Devoir à la maison n° 8

À rendre le 2 décembre

I. Un exercice sur les fonctions sup-continues

On considère l'ensemble $E = [0,1] \subset \mathbb{R}$, que l'on munit de l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$. On s'intéresse aux applications allant de E dans E. Soit $f : E \to E$ une telle application.
On rappelle que f est *croissante* si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$$

On dit que f est *sup-continue* si et seulement si :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E),\ A \neq \varnothing \Longrightarrow f(\sup A) = \sup f(A)$$

1) Justifier que la définition de f sup-continue est correcte (c'est-à-dire que ce qui est écrit a toujours un sens).

2) Soit f et g deux applications de E dans E.

- **a)** Montrer que pour tout $A \subset E$, $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.
- **b)** En déduire que si f et g sont sup-continues, alors $g \circ f$ est sup-continue.

3) Montrer que si une application $f : E \to E$ est croissante, alors pour toute partie $A \subset E$ non vide, on a $\sup(f(A)) \leqslant f(\sup A)$.

4) Exhiber un exemple d'application $f : E \to E$ qui est croissante, mais qui n'est pas sup-continue.

5) Montrer que si $f : E \to E$ est sup-continue, alors f est croissante.

On considère désormais une application $f : E \to E$ qui est sup-continue. On note l'ensemble des points fixes de f :

$$\mathrm{Fix}(f) = \{\, x \in E \mid f(x) = x \,\}.$$

On note aussi :

$$X = \{\, x \in E \mid f(x) \leqslant x \,\}.$$

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$$

avec la convention $f^0 = \mathrm{Id}_E$, et l'on pose finalement :

$$Y = \{\, f^n(0) \mid n \in \mathbb{N} \,\} = \{\, y \in E \mid \exists n \in \mathbb{N},\ y = f^n(0) \,\}.$$

6) Montrer que X possède une borne inférieure, que l'on notera désormais α.

7) Justifier que $\alpha \in E$.

8) Montrer que α est le plus petit élément de $\mathrm{Fix}(f)$.

9) Justifier que Y possède une borne supérieure, que l'on notera β, et que $\beta \in E$.

10) Montrer que

$$f(Y) = \{ f^n(0) \mid n \in \mathbb{N}^* \}$$

et que

$$\sup Y = \sup f(Y).$$

11) Montrer que $\alpha = \beta$.

— **FIN** —