Séries de vecteurs

Table des matières

Notation. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition. Un espace de Banach est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé complet.

Notation. On fixe dans ce chapitre un espace de Banach noté E.

1 Définitions

1.1 Définition d'une série de vecteurs

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E. Alors $(\sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est une nouvelle suite de vecteurs. Etudier la "série de terme général a_n", c'est étudier cette nouvelle suite et notamment s'intéresser à l'existence et à la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Exemple. Si $a_n = a^n$ où $a \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$, $\sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$, donc lorsque $|a| < 1$, la série converge et a pour somme $\frac{1}{1-a}$.

Définition. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs. On appelle série de terme général a_n, et on note $\sum a_n$, la suite de terme général $(a_n, \sum_{k=0}^{n} a_k)$.
Ainsi, $\sum a_n$ est une suite d'éléments de E^2.

Remarque. L'intérêt de cette définition un peu formelle est de distinguer les séries de vecteurs des suites de vecteurs.

Propriété. L'ensemble des séries de vecteurs, noté $\mathcal{S}(E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. De plus, $\sum a_n + \alpha \sum b_n = \sum(a_n + \alpha b_n)$, lorsque $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont dans $\mathcal{S}(E)$ et lorsque $\alpha \in \mathbb{K}$.

Démonstration.
On vérifie que $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites de E^2, c'est-à-dire qu'il est non vide et stable par combinaison linéaire. □

Notation. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs.

$\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k \text{ est appelée la somme partielle (des } n+1 \text{ premiers termes) de } \sum a_n.}$

Propriété. Soit (A_n) une suite de vecteurs. Il existe une unique série $\sum a_n$ dont la suite des sommes partielles est (A_n). Il s'agit de la série $\sum(A_n - A_{n-1})$, en convenant que $A_{-1} = 0$. Cette série est appelée la série télescopique associée à la suite (A_n).

Démonstration.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $a_n = A_n - A_{n-1}$.

$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} A_k - \sum_{k=-1}^{n-1} A_k = A_n$, donc la suite des sommes partielles de $\sum a_n$ est (A_n).
On a ainsi montré l'existence.

Formule. En généralisant le calcul précédent, on obtient les formules suivantes, appelées ***principe des dominos*** : $\sum_{k=\min}^{\max} u_k - u_{k-1} = u_{\max} - u_{\min -1}$ et $\sum_{k=\min}^{\max} u_k - u_{k+1} = u_{\min} - u_{\max +1}$.

- Soit $\sum b_n$ une seconde série dont la suite des sommes partielles est (A_n).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = A_n - A_{n-1} = a_n$, ce qui prouve l'unicité. □

méthode Cette propriété permet de ramener l'étude de la convergence d'une suite à celle de la convergence d'une série. On profite ainsi au choix de la théorie des suites ou de la théorie des séries.

Attention ! $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ n'est pas une somme partielle de série car $\frac{1}{n+k}$ dépend de n.

Plus généralement, une quantité de la forme $\sum_{k=0}^{n} a_{k,n}$ n'est pas une somme partielle de série si $a_{k,n}$ dépend effectivement de n.

Définition. Soient $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et $(a_n)_{n \geq n_0}$ une suite de vecteurs.
$\sum_{n \geq n_0} a_n$ est la série $\sum b_n$ où $b_n = 0$ si $n < n_0$ et $b_n = a_n$ si $n \geq n_0$.
On dit que $\sum_{n \geq n_0} a_n$ est une série tronquée à l'ordre n_0.

1.2 Convergence d'une série de vecteurs

Définition. Soit $\sum a_n$ une série de vecteurs.
On dit que $\sum a_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles de $\sum a_n$ converge. Dans ce cas, la limite de la suite des sommes partielles est appelée la somme de la série $\sum a_n$, et on note

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k.}$$

Lorsque la suite des sommes partielles n'admet pas de limite, on dit que la série $\sum a_n$ diverge.

Remarque. Comme pour les suites, la "nature" d'une série, c'est sa convergence ou sa divergence.

Propriété. Soient $\sum a_n$ une série de vecteurs et $n_0 \in \mathbb{N}^*$.
Les séries $\sum a_n$ et $\sum\limits_{n \geq n_0} a_n$ sont de même nature et en cas de convergence, si la somme de la série tronquée est notée $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n$,

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n.$$

Démonstration.
Posons $C = \sum\limits_{k=0}^{n_0-1} a_k$. Pour $n \geq n_0$, $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k = C + \sum\limits_{k=n_0}^{n} a_k$, donc les suites $(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k)$ et $(\sum\limits_{k=n_0}^{n} a_k)$ ont la même nature et lorsqu'elles convergent, en passant à la limite, on obtient (1). □

Définition. Soit $\sum a_n$ une série convergente de vecteurs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quantité $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ est définie. On l'appelle le n-ième reste de Cauchy de la série $\sum a_n$. Il vérifie $R_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration.
$R_n = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k - \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k = 0$. □

Remarque. Ainsi, une interprétation de l'écriture $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k + R_n$ consiste à regarder la somme partielle $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ comme une valeur approchée de la somme totale $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$, avec une erreur égale au reste de Cauchy.

Corollaire. On ne change pas la nature de la série $\sum a_n$ si l'on modifie *un nombre fini* d'éléments de la suite (a_n). Cependant, en cas de convergence, la somme de la série serait modifiée.

Démonstration.
Notons $\sum b_n$ la nouvelle série, obtenue à partir de $\sum a_n$ en ne modifiant qu'un nombre fini d'éléments de la suite (a_n). Ainsi, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $b_n = a_n$.
Alors, $\sum a_n$ a même nature que $\sum\limits_{n \geq n_0} a_n = \sum\limits_{n \geq n_0} b_n$, qui a même nature que $\sum b_n$. □

Propriété. Soit (u_n) une suite de vecteurs.
La série télescopique $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge et dans ce cas, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n)=\lim_{n\to+\infty}u_n-u_0$.

