Résumé de cours :
Semaine 22, du 14 mars au 18.

Première partie
Comparaison au voisinage d'un point (fin)

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Notation. A est une partie d'un espace $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E. Soit $a \in E \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$. On suppose que tout voisinage de a rencontre A.

Sauf mention du contraire, les applications considérées dans ce chapitre sont définies sur A et sont à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

1 La relation d'équivalence (fin)

1.1 Propriétés de stabilité de la relation d'équivalence

Propriété. Si $f(x) \sim g(x)$, alors $\|f(x)\| \sim \|g(x)\|$.

Propriété. Stabilité du produit.
Si $\varphi \sim \Psi$, avec φ et Ψ à valeurs dans $\mathbb{K}$, et si $f \sim g$, alors $\varphi.f \sim \Psi.g$.

Propriété. Si $g(x) \neq 0$ au voisinage de a et $f \sim g$, avec f et g à valeurs dans $\mathbb{K}$, alors $\dfrac{1}{f(x)} \sim \dfrac{1}{g(x)}$.

Propriété. On suppose que f et g sont à valeurs réelles.
Si $f \sim g$, alors f et g ont le même signe au voisinage de a au sens strict.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$. On suppose que f et g sont à valeurs réelles.
Si $f \sim g$ et si g est strictement positive au voisinage de a, alors $f^\alpha(x) \sim g^\alpha(x)$.

Propriété. Si $f \sim g$ et si $g(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l \in F \cup \{\infty, \pm\infty\}$, alors $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l$.

Propriété. La condition $f = \mathbf{O}(g)$ (respectivement $f = o(g)$, $f \sim g$) est vraie si et seulement si elle l'est en remplaçant f et g par des applications équivalentes.

Propriété. (Hors programme) On suppose que f et g sont à valeurs réelles strictement positives. Si $g(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} l \in \overline{\mathbb{R}}_+ \setminus \{1\}$ et si $f(x) \sim g(x)$, alors $\ln(f(x)) \sim \ln(g(x))$.
Lorsque $g(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\longrightarrow} 1$, alors $\ln(g(x)) \sim g(x) - 1$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Changement de variable.
Soient F un second $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, $B \subset F$ et $b \in F \cup \{+\infty, -\infty, \infty\}$. On suppose que tout voisinage de b rencontre B. Soit $\varphi : B \longrightarrow A$ une application telle que $\boxed{\varphi(t) \underset{\substack{t \to b \\ t \in B}}{\longrightarrow} a}$.
Si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in A}}{\sim} g(x)$ (respectivement : $f(x) = \mathbf{O}(g(x))$, $f(x) = o(g(x))$), alors
$f \circ \varphi(t) \underset{\substack{t \to b \\ t \in B}}{\sim} g \circ \varphi(t)$ (respectivement : $f \circ \varphi(t) = \mathbf{O}(g \circ \varphi(t))$, $f \circ \varphi(t) = o(g \circ \varphi(t))$).
Il faut savoir le démontrer.

1.2 Défauts de stabilité de la relation d'équivalence

En général, si $f(x) \sim g(x)$, $\varphi(f(x)) \not\sim \varphi(g(x))$.

L'équivalence de fonctions au voisinage d'un point n'est pas stable pour la somme.

Elever un équivalent à une puissance qui dépend de la variable n'est pas autorisé. Par exemple, au voisinage de $+\infty$, $1 + \frac{1}{n} \sim 1$, mais $(1 + \frac{1}{n})^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e$, donc $(1 + \frac{1}{n})^n \not\sim 1$.

1.3 Résumons : quelques méthodes de calculs d'équivalents

◇ Si $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l \in E$, avec $l \neq 0$, alors $x_n \sim l$.
◇ Si $x_n = a_n b_n$, chercher des équivalents de a_n et de b_n et en faire le produit.
◇ Si $x_n = \dfrac{a_n}{b_n}$, chercher des équivalents de a_n et de b_n et en faire le quotient.
◇ Si $x_n = a_n + b_n$, regarder si $a_n = o(b_n)$, auquel cas $x_n \sim b_n$,
ou bien si $b_n = o(a_n)$, auquel cas $x_n \sim a_n$.

