DM 17. Corrigé

Problème 1 : une équation aux dérivées partielles

1°) a) $\dfrac{\partial r}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{\partial\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\partial x} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \dfrac{x}{r}$.

b) D'après la formule de dérivation d'une composée de fonctions,
$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial u(r(x,y,z))}{\partial x} = \dfrac{\partial r}{\partial x}u'(r(x,y,z))$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{r}u'(r)$.
Ensuite, d'après la formule de dérivation d'un produit,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{1}{r}u'(r) + x\dfrac{\partial r}{\partial x}\Big(\dfrac{-1}{r^2}\Big)u'(r) + \dfrac{x}{r}\dfrac{\partial r}{\partial x}u''(r) = \dfrac{1}{r}u'(r) - \dfrac{x^2}{r^3}u'(r) + \dfrac{x^2}{r^2}u''(r)$.
Ainsi, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{y^2+z^2}{r^3}u'(r) + \dfrac{x^2}{r^2}u''(r)$.

c) Par symétrie des rôles joués par x, y et z,
on obtient que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{x^2+z^2}{r^3}u'(r) + \dfrac{y^2}{r^2}u''(r)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \dfrac{x^2+y^2}{r^3}u'(r) + \dfrac{z^2}{r^2}u''(r)$,
donc $\Delta f = \dfrac{2}{r}u'(r) + u''(r)$.

2°) a) Ainsi, $(E_\omega) \Longleftrightarrow \forall r \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{2}{r}u'(r) + u''(r) + \omega^2 u(r) = 0$.
Or $v'(t) = u(t) + tu'(t)$ et $v''(t) = 2u'(t) + tu''(t)$, donc
$(E_\omega) \Longleftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ 2u'(t) + tu''(t) + \omega^2 tu(t) = 0 \Longleftrightarrow v'' + \omega^2 v = 0$.

b) D'après le cours, $(E_\omega) \Longleftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R},\ v(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$,
donc $(E_\omega) \Longleftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R},\ u(t) = A\dfrac{\cos(\omega t)}{t} + B\dfrac{\sin(\omega t)}{t}$.
Or, lorsque t tend vers 0 par valeurs positives, $\dfrac{\sin(\omega t)}{t} = \omega\dfrac{\sin(\omega t)}{\omega t} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \omega$
et $\left|\dfrac{\cos(\omega t)}{t}\right| \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, donc $f = u \circ r$ est une solution non nulle de (E_ω) telle que $u(t)$ possède une limite finie lorsque t tend vers 0 si et seulement si u est de la forme $t \longmapsto B\dfrac{\sin(\omega t)}{t}$ avec $B \neq 0$.

3°) a) On suppose maintenant qu'il existe $B \in \mathbb{R}^*$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,
$u(t) = B\dfrac{\sin(\omega t)}{t}$. Ainsi, $u'(t) = B\dfrac{t\omega\cos(\omega t) - \sin(\omega t)}{t^2}$, puis $u'(1) = B(\omega\cos\omega - \sin\omega)$,
donc, B étant non nul, $u'(1) = 0 \Longleftrightarrow \omega\cos\omega = \sin\omega$.

Si l'on suppose que $\cos\omega = 0$, alors $u'(1) = 0 \iff \sin\omega = 0 \implies 1 = \sin^2\omega + \cos^2\omega = 0$, ce qui est faux. Ainsi, on peut supposer que $\cos\omega \neq 0$. Alors $u'(1) = 0 \iff \tan\omega = \omega$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $I_n =]\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi[$. Notons $f \ : \ x \longmapsto \tan x - x$.
f est définie et dérivable sur I_n, avec $f'(x) = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x \geq 0$. De plus $f'(x)$ ne s'annule avec $x \in I_n$ que lorsque $x = (n+1)\pi$, donc f est strictement croissante sur I_n. Elle est donc injective et réalise ainsi une bijection de I_n sur $f(I_n)$. De plus les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2} + n\pi$ et $\frac{\pi}{2} + (n+1)\pi$ sont respectivement $-\infty$ et $+\infty$, car tan est π-périodique. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(I_n) = \mathbb{R}$. f est ainsi une bijection de I_n dans $\mathbb{R}$. En particulier, il existe $\omega_n \in I_n$ tel que $f(\omega_n) = 0$, c'est-à-dire tel que $\tan\omega_n = \omega_n$.
c) On suppose dans cette question qu'il existe $B_n, B_p \in \mathbb{R}^*$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $u_n(t) = B_n \dfrac{\sin(\omega_n t)}{t}$ et $u_p(t) = B_p \dfrac{\sin(\omega_p t)}{t}$.
$\diamond$ *Première méthode :*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u_n(t)u_p(t)t^2\ dt &= B_nB_p\int_0^1 \sin(\omega_n r)\sin(\omega_p r)\ dr\\
&= B_nB_p\int_0^1 \frac{1}{2}\Big(\cos((\omega_n-\omega_p)r) - \cos((\omega_n+\omega_p)r)\Big)\ dr\\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{\sin((\omega_n-\omega_p)r)}{\omega_n-\omega_p} - \frac{\sin((\omega_n+\omega_p)r)}{\omega_n+\omega_p}\Big]_0^1\\
&= \frac{D}{2(\omega_n^2-\omega_p^2)},\ \text{où}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D &= (\omega_n+\omega_p)(\sin\omega_n\cos\omega_p - \cos\omega_n\sin\omega_p) - (\omega_n-\omega_p)(\sin\omega_n\cos\omega_p + \cos\omega_n\sin\omega_p)\\
&= -2\omega_n\cos\omega_n\sin\omega_p + 2\omega_p\cos\omega_p\sin\omega_n,
\end{aligned}$$

