Table des matières

Feuille d'exercice n° 01 : **Nombres complexes**

Exercice 1 ( ) Écrire sous forme algébrique : $\dfrac{1+2i}{3-4i}$ $\qquad \dfrac{1}{(1+2i)^2}$ $\qquad \dfrac{(1+i)^3}{(1-i)^2}$
$\dfrac{1+i}{3-i}+\dfrac{1-i}{3+i}$ $\qquad \dfrac{1}{1+\dfrac{2}{i}}$ $\qquad (1+(1+(1+2i)^2)^{-1})$.

Exercice 2 Soit $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, $z=\dfrac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$.
Calculer $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$.

Exercice 3 ( ) Résoudre pour $z\in\mathbb{C}$, $2\arg(z+i)=\arg(z)+\arg(i)\ (2\pi)$.

Exercice 4 Soient z_1 et z_2 deux complexes de module 1, tels que $1+z_1z_2\neq 0$. Montrer que $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\in\mathbb{R}$.

Exercice 5 Soit $a\in[0;2\pi[$ et n un entier naturel. Déterminer le module et l'argument de : $(1+i\mathrm{e}^{ia})^n$.

Exercice 6 Soit $\omega=\exp\left(\dfrac{2i\pi}{7}\right)$. Calculer $A=\omega+\omega^2+\omega^4$ et $B=\omega^3+\omega^5+\omega^6$.
(on pourra d'abord calculer AB et $A+B$.).

Exercice 7 ( ) Déterminer les racines $4^{\text{ièmes}}$ dans $\mathbb{C}$ de $-119+120i$

Exercice 8 ( ) Soit $(n,z)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{C}$ tel que $z^n=(z+1)^n=1$. Montrer que n est multiple de 6 et que $z^3=1$.

Exercice 9 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue x : $(1+x)^{2n}=(1-x)^{2n}$ $\quad (n\in\mathbb{N}^*)$. Calculer alors le produit des racines.

Exercice 10 ( ) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. Écrire $-i$ et $1+i$ sous forme trigonométrique.
2. Calculer les racines $n^{\text{ièmes}}$ de $-i$ et de $1+i$.
3. Résoudre $z^2-z+1-i=0$.
4. En déduire les racines de $z^{2n}-z^n+1-i=0$.

Exercice 11 Résoudre dans $\mathbb{C}$, $\overline{z}=z^3$.

Exercice 12 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $z^4+2\lambda^2z^2(1+\cos\theta)\cos\theta+\lambda^4(1+\cos\theta)^2=0$ $(\lambda\in\mathbb{C},\theta\in[0,\pi])$. Pour $n\in\mathbb{N}$, calculer $\sum\limits_{k=1}^{4} z_k^n$ où les z_k sont les racines de cette équation.

Exercice 13 Résoudre le système d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{C}^2$: $\left\{\begin{array}{lcl} x^3 & = & 3x+7y \\ y^3 & = & 7x+3y \end{array}\right.$ (on résoudra un système où les inconnues sont $x+y$ et xy)

Exercice 14 (✎) Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants : $(\sqrt{3}-i)^{11}$ et $(-1+i)^{17}$

Exercice 15 (🚲) Soient $n \in \mathbb{N}$ et a, $b \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(a+kb)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(a+kb)$.

Exercice 16

1. Calculer les racines carrées de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
2. Calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 17

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.
2. En déduire que $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$ est racine du polynôme $16X^4 - 20X^2 + 5$.
3. En déduire la valeur de $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$.
4. Montrer que $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 18 (✎) Calculer $\cos 5\theta$, $\cos 8\theta$, $\sin 6\theta$, $\sin 9\theta$, en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice 19 (✎) Linéariser :

1. $\cos^2 x . \sin^3 x$.
2. $\cos^6 x + \sin^6 x$.

Exercice 20 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

1. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 1$,
2. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 21 Quel est l'ensemble des complexes z tels que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur ?

Exercice 22 Déterminer les points d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que :

1. 1, z et z^2 soient les affixes de trois points alignés ;
2. z et $\dfrac{1}{z}$ soient les affixes de deux vecteurs orthogonaux ;
3. 1, z et $z+i$ soient les affixes des sommets d'un triangle dont le centre du cercle circonscrit est l'origine O du repère ;
4. z, $\dfrac{1}{z}$ et $z-1$ soient les affixes de trois points situés sur un même cercle de centre O

Exercice 23 Soient A, B et C trois points d'affixes respectifs a, b et c. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. ABC est un triangle équilatéral ;
2. j ou j^2 est racine du polynôme $aX^2 + bX + c$;
3. $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$;

4. $(b-a)^2+(c-b)^2+(a-c)^2=0$.

Exercice 24 Soient A, B, A' et B' quatre points tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Montrer qu'il existe une et une seule similitude directe qui transforme A en A' et B en B'.

Exercice 25 (✎)

1. Caractériser géométriquement l'application $\left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & (2+2i)z-(7+4i) \end{array}\right.$
2. Soient r la rotation de centre le point d'affixe 1 et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$, et s la symétrie centrale de centre le point d'affixe $i+3$. Caractériser géométriquement l'application $s \circ r$.
3. Soit r la rotation de centre le point d'affixe $1+i$ et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{4}$. Déterminer l'expression complexe de r.

Feuille d'exercice n° 02 : **Quelques fondamentaux**

Exercice 1 La proposition $\left(P \wedge Q \Longrightarrow (\neg P) \vee Q\right)$ est-elle vraie ?

Exercice 2 Soit la propriété suivante : $P(z)$: "$|z-1| \leq 3 \Longrightarrow |z-5| \geq 1$".

1. Quel est l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z)$ soit vraie ? A-t-on : $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z)$ vraie ?
2. Mêmes questions en remplaçant $|z-5| \geq 1$ par $|z-5| > 1$ et $|z-5| \geq 2$.

Exercice 3 Dans chacun des cas suivants, comprendre le sens des deux phrases proposées et déterminer leur valeur de vérité :

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}\ n \leqslant N$ et $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n \leqslant N$.
2. $\forall y \in \mathbb{R}_+^*\ \exists x \in \mathbb{R}\ y = \mathrm{e}^{x}$ et $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ y = \mathrm{e}^{x}$.
3. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$.
   $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ y = f(x)$ et $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ y = f(x)$.

Exercice 4 (✎) Écrire la négation des assertions suivantes où P, Q, R, S sont des propositions.

1. $P \Rightarrow Q$,
2. P et non Q,
3. P et (Q et R),
4. P ou (Q et R),
5. (P et Q) $\Rightarrow$ ($R \Rightarrow S$).

Exercice 5 (✎) Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. Quelle est la négation des propositions suivantes ?

1. $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$.
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 1$ ou $f(x) \leqslant -1$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 0$.
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y \leqslant f(x) \leqslant 2x + y$.
5. $\forall x \in \mathbb{R},\ (\exists y \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant y) \Rightarrow x \leqslant 0$.

Exercice 6 Soient les quatre assertions suivantes :

(a) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\quad x + y > 0$; (b) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\quad x + y > 0$;

(c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\quad x + y > 0$; (d) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\quad y^2 > x$.

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

Exercice 7 Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$, $\Rightarrow$.

1. $\forall x \in \mathbb{R}\quad x^2 = 4\ \ldots\ldots\ x = 2$;
2. $\forall z \in \mathbb{C}\quad z = \overline{z}\ \ldots\ldots\ z \in \mathbb{R}$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}\quad x = \pi\ \ldots\ldots\ \mathrm{e}^{2ix} = 1$.

Exercice 8 (🚲) Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. Écrire au moyen de quantificateurs les propositions suivantes :

1. f est croissante.
2. f est périodique.
3. f s'annule au plus une fois.
4. f prend au moins une fois la valeur 1.

Exercice 9 Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes, où u désigne une suite réelle et f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

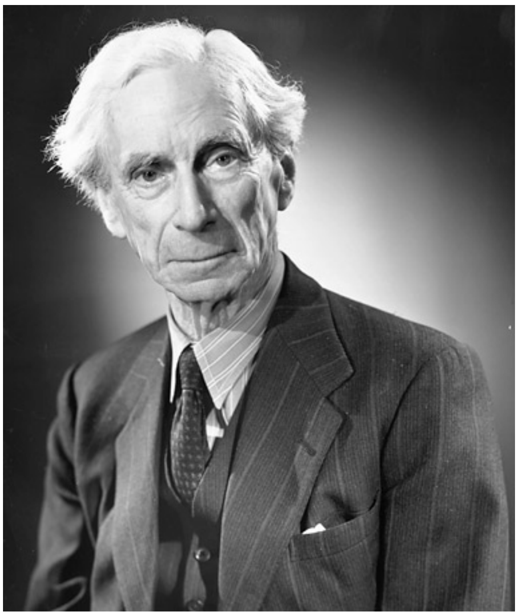
1. La suite u est majorée.
2. La suite u n'est pas majorée.
3. La fonction f n'est pas paire.
4. La fonction f n'est pas bornée.

Exercice 10 **En quoi le raisonnement suivant est-il faux ?**
Soit $\mathcal{P}(n)$: n crayons de couleurs sont tous de la même couleur.

- $\mathcal{P}(1)$ est vraie car un crayon de couleur est de la même couleur que lui-même.
- Supposons $\mathcal{P}(n)$. Soit $n+1$ crayons. On en retire 1. Les n crayons restants sont de la même couleur par hypothèse de récurrence.
  Reposons ce crayon et retirons-en un autre ; les n nouveaux crayons sont à nouveau de la même couleur. Le premier crayon retiré était donc bien de la même couleur que les n autres. La proposition est donc vraie au rang $n+1$.
- On a donc démontré que tous les crayons en nombre infini dénombrable sont de la même couleur.

Exercice 11 Dans un match de rugby, une équipe peut marquer 3 points (pénalité ou drop), 5 points (essai non transformé) ou 7 points (essai transformé). Quel est l'ensemble des scores possibles ?

Exercice 12 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite (on admet qu'elle existe et que la relation suivante permet bien de la définir) vérifiant : $u_0 \leqslant 1$, $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leqslant 2^n$.



Feuille d'exercice n° 03 : **Sommes et calculs**

Exercice 1 Donner une expression simplifiée des quantités suivantes :
1) $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} i.j$; 2) $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} i+j$; 3) $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} i-j$; 4) $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} \inf(i,j)$.
Même question en remplaçant $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n}$ par $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n}$ et $\displaystyle\sum_{1\le i<j\le n}$.

Exercice 2 En considérant $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$, calculer les sommes $\displaystyle\sum_{k\in[\![0,\mathbb{E}(\frac{n}{2})]\!]}\binom{n}{2k}$ et $\displaystyle\sum_{k\in[\![0,\mathbb{E}(\frac{n-1}{2})]\!]}\binom{n}{2k+1}$, où $\mathbb{E}(n)$ est la partie entière de n. Ces sommes sont aussi notées $\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}$ et $\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}$.

Exercice 3 Soient $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\in\mathbb{C}$. Quelles sont les expressions toujours égales entre elles ?

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_kb_k,\quad \sum_{k=1}^n a_{n+1-k}b_{n+1-k},\quad \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^n (a_k+b_k)^2-\sum_{k=1}^n (a_k-b_k)^2\right)$
2. $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k\right),\quad \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\sum_{p=1}^n b_p\right),\quad \sum_{k=1}^n\sum_{p=1}^n (a_kb_p),\quad \sum_{k=1}^n\left(a_k\sum_{p=1}^n b_p\right),\quad \sum_{k=1}^n a_kb_k$

Exercice 4 Montrer que pour toute famille $(z_k)_{1\leqslant k\leqslant n}\in\mathbb{C}^n$, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^n z_k\right)^2=\sum_{k=1}^n z_k^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_iz_j.$$

Quel résultat bien connu cette formule généralise-t-elle ?

Exercice 5 Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^n k.k!=(n+1)!-1$.

Exercice 6

1. Soit $k\in\mathbb{N}$. Écrire $(1+k)^4-k^4$ sous la forme d'un polynôme de degré 3 en k.
2. En s'inspirant de la démonstration du cours donnant la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^n k^2$ calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^n k^3$ (on donnera cette valeur sous la forme la plus factorisée possible).

Exercice 7 Écrire avec des factorielles :

1. $\displaystyle\prod_{k=n}^m k$.
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^p n-p+k$ pour $(n,p)\in\mathbb{N}^2,\ p\le n$.

3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} \frac{n-p+k}{k}$ pour $n \geq 2,\ 1 \leq p \leq n-1$.

4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k}$.

Exercice 8 ( )

1. Soit z un nombre complexe différent de 1, calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} z^k$.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\times$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k i^{k-1} = \dfrac{i - n i^n - (n+1) i^{(n+1)}}{2}$
3. En déduire les sommes
$S_1 = 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (-1)^p(2p+1)$ et $S_2 = 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + (-1)^{(p+1)}2p$.

Exercice 9 En utilisant la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \quad ; \quad \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Exercice 10 ( ) Soit n un entier naturel non nul, notons $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n.$$

Exercice 11 ( ) Effectuer le produit des matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$$

Exercice 12 Soit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $A^n(\theta)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 13 ( ) On considère la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer M^2, M^3, M^4, M^5.

Exercice 14 ( ) Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A^2 - (a_{1,1} + a_{2,2})A + (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1})I = 0$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible.

Exercice 15 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$, où I_3 est la matrice identité 3×3. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 16 Trouver les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. De même avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Exercice 17 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.

1. Calculer B^2, B^3 en déduire la valeur de B^n pour tout entier naturel n.
2. Développer $(B + I_3)^n$ par la formule du binôme et simplifier.
3. En déduire A^n pour tout entier naturel n.
4. La relation précédente est-elle aussi valable pour les entiers n négatifs ?

Exercice 18 Résoudre les systèmes suivants

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ x & + & 4y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 5 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} 3x & - & y & + & 2z & = & a \\ -x & + & 2y & - & 3z & = & b \\ x & + & 2y & + & z & = & c \end{array} \right.$$

Exercice 19 Mettre sous forme matricielle et résoudre les systèmes suivants.

1. $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y + z & = & 3 \\ 3x - y - 2z & = & 0 \\ x + y - z & = & -2 \\ x + 2y + z & = & 1 \end{array} \right.$
2. $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z + t & = & 1 \\ x - y + 2z - 3t & = & 2 \\ 2x + 4z + 4t & = & 3 \\ 2x + 2y + 3z + 8t & = & 2 \\ 5x + 3y + 9z + 19t & = & 6 \end{array} \right.$
3. $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y + z + t & = & 1 \\ x + 2y + 3z + 4t & = & 2 \\ 3x - y - 3z + 2t & = & 5 \\ 5y + 9z - t & = & -6 \end{array} \right.$
4. $\left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z + t & = & 5 \\ 2x + 3y + 4z + 5t & = & 8 \\ 3x + y - z + t & = & 7 \end{array} \right.$
5. $\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 0 \\ 2x + 3y - z & = & 0 \\ 3x + y + 2z & = & 0 \end{array} \right.$

Exercice 20 Soit a un nombre réel. On étudie le système linéaire suivant :

$$\mathcal{S}_a : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 3y & - & 2z & = & 5 \\ 2x & - & y & + & az & = & 1 \end{array} \right.$$

1. En fonction des valeurs du paramètre a, déterminer si le système $\mathcal{S}_a$ peut :
   (i) n'admettre aucune solution ;
   (ii) admettre exactement une solution ;
   (iii) admettre une infinité de solutions.
2. Résoudre le système $\mathcal{S}_a$ lorsque celui-ci admet une (des) solution(s).

Exercice 21 Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ, a, b, c, d le système :

$$(S) \left\{ \begin{array}{lcl} (1+\lambda)x + y + z + t & = & a \\ x + (1+\lambda)y + z + t & = & b \\ x + y + (1+\lambda)z + t & = & c \\ x + y + z + (1+\lambda)t & = & d \end{array} \right.$$

Feuille d'exercice n° 04 : **Théorie des ensembles**

Exercice 1 (✎) Donner la liste des éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1,2\}))$.

Exercice 2 (✎) Soit $E = \{x, y, z\}$ un ensemble. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses.
a) $x \in E$; b) $\{x\} \in E$; c) $\{x\} \subset E$; d) $\varnothing \in E$; e) $\varnothing \subset E$; f) $\{\varnothing\} \subset E$.

