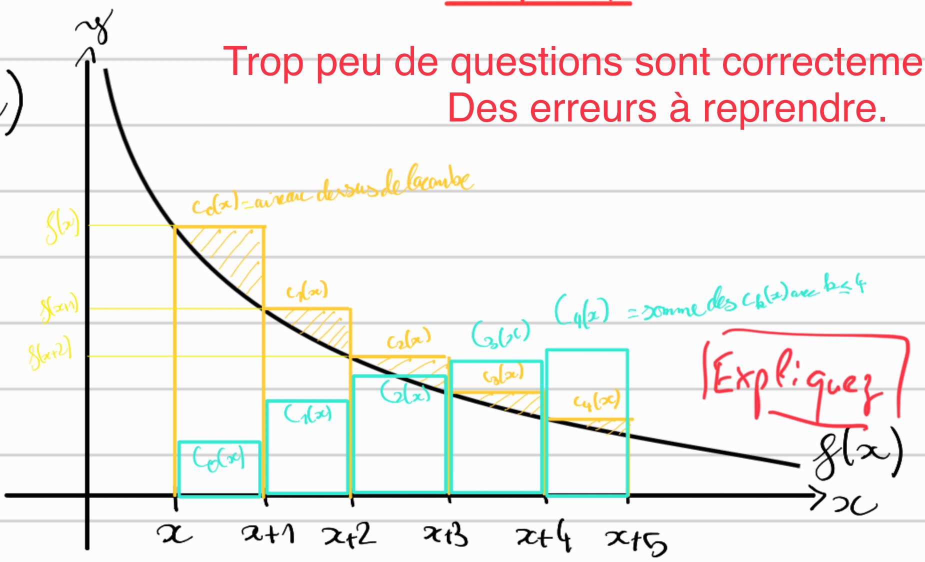
Gutsche
Patrick

DM24

Trop peu de questions sont correctement traitées.
Des erreurs à reprendre.

1) a)



b) Soit $k\in\mathbb{N}$. $f \searrow$ donc pour tout $t\in[x+k, x+k+1]$,
$f(t)\geq f(x+k+1)$.

Donc $\displaystyle\int_{x+k}^{x+k+1} f(t)\,dt \geq f(x+k+1)$

donc $c_k(x)\leq f(x+k)-f(x+k+1)$

c) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $t\in[x+k, x+k+1]$, $f(t)\leq f(x+k)$
donc $\displaystyle\int_{x+k}^{x+k+1} f(t)\,dt \leq f(x+k)$ donc $c_k(x)\geq 0$

AR

$\rightarrow$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(f(x+k)-f(x+k+1)\right) = f(x)-f(x+n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ donc cette série CV vers $f(x)$

$\rightarrow$ $c_k(x)$ converge car $c_k(x)\leq f(x+k)-f(x+k+1) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

AR

$\rightarrow$ Donc $\sum c_k(x)$ est à termes positifs et majorée par une série convergente donc $\sum c_k(x)$ converge

$\rightarrow$ Donc $\displaystyle C(x)=\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(x) \leq \sum_{k=0}^{+\infty}\left(f(x+k)-f(x-k+1)\right) = f(x)$

2) a) $f : x \mapsto e^{-x}$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et décroissante, (car $\frac{d}{dx}(e^{-x}) = -e^{-x} \leq 0$)
elle est continue et tend vers 0 en $+\infty$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$c_k(x) = e^{-x-k} - \int_{x+k}^{x+k+1} e^{-t}\,dt = e^{-x-k} - \left[-e^{-x}\right]_{x+k}^{x+k+1}$$

$$= e^{-x-k-1}$$

$$\text{Donc } C(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-x-k-1} = e^{-x-1} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k} = e^{-x-1} \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{e^{-x}}{e-1}$$