2 Les développements limités.

Dans ce paragraphe, les fonctions considérées sont définies sur une partie A de $\mathbb{K}$ et sont à valeurs dans $\mathbb{K}$.

2.1 Définitions

Définition. Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{K}$ une application et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité au voisinage de a à l'ordre n (ou en $o(x^n)$) si et seulement s'il existe $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $f(a + x) \underset{x \to 0}{=} P(x) + o(x^n)$.

Si $P(X) = \displaystyle\sum_{k=m}^{n} a_k X^k$ avec $a_m \neq 0$, alors $f(x) \sim a_m x^m$: $a_m x^m$ est la partie principale de $f(x)$ en 0.

Remarque. Pour toute la suite de ce paragraphe, on suppose que $a = 0$ (on peut toujours s'y ramener par changement de variable) et que 0 est un point d'accumulation de A.

Définition. développements limités au sens fort.
Avec les notations précédentes, on dit que f admet un développement limité au sens fort au voisinage de 0 à l'ordre n (ou en $\mathbf{O}(x^{n+1})$) si et seulement s'il existe $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $f(x) = P(x) + \mathbf{O}(x^{n+1})$.
Les propriétés qui suivent sont valables pour les développements limités au sens fort ou au sens faible, mais nous ne les énoncerons que dans le cas du sens faible.

Propriété. unicité du développement limité. Avec les notations précédentes,
s'il existe $(P, Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2$ tel que $f(x) = P(x) + o(x^n) = Q(x) + o(x^n)$, alors $P = Q$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. On suppose que $f(x)$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ de la forme $f(x) = P(x) + o(x^n)$.
Si f est paire, P est pair, donc P ne contient que des monômes de degrés pairs.
De même, si f est impaire, P est impair, donc P ne contient que des monômes de degrés impairs.

2.2 Opérations sur les développements limités

Propriété. Les règles de calcul établies pour les "o" et les "O" permettent d'additionner, de multiplier et de composer des développements limités entre eux.

Remarque. Il est souvent pratique d'écrire un DL $\sum_{k=m}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ sous sa forme normalisée $a_m x^m(1 + \cdots + o(x^{n-m}))$.

3 Applications à l'étude des graphes de fonctions

Position de la tangente : un calcul de développement limité permet de positionner le graphe d'une application f par rapport à sa tangente en a, localement en a.

Détermination des asymptotes obliques : lorsque $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \infty$, s'il existe $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tels qu'en $+\infty$, $f(x) = c_0 x + c_1 + c_2 \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$, alors la droite d'équation $y = c_0 x + c_1$ est asymtote au graphe de f et le signe de c_2 permet de positionner, au voisinage de $+\infty$, le graphe de f par rapport à son asymptote.

4 Applications aux séries

Théorème.
Soient $\sum a_n \in \mathcal{S}(E)$, où E est un Banach, et $\sum b_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, avec b_n de signe constant à partir d'un certain rang.

- On suppose que $\sum b_n$ est convergente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ (en cas de convergence) et $S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$.
Ce sont les ***restes de Cauchy*** (à l'ordre n) des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$.
  - ◇ Si $a_n = \mathbf{O}(b_n)$ alors $\sum a_n$ converge absolument et $R_n = \mathbf{O}(S_n)$,
  - ◇ Si $a_n = o(b_n)$ alors $\sum a_n$ converge absolument et $R_n = o(S_n)$,
  - ◇ Si $a_n \sim b_n$ alors $\sum a_n$ converge absolument et $R_n \sim S_n$.

- On suppose que $\sum b_n$ est divergente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.
  - ◇ Si $a_n = \mathbf{O}(b_n)$ alors $A_n = \mathbf{O}(B_n)$,
  - ◇ Si $a_n = o(b_n)$ alors $A_n = o(B_n)$,
  - ◇ Si $a_n \sim b_n$ alors $A_n \sim B_n$.

