DM 35 : corrigé

1°) a) Soit $k \in \mathbb{N}$. $P(X > k) = \displaystyle\sum_{n=k+1}^{\infty} P(X = n) = \sum_{n=k+1}^{\infty} p(1-p)^{n-1}$,

donc $P(X > k) = p(1-p)^k \dfrac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^k$.

b) Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) = \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p} = E(X)$ d'après le cours.

2°) a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $\omega \in \Omega$.
$\omega \in (X = k) \Longleftrightarrow X(\omega) = k \Longleftrightarrow \{X(\omega) > k-1 \text{ et non}[X(\omega) > k]\}$, car $X(\omega) \in \mathbb{N}$,
donc $\omega \in (X = k) \Longleftrightarrow \omega \in (X > k-1) \setminus (X > k)$.
Ainsi $P(X = k) = P((X > k-1) \setminus (X > k)) = P(X > k-1) - P(X > k)$,
car $(X > k) \subset (X > k-1)$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(P(X > k-1) - P(X > k))$,

donc $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X > k-1) + \sum_{k=1}^{n} (k-1)P(X > k+1) - kP(X > k)$. La dernière somme étant télescopique, $S_n = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(X > k)\right) - nP(X > n)$.

3°) a) La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$, or elle est croissante, donc elle converge. Cela signifie que X est d'espérance finie.

b) $nP(X > n) = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(X > k)\right) - S_n$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $nP(X > n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda$.
Si $\lambda \neq 0$, alors $P(X > n) \sim \frac{\lambda}{n}$, ce qui est faux car $\sum P(X > n)$ est convergente. Ainsi $nP(X > n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité $S_n = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(X > k)\right) - nP(X > n)$, on en déduit que $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$.

4°) Cette suite double est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On peut donc travailler dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, sans se soucier des problèmes de convergence.
En particulier, le théorème de Fubini donne : $\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} a_{k,n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} a_{k,n}$, c'est-à-dire
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} P(X = n),$$
ce qui montre que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X > k-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X = n)$, ce qu'il fallait démontrer.

Partie I

5°) a) Notons E_i l'événement "le i-ème individu de la génération G_0 a un enfant" et posons $T_i = 1_{E_i}$. Ainsi $T_i \sim \mathcal{B}(p)$. Or $Z_1 = \sum_{i=1}^{N} T_i$ et les T_i sont mutuellement indépendants, donc d'après le cours, $Z_1 \sim \mathcal{B}(N, p)$.
b) On le montre par récurrence. C'est vrai pour $k = 1$ d'après la question précédente.
Pour $k \geq 1$, supposons que $Z_k(\Omega) = \{0, \dots, N\}$. Ainsi le nombre d'individus de la génération G_k est compris entre 0 et N, et toutes ces valeurs sont possibles. Comme $p \in]0, 1[$, ils engendrent un nombre d'individus compris entre 0 et N, toutes ces valeurs étant possibles. Ainsi, $Z_{k+1}(\Omega) = \{0, \dots, N\}$.
c) Soit $k \in \{1, \dots, N\}$. Pour la probabilité $P_{(Z_n=k)}$, en adaptant le raisonnement du a), on obtient que $Z_{n+1} \sim \mathcal{B}(k, p)$.
d) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{1, \dots, N\}$, on note $F_{i,k}$ l'événement "le i-ème individu de la génération G_0 possède un descendant dans la génération G_k".
D'après la formule des probabilités composées,
$P(F_{i,k+1}) = P(F_{i,k})P(F_{i,k+1}|F_{i,k}) = pP(F_{i,k})$, donc $P(F_{i,k+1}) = p^k P(F_{i,1}) = p^{k+1}$.
Ainsi, si l'on pose $T_{i,k} = 1_{F_{i,k}}$, $T_{i,k} \sim \mathcal{B}(p^k)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $Z_n = \sum_{i=1}^{N} T_{i,n}$ et les $T_{i,n}$ sont mutuellement indépendants, donc d'après le cours, $Z_n \sim \mathcal{B}(N, p^n)$.

6°) a) $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (Z_n = 0)$.
b) Ainsi qu'il est précisé dans le texte introductif, la suite d'événements $[(Z_n = 0)]_{n \geq 1}$ est croissante pour l'inclusion, donc d'après la propriété de continuité des probabilités, $P(E) = \lim_{n \to +\infty} P(Z_n = 0)$, or d'après la question précédente, $P(Z_n = 0) = (1 - p^n)^N$, donc $P(E) = 1$.

7°) a) $P(T > n) = P(Z_n \neq 0) = 1 - P(Z_n = 0) = 1 - (1 - p^n)^N$.
b) D'après le cours, $T_i \sim \mathcal{G}(1 - p)$, car T_i désigne l'instant du premier succès, en considérant qu'il y a succès si et seulement si tel descendant n'a pas de descendance.
c) $(T \leq n) = \bigcap_{i=1}^{N}(T_i \leq n)$, or $P(T_i \leq n) = 1 - P(T_i > n) = 1 - p^n$ d'après la question 1.a. De plus les lignées sont indépendantes entre elles, donc les T_i également. Ainsi $P(T \leq n) = \prod_{i=1}^{N}(T_i \leq n) = (1 - p^n)^N$ (valable également pour $n = 0$).
d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $P(T = n) = P(T \leq n) - P(T \leq n - 1) = (1 - p^n)^N - (1 - p^{n-1})^N$.