or $\omega_n\cos\omega_n = \sin\omega_n$ et $\omega_p\cos\omega_p = \sin\omega_p$, donc $D = 0$, puis $\displaystyle\int_0^1 u_n(t)u_p(t)t^2\ dt = 0$.
$\diamond$ *Seconde méthode :*
$v_n'' + \omega_n^2 v_n = 0$, donc $\displaystyle -\omega_n^2\int_0^1 u_n(t)u_p(t)t^2\ dt = \int_0^1 v_n''(t)v_p(t)\ dt$. En intégrant par parties, $\displaystyle -\omega_n^2\int_0^1 u_n(t)u_p(t)t^2\ dt = [v_n'(r)v_p(r)]_0^1 - \int_0^1 v_n'(r)v_p'(r)\ dr$.
Or $v_p(r) = B_r\sin(\omega_n r)$, donc $v_p(0) = 0$. De plus, $v_n'(r) = u_n(r) + ru_n'(r)$, donc $v_n'(1) = u_n(1) + u_n'(1) = u_n(1) = v_n(1)$.
Ainsi, $\displaystyle -\omega_n^2\int_0^1 u_n(t)u_p(t)t^2\ dt = v_n(1)v_p(1) - \int_0^1 v_n'(r)v_p'(r)\ dr$.
Cette dernière expression est symétrique en fonction de (n,p),
donc $\displaystyle -\omega_n^2\int_0^1 u_n(t)u_p(t)t^2\ dt = -\omega_p^2\int_0^1 u_n(t)u_p(t)t^2\ dt$, or $\omega_n^2 \neq \omega_p^2$, donc on retrouve que $\displaystyle\int_0^1 u_n(t)u_p(t)t^2\ dt = 0$.

4°) a) $\omega_n - (n+1)\pi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc $\omega_n - (n+1)\pi = \arctan(\tan(\omega_n - (n+1)\pi))$, or l'application tan est π-périodique, donc $\omega_n - (n+1)\pi = \arctan(\tan(\omega_n)) = \arctan\omega_n$.

De plus, sur $\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{d}{dx}\Big(\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x}\Big) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$, donc cette application est constante, puis en l'évaluant en 1, on obtient que $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.
On en déduit que $\omega_n - (n+1)\pi = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\Big(\dfrac{1}{\omega_n}\Big)$, donc $\omega_n = n\pi + \dfrac{3\pi}{2} - \arctan\Big(\dfrac{1}{\omega_n}\Big)$.
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\pi}{2} + n\pi \leq \omega_n \leq \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi$, donc $\dfrac{1}{2n} + 1 \leq \dfrac{\omega_n}{n\pi} \leq \dfrac{3}{2n} + 1$.
Les deux suites minorante et majorante tendent toutes les deux vers 1, donc d'après le principe des gendarmes, $\dfrac{\omega_n}{n\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Ainsi $\omega_n \sim n\pi$.
On en déduit que $\dfrac{1}{\omega_n} \sim \dfrac{1}{n\pi} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\arctan\Big(\dfrac{1}{\omega_n}\Big) \sim \dfrac{1}{\omega_n} \sim \dfrac{1}{n\pi}$. Ceci signifie que $\arctan\Big(\dfrac{1}{\omega_n}\Big) = \dfrac{1}{n\pi} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$.
Ainsi, d'après la question précédente, $\omega_n = n\pi + \dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$.

