Corrigé de deux exercices de la feuille 4.

Exercice 4.12 : (niveau 2)

1°) Si $x\ A\ y$ et $y\ A\ x$, alors $x\ R\ y$ et $\neg(x\ R\ y)$. C'est faux, donc on a bien l'implication $(x\ A\ y) \wedge (y\ A\ x) \Longrightarrow x = y$.

2°) $(x\ S\ y) \vee (x\ A\ y) \Longleftrightarrow (x\ R\ y) \wedge ((y\ R\ x) \vee \neg(y\ R\ x)) \Longleftrightarrow x\ R\ y$.

3°)
◇ Supposons que $x\ A\ y$ et $y\ A\ z$. Alors $x\ R\ z$.
De plus, $\neg(y\ R\ x)$ et $\neg(z\ R\ y)$. Si $z\ R\ x$, comme $x\ R\ y$, on aurait $z\ R\ y$ ce qui est faux, donc $\neg(z\ R\ x)$. Ainsi $x\ A\ z$.
◇ Choisissons un ensemble $E = \{a, b, c\}$ de cardinal 3. Prenons pour R la relation définie par le tableau suivant :

R	a	b	c
a	$\times$	$\times$	
b	$\times$	$\times$	$\times$
c			$\times$

. Alors S et A possède les tableaux suivants :

S	a	b	c
a	$\times$	$\times$	
b	$\times$	$\times$	
c			$\times$

et

A	a	b	c
a			
b			$\times$
c			

. Ainsi on peut vérifier que S et A sont transitives alors que R ne l'est pas, car $a\ R\ b$, $b\ R\ c$ mais $\neg(a\ R\ c)$.

Exercice 4.13 : (niveau 2)

1°) a) Supposons que E est bien ordonné. Pour tout $a, b \in E$ avec $a \neq b$, $\{a, b\}$ possède un plus petit élément, donc a et b sont comparables. Ainsi E est totalement ordonné. La réciproque est fausse car $(\mathbb{Z}, \leq)$ est totalement ordonné sans être bien ordonné.
b) On a vu en cours que tout ensemble ordonné fini non vide possède au moins un élément minimal, donc tout ensemble fini totalement ordonné et non vide possède au moins un minimum. En conséquence, si E est un ensemble fini et totalement ordonné, chacune de ses parties non vides possèdent un minimum, donc E est bien ordonné.

2°) Supposons que $(E, \preceq)$ et $(E, \succeq)$ sont bien ordonnés. Raisonnons par l'absurde en supposant que E est infini.

E possède un minimum noté a_0, puis $E \setminus \{a_0\}$ possède un minimum noté a_1. On définit ainsi la suite a_n par la relation de récurrence : $a_{n+1} = \min(E \setminus \{a_0, \ldots, a_n\})$.
Ainsi, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, donc son support ne possède pas de plus grand élément, ce qui est contradictoire.

3°) a) Notons M_x l'ensemble des $a \in E$ tels que $x \prec a$. Alors, d'après l'énoncé, s est un successeur de x si et seulement si $s \in M_x$ et si s est un minorant de M_x, donc si et seulement si M_x possède un minimum égal à s. Or le minimum d'un ensemble, s'il existe, est unique, donc le successeur de x, s'il existe, est unique.

b) On suppose que E est bien ordonné. Soit $x \in E$. Supposons que x n'est pas maximal dans E. Ainsi, la partie $M_x = \{y \in E / x \prec y\}$ est non vide. E étant bien ordonné, M_x possède un minimum, donc x admet un successeur.