Exercice 3 Un ensemble est dit décrit en compréhension lorsqu'il réunit les éléments d'un ensemble vérifiant une propriété. Un ensemble est dit décrit en extension lorsqu'on cite ses éléments. Par exemple, $\{n \in \mathbb{Z} / \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k\}$ et $\{2k / k \in \mathbb{Z}\}$ sont des descriptions respectivement en compréhension et en extension de l'ensemble des entiers pairs.
a) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$.
b) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble $\{1, 10, 100, 1000, \ldots\}$.
c) Décrire en extension l'ensemble des nombres rationnels.
d) Décrire en en compréhension l'ensemble $]0, 1]$. Pensez-vous qu'il soit possible de décrire cet ensemble en extension ?
e) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble des valeurs prises par une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
f) Décrire en compréhension l'ensemble des antécédents d'un réel y par une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 4 (✎) Montrer que si F et G sont des sous-ensembles de E :

$$(F \subset G \iff F \cup G = G), \quad (F \subset G \iff F \cap G = F) \quad \text{et} \quad (F \subset G \iff F^C \cup G = E).$$

En déduire que :

$$(F \subset G \iff F \cap G^C = \varnothing).$$

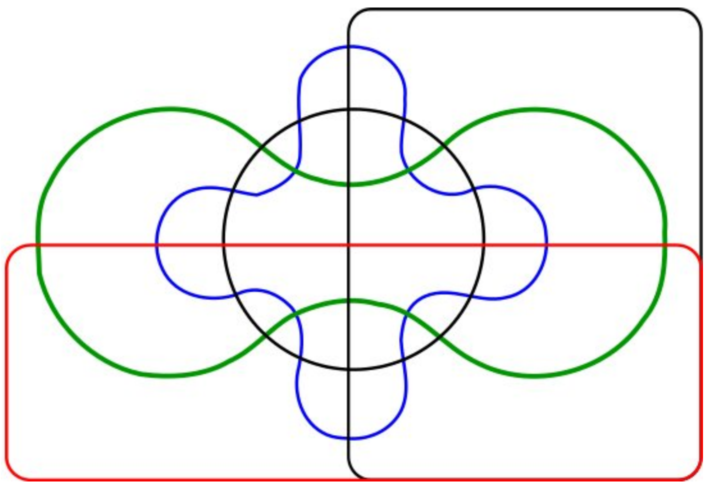
Exercice 5 (✎) Soit E un ensemble, A, B, C trois parties de E.
Montrer :
— $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.
— $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$.
— $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

Exercice 6 Soient E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Résoudre dans $\mathscr{P}(E)$ les équations suivantes :
1. $X \cup A = B$.
2. $X \cap A = B$.
3. $X \backslash A = B$.

Exercice 7 Soient E et F deux ensembles. Quelle relation y a-t'il
1. entre les ensembles $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$?
2. entre les ensembles $\mathcal{P}(E \cap F)$ et $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$?

3. entre les ensembles $\mathcal{P}(E \times F)$ et $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$?

Exercice 8 (✎) Soient E, F, G trois ensembles. Montrer que $(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G$.



Feuille d'exercice n° 05 : **Notion d'application**

Exercice 1 (✎) Soit $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$ et $g: \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ y & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y=0 \\ y-1 & \text{si} \quad y \geq 1 \end{cases} \end{array}$

1. Préciser l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité éventuelle de f et g.
2. Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 2 Soit $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1-\dfrac{1}{x-1} \end{array}$

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Déterminer une partie E telle que $g: \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1-\dfrac{1}{x-1} \end{array}$ soit bijective et expliciter la réciproque.

Exercice 3 Soit E un ensemble.

1. Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a
$$\mathbb{1}_{(A\cap B)} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B \tag{1}$$
$$\mathbb{1}_{(A^c)} = 1 - \mathbb{1}_A \tag{2}$$
$$\mathbb{1}_{(A\cup B)} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B \tag{3}$$
2. Montrer que l'application
$$\mathbb{1}: \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \to & \{\,0,1\,\}^E \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$$
est bijective.

Exercice 4 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Établir les implications suivantes :

1. $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.
2. $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.
3. $g \circ f$ injective et f surjective $\Rightarrow g$ injective.
4. $g \circ f$ surjective et g injective $\Rightarrow f$ surjective.

Exercice 5 (✎) Soient E, E', F, F' quatre ensembles et $u : E' \to E$, $v : F \to F'$ deux applications.
On définit : $\varphi: \begin{array}{rcl} F^E & \to & {F'}^{E'} \\ f & \mapsto & v \circ f \circ u \end{array}$

1. Vérifier que φ est bien définie.
2. Montrer que si v est injective et u surjective alors φ est injective.
3. Montrer que si v est surjective et u injective alors φ est surjective.

Exercice 6 $(X \cap A, X \cap B)$

Soit E un ensemble, et A, B deux parties fixées de E. Soit φ : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{array}\right.$

1. Qu'est-ce que $\varphi(\varnothing)$? $\varphi(E \setminus (A \cup B))$?
2. A quelle condition sur A et B, φ est-elle injective ?
3. Est-ce que le couple $(\varnothing, B)$ possède un antécédent par φ ?
4. A quelle condition sur A et B, φ est-elle surjective ?

Exercice 7 () Factorisation d'une application

1. Soit $f : F \to E$ et $g : G \to E$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : G \to F$ telle que $g = f \circ h$ si et seulement si : $g(G) \subset f(F)$.
   A quelle condition h est-elle unique ?
2. Soit $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications. Montrer qu'il existe une application $h : F \to G$ telle que $g = h \circ f$ si et seulement si : $\forall\, x, y \in E,\ \big(f(x) = f(y) \Rightarrow g(x) = g(y)\big)$.
   A quelle condition h est-elle unique ?

Exercice 8 () Parties saturées pour la relation d'équivalence associée à f

Soit $f : E \to F$ une application, et $\mathcal{S} = \{\ X \subset E \mid f^{-1}(f(X)) = X\ \}$.

1. Pour $A \subset E$, montrer que $f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{S}$.
2. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par intersection et réunion.
3. Soient $X \in \mathcal{S}$ et $A \subset E$ tels que $X \cap A = \varnothing$. Montrer que $X \cap f^{-1}(f(A)) = \varnothing$.
4. Soient X et $Y \in \mathcal{S}$. Montrer que $\overline{X}$ et $Y \setminus X$ appartiennent à $\mathcal{S}$.
5. Montrer que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \to & \mathscr{P}(f(E)) \\ A & \mapsto & f(A) \end{array}$ est une bijection.

Exercice 9 () - Un théorème de Cantor -

Le but de cet exercice est de montrer que si E est un ensemble, il n'existe pas de surjection de E dans $\mathscr{P}(E)$. Soit φ une application de E dans $\mathscr{P}(E)$. On définit l'ensemble :

$$A = \{x \in E \mid x \notin \varphi(x)\}$$

En raisonnant par l'absurde, montrer que A n'est l'image d'aucun élément de E par φ.

Exercice 10 Soit $f : E \to I$ une application surjective. On pose, pour tout $i \in I$, $A_i = f^{-1}(\{i\})$. Montrer que les A_i sont non vides, deux à deux disjoints, de réunion égale à E.

Exercice 11 Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

1. a) Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$ pour toute partie A de E.
   b) Montrer que f est injective si et seulement si $f^{-1}(f(A)) = A$ pour toute partie A de E.
2. a) Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$ pour toute partie B de F.
   b) Montrer que f est surjective si et seulement si $f(f^{-1}(B)) = B$ pour toute partie B de F.

Exercice 12 Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$. Montrer que f est injective ssi $\forall A, A' \in \mathscr{P}(E)$, $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.

Feuille d'exercice n° 06 : **Fonctions usuelles**

Exercice 1 ( )

1. Montrer que la composée de deux applications monotones de même sens (resp. de sens contraires) est croissante (resp. décroissante).
2. Montrer que la somme de deux applications croissantes est croissante.
3. La somme de deux applications monotones est-elle nécessairement monotone ?
4. Le produit de deux applications croissantes est-il nécessairement une application croissante ?

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante tandis que $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\left\{ \begin{array}{lcl} 2^{3x+2y} & = & 5 \\ 4^{2x} & = & 2^{2y+3} \end{array} \right.$

Exercice 4 Résoudre : $\ln \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$.

Exercice 5 ( ) Tracer les courbes représentatives des fonctions

$$x \mapsto f(x) = \sin(\operatorname{Arcsin} x), \qquad x \mapsto g(x) = \operatorname{Arcsin}(\sin x).$$

Exercice 6 ( ) Simplifier les expressions suivantes :

$$\arccos\left(\cos \frac{2\pi}{3}\right) ; \qquad \arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) ; \qquad \arccos\left(\cos 4\pi\right) ; \qquad \arctan\left(\tan \frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\tan\left(\arcsin x\right) ; \qquad \sin\left(\arccos x\right) ; \qquad \cos\left(\arctan x\right)$$

Exercice 7 ( ) Démontrer les inégalités suivantes :

$$\operatorname{Arcsin} a < \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \text{ si } 0 < a < 1;$$

$$\operatorname{Arctan} a > \frac{a}{1+a^2} \text{ si } a > 0.$$

Exercice 8 On donne deux entiers p et q vérifiant : $0 < p < q$.

1. Exprimer $\tan(4x)$ en fonction de $\tan(x)$, pour tout $x \in [0, \pi/8[$.
2. En déduire la formule de Machin : $\dfrac{\pi}{4} = 4 \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{5} - \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{239}$.

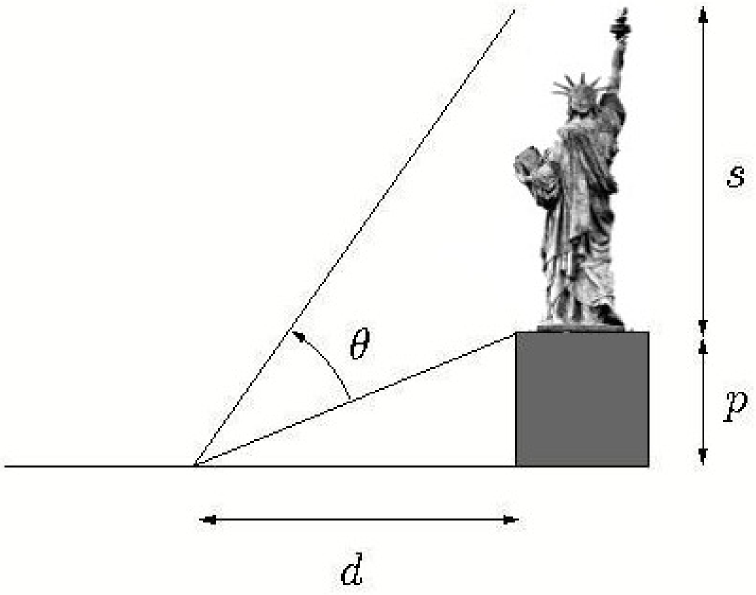


FIGURE 1 – La statue

Remarque : John Machin a pu calculer 100 décimales de π à la main en 1706 grâce à cette relation.

Exercice 9

Une statue de hauteur s est placée sur un piédestal de hauteur p. À quelle distance doit se placer un observateur (dont la taille est supposée négligeable) pour voir la statue sous un angle maximal (i.e. pour avoir θ maximal avec les notations de la figure **1**) ?

Exercice 10 Sur quelle partie de $\mathbb{R}$ est définie l'équation $\operatorname{Arccos} x = \operatorname{Arcsin}(1-x)$? La résoudre.

Exercice 11 On définit les deux fonctions f et g par $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right)$ et $g(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)$.

1. Déterminer leurs ensembles de définition.
2. Calculer, lorsque cela est possible, leurs dérivées.
3. Que peut-on en déduire concernant $f(x)$ et $g(x)$? Donner le maximum de précisions.
4. Tracer les courbes représentatives de f et de g (sur un même schéma).

Exercice 12 Calculer $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8}$.

Exercice 13 Résoudre : $\operatorname{Arcsin} 2x = \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}\left(x\sqrt{2}\right)$.

Exercice 14 Soit la fonction :

$$f \ : \ \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right) \end{array}$$

Montrer que la fonction f est bien définie et que pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ on a les relations suivantes :

1. $\operatorname{th} \dfrac{f(x)}{2} = \tan \dfrac{x}{2}$
2. $\operatorname{th} f(x) = \sin x$
3. $\operatorname{ch} f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$
4. $\operatorname{sh} f(x) = \tan x$.

Exercice 15 Calculer, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ch}(a+kb), \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sh}(a+kb).$$

Exercice 16 Résoudre : $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = 0$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Feuille d'exercice n° 07 : **Équations différentielles**

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes via un changement de variable adéquat :

a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ b) $\displaystyle\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ d) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t+t(\ln t)^2}$ e) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{\ln t+1}}$

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$ g) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ h) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t+2t}}$ i) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)-\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$

Exercice 2 Soit $I(a,b)=\displaystyle\int_a^b \frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{(x^4+1)}}\,\mathrm{d}x$

1. Montrer que $I(a,b)=I(-b,-a)$
2. Soient a et b de même signe. Montrer que $I\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)=I(a,b)$. En déduire que $I(a,\frac{1}{a})=0$.
3. Calculer $I(a,b)$ pour $a\geqslant 1$ et $b\geqslant 1$ en posant $u=x+\frac{1}{x}$ puis $u=\sqrt{2}\,\mathrm{ch}(x)$.

Exercice 3 On pose, pour tout entier naturel n, $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}(\sin x)^n dx$.

1. Calculer I_0 et I_1. Donner une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}. En déduire la valeur de I_n selon la parité de n.
2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{I_{n-1}}{I_n}$
3. Montrer : $\forall n\geqslant 1,\quad nI_nI_{n-1}=\frac{\pi}{2}$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n\sqrt{n}$
4. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2n(I_{2n})^2=\frac{\pi}{2}$.
   En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left[n\left(\frac{1.3.5.\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right)^2\right]=\frac{1}{\pi}$ (**formule de Wallis**)

Exercice 4 Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. a) Vérifier que la fonction $x\mapsto \ln\ \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ est définie et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et calculer sa dérivée.
   b) Résoudre : $y'-y\tan x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ avec $y(0)=1$.
2. $y'+y=(x^2-2x+2)\mathrm{e}^{2x}$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0)=0$.
3. $y'-2y=\mathrm{sh}\,x-2x\,\mathrm{ch}\,x$ sur $\mathbb{R}$.
4. $xy'\ln x-y=3x^2\ln^2 x$ sur $]0,1[$.
5. $y'+x^2y+x^2=0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0)=0$.
6. $xy'-y=x$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.
7. $y'\sqrt{1-x^2}-y=1$ sur $]-1,1[$.
8. $y'-3y=x^2\mathrm{e}^{x}+x\mathrm{e}^{3x}$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0)=1$.

Exercice 5 Déterminer les fonctions $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x\in[0,1]\quad f'(x)+f(x)=f(0)+f(1)$.

Exercice 6 Résoudre $2x(1-x)y'+(1-x)y=1$. On fera attention à bien préciser les intervalles de résolution. Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$? Lesquelles ?

Exercice 7 Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y' - 2y = 8\sin x$ avec $y(\pi) = 0$ et $y'(\pi) = 1$.
2. $y'' + y' = 4x^2\mathrm{e}^{x}$ avec $y(0) = \mathrm{e}$ et $y'(0) = 0$.
3. $y'' + 4y = x^2 - x + 1$.
4. $y'' + y' + 2y = (8x + 1)\mathrm{e}^{x}$.
5. $y'' - 3y' + y = \sin x + \cos x$.
6. $y'' - y = \operatorname{sh} x$.

Exercice 8 On étudie les équations différentielles d'Euler, qui sont de la forme $(\mathscr{E})$: $ax^2y'' + bxy' + cy = g(x)$, où a, b et c sont des constantes et g est une fonction.

1. On suppose que l'on étudie $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on pose $z(t) = y(e^t)$. Montrer que y est solution de $(\mathscr{E})$ si et seulement si z est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre deux, à coefficients constants.
2. Résoudre $x^2y'' + xy' - y = 2x\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Résoudre $x^2y'' + 3xy' + y = (x+1)^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Résoudre $x^2y'' + 3xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.
5. Trouver toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 9 Trouver les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ f"(x) + f(-x) = x\mathrm{e}^{x}$$

Exercice 10 Le but de cet exercice est de résoudre le système différentiel (**S**) suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'' & = & x' + y' - y \\ y'' & = & x' + y' - x \end{array}\right. , \ x, y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

1. Soient $x, y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $u = x + y$ et $v = x - y$. Montrer alors qu'il existe deux équations différentielles du second ordre (**E**) et (**F**) telles que l'on ait : (x, y) est solution de (**S**) si et seulement si u est solution (**E**) et v est solution de (**F**).
2. Résoudre (**E**).
3. Résoudre (**F**).
4. En déduire les solutions de (**S**).

