

LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I. ET M.P.I.I.

ANNÉE 2025 - 2026



C3 : MODÉLISATION CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES  
COMPOSÉS DE CHAINES DE SOLIDES

## TD 7 - Cinématique du point (C3-3)

### Compétences

- **Modéliser**
  - Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.
  - Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.
  - Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.
- **Résoudre**
  - Caractériser le mouvement d'un repère par rapport à un autre repère.
- **Communiquer**
  - Utiliser un vocabulaire technique, des symboles et des unités adéquats.

## Exercice 1 : Modélisation cinématique du véhicule à 3 roues Clever

Source : PT SIA 2013

### 1 Présentation

Le Clever (Compact Low Emission VEHiclefor uRban tRansportation) est un démonstrateur technologique développé par un tissu d'industriels européens dont BMW, l'Institut Français du Pétrole (IFP) et de nombreux équipementiers. Sa conception a pour objectif de développer des solutions de transport à faible consommation énergétique.

L'objectif de cette étude se concentre sur les exigences "**Permettre à l'utilisateur de se déplacer sur le sol**" et "**S'insérer facilement dans le trafic**" détaillées dans le diagramme d'exigence sur la figure 1.

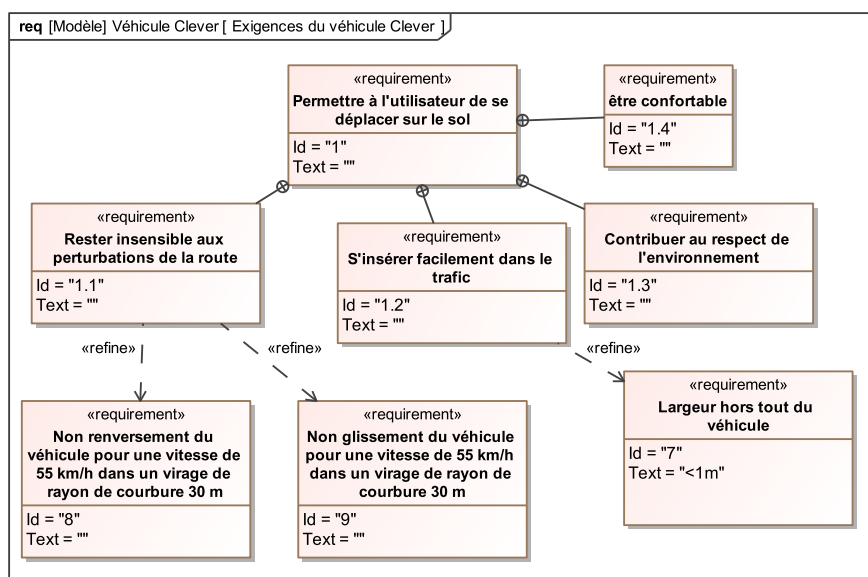


FIGURE 1 – Diagramme des exigences partiel du véhicule à trois roues Clever

## 2 Condition de non renversement et d'adhérence

Le mécanisme d'inclinaison peut être décrit globalement par la figure 2. Le groupe motopropulseur, comportant entre autres le moteur et les roues arrière, reste en permanence perpendiculaire au sol. La partie avant, constituée de l'habitacle et de la roue avant, peut au contraire s'incliner dans les virages grâce à un mécanisme hydraulique qui sera étudié ultérieurement dans le sujet. Les deux parties du Clever sont reliées par une liaison pivot d'axe parallèle au sol, schématisée sur la figure 4.

