Corrigé du DM 34

CCP 1998, maths 2 : Corrigé

PARTIE I - CONSTRUCTION D'UNE MATRICE INVERSE A GAUCHE

On suppose dans cette partie que $m > n$ et que $\operatorname{rg} A = n$.

1. Propriété d'inversibilité et de transposition

a) L'existence de solution pour l'équation $A\,x = b$ résulte de l'hypothèse $b \in \operatorname{Im} A$ et l'unicité du fait que $\underline{A \text{ est injective}}$ puisque $\dim(\operatorname{Ker} A) = \dim E - \operatorname{rg} A = n - n = 0$.

b) La matrice $B = {}^tAA$ est identifiée à un endomorphisme de l'espace vectoriel euclidien $E = \mathbf{R}^n$ dans lequel la base canonique est orthonormale. Ainsi, vérifier que l'endomorphisme canoniquement associé à B est symétrique revient à vérifier que la matrice B est symétrique, ce qui est immédiat puisque ${}^tB = {}^t\big({}^tAA\big) = {}^tAA = B$.
Pour montrer que B est inversible, il suffit de montrer que B est injective, c'est à dire que $\operatorname{Ker} B = \{0_E\}$.
En effet, $\underline{\text{soit } x \in \operatorname{Ker} B}$: on a $Bx = 0$, d'où ${}^tx\,({}^tAA)x = 0$, donc $\|A\,x\|^2 = {}^t(A\,x)\,(A\,x) = 0$, d'où $A\,x = 0_F$ et finalement $\underline{x = 0_E}$ puisque A est injective.

c) **Important** : le résultat de cette question est valable aussi bien pour $m > n$ que pour $m \leq n$.
Soit $y \in F$. $\quad \underline{y \in \operatorname{Ker}{}^tM} \iff {}^tMy = 0_E \iff \forall\, x \in E,\ {}^tx({}^tMy) = 0 \iff \forall\, x \in E,\ {}^t(Mx)y = 0$
$\iff \forall\, z \in \operatorname{Im} M,\ (z|y)_F = {}^tzy = 0 \iff \underline{y \in (\operatorname{Im} M)^\perp}$.
Ainsi $\boxed{\operatorname{Ker}{}^tM = (\operatorname{Im} M)^\perp.}$
En remplaçant M par ${}^tM$ (et en échangeant m et n), on obtient $\operatorname{Ker} M = (\operatorname{Im}{}^tM)^\perp$, donc $\boxed{(\operatorname{Ker} M)^\perp = \operatorname{Im}{}^tM.}$

2. Détermination d'une inverse à gauche de A

a) Lorsque $y \in F$, le vecteur $b = Py \in \operatorname{Im} A$: d'après **1.a**, il existe un unique $x \in E$ tel que $A\,x = b = Py$.
On définit donc ainsi une application $A^{(g)} : y \longmapsto x$ de F vers E.
Vérifions que $\underline{\forall\,(y, y') \in F^2,\ \forall\,\lambda \in \mathbf{R},\ A^{(g)}(\lambda\,y + y') = \lambda\,A^{(g)}y + A^{(g)}y'}$. En effet, en notant $x = A^{(g)}y$ et $x' = A^{(g)}y'$,
on a par définition : $Py = A\,x$ et $Py' = A\,x'$, donc $P(\lambda\,y + y') = \lambda\,Py + Py' = \lambda\,A\,x + A\,x' = A(\lambda x + x')$.
Ainsi, par définition de $A^{(g)}$: $A^{(g)}(\lambda\,y + y') = \lambda\,x + x'$, donc $A^{(g)}(\lambda\,y + y') = \lambda\,A^{(g)}y + A^{(g)}y'$.

b) Vérifions par double implication que $A\,x = Py \iff {}^tAA\,x = {}^tA\,y$.

- $\underline{\text{Si } A\,x = Py}$, sachant que $y - Py \in (\operatorname{Im} A)^\perp$, alors $y - A\,x \in \operatorname{Ker}{}^tA$, donc ${}^tA(y - A\,x) = 0_E$, d'où $\underline{{}^tAA\,x = {}^tA\,y}$.

