Semaine 8 du 17 novembre 2025 (S47)

VII : Ensembles.

1 Définitions.

1.1 Appartenance, égalité.

1.2 Inclusion, ensemble des parties.

1.3 Réunion, intersection, complémentaire.

1.4 Produit cartésien.

2 Interprétation logique

VIII : Applications.

La différence entre les notions d'application et de fonction est hors programme. On considère uniquement des applications.

3 Vocabulaire.

4 Restriction, prolongement.

5 Composition d'applications.

6 Injectivité, surjectivité, bijectivité.

6.1 Injectivité.

6.2 Surjectivité.

6.3 Bijectivité.

7 Image directe, tiré en arrière.

7.1 Image directe.

7.2 Tiré en arrière.

Conformément au programme, pour tenter d'éviter les confusions récurrentes entre l'image réciproque et l'image directe par la réciproque (pour une fonction bijective), nous utilisons la notation $f^{\leftarrow}(B)$. C'est cette notation que les élèves connaissent et utilisent. Nous avons aussi utilisé la terminologie de « tiré en arrière ».

Questions de cours

Ces questions de cours sont à savoir traiter, et non à apprendre par cœur.
Les colleurs sont libres de demander tout ou partie d'une de ces questions de cours, mais aussi de mélanger les différentes questions ou de donner des exemples numériques différents de ceux proposés.
L'évaluation de la maîtrise du cours ne se limite pas à la question de cours : la connaissance des définitions et théorèmes du cours pourra être évaluée à tout moment de la colle.

- Soit E un ensemble. Donner la définition de l'ensemble des parties de E. Donner l'ensemble des parties de $\{42, 1337, 1453\}$.
- Énoncer les deux relations de De Morgan pour une famille d'ensembles ; les démontrer.
- Soit A et B deux parties d'un ensemble E. Rappeler la définition de $A \backslash B$ et montrer que $A \backslash B = A \cap \overline{B}$.
- Soient A et B deux ensembles. Montrer que $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$.
- Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles, indicée par un ensemble I, soit B un ensemble.
  Rappeler les définitions (quantifiées) des ensembles $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ (resp. $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$).
  Que vaut $B \cap \left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i \right)$ (resp.$B \cup \left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i \right)$) ? Le démontrer.
- Donner la définition du produit cartésien de deux ensembles. Expliciter le produit cartésien de $\{1, 2, 3\}$ et $\{42, 2026\}$.
- Donner les définitions quantifiées de fonction injective, surjective et bijective.
- Montrer que la composée de deux applications injectives est injective, que la composée de deux applications surjectives est surjective, que la composée de deux applications bijectives est bijective.
- Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que, si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que, si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
- Soit E, F deux ensembles, soit $f : E \to F$ bijective. Montrer qu'il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. Que peut-on dire d'une telle fonction g ?
- Soit E, F deux ensembles, soit $f : E \to F$. Montrer que s'il existe $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ alors f est bijective.
- Une involution (i.e. une application f telle que $f \circ f = \mathrm{Id}$) est-elle injective ? surjective ?
- Donner la définition de l'*image directe* ainsi que du *tiré en arrière* d'une partie par une application.
- Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Montrer que $A \subset f^{\leftarrow}(f(A))$ pour toute partie A de E.
- Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Montrer que $f(f^{\leftarrow}(B)) \subset B$ pour toute partie B de F.