ on déterminera des équivalents de $\underline{H}(j\omega)$ dans les régimes limites $\omega \rightarrow \infty$ et $\omega \rightarrow 0$ à l'aide des équivalents des condensateurs et bobines
- ▶ on obtiendra des segments de pente $k \times 20\text{dB}$ par décade ($k \in \mathbb{Z}$)

Diagramme de Bode asymptotique

- ▶ on déterminera des équivalents de $\underline{H}(j\omega)$ dans les régimes limites $\omega \rightarrow \infty$ et $\omega \rightarrow 0$ à l'aide des équivalents des condensateurs et bobines
- ▶ on obtiendra des segments de pente $k \times 20\text{dB}$ par décade ($k \in \mathbb{Z}$)

Pulsation de coupure

pour un filtre réel, le gain en bande coupée n'est jamais strictement nul

Pulsation de coupure

pour un filtre réel, le gain en bande coupée n'est jamais strictement nul

Définition (Pulsation de coupure)

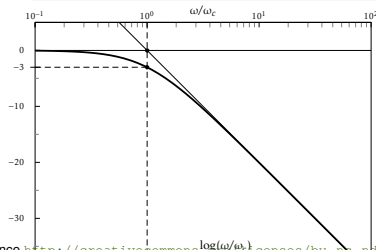
On nomme **pulsation de coupure à $-3dB$** une pulsation ω_c à la frontière entre une bande passante et une bande coupée d'un filtre au-delà de laquelle le gain G_{dB} en décibel est inférieur à $G_{dB0} - 20\log\sqrt{2} \simeq G_{dB0} - 3$, avec G_{dB0} le gain en décibel en bande passante dans le diagramme asymptotique.

Pulsation de coupure

pour un filtre réel, le gain en bande coupée n'est jamais strictement nul

Définition (Pulsation de coupure)

On nomme **pulsation de coupure à $-3dB$** une pulsation ω_c à la frontière entre une bande passante et une bande coupée d'un filtre au-delà de laquelle le gain G_{dB} en décibel est inférieur à $G_{dB0} - 20\log\sqrt{2} \simeq G_{dB0} - 3$, avec G_{dB0} le gain en décibel en bande passante dans le diagramme asymptotique.



- $G_{dB0} \rightarrow G_{dB0} - 20\log\sqrt{2}$
correspond à diviser
exactement la puissance par 2
- $G_{dB0} - 3$ est une
approximation

1. Transformation d'un signal
2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire
3. Diagramme de Bode d'un filtre
- 4. Filtres du 1^{er} ordre**
5. Exemples de filtres du 2^e ordre

1. Transformation d'un signal

2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire

3. Diagramme de Bode d'un filtre

4. Filtres du 1^{er} ordre

4.1 Filtre passe-bas

4.2 Exemple d'utilisation du diagramme de Bode

4.3 Filtre passe-haut

5. Exemples de filtres du 2^e ordre

Exemple d'un passe-bas passif

On veut :

- ▶ $u_s = u_e$ pour $\omega \ll \omega_c$ et $u_s \ll u_e$ pour $\omega \gg \omega_c$

Exemple d'un passe-bas passif

On veut :

- ▶ $u_s = u_e$ pour $\omega \ll \omega_c$ et $u_s \ll u_e$ pour $\omega \gg \omega_c$
- ▶ on cherche à réaliser des court-circuits et des interrupteurs ouverts dans ces deux limites

Exemple d'un passe-bas passif

On veut :

- ▶ $u_s = u_e$ pour $\omega \ll \omega_c$ et $u_s \ll u_e$ pour $\omega \gg \omega_c$
- ▶ on cherche à réaliser des court-circuits et des interrupteurs ouverts dans ces deux limites
- ▶ on se place en sortie ouverte

Exemple d'un passe-bas passif

On veut :

- ▶ $u_s = u_e$ pour $\omega \ll \omega_c$ et $u_s \ll u_e$ pour $\omega \gg \omega_c$
- ▶ on cherche à réaliser des court-circuits et des interrupteurs ouverts dans ces deux limites
- ▶ on se place en sortie ouverte
- ▶ fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Modèle

Définition (Passe-bas du 1^{er} ordre)

Un filtre est un **passe-bas du 1^{er} ordre** si sa fonction de transfert est de la forme :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}},$$

avec H_0 réel et ω_c réel positif.

Modèle

Définition (Passe-bas du 1^{er} ordre)

Un filtre est un **passe-bas du 1^{er} ordre** si sa fonction de transfert est de la forme :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}},$$

avec H_0 réel et ω_c réel positif.

Dans le cas du RC précédent : $H_0 = 1$ et $\omega_c = 1/(RC)$

Diagramme de Bode

- ▶ $\underline{H}(j\omega) \rightarrow H_0$ pour $\omega \ll 1/RC$: $G_{dB0} \simeq 20\log H_0$ et $\varphi = 0$

Diagramme de Bode

- ▶ $\underline{H}(j\omega) \rightarrow H_0$ pour $\omega \ll 1/RC$: $G_{dB0} \simeq 20\log H_0$ et $\varphi = 0$
- ▶ $\underline{H}(j\omega) \rightarrow -j\frac{\omega_c H_0}{\omega}$ pour $\omega \gg \omega_c$: $G_{dB} = 20\log H_0 - 20\log \frac{\omega}{\omega_c}$ et $\varphi \rightarrow -\pi/2$

Diagramme de Bode

- ▶ $\underline{H}(j\omega) \rightarrow H_0$ pour $\omega \ll 1/RC$: $G_{dB0} \simeq 20\log H_0$ et $\varphi = 0$
- ▶ $\underline{H}(j\omega) \rightarrow -j\frac{\omega_c H_0}{\omega}$ pour $\omega \gg \omega_c$: $G_{dB} = 20\log H_0 - 20\log \frac{\omega}{\omega_c}$ et $\varphi \rightarrow -\pi/2$
- ▶ $H = H_0/\sqrt{2}$ pour $\omega = \omega_c$ où $\varphi = -\pi/4$ qui est donc la pulsation de coupure