- Si $\underline{{}^tAA\,x = {}^tA\,y}$, alors ${}^tA\,(y - A\,x) = 0_E$, donc $z = y - A\,x \in \operatorname{Ker}{}^tA = (\operatorname{Im} A)^\perp$.
  Ainsi l'égalité $y = A\,x + z$ est une décomposition de y sur $\operatorname{Im} A \oplus (\operatorname{Im} A)^\perp$ qui montre que $\underline{Py = A\,x}$.
  Donc $\forall y \in F,\ \forall x \in E,\ x = A^{(g)}y \iff {}^tAA\,x = {}^tA\,y \iff x = \left({}^tAA\right)^{-1}{}^tA\,y$, donc $\boxed{A^{(g)} = \left({}^tAA\right)^{-1}{}^tA.}$

c) $\forall y \in F,\ Py = A\,A^{(g)}y$, donc $\boxed{P = A\,A^{(g)} = A\left({}^tAA\right)^{-1}{}^tA.}$

Remarque : $\boxed{\operatorname{Ker} A^{(g)} = (\operatorname{Im} A)^\perp}$

En effet $y \in \operatorname{Ker} A^{(g)} \iff A^{(g)}\,y = 0 \iff A\,A^{(g)}\,y = 0 \iff Py = 0 \iff y \in \operatorname{Ker} P = (\operatorname{Im} A)^\perp$.

3. Propriétés de $A^{(g)}$. Unicité

a) On a $A^{(g)}A = \left({}^tAA\right)^{-1}{}^tAA = I_n$.
En particulier $A^{(g)}A$ est surjective, donc $A^{(g)} : F \longrightarrow E$ est nécessairement surjective, donc $\boxed{\operatorname{rg} A^{(g)} = \dim E = n.}$
On a aussi $\operatorname{rg} A^{(g)} = \dim F - \dim(\operatorname{Ker} A^{(g)}) = \dim F - \dim(\operatorname{Im} A)^\perp = \dim(\operatorname{Im} A) = n$.

b) Si $m = n$, c'est à dire $\dim E = \dim F$, puisque A est injective par hypothèse, alors elle est bijective dans ce cas. En composant à droite l'égalité $A^{(g)}A = I_n$ par A^{-1}, on obtient que $A^{(g)} = A^{-1}$.

c) On suppose que $B \in \mathcal{M}_{n,m}$ vérifie $BA = I_n$ et que AB est un projecteur orthogonal.
En particulier BA est surjective, donc B est surjective :
ainsi $\operatorname{Im}(AB) = (AB)(E) = A\big(B(E)\big) = A(E) = \operatorname{Im} A$.
Donc AB est le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Im} A$.
Donc $\forall z \in (\operatorname{Im} A)^\perp,\ AB\,z = 0$ et comme A est injective, on a bien : $\forall z \in (\operatorname{Im} A)^\perp,\ B\,z = 0$.
Soit $y \in F$. Il se décompose en $y = v + z$ avec $v \in \operatorname{Im} A$ et $z \in (\operatorname{Im} A)^\perp$.
Alors $B\,y = B\,v + B\,z = B\,v = BP\,y = BA\,x = x = A^{(g)}y$, donc $B = A^{(g)}$.

Bilan :
Lorsque A est injective, parmi toutes les inverses à gauche $B \in \mathcal{M}_{n,m}$ de A (ie $BA = I_n$), il en existe une et une seule de sorte que AB soit un projecteur orthogonal : il s'agit de $A^{(g)}$.

4. Exemples

a) Comme $\operatorname{rg} A = n$, les a_i sont non nuls. On les suppose orthogonaux.
Alors le coefficient d'indice (i, k) de la matrice-produit ${}^tAA$ est égal à $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\,a_{jk} = (a_i|a_k) = \delta_{ik}\,\|a_i\|^2$.
${}^tAA$ est donc égale à la matrice diagonale $\operatorname{Diag}(\|a_1\|^2, \ldots, \|a_n\|^2)$.

$$\text{Ainsi}\quad A^{(g)} = \left({}^tAA\right)^{-1}{}^tA = \operatorname{Diag}\Big(\frac{1}{\|a_1\|^2}, \ldots, \frac{1}{\|a_1\|^2}\Big)\begin{pmatrix} {}^ta_1 \\ \vdots \\ {}^ta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{{}^ta_1}{\|a_1\|^2} \\ \vdots \\ \dfrac{{}^ta_n}{\|a_n\|^2} \end{pmatrix}$$

$$A^{(g)} = {}^tA \iff \forall\, i \in [\![1;n]\!],\ \|a_i\|^2 = 1 \iff \text{les vecteurs-colonnes de } A \text{ sont \underline{orthonormés} dans } F.$$

b) Pour b vecteur non nul de $F = \mathbf{R}^m$, on note abusivement b l'application linéaire $s \longmapsto s\,b$ de $\mathbf{R}$ vers F qui est représentée par la matrice unicolonne (b) identifiée à b.