Problème 2 : La variole

Partie I : L'espérance de vie.

1°) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Utilisons les notations de la question suivante :
pour tout $k \in \{0, \ldots, N\}$, on note A_k le point de coordonnées $(a + k\frac{b-a}{N}, 0)$ et B_k le point de coordonnées $(a + k\frac{b-a}{N}, f(a + k\frac{b-a}{N}))$.
Sur un schéma (à faire), on voit que la quantité $\dfrac{b-a}{N} f(a+k\dfrac{b-a}{N})$ est l'aire du rectangle de base l'intervalle $\Big[a + k\dfrac{b-a}{N}, a + (k+1)\dfrac{b-a}{N}\Big]$ et de hauteur le segment $[A_k, B_k]$.
Lorsque N est grand, la réunion de ces rectangles épouse de mieux en mieux la surface située entre l'axe Ox et le graphe de f. Or ces rectangles ne se chevauchent pas, donc S_N représente l'aire de leur réunion. Il est donc concevable que $S_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

2°) Sur un schéma (à faire), on voit que les trapèzes $A_kB_kB_{k+1}A_{k+1}$ approchent le graphe de f encore mieux que les rectangles précédents. La somme des aires de ces trapèzes constitue ainsi une bonne valeur approchée de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$. L'aire du trapèze $A_kB_kB_{k+1}A_{k+1}$ est égale à $\dfrac{b-a}{2N}\Big(f(a+k\dfrac{b-a}{N})+f(a+(k+1)\dfrac{b-a}{N})\Big)$, donc leur somme vaut $T_N = \dfrac{b-a}{2N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}\Big(f(a+k\dfrac{b-a}{N}) + f(a+(k+1)\dfrac{b-a}{N})\Big)$, que l'on peut écrire sous la forme $T_N = \dfrac{b-a}{2N}\Big(\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} f(a+k\dfrac{b-a}{N}) + \sum_{k=1}^{N} f(a+k\dfrac{b-a}{N})\Big)$. Ainsi, on obtient bien que $T_N = \dfrac{b-a}{N}\Big(\dfrac{f(a)+f(b)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} f(a+k\dfrac{b-a}{N})\Big)$.

3°) $\diamond$ Fixons une durée Δx. $P(k\Delta x) - P((k+1)\Delta x)$ représente le nombre d'individus morts entre $k\Delta x$ et $(k+1)\Delta x$. Si un individu meurt à un instant $t \in [k\Delta x, (k+1)\Delta x[$, on approche la date de sa mort par la date $k\Delta x$. C'est acceptable, informellement, si Δx est suffisamment petit. Alors la moyenne des durées de vie des P_0 individus initiaux, pondérée par le nombre d'individus accédant à chacune de ces durées de vie est égale à $E = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{T}{\Delta x}\rfloor+1} k\Delta x \times \dfrac{P(k\Delta x) - P((k+1)\Delta x)}{P_0}$.

Lorsque $k > \lfloor \frac{T}{\Delta x}\rfloor + 1$, $k > \frac{T}{\Delta x}$, donc $k\Delta x > T$ et $P(k\Delta x) = 0$. Il est donc normal d'arrêter la somme à ce niveau.

$\diamond$ Posons $b = T+1$ et $a = 0$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Posons $\Delta x = \frac{b-a}{N}$. On suppose N suffisamment grand pour que $\Delta x \le \frac{1}{2}$.

Ainsi, $N\Delta x = b - a = T+1$, or $(\lfloor \frac{T}{\Delta x}\rfloor + 2)\Delta x \le T + 2\Delta x \le T+1$, donc $N \ge \lfloor \frac{T}{\Delta x}\rfloor + 2$ et $E = \dfrac{1}{P_0}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}\Big(k\dfrac{b-a}{N}\Big)\dfrac{P(k\Delta x) - P((k+1)\Delta x)}{\Delta x} \times \dfrac{b-a}{N}$.

Δx est supposé suffisamment petit pour qu'une valeur approchée de $\dfrac{P(k\Delta x) - P((k+1)\Delta x)}{\Delta x}$ soit $-P'(k\frac{b-a}{N})$. Ainsi, en posant $f(x) = xP'(x)$ pour tout x, on obtient $E = -\dfrac{1}{P_0}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}\dfrac{b-a}{N} f(a+k\dfrac{b-a}{N})$. D'après la première question, une bonne définition mathématique de E est $E = -\dfrac{1}{P_0}\displaystyle\int_0^b xP'(x)dx = -\dfrac{1}{P_0}\int_0^{+\infty} xP'(x)dx$.