8°) a) $P(T > n) = 1 - (1 - p^n)^N = 1 - (1 - Np^n + o(p^n)) \sim Np^n$.
b) $p \in]0, 1[$, donc la série géométrique $\sum p^n$ converge. On déduit alors de la question précédente la convergence de la série $\sum P(T > n)$, ce qui prouve que T admet une espérance finie d'après les préliminaires.
c) Toujours d'après les préliminaires,
$E(T) = \sum_{h=0}^{+\infty}[1 - (1 - p^h)^N]$, donc d'après la formule du binôme de Newton,

$$E(T) = -\sum_{h=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}(-p^h)^k = \sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}(-1)^{k+1}\sum_{h=0}^{+\infty}(p^k)^h = \sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{1 - p^k}.$$

Partie 2

9°) Notons $R(n)$ cette propriété et montrons-la par récurrence.
Pour $n = 1$, chaque individu de la génération 0 engendre 0 ou 2 enfants, donc la génération 1 possède un nombre pair d'individus, compris entre 0 et $2N = 2a_1$, et toutes ces valeurs sont possibles, ce qui prouve $R(1)$.
Pour $n \geq 0$, supposons $R(n)$. Chaque individu de la génération n engendre 0 ou 2 enfants, donc la génération $n+1$ possède un nombre pair d'individus, qui d'après $R(n)$ est compris entre 0 et $4a_n = 2a_{n+1}$, et toutes ces valeurs sont possibles, ce qui prouve $R(n + 1)$.

10°) Soit $i \in \{0, 1, \ldots, a_{n+1}\}$.
Pour tout $k \in \{0, \ldots, a_n\}$, sachant que $Z_n = 2k$, d'après le cours, $\frac{1}{2}Z_{n+1} \sim \mathcal{B}(2k, \frac{1}{2})$.
De plus, la famille $(Z_n = 2k)_{0 \leq k \leq a_n}$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales,
$P(Z_{n+1} = 2i) = \sum_{k=0}^{a_n} P(Z_{n+1} = 2i | Z_n = 2k)P(Z_n = 2k)$,
puis $P(Z_{n+1} = 2i) = \sum_{k=0}^{a_n} \binom{2k}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} P(Z_n = 2k)$.

11°) a) $H_n(1) = \sum_{k=0}^{a_n} P(Z_n = 2k) = 1$ d'après la question 9.
b) $Z_0 = N$: c'est une variable aléatoire déterministe, donc pour tout $k \in \{0, \ldots, a_0 - 1\}$, $P(Z_0 = k) = 0$. Ainsi, $H_0(x) = x^{2a_0} = x^N$.
c) D'après la relation (1),

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{2a_n} x^{2k} \sum_{i=0}^{a_n} \binom{2i}{k} \Big(\frac{1}{2}\Big)^{2i} P(Z_n = 2i) \\ &= \sum_{i=0}^{a_n} \Big(\frac{1}{2}\Big)^{2i} P(Z_n = 2i) \sum_{k=0}^{2a_n} \binom{2i}{k} x^{2k} \\ &= \sum_{i=0}^{a_n} \Big(\frac{1+x^2}{2}\Big)^{2i} P(Z_n = 2i), \end{aligned}$$

donc $H_{n+1}(x) = H_n\Big(\frac{1+x^2}{2}\Big)$.

12°) a) $H_n'(1) = \sum_{k=0}^{a_n} (2k) P(Z_n = 2k) = E(Z_n)$.

b) Dérivons la relation de la question 11.c : $H_{n+1}'(x) = x H_n'\Big(\frac{1+x^2}{2}\Big)$. En remplaçant x par 1, on en déduit que $E(Z_{n+1}) = H_{n+1}'(1) = E(Z_n)$.
On en déduit que $E(Z_n) = E(Z_0) = N$.

13°) On pose $v_n = H_n(0) = P(Z_n = 0)$.
a) On a $(Z_{n+1} = 0) \subset (Z_n = 0)$, donc la suite (v_n) est croissante et majorée par 1 : elle converge.
b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $H_n(w_k) = (w_{n+k})^N$.
Supposons que $n = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $H_0(w_k) = w_k^N = (w_{0+k})^N$, d'où $R(0)$.
Supposons que $n \geq 0$. Supposons $R(n)$. Soit $k \in \mathbb{N}$.
$H_{n+1}(w_k) = H_n(w_{k+1})$, d'après la question 11.c, donc d'après $R(n)$,
$H_{n+1}(w_k) = (w_{n+k+1})^N$, d'où $R(n+1)$.
c) $v_n = H_n(0) = H_n(w_0) = w_n^N$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = f(w_n)$, où $f(x) = \frac{1+x^2}{2}$.
$2f(x) - 2x = 1 + x^2 - 2x = (x-1)^2 \geq 0$, donc la suite (w_n) est croissante.
On montre facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \leq 1$.
Ainsi il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $w_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \lambda$. Mais λ est alors un point fixe de f : $0 = 2(f(\lambda) - \lambda) = (\lambda - 1)^2$. Ainsi, $w_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.
Alors $v_n = w_n^N \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, donc l'espèce s'éteint presque sûrement.

