Devoir à la maison n° 6

À rendre le 10 novembre

I. Conjugaison par une application

Soit E un ensemble et $f\ :\ E \to E$ bijective.

La conjugaison par f est l'application $\Phi_f\ :\ \left\{\begin{array}{ccc} E^E & \to & E^E \\ \varphi & \mapsto & f \circ \varphi \circ f^{-1} \end{array}\right.$.

1) Simplifier $\Phi_f \circ \Phi_g$ pour $g \in E^E$ bijective. Que vaut aussi Φ_{Id_E} ?

2) En déduire que Φ_f est une bijection de E^E dans E^E. Que vaut $(\Phi_f)^{-1}$?

3) Soient $\mathcal{I}$, $\mathcal{S}$, les sous-ensembles de E^E constitués respectivement des injections et des surjections :

$$\mathcal{I} = \{\, g : E \to E \mid g \text{ est injective} \,\} \text{ et } \mathcal{S} = \{\, g : E \to E \mid g \text{ est surjective} \,\}$$

Montrer que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{S}$ sont stables par Φ_f, c'est-à-dire que $\Phi_f(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$ et que $\Phi_f(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$.

4) Montrer que $\Phi_f(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$ et que $\Phi_f(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.

5) Lorsque φ est bijective, qu'est-ce que $\Big(\Phi_f(\varphi)\Big)^{-1}$?

II. Images directe et réciproque

Soit E et F deux ensembles, $f : E \to F$, A une partie de E et B une partie de F. Montrer que :

$$f(A \cap f^{\leftarrow}(B)) = f(A) \cap B.$$

— FIN —