Résumé de cours :
Semaine 1, du 3 au 10 septembre.

1 Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Notations : Nous emploierons dans les énoncés ci-dessous l'une des deux notations suivantes :
Notation a) : Soit D et E deux parties de $\mathbb{R}$. On considère une application f, de D dans E, ce qui signifie que, pour tout $x \in D$, on se donne un unique $f(x) \in E$.
Notation b) : On considère une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ce qui signifie que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on associe ou bien aucun réel, ou bien un unique réel qui est alors noté $f(x)$.

Remarque. En pratique, les deux mots *application* et *fonction* sont souvent considérés comme synonymes et c'est le contexte qui permet de savoir laquelle des notations précédentes est employée.

1.1 Graphe d'une fonction

Définition. (Notation b)) Le domaine de définition de f, noté $\mathcal{D}_f$ est l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels la quantité $f(x)$ est calculable.

Remarque. On peut ainsi passer d'une notation à l'autre :
Si f est une application de D dans E (notation a)), alors on peut voir f comme une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (notation b)) telle que $D \subset \mathcal{D}_f$.
Réciproquement, si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (notation b)), on peut voir f comme une application de D dans E, pour toute partie D incluse dans $\mathcal{D}_f$ et pour toute partie E contenant
$f(D) \stackrel{\Delta}{=} \{f(x) \ / \ x \in D\}$.

Notation. Soit f une application de D dans E (notation a)).
Soit D' une partie de D et E' une partie de E.
- On note $f|_{D'}$ l'application de D' dans E qui à x associe $f(x)$. On dit que $f|_{D'}$ est la restriction de f à D'.
- Lorsque, pour tout $x \in D$, $f(x) \in E'$, on note $f|^{E'}$ l'application de D dans E' qui à x associe $f(x)$. On dit que $f|^{E'}$ est la corestriction de f à E'.
- Lorsque, pour tout $x \in D'$, $f(x) \in E'$, on note $f|_{D'}^{E'}$ l'application de D' dans E' qui à x associe $f(x)$.

Définition.
On se place dans le plan usuel, muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
La représentation graphique de f, aussi appelée le graphe de f, est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$, lorsque x décrit $\mathcal{D}_f$ (notation b)), ou bien lorsque x décrit D (notation a)).

Définition. Lorsque $y = f(x)$, où $x \in \mathcal{D}_f$ et $y \in \mathbb{R}$,
- on dit que y est **l'image** de x par f et
- que x est **un antécédent** de y par f.

Tout élément x de $\mathcal{D}_f$ possède une unique image $f(x)$ par f,
mais si $y \in \mathbb{R}$, y peut ne posséder aucun antécédent par f, il peut aussi en posséder plusieurs.

Les définitions et propriétés qui terminent ce paragraphe sont à connaître même si on ne les démontrera effectivement que plus tard.

Définition : Soit f une application d'un ensemble quelconque E dans un ensemble quelconque F (ainsi E et F ne sont pas forcément des parties de $\mathbb{R}$).

— On dit que f est surjective si et seulement si $\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$. Ainsi, f est surjective si et seulement si tout élément de F possède au moins un antécédent.

— On dit que f est injective si et seulement si $\forall x, y \in E,\ [f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y]$. Ainsi, f est injective si et seulement si, pour tout couple d'éléments distincts de E, leurs images sont différentes. f est injective si et seulement si tout élément de F possède au plus un antécédent.

Définition. Un polynôme P (à coefficients réels) est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (notation a)) de la forme $x \longmapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, où $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.
Si $a_n \neq 0$, on dit que n est le degré de ce polynôme. On note $n = \deg(P)$.
Par convention, l'application identiquement nulle est un polynôme de degré égal à $-\infty$.

Définition. Soit P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$.
On dit que α est une racine de P si et seulement si $P(\alpha) = 0$.

Propriété. Soit P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors α est une racine de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$.