En appliquant ce qui précède avec ici $n = 1$, on obtient que $\boxed{b^{(g)} = \dfrac{{}^tb}{\|b\|^2}.}$

Ainsi la forme linéaire $b^{(g)}$ est caractérisée par : $\forall\, y \in F,\ b^{(g)}\,y = \dfrac{{}^tb\,y}{\|b\|^2} = \boxed{\dfrac{(b|y)_F}{(b|b)_F}.}$

5. Description d'une méthode de détermination de $A^{(g)}$

a) On a $F_1 = F_0 + \mathbf{R}\delta$ avec $\delta \notin F_0$, donc $d' \neq \delta$. Ainsi $d = \delta - d' = \delta - P_0(\delta) = p_{F_0^\perp}(\delta) \in F_0^\perp$, donc d est un vecteur non nul de F_1 orthogonal à F_0, d'où $F_1 = F_0 \overset{\perp}{\oplus} \mathbf{R}d$. Donc $F = F_1 \overset{\perp}{\oplus} F_1^\perp = F_0 \overset{\perp}{\oplus} \mathbf{R}d \overset{\perp}{\oplus} F_1^\perp$, ce qui montre que $F_0^\perp = \mathbf{R}d \overset{\perp}{\oplus} F_1^\perp$.

Tout vecteur y de F se décompose de façon unique sous la forme $y = y_0 + \alpha_y\, d + y_1'$
avec $y_0 \in F_0,\ \alpha_y \in \mathbf{R},\ y_1' \in F_1^\perp$.

Puisque $\alpha_y\, d$ représente la projection orthogonale de y sur la droite $\mathbf{R}d$, on sait que $\alpha_y d = \dfrac{(d|y)_F}{\|d\|^2}\, d$.

Puisque $P_0\, y = y_0$ et $P_1\, y = y_0 + \alpha_y\, d$, alors $\boxed{P_1\, y = P_0\, y + \dfrac{1}{\|d\|^2}\,(d|y)_F\, d.}$

On remarque que $\alpha_y\, d = \dfrac{1}{\|d\|^2}\,({}^tdy).d = \dfrac{1}{\|d\|^2}\, d\,{}^tdy = d\, d^{(g)}\, y$. Donc $P_1\, y = P_0\, y + d\, d^{(g)}\, y$ et $\boxed{P_1 = P_0 + d\, d^{(g)}.}$

b) Pour $k = 1 \ldots n$, notons $F_k = \operatorname{Im} A_k$ le sous-espace vectoriel de F engendré par la famille (libre) $(a_1, \ldots, a_k)$ et par P_k la projection orthogonale dans F sur F_k.
Comme $a_k \notin F_{k-1}$ pour $2 \leq k \leq n$, en considérant $\boxed{d_k = a_k - P_{k-1}\, a_k}$ et en appliquant le résultat du **5.a**, on a :

$P_k = P_{k-1} + d_k\, d_k^{(g)}$. Or d'après **2.c**, $P_k = A_k A_k^{(g)}$, d'où l'égalité $\boxed{(1) \quad A_k A_k^{(g)} = A_{k-1} A_{k-1}^{(g)} + d_k\, d_k^{(g)}.}$
Il y a donc une erreur dans l'énoncé.