Il faut savoir le démontrer.

Exercice. ***Moyenne de Césaro*** : Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{C}$. Alors $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Il faut savoir le démontrer.

Exercice. La série de Bertrand $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge ssi $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

Il faut savoir le démontrer.

Deuxième partie
Dérivation

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, I un intervalle d'intérieur non vide et f une application de I dans E.

5 Dérivabilité

5.1 Interprétations d'une dérivée

Définition. f est dérivable au point a si et seulement si $\frac{f(t)-f(a)}{t-a} \underset{\substack{t\to a \\ t\neq a, t\in I}}{\longrightarrow} \ell \in E$. Dans ce cas, ℓ est appelée la dérivée de f au point a. On note $f'(a) = \left[\frac{d}{dt}(f(t))\right]_{t=a} = \lim\limits_{\substack{t\to a \\ t\neq a, t\in I}} \frac{f(t)-f(a)}{t-a} \in E$.

Remarque. Informellement, lorsque $E = \mathbb{R}$, la corde du graphe de f entre les abscisses x_0 et x_1, d'équation $y - f(x_0) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \times (x - x_0)$, tend vers la tangente au graphe de f en le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$, d'équation $y - f(x_0) = f'(x_0).(x - x_0)$.
Parmi les droites non verticales du plan, la tangente est la meilleure approximation du graphe de f au voisinage de x_0.

interprétation cinématique : $\left\|\frac{f(t)-f(a)}{t-a}\right\|$ est la vitesse moyenne du mobile ponctuel $f(t)$ entre les instants a et t, donc $\|f'(a)\|$ représente la vitesse instantanée du mobile à l'instant a.

5.2 Dérivées à gauche et à droite

Définition. On dit que f est dérivable à droite en a si et seulement si $f_{/I\cap[a,+\infty[}$ est dérivable en a. On note alors $f'_d(a) = \lim\limits_{\substack{t\to a \\ t>a, t\in I}} \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$.

Théorème. Lorsque $a \in \overset{\circ}{I}$, f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a et si l'on a $f'_d(a) = f'_g(a)$. Dans ce cas, $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

5.3 Dérivées et développements limités

Propriété. f est dérivable en a si et seulement s'il existe $l \in E$ tel que
$f(t) = f(a) + (t-a)l + \underset{\substack{t\to a \\ t\neq a, t\in I}}{o}(t-a)$. Dans ce cas $l = f'(a)$.

Propriété. Si f est dérivable en a, elle est continue en a.

Remarque. Si f est seulement dérivable à droite et à gauche en a, alors f est continue en a.

6 Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété. Dérivation d'une application à valeurs dans un produit. Supposons que $E = \prod_{i=1}^{p} E_i$, et pour tout $t \in I$, notons $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_p(t))$. f est dérivable en a si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, f_i est dérivable en a. Dans ce cas $f'(a) = (f_1'(a), \ldots, f_p'(a))$.

Propriété. Supposons que E est un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $e = (e_1, \ldots, e_p)$. Pour tout $t \in I$, notons $f(t) = \sum_{i=1}^{p} f_i(t)e_i$. f est dérivable en a si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, f_i est dérivable en a et dans ce cas $f'(a) = \sum_{i=1}^{p} f_i'(a)e_i$.

Cas particulier. Si f est une application de I dans $\mathbb{C}$, f est dérivable en a si et seulement si $Im(f)$ et $Re(f)$ sont des applications dérivables en a. Dans ce cas $f'(a) = Re(f)'(a) + iIm(f)'(a)$.

Propriété. Soient F un second $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et u une application linéaire continue de E dans F. Si f est dérivable en a, alors $u \circ f$ est dérivable en a et $(u \circ f)'(a) = u(f'(a))$.