Diagramme de Bode

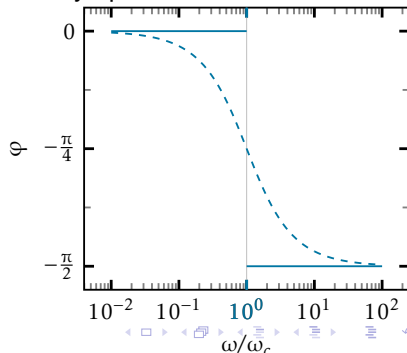
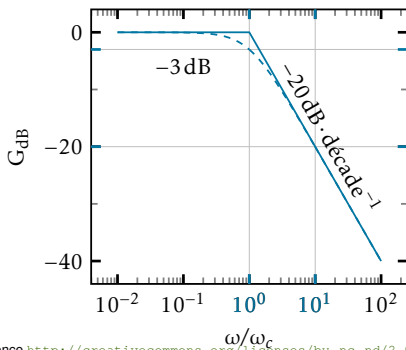
- ▶ $\underline{H}(j\omega) \rightarrow H_0$ pour $\omega \ll 1/RC$: $G_{dB0} \simeq 20\log H_0$ et $\varphi = 0$
- ▶ $\underline{H}(j\omega) \rightarrow -j\frac{\omega_c H_0}{\omega}$ pour $\omega \gg \omega_c$: $G_{dB} = 20\log H_0 - 20\log \frac{\omega}{\omega_c}$ et $\varphi \rightarrow -\pi/2$
- ▶ $H = H_0/\sqrt{2}$ pour $\omega = \omega_c$ où $\varphi = -\pi/4$ qui est donc la pulsation de coupure
- ▶ G_{dB} est toujours en dessous de ses asymptotes

Diagramme de Bode

- ▶ $\underline{H}(j\omega) \rightarrow H_0$ pour $\omega \ll 1/RC$: $G_{dB0} \simeq 20\log H_0$ et $\varphi = 0$
- ▶ $\underline{H}(j\omega) \rightarrow -j\frac{\omega_c H_0}{\omega}$ pour $\omega \gg \omega_c$: $G_{dB} = 20\log H_0 - 20\log \frac{\omega}{\omega_c}$ et $\varphi \rightarrow -\pi/2$
- ▶ $H = H_0/\sqrt{2}$ pour $\omega = \omega_c$ où $\varphi = -\pi/4$ qui est donc la pulsation de coupure
- ▶ G_{dB} est toujours en dessous de ses asymptotes

Diagramme de Bode

- ▶ $\underline{H}(j\omega) \rightarrow H_0$ pour $\omega \ll 1/RC$: $G_{dB0} \simeq 20\log H_0$ et $\varphi = 0$
- ▶ $\underline{H}(j\omega) \rightarrow -j\frac{\omega_c H_0}{\omega}$ pour $\omega \gg \omega_c$: $G_{dB} = 20\log H_0 - 20\log \frac{\omega}{\omega_c}$ et $\varphi \rightarrow -\pi/2$
- ▶ $H = H_0/\sqrt{2}$ pour $\omega = \omega_c$ où $\varphi = -\pi/4$ qui est donc la pulsation de coupure
- ▶ G_{dB} est toujours en dessous de ses asymptotes



1. Transformation d'un signal
2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire
3. Diagramme de Bode d'un filtre
4. Filtres du 1^{er} ordre
 - 4.1 Filtre passe-bas
 - 4.2 Exemple d'utilisation du diagramme de Bode
 - 4.3 Filtre passe-haut
5. Exemples de filtres du 2^e ordre

- ▶ passe-bas d'ordre 1 et de pulsation de coupure ω_c

- ▶ passe-bas d'ordre 1 et de pulsation de coupure ω_c
- ▶ exemple : entrée

$$u_e(t) = E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + E_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + E_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3)$$

avec $\omega_1/\omega_c = 1/100$, $\omega_2 = \omega_c$, $\omega_3 = 100\omega_c$

- ▶ passe-bas d'ordre 1 et de pulsation de coupure ω_c
- ▶ exemple : entrée

$$u_e(t) = E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + E_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + E_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3)$$

avec $\omega_1/\omega_c = 1/100$, $\omega_2 = \omega_c$, $\omega_3 = 100\omega_c$

- ▶ on « superpose » le spectre et le diagramme de Bode

- ▶ passe-bas d'ordre 1 et de pulsation de coupure ω_c
- ▶ exemple : entrée

$$u_e(t) = E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + E_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + E_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3)$$

avec $\omega_1 / \omega_c = 1/100$, $\omega_2 = \omega_c$, $\omega_3 = 100\omega_c$

- ▶ on « superpose » le spectre et le diagramme de Bode
- ▶ sortie :

$$u_s(t) \simeq E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{E_2}{\sqrt{2}} \cos(\omega_2 t + \varphi_2 - \pi/4)$$

Caractère intégrateur

Définition (Circuit intégrateur idéal)

La fonction de transfert d'un filtre intégrateur idéal est : $\underline{H} = H_0 \frac{\omega_c}{j\omega}$ avec H_0 réel et ω_c réel positif. Les variations de sa tension de sortie, $s(t)$, sont proportionnelles à l'intégrale de sa tension d'entrée $e(t)$:

$$s(t) - s(t_0) \propto \int_{t_0}^t e(t) dt.$$

Caractère intégrateur

Définition (Circuit intégrateur idéal)

La fonction de transfert d'un filtre intégrateur idéal est : $\underline{H} = H_0 \frac{\omega_c}{j\omega}$ avec H_0 réel et ω_c réel positif. Les variations de sa tension de sortie, $s(t)$, sont proportionnelles à l'intégrale de sa tension d'entrée $e(t)$:

$$s(t) - s(t_0) \propto \int_{t_0}^t e(t) dt.$$

défaut : diverge à basse fréquence !