Démonstration.
D'après le principe des dominos, pour tout $N\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(u_{n+1}-u_n)=u_{N+1}-u_0$, donc les suites $(u_N)_{N\in\mathbb{N}}$ et $\displaystyle(\sum_{n=0}^{N}(u_{n+1}-u_n))_{N\in\mathbb{N}}$ ont la même nature. C'est dire que $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge. De plus, en faisant tendre N vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, on démontre la fin de la propriété. □

Exemples.

- ◇ On dit que (a_n) est une suite de vecteurs presque nulle lorsque $\{n\in\mathbb{N}/a_n\neq 0\}$ est de cardinal fini. Dans ce cas, la série $\sum a_n$ est convergente.
  En effet, la suite (a_n) ne diffère de la suite identiquement nulle qu'en un nombre fini d'éléments, donc $\sum a_n$ a même nature que la série dont le terme général est identiquement nul ; elle converge.
- ◇ Etude de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\ln(1+\frac{1}{n})$.
  $\ln(1+\frac{1}{n})=\ln(n+1)-\ln(n)$, donc d'après le principe des dominos, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{k})=\ln(n+1)$, ce qui montre que la série est divergente. C'est un cas particulier de la propriété précédente.
- ◇ Etude de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$.
  $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$, donc d'après la propriété précédente, cette série est convergente et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$.

Propriété. Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries convergentes et si $\lambda\in\mathbb{K}$, la série $\sum(a_n+\lambda b_n)$ est convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+\lambda b_n)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n+\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}b_n$.

Démonstration.
Pour tout $N\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(a_n+\lambda b_n)=\sum_{n=0}^{N}a_n+\lambda\sum_{n=0}^{N}b_n\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\sum_{n=0}^{+\infty}a_n+\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}b_n$. □

Propriété. L'ensemble des séries convergentes de vecteurs est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(E)$, noté $\mathcal{S}_{conv}(E)$ et l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_{conv}(E) & \longrightarrow & E \\ \sum a_n & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \end{array}$ est linéaire.

Démonstration.
• La série dont tous les termes sont nuls est convergente, donc $\mathcal{S}_{conv}(E) \neq \emptyset$.
De plus, si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont dans $\mathcal{S}_{conv}(E)$, on vient de voir que $\sum a_n + \lambda \sum b_n = \sum (a_n + \lambda b_n) \in \mathcal{S}_{conv}(E)$, donc $\mathcal{S}_{conv}(E)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(E)$.
• Notons φ l'application de l'énoncé.
$\varphi(\sum a_n + \lambda \sum b_n) = \varphi(\sum (a_n + \lambda b_n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + \lambda b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$,
donc $\varphi(\sum a_n + \lambda \sum b_n) = \varphi(\sum a_n) + \lambda \varphi(\sum b_n)$. □

Propriété. La somme d'une série convergente et d'une série divergente est une série divergente.

Démonstration.
Soient $\sum a_n$ une série convergente et $\sum b_n$ une série divergente.
Si $\sum (a_n + b_n)$ est convergente, $\sum b_n = \sum ((a_n + b_n) - a_n)$ est convergente, ce qui est faux. Ainsi la série $\sum (a_n + b_n)$ est divergente. □

Remarque. On en déduit que, si la somme de deux séries est convergente, ces deux séries ont même nature. Cependant, il est possible qu'elles divergent toutes les deux. Par exemple, $\sum a_n + \sum (-a_n)$ converge, même lorsque $\sum a_n$ diverge.

Propriété.
Si une série converge, son terme général tend vers 0. La réciproque est fausse.

Démonstration.
• Soit $\sum a_n$ une série convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = 0$.
• $\ln(1 + \frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais on a vu que la série $\sum_{n\geq 1} \ln(1 + \frac{1}{n})$ diverge. Ainsi la réciproque est fausse. □

Définition. Lorsque la suite a_n ne tend pas vers 0, on dit que la série $\sum a_n$ diverge grossièrement.

Définition. On appelle série géométrique les séries $\sum a^n$ où $a \in \mathbb{C}$.

Propriété. La série géométrique $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$ et dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

Démonstration.
Le cas où $|a| < 1$ est traité au début de ce chapitre.
Lorsque $|a| \geq 1$, la série géométrique diverge grossièrement. □

Propriété. Séries à valeurs dans un produit.
Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et E_1, ..., E_p p espaces vectoriels normés, leurs normes étant notées N_1, ..., N_p. On note $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ que l'on munit de l'une des trois normes classiques. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((x_{1,n}, \ldots, x_{p,n}))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
Alors la série $\sum x_n$ converge si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $\sum x_{i,n}$ est convergente.
De plus, dans ce cas, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} x_{1,n}, \ldots, \sum_{n=0}^{+\infty} x_{p,n}\Big)$.

Démonstration.
On applique la propriété portant sur la limite d'une suite à valeurs dans un produit, à la suite des sommes partielles $\displaystyle\Big(\sum_{k=0}^{n} x_k\Big)_{n\in\mathbb{N}}$: c'est une suite de E dont la suite des i-èmes composantes est $\displaystyle\Big(\sum_{k=0}^{n} x_{i,k}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Exemple. $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\Big(\frac{1}{n(n+1)}, \frac{1}{3^n}\Big)$ est une série convergente dans $\mathbb{R}^2$.