Feuille d'exercice n° 08 : **Relations d'ordre et d'équivalence, et ensembles de nombres usuels**

Exercice 1 Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On définit sur $\mathcal{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$ la relation $\mathcal{R}$ par $X\mathcal{R}Y$ ssi ($X = Y$ ou $\forall x \in X\ \forall y \in Y\ x \leqslant y$). Vérifier que c'est une relation d'ordre.

Exercice 2 Un ensemble E muni d'une relation d'ordre $\preccurlyeq$ est dit *bien ordonné* pour $\preccurlyeq$ si toute partie non vide admet un plus petit élément pour $\preccurlyeq$.

1. Donner un exemple d'ensemble bien ordonné et un exemple d'ensemble qui ne l'est pas.
2. Montrer que bien ordonné implique totalement ordonné.
3. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3 Soit E un ensemble et A une partie de E.
On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathscr{P}(E)$ par : $X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow X \cup A = Y \cup A$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Décrire la classe d'équivalence de $X \in \mathscr{P}(E)$

Exercice 4 Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire réflexive et transitive sur un ensemble E.
On définit une relation $\mathcal{S}$ par :

$$x\mathcal{S}y \Leftrightarrow x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x$$

Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence et que $\mathcal{R}$ permet de définir une relation d'ordre sur les classes d'équivalences de $\mathcal{S}$.

Exercice 5 Déterminer les bornes supérieures et inférieures des parties suivantes de $\mathbb{R}$:
$A = \left\{\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\ /\ n \in \mathbb{N}\right\}$ $\quad B = \{x^2 + 2x + 3\ /\ x \in [-3; 2]\}$ $\quad C = \left\{\dfrac{1}{n} + (-1)^n\ /\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice 6 Soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'entiers naturels. Montrer que $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *stationnaire*, i.e. que k_n finit par prendre toujours la même valeur à partir d'un certain rang.

Exercice 7 Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$.

1. Si $A \subset B$, montrer que $\sup A \leqslant \sup B$.
2. Montrer que $A \cup B$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, puis que :
$$\sup A \cup B = \max\{\sup A, \sup B\}.$$
3. Montrer que $A + B = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists (a, b) \in A \times B \mid x = a + b\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, puis que $\sup A + B = \sup A + \sup B$.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^\star$. Montrer que $\lambda A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A \mid x = \lambda a\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, puis que $\sup \lambda A = \lambda \sup A$.

Exercice 8 (🚲✍) Soit X et Y deux ensembles non vides et $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ majorée. Montrer

$$\sup_{(x,y)\in X\times Y} f(x,y) = \sup_{x\in X} \sup_{y\in Y} f(x,y).$$

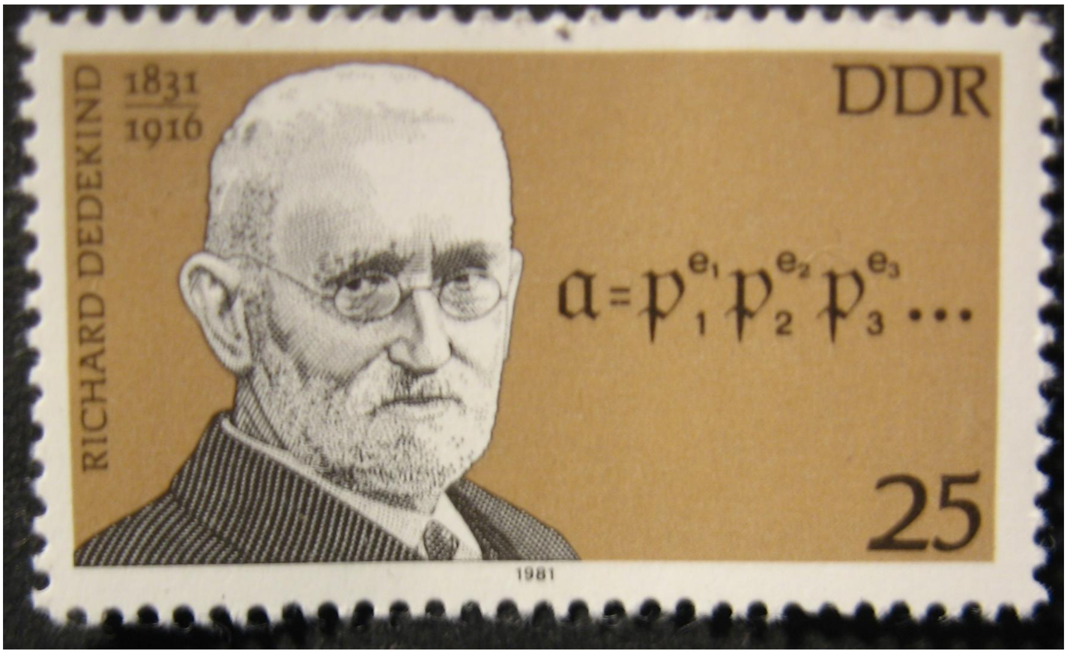
Exercice 9 (🚲) Soient a et b deux réels. Montrer que :
a) $a \leqslant b \Rightarrow \lfloor a\rfloor \leqslant \lfloor b\rfloor$.
b) $\lfloor a\rfloor + \lfloor b\rfloor \leqslant \lfloor a+b\rfloor \leqslant \lfloor a\rfloor + \lfloor b\rfloor + 1$.

Exercice 10 On veut calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$.

1. Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor \right) + n$.
2. Conclure.

Exercice 11

1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}.$$
2. En déduire que si $p, q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor k.\frac{p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$.



Feuille d'exercice n° 09 : **Arithmétique**

Exercice 1 (✎) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1) $17|(7^{8n+1}+10(-1)^n)$ 2) $11|(9^{5n+2}-4)$ 3) $6|(10^{3n+2}-4^{n+1})$.

Exercice 2 Quel est le reste de la division euclidienne de $1234^{4321}+4321^{1234}$ par 7 ?

Exercice 3 Trouver le reste de la division par 13 du nombre 100^{1000}.

Exercice 4 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$n(n+1)(n+2)(n+3) \text{ est divisible par } 24,$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \text{ est divisible par } 120.$$

Exercice 5 (✎) Déterminer le pgcd et les coefficients de l'égalité de Bézout des entiers a et b suivants :
a) $a=33$ et $b=24$; b) $a=37$ et $b=27$; c) $a=270$ et $b=105$.

Exercice 6 Soient a, b et $c \in \mathbb{Z}$, $(a,b) \neq (0,0)$. On souhaite résoudre l'équation $ax+by=c$, notée $\star$, d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$.

1. Montrer que $\star$ n'a pas de solution si c n'est pas un multiple de $a \wedge b$.
2. On suppose dans cette question que $a \wedge b$ divise c.
   a) En considérant un couple de coefficients de Bézout de (a,b), montrer que $\star$ possède une solution (x_0,y_0).
   b) En s'appuyant sur (x_0,y_0), résoudre complètement $\star$.
3. Résoudre les deux équations $2x+5y=13$ et $7x-12y=3$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$.

Exercice 7 Le pgcd de deux nombres est 12 ; les quotients successifs obtenus dans le calcul de ce pgcd par l'algorithme d'Euclide sont 8, 2 et 7. Trouver ces deux nombres.

Exercice 8 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{N}^2$:

$$1) \left\{ \begin{array}{rcl} x \wedge y & = & 3 \\ x+y & = & 21 \end{array} \right. \qquad 2) \left\{ \begin{array}{rcl} x \wedge y & = & 6 \\ x \vee y & = & 72 \end{array} \right. .$$

Exercice 9 (✎) Montrer que deux entiers non nuls consécutifs sont toujours premiers entre eux.

Exercice 10 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :

1. $(n^2+n) \wedge (2n+1) = 1$; 2. $(3n^2+2n) \wedge (n+1) = 1$.

Exercice 11 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant :

$$S : \left\{ \begin{array}{lcll} x & \equiv & 4 & \text{mod } 6 \\ x & \equiv & 7 & \text{mod } 9 \end{array} \right.$$

On recherchera d'abord une solution particulière.

Exercice 12 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes :

1. $91x - 65y = 156$.
2. $135x - 54y = 63$.
3. $72x + 35y = 13$.

Exercice 13 Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $x^2 + 5y^2 = 3$.

Exercice 14 Déterminer n tel que $n^2 - 3n + 6 \equiv 0 \pmod 5$.

Exercice 15 Un coq coûte 5 pièces d'argent, une poule 3 pièces, et un lot de quatre poussins 1 pièce. Quelqu'un a acheté 100 volailles pour 100 pièces ; combien en a-t-il acheté de chaque sorte ?

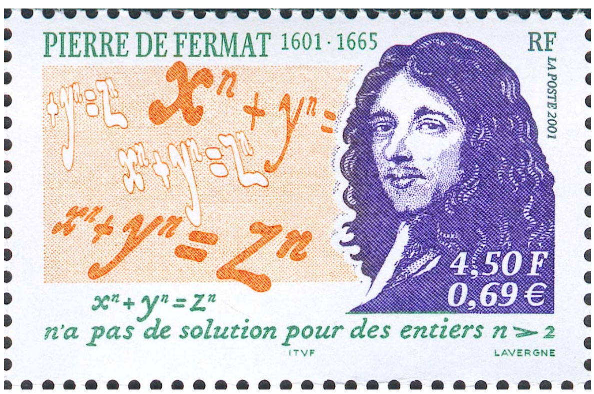
Exercice 16 Soient a et n deux entiers supérieurs ou égaux à 2. Montrer que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier. La réciproque est-elle vraie ? Pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 2, l'entier $2^p - 1$ est appelé le p-ème nombre de Mersenne, souvent noté M_p.

Exercice 17 Soit F l'application définie sur $\mathbb{N}$ par $n \to 2^{2^n} + 1$. $F(n)$ est appelé $n^{\text{ième}}$ nombre de Fermat.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F(n) = \prod_{k=0}^{n-1} F(k) + 2$.
2. Montrer que pour tout couple (m, n) de $\mathbb{N}^2$ tels que $m \neq n$ alors $F(m)$ et $F(n)$ sont premiers entre eux.
3. Montrer que tout entier naturel n qui n'est pas de la forme 2^m possède un diviseur impair autre que 1. En déduire que si le nombre $2^n + 1$ est premier alors c'est un nombre de Fermat.
4. Montrer que $F(5)$ est divisible par 641.

Exercice 18 Montrer que pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2, alors $\dfrac{1}{4}(n^3 + (n+2)^3)$ est un entier, et qu'il n'est pas premier.

Exercice 19 Dans le système de numération de base 16 on pose $a = 4A3$ et $b = 10C4$.
Calculer $a + b$, $b - a$ et ab en base 16.



Feuille d'exercice n° 10 : **Suites**

Exercice 1 ( ) — Méfiez-vous des faux amis —
Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Parmi les affirmations suivantes, dites lesquelles sont vraies (on les démontrera alors) et lesquelles sont fausses (on donnera un contre-exemple) :

1. Si (u_n) converge, alors $(u_{n+1}-u_n)$ converge vers 0.
2. Si $(u_{n+1}-u_n)$ converge vers 0, alors (u_n) converge.
3. Si (u_n) converge et pour tout n $u_n \neq 0$, alors $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers 1.
4. Si pour tout n $u_n \neq 0$ et $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers 1, alors (u_n) converge.
5. Si pour tout n $u_n \neq 0$ et $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers 1/2, alors (u_n) converge.
6. Si (u_n) converge vers 0 et si (v_n) diverge, alors à partir d'un certain rang $|u_n| \leqslant |v_n|$.
7. Si (u_n) est une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0, alors elle est décroissante à partir d'un certain rang.
8. Si une suite positive est non majorée, elle tend vers $+\infty$.
9. (u_n) converge si et seulement si $(|u_n|)$ converge.
10. Si $(|u_n|)$ tend vers $+\infty$, alors (u_n) tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
11. Si (u_n) n'est pas majorée, elle admet une sous-suite strictement croissante qui tend vers $+\infty$.
12. Si (u_n) est monotone et admet une sous-suite convergente, alors (u_n) est convergente.
13. Si une suite d'entiers converge, elle est stationnaire.
14. Si une suite a un nombre fini de valeurs, elle converge si et seulement si elle est stationnaire.
15. Si (u_n+v_n) est convergente, (u_n) et (v_n) convergent.
16. Si (u_nv_n) est convergente, (u_n) et (v_n) convergent.
17. Si (u_n) converge, $(\lfloor u_n \rfloor)$ également.

Exercice 2 Étudier la suite $u_n = \dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$, a et b étant donnés dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 ( ) — Lemme de Césaro —
Soit (u_n) une suite réelle. On pose $v_n = \dfrac{u_0+\cdots+u_{n-1}}{n} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

1. Montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, $(\ell \in \overline{\mathbb{R}})$
3. Donner un exemple où (v_n) converge mais (u_n) diverge.

Exercice 4 ( )

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$, tels que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Montrer :
   - $\ell < 1 \Longrightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
   - $\ell > 1 \Longrightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$, $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Montrer :
   - $\ell < 1 \Longrightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
   - $\ell > 1 \Longrightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. Montrer : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \Longrightarrow \sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ (*indication :* utiliser le lemme de Césaro).
4. Chercher les limites de : $\quad u_n = \sqrt[n]{\dbinom{2n}{n}} \qquad v_n = \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} \qquad w_n = \dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{n!}}$

Exercice 5 (🚲) - Divergence de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ -
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$, les suites $(\cos(n\theta))$ et $(\sin(n\theta))$ sont toutes les deux divergentes (montrer que si l'une converge, alors l'autre aussi, puis obtenir une contradiction).

Exercice 6 (✎) Étudier la convergence des suites suivantes, et calculer la limite quand elle existe :
$a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n}$; $\quad b_n = \dfrac{n\sin(n)}{n^2+1}$; $\quad c_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n$; $\quad d_n = n - \sqrt{n^2-n}$
$e_n = \dfrac{n}{2}\sin\dfrac{n\pi}{2}$; $\quad f_n = \sqrt[n]{3-\sin n^2}$; $\quad g_n = \dfrac{n^3+2^n}{3^n}$.

Exercice 7 (🚲) Soit (u_n) une suite complexe telle que (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 8 (🚲) Soit $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$. Montrer que : $\forall n > 1, v_n < u_{n-1} - u_n$. en déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i$ converge, et majorer sa limite.

Exercice 9 (🚲) Critère spécial des séries alternées ou critère de Leibniz :
Soit (u_n) une suite de réels décroissante et de limite nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.
Montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et en déduire que (S_n) converge.

Exercice 10 (🚲) Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ et soit $v_n = u_n - \ln(n)$ et $w_n = u_n - \ln(n+1)$.

1. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes (leur limite commune s'appelle la constante d'Euler)
2. En déduire la nature de la suite (u_n)

Exercice 11 On appelle *ouvert* de $\mathbb{R}$ toute partie U vérifiant la propriété suivante :

pour tout $x \in U$, il existe un intervalle I ouvert tel que $x \in I \subset U$.

Soient U et V deux ouverts denses de $\mathbb{R}$. Établir que $U \cap V$ est encore un ouvert dense de $\mathbb{R}$.

Exercice 12 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

$$u_n \to +\infty,\ v_n \to +\infty \text{ et } u_{n+1} - u_n \to 0$$

.

1. Soient $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \varepsilon$.
   Montrer que pour tout $a \geqslant u_{n_0}$, il existe $n \geqslant n_0$ tel que $|u_n - a| \leqslant \varepsilon$.

2. En déduire que $\{u_n - v_p | n, p \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'ensemble $\{\cos(\ln n) | n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 13 On donne u_0 réel, et on pose quand cela est possible, $u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n}{1 - u_n}$.
Pour quelles valeurs de u_0 définit-on ainsi une suite (u_n) ?
Montrer qu'alors la suite est périodique.