B

b) Soit $f : x \longmapsto \frac{1}{x(x+1)}$. f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$, continue, tend vers 0, et décroissante.
Donc $C(x)$ existe.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $c_k(x) = \dfrac{1}{(x+k)(x+k+1)} - \displaystyle\int_{x+k}^{x+k+1} \frac{1}{t(t+1)}\,dt$

$$= \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} - \int_{x+k}^{x+k+1} \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} - \left[\ln t\right]_{x+k}^{x+k+1} + \left[\ln(t+1)\right]_{x+k}^{x+k+1}$$

$$= \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} - \ln\frac{x+k+1}{x+k} + \ln\frac{x+k+2}{x+k+1}$$

$$= \frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k+1} - \ln\frac{x+k+1}{x+k} + \ln\frac{x+k+2}{x+k+1}$$

$$= \left(\frac{1}{x+k} - \ln\frac{x+k+1}{x+k}\right) - \left(\frac{1}{x+k+1} - \ln\frac{x+k+2}{x+k+1}\right)$$

ce qui est télescopique. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$C_n(x) = \frac{1}{x} - \ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+n+1} + \ln\frac{x+n+2}{x+n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{x} + \ln\frac{x}{x+1}$$
$$= \frac{1}{x} + \ln x - \ln(x+1)$$

Donc $C(x) = \frac{1}{x} + \ln x - \ln(x+1)$

3) pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$, $d_k(x) = f(x+k+1) - \displaystyle\int_{x+k}^{x+k+1} f(t)\,dt$
$$= c_k(x) - f(x+k) + f(x+k+1)$$
or $c_k(x)$ et $f(x+k+1) - f(x+k)$ convergent donc $d_k(x)$ converge

$$D(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(x) - f(x+k) + f(x+k+1)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(x) + \sum_{k=0}^{+\infty} f(x+k+1) - f(x+k)$$

$$= C(x) - f(x).$$

B

Partie II

→ Montrer que E est un $\mathbb{R}$-ev

À faire 1 fois.

4) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $g, f \in E$.

$|\lambda f(x) + g(x)| \leq |\lambda| |f(x)| + |g(x)| \leq |\lambda| \|f\| + \|g\|$. Par passage au sup,

$\|\lambda f + g\| \leq |\lambda| \|f\| + \|g\|$

→ avec $\lambda = 1$, on a $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ donc ml'$\leq^{te}$ faire.

faux

→ avec $\lambda \neq 0$, $g = 0$: on a $\|f\| \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| \|\lambda f\|$ donc $|\lambda| \|f\| \leq \|\lambda f\|$

et avec $g = 0$: $\|\lambda f\| \leq |\lambda| \|f\|$

donc $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$

→ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $|f(x)| \geq 0$ donc $\|f\| = \sup_{x>0} |f(x)| \geq 0$.

→ Si $\|f\| = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq |f(x)| \leq \sup_{t>0} f(t) = \|f\| = 0$ donc $f = 0$.

5)a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $|g_n(x) - g(x)| \leq d(g_n, g)$ par définition de d.

Or $d(g_n, g) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $|g_n(x) - g(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ← principe des gendarmes

Donc $g_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(x)$

b) Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ avec $x < y$.

$$\left| \int_x^y g_n(t)dt - \int_x^y g(t)dt \right| = \left| \int_x^y g_n(t) - g(t) dt \right| \leq \int_x^y |g_n(t) - g(t)| dt$$

$$\leq \int_x^y d(g_n, g) dt$$

$$= \left[t d(g_n, g) \right]_x^y = (y-x) d(g_n, g) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc $\int_x^y g_n(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_x^y g(t)dt$

B

6) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$$g_n(x) = \frac{\sqrt{(x-1)^2 + \frac{1}{n}}}{x+1} \leq \frac{\sqrt{(x+1)^2+1}}{x+1} = \frac{\sqrt{x^2-2x+2}}{x+1}$$
$$\leq \frac{\sqrt{2x^2+4x+2}}{x+1}$$
$$= \frac{\sqrt{2(x+1)^2}}{x+1} = \sqrt{2}$$

De plus $g_n(x) \geq 0$ car somme, composition et division de fonctions positives.
Donc g_n est borné, donc $g_n \in E$.

→ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$0 \leq g_n(x) = \frac{\sqrt{(x-1)^2+\frac{1}{n}}}{x+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x+1} = \frac{|x-1|}{x+1} \leq \frac{|x|+|1|}{x+1} = 1 \text{ donc } g \in E.$$

avec $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{|x-1|}{x+1}$ Mq de $d(g_n, g) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$!!

