# DM 23 : énoncé

**Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.**
**Il n'est pas à rendre.**
**Un corrigé sera fourni dans une semaine.**

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On fixe $n_0 \in \mathbb{N}$.
Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K}$, on note, $\forall n \geq n_0$, $P_n = \prod_{k=n_0}^{n} u_k$.

Si la suite $(P_n)_{n\geq n_0}$ converge, on notera $\prod_{k=n_0}^{+\infty} u_k$ sa limite et on dira que le produit $\prod_{k=n_0}^{+\infty} u_k$ existe.

## Première partie :

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

**1)** On suppose que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$. Montrer que le produit $\prod_{k=0}^{+\infty} u_k$ existe.

**2)** Calculer $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ et $\prod_{n=2}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$.

**3) a)** Vérifier que, $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\frac{\mathrm{th}t}{\mathrm{th}\frac{t}{2}} = 1 + \frac{1}{\mathrm{ch}t}$.

**b)** Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $x > 1$. On note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$v_1 = x \text{ et, } \forall n \geq 1,\ \ v_{n+1} = 2v_n^2 - 1.$$

Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $v_1 = \mathrm{ch}\theta$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \mathrm{ch}(2^{n-1}\theta)$
Montrer l'existence et donner la valeur de $\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{v_n}\right)$, d'abord en fonction de $\theta$, puis en fonction de $x$.

**4)** On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| < 1$ et que la série $\sum u_n$ converge.

**a)** Dans cette question, on suppose que $\sum u_n^2$ converge.
Montrer que la série $\sum (\ln(1+u_n) - u_n)$ converge.
En déduire que $\ln\Big(\prod_{n=0}^{N}(1+u_n)\Big)$ converge lorsque $N$ tend vers $+\infty$.
Montrer que $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ existe et qu'il appartient à $\mathbb{R}_+^*$.

**b)** Dans cette question, on suppose que $\sum u_n^2$ diverge.
Montrer que $\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ existe et qu'il vaut 0.

**c)** Calculer $\prod_{n=2}^{+\infty}\Big(1+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\Big)$ et $\prod_{n=2}^{+\infty}\Big(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\Big)$.

## Seconde partie :

**1) a)** Montrer que, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin t \geq \dfrac{2t}{\pi}$.

**b)** Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt \geq \frac{\pi}{2(2n+1)}$.

**c)** En déduire que, pour tout $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$, lorsque l'entier $n$ tend vers $+\infty$, le quotient $\dfrac{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha} (\sin t)^{2n} dt}{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt}$ tend vers 0.

Soit $\varphi\ :\ [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que $\varphi(\frac{\pi}{2}) \neq 0$.

**d)** Montrer que, lorsque l'entier $n$ tend vers $+\infty$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)(\sin t)^{2n} dt \sim \varphi(\frac{\pi}{2}) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt.$$

**2)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n} dt$.

**a)** Pour $n \geq 1$, montrer que $I_n = \dfrac{2n-1}{2n} I_{n-1}$.

**b)** Calculer $I_n$ en fonction de $n$ puis montrer que lorsque l'entier $n$ tend vers $+\infty$,

$$I_n \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

**3 a)** Calculer la limite de la suite $\left(\displaystyle\int_0^{p\pi} e^{-2t}\ dt\right)_{p\in\mathbb{N}}$.

**b)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\int_0^{p\pi} e^{-2t}(\sin t)^{2n}\ dt\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente. On notera $u_n$ la limite de cette suite.

**c)** Soit $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-2t}(\sin t)^{2n}dt = e^{-2k\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)(\sin t)^{2n}dt$, où $\varphi$ est une application indépendante de $n$ que l'on précisera.

**d)** En déduire que lorsque l'entier $n$ tend vers $+\infty$,

$$u_n \sim \frac{1}{2\text{sh}\pi}\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

**4 a)** Pour tout $n \geq 1$, montrer que $u_n = n \displaystyle\lim_{p\to+\infty}\int_0^{p\pi} e^{-2t}(\cos t)(\sin t)^{2n-1}dt$.

**b)** En déduire que pour tout $n \geq 1$, $n(2n-1)u_{n-1} = 2(1+n^2)u_n$.

**c)** Montrer que $u_n = \dfrac{(n!)^2 I_n}{\pi\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1+k^2)}$.

**d)** En déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)$ existe et que

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{k^2}\right) = \frac{\text{sh}\pi}{\pi}.$$

## Troisième partie :

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

**1)** Montrer que $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left|1+\frac{i}{n}\right|$ existe et donner sa valeur.

**2)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $n$ nombres complexes $z_1, \ldots, z_n$.
Montrer par récurrence que $\displaystyle\left|-1+\prod_{k=1}^{n}(1+z_k)\right| \leq -1+\prod_{k=1}^{n}(1+|z_k|)$ : on commencera par l'établir pour $n=1$ et $n=2$.

**3)** Lorsque $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de complexes, on dit que c'est une suite de Cauchy si et seulement si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ \forall q \in \mathbb{N}\ |z_{n+q} - z_n| \leq \varepsilon.$$

On admettra qu'une suite de complexes est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| < 1$, et telle que la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

Montrer que $\displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty}(1+u_n)$ existe.

**4)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| = 1$ et $u_n \neq -1$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{i\theta_n}$, avec $\theta_n \in ]-\pi, \pi[$.

Montrer que $\displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty} u_n$ existe si et seulement si la série $\sum \theta_n$ converge.

**5)** Le produit $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)$ existe-t-il ?