Propriété. Soit P un polynôme et $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ k réels deux à deux distincts. Alors $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sont des racines de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_k)Q(x)$.

Propriété. Soit P et Q deux polynômes. Alors l'application $x \longmapsto P(x)Q(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est aussi un polynôme, que l'on note PQ. De plus, $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Théorème. Soit P un polynôme non nul à coefficients réels de degré $n \in \mathbb{N}$. Alors le nombre de racines de P est inférieur ou égal à n.

1.2 Premières caractéristiques d'une fonction

Définition. (Notation b))

— f est paire si et seulement si : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ [-x \in \mathcal{D}_f] \wedge [f(x) = f(-x)]$.

— f est impaire si et seulement si : $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ [-x \in \mathcal{D}_f] \wedge [f(-x) = -f(x)]$.

— Soit $T > 0$. f est T-périodique si et seulement si $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ [x + T \in \mathcal{D}_f] \wedge f(x + T) = f(x)$.

Propriété.

— Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnés.

— Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine des axes.

— Le graphe d'une fonction T-périodique est invariant par la translation de vecteur $T\overrightarrow{\imath}$.

Définition. (notation a))

— f est croissante si et seulement si $\forall x, y \in D,\ [x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)]$.

— f est strictement croissante si et seulement si $\forall x, y \in D,\ [x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)]$.

— f est décroissante si et seulement si $\forall x, y \in D,\ [x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)]$.

— f est strictement décroissante si et seulement si $\forall x, y \in D,\ [x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)]$.

— f est monotone si et seulement si f est croissante ou décroissante.

— f est strictement monotone si et seulement si f est strictement croissante ou strictement décroissante.

Propriété. Graphiquement, les antécédents de λ par f sont les abscisses des points d'intersection du graphe de f avec la droite horizontale d'équation $y = \lambda$.

Propriété. Graphiquement, les solutions de l'inéquation $f(x) \geq \lambda$, en l'inconnue x, sont les abscisses des points du graphe de f situés au-dessus de la droite horizontale d'équation $y = \lambda$.

Définition. Une application $f : D \longrightarrow E$ est majorée si et seulement si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in D$, $f(x) \leq M$, c'est-à-dire si et seulement si le graphe de f est situé sous la droite horizontale d'équation $y = M$.

1.3 Opérations sur les fonctions

Définition. (notation b)) Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $f + g$ est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
  On a $\mathcal{D}_{f+g} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.
- λf est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
  On a $\mathcal{D}_{\lambda f} = \mathcal{D}_f$.
- fg est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$.
  On a $\mathcal{D}_{fg} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.
- $|f|$ est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $|f|(x) = [f(x)|$. On a $\mathcal{D}_{|f|} = \mathcal{D}_f$.
- On définit de même $f - g$, $\frac{1}{f}$, $\frac{f}{g}$.

Définition. f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

Définition de la composition : (Notation b)) Soit f et g deux fonctions. On note
$f(g(x)) = (f \circ g)(x)$: on définit ainsi une nouvelle fonction, $f \circ g$. C'est la composée de f et g.

Application réciproque :
Soit f une application de D dans E (notation a)). On dit que f est bijective si et seulement si f est injective et surjective. Dans ce cas, pour tout $y \in E$, il existe un unique $x_y \in D$ tel que $y = f(x_y)$.
En notant $x_y = f^{-1}(y)$, on définit une application f^{-1} de E dans D, qui est également bijective. C'est la bijection réciproque de la bijection f. On a $(f^{-1})^{-1} = f$, $f \circ f^{-1} = Id_E$ et $f^{-1} \circ f = Id_D$, où Id_E est l'application de E dans E qui à x associe x.

Propriété. Soit f une application de D dans E (notation a)).
On suppose qu'il existe une application g de E dans D telle que $f \circ g = Id_E$ et $g \circ f = Id_D$.
Alors f est une bijection et $f^{-1} = g$.

