

Direction, sens

Loi de Hooke

$$\vec{T} = -k(\ell - \ell_0) \vec{e}_{\rightarrow M}$$

Solution générale

Théorème : Solution canonique

Les solutions de l'équation différentielle

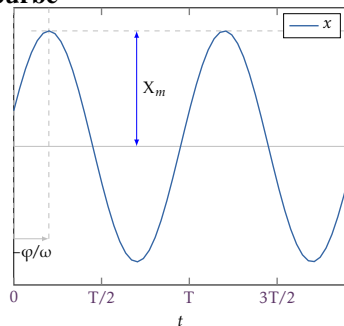
$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \omega^2 X = 0$$

sont les fonctions *sinusoïdales* de pulsation ω :

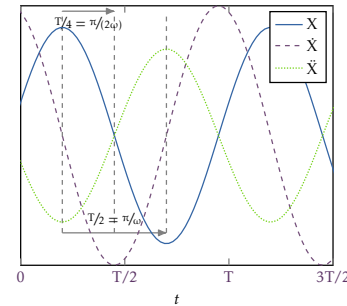
$$X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

On définit également la **fréquence** $f = \omega/(2\pi)$ (parfois écrite ν) et la **période** $T = 1/f = 2\pi/\omega$.
Un système régi par cette équation différentielle est un **oscillateur harmonique**. La pulsation d'un **système masse-ressort** est en particulier $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Courbe



Déphasages



Expression générale

Conditions initiales

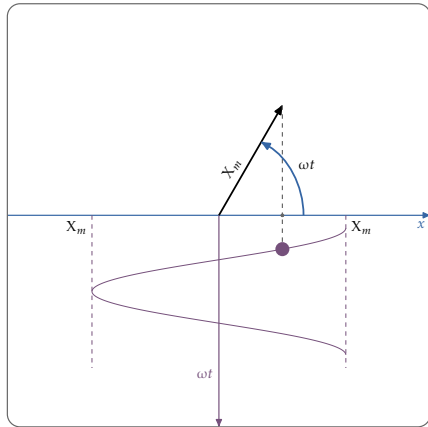
Les variations de l'**écart** X à la **position d'équilibre** d'un oscillateur harmonique peuvent s'écrire de manière équivalente :

$$X(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) = X_0 \cos(\omega t) + \frac{V_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

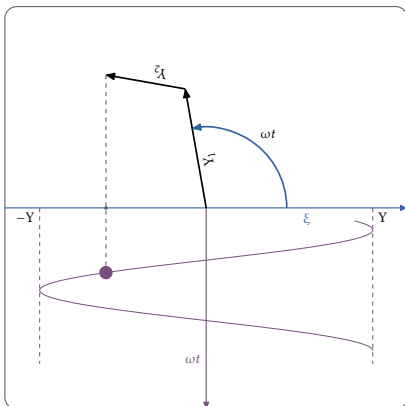
avec :

- X_0 l'écart initial à la position d'équilibre,
- V_0 la vitesse initiale.

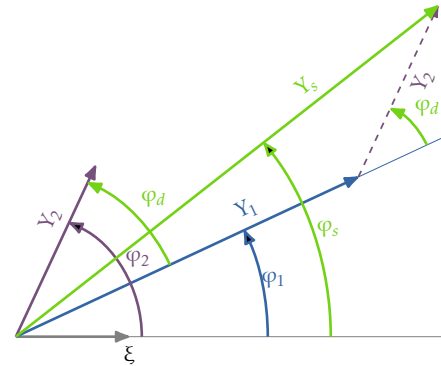
Principe



Représentation de Fresnel : Utilisation



Détermination graphique



Exercice : conditions initiales

On considère un système masse-ressort

On considère une masse m attachée en M à l'extrémité d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 dont l'autre extrémité O est immobile. La masse est en mouvement sans frottement sur un support horizontal. On note x la mesure algébrique de son abscisse par rapport à O .

1. La masse est lâchée sans vitesse initiale en $x_0 = 3\ell_0/2$. Déterminer l'expression de $x(t)$ et de l'écart X entre x et la position d'équilibre. Préciser l'amplitude et la phase du mouvement et tracer l'allure de $x(t)$.
2. On communique désormais une vitesse \dot{x}_0 à la masse quand elle est en x_0 . Déterminer la nouvelle expression de $x(t)$, et en déduire l'amplitude et la phase du mouvement par une construction de Fresnel.
3. On a $k = 5\text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, $\ell_0 = 30\text{ cm}$ et $m = 200\text{ g}$. Calculer la pulsation des oscillations de la masse. Déterminer la norme minimale $|\dot{x}_0|$ de la vitesse pour laquelle la masse atteint le point O et le premier instant où cela se produit (on distinguera selon le signe de \dot{x}_0).