Caractère pseudo-intégrateur

passé-bas du 1^{er} ordre :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

- ▶ $\underline{H}(j\omega) \simeq 1$ pour $\omega RC \ll 1$: plus de divergence

Caractère pseudo-intégrateur

passé-bas du 1^{er} ordre :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

- ▶ $\underline{H}(j\omega) \simeq 1$ pour $\omega RC \ll 1$: plus de divergence
- ▶ $\underline{H}(j\omega)$ d'un intégrateur pour $\omega RC \gg 1$

Caractère pseudo-intégrateur

passé-bas du 1^{er} ordre :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

- ▶ $\underline{H}(j\omega) \simeq 1$ pour $\omega RC \ll 1$: plus de divergence
- ▶ $\underline{H}(j\omega)$ d'un intégrateur pour $\omega RC \gg 1$

Caractère pseudo-intégrateur

passé-bas du 1^{er} ordre :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

- ▶ $\underline{H}(j\omega) \simeq 1$ pour $\omega RC \ll 1$: plus de divergence
- ▶ $\underline{H}(j\omega)$ d'un intégrateur pour $\omega RC \gg 1$

Pseudo-intégrateur

Un filtre passe-bas du 1^{er} ordre de pulsation de coupure ω_c est un **pseudo-intégrateur**. Il est :

- ▶ intégrateur, ie réalise $s(t) - s(t_0) \propto \int_{t_0}^t e(t) dt$, pour $e(t)$ sinusoïdale de pulsation $\omega \gg \omega_c$,
- ▶ suiveur, ie réalise $s(t) \propto e(t)$, pour $e(t)$ sinusoïdale de pulsation $\omega \ll \omega_c$.

1. Transformation d'un signal
2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire
3. Diagramme de Bode d'un filtre
- 4. Filtres du 1^{er} ordre**
 - 4.1 Filtre passe-bas
 - 4.2 Exemple d'utilisation du diagramme de Bode
 - 4.3 Filtre passe-haut**
5. Exemples de filtres du 2^e ordre

Exemple d'un passe-haut passif

- ▶ on inverse condensateur et résistor (ou on remplace le condensateur par une bobine), toujours en sortie ouverte

Exemple d'un passe-haut passif

- ▶ on inverse condensateur et résistor (ou on remplace le condensateur par une bobine), toujours en sortie ouverte
- ▶ pour $\omega \ll \frac{1}{RC}$, on a $i = 0 \rightarrow u_s = Ri = 0$: bande coupée

Exemple d'un passe-haut passif

- ▶ on inverse condensateur et résistor (ou on remplace le condensateur par une bobine), toujours en sortie ouverte
- ▶ pour $\omega \ll \frac{1}{RC}$, on a $i = 0 \rightarrow u_s = Ri = 0$: bande coupée
- ▶ pour $\omega \gg \frac{1}{RC}$, on a $u_s = u_e$: bande passante

Exemple d'un passe-haut passif

- ▶ on inverse condensateur et résistor (ou on remplace le condensateur par une bobine), toujours en sortie ouverte
- ▶ pour $\omega \ll \frac{1}{RC}$, on a $i = 0 \rightarrow u_s = Ri = 0$: bande coupée
- ▶ pour $\omega \gg \frac{1}{RC}$, on a $u_s = u_e$: bande passante
- ▶ fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 - \frac{j}{RC\omega}}$$

Modèle

Définition (Passe-haut du 1^{er} ordre)

Un filtre est un **passe-haut du 1^{er} ordre** si sa fonction de transfert est de la forme :

$$\underline{H} = \frac{jH_0 \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} = \frac{H_0}{1 - j \frac{\omega_c}{\omega}},$$

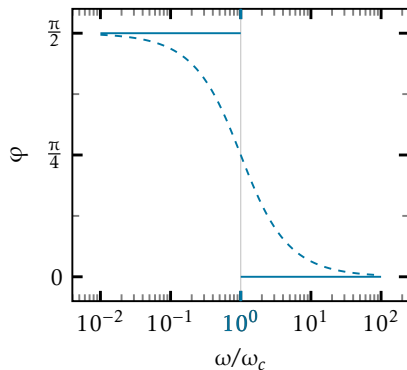
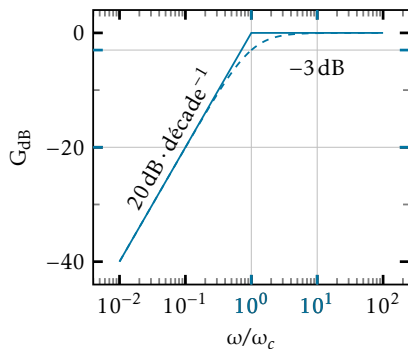
avec H_0 réel et ω_c réel positif.

Diagramme de Bode

Reprendre l'étude comme précédemment

Diagramme de Bode

Reprendre l'étude comme précédemment



Caractère dérivateur et pseudo-dérivateur

Définition (Circuit dérivateur idéal)

La fonction de transfert d'un filtre dérivateur idéal est : $\underline{H} = H_0 \frac{j\omega}{\omega_c}$. Sa tension de sortie est proportionnelle à la dérivée de sa tension d'entrée : $s(t) \propto \frac{de(t)}{dt}$.