Propriété. Séries à valeurs dans un espace de dimension finie.
On suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie strictement positive, notée q. Soit $e = (e_1, \ldots, e_q)$ une base de E.
Soit (x_n) une suite de vecteurs de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\displaystyle x_n = \sum_{i=1}^{q} x_{i,n} e_i$.
Alors, la série $\sum x_n$ converge dans E si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, la série $\sum x_{i,n}$ converge dans $\mathbb{K}$, et, dans ce cas, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \sum_{i=1}^{q}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} x_{i,n}\Big)e_i$.

Démonstration.
On applique la propriété portant sur la limite d'une suite à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, à la suite des sommes partielles $\displaystyle\Big(\sum_{k=0}^{n} x_k\Big)_{n\in\mathbb{N}}$: c'est une suite de E dont la suite des i-èmes coordonnées est $\displaystyle\Big(\sum_{k=0}^{n} x_{i,k}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$. □

Propriété. Soit $\sum a_n$ une serie de complexes. Elle converge si et seulement si les séries $\sum Re(a_n)$ et $\sum Im(a_n)$ convergent, et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} Re(a_n) + i\sum_{n=0}^{+\infty} Im(a_n).$$

1.3 Convergence absolue

Définition. **Critère de Cauchy pour les séries.** Soit $\sum a_n$ une série à termes dans E. On dit qu'elle vérifie le critère de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \forall p \in \mathbb{N} \ \|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k}\| \leq \varepsilon.$$

Propriété. Soit $\sum a_n$ une série à termes dans E. Elle converge si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy.

Démonstration.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Si $(p, n) \in \mathbb{N}^2$, $\sum_{k=1}^{p} a_{n+k} = A_{n+p} - A_n$.

$\sum a_n$ converge si et seulement si la suite (A_n) est convergente, or E est un espace vectoriel de Banach, donc il est complet, ainsi la suite (A_n) converge si et seulement si c'est une suite de Cauchy. Ainsi $\sum a_n$ converge si et seulement si

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \forall p \in \mathbb{N} \ \|A_{n+p} - A_n\| \leq \varepsilon$. □

Définition. Soit $\sum a_n$ une série à termes dans E.

$\boxed{\sum a_n \text{ est absolument convergente si et seulement si la série } \sum \|a_n\| \text{ est convergente.}}$

Propriété. Soit $\sum a_n$ une série à termes dans E. Si elle est absolument convergente, alors elle est convergente et dans ce cas,

$$\|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n\| \text{ (Inégalité triangulaire).}$$

Cependant la réciproque est fausse.

Démonstration.

Soit $\sum a_n$ une série dans E absolument convergente.

$\sum \|a_n\|$ vérifie le critère de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et $p \in \mathbb{N}$, $|\sum_{k=1}^{p} \|a_{n+k}\|| \leq \varepsilon$.

Soient $n \geq N$ et $p \in \mathbb{N}$. $\|\sum_{k=1}^{p} a_{n+k}\| \leq \sum_{k=1}^{p} \|a_{n+k}\| \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $\sum a_n$ vérifie le critère de Cauchy, et donc qu'elle converge.

De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\|\sum_{n=0}^{N} a_n\| \leq \sum_{n=0}^{N} \|a_n\|$. En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient que $\|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n\|$. □

Exemple. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos n}{n(n+1)}$ converge car elle est absolument convergente.

Définition. Soit $\sum a_n$ une série à termes dans E.
On dit que $\sum a_n$ est semi-convergente si et seulement si elle converge sans être absolument convergente.

Remarque. Ainsi, pour étudier une série de vecteurs $\sum a_n$, on commencera par étudier la série $\sum \|a_n\|$. Cette dernière est une série de réels positifs. On a donc intérêt à étudier de plus près les séries de réels positifs.

2 Séries à termes positifs

Introduction : Soit $\sum a_n$ une série de réels positifs. Si a_n ne tend pas vers 0, la série diverge (grossièrement), donc pour que $\sum a_n$ converge, il faut, informellement, que a_n tende vers 0 "suffisamment vite", ou encore, que a_n soit suffisamment petit lorsque n tend vers $+\infty$. On verra par exemple que $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc $\frac{1}{n}$ n'est pas assez petit, mais que $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

2.1 Théorèmes généraux

Théorème. Soit $\sum a_n$ une série de réels.
On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$.
Alors $\sum a_n$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Dans ce cas, en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Démonstration.
La suite (A_n) est croissante, donc elle converge si et seulement si elle est majorée et dans ce cas, sa limite est égale à sa borne supérieure. □

Remarque. Soit $\sum a_n$ une série divergente de réels positifs. Alors $A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Dans ce cas, on note parfois $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = +\infty$.

Propriété. Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes positifs telles que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\boxed{a_n \leq b_n}$.

- $\boxed{\text{Si } \sum b_n \text{ converge, alors } \sum a_n \text{ converge}}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$.
- Si $\sum a_n$ est divergente, alors $\sum b_n$ diverge.

Démonstration.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ et $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k$. Supposons que $\sum b_n$ converge.

Alors la suite (B_n) est majorée, or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \leq B_n$. Ainsi la suite (A_n) est aussi majorée et la série $\sum a_n$ est convergente.

• Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{N} a_n \leq \sum_{n=0}^{N} b_n$, donc en faisant tendre N vers $+\infty$,
on obtient : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.
• La fin de la propriété se démontre en prenant la contraposée. □

Remarque. Si dans la propriété précédente on suppose seulement que $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0\ a_n \leq b_n$, elle reste vraie mais, en cas de convergence, l'inégalité devient $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$.