En outre, $d_k = a_k - P_{F_{k-1}}(a_k)$, donc $\boxed{d_k = \left(I_m - A_{k-1} A_{k-1}^{(g)}\right) a_k}.$

c) Le produit matriciel $A_k^{(g)} A_k = I_k$ effectué par blocs donne les égalités suivantes :
$$C_k\, A_{k-1} = I_{k-1}, \qquad C_k\, a_k = 0, \qquad {}^t\gamma_k\, A_{k-1} = 0, \qquad {}^t\gamma_k\, a_k = 1.$$
Vérifions d'abord l'affirmation de l'énoncé selon laquelle $\gamma_k \in \operatorname{Im} A_k = F_k$.
En effet $A_k^{(g)} = \left({}^tA_k A_k\right)^{-1}\, {}^tA_k$, donc $\left({}^tC_k, \gamma_k\right) = {}^tA_k^{(g)} = A_k\, B_k$ avec $B_k = \left({}^tA_k A_k\right)^{-1}$ symétrique d'ordre n.
En écrivant B_k sous la forme (B_{k-1}', x_k) avec $x_k \in \mathbf{R}^k$, on obtient $\gamma_k = A_k\, x_k \in \operatorname{Im} A_k = F_k$.

Puisque ${}^t\gamma_k\, A_{k-1} = 0$, en transposant, on trouve que ${}^tA_{k-1}\,\gamma_k = 0$,
donc $\gamma_k \in \text{Ker}\ {}^tA_{k-1} = (\text{Im}\, A_{k-1})^\perp = F_{k-1}^\perp$.
D'autre part $d_k \in F_k$ et $d_k \in F_{k-1}^\perp$.
Ainsi γ_k et d_k sont tous deux dans $F_k \cap F_{k-1}^\perp$. Mais $F_k \cap F_{k-1}^\perp$ est l'orthogonal de F_{k-1} pour la restriction du produit scalaire à F_k, donc $dim(F_k \cap F_{k-1}^\perp) = dim(F_k) - dim(F_{k-1}) = 1$. On en déduit que γ_k et d_k sont colinéaires : $\exists\, \mu_k \in \mathbf{R}\ /\ \gamma_k = \mu_k\, d_k$.
Or $1 = {}^t\gamma_k\, a_k = {}^t\gamma_k\,(d_k + d'_k) = {}^t\gamma_k\, d_k$ car $(d_k|d'_k) = 0$, donc ${}^t\gamma_k d'_k = (\gamma_k|d'_k) = 0$.
On trouve donc que $1 = \mu_k\, {}^td_k\, d_k = \mu_k\, \|d_k\|^2$, d'où $\boxed{\gamma_k = \dfrac{d_k}{\|d_k\|^2}}$ et aussi ${}^t\gamma_k = d_k^{(g)}$.

d) L'égalité (1) donne : $A_{k-1}\, C_k + a_k\, {}^t\gamma_k = A_{k-1}\, A_{k-1}^{(g)} + d_k\, d_k^{(g)}$.

En composant à gauche par $A_{k-1}^{(g)}$ et sachant que $A_{k-1}^{(g)}\, A_{k-1} = I_m$ et que $A_{k-1}^{(g)}\, d_k = 0$ puisque $d_k \in (\text{Im}\, A_{k-1})^\perp = \text{Ker}\, A_{k-1}^{(g)}$ d'après la remarque du **2.c**, on obtient :
$C_k = A_{k-1}^{(g)}\left[I_m + d_k\, d_k^{(g)} - a_k\ {}^t\gamma_k\right] = A_{k-1}^{(g)}\left[I_m - a_k\, d_k^{(g)}\right]$.

En conclusion, les formules de récurrence ci-dessus permettent de déduire la matrice $A_k^{(g)} \in \mathcal{M}_{m,k}$ à partir de $A_{k-1}^{(g)}$
L'initialisation de l'algorithme de calcul de $A^{(g)} = A_n^{(g)}$ est immédiate puisque $A_1 = a_1$, donc $A_1^{(g)} = \dfrac{{}^ta_1}{\|a_1\|^2}$.

PARTIE II - CONSTRUCTION D'UNE MATRICE INVERSE A DROITE

On suppose ici que $m < n$ et que $\text{rg}\, A = m = \dim F$, c'est à dire que A est surjective.