Caractère dérivateur et pseudo-dérivateur

Définition (Circuit dérivateur idéal)

La fonction de transfert d'un filtre dérivateur idéal est : $\underline{H} = H_0 \frac{j\omega}{\omega_c}$. Sa tension de sortie est proportionnelle à la dérivée de sa tension d'entrée : $s(t) \propto \frac{de(t)}{dt}$.

défaut : être instable à haute fréquence $\omega \gg 1/(RC)$

- Fonction de transfert $\underline{H} = \frac{H_0}{1-j\frac{\omega_c}{\omega}}$: passe-haut du premier ordre

- ▶ Fonction de transfert $\underline{H} = \frac{H_0}{1-j\frac{\omega_c}{\omega}}$: passe-haut du premier ordre
- ▶ pour $\omega \ll \omega_c$, on a $\underline{H} = jH_0 \frac{\omega}{\omega_c}$, on retrouve un dérivateur

- ▶ Fonction de transfert $\underline{H} = \frac{H_0}{1-j\frac{\omega_c}{\omega}}$: passe-haut du premier ordre
- ▶ pour $\omega \ll \omega_c$, on a $\underline{H} = jH_0 \frac{\omega}{\omega_c}$, on retrouve un dérivateur
- ▶ pour $\omega \gg \omega_c$ $\underline{H} = H_0$, plus de saturation

- ▶ Fonction de transfert $\underline{H} = \frac{H_0}{1-j\frac{\omega_c}{\omega}}$: passe-haut du premier ordre
- ▶ pour $\omega \ll \omega_c$, on a $\underline{H} = jH_0 \frac{\omega}{\omega_c}$, on retrouve un dérivateur
- ▶ pour $\omega \gg \omega_c$ $\underline{H} = H_0$, plus de saturation

- ▶ Fonction de transfert $\underline{H} = \frac{H_0}{1-j\frac{\omega_c}{\omega}}$: passe-haut du premier ordre
- ▶ pour $\omega \ll \omega_c$, on a $\underline{H} = jH_0 \frac{\omega}{\omega_c}$, on retrouve un dérivateur
- ▶ pour $\omega \gg \omega_c$ $\underline{H} = H_0$, plus de saturation

Pseudo-dérivateur

Un filtre passe-haut du premier 1^{er} ordre de pulsation de coupure ω_c est un **pseudo-dérivateur**. Il est :

- ▶ dérivateur ie réalise $s(t) \propto \frac{de(t)}{dt}$, pour $e(t)$ sinusoïdale de pulsation $\omega \ll \omega_c$,
- ▶ suiveur, ie réalise $s(t) \propto e(t)$, pour $e(t)$ sinusoïdale de pulsation $\omega \gg \omega_c$.

1. Transformation d'un signal
2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire
3. Diagramme de Bode d'un filtre
4. Filtres du 1^{er} ordre
5. Exemples de filtres du 2^e ordre

L'étude systématique n'est pas au programme, on se contentera d'exemples

1. Transformation d'un signal
2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire
3. Diagramme de Bode d'un filtre
4. Filtres du 1^{er} ordre
5. Exemples de filtres du 2^e ordre
 - 5.1 Mise en cascade de deux filtres
 - 5.2 Passe-bas d'ordre 2 : u_C d'un RLC série
 - 5.3 Passe-bande d'ordre 2 : u_R d'un RLC série

Mise en cascade

Si chacun des filtres d'une cascade de filtres est idéal en sortie, la fonction de transfert de l'ensemble est le produit des fonctions de transfert de chaque filtre. On a alors $G_{dB} = \sum G_{i,dB}$ et $\varphi = \sum_i \varphi_i$.

Mise en cascade

Si chacun des filtres d'une cascade de filtres est idéal en sortie, la fonction de transfert de l'ensemble est le produit des fonctions de transfert de chaque filtre. On a alors $G_{dB} = \sum G_{i,dB}$ et $\varphi = \sum_i \varphi_i$.

S'ils ne sont pas idéaux en sortie, on les utilise en sortie ouverte ($i_s = 0$) au besoin en branchant leur sortie sur un quadripôle suiveur

Diagrammes de Bode asymptotiques

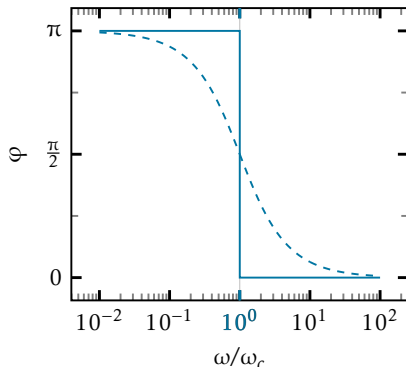
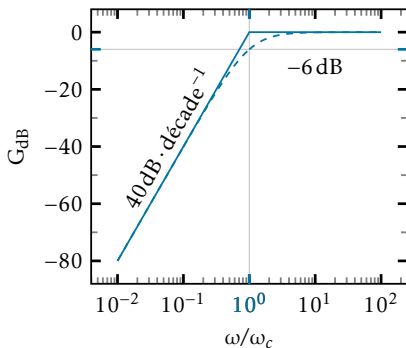
On l'obtient en « sommant » les diagrammes de Bode asymptotiques de chacun des filtres.

Diagrammes de Bode asymptotiques

2 passe-haut du 1^{er} ordre identiques : $\underline{H}(j\omega) = \left(\frac{j\omega/\omega_c}{1+j\omega/\omega_c} \right)^2 :$

Diagrammes de Bode asymptotiques

2 passe-haut du 1^{er} ordre identiques : $\underline{H}(j\omega) = \left(\frac{j\omega/\omega_c}{1+j\omega/\omega_c} \right)^2$: **Passe-haut du 2^e ordre**



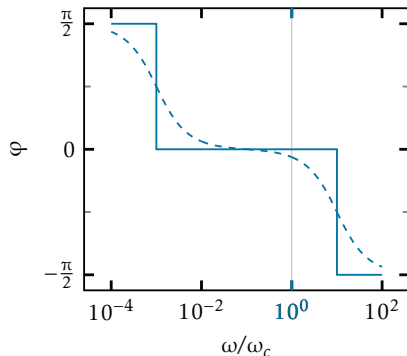
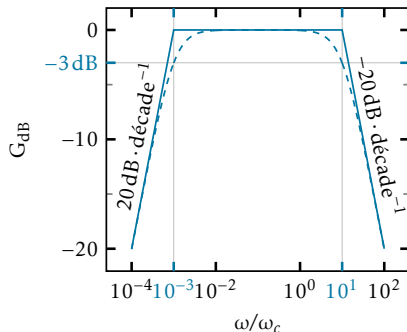
Pente à 40dB par décade : meilleure atténuation en bande coupée

