Semaine 10 du 1er décembre 2025 (S49)

X : Relations d'ordre et d'équivalence.

1. Relations binaires.

2. Relations d'équivalence.

3. Relations d'ordre.

4. Majorants, minorants et compagnie.

4.1. Majorants, minorants.

4.2. Plus grand et plus petit éléments.

4.3. Bornes supérieure et inférieure.

4.4. Application aux fonctions réelles.

5. Relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{N}$.

6. Relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{R}$.

6.1. Opérations usuelles.

6.2. Propriété de la borne supérieure.

6.3. Caractère archimédien de $\mathbb{R}$ et partie entière.

6.3a. Propriété d'Archimède.

6.3b. Partie entière.

6.3c. Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

6.3d. Approximations décimales.

6.4. Intervalles de $\mathbb{R}$.

Questions de cours

Ces questions de cours sont à savoir traiter, et non à apprendre par cœur.
Les colleurs sont libres de demander tout ou partie d'une de ces questions de cours, mais aussi de mélanger les différentes questions ou de donner des exemples numériques différents de ceux proposés.
L'évaluation de la maîtrise du cours ne se limite pas à la question de cours : la connaissance des définitions et théorèmes du cours pourra être évaluée à tout moment de la colle.

— Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur un ensemble E. Donner la définition de « $\mathscr{R}$ est réflexive », « $\mathscr{R}$ est transitive », « $\mathscr{R}$ est symétrique », « $\mathscr{R}$ est antisymétrique ».

— Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur un ensemble E. Donner la définition de « $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence », ainsi que plusieurs exemples.

— Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur un ensemble E. Donner la définition de « $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre », ainsi que plusieurs exemples.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence.

— Montrer que la relation $\mid$ sur $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre. Cette relation d'ordre est-elle totale ? $\mathbb{N}$ admet-il un plus petit élément pour cette relation d'ordre ? Un plus grand élément ?

— Soit E un ensemble ayant au moins deux éléments distincts. Montrer que la relation $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ est une relation d'ordre. Cette relation d'ordre est-elle totale ? $\mathcal{P}(E)$ admet-il un plus petit élément pour cette relation d'ordre ? Un plus grand élément ?

— Soit E un ensemble, ordonné par $\preccurlyeq$, soit $A \subset E$. Donner les définitions de « A est majorée/minorée », de « A possède un maximum/minimum » et de « A possède une borne supérieure/inférieure ».

— Soit E un ensemble, ordonné par $\preccurlyeq$, soit $A \subset E$ admettant un minimum que l'on notera a. Montrer que A possède une borne inférieure, que l'on identifiera.

— Soit $A \subset \mathbb{R}$. Donner la définition de la borne supérieure de A (dans $\mathbb{R}$) et énoncer la propriété de la borne supérieure (condition suffisante d'existence de $\sup A$).

— Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide et majoré. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer la caractérisation de la borne supérieure :

$$a = \sup(A) \Leftrightarrow ((\forall x \in A,\ x \leqslant a) \text{ et } (\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ a - \varepsilon < x)).$$

— Soit A et B deux parties majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \cup B$ admet une borne supérieure et que $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

— Soit A et B deux parties majorées de $\mathbb{R}$. Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure et que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

— Soit $A \subset \mathbb{R}$ majorée. Montrer que $-A$ admet une borne inférieure et que $\inf(-A) = -\sup A$.

— Énoncer et démontrer la propriété d'Archimède.

— Rappeler la définition de la partie entière d'un réel et démontrer son existence.

— Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{\lfloor 10^n a \rfloor}{10^n}$ et $a'_n = \dfrac{\lfloor 10^n a \rfloor + 1}{10^n}$. Justifier que a_n et a'_n sont des approximations décimales respectivement par défaut et par excès de a à 10^{-n} près. Démontrer que les suites (a_n) et (a'_n) convergent vers a.

— Donner la définition d'une partie dense de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathbb{Q}$ est une partie dense de $\mathbb{R}$.

— Montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est une partie dense de $\mathbb{R}$.

— Enoncer la caractérisation des intervalles. Démontrer le sens réciproque dans le cas où I est une partie minorée et majorée de $\mathbb{R}$.