4°) a) Intégrons par parties : $-P_0 E = [xP(x)]_0^b - \int_0^b P(x)\ dx$, or $P(b) = 0$, donc $E = \dfrac{1}{P_0}\displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)\ dx$.

b) On applique la question 2, avec $a = 0$ et $b = N$, où N est supérieur à 150, de sorte que pour tout $n \ge N$, $P(n) = 0$. Ainsi, une valeur approchée de E est donnée par $\tilde{E} = \dfrac{1}{P_0}\dfrac{N-0}{N}\Big(\dfrac{P(0)+P(N)}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} P(k)\Big) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{P_0}\sum_{k=1}^{+\infty} P(k)$.

Partie II : Équations différentielles.

5°) a) $\Delta S = S(x+\Delta x) - S(x)$, or entre x et $x + \Delta x$, en moyenne, parmi les $S(x)$ individus, $m(x)\Delta x S(x)$ vont mourir et $qS(x)\Delta x$ vont attraper la variole.

Ainsi, $\Delta S = -qS(x)\Delta x - m(x)S(x)\Delta x$.

Donc $-(m(x)+q)S(x) = \dfrac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x} \underset{\Delta x \to 0}{\longrightarrow} S'(x)$, si bien que lorsque Δx est suffisamment petit, on peut affirmer que S est une solution de l'équation différentielle

$(E_S)\ :\ S' = -(m(x)+q)S$.

b) De la même façon, entre x et $x+\Delta x$, en moyenne, parmi les $R(x)$ individus, $m(x)\Delta x R(x)$ vont mourir, mais dans le même temps, parmi les $qS(x)\Delta x$ individus qui viennent d'attraper la variole, une proportion de $1-p$ d'entre eux va intégrer le groupe des $R(x)$ individus. Ainsi $R(x+\Delta x)-R(x) = (1-p)qS(x)\Delta x - m(x)\Delta x R(x)$, donc R satisfait l'équation différentielle $(E_R)\ :\ R' = q(1-p)S - m(x)R$.

6°) a) $f = \dfrac{S}{S+R}$, donc $f' = \dfrac{S'(S+R)-(S+R)'S}{(S+R)^2}$, or $(S+R)' = -m(S+R)-pqS$, donc $(S+R)^2 f' = -(m+q)S(S+R) - S(-m(S+R)-pqS)$,
puis $(S+R)f' = -(m+q)S + mS + pq\dfrac{S^2}{S+R}$. Ceci montre que f satisfait l'équation différentielle $(E_f)\ :\ f' = -qf + pqf^2$.

b) $\diamond$ On pose $g = \dfrac{1}{f}$. Ainsi $f' = -\dfrac{g'}{g^2}$, donc $-\dfrac{g'}{g^2} = -\dfrac{q}{g} + pq\dfrac{1}{g^2}$, puis $g' = qg - pq$.

$\diamond$ g est donc solution de l'équation différentielle $(E)\ :\ y' = qy - pq$, dont l'équation homogène est $y' = qy$. La solution générale de l'équation homogène est $y = Ce^{qx}$ où $C \in \mathbb{R}$. De plus (E) admet comme solution particulière l'application constante $x \longmapsto p$, donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = Ce^{qx} + p$.

De plus $g(0) = \dfrac{1}{f(0)} = 1$, car $R(0) = 0$, donc $1 = C + p$. On a bien montré que $f(x) = \dfrac{1}{(1-p)e^{qx}+p}$.

c) On a supposé que $P(x)$ ne s'annulait pas pour définir $f(x)$. De plus, pour définir $g(x)$, on doit également supposer que $S(x)$ ne s'annule pas. Or $P(x) = 0 \Longrightarrow S(x) = 0$, donc il suffit de supposer que, pour tout x, $S(x) > 0$.

7°) D'après (E_S) et d'après le cours, en notant M une primitive de m, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $S(x) = Ce^{-qx-M(x)}$.

Alors (E_R) devient : $R' = q(1-p)Ce^{-qx-M(x)} - m(x)R$, dont l'équation homogène est $(H_R)\ :\ R' = -m(x)R$.

On sait que $(H_R) \Longleftrightarrow \exists D \in \mathbb{R},\ De^{-M(x)}$. On utilise la méthode de variation de la constante en posant $R = D(x)e^{-M(x)}$. D'après le cours,

$(E_R) \Longleftrightarrow D'(x)e^{-M(x)} = q(1-p)Ce^{-qx-M(x)} \Longleftrightarrow D'(x) = q(1-p)Ce^{-qx}$, donc

$(E_R) \Longleftrightarrow \exists D_0 \in \mathbb{R},\ D(x) = D_0 + \displaystyle\int_0^x q(1-p)Ce^{-qx}\,dx = D_0 + (p-1)C(e^{-qx}-1)$.