Partie 3

14°) a) Par récurrence sur n, on montre que l'ensemble des valeurs possibles pour Z_n est $\{0, \ldots, N\}$.
b) Soit $i \in \{0, \ldots, N\}$. La famille d'événements $[(Z_n = k)]_{0 \leq k \leq N}$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales,
$P(Z_{n+1} = i) = \sum_{k=0}^{N} P(Z_{n+1} = i | Z_n = k) P(Z_n = k)$, or si l'on sait que $Z_n = k$ avec $k < i$, alors le nombre d'individus de la génération $n+1$ est compris entre 0 et k, donc $P(Z_{n+1} = i | Z_n = k) = 0$. Ainsi $P(Z_{n+1} = i) = \sum_{k=i}^{N} \frac{1}{k+1} P(Z_n = k)$. Cette relation est valable pour $n = 0$.

15°) a) $E(Z_{n+1}) = \sum_{i=0}^{N} i P(Z_{n+1} = i) = \sum_{i=0}^{N} i \sum_{k=i}^{N} \frac{1}{k+1} P(Z_n = k)$, donc
$E(Z_{n+1}) = \sum_{0 \leq i \leq k \leq N} \frac{i}{k+1} P(Z_n = k) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{i=0}^{k} \frac{i}{k+1} P(Z_n = k)$, puis
$E(Z_{n+1}) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k+1} P(Z_n = k) \frac{k(k+1)}{2}$, donc $E(Z_{n+1}) = \sum_{k=0}^{N} \frac{k}{2} P(Z_n = k) = \frac{E(Z_n)}{2}$.
Cette relation est valable pour $n = 0$.
On en déduit que $E(Z_n) = \frac{1}{2^n} E(Z_0) = \frac{N}{2^n}$.
b) D'après la formule de transfert,
$E(Z_{n+1}^2) = \sum_{i=0}^{N} i^2 P(Z_{n+1} = i) = \sum_{i=0}^{N} i^2 \sum_{k=i}^{N} \frac{1}{k+1} P(Z_n = k)$, donc
$E(Z_{n+1}^2) = \sum_{0 \leq i \leq k \leq N} \frac{i^2}{k+1} P(Z_n = k) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{i=0}^{k} \frac{i^2}{k+1} P(Z_n = k)$, puis
$E(Z_{n+1}^2) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k+1} P(Z_n = k) \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, donc
$E(Z_{n+1}^2) = \sum_{k=0}^{N} \frac{k(2k+1)}{6} P(Z_n = k) = \frac{E(Z_n^2)}{3} + \frac{E(Z_n)}{6} = \frac{E(Z_n^2)}{3} + \frac{N}{6.(2^n)}$. Cette relation est valable pour $n = 0$.
c)
◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} = 2^{n+1} E(Z_{n+1}) = \frac{2}{3} u_n + \frac{N}{3}$.
◇ $\lambda = \frac{2}{3}\lambda + \frac{N}{3} \iff \lambda = N$, donc $u_{n+1} - N = \frac{2}{3}(u_n - N)$, puis $u_n - N = (\frac{2}{3})^n (u_0 - N)$, or $u_0 = E(Z_0^2) = N^2$, donc $u_n = (\frac{2}{3})^n (N^2 - N) + N$.
◇ D'après la formule de Koenig, $V(Z_n) = E(Z_n^2) - E(Z_n)^2$, donc
$V(Z_n) = \frac{u_n}{2^n} - \left(\frac{N}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{3^n}(N^2 - N) + \frac{N}{2^n} - \frac{N^2}{4^n}$.

Ainsi, $V(Z_n) = N^2\Big(\dfrac{1}{3^n} - \dfrac{1}{4^n}\Big) + N\Big(\dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{3^n}\Big)$.

16°) a) $E(Z_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} kP(Z_n = k) \geq \sum_{k=1}^{N} P(Z_n = k) \geq P(Z_n \geq 1) \geq 0$.
D'après la question 15.a, $E(Z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc d'après le principe des gendarmes, $P(Z_n \geq 1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors $P(Z_n = 0) = 1 - P(Z_n \geq 1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

b) Comme dans la partie 1, $E = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty}(Z_n = 0)$, donc d'après la propriété de continuité des probabilités, $P(E) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(Z_n = 0) = 1$.

c) $0 \leq P(T > n) = P(Z_n \neq 0) = P(Z_n \geq 1) \leq E(Z_n) = \dfrac{N}{2^n}$, or la série géométrique $\sum \dfrac{1}{2^n}$ est convergente, donc la série $\sum P(T > n)$ est convergente, donc d'après les préliminaires, T possède une espérance finie.