

Devoir à la maison n° 13

À rendre le 24 février

On note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ bijectives, dérivables et vérifiant

$$f' = f^{-1}. \quad (\star)$$

Dans tout le problème, on considère $f \in E$.

- 1) Déterminer un élément de E de la forme $x \mapsto cx^p$, où c et p sont des réels.
- 2) Montrer que f et f^{-1} sont infiniment dérivables.
- 3) Quelle est la limite de f en 0 ? Et pour f' ?
- 4) Quelle est la limite de f en $+\infty$? Et pour f' ?
- 5) Montrer que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.
- 6) Montrer de même que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.
- 7) En déduire que f admet au moins un point fixe sur \mathbb{R}_+^* .
- 8) Montrer que ce point fixe est unique.
- 9) Justifier que f est convexe. En déduire le signe de $f - \text{Id}$.
- 10) Soit $g \in E$ distincte de f . On souhaite montrer que g admet le même point fixe que f .
Dans la suite, on prolonge f et g par continuité en 0, et on note a le point fixe de f et b celui de g .
On raisonne par l'absurde, en supposant que $a < b$.
 - a) Montrer que $\mathcal{E} = \{x \in [0, a[\mid g(x) \geq f(x)\}$ admet une borne supérieure c , puis que $g(c) = f(c)$.
 - b) Montrer que pour tout $t \in]c, a[$, $f^{-1}(t) < g^{-1}(t)$.
 - c) Conclure, et déterminer le point fixe commun des éléments de E .

— FIN —