Pour simplifier l'étude, on ne s'intéresse pas dans un premier temps à la roue avant, ce qui permet de se ramener au système schématisé sur la figure 4. On donne les caractéristiques géométriques et cinématiques suivantes :

- La route R est munie du repère  $R_g = (O, \vec{x}_g, \vec{y}_g, \vec{z}_g)$ . Le référentiel associé est supposé galiléen.
- Le groupe motopropulseur 0 est animé d'un mouvement de rotation par rapport au sol dont le centre instantané de rotation est O. Le rayon de courbure de la trajectoire du point C dans  $R_g$  est  $R_C$ . Le repère lié à 0 est  $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  tel que  $\vec{z}_0 = \vec{z}_g$  et on note  $\theta = (\vec{x}_g, \vec{x}_0) = (\vec{y}_g, \vec{y}_0)$ . On a donc  $\vec{OC} = R_C \cdot \vec{x}_0$ . On remarquera bien que  $R_0$  est mobile par rapport à  $R_g$ .
- L'habitacle 1 est liée au groupe 0 par une liaison pivot d'axe  $(C, \vec{y}_0)$ . Le repère lié à 1 ( $R_1 = (C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ ) est tel que  $\vec{y}_1 = \vec{y}_0$ . On note  $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$  l'angle d'inclinaison du système pendulaire. Le centre de gravité de 1 est G tel que  $\vec{CG} = e \cdot \vec{z}_1$ .