Démonstration.
On applique la propriété précédente aux séries tronquées à l'ordre n_0. □

Remarque. Lorsque $\sum a_n$ une série de complexes absolument convergente, on peut montrer qu'elle est convergente de manière élémentaire, sans utiliser la notion hors programme de suite de Cauchy :
◇ Supposons d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $a_n^+ = \max(a_n, 0)$ et $a_n^- = \max(-a_n, 0)$.
On vérifie que $a_n = a_n^+ - a_n^-$ et $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$.
Ainsi, $0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$ et $0 \leq a_n^- \leq |a_n|$, donc $\sum a_n^+$ et $\sum a_n^-$ sont convergentes.
Or $a_n = a_n^+ - a_n^-$, donc $\sum a_n$ est convergente.
◇ Supposons maintenant que (a_n) est une suite de complexes. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = x_n + iy_n$ avec $x_n, y_n \in \mathbb{R}$.
$|x_n| \leq |a_n|$, donc $\sum |x_n|$ converge, mais (x_n) est une suite de réels, donc d'après le point précédent, $\sum x_n$ converge. De même, on montre que $\sum y_n$ converge.
Alors $\sum (x_n + iy_n) = \sum a_n$ est convergente.

Propriété. On note $l^1(\mathbb{K}) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} / \sum |u_n| \text{converge } \}$.
C'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Pour tout $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{K})$, posons $\|u\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
Alors $(l^1(\mathbb{K}), \|.\|_1)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Démonstration.
Pour tout $u \in l^1(\mathbb{K})$, $\|u\|_1 \geq 0$.
◇ Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{K})$ tel que $\|x\|_1 = 0$. Ainsi $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = 0$, donc pour tout $j \in \mathbb{N}$,
$0 \leq |x_j| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = 0$, ce qui prouve que $x = 0$.
◇ Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{K})$. $\|\lambda x\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda x_n| = |\lambda| \|x\|_1$.
◇ Soient $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{K})$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{K})$.
$\|x + y\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n + y_n| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| + |y_n| \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$.

Ainsi $\|.\|_1$ est une norme sur $l^1(\mathbb{K})$. □

Notation. On note $l^2(\mathbb{K})$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ telles que $\sum |u_n|^2$ converge.

Propriété. $l^2(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Pour tout $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{K})$, posons $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^2}$.

Alors $(l^2(\mathbb{K}), \|.\|_2)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

Démonstration.

• Soient $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{K})$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{K})$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. $(|x_n| - |y_n|)^2 \geq 0$, donc $|x_n y_n| \leq \frac{1}{2}(|x_n|^2 + |y_n|^2)$.
On en déduit que $|x_n + y_n|^2 \leq (|x_n| + |y_n|)^2 = |x_n|^2 + |y_n|^2 + 2|x_n||y_n| \leq 2(|x_n|^2 + |y_n|^2)$.
Ainsi, $x + y \in l^2(\mathbb{K})$. De plus, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha x \in l^2(\mathbb{K})$ et $l^2(\mathbb{K})$ est non vide, donc c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel .

• Pour montrer la seconde partie de la propriété, seule l'inégalité triangulaire pose un problème. Soient $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{K})$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{K})$. Soit $N \in \mathbb{N}$.
Posons $X_N = (x_n)_{0\leq n\leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$ et $Y_N = (y_n)_{0\leq n\leq N} \in \mathbb{K}^{N+1}$. On sait que $\|.\|_2$ est une norme sur $\mathbb{K}^{N+1}$, donc $\|X_N + Y_N\|_2 \leq \|X_N\|_2 + \|Y_N\|_2$.
Ainsi, $\sqrt{\sum_{n=0}^{N} |x_n + y_n|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{N} |x_n|^2} + \sqrt{\sum_{n=0}^{N} |y_n|^2}$. On conclut en faisant tendre N vers $+\infty$. □

Définition. Soit (a_n) et (b_n) deux suites d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E.

— $a_n = O(b_n) \iff \exists C \in \mathbb{R}_+,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \|a_n\| \leq C\|b_n\|$.
— $a_n = o(b_n) \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \|a_n\| \leq \varepsilon\|b_n\|$.
— $a_n \sim b_n \iff a_n - b_n = o(b_n)$.

Remarque. Lorsque $E = \mathbb{C}$, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \neq 0$, alors

— $a_n = O(b_n) \iff \frac{a_n}{b_n}$ est bornée ;
— $a_n = o(b_n) \iff \frac{a_n}{b_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et
— $a_n \sim b_n \iff \frac{a_n}{b_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Notation. Pour la suite, notons $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$ l'ensemble des séries de réels positifs.

Propriété. Soit $\sum a_n$ une série de vecteurs et $\sum b_n$ une série de **réels positifs**.
On suppose que $\boxed{\|a_n\| = \mathbf{O}(b_n)}$ (c'est-à-dire $a_n = \mathbf{O}(b_n)$).
$\boxed{\text{Si la série } \sum b_n \text{ converge, alors } \sum a_n \text{ est absolument convergente.}}$
Si la série $\sum \|a_n\|$ diverge, alors $\sum b_n$ est divergente.

Démonstration.

Il existe $C > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq n_0\ \ \|a_n\| \leq Cb_n$. Supposons que $\sum b_n$ converge. Alors $\sum Cb_n$ est convergente et, d'après une remarque précédente, la série $\sum \|a_n\|$ converge. □

Remarque. En pratique, on utilise souvent ce théorème lorsque $a_n = o(b_n)$.

Théorème. Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries de $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$. On suppose que $\boxed{a_n \sim b_n}$. Alors les deux séries ont la même nature.

Démonstration.
Si $\sum b_n$ converge, comme $a_n = \mathbf{O}(b_n)$, $\sum a_n$ converge également.
De même, si $\sum a_n$ converge, comme $b_n = \mathbf{O}(a_n)$, $\sum b_n$ converge également. $\square$

Théorème. Soit $\sum b_n$ une série de réels. On suppose que b_n est positif à partir d'un certain rang ou bien que b_n est négatif à partir d'un certain rang.
Soit $\sum a_n$ une seconde série de réels.
Si $a_n \sim b_n$, alors $\sum a_n$ et $\sum b_n$ ont la même nature.

