Feuille d'exercices 9.
Complexes.

Exercice 9.1 : (niveau 1)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 - (5-14i)z - (24+10i) = 0$.

Exercice 9.2 : (niveau 1)
Calculer la dérivée n-ième de $x \longmapsto xe^{-x}$.

Exercice 9.3 : (niveau 1)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le module et un argument de
$(1+\cos\theta + i\sin\theta)^n$, puis de $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

Exercice 9.4 : (niveau 1)
Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système d'équations suivant : $\begin{cases} uv & = 1-8i \\ u^2+v^2 & = -2-16i \end{cases}$.

Exercice 9.5 : (niveau 1)
Démontrer que la fonction tan est absolument croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ième de tan est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 9.6 : (niveau 2)
Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{n}{2k}$.

Exercice 9.7 : (niveau 2)
Calculer les primitives de $f(x) = \cos(\ln x)$ et de $g(x) = \text{sh}x\ \sin x$ selon deux méthodes : par intégration par parties et en utilisant les complexes.

Exercice 9.8 : (niveau 2)
Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $\cos a \neq 0$. Calculez $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(ka)}{(\cos a)^k}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(ka)}{(\cos a)^k}$.

Exercice 9.9 : (niveau 2)
Soit n un entier naturel supérieur à 2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |\omega^k - 1|^2$, où $\omega = e^{2i\frac{\pi}{n}}$.

Exercice 9.10 : (niveau 2)

Soient P un polynôme à coefficients réels, de degré impair, et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$|f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|$. Montrer que f est identiquement nulle.

Exercice 9.11 : (niveau 2)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et f une application de classe C^{n+1} de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in [a, b]$. Montrer que le reste de Taylor à l'ordre n de f en x_0 est égal à $\displaystyle\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{t_{n+1}} \cdots \int_{x_0}^{t_2} f^{(n+1)}(t_1)\ dt_1 dt_2 \dots dt_{n+1}$.

Exercice 9.12 : (niveau 2)

Soit $m \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \sin^{2m} t \times \cos(2mt)dt$.

Exercice 9.13 : (niveau 2)

Pour $n \geq 2$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

Exercice 9.14 : (niveau 2)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré n, tel que $P(0) = 1$ et $P(1) = 0$.
On note, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}$.

1°) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(\omega_k) = n + 1$.

2°) En déduire que $\displaystyle\sup_{|z|=1} |P(z)| \geq 1 + \frac{1}{n}$.

Exercice 9.15 : (niveau 3)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\cos k| \geq \frac{n}{4}$.

Exercice 9.16 : (niveau 3)

On recherche toutes les homographies (c'est-à-dire les fonctions non constantes de la forme $f : z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$, où a, b, c, d et z sont complexes), telles que $f(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des homographies vérifiant cette condition.

1°) Soit $f \in \mathcal{H}$. Avec les notations précédentes, montrer que $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et $a\overline{b} = c\overline{d}$.

2°) En déduire que $(|c|, |d|)$ est égal à $(|a|, |b|)$, ou $(|b|, |a|)$.

3°) Montrer qu'il existe un réel α tel que pour tout z, $f(z) = e^{i\alpha}\dfrac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$.

4°) Terminer l'exercice.

Complexes et géométrie.

Exercice 9.17 : (niveau 1)

Déterminer les caractéristiques géométriques de la similitude s qui à tout point M d'affixe z associe le point N d'affixe $Z = 2(1+i)z - 7 - 4i$.

Exercice 9.18 : (niveau 1)

1°) Soient $u, v \in \mathbb{C}^*$. Démontrer la formule d'Al Kachi :
$|u - v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2|u|.|v|.\cos(argu - argv)$ et interpréter géométriquement ce résultat.

2°) Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Démontrer l'identité du parallélogramme :
$|u + v|^2 + |u - v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$ et interpréter géométriquement ce résultat.
Que retrouve-t-on dans le cas d'un rectangle ?

Exercice 9.19 : (niveau 1)

Soit $ABCD$ un carré ; on suppose que C et D ont des coordonnées entières ; montrer qu'il en est de même de A et B.

Exercice 9.20 : (niveau 1)

Dans le plan, on considère un cercle C de centre O et A, B, P trois points distincts de ce cercle. On souhaite démontrer que l'angle sous lequel O voit les points A et B est (modulo 2π) le double de l'angle sous lequel P voit les mêmes points A et B. C'est le théorème de l'angle au centre.
Pour cela, on choisit de munir le plan de sa structure complexe en choisissant O pour origine et le rayon du cercle pour unité de longueur. Les points A, B et P appartiennent alors au cercle unité, ce qui permet de noter $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$ et $e^{i\theta}$ leurs affixes respectives. L'angle sous lequel O voit les points A et B est l'angle $\widehat{AOB}$ dont une mesure (modulo 2π) est notée φ. De façon similaire, l'angle géométrique sous lequel P voit les points A et B est l'angle $\widehat{APB}$ dont une mesure est notée ψ.
Exprimer φ et ψ en fonction de α et β et conclure.