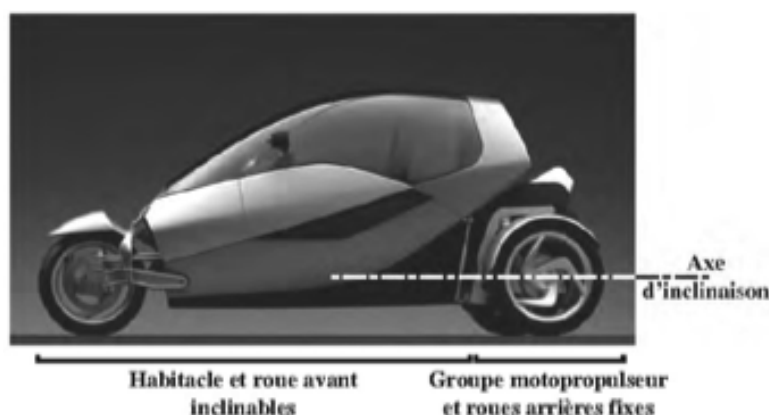


FIGURE 2 – Présentation du mécanisme d'inclinaison

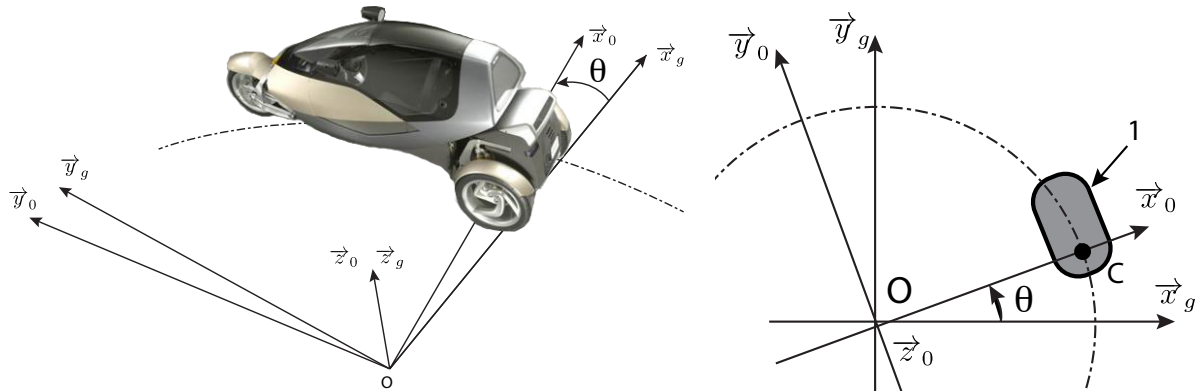


FIGURE 3 – Paramétrage du virage

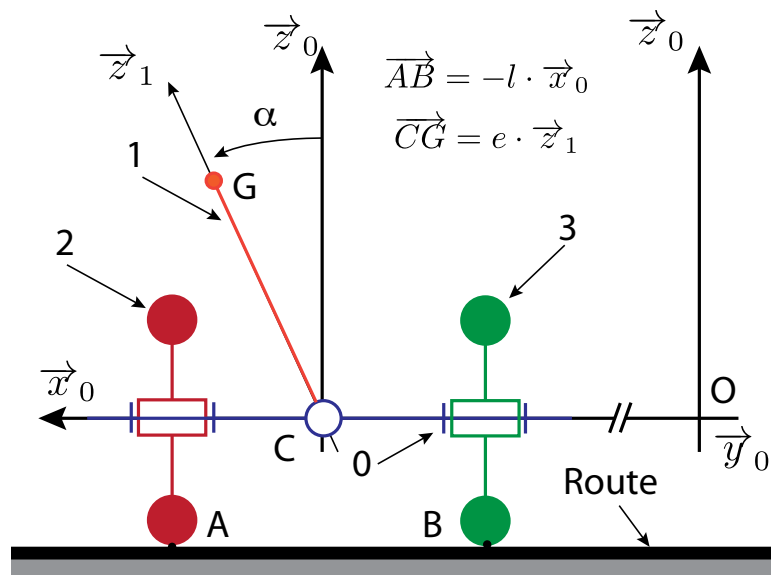


FIGURE 4 – Paramétrage du véhicule dans le virage

- Les roues arrière 2 et 3 sont liées au groupe 0 par des liaisons pivots d'axe  $(C, \vec{x}_0)$ .
- On pose  $V = \vec{V}(C/R_g) \cdot \vec{y}_0$ .

On se place dans un cas où le rayon de courbure  $R_C$  de la trajectoire du point C et l'angle d'inclinaison  $\alpha$  restent constants.

**Q 1 : Faire les figures planes de projection permettant de paramétrer les différentes rotations du problème.**

**Q 2 : Exprimer la vitesse, notée  $\vec{V}(G/R_g)$ , du point G dans son mouvement par rapport à  $R_g$  en fonction de  $V$ ,  $e$ ,  $R_C$  et  $\alpha$ .**

**Q 3 : Exprimer l'accélération, notée  $\vec{a}(G/R_g)$ , du point G dans son mouvement par rapport à  $R_g$  en fonction de  $V$ ,  $e$ ,  $R_C$  et  $\alpha$ .**

L'écriture d'une condition de non glissement en s'appuyant de la traduction de l'équilibre dynamique du Clever permet d'écrire :

$$-\vec{a}(G/R_g) \cdot \vec{x}_0 < f \cdot g$$

**Q 4 : Donner l'expression de la vitesse maximale de non glissement  $V$  en fonction de  $e$ ,  $R_C$ ,  $\alpha$ ,  $f$  et  $g$ .**

On se propose d'étudier la configuration suivante :

- $\alpha = 0$  (habacle à la vertical) ;
- position du centre de gravité,  $e = 50\text{ cm}$  ;
- accélération de la pesanteur,  $g = 9,81\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  ;
- coefficient d'adhérence pneu-route,  $f = 0,8$ .

**Q 5 : Donner la vitesse maximale  $V$  permettant de vérifier la condition de non-glissement donnée par la cahier des charges. Que pouvons-nous en conclure ?**

## Exercice 2 : Etude d'une quille pendulaire de voilier

**Source :** Mine-pont 2014

### 1 Introduction

L'étude proposée s'intéresse à quelques aspects de la conception d'une quille pendulaire équipant un monocoque 60' IMOCA.

Le comportement dynamique d'un voilier est conditionné par ses interactions avec les deux fluides avec lesquels il entre en contact : l'air et l'eau. Il reçoit de l'énergie sous la forme des actions aérodynamiques dues au mouvement relatif air/voiles. Ces actions mécaniques le font avancer et provoquent son inclinaison autour de son axe longitudinal (axe de direction  $\vec{z}_N$  sur la figure 5). C'est le phénomène de gîte. Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, la quille joue le rôle de contrepoids. Cette quille est généralement constituée d'un voile immergé dans l'eau à l'extrémité duquel se trouve un lest profilé. L'efficacité de la quille dépend de la masse du lest et de la longueur du voile. Ces deux paramètres présentent des limitations : le lest ne peut être trop important sous peine de solliciter dangereusement le voile de quille et la longueur de quille est limitée par le tirant d'eau maximal admissible (il faut permettre l'entrée dans les ports sans toucher le fond!).