Démonstration.
Quitte à remplacer $\sum a_n$ et $\sum b_n$ par $\sum(-a_n)$ et $\sum(-b_n)$, on peut se limiter au cas où b_n est positif à partir d'un certain rang N_1. Supposons que $a_n \sim b_n$.
Ainsi, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_2$, $|a_n - b_n| \leq \frac{1}{2}|b_n|$.
Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Pour $n \geq N$, $b_n - a_n \leq \frac{1}{2}b_n$, donc $\frac{1}{2}b_n \leq a_n$. En particulier, $a_n \geq 0$. On peut donc appliquer le théorème précédent aux séries tronquées $\sum_{n \geq N} a_n$ et $\sum_{n \geq N} b_n$ et conclure. $\square$

méthode En pratique, pour déterminer la nature d'une série de vecteurs, on commence par étudier l'absolue convergence, ce qui nous ramène à des séries à termes positifs.
Pour étudier la convergence de séries de réels positifs, on les compare à l'aide des propriétés précédentes avec des séries dont on connaît déjà la nature (cf ci-dessous).
La technique de comparaison la plus souvent utilisée est la relation d'équivalence, puis vient le "**O**", puis la relation d'ordre.
En résumé, **pour étudier la nature d'une série, on commence par rechercher un équivalent de son terme général**.

2.2 Séries de Riemann

Technique de comparaison entre séries et intégrales (TCSI) : Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.
Soit $f : [n_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application décroissante et continue. La TCSI consiste en la présentation des trois étapes suivantes :
Première étape : Soit $k > n_0$. f étant décroissante,
pour tout $t \in [k-1, k]$, $f(k) \leq f(t) \leq f(k-1)$.
Deuxième étape : On intègre ces inégalités entre $k-1$ et k, en tenant compte du fait que $\int_{k-1}^{k} f(k)dt = f(k)$ et $\int_{k-1}^{k} f(k-1)dt = f(k-1)$,
on obtient $f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt \leq f(k-1)$.

Troisième étape : Soit $n > n_0$: on somme ces dernières inégalités pour k variant de n_0+1 à n. Ainsi, grâce à la relation de Chasles, $\displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leq \int_{n_0}^{n} f(t)dt \leq \sum_{n=n_0}^{n-1} f(k)$.

Théorème de comparaison entre séries et intégrales : Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.
Soit $f\ :\ [n_0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application décroissante et continue. On suppose de plus que, pour tout $x \in [n_0, +\infty[$, $f(x) \geq 0$.
Alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} f(n)$ a même nature que la suite $\displaystyle\left(\int_{n_0}^{n} f(t)dt\right)_{n\geq n_0}$.

Démonstration.
La série $\sum f(n)$ a même nature que la suite de ses sommes partielles $\displaystyle\left(\sum_{k=n_0}^{n} f(k)\right)_{n\geq n_0}$.
Les deux suites $\displaystyle\left(\sum_{k=n_0}^{n} f(k)\right)_{n\geq n_0}$ et $\displaystyle\left(\int_{n_0}^{n} f(t)dt\right)_{n\geq n_0}$ sont croissantes, car f est positive, donc elles convergent si et seulement si elles sont majorées, or la TCSI montre que l'une est majorée si et seulement si l'autre est majorée. □

Définition. Les séries de Riemann sont les séries de la forme $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Propriété. $\boxed{\text{La série de Riemann } \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$

Démonstration.
Si $\alpha \leq 0$, $\dfrac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.
Supposons maintenant que $\alpha > 0$ et posons, pour tout $t \geq 1$, $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$: f est positive, décroissante et continue, donc d'après le TCSI, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ a même nature que la suite de terme général $\displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \ln n \text{ si } \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha}(n^{1-\alpha} - 1) \text{ si } \alpha \neq 1 \end{cases}$. Cette dernière suite converge si et seulement si $\alpha > 1$. □

Exercice. Nature de $\displaystyle\sum \frac{n+1}{n^3+3}$.
$\dfrac{n+1}{n^3+3} \sim \dfrac{1}{n^2}$ or $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, donc, comme il s'agit de séries de réels positifs, $\displaystyle\sum \frac{n+1}{n^3+3}$ est absolument convergente.

Critère de Riemann : Soient $\sum a_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$.
S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\sum a_n$ converge.

S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $\sum a_n$ diverge.

Exercice. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(\cos \frac{1}{n})^{n^\alpha}$.

$a_n = (\cos \frac{1}{n})^{n^\alpha} = \exp(n^\alpha \ln(1 - \dfrac{1}{2n^2} + o(\dfrac{1}{n^2}))) = \exp(-\dfrac{1}{2}n^{\alpha-2} + o(n^{\alpha-2}))$.
Premier cas. Si $\alpha \leq 2$, alors a_n ne tend pas vers 0, donc la série diverge grossièrement.
Deuxième cas. Si $\alpha > 2$. [a_n, sous cette forme exponentielle, apparaît comme "très petit" lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi, on conjecture que $\sum a_n$ converge, et même que $a_n = o(\dfrac{1}{n^2})$.]
$n^2 a_n = exp(-\frac{1}{2}n^{\alpha-2} + o(n^{\alpha-2}) + 2\ln(n)) = exp(-\frac{1}{2}n^{\alpha-2} + o(n^{\alpha-2})) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
donc $n^2 a_n = o(1)$. Ainsi $a_n = o(\dfrac{1}{n^2})$ et $\sum a_n$ est une série de réels positifs, donc cette série est convergente.