Il existe donc $C, D \in \mathbb{R}$ tels que $S(x) = Ce^{-qx-M(x)}$
et $R(x) = De^{-M(x)} + (p-1)Ce^{-qx-M(x)}$.

On peut choisir pour M l'unique primitive de m qui s'annule en 0. Ainsi, lorsque $x = 0$, $S(0) = P_0 = C$ et $0 = R(0) = P_0(p-1) + D$, donc $S(x) = P_0e^{-qx-M(x)}$ et $R(x) = P_0(1-p)e^{-M(x)}(1-e^{-qx})$.

En particulier, on obtient que, pour tout x, $S(x) > 0$: ce n'est pas réaliste, mais l'hypothèse sous laquelle on avait dû se placer lors de la question 6 n'est plus nécessaire. C'est une conséquence des calculs.

On retrouve bien que $f = \dfrac{S}{S+R} = \dfrac{e^{-qx}}{e^{-qx} + (1-p)(1-e^{-qx})} = \dfrac{1}{p + (1-p)e^{qx}}$.

Partie III : Les avantages de la vaccination.

8°) **a)** Entre x et $x + \Delta x$, le nombre d'individus atteints par la variole est égal à $q\Delta x S(x)$ et parmi ceux-ci, le nombre d'individus qui vont mourir de la variole est égal à $pq\Delta x S(x)$. Ainsi, si l'on pose $a = x$, $b = x+1$, et $\Delta x = \dfrac{(x+1)-x}{N}$, où $N \in \mathbb{N}^*$, le nombre de morts par la variole entre l'âge x et l'âge $x+1$ est égal à
$\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} pq\frac{b-a}{N} S\Big(a + k\frac{b-a}{N}\Big)$, lequel d'après la question 1 correspond à la quantité
$\displaystyle\int_x^{x+1} pqS(x)\, dx$. D'après la question 2, on peut approcher cette intégrale par l'aire du trapèze défini par les points de coordonnées $(x, 0)$, $(x, pqS(x))$, $(x+1, pqS(x+1))$ et $(x+1, 0)$, qui est égale à $\frac{1}{2}pq(S(x) + S(x+1))$.
b) Initialement, $P(0) = P_0 = S(0)$, $R(0) = 0$, le nombre de morts par la variole est nul et $P^*(0) = P_0$.
La table de mortalité permettant de connaître $P(n)$ pour tout entier naturel n est une donnée observable.
On sait que $f(n) = \dfrac{1}{p + (1-p)e^{qn}}$, donc on connaît également $f(n) = \dfrac{S(n)}{P(n)}$ et on en déduit $S(n)$, puis $R(n) = P(n) - S(n)$. Alors, le nombre de morts par la variole pendant l'année est évalué à $V(n) = \frac{1}{2}pq(S(n-1) + S(n))$.
Enfin, $P^*(n) = P^*(n-1) - (P(n-1) - P(n)) + V(n)$: On passe de $P^*(n-1)$ à $P^*(n)$ en enlevant tous les individus morts pendant l'année, sauf ceux qui sont morts de la variole, car ils ne seraient pas morts en cas de vaccination.

9°) Adaptons la solution de la question 3 pour calculer l'espérance de vie E' d'un individu du groupe initial de P_0 individus si l'on suppose qu'ils sont tous vaccinés et que le vaccin, administré à la naissance, entraîne le décès de $p'P_0$ individus dès la naissance : on obtient
$E' = 0 \times p' + \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{T}{\Delta x} \rfloor + 1} k\Delta x \times \frac{(1-p')[P(k\Delta x) - P((k+1)\Delta x)]}{P_0}$, donc $E' = (1-p')E^*$.
Le vaccin est efficace si et seulement si $E' > E$, or
$E' > E \iff (1-p')E^* > E \iff p' < 1 - \dfrac{E}{E^*}$, ainsi le vaccin est efficace dès que $p' < 0,104$.

Ce modèle est bien sûr critiquable sur plusieurs points :
- La définition de l'efficacité du vaccin est discutable : peut-on accepter la mort de $p'P_0$ individus dès leur naissance, quel que soit la valeur de $p' > 0$?
- La probabilité de contracter la variole dépend sans doute de l'âge des individus.
- Idem pour la probabilité de mourir de la variole lorsqu'elle est contractée.