DM 12. Enoncé

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.
Il n'est pas à rendre, mais sa recherche est fortement conseillée.
En particulier ce DM démontre deux résultats admis en cours.
Un corrigé sera fourni en fin de semaine prochaine.

1 Actions de groupes

Soit $(G, .)$ un groupe, dont l'élément neutre est noté 1, ou bien 1_G et soit E un ensemble quelconque.
On dit qu'une application quelconque, de $G \times E$ dans E, notée $\begin{array}{ccc} G \times E & \longrightarrow & E \\ (g, x) & \longmapsto & g \times x \end{array}$ est une action (ou opération) du groupe G sur l'ensemble E si et seulement si

1. $\forall x \in E, \ 1_G \times x = x$;
2. $\forall g, h \in G, \ \forall x \in E, \ g \times (h \times x) = (g.h) \times x$.

Le fait de noter "$\times$" cette application de $G \times E$ dans E rend la seconde propriété très naturelle. Dans cette optique, on pourra même noter, pour tout $g \in G$ et $x \in X$, $g.x$ voire gx au lieu de $g \times x$. Il conviendra cependant de ne pas confondre le produit interne de deux éléments de G, gh où $g, h \in G$, avec l'action d'un élément g de G sur un élément x de X, noté gx ou $g.x$ ou $g \times x$.

1.1 Exemples

1°) Soit H un sous-groupe de G.
a) Montrer que $\begin{array}{ccc} H \times G & \longrightarrow & G \\ (h, g) & \longmapsto & hg \end{array}$ est une action du groupe H sur l'ensemble G. On dit alors que l'on fait opérer H sur G par translation à gauche.
b) Montrer que $\begin{array}{ccc} H \times G & \longrightarrow & G \\ (h, g) & \longmapsto & hgh^{-1} \end{array}$ est une action du groupe H sur l'ensemble G. On dit alors que l'on fait opérer H sur G par conjugaison.

2°) Si l'on dispose d'une action du groupe G sur un ensemble E, proposer une action de G sur $\mathcal{P}(E)$.

3°) Si E est un ensemble, on note $\mathcal{S}(E)$ le groupe symétrique de E, c'est-à-dire l'ensemble des bijections de E dans E.
Pour tout $\sigma \in \mathcal{S}(E)$ et $x \in E$, on pose $\sigma \times x = \sigma(x)$.
Montrer que l'on définit ainsi une action du groupe $\mathcal{S}(E)$ sur E.

1.2 Théorème de Cayley

On suppose que $\begin{array}{ccc} G \times E & \longrightarrow & E \\ (g,x) & \longmapsto & g \times x \end{array}$ est une action du groupe G sur un ensemble E.
Pour tout $g \in G$, notons $\gamma_g : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & g \times x \end{array}$.

4°) Montrer que pour tout $g \in G$, $\gamma_g \in \mathcal{S}(E)$.

5°) Montrer que

$$\text{l'application } \gamma : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathcal{S}(E) \\ g & \longmapsto & \gamma_g \end{array} \text{ est un morphisme de groupes.}$$

6°) En déduire le théorème de Cayley : tout groupe fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$.

1.3 Théorème de Lagrange

On suppose toujours que $\begin{array}{ccc} G \times E & \longrightarrow & E \\ (g,x) & \longmapsto & g \times x \end{array}$ est une action du groupe G sur un ensemble E. On définit sur E la relation binaire R en convenant que :

$$\forall x, y \in E, \ \ x \ R \ y \Longleftrightarrow [\exists g \in G, \ \ y = g \times x].$$

7°) Montrer que R est une relation d'équivalence et, si $a \in E$, préciser la classe d'équivalence de a, que l'on notera $\overline{a}$.
$\overline{a}$ s'appelle l'orbite de a sous l'action du groupe G.

8°) Lorsque G est d'ordre fini, en déduire le théorème de Lagrange : pour tout sous-groupe H de G, le cardinal de H divise celui de G.