Exercice 14 (✎) Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

Exercice 15 Soit $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3 + 2u_n}{2 + u_n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ où $f : x \to \dfrac{3 + 2x}{2 + x}$. On notera α et β ses racines.
3. Soit $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 16 Étudier la suite $z_{n+1} = \dfrac{z_n}{2 - z_n}$ avec $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| \leqslant 1$.

Exercice 17 Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n - y_n}{2}$ et $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$.
En introduisant la suite complexe de terme général $z_n = x_n + i.y_n$, montrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent et déterminer leurs limites.

Feuille d'exercice n° 11 : **Groupes, anneaux, corps**

Exercice 1 (✎) — **Un peu de sudoku** —Montrer qu'il existe une seule table possible pour un groupe d'ordre 3 (c'est-à-dire à trois éléments). Est-ce vrai pour 4 ?

Exercice 2 (✎) Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G.

1. Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de G.
2. Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 3 (✎) Soient G_1 et G_2 deux groupes, dont la loi est notée multiplicativement. On considère l'ensemble produit $G_1 \times G_2$ sur lequel on considère la loi interne $\otimes$ suivante :

$$\forall((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \in (G_1 \times G_2)^2 \quad (x_1,x_2)\otimes(y_1,y_2) = (x_1y_1, x_2y_2)$$

Montrer que $(G_1 \times G_2, \otimes)$ est un groupe. Quel est son neutre ?

Exercice 4 (🚲) Montrer que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont exactement tous les $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 Quel est le plus petit sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ (resp. de $(\mathbb{R}^*,\times)$) contenant 1 ? Contenant 2 ?

Exercice 6 On considère A et B deux sous-groupes de $(G, *)$ et on note :

$$A * B = \{x \in G / \exists a \in A, \exists b \in B \text{ tq } x = a * b\}$$

Montrer que $A * B$ est un sous-groupe de $(G, *)$ si et seulement si : $A * B = B * A$ (pour le sens direct, on commencera par montrer $B * A \subset A * B$).

Exercice 7 (🚲) Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ non réduit à $\{ 0 \}$. On pose $\alpha = \inf\left(\mathbb{R}_+^* \cap G\right)$

1. Montrer que si $\alpha > 0$, alors $G = \alpha\mathbb{Z}$ (où $\alpha\mathbb{Z}$ désigne $\{ k\alpha \mid k \in \mathbb{Z} \}$).
2. Montrer que si $\alpha = 0$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour tout réel x et tout $\varepsilon > 0$, il existe $y \in G$ vérifiant $|x - y| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 8 Décrire tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Z},+)$ dans $(\mathbb{Z},+)$. Déterminer ceux qui sont injectifs et ceux qui sont surjectifs.

Exercice 9 Soit G un groupe noté multiplicativement.
Pour $a \in G$, on note τ_a l'application de G vers G définie par $\tau_a(x) = axa^{-1}$.

1. Montrer que τ_a est un endomorphisme du groupe $(G,\times)$.
2. Vérifier que $\forall a,b \in G$, $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$
3. Montrer que τ_a est bijective et déterminer son application réciproque.
4. En déduire que $\mathcal{T} = \{\tau_a \mid a \in G\}$ muni du produit de composition est un groupe.

Exercice 10 Soit A un anneau de Boole (c'est-à-dire que $\forall x \in A,\ x^2 = x$)

1. Calculer $(x+x)^2$ et en déduire : $\forall x \in A,\ x+x=0$.
2. Calculer $(x+y)^2$ et en déduire que A est commutatif.

Exercice 11 Soit $(A,+,\times)$ un anneau. On dit que $x \in A$ est *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$.

1. Deux identités universelles : soient x et $y \in A$ tels que $\underline{xy = yx}$, et soit $n \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer la formule du binôme de Newton : $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.
   b) Montrer que : $x^n - y^n = (x-y) \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$.
2. a) Montrer que si x est nilpotent alors $1-x$ est inversible.
   b) Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors xy et $x+y$ sont nilpotents.
3. Un corps admet-il des éléments nilpotents non-nuls ?

Exercice 12 Soit $(A,+,\times)$ un anneau commutatif. Soit a un élément de A. On appelle racine carrée de a dans A, tout élément x de A tel que $x^2 = a$.

1. Montrer que si A est intègre, alors tout élément de A admet au maximum 2 racines carrées.
2. Prenons maintenant $(A,+,\times) = (\mathcal{F}(\mathbb{R}),+,\times)$. Soit $f : x \to 1$. Montrer que f admet une infinité de racines carrées.

Feuille d'exercice n° 12 : **Limite d'une fonction**

Exercice 1 (✎) Déterminer les limites suivantes, en justifiant vos calculs.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x^2 \ln x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} 2x\ln(x+\sqrt{x})$
3. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-2x^2+3}{x\ln x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(3x+1)}{2x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x-1}{\ln(x+1)}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{2}{x+1}\ln\left(\frac{x^3+4}{1-x^2}\right)$
8. $\displaystyle\lim_{x\to (-1)^+} (x^2-1)\ln(7x^3+4x^2+3)$
9. $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} (x-2)^2\ln(x^3-8)$
10. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x(x^x-1)}{\ln(x+1)}$
11. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (x\ln x - x\ln(x+2))$
12. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{x^2}}{x^2-x}$
13. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln x}$
14. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x$
15. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^3+5}{x^2+2}\right)^{\frac{x+1}{x^2+1}}$
16. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{x}+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x+1}}$
17. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (\ln(1+x))^{\frac{1}{\ln x}}$
18. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^{(x^{x-1})}}{x^{(x^x)}}$

19. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(x+1)^x}{x^{x+1}}$

20. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\sqrt{\ln(x^2+1)}}{1+\mathrm{e}^{x-3}}$

Exercice 2 Étudier la limite en 0 des applications (avec $a, b \in \mathbb{R}_+^*$) $x \mapsto \dfrac{x}{a}\left\lfloor \dfrac{b}{x} \right\rfloor$ et $x \mapsto \dfrac{a}{x}\left\lfloor \dfrac{x}{b} \right\rfloor$.

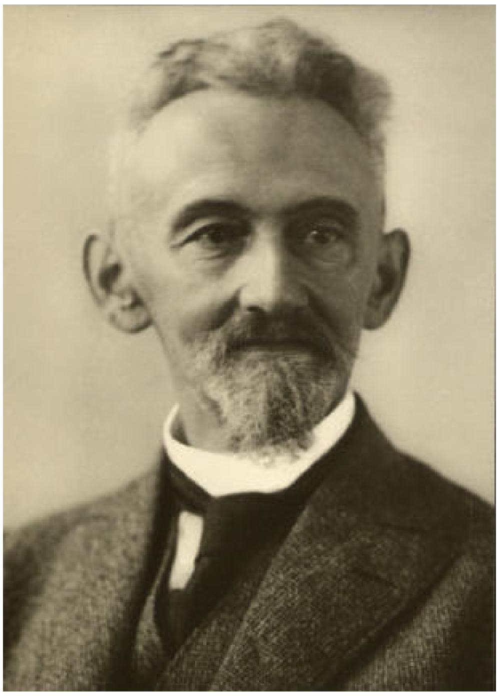
Exercice 3 (✎) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ croissante, telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = +\infty$, où (u_n) est la suite de terme général n. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 4 Montrer, en revenant à la définition de la limite, que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + \sin x}{(x+1)^2} = 1$.

Exercice 5 (✎) Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \mapsto x^\alpha \, \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^\beta}\right)$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^\star$.

Exercice 6 (✎) Montrer que toute fonction périodique et non constante n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 7 Soient $f, g \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que f a une limite finie en $+\infty$, g est périodique et $f + g$ est croissante. Montrer que g est constante.



Feuille d'exercice n° 13 : **Continuité**

Exercice 1 Etudier la continuité de

1. $f(x) = x + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.
2. $g(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

Exercice 2 (🚲) Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

$$a)\ f(x) = \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\ ;\quad b)\ f(x) = \frac{1}{x}\ln\frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}\ ;\quad c)\ f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\ .$$

Exercice 3 f est une application croissante, continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit pour tout réel x, $F(x) = \mathrm{Sup}\{y \in \mathbb{R} / f(y) \leqslant x\}$.

1. F est-elle toujours définie ?
2. On prend pour cette question, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2$. Déterminer F.
3. On prend pour cette question, $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leqslant -1 \\ -2 & \text{si } |x| < 1 \\ 2x-4 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

   Déterminer F, étudier sa continuité, continuité à droite, à gauche.

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ 1/x & \text{si } x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. a) En revenant à la définition de continuité, montrer que f est continue en 1 et en -1.

   b) Soient $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Donner, en la justifiant, la valeur, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, des quantités suivantes :

   $$\text{(i) } f(a + 1/n) \quad \text{(ii) } f(a + \sqrt{2}/n) \quad \text{(iii) } f(b + 1/n) \quad \text{(iv) } f\left(\frac{\mathbb{E}(b.10^n)}{10^n}\right).$$

   c) Que dire de la continuité de f en $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$?
3. À quoi ressemblerait la courbe représentative de f vue par un myope ?

Exercice 5 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in I, f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 6 Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, et soit f, g définies et continues sur $[a; b]$ telles que $\forall x \in [a; b],\ 0 < g(x) < f(x)$.
Montrer : $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in [a; b],\ (1 + \lambda)g(x) < f(x)$.

Exercice 7 Trouver toutes les fonctions vérifiant :

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)\cos x$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x + 1) = f(x)$

Exercice 8 Montrer qu'une fonction continue périodique non constante définie sur $\mathbb{R}$ possède une plus petite période (strictement positive).

Exercice 9 Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $[a, b]$ telle que pour tout x et x' ($x \neq x'$) de $[a, b]$ on ait : $|f(x) - f(x')| < |x - x'|$.

1. Montrer que f est continue sur $[a, b]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une et une seule solution dans $[a, b]$. (On pourra introduire la fonction : $x \mapsto g(x) = f(x) - x$).

Exercice 10
Soit P un polynôme de degré impair et à coefficients réels. Montrer que P possède une racine réelle.

Exercice 11
Soient $f,\ g \in \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que : $\forall x \in [a, b], \exists x' \in [a, b] \mid f(x) = g(x')$. On veut montrer que : $\exists c \in [a, b] \mid f(c) = g(c)$. Raisonnons par l'absurde et supposons que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \neq g(x)$.

1. Montrer qu'alors $f - g$ est de signe constant et ne s'annule pas.
2. On supppose que $f - g > 0$.
   (i) Montrer que f et g possèdent chacune un maximum sur $[a, b]$. On les notera M_f et M_g.
   (ii) Montrer que $M_g \geqslant M_f$ et conclure.
3. Retrouver le résultat si $f - g < 0$.

Exercice 12 Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$.

1. Montrer que la fonction $g(t) = f(t + \frac{b-a}{2}) - f(t)$ s'annule en au moins un point de $[a, \frac{a+b}{2}]$.
2. Application : une personne parcourt 4 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

Exercice 13 — TVI à l'infini —

Soit f : $[0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue ayant une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$. Montrer que f prend toute valeur comprise entre $f(0)$ et ℓ (ℓ exclu).

Exercice 14 f et g sont deux fonctions continues de $[a; b]$ dans $[a; b]$ avec $a < b$, telles que

$$\forall x \in [a; b],\ f \circ g(x) = g \circ f(x)\ .$$

On pose $E = \{x \in [a; b] /\ f(x) = x\}$.

1. Montrer que E a une borne inf et une borne sup. On notera $\alpha = \inf E$ et $\beta = \sup E$.
2. Montrer qu'il existe une suite (α_n) d'éléments de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \alpha$. On montrerait de même qu'il existe une suite (β_n) d'éléments de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = \beta$.
3. Montrer que α et β sont dans E.
4. Montrer que $g(\alpha)$ et $g(\beta)$ sont dans E.
5. Établir que $\exists x_0 \in [a;b],\ f(x_0) = g(x_0)$ (on pourra considérer la fonction $h = g - f$).

Feuille d'exercice n° 14 : **Polynômes**

Exercice 1 Résoudre les équations suivantes :

1. $Q^2 = XP^2$ d'inconnues $P, Q \in \mathbb{K}[X]$
2. $P \circ P = P$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice 2 Résoudre l'équation $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$.

Exercice 3 Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n + X + 1$ par le polynôme $(X-1)^2$.

Exercice 4

Soient $a, b \in \mathbb{K},\ a \neq b$.
Exprimer le reste de la division euclidienne de $P \in \mathbb{K}[X]$ par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

Exercice 5 Déterminer le pgcd des polynômes suivants :
$X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$ et $X^4 + 2X^3 + X + 2$,
$X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$ et $X^3 + X^2 - X - 1$,
$X^5 + 5X^4 + 9X^3 + 7X^2 + 5X + 3$ et $X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$.

Exercice 6 Calculer un couple de Bézout des couples de polynômes suivants :

1. $X^5 - X^4 + 2X^3 - X^2 + X - 2$ et $X^4 - 2X^3 - X + 2$
2. $X^4 + 2X^3 - X - 2$ et $X^5 + X^4 - 3X^3 + X^2 + 4X - 4$

Exercice 7 Dans $\mathbb{C}[X]$, effectuer les divisions euclidiennes de
$X^2 - 3iX - 5(1+i)$ par $X - 1 + i$,
$4X^3 + X^2$ par $X + 1 + i$.

Exercice 8 Soient P, Q deux polynômes premiers entre eux.

1. Montrer qu'alors P^n et Q^m sont premiers entre eux où n, m sont deux entiers positifs.
2. Montrer de même que $P + Q$ et PQ sont premiers entre eux.

Exercice 9 Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que quels que soient les entiers positifs b et q, $P^b - 1$ divise $P^{bq} - 1$.
2. En déduire que le reste de la division de $P^a - 1$ par $P^b - 1$ est $P^r - 1$ où r est le reste de la division dans $\mathbb{N}$ de a par b.
3. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le pgcd de $P^a - 1$ et $P^b - 1$.
4. Retrouver ce résultat en utilisant le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
5. Application : trouver le pgcd de $X^{5400} - 1$ et $X^{1920} - 1$.

Exercice 10

Déterminer une CNS sur $n \in \mathbb{N}$ pour que $X^2 + X + 1 | X^{2n} + X^n + 1$.

Exercice 11 Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^4 + 1$ en produit de facteurs irréductibles.

Exercice 12 Trouver le(s) polynôme(s) A de degré 4 tel(s) que : $X^2+1|A$ et $X^3+1|A-1$.

Exercice 13 (🚲) Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ vérifie $P(X^2) = P(X)P(X+1)$ ses racines sont parmi $0, 1, -j, -j^2$. En déduire tous les polynômes solutions.

Exercice 14 Montrer que les polynômes complexes $P = X^{1998} + X + 1$ et $Q = X^5 + X + 1$ sont premiers entre eux.

Exercice 15 Montrer qu'il existe deux polynômes : U, V, vérifiant : $(\star)$ $(1-X)^n U + X^n V = 1$. Déterminer U_1 et V_1 de degré strictement inférieur à n, satisfaisant cette égalité. En déduire tous les polynômes U, V vérifiant $(\star)$.

Exercice 16 Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$, premiers entre eux, et à coefficients entiers, tels que $P^2 + Q^2 = (X^2+1)^2$. En déduire que l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ a une infinité de solutions (non proportionnelles) dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 17 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe $S, T \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = S^2 + T^2$ (on utilisera la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$). *Indications :*

1. Montrer que les racines réelles de P sont de multiplicité paire.
2. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, écrire $(X-\alpha)(X-\bar{\alpha})$ comme somme de deux carrés de polynômes.

Exercice 18 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.

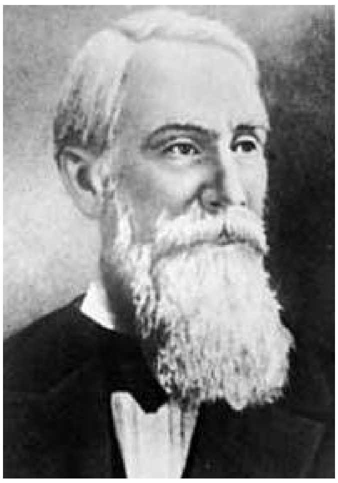
1. Montrer qu'il en est de même de P'.
2. Montrer que le polynôme $P^2 + 1$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 19 Résoudre les équations suivantes :

1. $P'^2 = 4P$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.
2. $(X^2+1)P'' - 6P = 0$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice 20

Résoudre $\left\{\begin{array}{lcl} a^2+b^2+c^2 & = & 14 \\ a+b+c & = & 2 \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} & = & \dfrac{5}{6} \end{array}\right.$.