Exercice 9.21 : (niveau 2)

Déterminer les affixes $z \in \mathbb{C}$ des points du plan usuel tels que les points d'affixes z et les racines cubiques de z forment un parallélogramme.

Exercice 9.22 : (niveau 2)

1°) Dans le plan complexe, interpréter géométriquement la transformation $z \longmapsto iz$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

2°) Soient z_1, z_2 et z_3 trois complexes de module 1. On note T le triangle de sommets les points M_i, d'affixe z_i, pour $i = 1, 2, 3$.
On note G le centre de gravité de T et H l'orthocentre de T.
a) Déterminer l'affixe de G.
b) On pose $z_0 = z_1 + z_2 + z_3$. Montrer que z_0 est l'affixe de H.

3°) Pour un triangle ABC, donner une relation liant le centre de gravité G, l'orthocentre H et le centre I du cercle circonscrit.

Exercice 9.23 : (niveau 2)

Posons $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. On se place dans un plan affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé direct noté $R = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit A, B et C trois points du plan d'affixes a, b et c.
Montrer que ABC est un triangle équilatéral direct (i.e : $AB = AC = BC$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ est une base directe) si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$.

Exercice 9.24 : (niveau 2)

Théorème de Pappus.

1°) Soit a et b deux points distincts de $\mathbb{U}$. On note A, B, et E les points d'affixe a, b et 1. On note P le projeté orthogonal de E sur la droite (AB) et p son affixe.
Montrer que $1 - p = \dfrac{(1-a)(1-b)}{2}$.

2°) En déduire le théorème de Pappus : Étant donné un quadrilatère $ABCD$ inscriptible dans un cercle C, pour tout point M du cercle C, le produit de la distance de M à deux côtés opposés, ou aux deux diagonales est le même, pour chacun des choix des deux paires de côtés opposés.

Exercice 9.25 : (niveau 3)

Soient A, B, C, D quatre points du plan. On considère les points E, F, G, H tels que les triangles ABE, BCF, CDG, DAH soient rectangles isocèles directs en E, F, G, H. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{FH}$ sont orthogonaux et de même norme.

Exercice 9.26 : (niveau 3)

Soit ABC un triangle direct. On coupe chaque côté en trois parts égales, et on contruit sur le tiers du milieu un triangle équilatéral extérieur au triangle ABC, de sommets respectifs D, E et F (D est contruit à partir du segment $[A, B]$, E à partir de $[B, C]$ et F à partir de $[A, C]$).
Montrer que les deux triangles ABC et DEF ont le même centre de gravité.
Montrer que DEF est équilatéral.

Exercices supplémentaires, non corrigés en cours :

Exercice 9.27 : (niveau 1)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $1 + iz - z^2 - iz^3 = 0$.

Exercice 9.28 : (niveau 1)

Déterminer les complexes z tels que $2z + 6\overline{z} = 3 + 2i$.

Exercice 9.29 : (niveau 1)

1°) Calculer sous forme exponentielle les racines carrées de $-18i$, $1 - i$ et $-\sqrt{3} + i$.

2°) Calculer sous forme cartésienne les racines carrées de $3 - 4i$ et $-5 - 12i$.

Exercice 9.30 : (niveau 1)

1°) Mettre sous forme exponentielle $z_1 = 1+i$, $z_2 = 1-i$, $z_3 = \sqrt{3}+i$ et $z_4 = \dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i}$.

2°) Calculer $Z_1 = (z_1)^{2018}$ et $Z_4 = (z_4)^{20}$.

3°) Déterminer les entiers naturels n tels que $\omega_n = (z_3)^n$ soit un nombre réel.

Exercice 9.31 : (niveau 1)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système d'équations suivant : $\begin{cases} ab & = -24-10i \\ a+b & = 5-14i \end{cases}$.

Exercice 9.32 : (niveau 1)

Soit $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. Démontrer que l'application $f_\omega \ : \ \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{U}, \ \ f_\omega(z) = \frac{z+\omega}{\overline{\omega}z+1}$$

est une bijection dont on précisera la bijection réciproque.

Exercice 9.33 : (niveau 1)

On fixe $n \in \mathbb{N}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^n = \overline{z}$.

Exercice 9.34 : (niveau 1)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$. En utilisant deux méthodes différentes,
calculer les primitives de $x \longmapsto e^{ax}\cos(bx)$.

Exercice 9.35 : (niveau 2)

Déterminer $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $az+b = (cz+d)\overline{z}$.

Exercice 9.36 : (niveau 2)

1°) Soit $z, z \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$|z|^2 + |z'|^2 = \frac{1}{2}(|z+z'|^2 + |z-z'|^2).$$

2°) En déduire que, pour tout $z, z', u \in \mathbb{C}^3$ tels que $u^2 = zz'$,

$$|z| + |z'| = \left|\frac{z+z'}{2} + u\right| + \left|\frac{z+z'}{2} - u\right|.$$

Exercice 9.37 : (niveau 2)

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. On pose $Z = \dfrac{z+|z|}{\sqrt{z+\overline{z}+2|z|}}$.
Montrer que Z est défini et que $Z^2 = z$.