1. Détermination d'une inverse à droite

a) Soit $y \in F$ et x un antécédent de y par A. x se décompose en $x = x_1 + \overline{x}$ avec $x_1 \in \text{Ker}\, A$ et $\overline{x} \in (\text{Ker}\, A)^\perp$.
On a alors $y = A\,x = A\,\overline{x}$, ce qui prouve l'existence d'un antécédent de y dans $(\text{Ker}\, A)^\perp$.
Supposons que $y = A\,x'$ avec $x' \in (\text{Ker}\, A)^\perp$. Alors $A\,(\overline{x} - x') = 0_F$, donc $\overline{x} - x' \in \text{Ker}\, A \cap (\text{Ker}\, A)^\perp$, d'où $x' = \overline{x}$, ce qui prouve l'unicité d'antécédent de y dans $(\text{Ker}\, A)^\perp$.

De plus si $y = A\,z$, en décomposant z en $z' + z"$ avec $z' \in \text{Ker}\, A$ et $z" \in (\text{Ker}\, A)^\perp$, alors $y = A\,z = A\,z"$, d' où par unicité $z" = \overline{x}$ et $\|z\|^2 = \|z'\|^2 + \|\overline{x}\|^2 \geq \|\overline{x}\|^2$, donc $\|\overline{x}\| \leq \|z\|$, donc $\overline{x}$ est un antécédent de y de norme minimum.
Si l'on suppose que $y = A\,z$ et $\|z\| = \|\overline{x}\|$, alors $\|z'\|^2 = 0$, donc $z' = 0$, c'est à dire $z = \overline{x}$, ce qui prouve l'unicité d'antécédent de y dans E de norme minimum.

b) Vérifions que l'application $A^{(d)}$ de F ver E est linéaire.
En notant $\overline{x} = A^{(d)}y$ et $\overline{x'} = A^{(d)}y'$, alors $A\,(\lambda\,\overline{x} + \overline{x'}) = \lambda\, A\,\overline{x} + A\,\overline{x'} = \lambda\, y + y'$.
Comme $\lambda\,\overline{x} + \overline{x'} \in (\text{Ker}\, A)^\perp$, on a par définition de $A^{(d)}$, $\lambda\,\overline{x} + \overline{x'} = A^{(d)}(\lambda\, y + y')$. Ainsi $A^{(d)}(\lambda\, y + y') = \lambda\, A^{(d)}y + A^{(d)}y'$.

$\forall\, y \in F,\ A^{(d)}y = \overline{x}$ et $A\,\overline{x} = y$, donc $AA^{(d)}y = y$, c'est à dire $\boxed{AA^{(d)} = I_m.}$

2. Propriétés de $A^{(d)}$

a) Comme $AA^{(d)}$ est injective, nécessairement $A^{(d)}$ est injective et donc $\boxed{\operatorname{rg} A^{(d)} = m.}$

b Notons $Q = A^{(d)}A$. Alors $Q^2 = A^{(d)}AA^{(d)}A = A^{(d)}I_mA = A^{(d)}A = Q$, ce qui prouve que Q est un projecteur de E.
$x \in \operatorname{Ker} Q \iff A^{(d)}A\,x = 0_E \iff A\,x = 0_F \iff x \in \operatorname{Ker} A$ puisque $A^{(d)}$ est injective, donc $\boxed{\operatorname{Ker} Q = \operatorname{Ker} A.}$
Or $\operatorname{Im} Q = \operatorname{Im}(A^{(d)}A) \subset \operatorname{Im} A^{(d)} \subset (\operatorname{Ker} A)^{\perp} = (\operatorname{Ker} Q)^{\perp}$, ce qui suffit, avec la formule du rang, pour affirmer que $\operatorname{Im} Q = (\operatorname{Ker} Q)^{\perp}$ et :

$$\boxed{Q \text{ est le projecteur orthogonal sur } (\operatorname{Ker} A)^{\perp}.}$$

c) Lorsque $m = n$, on conclut de même qu'au **I.3.b** que $A^{(d)} = A^{-1}$.

d) L'égalité $AA^{(d)} = I_m$ donne immédiatement en transposant : ${}^t(A^{(d)})\,{}^tA = I_m$.
D'autre part, puisque $Q = A^{(d)}A$ est un projecteur orthogonal, on sait qu'il est symétrique, donc ${}^tQ = Q$.
Or ${}^tQ = {}^tA\,{}^t(A^{(d)})$.
En considérant $A' = {}^tA$ dont le rang est aussi égal à m et $B' = {}^t(A^{(d)})$, on est dans les conditions d'application du résultat d'unicité obtenu au **I.3.c** (en inversant les rôles de E et F) puisque A' est injective, $B'A' = I_m$ et que $A'B'$ est un projecteur orthogonal.
On en déduit que ${}^t(A^{(d)}) = B' = A'^{(g)} = ({}^tA'A')^{-1}\,{}^tA' = (A\,{}^tA)^{-1}A$.
En transposant, sachant que ${}^t(M^{-1}) = ({}^tM)^{-1}$, on obtient que $\boxed{A^{(d)} = {}^tA\,(A\,{}^tA)^{-1}.}$