### 2 Paramétrage

Le système de quille pendulaire est composée :

- Du berceau N encastré sur la coque du navire et dont le repère associé est  $R_N(O, \vec{x}_N, \vec{y}_N, \vec{z}_N)$ .
- de la quille 1 constituée du voile et du lest d'extrémité et dont le repère associé est  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .
- Du vérin 2-4 constitué du piston 2 et du cylindre 4 et dont les repères associés sont respectivement  $R_2(A_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  et  $R_4(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  (la rotation relative 2-4 ne sera pas prise en compte dans l'étude et donc les bases de  $R_2$  et  $R_4$  seront confondues).
- Du vérin 3-5 constitué du piston 3 et du cylindre 5 et dont les repères associés sont respectivement  $R_3(A_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  et  $R_5(B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  (la rotation relative 3-5 ne sera pas prise en compte dans l'étude et donc les bases de  $R_3$  et  $R_5$  seront confondues).

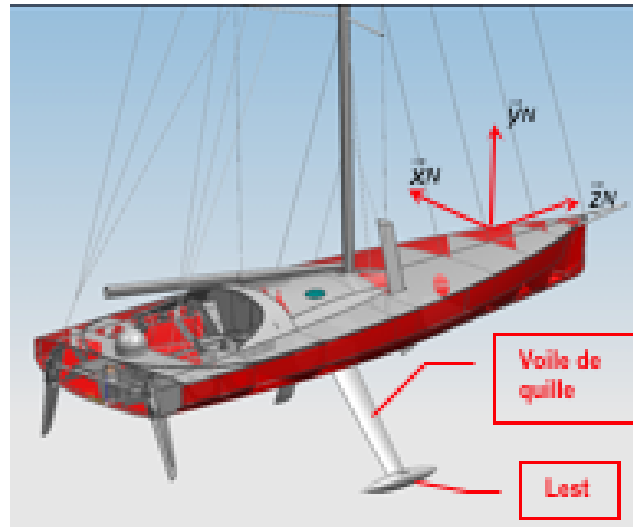


FIGURE 5 – Voilier 60' IMOCA - Image Cabinet Finot-Conq

- Le paramétrage complet et la définition des liaisons entre ces solides est donné sur les figure 7 et 6.

### 3 Modèle 3D

- $\overrightarrow{OA} = R \cdot \vec{y}_1$ ;  $\overrightarrow{AA_2} = -d \cdot \vec{z}_N$ ;  $\overrightarrow{AA_3} = d \cdot \vec{z}_N$ ;
- $\overrightarrow{OC} = -a \cdot \vec{x}_N + b \cdot \vec{y}_N - d \cdot \vec{z}_N$ ;
- $\overrightarrow{OB} = a \cdot \vec{x}_N + b \cdot \vec{y}_N + d \cdot \vec{z}_N$ ;
- $\overrightarrow{DO} = L_{t1} \cdot \vec{y}_1$ ;  $\overrightarrow{OG_1} = -L_1 \cdot \vec{y}_1$ ;
- $\overrightarrow{A_2G_2} = -L_2 \cdot \vec{x}_2$ ;  $\overrightarrow{A_3G_3} = -L_2 \cdot \vec{x}_3$
- avec  $R > 0$ ;  $a > 0$ ;  $d > 0$ ;  $b > 0$ ,  $L_1 > 0$ ,  $L_2 > 0$ ,  $L_3 > 0$  et  $L_{t1} > 0$ ;
- $\overrightarrow{CA_2} = x_{24} \cdot \vec{x}_2$  et  $\overrightarrow{A_3B} = x_{35} \cdot \vec{x}_3$