Exercice 9.38 : (niveau 2)

Montrer qu'il n'est pas possible que les trois sommets d'un triangle équilatéral, non réduit à un point, aient des coordonnées entières.

Exercice 9.39 : (niveau 2)
Soit $a, b, c \in \mathbb{U}$ tels que $a + b + c = 1$. Montrer que $a = 1$ ou $b = 1$ ou $c = 1$.
Exercice 9.40 : (niveau 2)
Soit n un entier naturel supérieur à 2. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} |\omega^k - 1|$, où $\omega = e^{2i\frac{\pi}{n}}$.
Exercice 9.41 : (niveau 2)
Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que $|a + b|^2 \leq (1 + |a|^2)(1 + |b|^2)$.
Quand a-t-on égalité ?
Exercice 9.42 : (niveau 2)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Montrer que $\dfrac{\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|}{1 + \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|} \leq \sum_{k=1}^{n} \dfrac{|z_k|}{1 + |z_k|}$.
Exercice 9.43 : (niveau 2)
Soit ABC un triangle direct. Soit D le centre d'un carré de côté AB, de sorte que D et C soient du même côté de la droite (AB) et soit E le centre d'un carré de côté BC, de sorte que E et A ne soient pas du même côté de la droite (BC).
Déterminer l'angle formé entre la droite (AC) et la droite (DE).
Exercice 9.44 : (niveau 2)
On pose $P = \{z \in \mathbb{C} / Im(z) > 0\}$, et $D = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$.
On note f l'application définie pour tout $z \neq -i$ par $f(z) = \dfrac{z - i}{z + i}$.

1°) Montrer que f réalise une bijection de P sur D.

2°) Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc = 1$. On considère l'application h définie dans $\mathbb{C}$ par $h(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$.

a) Montrer que pour tout z du domaine de définition $\mathcal{D}_h$ de h, $Im(h(z)) = \dfrac{Im(z)}{|cz + d|^2}$.
b) En déduire que h est une bijection de P sur P.
Exercice 9.45 : (niveau 2)
Soit $n \in \mathbb{N}$.

1°) Calculer $S_1 = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{2k}{n}$ et $S_2 = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{2k+1}{n}$.

2°) Calculer $\sum_{0 \leq 3k \leq n} \binom{3k}{n}$.

Exercice 9.46 : (niveau 2)

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$ et $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{U}^3$ tel que $\alpha^n = \beta^n = \gamma^n = 1$ et $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Montrer que n est un multiple de 3.

Exercice 9.47 : (niveau 2)

Soit ABC un triangle équilatéral du plan. On note R_1, R_2 et R_3 les rotations de centre A, B et C et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Exprimer $R_3 \circ R_2 \circ R_1$.

Exercice 9.48 : (niveau 3)

1°) On considère trois points A, B et C du plan complexe, dont les affixes sont notés a, b et c. Montrer que ABC est équilatéral si et seulement si $\dfrac{b-a}{c-a} = \dfrac{c-b}{a-b}$.
Montrer que c'est équivalent à la condition $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

2°) On considère un triangle ABC ainsi qu'un entier n supérieur ou égal à 3. Le segment $[B, C]$ est une arête d'un n-gone régulier, situé dans l'extérieur du triangle, dont le centre est noté A'. De même les segments $[A, C]$ et $[A, B]$ permettent de définir les points B' et C', en tant que centres de n-gones réguliers, situés à l'extérieur du triangle, dont l'une des arêtes est $[A, C]$ (resp : $[A, B]$).
À quelle condition sur n le triangle $A'B'C'$ est-il équilatéral ?

Exercice 9.49 : (niveau 3)

Soient $n \geq 3$ et $I_1, I_2, \ldots, I_n$ des points distincts du plan. On s'intéresse à l'assertion A_n : “ il existe un n-uplet $(M_1, M_2, ..., M_n)$ de points du plan tels que I_1 est le milieu de $[M_1, M_2]$, I_2 est le milieu de $[M_2, M_3]$, ..., I_{n-1} est le milieu de $[M_{n-1}, M_n]$ et I_n est le milieu de $[M_n, M_1]$”.

1°) Démontrer que si A_4 est vraie alors $I_1I_2I_3I_4$ est un parallélogramme.

2°) a) Soient $r_{a,\alpha}$ la rotation de centre $a \in \mathbb{C}$ et d'angle $\alpha \in \mathbb{R}$ et $r_{b,\beta}$ la rotation de centre $b \in \mathbb{C}$ et d'angle $\beta \in \mathbb{R}$.
Si $\alpha + \beta \equiv 0\ [2\pi]$, montrer que $r_{a,\alpha} \circ r_{b,\beta}$ est une translation. Sinon, montrer que $r_{a,\alpha} \circ r_{b,\beta}$ est une rotation d'angle $\alpha + \beta$.

b) Déterminer, en fonction de n, le nombre de solutions $(M_1, M_2, \ldots, M_n)$ du problème A_n et indiquer comment on peut les construire.

Exercice 9.50 : (niveau 3)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $Z = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(k^2)}$. Calculer $|Z|^2$.