Propriété. (Hors programme). $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$, où γ est une constante appelée la ***constante d'Euler*** (par le calcul numérique, on montre que $\gamma = 0,5772 \pm 10^{-4}$), et où $o(1)$ désigne une suite qui tend vers 0.

Démonstration.
Posons $x_n = -\ln(n) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Soit $n \geq 2$. $x_n - x_{n-1} = \dfrac{1}{n} + \ln(1 - \dfrac{1}{n}) = o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$, or la série de Riemann $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, donc la série télescopique $\sum(x_n - x_{n-1})$ converge. Ainsi, il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma$. □

Exercice. Etude des séries de Bertrand de la forme $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

- *Premier cas.* Si $\alpha > 1$, Il existe $\alpha' \in]1, \alpha[$.
$\dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} = o\left(\dfrac{1}{n^{\alpha'}}\right)$, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ est convergente.
- *Deuxième cas.* Si $\alpha < 1$, $\dfrac{1}{n} = o\left(\dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}\right)$, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ est divergente.
- *Troisième cas.* Si $\alpha = 1$.
Si $\beta < 0$, $\dfrac{1}{n} = \mathbf{O}\left(\dfrac{1}{n \ln^\beta n}\right)$, donc la série de Bertrand est divergente.
On suppose maintenant que $\beta \geq 0$. Ainsi l'application
$$\begin{array}{rccl} f: & [2, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \dfrac{1}{t \ln^\beta t} \end{array}$$ est décroissante et positive.
La série de Bertrand est donc convergente si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\int_2^n \frac{dt}{t \ln^\beta t}\right)_{n\geq 2}$ est convergente.

Or, pour tout $x > 2$, $\displaystyle\int_2^x \frac{dt}{t\ln^\beta t} = \left\{ \begin{array}{l} \left[\dfrac{\ln^{1-\beta} t}{1-\beta}\right]_2^x \text{ si } \beta \neq 1 \\ [\ln\ln t]_2^x \text{ si } \beta = 1 \end{array}\right.$, donc la série converge si et seulement si $\beta > 1$.

2.3 Critère de D'Alembert

Propriété. Critère de D'Alembert. Soit $\sum a_n$ une série de réels positifs, non nul à partir d'un certain rang, $\boxed{\text{telle que } \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \overline{\mathbb{R}}}$.

◇ Si $l < 1$, $\sum a_n$ est convergente,
◇ Si $l > 1$ ou si $l = 1^+$, $\sum a_n$ diverge grossièrement.
◇ Lorsque $l = 1$, on ne peut conclure. On est dans le cas douteux du critère de d'Alembert.

Démonstration.
Par hypothèse, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_1$, $a_n \neq 0$.
• Supposons que $l < 1$. posons $L = \dfrac{1+l}{2}$. Alors $l < L < 1$, donc d'après le lemme du tunnel, il existe $N \geq N_1$ tel que pour tout $n \geq N$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq L$.
Par récurrence, on en déduit : pour tout $n \geq N$, $a_n \leq a_N L^{n-N}$. Ainsi $a_n = \mathbf{O}(L^n)$, or $\sum L^n$ est une série géométrique convergente, donc $\sum a_n$ converge.
• Supposons que $l > 1$ ou que $l = 1^+$. Il existe $N \geq N_1$ tel que pour tout $n \geq N$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$. Ainsi la suite $(a_n)_{n\geq N}$ est croissante, donc $\forall n \geq N \ \ a_n \geq a_N \neq 0$, ce qui montre que a_n ne tend pas vers 0, donc que $\sum a_n$ diverge grossièrement.
• Pour une série de Riemann, on a toujours $l = 1$, ce qui montre que c'est un cas douteux. □

Exemple. Nature de $\sum a_n$, où $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$.
$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = (n+1)\dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = (1+\dfrac{1}{n})^{-n} = e^{-n\ln(1+\frac{1}{n})} = e^{-1+o(1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{e} < 1$,
donc la série est convergente.

méthode Le critère de D'Alembert sert peu. En effet, il ne permet qu'un tri assez grossier entre les séries qui convergent plus vite qu'une série géométrique de raison strictement inférieure à 1 et les séries qui divergent grossièrement. Toute autre série "tombe" dans le cas douteux.
Ce critère est donc à réserver au cas où la quantité $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ est nettement plus simple que a_n, comme dans l'exemple ci-dessus.
Dans le cadre des séries entières, ce critère fera un formidable "come back". Il est utile pour calculer le rayon de convergence d'une série entière.

Remarque. *Hors programme :* Si (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels strictement positifs telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$, alors $a_n = \mathbf{O}(b_n)$. En effet,

$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}$, donc la suite de terme général $\frac{a_n}{b_n}$ est décroissante. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_0}{b_0}$, donc $a_n = \mathbf{O}(b_n)$.
En particulier, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq b < 1$, alors $a_n = \mathbf{O}(b^n)$ et $\sum a_n$ converge, et si $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq b \geq 1$, $b^n = O(a_n)$ et $\sum a_n$ diverge.

Propriété. **Formule de Stirling**. $n! \sim \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$.

Démonstration.
cf DM. □

Exemple. Reprenons $a_n = \frac{n!}{n^n}$: $a_n \sim \sqrt{2\pi n}e^{-n}$, donc d'après les croissances comparées, $n^2 a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $a_n = o(\frac{1}{n^2})$ ce qui montre que $\sum a_n$ converge, sans utiliser le critère de d'Alembert.

Remarque. La formule de Stirling s'écrit aussi $n! = \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n(1 + o(1))$, donc $\sum_{k=1}^{n} \ln k = \ln(n!) = n \ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + o(1)$.