Propriété. Si f est une bijection d'une partie E de $\mathbb{R}$ vers une partie F de $\mathbb{R}$, alors le graphe de f^{-1} est le symétrique du graphe de f pour la symétrie orthogonale selon la première diagonale, c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soit f et g deux applications définies sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que f est inférieure à g sur D, et on note $f \leq g$, lorsque : $\forall x \in D, \ \ f(x) \leq g(x)$.

Remarque. La notation "$f < g$" désignera parfois la condition $[\forall x \in D, \ \ f(x) < g(x)]$,
et d'autres fois la condition $[(f \leq g)$ et $(f \neq g)]$,
c'est-à-dire $[\forall x \in D, \ \ f(x) \leq g(x)]$ et $[\exists x \in D, \ \ f(x) < g(x)]$.

2 Trigonométrie

2.1 Les fonctions circulaires

Propriété. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{[e^z]} = e^{[\overline{z}]}$. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $e^z \times e^{z'} = e^{z+z'}$.

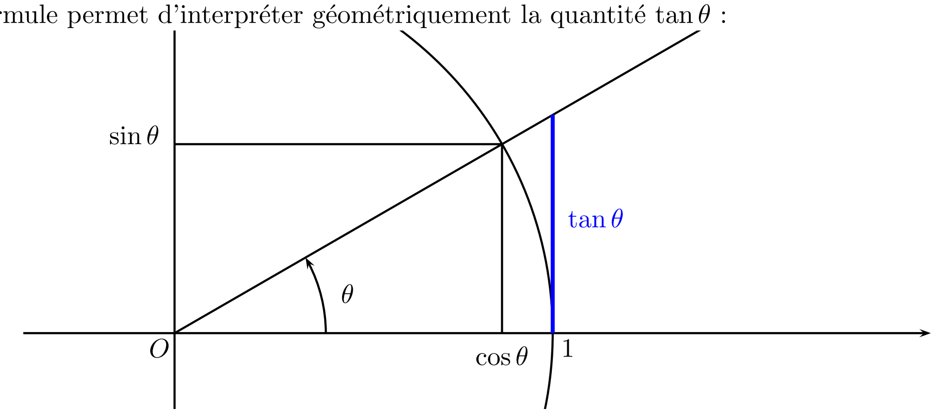
Définition. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On admet que le complexe $e^{i\theta}$ est sur le cercle unité et que θ est l'angle $\widehat{M_1 M_0 M_{e^{i\theta}}}$ (en notant M_z le point d'affixe z).
On pose $\cos(\theta) = Re(e^{i\theta})$ et $\sin(\theta) = Im(e^{i\theta})$.
Ainsi $\cos(\theta)$ est l'abscisse du point $M_{e^{i\theta}}$ et $\sin(\theta)$ est son ordonnée.

Formules d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Propriété. Les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques. cos est paire. sin est impaire.

Définition des fonctions tangente et cotangente : $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ et $\text{cotan }\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$.
La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$.

Formules : Soit OAB un triangle rectangle en A. Par définition, l'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit. Notons $\theta = \widehat{AOB}$ l'angle au sommet O.
Alors $\cos\theta = \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{\text{longueur du côté adjacent}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$, $\sin\theta = \dfrac{AB}{OB} = \dfrac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$
et $\tan\theta = \dfrac{AB}{OA} = \dfrac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur du côté adjacent}}$.
Cette dernière formule permet d'interpréter géométriquement la quantité $\tan\theta$:



2.2 Graphes des fonctions circulaires

Il faut savoir tracer les graphes des fonctions cos, sin et tan.