Liaison	Type	Caractéristique géométrique	Paramètres
N/1	Pivot	Axe $(O, \vec{z}_N)$	$\theta_1 = (\vec{x}_N, \vec{x}_1)$
N/2	Pivot (sphérique en 3D)	Axe $(C, \vec{z}_N)$	$\theta_2 = (\vec{x}_N, \vec{x}_2)$
N/3	Pivot (sphérique en 3D)	Axe $(B, \vec{z}_N)$	$\theta_3 = (\vec{x}_N, \vec{x}_3)$
2/4	Pivot glissant	Axe $(A_2, \vec{x}_2)$	$\overrightarrow{CA_2} = x_{24} \cdot \vec{x}_2$
5/3	Pivot glissant	Axe $(A_3, \vec{x}_3)$	$\overrightarrow{A_3B} = x_{35} \cdot \vec{x}_3$
2/1	Pivot (sphérique en 3D)	Axe $(A_2, \vec{z}_N)$	
3/1	Pivot (sphérique en 3D)	Axe $(A_3, \vec{z}_N)$	

TABLE 1 – Paramétrage des liaisons



#### Remarque 1 : Modélisation plane

Pour la modélisation plane le plan d'étude est  $(A, \vec{x}_N, \vec{y}_N)$ . Dans ce modèle, les points  $A_2$  et  $A_3$  sont confondus avec le point  $A$  ( $d = 0$ ) et les points  $C$  et  $B$  sont projetés dans le plan  $(A, \vec{x}_N, \vec{y}_N)$ .