2 Le groupe symétrique de degré n

2.1 Décomposition en produit de cycles

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

9°) Pour tout $a \in \{1, \ldots, n\}$, on note $\mathcal{O}(a) = \{\sigma^k(a) / k \in \mathbb{Z}\}$, que l'on appelle l'orbite de a pour la permutation σ.
Montrer que l'ensemble $\{\mathcal{O}(a) / a \in \{1, \ldots, n\}\}$ est une partition de $\{1, \ldots, n\}$.

10°) On suppose dans cette question que σ est un cycle, que l'on notera $(a_1\ a_2,\ \dots\ a_p)$, où $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$ et où $a_1, \dots, a_p$ sont p éléments deux à deux distincts de $\{1, \dots, n\}$. Quelles sont les orbites de σ ?

11°) Soit $\mathcal{O}$ une orbite pour σ. Soit $a \in \mathcal{O}$.
a) Montrer qu'on peut définir $\ell = \min(\{k \in \mathbb{N}^*/\sigma^k(a) = a\})$.
b) Montrer que les éléments de $\mathcal{O}$ sont exactement $a, \sigma(a), \dots, \sigma^{\ell-1}(a)$ et que ces éléments sont deux à deux distincts.
c) Posons $p = \mathrm{Card}(\mathcal{O})$. Montrer que $\sigma^p(a) = a$.
d) On suppose que $p \geq 2$. Pour tout $a \in \mathcal{O}$, on note c_a le cycle $(a\ \sigma(a)\ \dots\ \sigma^{p-1}(a))$. Montrer que c_a ne dépend pas de a. Ainsi, il ne dépend que de $\mathcal{O}$. On le notera $c_{\mathcal{O}}$ pour la suite.

12°) **a)** On suppose que $\sigma = \prod_{i=1}^{r} c_i$ où $c_1, \dots, c_r$ sont des cycles dont les supports, notés $S_1, \dots, S_r$, sont deux à deux disjoints.
Montrer que $\{c_1, \dots, c_r\}$ est exactement l'ensemble des $c_{\mathcal{O}}$, où $\mathcal{O}$ décrit l'ensemble des orbites pour σ qui possèdent au moins 2 éléments.
Notons $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_q$ l'ensemble des orbites pour σ contenant au moins 2 éléments.
Pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$, on note $p_i = \mathrm{Card}(\mathcal{O}_i)$.
b) Démontrer le théorème suivant : toute permutation de $\mathcal{S}_n$ se décompose de manière unique sous la forme d'un produit (commutatif) de cycles dont les supports sont deux à deux disjoints.

2.2 Signature d'une permutation

On fixe un entier $n \geq 2$. Si f est une application de $\mathbb{Q}^n$ dans $\mathbb{Q}$ et si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on pose
$$\sigma \times f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^n & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \end{array}.$$

13°) Montrer que l'on vient ainsi de définir une action du groupe $\mathcal{S}_n$ sur l'ensemble des fonctions de $\mathbb{Q}^n$ dans $\mathbb{Q}$.

On considère l'application $\Delta : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^n & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \end{array}.$

14°) **a)** Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k < n$. Démontrer que si τ est la transposition $(k\ n)$, alors $\tau \times \Delta = -\Delta$.
b) En déduire que pour toute transposition τ de $\mathcal{S}_n$, $\tau \times \Delta = -\Delta$.

15°) Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $k \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe k transpositions $\tau_1, \dots, \tau_k$ telles que $\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_k$. Montrer que

$$(-1)^k = \frac{\prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} (\sigma(j) - \sigma(i))}{\prod\limits_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)}.$$

Ceci démontre que la parité de k ne dépend que de σ (alors même qu'il existe plusieurs façons d'écrire σ comme un produit de transpositions).

On peut donc poser $\varepsilon(\sigma) = \dfrac{\displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq n} (\sigma(j) - \sigma(i))}{\displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq n} (j-i)}$. C'est une définition de la signature de σ.

16°) a) Si c est un cycle de longueur ℓ (où $2 \leq \ell \leq n$), quelle est la signature de c ?
b) Montrer que, pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-m}$, où m est le nombre d'orbites pour σ (en comptant également les orbites réduites à un singleton).