2.3 Formulaire de trigonométrie

Il faut savoir établir chacune de ces formules.
Formule circulaire : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Formules de symétries : Lorsque les quantités qui interviennent sont définies,

$$\begin{array}{ccc}
\cos(-\theta) = \cos(\theta) & \sin(-\theta) = -\sin(\theta) & \tan(-\theta) = -\tan(\theta) \\
\cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta) & \sin(\pi-\theta) = \sin(\theta) & \tan(\pi-\theta) = -\tan(\theta) \\
\cos(\pi+\theta) = -\cos(\theta) & \sin(\pi+\theta) = -\sin(\theta) & \tan(\pi+\theta) = \tan(\theta) \\
\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin(\theta) & \sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos(\theta) & \tan(\frac{\pi}{2}-\theta) = \text{cotan }(\theta) \\
\cos(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\sin(\theta) & \sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = \cos(\theta) & \tan(\frac{\pi}{2}+\theta) = -\text{cotan }(\theta)
\end{array}$$

Il faut être capable de visualiser toutes ces formules sur le cercle trigonométrique.

Formule d'addition :
$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$ et $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$.
$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$ et $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$,
$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$ et $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\tan b}$.

Formules de duplication : $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$,
$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$ et $\tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.

Premières formules de linéarisation :
$\cos^2 a = \dfrac{\cos(2a)+1}{2}$ et $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos(2a)}{2} \geq 0$.
$2\cos a.\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$,
$2\sin a.\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$,
$2\sin a.\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.

Formules de factorisation :
$\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$,
$\cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$,
$\sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$,
$\sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$.
Il faut savoir les retrouver en utilisant les complexes.

Formules (hors programme) : en posant $u = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, on a
$\cos\theta = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin\theta = \dfrac{2u}{1+u^2}$, $\tan\theta = \dfrac{2u}{1-u^2}$.

Propriété. Lignes trigonométriques à connaître :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non défini

La croissance de la fonction tangente sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ aide à retenir la dernière ligne.

2.4 Equations trigonométriques

2.4.1 Résolution du système (S) : $(\cos x = c) \wedge (\sin x = s)$

2.4.2 Résolution de l'équation $\cos x = c$

Définition. L'application cos réalise une bijection (décroissante) de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$.
On note arccos l'application réciproque.

Propriété. Pour tout $u, v \in \mathbb{R}$, $\cos u = \cos v \iff u \equiv \pm v\ [2\pi]$.

Il faut savoir résoudre les équations suivantes : $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos x = \cos(\frac{\pi}{3} - 2x)$.

2.4.3 Résolution de l'équation $\sin x = s$

Définition. L'application sin réalise une bijection (croissante) de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1, 1]$. On note arcsin l'application réciproque. Il faut savoir tracer son graphe.

Propriété. Pour tout $u, v \in \mathbb{R}$, $\sin u = \sin v \iff (u \equiv v\ [2\pi]) \vee (u \equiv \pi - v\ [2\pi])$.

2.4.4 Résolution de l'équation $\tan x = t$

Définition. tan est une bijection (croissante) de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$. On note arctan l'application réciproque. Il faut savoir tracer son graphe.

Corollaire. Pour tout $u, v \in \mathbb{R}$, $\tan u = \tan v \iff u \equiv v\ [\pi]$.

2.4.5 Expressions de la forme $A\cos x + B\sin x$.

Technique à connaître : transformation de $A\cos x + B\sin x$ en $r\cos(x-\varphi)$.
Première méthode :
Soit $(A,B) \in \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$.
$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2+B^2}\Big(\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x + \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x\Big)$.
Posons $c = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ et $s = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$. On a $c^2+s^2=1$, donc on sait qu'il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $c = \cos\varphi$ et $s = \sin\varphi$. Ainsi, en posant $r = \sqrt{A^2+B^2}$,
$A\cos x + B\sin x = r(\cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x) = r\cos(x-\varphi)$.
r est appelé l'amplitude et φ la phase.
On remarquera que, par construction, $c+is = e^{i\varphi}$, donc $A+iB = re^{i\varphi}$.
Seconde méthode : lorsque $A \neq 0$. Il existe φ tel que $\tan\varphi = \dfrac{B}{A}$.
Alors $A\cos x + B\sin x = A(\cos x + \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi}.\sin x) = \dfrac{A}{\cos\varphi}\cos(x-\varphi)$.