3 Les séries alternées

3.1 Le théorème des séries alternées

Définition. On appelle série alternée toute série réelle de la forme $\sum(-1)^n \alpha_n$ ou $\sum(-1)^{n+1}\alpha_n$, où pour tout $n \in \mathbb{R}$, $\alpha_n \in \mathbb{R}_+$.

Remarque. Dans le cas d'une série alternée, a_k et a_{k+1} sont de signes opposés, donc dans la somme partielle $\sum_{k=0}^{n} a_k$, chaque terme est compensé par le suivant. C'est pourquoi on peut s'attendre à une condition assez faible pour garantir la convergence d'une série alternée.

Théorème des séries alternées.
Soit $\sum a_n$ une série alternée telle que la suite $(|a_n|)$ est décroissante et tend vers 0 .
Alors $\sum a_n$ est convergente.

De plus, en cas de convergence, pour tout $(n, N) \in \mathbb{N}^2$ avec $N \geq n$, la quantité $\sum_{k=n}^{N} a_k$ est du signe de son premier terme (qui est a_n) et a un module inférieur ou égal au module de son premier terme.
⋄ C'est encore vrai lorsque $N = +\infty$, donc pour tout $n \in \{-1\} \cup \mathbb{N}$, le reste de Cauchy $\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ est du signe de son premier terme (qui est a_{n+1}) et,

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \{-1\} \cup \mathbb{N},\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k\right| \le |a_{n+1}|}\ .$$

Démonstration.

• On se limite au cas où $\sum a_n = \sum (-1)^n |a_n|$ car, en multipliant par -1, le cas où $\sum a_n = \sum (-1)^{n+1} |a_n|$ s'en déduit facilement.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ (en convenant que $A_{-1} = 0$).

Soit $n \in \mathbb{N}$. $A_{2n+2} - A_{2n} = |a_{2n+2}| - |a_{2n+1}| \le 0$, car la suite $(|a_k|)$ est décroissante. Ainsi la suite (A_{2n}) est une suite décroissante. De même on montre que la suite (A_{2n+1}) est croissante. De plus $A_{2n+1} - A_{2n} = -|a_{2n+1}| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc les suites (A_{2n}) et (A_{2n+1}) sont adjacentes. Ainsi elles admettent une limite commune que nous noterons A. On a prouvé que $A_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} A$, donc la série $\sum a_n$ est convergente.

• De plus, la suite décroissante (A_{2n}) est supérieure à A et la suite croissante (A_{2n+1}) est inférieure à A.

Ainsi, pour tout $n \ge 0$, $A_0 \ge A_{2n} \ge A_{2n+1} \ge A_1 = |a_0| - |a_1| \ge 0$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_0 \ge A_n \ge 0$.

Ainsi, en regroupant les cas où $\sum a_n = \sum (-1)^n |a_n|$ et où $\sum a_n = \sum (-1)^{n+1} |a_n|$, on vient de montrer que la quantité $\sum_{k=0}^{n} a_k$ est du signe de son premier terme (qui est a_0) et a un module inférieur ou égal au module de son premier terme.

• Soit $(n, N) \in \mathbb{N}^2$ avec $N \ge n$. $\sum_{k=n}^{N} a_k = \sum_{k=0}^{N-n} a_{k+n}$ est la somme partielle d'une série spéciale alternée, donc elle est du signe de son premier terme (qui est a_n) et a un module inférieur ou égal au module de son premier terme.

• La propriété précédente, pour n fixé, est vraie pour tout $N \ge n$, donc en faisant tendre N vers $+\infty$, on en déduit la propriété pour les restes de Cauchy. □

Remarque. La réciproque de ce théorème est fausse, c'est-à-dire qu'une série alternée $\sum a_n$ peut converger sans que la suite $(|a_n|)$ ne soit décroissante. On est par exemple dans cette situation lorsque $a_{2n} = \frac{1}{n^2}$ et $a_{2n+1} = -2a_{2n}$. En effet, $|a_{2n+1}| > |a_{2n}|$, donc la suite $(|a_n|)$ n'est pas décroissante, mais $\sum_{n\ge 2} a_n$ converge car elle est même absolument convergente. En effet, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=2}^{2N} |a_n| = \sum_{n=1}^{N} a_{2n} + \sum_{n=1}^{N-1} a_{2n+1} \le 3 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exemple. Nature de $\sum_{n\ge 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

Si $\alpha > 1$, la série est absolument convergente.

Si $\alpha \le 0$, la série diverge grossièrement.

Si $\alpha \in]0,1]$, comme la suite de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est décroissante et tend vers 0, on peut appliquer le théorème des séries alternées, donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est semi-convergente.

Exemple. Nature de $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, donc $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\right| \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ et la série n'est pas absolument convergente.

Cependant, $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}}))$.

Ainsi $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$.

Mais $\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$, donc la série $\sum_{n\geq 1}(-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))$ est divergente, et $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est semi-convergente d'après l'exemple précédent. Ainsi la série $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ est divergente, alors qu'elle est équivalente au terme général d'une série convergente.

3.2 Non commutativité des séries semi-convergentes.

Considérons la série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1} u_n$, où $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

◇ $\sum u_n$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\ln 2$: démonstration au tableau.

◇ On décide de sommer les termes de la suite (u_n) dans l'ordre suivant :
$u_2, u_4, u_1, u_6, u_8, u_3, u_{10}, u_{12}, u_5, \ldots$. Appelons $(w_n)_{n\geq 1}$ cette nouvelle suite.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{3n+1} = u_{4n+2}$, $w_{3n+2} = u_{4n+4}$, et $w_{3n+3} = u_{2n+1}$.