PARTIE III - GÉNÉRALISATION

1. Pseudo inverse d'une matrice rectangulaire

a) D'après le théorème fondamental d'isomorphisme, on sait que V induit un isomorphime R de tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} V$ sur $\operatorname{Im} V$, ce qui s'applique en particulier à $(\operatorname{Ker} V)^{\perp}$.
Ainsi R^{-1} est un isomorphisme de $\operatorname{Im} V$ sur $(\operatorname{Ker} V)^{\perp}$.

b) On rappelle qu'une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à deux sous-espaces supplémentaires.

Considérons l'application W de F vers E déterminée par : $\begin{cases} \forall\, y \in \operatorname{Im} V,\ Wy = R^{-1}y \\ \forall\, z \in (\operatorname{Im} V)^{\perp},\ Wz = 0_F \end{cases}$

Il est clair que W est linéaire.
Vérifions que W satisfait aux quatre conditions de l'énoncé.

- $\operatorname{Ker} W = (\operatorname{Im} V)^{\perp}$.
  On a déjà $(\operatorname{Im} V)^{\perp} \subset \operatorname{Ker} W$.

Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Ker} W$. x se décompose en $y+z$ avec $y \in \operatorname{Im} V$ et $z \in (\operatorname{Im} V)^{\perp}$.
Alors $0 = Wx = Wy + Wz = Wy = R^{-1}y$, d'où $y = 0$ et donc $x = z \in (\operatorname{Im} V)^{\perp}$.

- $\underline{\operatorname{Im} W = (\operatorname{Ker} V)^{\perp}}$.
On a déjà $\operatorname{Im} W \subset \operatorname{Im} R^{-1} = (\operatorname{Ker} V)^{\perp}$.
De plus $\dim(\operatorname{Im} W) = \dim F - \dim(\operatorname{Ker} W) = \dim F - \dim(\operatorname{Im} V)^{\perp} = \dim(\operatorname{Im} V)$,
donc $\dim(\operatorname{Im} W) = n - \dim(\operatorname{Ker} V) = \dim(\operatorname{Ker} V)^{\perp}$.
- $\underline{WV = Q}$.
Soit $x \in E$: il se décompose en $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \operatorname{Ker} V$ et $x_2 \in (\operatorname{Ker} V)^{\perp}$. Alors $WV\,x = WV\,x_2 = R^{-1}V\,x_2$ car $V\,x_2 \in \operatorname{Im} V$. Comme $x_2 \in (\operatorname{Ker} V)^{\perp}$, $V\,x_2 = R\,x_2$ et ainsi $WV\,x = R^{-1}R\,x_2 = x_2 = Qx$.
- $\underline{VW = P}$.
Soit $y \in F$: il se décompose en $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in \operatorname{Im} V$ et $y_2 \in (\operatorname{Im} V)^{\perp}$.
Alors $Wy = Wy_1 + Wy_2 = R^{-1}y_1$ par définition de W.
Ainsi $VW\,y = VR^{-1}y_1 = RR^{-1}y_1$ car $R^{-1}y_1 \in (\operatorname{Ker} V)^{\perp}$. Donc $VWy = RR^{-1}y_1 = y_1 = Py$.

c) En outre $\forall y \in F$, $WVWy = QWy = Wy$ car $Wy \in \operatorname{Im} W = (\operatorname{Ker} V)^{\perp} = \operatorname{Im} Q$, donc Wy est invariant par le projecteur Q. Ceci montre que $\underline{WVW = W}$.

Soit W' une application linéaire de F vers E vérifiant : $W'V = Q$, $VW' = P$, $W'VW' = W'$.
Montrons que $W' = W$ en considérant leurs restrictions à $\operatorname{Im} V$ et $(\operatorname{Im} V)^{\perp}$.