7) g_n est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc C^1. et l'hors usuels dans l'autre sens

or g n'est pas dérivable en 1. en effet, $\frac{g(1)-g(1+h)}{h} = \frac{-\frac{|1+h-1|}{1+h+1}}{h} = \frac{-|h|}{(2+h)h}$

donc $\frac{g(1)-g(1+h)}{h} \xrightarrow[h\to 0^+]{} -\frac{1}{2}$ mais $\xrightarrow[h\to 0^-]{} \frac{1}{2}$ donc g n'est pas dérivable en 1.
Donc $C_1(E)$ n'est pas fermé. B

→ $C_1(E)$ n'est pas ouvert : Posons $f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < n \\ \frac{1}{n} \text{ si } x \geq n \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}_+^*$. TC, on utilise $x<1$, $x\geq 1$.
$f_n(x) \in E \setminus C_1(E)$, et $0 \in C_1(E)$
or $|f_n(x) - 0| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\frac{1}{n} - 0| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc apcr, $d(f_n, 0) \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (RF)
donc $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $E \setminus C_1(E)$ pas fermé donc $C_1(E)$ pas ouvert.

8) Soit $(g_n) \in C_0(E)^{\mathbb{N}}$ et $g \in E$ tq $g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} g$
Soit $x, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tq pour tout $n \geq N$, $d(g_n, g) < \varepsilon$
D'après 5)a), $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$
D'après la continuité de g_N, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $|t-x| < \alpha$ $\Rightarrow |g_N(t) - g_N(x)| < \varepsilon$

Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$ tq $|t-x| < \alpha$.
$|g(t) - g(x)| = |g(t) - g_N(t) + g_N(x) - g_N(t) + g_N(x) - g(x)|$

$$\leq |g(t)-g_N(t)| + |g_N(x)-g_N(t)| + |g_N(x)-g(x)|$$
$$< 3\varepsilon$$

Donc g est continue en x (car $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^* \\ \varepsilon \mapsto 3\varepsilon \end{array}$ est une bijection)

Donc $g \in C_0(E)$ donc $C_0(E)$ est fermé.

B

g)

Partie III

12) $f \searrow$ donc f' majorée par 0. or $f' \nearrow$ donc f' converge

de plus $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

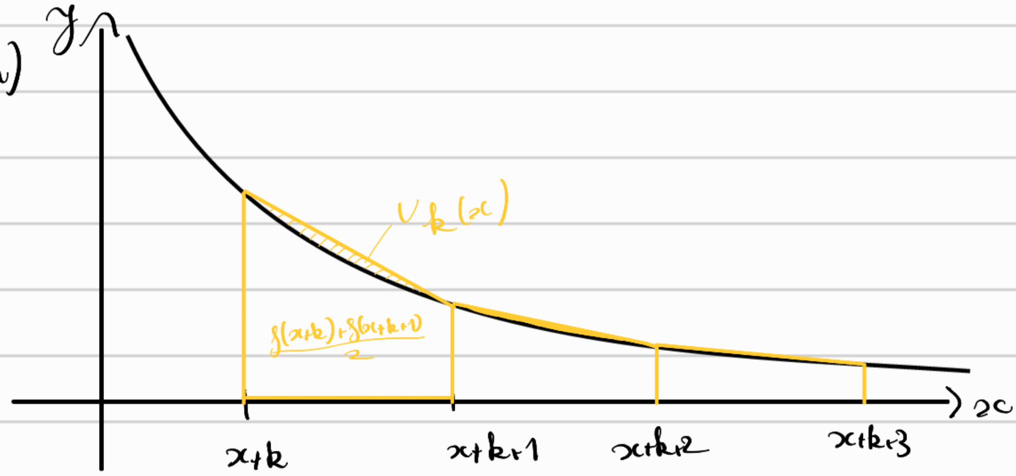
donc pourtant $h \in \mathbb{R}_+^*$ $f(x+h) - f(h) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0^-$

donc $\frac{f(x+h)-f(h)}{h} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{0^-}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$. ~~Donc $f'(x) \to 0$.~~

RF

13)

14)a)



Donc $u_k(x)$ est l'aire du trapèze $T = (x+k,0)(x+k+1,0)(x+k+1, f(x+k+1))(x+k, f(x+k))$ où l'on a enlevé (l'aire sous la courbe de x_k à x_{k+1}) $= A$, or $A \subset T$ car $f \searrow$, donc $u_k(x) \geq 0$

b) Soit $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$. $u_k(x) = \frac{c_k(x) + d_k(x)}{2}$ or $\sum c_k$ et $\sum d_k$ CV donc $\sum u_k$ CV.

de plus $U(x) = \frac{C(x) + D(x)}{2} = \frac{C(x) + C(x) + f(x)}{2} = C(x) + \frac{f(x)}{2}$

15)