Diagrammes de Bode asymptotiques

Passe-bande du 2^e ordre

Diagrammes de Bode asymptotiques

Passe-bande du 2^e ordre à l'aide d'un passe-haut et d'un passe bas du 1^{er} ordre : $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1-j\frac{\omega_{c1}}{\omega}} \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_{c2}}}$, $\omega_{c2} = 10^4 \omega_{c1}$



Pentes à $\pm 20 \text{ dB}$ par décade

1. Transformation d'un signal
2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire
3. Diagramme de Bode d'un filtre
4. Filtres du 1^{er} ordre
- 5. Exemples de filtres du 2^e ordre**
 - 5.1 Mise en cascade de deux filtres
 - 5.2 Passe-bas d'ordre 2 : u_C d'un RLC série**
 - 5.3 Passe-bande d'ordre 2 : u_R d'un RLC série

► comportements asymptotiques :

- ▶ comportements asymptotiques :
 - ▶ pour $\omega \ll 1/\sqrt{LC} \equiv \omega_0$: $\underline{U_{sm}} = \underline{U_{em}}$

- ▶ comportements asymptotiques :
 - ▶ pour $\omega \ll 1/\sqrt{LC} \equiv \omega_0$: $\underline{U_{sm}} = \underline{U_{em}}$
 - ▶ pour $\omega \gg \omega_0$: $\underline{U_{sm}} = 0$

- ▶ comportements asymptotiques :
 - ▶ pour $\omega \ll 1/\sqrt{LC} \equiv \omega_0$: $\underline{U_{sm}} = \underline{U_{em}}$
 - ▶ pour $\omega \gg \omega_0$: $\underline{U_{sm}} = 0$
- ▶ fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2 + \frac{j\omega}{\omega_0 Q}} :$$

- ▶ comportements asymptotiques :
 - ▶ pour $\omega \ll 1/\sqrt{LC} \equiv \omega_0$: $\underline{U_{sm}} = \underline{U_{em}}$
 - ▶ pour $\omega \gg \omega_0$: $\underline{U_{sm}} = 0$
- ▶ fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2 + \frac{j\omega}{\omega_0 Q}} :$$

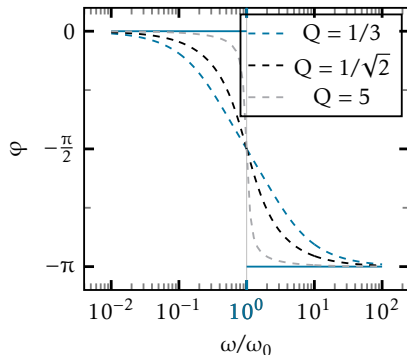
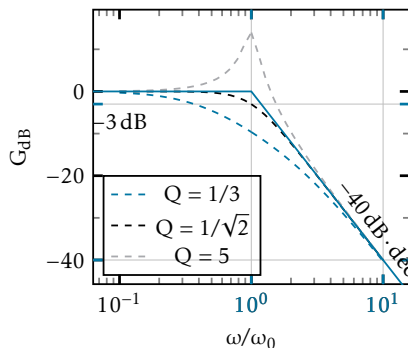
- ▶ pour $\omega \ll \omega_0$: $\underline{H}(j\omega) = 1$, soit $G_{dB} = 0$ et $\varphi = 0$

- ▶ comportements asymptotiques :
 - ▶ pour $\omega \ll 1/\sqrt{LC} \equiv \omega_0$: $\underline{U_{sm}} = \underline{U_{em}}$
 - ▶ pour $\omega \gg \omega_0$: $\underline{U_{sm}} = 0$
- ▶ fonction de transfert :

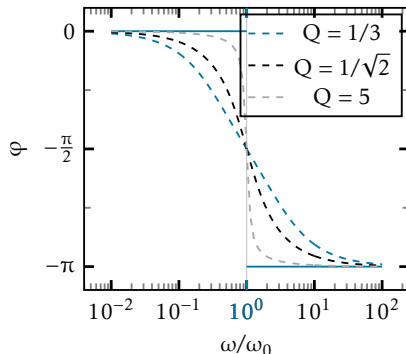
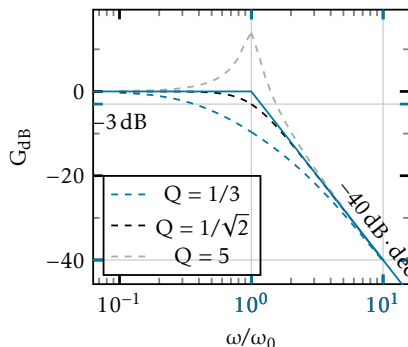
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + (j\frac{\omega}{\omega_0})^2 + \frac{j\omega}{\omega_0 Q}} :$$

- ▶ pour $\omega \ll \omega_0$: $\underline{H}(j\omega) = 1$, soit $G_{dB} = 0$ et $\varphi = 0$
- ▶ pour $\omega \gg \omega_0$: $\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{-\omega_0^2}{\omega^2}$, soit $G_{dB} = -40 \log \omega / \omega_0$ et $\varphi = -\pi$