$\star$ Soit $y \in \operatorname{Im} V$. Considérons $x = R^{-1}y$: on a $y = Vx$ et $x \in (\operatorname{Ker} V)^{\perp} = \operatorname{Im} Q$, donc $Qx = x$.
Ainsi $W'y = W'Vx = Qx = x = R^{-1}y = Wy$.

$\star$ Soit $z \in (\operatorname{Im} V)^{\perp}$. Alors $z \in \operatorname{Ker} P$ et $W'z = W'VW'z = W'Pz = W'0 = 0 = Wz$.

d) Cas particuliers

- Si $r = n$, alors V est injective, donc $\operatorname{Ker} V = \{0_E\}$ et $\underline{Q = I_n}$. Ainsi $WV = I_n$ et $VW = P$ est un projecteur orthogonal, donc d'après l'unicité obtenue au **I.3.c**, nécessairement $W = V^{(g)}$.
- Si $r = m$, alors V est surjective, donc $P = I_m$.
En transposant les égalités $VW = I_m$ et $WV = Q$ pour se ramener à l'unicité de l'inverse à gauche vérifiant la condition de **I.3.c** , on montrerait de même qu'au **II.2.d** que W est nécessairement égal à $V^{(d)}$.

2. Propriétés

D'après **III.1.b**, V^+ vérifie les deux propriétés suivantes : $\operatorname{Ker} V^+ = (\operatorname{Im} V)^{\perp}$ et $\operatorname{Im} V^+ = (\operatorname{Ker} V)^{\perp}$.

- Pour montrer que $\underline{(V^+)^+ = V}$, il suffit de vérifier les trois propriétés caractéristiques suivantes :
i) $V(V^+)$ est la projection orthogonale sur $(\operatorname{Ker} V^+)^{\perp}$ dans F
ii) $(V^+)V$ est la projection orthogonale sur $(\operatorname{Im} V^+)$ dans E
iii) $V(V^+)V = V$

i) résulte du fait que $V(V^+)$ est la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} V$ et que $\operatorname{Im} V = (\operatorname{Ker} V^+)^{\perp}$.
ii) résulte du fait que $(V^+)V$ est la projection orthogonale sur $(\operatorname{Ker} V)^{\perp}$ et que $(\operatorname{Ker} V)^{\perp} = \operatorname{Im} V^+$.
iii) est vérifiée car $\forall x \in E$, $V(V^+)Vx = PVx = Vx$ car $Vx \in \operatorname{Im} V = \operatorname{Im} P$.

- On rappelle que les projecteurs orthogonaux P et Q sont symétriques.
On a :

i) ${}^t(V^+)\,{}^tV = {}^t(VV^+) = {}^tP = P$ projection orthogonale sur $\operatorname{Im} V = (\operatorname{Ker} {}^tV)^\perp$.
ii) ${}^tV\,{}^t(V^+) = {}^t(V^+V) = {}^tQ = Q$ projection orthogonale sur $(\operatorname{Ker} V)^\perp = \operatorname{Im} {}^tV$.
iii) ${}^t(V^+)\,{}^tV\,{}^t(V^+) = {}^t(V^+)$ en transposant l'égalité $V^+VV^+ = V^+$.
Ces trois conditions permettent de conclure, grâce à l'unicité obtenue au **c)** que $\underline{({}^tV)^+ = {}^t(V^+)}$.

PARTIE IV - APPLICATION NUMÉRIQUE

1. Posons $y_i = f(t_i)$ pour $i = 1 \ldots m$ et considérons le polynôme (d'interpolation de Lagrange) L de degré inférieur ou égal à $m-1$ déterminé par les conditions : $\forall\, i \in [\![1;m]\!],\ L(t_i) = y_i$.
Si l'on pose $L = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k X^k$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\Big(y_i - \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k\, t_i^k\Big)^2 = 0 \leq \varepsilon$, donc l'ensemble
$\Big\{n \in \mathbf{N}\ /\ \exists (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1}\ ,\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\Big(y_i - \sum_{k=0}^{n} x_k\, t_i^k\Big)^2 \leq \varepsilon\ \Big\}$ est une partie non vide de $\mathbf{N}$ contenant $m-1$. Elle admet donc un plus petit élément p qui vérifie donc $p \leq m-1$.
Ainsi le problème posé a une solution.