Feuille d'exercice n° 15 : **Dérivation**

Exercice 1 — Limite double —

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0. Montrer que f est dérivable en 0, et $f'(0) = \ell$ si et seulement si :

$$\forall \quad \varepsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0 \quad \forall (h,k) \in]0,\delta[^2 \qquad \left| \frac{f(h) - f(-k)}{h+k} - \ell \right| \leq \varepsilon$$

Exercice 2 Soit f l'application : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$.

Exercice 3 Calculer la fonction dérivée d'ordre n des fonctions f, g, h définies par :
$f(x) = \sin x \quad ; \quad g(x) = \sin^2 x \quad ; \quad h(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$.

Exercice 4 Calculer les dérivées successives des fonctions :

$$x \mapsto x^2 \mathrm{e}^x \quad ; \quad x \mapsto x^2(1+x)^n \quad ; \quad x \mapsto \frac{x^2+1}{(x+1)^2} \quad ; \quad x \mapsto x^{n-1} \ln x.$$

Exercice 5 Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Exercice 6 Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que par tout point $(x_0, 0)$ avec $x_0 \in \mathbb{R} \backslash [a,b]$, il passe au moins une tangente à la courbe représentative de f.

Exercice 7 Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ sinon}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 8 — Rolle à l'infini —
Soit f une fonction continue et dérivable sur l'intervalle $[a, +\infty[$ vérifiant $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} f(a)$. Montrer qu'il existe un élément c dans $]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 9 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$ et $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe $c_1, c_2, c_3 \in]a,b[$ tels que $c_1 < c_2 < c_3$ et $f'(c_1) = f(c_2) = f'(c_3) = 0$.

Exercice 10 — Polynômes de Legendre —
On pose $f(t) = (t^2 - 1)^n$.

1. Montrer que : $\forall\, k \in \{0,\dots,n-1\},\ f^{(k)}(1) = f^{(k)}(-1) = 0$.
2. Calculer $f^{(n)}(1)$ et $f^{(n)}(-1)$.
3. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins n fois dans l'intervalle $]-1,1[$.

Exercice 11 ( ) Étant donné α dans $]0,1[$, montrer que pour tout entier naturel n non nul

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leqslant (n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p^{\alpha}}$.

Exercice 12 — Distance à la corde —
Soit $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$.

1. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $c \in\,]a,b[$. Montrer qu'il existe $d \in\,]a,b[$ tel que :

$$f(c) = -\frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$

   (Considérer $g(t) = f(t) + \lambda(t-a)(b-t)$ où λ est choisi de sorte que $g(c) = 0$)
2. Cas général : Soit $c \in\,]a,b[$. Montrer qu'il existe $d \in\,]a,b[$ tel que :

$$f(c) = \frac{b-c}{b-a} f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b) - \frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$

Exercice 13 Soit $f\ :\ [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$, avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.

Exercice 14

1. Montrer que si une fonction f est lipschitzienne sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, alors, $|f|$ l'est aussi.
2. Montrer que la réciproque est fausse, à l'aide de la fonction

$$f:\ \begin{array}{ccc} [0,2] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \\ -1 & \text{si } x \in]1,2]. \end{cases} \end{array}$$

3. Montrer que la somme de deux fonctions lipschitziennes sur I est lipschitzienne sur I.

Exercice 15 La fonction $\dfrac{1}{x}$ est-elle lipschitzienne sur $]0,+\infty[$? sur $[1,+\infty[$?

Exercice 16 ( ) On considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 \in [-1,+\infty[$ et pour tout n, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

1. Montrer que cette suite ne possède qu'une seule limite finie éventuelle α que l'on calculera.

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$. En déduire la convergence de la suite (u_n).

Exercice 17 (✍) On considère une suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et pour tout n, $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n} + \ln(u_n)$.

1. Montrer que l'équation $x = \dfrac{2}{x} + \ln(x)$ possède une unique solution réelle L.
2. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$ puis que pour tout $n \geqslant 0$, $|u_n - L| \leqslant \left(\dfrac{2}{9}\right)^n$. Conclure.

Feuille d'exercice n° 16 : **Fractions rationnelles**

Exercice 1 Donner une CNS sur $f \in \mathbb{C}(X)$ pour qu'il existe $g \in \mathbb{C}(X)$ tel que

$$f = g'.$$

Exercice 2
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{X^n - 1}$ est :

$$\frac{1}{X^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega}{X - \omega}$$

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et $p \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. On pose pour $k \in \{0, 1, \dots n-1\}$, $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Mettre sous forme irréductible $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^p}{X - \omega_k}$.

Exercice 4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme scindé à racines simples notées $x_1, \dots, x_n$.

1. Former la décomposition en éléments simples de P''/P.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0$.

Exercice 5 Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{X^3 - 3X^2 + X - 4}{X - 1}$
2. $\dfrac{X}{X^2 - 4}$
3. $\dfrac{(3 - 2i)X - 5 + 3i}{X^2 + iX + 2}$
4. $\dfrac{X}{(X + i)^2}$
5. $\dfrac{X^5 + X + 1}{X^4 - 1}$
6. $\dfrac{X^5 + X^4 + 1}{(X - 1)^3 (X + 1)^2}$
7. $\dfrac{X^5 + X + 1}{X^6 - 1}$
8. $\dfrac{X}{(X^2 + 1)(X^2 + 4)}$
9. $\dfrac{X^7 + 3}{(X^2 + X + 2)^3}$

Exercice 6 Calculer les primitives des fractions rationnelles suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2}$
2. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4 + 16}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3 - 7x + 6}$
4. $\displaystyle\int \frac{4x^2}{x^4 - 1}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 - 3x + 2}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int \frac{-2x^2 + 6x + 7}{x^4 + 5x^2 + 4}\,\mathrm{d}x$

Exercice 7

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que :

$$X^n + \frac{1}{X^n} = P_n\left(X + \frac{1}{X}\right)$$

que l'on factorisera dans $\mathbb{C}[X]$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Décomposer $1/P_n$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 8 () Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n.

1. Décomposer P'/P en éléments simples.
2. En déduire que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P c'est-à-dire que toute racine de P' s'écrit comme barycentre à poids positifs des racines de P.

Rappel : le barycentre des points $z_1, \dots, z_m$ affectés des poids $p_1, \dots, p_m$, si $\sum_{i=1}^{m} p_i \neq 0$, est le point

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} p_i} \sum_{i=1}^{m} p_i z_i.$$

Feuille d'exercice n° 17 : **Analyse asymptotique**

Exercice 1 ( ) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Parmi les affirmations suivantes, dites lesquelles sont vraies (on les démontrera alors) et lesquelles sont fausses (on donnera un contre-exemple) :

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $v_n = O(u_n)$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $v_n = O(u_n)$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et $v_n = O(u_n)$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $v_n = o(u_n)$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
5. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $v_n \sim u_n$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
6. Si $v_n \sim u_n$, alors $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
7. Si $v_n \sim u_n$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
8. Si $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $v_n \sim u_n$.

Exercice 2 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles de limite $+\infty$ telles que $u_n = o(v_n)$. Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $+\infty$ telle que $u_n = o(w_n)$ et $w_n = o(v_n)$.

Exercice 3 Donner un exemple de suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n = O(v_n)$ mais qu'on n'ait ni $u_n = o(v_n)$, ni $v_n = O(u_n)$.

Exercice 4 ( ) — Encadrement et équivalents —
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites ne s'annulant pas. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et que $u_n \sim w_n$. Que peut-on dire de (v_n) ?

Exercice 5 ( ) Trouver un équivalent simple des suites suivantes :

1. $\ln\cos\dfrac{\pi}{n} + \tan\operatorname{sh}\dfrac{1}{n}$
2. $\ln\cos\dfrac{\pi}{n} + \mathrm{e}^{\tan(\pi/n^2)} - 1$
3. $3 + \mathrm{e}^{1/n} - \dfrac{6}{n}$
4. $\sqrt{1+\mathrm{e}^{-n}} - \cos\mathrm{e}^{-n}$
5. $\sqrt{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$
6. $\ln(n+1) - \ln(n+2)$
7. $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+5} + \dfrac{4}{n^2}$
8. $(n+\ln n)\mathrm{e}^{-n+1}$
9. $\mathrm{e}^{\sin\frac{\pi}{n}} - \sin\left(\sin\dfrac{\pi}{2n}\right)$
10. $\ln\dfrac{1+\operatorname{ch}\frac{1}{n}}{2}$
11. $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-n}}} - \mathrm{e}$

Exercice 6 Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$

Exercice 7 ( ) Déterminer un équivalent de la suite définie par $u_n = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 8 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ u_{n+1} = \ln(n+u_n)$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ possède une limite et la déterminer.
2. a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\ln x \leqslant x$.
   b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $u_n \leqslant \ln(2n)$.
   c) Montrer que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.
   d) Montrer que : $u_n - \ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

Exercice 9 ()

1. Montrer que l'équation $\ln x + x = k$ admet une unique solution x_k, quel que soit $k \in \mathbb{N}$. On définit ainsi une suite réelle $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que l'on peut écrire : $x_k = ak + b\ln k + c\dfrac{\ln k}{k} + o\left(\dfrac{\ln k}{k}\right)$, où a, b et c sont des constantes que l'on déterminera.

Exercice 10 () À quelle condition sur f et g a-t-on $\mathrm{e}^f \underset{a}{\sim} \mathrm{e}^g$?

Exercice 11 () Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On suppose que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$. et que ces fonctions admettent une limite commune notée $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

1. On suppose dans cette question que f et g sont à valeurs strictement positives.
   (a) Montrer que si $\ell \neq 1$, alors :
   $$\ln(f(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(g(x))$$
   (b) Que pouvez-vous dire lorsque $\ell = 1$?
2. Parmi les équivalents suivants, lesquels sont systématiquement vrais ? (on pourra discuter selon les valeurs de ℓ).
   (a) $\arctan(f(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \arctan(g(x))$
   (b) $\sin(f(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sin(g(x))$

Exercice 12 () Montrer que si $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$ avec $f_1 = o(g_1)$ alors $f + g \sim g_1$

Exercice 13 Étudier en $+\infty$ et $-\infty$ la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt{x^2+x+1}$.

Exercice 14 ()

1. Limite en 0 de $\dfrac{\sin\left(x\ln(1+x^2)\right)}{x\tan x}$
2. Limite en 0 de $\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)}$
3. Limite en 0 de $(\ln(\mathrm{e}+x))^{\frac{1}{x}}$
4. Limite en $+\infty$ de $(\ln(1+e^{-x}))^{\frac{1}{x}}$
5. Limite en $+\infty$ de $\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$
6. Équivalent en $+\infty$ de $\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}$
7. Limite en 0 de $\dfrac{\tan(ax)-\sin(ax)}{\tan(bx)-\sin(bx)}$
8. Limite en $\dfrac{\pi}{4}$ de $\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\tan(x+\frac{\pi}{4})$
9. Limite en $\dfrac{\pi}{4}$ de $\dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{(4x-\pi)\tan(x)}$

10. Équivalent en 0 de $\dfrac{\tan(x - x\cos(x))}{\sin(x)+\cos(x)-1}$

11. Équivalent en $\dfrac{\pi}{4}$ de
$(\tan(2\,x)+\tan(x+\frac{\pi}{4}))\,(\cos(x+\frac{\pi}{4}))^2$

12. Limite en 0 de $x^{\frac{1}{1+2\,\ln(x)}}$

13. Limite en $\dfrac{1}{2}$ de $(2\,x^2-3\,x+1)\tan(\pi\,x)$

14. Limite en 0 de $\dfrac{(\sin(x))^{\sin(x)}-1}{(\tan(x))^{\tan(x)}-1}$

15. Équivalent en $+\infty$ de $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sin(\frac{1}{x})}\ln(\frac{x}{x+1})$

Exercice 15 (✎) Déterminer l'existence et la valeur des limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^x-1}{\ln x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\ln(\cos x)}+\frac{2}{x^2}\sin^2 x\right)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\sin^2 x)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin^2 x)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}\tan\left(\frac{2\pi x}{4x+3}\right)$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\ln x\tan(\ln(1+x))$
7. $\displaystyle\lim_{x\to \mathrm{e}}(\ln x)^{\tan\frac{\pi x}{2\mathrm{e}}}$

Exercice 16

1. $\sqrt{x}$ admet-elle un développement limité d'ordre $n\geqslant 1$ en 0 ?
2. À quels ordres $x^{\frac{13}{3}}$ admet-elle un développement limité en 0 ?
3. Soit $n\in\mathbb{N}$. $|x|^n$ admet-elle un développement limité d'ordre n en 0 ?

Exercice 17 (✎) Donner le développement limité en 0 des fonctions :

1. $x\mapsto\ln(\cos(x))$ (à l'ordre 6).
2. $x\mapsto\tan(x)$ (à l'ordre 5).
3. $x\mapsto\sin(\tan(x))$ (à l'ordre 5).
4. $x\mapsto(\ln(1+x))^2$ (à l'ordre 4).
5. $x\mapsto\exp(\sin(x))$ (à l'ordre 3).
6. $x\mapsto\sin^6(x)$ (à l'ordre 9.)

Exercice 18 (✎)

Former le développement asymptotique en $+\infty$ de l'expression considérée à la précision demandée :

1. $\sqrt{x+1}$ à la précision $\dfrac{1}{x^{3/2}}$;
2. $x\ln(x+1)-(x+1)\ln x$ à la précision $\dfrac{1}{x^2}$;
3. $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x$ à la précision $\dfrac{1}{x^2}$;
4. $\operatorname{Arctan} x$ à la précision $\dfrac{1}{x^3}$.

Exercice 19 (✎)

Faire un développement limité ou asymptotique en a à l'ordre n de :

1. $\dfrac{\arctan x - x}{\sin x - x}$ $\quad n=2 \quad a=0.$
2. $\ln\sin x$ $\quad n=3 \quad a=\frac{\pi}{4}.$
3. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $\quad n=3 \quad a=0.$
4. $x(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2})$ $\quad n=2 \quad a=+\infty.$

Exercice 20

1. Démontrer que $\tan x$ et $\tan' x$ admettent un développement limité en 0 à tout ordre. Expliquer comment obtenir le développement limité de $\tan' x$ à partir de celui de $\tan x$.
2. En exploitant la relation $\tan' x = 1 + \tan^2 x$, donner le développement limité de $\tan x$ en 0 à l'ordre 7.

Exercice 21

1. Donner le développement limité de $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ en 0 à l'ordre 4.
2. Sur le même modèle, donner un développement limité de $x \mapsto \displaystyle\int_x^{\frac{1}{x}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ en 1 à l'ordre 3.

Exercice 22 (✎) Calculer les développements asymptotiques suivants :

$$\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2} \quad \text{en } +\infty \text{ à 2 termes} \qquad \ln\left(\sqrt{1+x}\right) \quad \text{en } +\infty \text{ à 2 termes}$$

Exercice 23 (✎) Déterminer les DL suivants à l'ordre 4 :

1. en 0 : a) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+x}}$ b) $\dfrac{\sqrt{1+x}}{\cos x}$ c) $\dfrac{\ln(1+x)}{\cos x}$ d) $\dfrac{1+\cos x}{2+\sin x}$ e) $\dfrac{\sin(x/2)}{\mathrm{e}^{2x}}$ f) $\dfrac{\ln(1+x)}{2-\cos x}$
2. en a : a) $\dfrac{\sin(2x-\pi/4)}{\cos x}$ et $a = \pi/4$ b) $\dfrac{\cos(x-1)}{\ln(1+x)}$ et $a = 1$ (ordre 2) c) $\dfrac{\mathrm{e}^{x-1}}{\ln x}$ et $a = 1$.

Exercice 24 Calculer les limites des expressions suivantes lorsqu'elles existent :

1. $(\tan x)^{\tan 2x}$ en $\dfrac{\pi}{4}$
2. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1+x)}$ en 0
3. $\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$ en 0
4. $\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}$ en 1
5. $\dfrac{1}{\sin^4 x}\left(\sin\dfrac{x}{1-x} - \dfrac{\sin x}{1-\sin x}\right)$ en 0
6. $\dfrac{(1+x)^{\frac{\ln x}{x}} - x}{x(x^x-1)}$ en 0

Exercice 25 (✎) Soit $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[- \{0\}$.
Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et étudier la dérivabilité du prolongement de f.