RLC série en passe-bas d'ordre 2



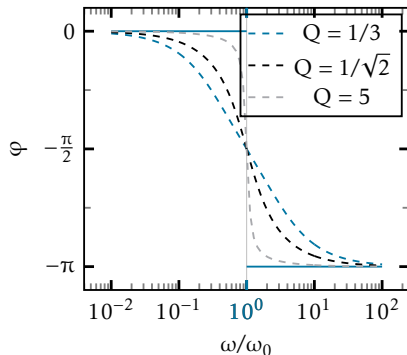
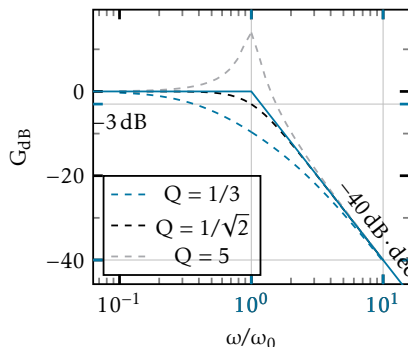
RLC série en passe-bas d'ordre 2



Au voisinage de ω_0 :

- ▶ en $\omega = \omega_0$, $H = Q$ croissant avec Q alors que les asymptotes sont indépendantes de Q : résonance pour $Q \geq 1/\sqrt{2}$; différent de deux passe-bas d'ordre 1 en cascade

RLC série en passe-bas d'ordre 2



Au voisinage de ω_0 :

- ▶ en $\omega = \omega_0$, $H = Q$ croissant avec Q alors que les asymptotes sont indépendantes de Q : résonance pour $Q \geq 1/\sqrt{2}$; différent de deux passe-bas d'ordre 1 en cascade
- ▶ pour $Q \leq 1/\sqrt{2}$: on peut factoriser $\underline{H}(j\omega)$ comme produit de deux passe-bas d'ordre 1 de pulsations de coupures différentes

1. Transformation d'un signal
2. Fonction de transfert d'un quadripôle linéaire
3. Diagramme de Bode d'un filtre
4. Filtres du 1^{er} ordre
5. Exemples de filtres du 2^e ordre
 - 5.1 Mise en cascade de deux filtres
 - 5.2 Passe-bas d'ordre 2 : u_C d'un RLC série
 - 5.3 Passe-bande d'ordre 2 : u_R d'un RLC série

► comportements asymptotiques :

- ▶ comportements asymptotiques :
 - ▶ pour $\omega \ll 1/\sqrt{LC} \equiv \omega_0$: $\underline{U_{sm}} = 0$

► comportements asymptotiques :

- pour $\omega \ll 1/\sqrt{LC} \equiv \omega_0$: $\underline{U_{sm}} = 0$
- pour $\omega \gg \omega_0$: $\underline{U_{sm}} = 0$

- ▶ comportements asymptotiques :
 - ▶ pour $\omega \ll 1/\sqrt{LC} \equiv \omega_0$: $\underline{U_{sm}} = 0$
 - ▶ pour $\omega \gg \omega_0$: $\underline{U_{sm}} = 0$
- ▶ fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} :$$

- ▶ comportements asymptotiques :
 - ▶ pour $\omega \ll 1/\sqrt{LC} \equiv \omega_0$: $\underline{U_{sm}} = 0$
 - ▶ pour $\omega \gg \omega_0$: $\underline{U_{sm}} = 0$
- ▶ fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} :$$

- ▶ pour $\omega \ll \omega_0$: $\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{j\omega}{Q\omega_0}$, soit $G_{dB} = 20\log \frac{\omega}{\omega_0} - 20\log Q$ et $\varphi = \pi/2$

- ▶ comportements asymptotiques :
 - ▶ pour $\omega \ll 1/\sqrt{LC} \equiv \omega_0$: $\underline{U_{sm}} = 0$
 - ▶ pour $\omega \gg \omega_0$: $\underline{U_{sm}} = 0$
- ▶ fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} :$$

- ▶ pour $\omega \ll \omega_0$: $\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{j\omega}{Q\omega_0}$, soit $G_{dB} = 20\log \frac{\omega}{\omega_0} - 20\log Q$ et $\varphi = \pi/2$
- ▶ pour $\omega \gg \omega_0$: $\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{-j\omega_0}{Q\omega}$, soit $G_{dB} = -20\log \frac{\omega}{\omega_0} - 20\log Q$ et $\varphi = -\pi/2$

- ▶ comportements asymptotiques :
 - ▶ pour $\omega \ll 1/\sqrt{LC} \equiv \omega_0$: $\underline{U_{sm}} = 0$
 - ▶ pour $\omega \gg \omega_0$: $\underline{U_{sm}} = 0$
- ▶ fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} :$$

- ▶ pour $\omega \ll \omega_0$: $\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{j\omega}{Q\omega_0}$, soit $G_{dB} = 20\log \frac{\omega}{\omega_0} - 20\log Q$ et $\varphi = \pi/2$
- ▶ pour $\omega \gg \omega_0$: $\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{-j\omega_0}{Q\omega}$, soit $G_{dB} = -20\log \frac{\omega}{\omega_0} - 20\log Q$ et $\varphi = -\pi/2$
- ▶

l'intersection des asymptotes en $-20\log Q$ dépend du facteur de qualité
alors que $G_{db0} = 0$ n'en dépend pas

- ▶ comportements asymptotiques :
 - ▶ pour $\omega \ll 1/\sqrt{LC} \equiv \omega_0$: $\underline{U_{sm}} = 0$
 - ▶ pour $\omega \gg \omega_0$: $\underline{U_{sm}} = 0$
- ▶ fonction de transfert :

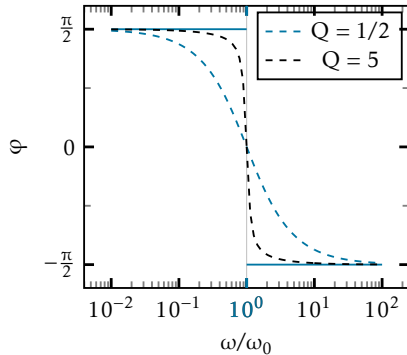
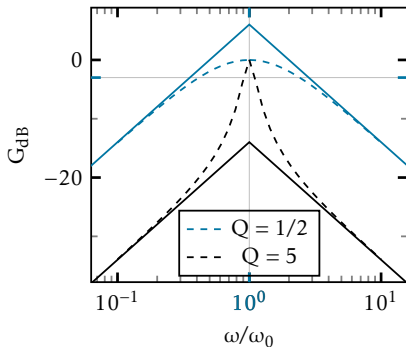
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} :$$