Exercice : circuit LC

On considère un circuit électrique formé d'un condensateur de capacité C branché aux bornes d'une bobine d'auto-inductance L . On note u_c la tension aux bornes du condensateur, $q = Cu_c$ sa charge et i_c le courant (en convention récepteur pour le condensateur).

- Établir les équations différentielles vérifiées par la charge du condensateur et par l'intensité du courant dans le circuit. Les mettre sous la forme canonique d'un oscillateur harmonique de pulsation ω dont on donnera l'expression.
- On a $L = 15\text{ mH}$ et $C = 5\text{ }\mu\text{F}$. Quel sera le courant maximal au cours des oscillations si à l'instant initial on a $u_C = 5\text{ V}$ et $i_C = -50\text{ mA}$.

Analogie électromécanique

Analogie électromécanique

On peut établir une *analogie mécanique/électrocinétique* entre un oscillateur harmonique mécanique et un oscillateur harmonique :

grandeur	mécanique	électrocinétique
élongation	X	q
vitesse	$\frac{dX}{dt}$	$i = \frac{dq}{dt}$
\mathcal{E}_{pot}	$\frac{1}{2} kx^2$	$\frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$
raideur	k	$\frac{1}{C}$
\mathcal{E}_{cin}	$\frac{1}{2} mv^2$	$\frac{1}{2} Li^2$
masse inertielle	m	L
pulsation $\sqrt{\text{raideur/inertie}}$	$\sqrt{k/m}$	$\sqrt{1/(LC)}$
PFD	$F = -kX = m\ddot{X}$	$-\frac{q}{C} = L\frac{di}{dt}$

Deux formes d'énergie

Énergies d'un système masse-ressort

On associe à un système masse-ressort

- l'*énergie cinétique* : $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \dot{x}^2$, associée à la vitesse*
- l'*énergie potentielle élastique* : $\mathcal{E}_{\text{pot}} = \frac{1}{2} kx^2$, associée à l'*élongation du ressort*

Équipartition de l'énergie

On considère un oscillateur harmonique

Les énergies \mathcal{E}_c et \mathcal{E}_{pot} oscillent à 2ω , avec la *même amplitude*.

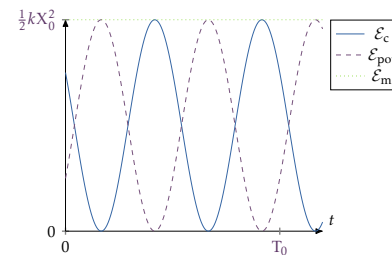
Elles sont en *opposition de phase* : l'une est maximale quand l'autre est minimale.

Leur somme est constante : l'énergie mécanique \mathcal{E}_m est conservée,

L'énergie est alternativement sous formes cinétique et potentielle

Pour $X(t) = X_m \cos(\omega t)$, on peut écrire $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} kX_m^2 = \frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2$

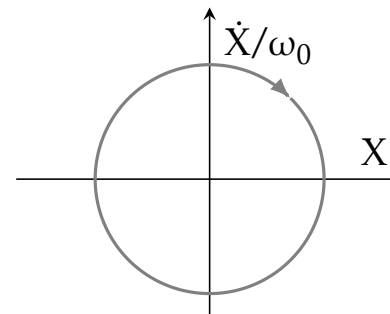
Les valeurs moyennes temporelles des énergies cinétique et potentielle sont égales. On dit qu'il y a *équipartition* de l'énergie totale entre ces deux formes.



Portrait de phase

Trajectoires dans l'espace des phases

Les trajectoires dans l'espace des phases sont des cercles en coordonnées $(X; \dot{X}/\omega_0)$.



Indispensable

Indispensable

- établir l'équation différentielle, en déduire la pulsation
- déterminer amplitude et phase à l'aide des conditions initiales ou par lecture graphique
- tracer les évolutions temporelles de la position, de la vitesse, de l'accélération
- connaître les expressions et savoir tracer les évolutions temporelles des énergies potentielle et cinétique
- savoir transposer les résultats mécanique en électrocinétique et inversement