Sachez résoudre les équations suivantes :
$-3\cos x + 4\sin x = 10$ et $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2$.

3 Dérivation et intégration

3.1 Pente de la tangente

Propriété. Pour une droite d'équation $y = px + y_0$, on dit que p est sa pente et que y_0 est l'ordonnée à l'origine.
On dispose également des droites "verticales", d'équation $x = x_0$, où $x_0 \in \mathbb{R}$, qui sont de pente infinie.
Deux droites affines du plan sont parallèles si et seulement si elles ont la même pente.

Propriété. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Pour tout $x_0, x_1 \in \mathcal{D}_f$, avec $x_0 \neq x_1$, la corde du graphe de f entre les abscisses x_0 et x_1 est par définition l'unique droite du plan passant par les points du graphe de f d'abscisses x_0 et x_1.
Elle a pour équation : $y - f(x_0) = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \times (x-x_0)$.
En particulier, la pente de cette droite est égale à $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$.

Définition. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.
On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si la quantité $\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ possède une limite lorsque x_1 tend vers x_0. Dans ce cas, cette limite est notée $f'(x_0)$ et est appelée la dérivée de f en x_0.
Informellement, lorsque f est dérivable en x_0, la corde du graphe de f entre les abscisses x_0 et x_1 tend vers la tangente en x_0, d'équation : $y - f(x_0) = f'(x_0).(x-x_0)$.
Cela dit que la meilleure approximation de f, au voisinage de x_0, parmi l'ensemble des applications affines, est $x \longmapsto f(x_0) + f'(x_0).(x-x_0)$.
Il faut retenir que $f'(x_0)$, lorsqu'elle est définie, est la pente de la tangente au graphe de f en le point d'abscisse x_0.

Définition. On dit que f est dérivable sur l'intervalle I si et seulement si elle est dérivable en chacun des réels de I. On dispose alors de l'application f', définie au moins sur I.
On dit alors que f est de classe D^1.
Lorsque f' est continue sur I, on dit que f est de classe C^1 sur I.

Définition. Si f' est définie sur un intervalle I, on dit que f est deux fois dérivable sur I lorsque f' est dérivable en tout point de I. La dérivée de la dérivée de f est notée f''. On l'appelle la dérivée seconde de f.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Par récurrence, la dérivée n-ième de f lorsqu'elle est définie est la dérivée de la dérivée $(n-1)$-ième. On la note $f^{(n)}$. On dit alors que f est de classe D^n sur I.
On dit que f est de classe C^n sur I lorsque f est n fois dérivable sur I et que $f^{(n)}$ est continue.
On dit que f est de classe C^∞ sur I lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est C^n sur I.

Remarque. On convient que $f^{(0)} = f$, pour toute application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3.2 Règles de dérivation

Règles générales A savoir utiliser dans des calculs sans hésiter

- Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.
- $(fg)' = f'g + fg'$.
- $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$.
- $(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$.
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(f^\alpha)' = \alpha f' \times f^{\alpha-1}$.
- Lorsque f est bijective, $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Les fonctions qui interviennent dans ces formules sont toutes supposées dérivables sur un intervalle. On se limite éventuellement à un sous-intervalle pour s'assurer que les quantités qui interviennent dans les formules sont bien définies.

Dérivées des fonctions usuelles A connaître par coeur

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$, $\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$, $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- $\cos' = -\sin$, $\sin' = \cos$.
- $\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.
- $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$.
- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$, $\frac{d}{dx}(a^x) = (\ln a)a^x$ (où $a > 0$), $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Dérivées d'ordre supérieur

- Si f est n fois dérivable, $\frac{d^n}{dx^n}(f(ax+b)) = a^n f^{(n)}(ax+b)$.
- $\cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$ et $\sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$.
- $\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$.