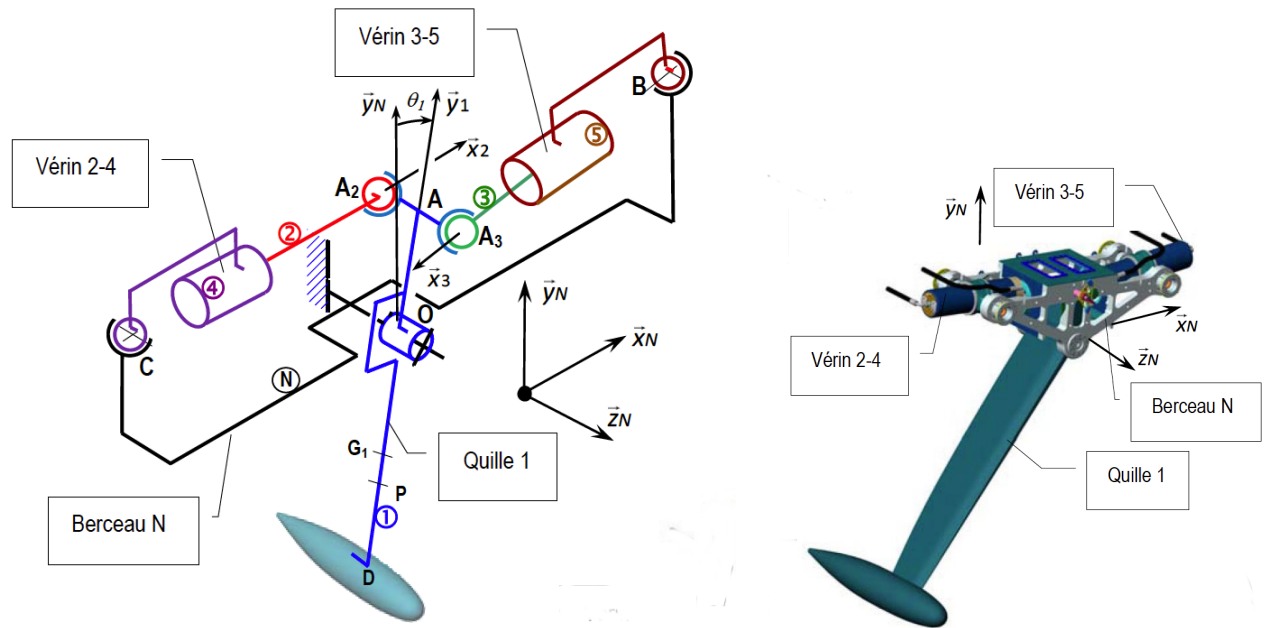


FIGURE 6 – Modèle à trois dimensions de l'ensemble

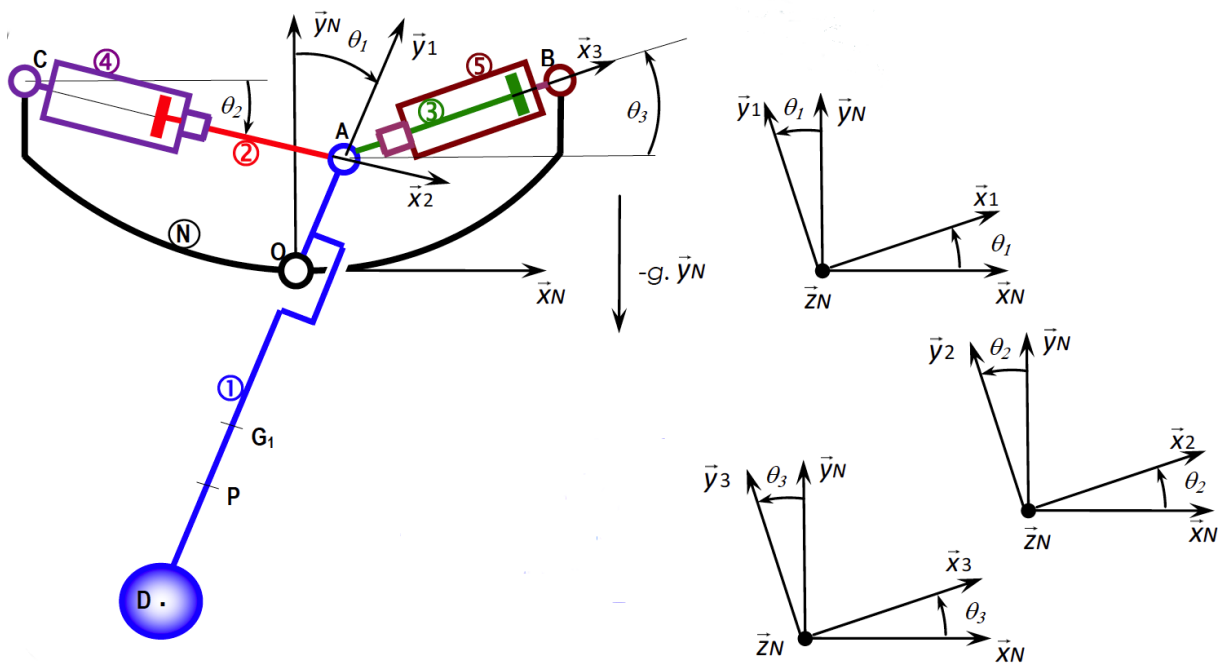


FIGURE 7 – Modèle plan (2D) de l'ensemble

#### 4 Questions

- Q 6 :** Exprimer la vitesse  $\vec{V}(G_1 \in 1/N)$  en fonction de  $\dot{\theta}_1$  et des paramètres géométriques utiles.
- Q 7 :** Exprimer la vitesse  $\vec{V}(G_2 \in 2/N)$  en fonction de  $\dot{\theta}_2$ ,  $\dot{x}_{24}$ ,  $\dot{x}_{24}$  et des paramètres géométriques utiles.
- Q 8 :** Exprimer la vitesse  $\vec{V}(G_3 \in 3/N)$  en fonction de  $\dot{\theta}_3$ ,  $\dot{x}_{35}$ ,  $\dot{x}_{35}$  et des paramètres géométriques utiles.
- Q 9 :** Exprimer la vitesse  $\vec{V}(A_2 \in 2/4)$  en fonction de  $\dot{x}_{24}$  et des paramètres géométriques utiles.

**Q 10 : Exprimer l'accélération  $\vec{\Gamma}(G_1/N)$  en fonction de  $\dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1$  et des paramètres géométriques utiles.**

**Q 11 : Exprimer l'accélération  $\vec{\Gamma}(G_2/N)$  en fonction de  $\dot{\theta}_2, \dot{x}_{24}, x_{24}, \ddot{\theta}_2, \ddot{x}_{24}$  et des paramètres géométriques utiles.**

**Q 12 : Exprimer l'accélération  $\vec{\Gamma}(A_2 \in 2/4)$  en fonction de  $\dot{x}_{24}, \ddot{x}_{24}$  et  $\dot{\theta}_2$  et des paramètres géométriques utiles.**