Exercice 26 (✎) Soient u, v, f définies par :

$$u(x) = (x^3 - 2x^2 + 1)^{\frac{1}{3}},\ v(x) = \sqrt{x^2+x+1},\ f(x) = u(x) - v(x).$$

1. Donner l'équation d'une droite asymptote au graphe de f en $-\infty$ et positionner f par rapport à cette asymptote.
2. Même étude en $+\infty$.

Exercice 27 (✎) Soit g la fonction $x \mapsto \dfrac{\arctan x}{(\sin x)^3} - \dfrac{1}{x^2}$.

1. Donner le domaine de définition de g.
2. Montrer qu'elle se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable.
3. Déterminer la tangente en 0 au graphe de cette fonction et la position de ce graphe par rapport à celle-ci.

Exercice 28 (✎) Étudier la position du graphe de l'application $x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$ par rapport à sa tangente en 0 et 1.

Exercice 29 Étudier les branches infinies des fonctions :

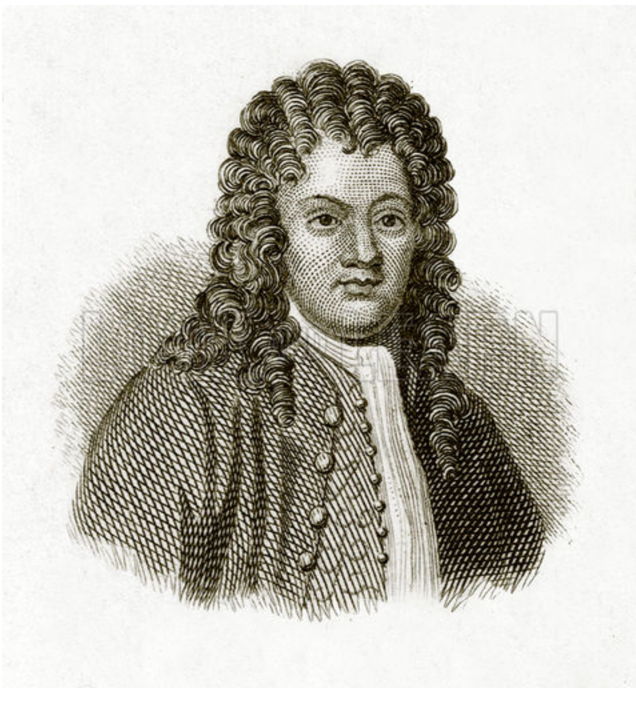
1. $f(x) = x^2 \arctan(\frac{1}{1+x^2})$.
2. $g(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}$.

Exercice 30 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ et $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$.

Exercice 31 Soient a et b deux réels distincts et $F(X) = \dfrac{1}{(X-a)^n(X-b)^n}$. En utilisant la formule de Taylor en a pour $f(X) = (X-a)^n F(X)$, décomposer F sur $\mathbb{R}$.

Exercice 32 Donner les natures des séries de terme général (u_n) (*i.e.*, la suite $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$), avec :

1. $u_n = \operatorname{th} \dfrac{1}{n} + \ln \dfrac{n^2 - n}{n^2 + 1}$
2. $u_n = \dfrac{n^n}{n!\mathrm{e}^n}$
3. $u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$



Feuille d'exercice n° 18 : **Espaces vectoriels**

Exercice 1 ( ) Dire si les objets suivants sont des espaces vectoriels :

1. L'ensemble des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
2. L'ensemble des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$.
3. L'ensemble des fonctions sur $[a, b]$ continues, vérifiant $f(a) = 7f(b) + \displaystyle\int_a^b t^3 f(t)\,dt$.
4. L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant $f'' + \omega^2 f = 0$.
5. L'ensemble des primitives de la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.
6. L'ensemble des nombres complexes d'argument $\pi/4 + k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.
7. L'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$, vérifiant $\sin(x + y) = 0$.
8. L'ensemble des vecteurs (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $(-1, 3, -2)$.

Exercice 2 ( ) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On pose $F = E^2$. Pour tout couple $((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ d'éléments de F, on pose $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, et tout $(x, y) \in F$, on note $\lambda.(x, y) = (ax - by, bx + ay)$, où $a = \operatorname{Re}\lambda$ et $b = \operatorname{Im}\lambda$.

Montrer que $(F, +, .)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (appelé le complexifié du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E).

Exercice 3 ( )

1. Soient les vecteurs $v_1 = (1 - i, i)$, $v_2 = (2, -1 + i)$ et $v_3 = (i + 1, i)$ dans $\mathbb{C}^2$. v_1 est-il combinaison linéaire de v_2 et v_3 dans $\mathbb{C}$ considéré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel ? comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
2. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $x \mapsto \sin x$ est-elle combinaison linéaire des deux fonctions $x \mapsto \sin 2x$ et $x \mapsto \sin 3x$? Généraliser.

Exercice 4

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que $F \cup G = F + G \Leftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 5 ( ) Soient $F = \left\{ f \in \mathscr{C}([-1, 1], \mathbb{C}) \mid \displaystyle\int_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ et $G = \{f \in \mathscr{C}([-1, 1], \mathbb{C}) \mid f \text{ constante}\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{C}([-1, 1], \mathbb{C})$.

Exercice 6 ( ) Soit $F = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(0) + f(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 7 Soient F, G, F', G' des sous-espaces vectoriels de E tels que $F \cap G = F' \cap G'$. Montrer que $(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F$.

Exercice 8 Soient A et B deux parties d'un ev E. Comparer $\operatorname{Vect}(A \cap B)$ et $\operatorname{Vect} A \cap \operatorname{Vect} B$.

Exercice 9

Soient $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ deux sous-espaces affines **disjoints** d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On note V et W leurs directions respectives. Soient $a \in \mathscr{V}$ et $b \in \mathscr{W}$. On pose $U = V + W$, $\mathscr{V}' = a + U$ et $\mathscr{W}' = b + U$. Montrer que $\mathscr{V}'$ et $\mathscr{W}'$sont deux sous-espaces affines disjoints, de même direction et contenant respectivement $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$.

Exercice 10 (✎) Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x^2$
2. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 4x - 3$
3. $\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2}$
4. $\mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R} : f \mapsto f(3/4)$
5. $\mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R} : f \mapsto -\displaystyle\int_{1/2}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$
6. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sin(3x + 5y)$
7. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy$
8. $\mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R}) \to \mathscr{C}^1([0,1], \mathbb{R}) : f \mapsto \left\{x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \int_0^1 f(t)\, dt\right\}$

Exercice 11 (✎)

Calculer le noyau et l'image de l'application f :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x + 2y \\ -x - 4y + 2z \\ 2x + 5y - z \end{pmatrix} \end{array}.$$

Exercice 12 Donner des exemples d'applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

1. $\operatorname{Ker}(f)$ inclus strictement dans $\operatorname{Im}(f)$.
2. $\operatorname{Im}(f)$ inclus strictement dans $\operatorname{Ker}(f)$.
3. $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Im}(f)$.
4. $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires.

Exercice 13 (✎)

Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$ et $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$.
2. Montrer que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\} \iff \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$.
3. Montrer que $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f \iff \operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$.

Exercice 14 (✎🚲)

1. Pour des applications linéaires $f : E \to F$, $g : F \to G$, établir l'équivalence
$$g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} g.$$
2. Soit f un endomorphisme d'un e.v. E, vérifiant l'identité $f^2 + f - 2i_E = 0$.

(a) Montrer que $(f - i_E) \circ (f + 2i_E) = (f + 2i_E) \circ (f - i_E) = f^2 + f - 2i_E = 0$.

(b) En déduire que $\mathrm{Im}(f - i_E) \subset \mathrm{Ker}(f + 2i_E)$ et $\mathrm{Im}(f + 2i_E) \subset \mathrm{Ker}(f - i_E)$.

(c) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - i_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + 2i_E)$.

Exercice 15 ( ) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un $K-$espace vectoriel. On suppose :

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in K, f(x) = \lambda x.$$

Montrer :

$$\exists \lambda \in K, \forall x \in E, f(x) = \lambda x.$$

Exercice 16 ( ) Dans $\mathbb{R}^4$, comparer (*i.e.* dire s'ils sont égaux ou si l'un est inclus dans l'autre) les sous-espaces F et G suivants :

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{Vect}\{(1,0,1,1), (-1,-2,3,-1), (-5,-3,1,-5)\} \\ G &= \mathrm{Vect}\{(-1,-1,1,-1), (4,1,2,4)\} \end{aligned}$$

Exercice 17 ( ) Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Si oui, en donner une famille génératrice.

Exercice 18 ( ) Soient dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $\overrightarrow{v_1}(1,1,0)$, $\overrightarrow{v_2}(4,1,4)$ et $\overrightarrow{v_3}(2,-1,4)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ ne sont pas colinéaires. Faire de même avec $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_3}$, puis avec $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$.
2. La famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est-elle libre ?

Exercice 19 Pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$, on pose $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R} \quad f_k(x) = x^k$. Montrer que la famille $(f_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 20

Quelle est la nature de l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -5x + 2y \\ -12x + 5y \\ -4x + 2y - z \end{pmatrix} \end{array}$? Déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 21 Soient $p, q \in \mathscr{L}(E)$. Montrer qu'on a équivalence entre les deux assertions suivantes :

(i) $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.

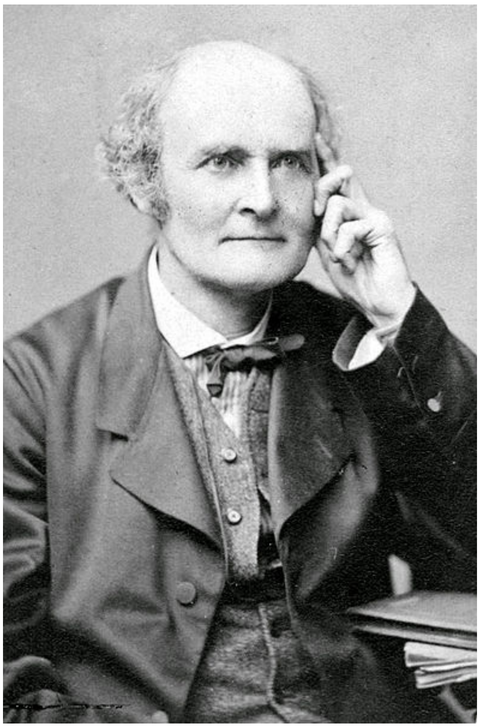
(ii) p et q sont deux projecteurs de même noyau.

Exercice 22 ( ) On pose $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$ et $G = \mathrm{Vect}(1,1,0)$. On admet que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une expression explicite de la projection de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G.

Exercice 23 Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev E.
Montrer que :

$$p - q \text{ est un projecteur si et seulement si } p \circ q = q \circ p = q.$$



Feuille d'exercice n° 19 : **Intégration**

Exercice 1 (✎) Montrer que la composée de deux fonctions uniformément continues est uniformément continue.

Exercice 2 (✎) Montrer que $x \mapsto \ln x$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 Montrer que $\sqrt{\cdot}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue telle que $f(n) \underset{\substack{n\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}}}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que $f(x) \underset{\substack{x\to+\infty \\ x\in\mathbb{R}}}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 5
Soient $f, g \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, g positive ou nulle. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que : $\displaystyle\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g$.

Exercice 6 Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $a \in]0,1[$ telle que $f(a) = a$.

Exercice 7 Soit f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall k \in \{0,...,n\}, \int_0^1 f(u)u^k\,\mathrm{d}u = 0.$$

Montrer que f admet au moins $n+1$ zéros distincts dans $]0,1[$.

Exercice 8
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. Montrer que

$$\left(\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\right) \Leftrightarrow [(f \text{ est positive}) \text{ ou } (f \text{ est négative})].$$

Exercice 9 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue strictement croissante telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f^n(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 10 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $(a < b)$, et f continue positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(t)\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{t\in[a,b]} f(t)$$

Exercice 11 (✎)

Démontrer que pour n non nul, $1 \leqslant \sqrt{1+x^n} \leqslant \sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ sur $\left[1;1+\frac{1}{n}\right]$. Étudier alors la convergence de la suite $u_n = \int_1^{1+1/n} \sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 12 Déterminer les limites suivantes sans pour autant calculer les intégrales correspondantes :
a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t}\,\mathrm{d}t$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{1/t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 13 Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_0^1 (\mathrm{e}^x + \frac{x^2}{2} - \ln(1+x))\,\mathrm{d}x$
2. $\int_0^1 x(x+2-\mathrm{e})\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$
3. $\int_0^1 \frac{x-2}{(2x-3)^2}\,\mathrm{d}x$
4. $\int_0^{\pi/4} \cos^4 x \sin^2 x\,\mathrm{d}x$
5. $\int_1^2 \frac{x^3}{(1+x^4)^2}\,\mathrm{d}x$
6. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$

Exercice 14 Quelques intégrales ou primitives à calculer :

1. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{e}^{\,\mathrm{Arcsin}x}\,\mathrm{d}x$
2. $\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$
3. $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$
4. $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}\sqrt{x+3}}$
5. $\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$
6. $\int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x$
7. $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$
8. $\int_1^x \sqrt{\frac{1-\sqrt{t}}{t}}\,\mathrm{d}t$
9. $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\,\mathrm{d}x$

Exercice 15 (✎) Déterminer les primitives suivantes :

1. $\int t\ln t\,\mathrm{d}t$
2. $\int t\arctan t\,\mathrm{d}t$
3. $\int (t^2-t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
4. $\int (t-1)\sin t\,\mathrm{d}t$
5. $\int (t+1)\mathrm{ch}t\,\mathrm{d}t$
6. $\int t\sin^3 t\,\mathrm{d}t$

Exercice 16 Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Après avoir majoré $\frac{x^n}{1+x^n}$ pour $x \in [0,1]$ par une fonction simple, montrer que la suite (I_n) converge vers 0.
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = 0$.
3. À l'aide d'une intégration par parties donner un équivalent de I_n.

Exercice 17 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Établir une relation liant I_n et I_{n+1}.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < I_n < \frac{\mathrm{e}}{n+1}$
4. Déterminer $\lim I_n$ puis un équivalent de I_n.

5. Soit (u_n) une suite réelle définie par $u_0 = a, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)u_n$.
On suppose que $a \neq I_0$, montrer, en étudiant $D_n = |u_n - I_n|$, que $|u_n| \to +\infty$.

Exercice 18 ( ) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Justifier que les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suivantes sont de classe $\mathscr{C}^1$ et exprimer leur dérivée :

a) $g(x) = \displaystyle\int_{2x}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$ b) $g(x) = \displaystyle\int_0^x x\,f(t)\,\mathrm{d}t$ c) $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t+x)\,\mathrm{d}t$

Exercice 19 On définit une fonction F de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{|\sin(tx)|}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier proprement la définition de F.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivée.
3. Nous étudions à présent le comportement asymptotique de F.
   a) Montrer que : $\forall x > 1,\ F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{\pi\lfloor x \rfloor}^{\pi x} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$.
   b) On rappelle que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$. En déduire que : $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\pi}\ln x$.

Exercice 20 ( ) Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^x\,\mathrm{d}t$ où $x \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que f est décroissante.
2. Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $(x+1)f(x+1) = xf(x-1)$.
3. Soit $\varphi(x) = xf(x)f(x-1)$. Montrer que φ est périodique de période 1.
4. Calculer $\varphi(x)$ pour $x \in \mathbb{N}^*$
5. En déduire : $\forall x, \varphi(x) = \dfrac{\pi}{2}$ et $f(x) \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 21 a et b sont des réels strictement positifs avec $a < b$. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que si $f(0) = 0$ alors $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = 0$.
2. Montrer que dans le cas général : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

Exercice 22 ( ) En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ entre 0 et 1, déterminer la limite de la suite
$u_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Exercice 23 ( ) Déterminer les primitives suivantes : 1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{it+1}$ 2) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\,t}\cos t\,\mathrm{d}t$ 3) $\displaystyle\int t\mathrm{e}^{\,t}\sin t\,\mathrm{d}t$.

Exercice 24 Soit $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, $a = \mathrm{Re}(\lambda)$ et $b = \mathrm{Im}(\lambda)$. Établir $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{t-\lambda} = \ln|t-\lambda| + i.\arctan\left(\frac{t-a}{b}\right) + C^{te}$.

