

Devoir à la maison n° 7

À rendre le 25 novembre

Soit \mathcal{E} , l'ensemble des matrices de la forme $M(a, b) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Autrement dit : $\mathcal{E} = \{M(a, b) | (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- 1)
 - a) L'ensemble \mathcal{E} est-il stable par addition ?
 - b) Montrer que l'ensemble \mathcal{E} est stable par le produit matriciel. Justifier que I_3 appartient à \mathcal{E} et que toutes les matrices de \mathcal{E} commutent entre elles.
 - c) Si une matrice $M(a, b)$ appartient à \mathcal{E} , est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse et montrer que son inverse est aussi dans \mathcal{E} .
- 2) Pour toute application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on définit, pour tout réel x , les matrices $\widehat{M}(x)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{M}(x) = M(x, f(x))$$

On cherche les fonctions f solutions du problème suivant :

« f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\widehat{M}(x)\widehat{M}(y) = \widehat{M}(x + y)$ » (*)

- a) Montrer que, si f est une solution du problème (*), alors f vérifie une équation fonctionnelle de la forme

$$\text{« pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = \alpha f(x) + \beta f(y) + \varphi(x, y) \text{»}$$

où α, β sont des constantes à déterminer, ainsi que $\varphi(x, y)$, une quantité qui dépend (simplement) de x et y .
- b) Montrer que, si f est une solution du problème (*), alors
 - $f(0) = 0$
 - $\widehat{M}(0) = I_3$
 - pour tout réel x , $\widehat{M}(x)$ est inversible et $\widehat{M}^{-1}(x) = \widehat{M}(-x)$.
- c) Montrer que, si f est une solution du problème (*), alors sa dérivée f' est une fonction affine.
- d) Déterminer exactement toutes les solutions du problème (*).

- 3) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & a & \frac{a^2}{2} \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de P^n .

Cette expression est-elle encore valable avec $n = -1$?

— FIN —