Propriété. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si f est dérivable, alors $\overline{f}$ est dérivable et $\overline{f}' = \overline{f'}$.

Propriété de linéarité. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Si f et g sont dérivables en a, alors $\alpha f + \beta g$ est dérivable en a et $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$.

Théorème de dérivation d'un produit : Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $B : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire continue. Soient f une application de I dans E et g une application de I dans F. On dispose de l'application $\begin{array}{rccc} B(f,g) : & I & \longrightarrow & G \\ & t & \longmapsto & B(f(t), g(t)) \end{array}$. Si f et g sont dérivables en a, $B(f,g)$ est dérivable en a et $B(f,g)'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a))$.
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. $\left(\prod_{i=1}^{p} f_i\right)'(a) = \sum_{i=1}^{p} \Big[f_i'(a) \prod_{\substack{1 \le j \le p \\ j \neq i}} f_j(a) \Big]$.

Dérivation des fonctions composées. Soient $\varphi : I \longrightarrow J$ et $f : J \longrightarrow E$ deux applications.
Si φ est dérivable en a et f en $\varphi(a)$, alors $f \circ \varphi$ est dérivable en a et $(f \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a) f'(\varphi(a))$.
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. $f' = (f_n' \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1) \times (f_{n-1}' \circ f_{n-2} \circ \cdots \circ f_1) \times \cdots \times f_1'$.

Dérivée de l'inverse.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}^*$ une application dérivable en a. Alors $\frac{1}{f}$ est dérivable en a et $\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}$.

Dérivée logarithmique. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}^*$ dérivable en a.
$\frac{f'(a)}{f(a)}$ est appelée la dérivée logarithmique de f en a. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, elle est égale à $(\ln |f|)'(a)$.

Propriété. Si u et v sont dérivables de I dans $\mathbb{K}^*$, $\frac{(uv)'}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$, $\frac{\left(\frac{u}{v}\right)'}{\left(\frac{u}{v}\right)} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$
$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{(u^n)'}{u^n} = n\frac{u'}{u}$, et, si u est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\frac{(u^\alpha)'}{u^\alpha} = \alpha \frac{u'}{u}$.

7 Dérivées d'ordre supérieur

7.1 Définition

Définition. $f^{(0)} = f$, $f^{(n)}(t) = \left(f^{(n-1)}\right)'(t)$.

Propriété. Pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, f est $p+q$ fois dérivable sur I si et seulement si $f^{(p)}$ est q fois dérivable sur I, auquel cas, $f^{(p+q)} = [f^{(p)}]^{(q)}$.

Remarque. On dit que f est n fois dérivable en a si et seulement si il existe une boule ouverte B centrée en a telle que $f|_{B\cap I}$ soit $n-1$ fois dérivable et telle que $[f|_{B\cap I}]^{(n-1)}$ soit dérivable en a.

Définition. On dit que f est de classe D^n (resp : C^n) si et seulement si $f^{(n)}$ est une application définie sur I (resp : définie et continue).
On dit que f est de classe C^∞ si et seulement si f est de classe C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7.2 Opérations sur les dérivées supérieures

Propriété de linéarité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f et g sont D^n, alors pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $\alpha f + \beta g$ est D^n et $[\alpha f + \beta g]^{(n)} = \alpha f^{(n)} + \beta g^{(n)}$.

Formule de Leibniz : Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $B : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire continue. Soient f une application de I dans E et g une application de I dans F. On dispose de l'application $B(f,g) : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & B(f(t), g(t)) \end{array}$.
Soit $a \in I$; Si f et g sont dérivables n fois en a, $B(f,g)$ est dérivable n fois en a et $B(f,g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B(f^{(k)}(a), g^{(n-k)}(a))$.
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, le produit de deux applications C^n est C^n.

Théorème de composition : Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Soient $\varphi : I \longrightarrow J$ et $f : J \longrightarrow E$ deux applications.
Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Si φ et f sont C^n alors $f \circ \varphi$ est C^n.
Il faut savoir le démontrer.