- ▶ pour $\omega \ll \omega_0$: $\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{j\omega}{Q\omega_0}$, soit $G_{dB} = 20\log \frac{\omega}{\omega_0} - 20\log Q$ et $\varphi = \pi/2$
- ▶ pour $\omega \gg \omega_0$: $\underline{H}(j\omega) \simeq \frac{-j\omega_0}{Q\omega}$, soit $G_{dB} = -20\log \frac{\omega}{\omega_0} - 20\log Q$ et $\varphi = -\pi/2$



l'intersection des asymptotes en $-20\log Q$ dépend du facteur de qualité
 alors que $G_{db0} = 0$ n'en dépend pas

- ▶ courbe symétrique en échelle log, on peut vérifier que $\omega_2/\omega_0 = \omega_0/\omega_1$ avec ω_1 et ω_2 définissant la bande passante



Finesse d'une résonance

pour un filtre présentant une résonance (passe bande d'ordre 2, passe bas/haut d'ordre 2 de facteur de qualité suffisant)

Définition (Finesse)

On note ω_0 la pulsation telle que $G_{dB}(\omega_0) = G_{dB,max}$ est maximal, ω_1 (resp. ω_2 avec $\omega_1 < \omega_2$) les deux pulsations telles que $G_{dB}(\omega) = G_{dB,max} - 20\log(\sqrt{2}) \simeq G_{dB,max} - 3$. La **finesse** de la résonance est :

$$\mathcal{F} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Finesse d'une résonance

pour un filtre présentant une résonance (passe bande d'ordre 2, passe bas/haut d'ordre 2 de facteur de qualité suffisant)

Définition (Finesse)

On note ω_0 la pulsation telle que $G_{dB}(\omega_0) = G_{dB,max}$ est maximal, ω_1 (resp. ω_2 avec $\omega_1 < \omega_2$) les deux pulsations telles que $G_{dB}(\omega) = G_{dB,max} - 20\log(\sqrt{2}) \simeq G_{dB,max} - 3$. La **finesse** de la résonance est :

$$\mathcal{F} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Finesse d'un passe-bande d'ordre 2

La finesse d'un passe-bande d'ordre 2 est égale à son facteur de qualité :

$$\mathcal{F} = Q$$

Finesse d'une résonance

pour un filtre présentant une résonance (passe bande d'ordre 2, passe bas/haut d'ordre 2 de facteur de qualité suffisant)

Définition (Finesse)

On note ω_0 la pulsation telle que $G_{dB}(\omega_0) = G_{dB,max}$ est maximal, ω_1 (resp. ω_2 avec $\omega_1 < \omega_2$) les deux pulsations telles que $G_{dB}(\omega) = G_{dB,max} - 20\log(\sqrt{2}) \simeq G_{dB,max} - 3$. La **finesse** de la résonance est :

$$\mathcal{F} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Finesse d'un passe-bande d'ordre 2

La finesse d'un passe-bande d'ordre 2 est égale à son facteur de qualité :

$$\mathcal{F} = Q$$

plus Q est élevé, plus la résonance est fine, qualitativement valable

Exercice : Paramètres canoniques d'un filtre

- 1 Déterminer les paramètres H_0, f_c du filtre passe-haut du premier ordre suivant :

$$\underline{H} = \frac{2}{3 - j10^5/f},$$

avec f exprimé en Hz. On rappelle la forme canonique :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \frac{\omega_c}{j\omega}}.$$

Exercice : Paramètres canoniques d'un filtre

- 2 Déterminer les paramètres H_0 , f_0 et Q du filtre passe-bas du deuxième ordre suivant :

$$\underline{H} = \frac{3}{5 + j10^{-5}f - 10^{-8}f^2},$$

avec f exprimé en Hz. On rappelle la forme canonique :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}.$$

Exercice : Paramètres canoniques d'un filtre

- 3 Déterminer les paramètres H_0 , f_0 et Q du filtre passe-bande du deuxième ordre suivant :

$$\underline{H} = \frac{jf}{4jf - 10^{-3}f^2 + 10^3},$$

avec f exprimé en Hz. On rappelle la forme canonique :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}.$$

Correction

$$1 \quad \underline{H} = \frac{2/3}{1+j(10^5/2)/f} : H_0 = 2/3, f_c = 33 \text{ kHz.}$$

$$2 \quad \underline{H} = \frac{3/5}{1+j2 \cdot 10^{-6}f - 2 \cdot 10^{-9}f^2}.$$

$$\blacktriangleright H_0 = 3/5$$

$$\blacktriangleright \underline{H} \text{ est imaginaire pur pour } f = f_0 \text{ donc } f_0 = 1/\sqrt{2 \cdot 10^{-9}} = 22 \text{ kHz}$$

$$\blacktriangleright \underline{H}(f = f_0) = Q/j \text{ donc } Q = \frac{1}{2 \cdot 10^{-6}f_0} = 23.$$

$$3 \quad \underline{H} = \frac{1/4}{1+j2,5 \cdot 10^{-4}f - j2,5 \cdot 10^2/f} :$$

$$\blacktriangleright H_0 = 1/4$$

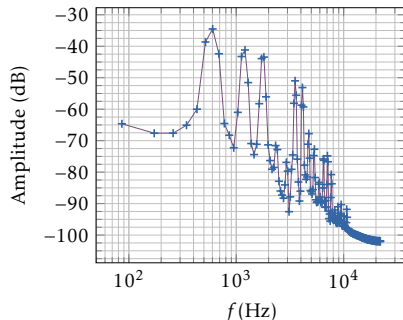
$$\blacktriangleright \underline{H}(f_0) = H_0 \rightarrow f = \sqrt{(2,5 \cdot 10^2)/(2,5 \cdot 10^{-4})} = 1 \text{ kHz.}$$

$$\blacktriangleright \underline{H} = \frac{1/4}{1+j0,25(1 \cdot 10^{-3}f - 1 \cdot 10^3/f)} \rightarrow Q = 0,25.$$

Exercice : effets d'un filtre sur un spectre

On considère le spectre d'un ré4 (de fréquence 587,5 Hz) de guitare donné ci-contre.