Exercice 25 Calculer la limite en $+\infty$ de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{8k^3 + n^3}$$

Exercice 26 (✎) Calculer la limite en $+\infty$ de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$$

Exercice 27 Donner un équivalent simple en $+\infty$ de

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

Exercice 28 Calculer la limite en $+\infty$ de

$$\prod_{k=n+1}^{2n} k^{\frac{1}{k}}$$

Exercice 29 Calculer la limite en $+\infty$ de

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{p=1}^{n}(n+p)}$$

Exercice 30 Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n^\alpha} \text{ (avec } \alpha \in \mathbb{R}\text{).}$$

(C'est la suite $\left(\sum_{n=1}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$).

Feuille d'exercice n° 20 : **Dénombrement**

Exercice 1

Soit 1000 points du plan. Le but est de montrer l'existence d'une droite ne passant par aucun de ces points et qui les partage en deux groupes de 500 points. On considère un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans toute la suite, on note $\mathscr{D}_{m,p}$ la droite d'équation $y = mx + p$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note également $\mathscr{M}$ l'ensemble formé par les 1000 points.

1. (a) Montrer que l'ensemble des nombres réels m tels qu'il existe $p \in \mathbb{R}$ tel que l'ensemble $\mathscr{D}_{m,p} \cap \mathscr{M}$ contienne au moins deux points est un ensemble fini.
   (b) Quel est le plus petit cardinal possible pour l'ensemble précédent ? Quel est le plus grand cardinal possible ? Donner deux situations où ces cardinaux sont atteints.
   Indication : En utilisant le fait que pour tout polynôme non nul P à coefficients rationnels, on a $P(\mathrm{e}) \neq 0$, on pourra utiliser les points de la courbe $y = \mathrm{e}^x$.
2. Établir l'existence d'un nombre $m_0 \in \mathbb{R}$ tel que l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, $p \mapsto \mathrm{Card}(\mathscr{D}_{m_0,p} \cap \mathscr{M})$ prenne ses valeurs dans $\{0, 1\}$.
3. Conclure.

Exercice 2 (✎) On appellera "mot" toute suite finie de lettres, qu'elle ait un sens ou non. On rappelle que la lettre "y" est une voyelle. Combien de mots de 5 lettres peut-on former avec les 26 lettres de l'alphabet latin, dans lesquels toute consonne est suivie d'une voyelle et toute voyelle d'une consonne ?

Exercice 3 (🚲) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles finis. Démontrer la *formule du crible*, ou *formule de Poincaré* :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n \mathrm{Card}\, A_i - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} \mathrm{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) \\
&\quad + \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n} \mathrm{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) + \ldots \\
&\quad + (-1)^{n+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n \leqslant n} \mathrm{Card}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_n}) \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathrm{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})
\end{aligned}$$

Exercice 4 (✎) Soit E un ensemble fini et $\sigma \in S_E$. En considérant l'application $\varphi : \mathbb{Z} \to S_E$, $k \mapsto \sigma^k$, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^n = \mathrm{Id}$.

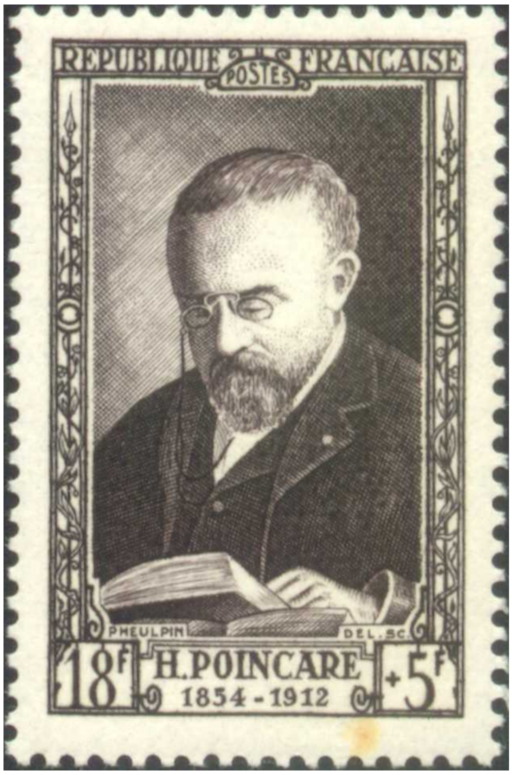
Exercice 5 Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Combien existe-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$?

Exercice 6 Combien existe-t-il de relation d'ordre total sur un ensemble E à n éléments ?

Exercice 7 On trace dans un plan n droites en position générale (i.e. deux d'entre elles ne sont jamais parallèles ni trois d'entre elles concourantes). Combien forme-t-on ainsi de triangles ?

Exercice 8 (✎) Soit E un ensemble à n éléments.

1. Soit X une partie à p éléments de E. Combien y a-t-il de parties Y de E disjointes de X ?
2. Combien y a-t-il de couples (X, Y) formés de parties disjointes de E ?



Feuille d'exercice n° 21 : **Espaces vectoriels de dimension finie**

Exercice 1 ( ) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les familles de vecteurs suivantes
$v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (0,1,2,-1)$, $v_3 = (1,0,-2,3)$, $v_4 = (2,1,0,-1)$, $v_5 = (4,3,2,1)$.
$v_1 = (1,2,3,4)$, $v_2 = (0,1,2,-1)$, $v_3 = (3,4,5,16)$.
$v_1 = (1,2,3,4)$, $v_2 = (0,1,2,-1)$, $v_3 = (2,1,0,11)$, $v_4 = (3,4,5,14)$.

Ces vecteurs forment-ils :

1. Une famille libre ? Si oui, la compléter pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$. Si non donner des relations de dépendance entre eux et extraire de cette famille au moins une famille libre.
2. Une famille génératrice ? Si oui, en extraire au moins une base de l'espace. Si non, donner la dimension du sous-espace qu'ils engendrent.

Exercice 2 ( )

1. Montrer que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K}\times\mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & (P(0), P') \end{array}$ est un isomorphisme.
2. En déduire que $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Exercice 3 ( ) Définir par leurs équations cartésiennes dans la base canonique les sous-espaces vectoriels :

1. F engendré par : $\{(3,1,2);(2,1,3)\}$ dans $\mathbb{R}^3$
2. G engendré par : $(1,2,3)$ dans $\mathbb{R}^3$
3. H engendré par $\{(1,2,3,0);(4,-1,2,0);(2,1,-3,0)\}$ dans $\mathbb{R}^4$

Exercice 4 ( ) Soit (P_n) une suite de polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ \deg P_n = n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. La famille (P_n) est-elle une base de $\mathbb{K}[X]$?

Exercice 5 ( )

Montrer que la famille $((X-a)^i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ avec a fixé, est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Donner les composantes de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Exercice 6 ( )

Dans $\mathbb{R}_3[X]$, soit P le polynôme $P = X^3 + 2X - 1$ et soit Q le polynôme $Q = 2X - 1$. Déterminer une base B de $\mathbb{R}_3[X]$ dont P et Q sont éléments.

Exercice 7 ( ) Soient $\mathbf{v}_1 = (1,0,0,-1), \mathbf{v}_2 = (2,1,0,1), \mathbf{v}_3 = (1,-1,1,-1), \mathbf{v}_4 = (7,2,0,-1)$ et $\mathbf{v}_5 = (-2,1,0,5)$. Donner une base du sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4,\mathbf{v}_5)$. Déterminer un supplémentaire G de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 8 ( ) Soient E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Soit f une application linéaire de E dans lui-même.

1. Montrer que, si $F \subset f(F)$ alors $f(F) = F$.
2. Montrer que, si f est injective et $f(F) \subset F$ alors $f(F) = F$.

Exercice 9 Soit E de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer l'équivalence des trois propriétés :

(i) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

(ii) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

(iii) $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Exercice 10 Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$ avec $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Ker}(g)$. Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice 11 () Soient E et F de dimensions finies et $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. Montrer que $\operatorname{rg}(u + v) \leqslant \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$.
2. En déduire que $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leqslant \operatorname{rg}(u + v)$.

Exercice 12 Soient $E_0, E_1, ..., E_n$ $n + 1$ espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$, de dimensions respectives $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$. On suppose qu'il existe n applications linéaires $f_0, f_1, ..., f_{n-1}$ telles que :

$$\forall k \in \{0, ..., n - 1\}, f_k \in \mathscr{L}(E_k, E_{k+1}).$$

et de plus :

— f_0 est injective ;

— $\forall j \in \{1, ..., n - 1\}, \operatorname{Im} f_{j-1} = \operatorname{Ker}(f_j)$;

— f_{n-1} est surjective.

Montrer que

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \alpha_j = 0.$$

Exercice 13 Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P) = P + P' + P''$.

1. Montrer que f est injective. En déduire que f est bijective.
2. On appelle φ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $\varphi(P) = P + P' + P''$. Montrer que φ est surjective puis bijective.

Exercice 14 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Montrer que

$$n \text{ est pair} \Leftrightarrow \exists f \in \mathcal{L}(E) \quad \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f$$

Exercice 15 Soient F et G deux sous-espaces de E de dimension finie. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme u tel que $\operatorname{Ker}(u) = F$ et $\operatorname{Im}(u) = G$.
Soit $F = \{x + y + z = 0\}$ dans $\mathbb{R}^3$ et $G = \{\lambda(2, -1, -1)/\lambda \in \mathbb{R}\}$. Construire un tel endomorphisme u.

Exercice 16 () Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer $\operatorname{rg}(f^n) = \operatorname{rg}(f^{n+1})$

Exercice 17 Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E, espace vectoriel de dimension n. Montrer que :

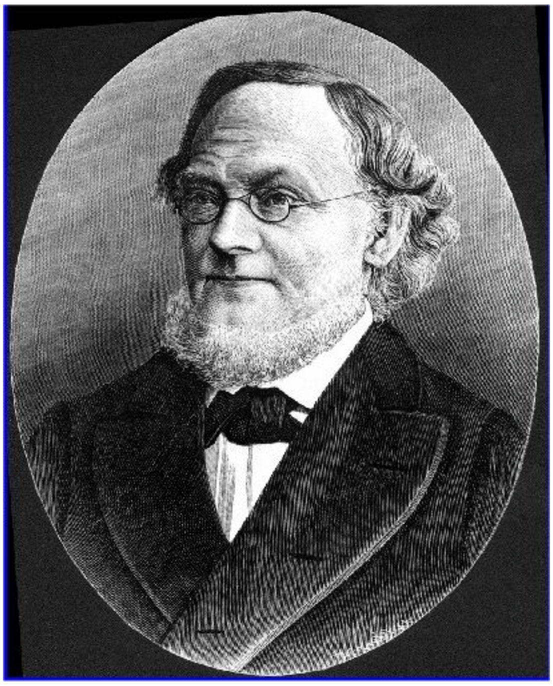
$$\dim(H_1 \cap H_2) \geqslant n - 2.$$

Généraliser.

Exercice 18 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et F un sous-espace vectoriel de E distinct de E. Montrer que F est l'intersection d'un nombre fini d'hyperplans. (*indication* : on pourra interpréter F comme noyau d'une certaine application linéaire.)

Exercice 19 (✎) Soient $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $H = \{P \in \mathbb{K}_n[X] |\ P(\alpha) = 0\}$. Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$ et en déterminer une base.

Exercice 20 (✎) Montrer que les formes linéaires $(x, y, z) \to x + 2y + 3z$ et $(x, y, z) \to x - 2y + 3z$ sont linéairement indépendantes.



Lycée La Martinière Monplaisir — Année 2015/2016
MPSI - Mathématiques — Second Semestre

Feuille d'exercice n° 22 : **Probabilités**

Exercice 1 On se donne $N \in \mathbb{N}^*$. Deux joueurs lancent tour à tour un dé. Le premier qui tire un six a gagné. On s'arrête au bout de N lancers.

1. Quelle est la probabilité de gagner pour chacun des joueurs ?
2. Quelle est la probabilité que personne ne gagne ?
3. Ces probabilités admettent-elles des limites quand N tend vers$+\infty$ et, le cas échéant, lesquelles ?

Exercice 2 On met une boule blanche dans une urne. On répète alors les opérations suivantes : on lance un dé.

— Si le résultat est différent de 6, on ajoute une boule rouge dans l'urne, puis on recommence.
— Si le résultat est 6, on tire une boule dans l'urne et on s'arrête.

1. Quelle est la probabilité de s'arrêter au bout de N lancers au plus ?
2. Quelle est la probabilité de s'arrêter au bout de N lancers au plus et qu'à la fin, on tire une boule blanche dans l'urne ?
3. Quelles sont les limites de ces probabilités quand N tend vers $+\infty$? Comment interpréter cela intuitivement (la justification sera donnée en spé).

Exercice 3 Au poker, on distribue à chaque joueur une main de 5 cartes prises dans un jeu de 52 cartes. Dans un jeu de 52 cartes, il y a quatre couleurs (pique, trèfle, carreau, cœur), 13 cartes dans chaque couleur, ordonnées du 2 au 10 puis valet, dame, roi, as. Une quinte flush est une main contenant 5 cartes consécutives de même couleur, avec la règle suivante : (As, 1, 2, 3, 4) et (10, Valet, Dame, Roi, As) sont toutes des quintes.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir une quinte flush (sans tricher) ?
2. Vous jouez au poker avec Pat Poker (tricheur célèbre dans les épisodes de Lucky Luke, probabilité qu'il triche $0,9$, probabilité qu'il réussisse son coup et sorte une quinte flush s'il triche : $0,9$). Il abat une quinte flush au premier coup. Quelle est la probabilité qu'il ait triché ?
3. Vous avez eu le malheur de répondre à la question précédente et de conclure à voix haute. Comme vous êtes moins bon tireur que Pat Poker, vous vous retrouvez au paradis devant Saint-Pierre. Pour passer le temps, vous commencez à jouer au poker avec lui.

   Probabilité que Saint-Pierre soit tenté de tricher : 10^{-5}. Probabilité de réussir son coup et de sortir une quinte flush s'il triche : $0,5$. Il abat une quinte flush au premier coup. Quelle est la probabilité qu'il ait triché ?

4. Vous l'accusez, il nie trois fois. Le jour se lève et un coq se met à chanter. (Au paradis, après les nuits où Saint-Pierre a menti trois fois, le coq chante avec une probabilité $0,9$; après les autres, avec une probabilité un demi)

   Muni de cette information supplémentaire, calculer la probabilité que Saint-Pierre ait triché.

Exercice 4 (🚲) On étudie la descendance d'une fleur. Cette fleur a deux descendantes avec la probabilité $p \in]0;1[$, ou aucune avec la probabilité $q = 1 - p$. Les descendantes de la première fleur ont des descendantes de façons mutuellement indépendantes et dans les mêmes conditions que la première fleur. Pour tout entier naturel n, on note u_n la probabilité qu'il n'y ait plus de descendance à la génération $n + 1$.

1. Calculer u_0 .
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = pu_n^2 + 1 - p$.
3. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Quelle est sa limite ? Conclure ?

Exercice 5 En 1761, Thomas Bayes, théologien protestant, quitte pour toujours cette vallée de larmes. Il arrive aux portes du Paradis et, comme il n'y a plus beaucoup de places et que Bayes a parfois eu des opinions assez peu orthodoxes en manière de théologie, Saint Pierre lui propose le test suivant. Bayes est placé devant trois portes identiques, dont deux mènent à l'enfer et une au paradis, et il est sommé de choisir. N'ayant aucune information a priori, Bayes choisit une des portes au hasard.

1. Avant qu'il ait le temps de l'ouvrir, Saint Pierre — qui est bon — lui dit : « Attends, je te donne encore un renseignement... » ; et il lui ouvre une des deux autres portes (menant bien entendu à l'enfer). Que doit faire Bayes ? Garder sa porte, ou changer d'avis et prendre l'autre porte non ouverte ?
2. Reprendre l'exercice dans le cas où Saint Pierre a passé la soirée précédente à faire la fête, il ne sait plus du tout où mènent les portes, en ouvre une au hasard et se rend compte qu'elle mêne à l'enfer.
3. En fait, en arrivant devant Saint Pierre, Bayes remarque qu'il a un pied de bouc : Saint Pierre a tellement fait la fête qu'il n'est plus en mesure de s'occuper des entrées et Satan en a profité pour le remplacer (en se déguisant). Vous imaginez assez vite ce que fait Satan : lorsqu'un candidat a choisi une porte, il le laisse prendre la porte choisie si elle conduit vers l'enfer ou bien de lui montrer une porte conduisant vers l'enfer et de lui proposer de changer s'il a choisi la porte menant vers le paradis. Bayes choisit une porte, Satan lui propose de changer. Que faire ?
4. En fait, Satan est bien plus pervers que cela : si le candidat choisit une porte conduisant vers l'enfer, il lui propose quand même de changer avec la probabilité p_1 et si le candidat choisit la porte conduisant vers le paradis, il lui propose de changer avec la probabilité p_2. Bayes choisit une porte, Satan lui propose de changer. Que faire ?

