Semaine 3 du 29 septembre 2025 (S40)

Un peu de calcul

1. Le symbole somme : Σ

1.1. Définition d'une somme simple et premières propriétés

Le symbole $\displaystyle\sum_{k=a}^{b}$ n'a pas été défini formellement par récurrence.

Les étudiants doivent toutefois connaître les grandes règles de manipulation « élémentaires » (linéarité, séparation d'un terme extrémal, décalage d'indice, renversement d'indice), et savoir proposer une justification par récurrence.

1.2. Sommes doubles

1.3. Somme d'une famille finie d'objets

Cette partie n'a fait l'objet que de peu (voire pas) d'exemples.

2. Le symbole produit : Π

3. Quelques formules à connaître

3.1. Sommes classiques

3.2. Coefficients binomiaux

3.3. Binôme de Newton, identités remarquables et sommation géométrique

La formule permettant de factoriser $a^{2n+1} + b^{2n+1}$ n'est pas un attendu du programme. On pourra la demander à guise d'exercice. Les étudiants doivent savoir factoriser $a^3 + b^3$ par $a + b$.

4. Systèmes linéaires et pivot de Gauss

Aucune théorie sur les systèmes linéaires n'a été faite dans ce chapitre : ce sera fait dans le chapitre sur les matrices.

Notamment, le théorème de structure des solutions n'a pas encore été vu.

L'objectif de cette partie est l'acquisition de la méthode pratique de résolution d'un système linéaire. Seuls seront traités (et ont été vus) les systèmes linéaires de petite dimension.

Les étudiants doivent savoir écrire correctement l'ensemble des solutions d'un système linéaire, et l'interpréter comme représentation paramétrique d'un objet dans le plan ou dans l'espace.

4.1. Définitions

4.2. Interprétation géométrique

4.2a. Dans le plan

4.2b. Dans l'espace

4.3. Opérations sur les lignes d'un système

4.4. Algorithme du pivot

Questions de cours

Ces questions de cours sont à savoir traiter, et non à apprendre par cœur.
Les colleurs sont libres de demander tout ou partie d'une de ces questions de cours, mais aussi de mélanger les différentes questions ou de donner des exemples numériques différents de ceux proposés.
L'évaluation de la maîtrise du cours ne se limite pas à la question de cours : la connaissance des définitions et théorèmes du cours pourra être évaluée à tout moment de la colle.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une famille de nombres complexes. Écrire de deux manières différentes $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} z_{i,j}$ ainsi que $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} z_{i,j}$, en ne faisant à chaque fois intervenir que des sommes portant sur un indice.

- Énoncer le théorème de simplification téléscopique d'une somme et le démontrer.

- On peut remarquer que pour tout entier naturel non nul k, $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$.

  Soit $n \in \mathbb{N}^*$, quel type de formule/simplification voit-on apparaître dans la somme $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$? Donner une expression simplifiée de cette somme.

- Soient $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$. Donner, en le démontrant, la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{n} k$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Rappeler la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k$. En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n} k^2$.

- Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Donner et démontrer la formule de factorisation de $a^n - b^n$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}$. Que vaut $\sum_{k=0}^{n-1} z^k$? Le démontrer.

- Soit $n, p \in \mathbb{N}$ vérifiant $p \leqslant n$, soit $z \in \mathbb{C}$. Rappeler la formule donnant $\sum_{k=0}^{n} z^k$ et en déduire celle donnant $\sum_{k=p}^{n} z^k$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$. Donner la formule définissant le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ lorsque $k \in [\![0, n]\!]$, lorsque $k \notin [\![0, n]\!]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Exprimer le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ avec des factorielles, puis comme un quotient de deux produits.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. On distinguera les cas $k \in [\![1, n]\!]$, $k > n$, $k < 0$ et $k = 0$.

- Énoncer puis démontrer la formule du triangle de Pascal.

- Rappeler la formule du triangle de Pascal, et démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{k}$ est un entier.

- Énoncer la formule du binôme de Newton et la démontrer.

- Énoncer la formule du binôme de Newton. Construire le triangle de Pascal jusqu'à la ligne permettant de développer $(a+b)^5$ et écrire ce développement.

- Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 2z & = & 1 \\ x & - & y & + & 3z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & + & z & = & -1 \end{array}\right.$.