2. Il est facile de vérifier que l'application $(P, Q) \longmapsto \langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} P(t_i)\,Q(t_i)$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_{m-1}[X]$.
La quantité $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\Big(y_i - \sum_{k=0}^{p} x_k\, t_i^k\Big)^2$ s'interprête alors comme étant $\|L - P\|^2$ avec $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} x_k\, X^k$.
A p fixé, on sait que cette quantité admet un minimum lorsque P est la **projection orthogonale de L sur le sous espace vectoriel $\mathbf{R}_p[X]$.**
Pour obtenir ce polynôme P de degré $\leq p$ réalisant ce minimum, cherchons les points critiques de la fonction $F : (x_0, x_1, \ldots, x_p) \longmapsto F(x_0, \ldots, x_p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\big(y_i - x_0 - x_1\, t_1 - \ldots - x_k\, t_i^k - \ldots - x_p\, t_i^p\big)^2$.
Or $\dfrac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, \ldots, x_p) = -2\displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_i^k\,\big[y_i - x_0 - x_1\, t_1 - \ldots - x_j\, t_i^j - \ldots - x_p\, t_i^p\big]$.
Les points critiques sont solutions du système (S_p) des $(p+1)$ équations aux $(p+1)$ inconnues $x_0, \ldots, x_p$ suivant :
Pour $k = 0, 1, \ldots, p$, $\quad x_0\displaystyle\sum_{i=1}^{m} t_i^k + \cdots + x_j\sum_{i=1}^{m} t_i^{k+j} + \cdots + x_p\sum_{i=1}^{m} t_i^{k+p} = \sum_{i=1}^{m} t_i^k\, y_i$ noté β_k.
Considérons la matrice carrée d'ordre m (de Vandermonde) $A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & \ldots & t_1^{m-1} \\ 1 & t_2 & \ldots & t_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_m & \ldots & t_m^{m-1} \end{pmatrix}$.
Comme les t_i sont deux à deux distincts, elle est de rang m.
Notons A_p la matrice de type $(m, p+1)$ constituée des $p+1$ premières colonnes de A.

Avec ces notations, on remarque (!!!) qu'en notant b_p le vecteur de $\mathbf{R}^{p+1}$ de composantes $\beta_0,\dots,\beta_p$ et y le vecteur de $\mathbf{R}^m$ de composantes $(y_1,\dots,y_m)$, alors $\boxed{b_p = {}^tA_p\, y}$ et que le coefficient d'indice (k,j) $(0 \le k \le p,\ 0 \le j \le p)$ du système (S_p) est égal au coefficient de même indice du produit matriciel ${}^tA_pA_p$.

Ainsi le système (S_p) est de la forme $\boxed{{}^tA_pA_p\, X_p = {}^tA_p\, y.}$

Comme $\mathrm{rg}\, A_p = p+1$, la matrice ${}^tA_pA_p$ est <u>inversible</u> d'après le **I.1.b**, donc (S_p) a une solution unique : le seul point critique de F est donc le point en lequel F présente un minimum.

En notant P_p la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}\, A_p$, on a vu au **I.2.b** que (S_p) est équivalent à $A_p\, X_p = P_p\, y$, donc à :

$$\boxed{X_p = A_p^{(g)}\, y}.$$

L'algorithme demandé utilise celui du calcul de proche en proche des $A_p^{(g)}$ obtenu à la fin de la partie I.

<u>Initialisation</u> : $p=0$, $A_0^{(g)} = \dfrac{{}^tA_0}{\|A_0\|^2} = \dfrac{1}{m}\,(1,\dots,1)$ et $X_0 = (x_0)$ avec $x_0 = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i$.

<u>Boucle</u> : `Tant que` $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\Big(y_i - \sum_{k=0}^{p} x_k\, t_i^k\Big)^2 > \varepsilon$ `faire` :

<u>Début</u> :

$p \longleftarrow p+1$.

Déduire $A_p^{(g)}$ de $A_{p-1}^{(g)}$ en utilisant les formules de récurrence du **I.5.**

Calculer $x_0,\dots,x_p$ sachant que $X_p = A_p^{(g)}\, y$.

<u>Fin</u>

<u>Retourner</u> p et $(x_0,\dots,x_p)$.

Fin du corrigé