◇ Posons $S_N = \sum_{k=1}^{3N} w_k$.

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{k=0}^{N-1}(w_{3k+1}+w_{3k+2}+w_{3k+3}) = \sum_{k=0}^{N-1}(\frac{1}{4k+2}+\frac{1}{4k+4}-\frac{1}{2k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1}(\frac{1}{4k+4}-\frac{1}{4k+2}) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{2k+1}. \end{aligned}$$

Posons $T_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$. On sait que $T_N = \ln N + \gamma + o(1)$, où γ désigne la constante d'Euler. Ainsi,

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{1}{4}T_N - \frac{1}{2}(T_{2N} - \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2k}) \\ &= \frac{1}{2}T_N - \frac{1}{2}T_{2N} \\ &= \frac{1}{2}(\ln N + \gamma + o(1)) - \frac{1}{2}(\ln(2N) + \gamma + o(1)) = -\frac{1}{2}\ln(2) + o(1). \end{aligned}$$

Ainsi $S_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}\ln(2)$. De plus, $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,

donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{3N+1} w_k = S_N + w_{3N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}\ln(2)$

et de même, on montre que $\displaystyle\sum_{k=1}^{3N+2} w_k \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}\ln(2)$.

Ceci prouve que $\sum w_k$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} w_k \neq \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.

Pourtant les suites (u_n) et (w_n) possèdent les mêmes termes, mais dans un ordre différent. Ainsi, lorsque le nombre de termes que l'on somme est infini, la sommation n'est plus commutative.

$\diamond$ On peut démontrer un résultat (hors programme) beaucoup plus général ; si $\sum a_n$ est une série semi-convergente (c'est-à-dire convergente mais non absolument convergente) de réels, pour tout $l \in \mathbb{R}$, il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $\sum a_{\sigma(n)}$ converge et a pour somme l.

$\diamond$ On peut également démontrer que, lorsque $\sum a_n$ est une série absolument convergente, pour toute bijection σ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, $\sum a_{\sigma(n)}$ est aussi absolument convergente et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

3.3 La transformation d'Abel (hors programme)

Propriété. ***Hors programme*** Soit (a_n) une suite de complexes et (x_n) une suite de vecteurs. On dispose de la formule suivante, appelée transformation d'Abel : en posant $X_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k$, pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \le q$,

$$\sum_{n=p}^{q} a_n x_n = a_q X_q - a_p X_{p-1} - \sum_{n=p}^{q-1}(a_{n+1} - a_n)X_n.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\sum_{n=p}^{q} a_n x_n &= \sum_{n=p}^{q} a_n(X_n - X_{n-1}) = \sum_{n=p}^{q} a_n X_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} a_{n+1} X_n \\ &= \sum_{n=p}^{q-1} (a_n - a_{n+1}) X_n + a_q X_q - a_p X_{p-1}.\end{aligned}$$

□

Remarque. Cette formule ressemble fort à de l'intégration par parties si l'on assimile la suite $(a_{n+1} - a_n) = (\frac{a_{n+1} - a_n}{(n+1) - n})$ à "la dérivée" de la suite (a_n) et la suite (X_n) à "la primitive" de la suite (x_n).

Propriété. ***Hors programme : théorème d'Abel.***
Soient (a_n) une suite décroissante de réels qui tend vers 0 et $\sum x_n$ une série de vecteurs dont les sommes partielles sont bornées.
Alors la série $\sum a_n x_n$ converge.

Démonstration.
On va montrer que $\sum a_n x_n$ vérifie le critère de Cauchy.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. D'après la transformation d'Abel,
$\| \sum_{k=1}^{p} a_{n+k} x_{n+k} \| = \| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_n x_n \| = \| a_{n+p} X_{n+p} - a_{n+1} X_n - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_{k+1} - a_k) X_k \|.$
Il existe $M > 0$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|X_k\| \leq M$.
De plus $a_{k+1} - a_k \leq 0$, car la suite (a_n) est décroissante, donc

$$\begin{aligned}\| \sum_{k=1}^{p} a_{n+k} x_{n+k} \| &\leq a_{n+p} M + a_{n+1} M + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) M \\ &= M(a_{n+p} + a_{n+1} + a_{n+1} - a_{n+p}) = 2M a_{n+1}.\end{aligned}$$

Or $a_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $2M a_{n+1} \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \geq N$ et $p \in \mathbb{N}^*$, $\| \sum_{k=1}^{p} a_{n+k} x_{n+k} \| \leq \varepsilon$. □

Remarque. Les sommes partielles de la série $\sum (-1)^n$ sont bornées, donc le théorème des séries alternées est un cas particulier du théorème d'Abel.

Exemple. Nature de la série $\sum \frac{e^{i\beta n}}{n^\alpha}$, où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Solution. $|\frac{e^{i\beta n}}{n^\alpha}| = \frac{1}{n^\alpha}$, donc la série de l'énoncé est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
De plus, lorsque $\alpha \leq 0$, $\frac{1}{n^\alpha}$ ne tend pas vers 0, donc la série de l'énoncé diverge grossièrement.

Supposons maintenant que $\alpha \in]0, 1]$. Posons $x_n = e^{i\beta n}$ et $X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$.

Si $\beta \in 2\pi\mathbb{Z}$, $x_n = 1$ et la série de l'énoncé est une série de Riemann divergente.
Supposons maintenant que $\beta \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

$X_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (e^{i\beta})^k = \frac{e^{i\beta} - e^{i\beta(n+1)}}{1 - e^{i\beta}}$, donc $|X_n| \leq \dfrac{2}{|1 - e^{i\beta}|}$. Ainsi, la suite (X_n) est bornée et d'après le théorème d'Abel, la série de l'énoncé est semi-convergente.