- 1 Déterminer l'allure du spectre du signal obtenu quand on applique un passe-bas d'ordre 1 de fréquence de coupure 500 Hz.
- 2 Comment choisir la fréquence de résonance et le facteur de qualité d'un filtre passe-bande d'ordre 2 pour obtenir un signal quasi sinusoïdal correspondant au ré5 ?
- 3 Proposer un montage possédant ces paramètres en utilisant entre autres une bobine de 50 mH



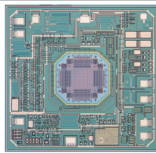
Correction

- 1 fondamental -3, premier harmonique -7, deuxième -10
- 2 $f_0 = 1175 \text{ Hz}$, pour enlever 20dB au fondamental, il faut environ $Q = 7$.
- 3 Pour un bouchon $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ et $Q = RC\omega_0$. Il faudra $C = 37 \mu\text{F}$ et $R = 243 \Omega$.

Exercice : Effets de filtres mécaniques I

- 1 Un accéléromètre comme ceux équipant les téléphones portables peut être modélisé comme un oscillateur harmonique mécanique amorti par frottement fluide.

Quand l'appareil est soumis à une accélération $\vec{a} = a\vec{e}_x$ par rapport à un référentiel galiléen, on montre que la masse mobile m est soumise à une force dite « d'inertie » égale à $\vec{F} = -m\vec{a}$.



1 cm
Photographie d'un accéléromètre deux axes : le capteur MEMS est situé au centre (source Analog Devices)

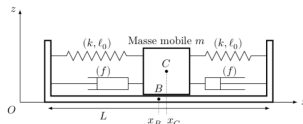


Schéma de principe du fonctionnement mécanique de l'accéléromètre suivant un axe

Exercice : Effets de filtres mécaniques II

- a La masse m est soumise à l'action de deux ressorts identiques (k, ℓ_0) et de deux frottements fluides. On pose x_B l'abscisse du bâti auquel sont attachés les ressorts et x_C celle de la masse dans un référentiel galiléen. La force de frottement fluide subie par la masse a pour expression $-2f(\dot{x}_C - \dot{x}_B)$. Établir l'équation différentielle canonique vérifiée par la différence $X = x_C - x_B$. Identifier une pulsation propre ω_0 et un facteur de qualité Q .
 - b La fréquence propre vaut $f_0 = 5,5\text{ kHz}$ et le facteur de qualité vaut $Q = 5$. Le bâti est soumis à une accélération sinusoïdale $a = a_0 \cos(\omega t)$. Tracer l'allure de X_m/a_0 en fonction de ω . Quelle est la nature du filtre ?
 - c La masse est $m = 1\text{ }\mu\text{g}$. Déterminer la valeur de X_m quand on utilise l'accéléromètre pour mesurer l'accélération de la pesanteur $g = 9,8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.
 - d Pour quelle(s) fréquence(s) l'accéléromètre surestimera-t-il (resp. sousestimera-t-il) l'accélération à laquelle il est soumis d'un facteur 3 ?
- 2 On étudie le mouvement d'un véhicule muni d'une suspension. On note $h_0 + z$ l'altitude du véhicule (avec h_0 l'altitude au repos) et z_r celle de la chaussée dans le référentiel terrestre.
 - a Faire un schéma en modélisant la suspension par un système masse-ressort vertical amorti par frottement fluide.

Exercice : Effets de filtres mécaniques III

- b On modélise le profil de la chaussée par une variation sinusoïdale $z_r = Z_0 \cos(kx)$ avec x la coordonnée horizontale et on s'intéresse à la réponse $z = Z_m / Z_0$ en fonction de la vitesse v_0 selon x . Quelle doit être la nature du filtrage réalisé pour assurer le confort (et la sécurité) du véhicule ? Comment choisir son facteur de qualité ?

Correction

- 1
 - a $m\ddot{x}_C = -2kx_C - 2f(\dot{x}_C - \dot{x}_B) - ma : \omega_0 = \sqrt{2k/m}, Q = \sqrt{km/2}f.$
 - b passe-bas d'ordre 2 résonant en $f \lesssim f_0$, pic à $\approx Q/\omega_0^2$.
 - c pour $\omega = 0$, on a $X_m = a_0/\omega_0^2 = 9\text{ nm}$.
 - d Pour surestimer : autour du pic

$$\frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}} = 3 \rightarrow f = 0,84f_0 \quad f = 1,12f_0$$

Pour sous-estimer : dans la queue de la courbe

$$\frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}} = \frac{1}{3} \rightarrow f = 2,0f_0$$

On pouvait approximer grossièrement $3 = 1/\sqrt{(1-u^2)^2 + 1/Q^2}$ pour $u \approx 1$ et $1/3 = Q/u$ pour $u \gg 1$.

- 2
 - b $z_r = Z_0 \cos(kv_0 t)$. On veut suivre la route à basse vitesse ou pour suivre des reliefs peu accidentés $Z_m = Z_0$, et rester à altitude constante ($Z_m = 0$) à grande vitesse pour éviter les heurts sur les nids-de-poule. Il faut donc un passe-bas, il sera du deuxième ordre. On veut éviter la résonance, donc $Q = 1/\sqrt{2}$.

Indispensable

- ▶ principe et éléments d'un diagramme de Bode
- ▶ effet d'un filtre sur un spectre
- ▶ diagrammes asymptotiques
- ▶ filtres d'ordre 1
- ▶ composition de filtres