Exercice 6 (🚲) Dans une classe, les élèves décident de s'offrir des cadeaux à Noël. Pour cela, on met dans un chapeau les noms des n élèves de la classe, chacun des n élèves tire à son tour un nom et doit faire un cadeau à celui dont il a tiré le nom.

La question est la probabilité que quelqu'un tire son propre nom (ce qui est problématique). Calculer cette probabilité à 10^{-15} près sans calculatrice.

Indications :

1. Remarquer que le processus mis en place consiste à tirer au hasard une permutation de l'ensemble des élèves (qu'on pourra identifier à $[\![1,n]\!]$) et que toutes les permutations sont tirées de façon équiprobable.
2. On note S_n l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$. On note B le sous-ensemble de S_n constitué des permutations σ qui conviennent, c'est-à-dire telle que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(k) \neq k$. Pour $k \in S_n$, on note A_k l'ensemble des permutations σ fixant k :
$$A_k = \{ \sigma \in S_n \mid \sigma(k) = k \}$$
Exprimer B à partir des A_k pour $k \in [\![1,n]\!]$.
3. En utilisant la formule de Poincaré, exprimer la probabilité cherchée.
4. La calculer en utilisant le fait qu'il y a une quarantaine d'élèves dans la classe et que $\frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0.367\,879\,441\,171\,442\,322$.

Exercice 7 (✎) On considère un ivrogne marchant le long d'un trottoir. À chaque seconde, il avance avec probabilité un demi d'un pas, et recule d'un pas avec la même probabilité. On supposera que tous les pas sont de la même longueur. On se donne un repère le long du trottoir, gradué en pas.
On note X_n la position de l'ivrogne au bout de n secondes.
Donner la loi de X_n , son espérance et sa variance.

Exercice 8 (🚲) On dispose de N urnes avec, dans chacune d'elles, des jetons numérotés de 1 à n. On tire, au hasard, un jeton dans chaque urne, et on note X le numéro du plus grand jeton tiré.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que : $\mathbb{E}(X) = n - \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^N$
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}(X)}{n}$. En déduire un équivalent de $\mathbb{E}(X)$ quand $n \to \infty$.
4. Calculer $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}(X)$. Commenter.

Exercice 9 (⛰) Soit N un entier naturel non nul. On dispose d'un sac contenant N jetons numérotés de 1 à N dans lequel on peut effectuer une succession de tirages avec remise en notant, à chaque fois, le numéro obtenu.

Pour tout entier naturel n non nul, on note T_n le nombre de numéros distincts obtenus au cours des n premiers tirages. Soit n un entier naturel non nul.

1. (a) Quelles sont les valeurs prises par T_n ?
   (b) Calculer les probabilités $P(T_n = 1), P(T_n = n)$ et $P(T_n = 2)$.

2. Soit (k, n) un couple d'entiers naturels non nuls tels que $1 \leq k \leq N$. Déterminer une relation entre $P(T_{n+1} = k), P(T_n = k)$ et $P(T_n = k-1)$.
3. Pour tout entier naturel n non nul, on considère le polynôme $Q_n(X)$ défini par :

$$Q_n(X) = \sum_{k=1}^{N} P(T_n = k) X^k$$

   (a) Montrer, pour tout entier naturel n non nul : $Q_{n+1}(X) = \dfrac{1}{N}(X - X^2)Q_n'(X) + XQ_n(X)$

   (b) Pour tout entier naturel n non nul, en reliant $E(T_n)$ à $Q_n(X)$, exprimer $E(T_{n+1})$ en fonction de $E(T_n)$, N et n. Déterminer ensuite $E(T_n)$ en fonction de N et n.

   (c) Calculer $\lim_{N\to\infty} \dfrac{E(T_N)}{N}$

Exercice 10 (✎) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit au hasard un nombre X dans $[\![1, n]\!]$. On choisit ensuite un nombre Y au hasard dans $[\![1, X]\!]$.

1. Déterminer la loi conjointe de X et Y.
2. En déduire la loi (marginale) de Y.

Exercice 11 (✎) On réalise un portefeuille d'actions avec deux valeurs. La première permet de réaliser un gain qui est une variable aléatoire X_1 de moyenne m_1 et d'écart type σ_1 et la deuxième (indépendante de la première) est associée à une variable aléatoire X_2 de moyenne m_2 et d'écart type σ_2 . On suppose que X_1 est plus performante en moyenne que X_2 mais qu'elle est moins stable que X_2 (c'est à dire que $\sigma_1 > \sigma_2$).

1. On investit x euros sur la première valeur et $(1-x)$ euros sur la deuxième (où x est un réel vérifiant $0 < x < 1$). Déterminer la valeur de x qui minimise $V(xX_1 + (1-x)X_2)$.
2. Quelle est pour la valeur de x trouvée à la question précédente l'espérance de l'investissement réalisé ?

Exercice 12 On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi, à valeurs dans $\{-1, 1\}$.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $p = P(X_n = 1)$ avec $p \in]0; 1[$.
On définit, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$

1. Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'espérance et la variance de Y_n.
2. (a) Déterminer la loi de Y_2 et de Y_3.

   (b) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $p_n = P(Y_n = 1)$.
   Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
   En déduire une expression de p_n en fonction de p et de n.
3. Existe-t-il un réel p pour lequel Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes ?

4. Calculer, pour n et m de $\mathbb{N}^*$, la covariance de Y_n et Y_{n+m}

Feuille d'exercice n° 23 : **Matrices**

Exercice 1
On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si tous les coefficients de A sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chaque ligne de A est égale à 1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

Exercice 2 Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), MH = HM.$$

Exercice 3

1. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \quad AXB = 0$$

   Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

2. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à coefficients diagonaux dominants, c'est-à-dire telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

   Montrer que A est inversible.

3. Déterminer les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ telles que $M^2 = 0$.

Exercice 4
Soit $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Déterminer $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 5 Soit h l'homomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ défini par rapport à deux bases (e_1, e_2, e_3) et (f_1, f_2) par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. On prend dans $\mathbb{R}^3$ la nouvelle base :

$$e'_1 = e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_3 + e_1, \quad e'_3 = e_1 + e_2.$$

   Quelle est la nouvelle matrice A_1 de h ?

2. On choisit pour base de $\mathbb{R}^2$ les vecteurs :

$$f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2)$$

   en conservant la base (e'_1, e'_2, e'_3) de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la nouvelle matrice A_2 de h ?

Exercice 6 (✎🚲) Soit φ une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même telle que $\varphi \neq 0$ et $\varphi^2 = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(x) \neq 0$. Montrer que $\{x, \varphi(x)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice de φ dans cette base.

Exercice 7 (✎) Soit A une matrice carrée d'ordre 2, et soit φ l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui même, envoyant M sur AM. Montrer que φ est linéaire et déterminer sa matrice sur la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 8 (✎🚲) Soit E un espace vectoriel de dimension finie, notée n.

1. Soit φ un projecteur de E, peut-on trouver une base dans laquelle la matrice de φ est particulièrement simple ?
2. Même question pour une symétrie.

Exercice 9 (✎)

On pose : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\varphi(P) = (X^2+2)P'' + (X+1)P' + P$.

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi - 5\mathrm{Id})$. Calculer $\varphi(1)$ et $\varphi(X+1)$.
4. En déduire une base de $\mathbb{R}^2[X]$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale.

Exercice 10 (✎)

1. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$
Donner une base de $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$.
2. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$
Déterminer le rang de f, ainsi qu'une base de son noyau et de son image. Donner une équation de l'image.

Exercice 11 (✎🚲) Soit $M = \begin{pmatrix} -35 & -7 & -22 \\ -6 & 0 & -4 \\ 57 & 11 & 36 \end{pmatrix}$.

1. En interprétant M comme étant la matrice d'un endomorphisme d'un espace vectoriel E, montrer qu'il existe une base (I, J, K) telle que cet endomorphisme a dans cette base pour matrice une matrice diagonale avec 1 , 2 , -2 sur la diagonale.
2. Calculer alors M^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
3. Exprimer en fonction de n les termes u_n , v_n , w_n où u_n , v_n , w_n sont les termes généraux de 3 suites vérifiant :
$$\left\{ \begin{array}{lllllll} u_{n+1} & = & -35u_n & - & 7v_n & - & 22w_n \\ v_{n+1} & = & -6u_n & & & - & 4w_n \\ w_{n+1} & = & 57u_n & + & 11v_n & + & 36w_n \end{array} \right. \qquad \text{avec } u_0 = v_0 = w_0 = 1$$

Exercice 12 Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Un endomorphisme φ de E est représenté canoniquement par la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & c \\ 1 & -2 & d \\ a & b & f \end{pmatrix}$. Déterminer les réels a, b, c, d, f de façon que l'endomorphisme φ vérifie les conditions suivantes :

1. $\operatorname{Ker}\varphi$ est engendré par le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + 3\overrightarrow{e_3}$;
2. $\operatorname{Im}\varphi$ est engendré par les deux vecteurs $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_2} - 3\overrightarrow{e_3}$ et $\overrightarrow{w} = 3\overrightarrow{e_1} - 5\overrightarrow{e_3}$.

Exercice 13 (✎) Calculer le rang des matrices suivantes.

$$\diamondsuit = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \heartsuit = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \spadesuit = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \clubsuit = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 14 (✎) Calculer, s'il existe, l'inverse de chacune des matrices suivantes.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 13 & 2 & 1 & 9 \\ 7 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_n \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ a_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 & \bar{z} & \bar{z}^2 \\ z & 1 & \bar{z} \\ z & z^2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 15 (✎)

Montrer que la famille $(X^3 + 2X + 1, X^3 - 2X^2 + 2, X^3 - 2X^2 + 1, X^3 + X)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ au moyen d'une technique matricielle.

Exercice 16 (✎) Soient a et b deux réels, et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\operatorname{rg}(A) \geqslant 2$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\operatorname{rg}(A) = 2$?

Exercice 17 Calculer les rangs des matrices suivantes et calculer leurs inverses quand il y a lieu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ \lambda & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ -4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Exercice 18 Déterminer l'inverse des matrices suivantes (si cet inverse existe) :

$$\diamondsuit = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \heartsuit = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \spadesuit = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & . & . & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & . & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & a \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \clubsuit = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & . & . & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & . & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 19 Discuter, selon m paramètre réel, la dimension des ensembles des solutions des systèmes suivants : $\left\{\begin{array}{lcl} x+my+z & = & 0 \\ mx+y+mz & = & 0 \end{array}\right.$; $\left\{\begin{array}{lcl} x+y+mz & = & 0 \\ x+my+z & = & 0 \\ mx+y+z & = & 0. \end{array}\right.$

Exercice 20 (🚲) Soient (x_n), (y_n) et (z_n) trois suites définies par récurrence par :

$$\begin{cases} x_{n+1} & = \frac{1}{2}(-x_n - 3y_n + 6z_n) \\ \\ y_{n+1} & = \frac{1}{2}(3x_n + 5y_n - 6z_n) \\ \\ z_{n+1} & = \frac{1}{2}(3x_n + 3y_n - 4z_n) \end{cases}$$

1. Montrer que le système s'écrit $X_{n+1} = AX_n$ où $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ et A est une matrice à déterminer.
2. On note φ l'endomorphisme canoniquement associé à A. Déterminer les droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par φ. En déduire une base relativement à laquelle la matrice de φ est diagonale.
3. Déterminer les suites solutions du système.

Feuille d'exercice n° 24 : **Déterminants**

Exercice 1 (✎) On pose $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Écrire $\sigma\theta$ et σ^{-1} sous forme de produits de cycles de supports disjoints.

Exercice 2 (✎) Soit $s \in \mathcal{S}_{10}$, $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 6 & 4 & 2 & 1 & 7 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.
Décomposer s en produit de cycles à supports 2 à 2 disjoints, en produit de transpositions.
Donner la signature de s

Exercice 3 (✎) Écrire la permutation $(1,2)(2,4,6,5)(1,3,7)(2,5,4)(3,5,6,1)(2,5)(1,4,6)$ sous forme d'un produit de cycles de supports disjoints.

Exercice 4 (✎) Calculer la signature des permutations suivantes : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 6 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$, $(1,3,4)(2,4,3,1)(2,3)$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Exercice 5

1. Montrer que les transpositions $(1 \quad i)$ (pour $i \in [\![2, n]\!]$) engendrent le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.
2. Montrer que les transpositions $(i \quad i+1)$ (pour $i \in [\![1, n-1]\!]$) engendrent le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.
3. Montrer que les cycles de longueur 3 engendrent $\mathfrak{A}_n$.
4. Montrer que les cycles de la forme $(1\ i\ j)$ avec $i, j \in [\![2, n]\!]$, $i \neq j$, engendrent $\mathfrak{A}_n$.
5. Montrer que les cycles de la forme $(1\ 2\ j)$ avec $j \in [\![3, n]\!]$, engendrent $\mathfrak{A}_n$.

Exercice 6 (✎) Dans chacun des cas ci-dessous, dire si l'application φ de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, est multilinéaire.

1. $\varphi\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{smallmatrix}\right)\right) = x_1 + y_2 + z_3$
2. $\varphi\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{smallmatrix}\right)\right) = x_1y_3 + y_2z_1 + z_3x_2$
3. $\varphi\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{smallmatrix}\right)\right) = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2$
4. $\varphi\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{smallmatrix}\right)\right) = x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 + z_1z_2z_3$
5. $\varphi\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{smallmatrix}\right)\right) = x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_3$
6. $\varphi\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{smallmatrix}\right)\right) = (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)(z_1 + z_3)$
7. $\varphi\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{smallmatrix}\right)\right) = (x_1 + 2x_2)(z_1 + z_3)$

Exercice 7 (✎) Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ anti-symétrique. Calculer $\det(A)$. Ce résultat vaut-il encore pour $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 8 — Déterminant circulant —
Soit $(a,b,c)\in(\mathbb{K})^3$. On note $j=\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$, et on considère les deux matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix} \qquad \text{et } V=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & j & j^2\\ 1 & j^2 & j\end{pmatrix}$$

Calculer le produit AV, puis $\det(V)$ et $\det(AV)$, et en déduire $\det(A)$.

Exercice 9 Pour quelles valeurs de k la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & 1 & k\end{pmatrix}$ est-elle inversible ? *Idem* avec $B=\begin{pmatrix} 1 & k & 0\\ 2 & -1 & k\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Exercice 10 Calculer les déterminants : $\alpha=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{vmatrix}$, $\beta=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{vmatrix}$, $\gamma=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 4\\ 0 & 6 & 4 & 8\\ 0 & 3 & 4 & 1\\ 0 & 6 & 8 & 0\end{vmatrix}$.

Exercice 11 Montrer que : $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 9 & 16\end{vmatrix}$ est divisible par $(x-1)^3$.

Exercice 12 On note a, b, c [...] des réels. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & x & y & z\\ b & x & y & z\\ c & x' & y' & z'\\ d & x' & y' & z'\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1+a & b & a & b\\ b & 1+a & b & a\\ a & b & 1+a & b\\ b & a & b & 1+a\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a & a & a^2 & b+c+d\\ a & b & b^2 & c+d+a\\ a & c & c^2 & d+a+b\\ a & d & d^2 & a+b+c\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0\\ a & 0 & a & 0 & 3\\ b & a & 0 & a & 0\\ 0 & b & 0 & 0 & a\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a+b+c & b & b & b\\ c & a+b+c & b & b\\ c & c & a+b+c & b\\ c & c & c & a+b+c\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} p & 1 & & 0\\ 1 & p & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & & 1 & p\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1\\ -1 & 0 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 1\\ -1 & \dots & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Exercice 13 Calculer les déterminants suivants, d'ordre $n\in\mathbb{N}^*$:

$$A_n=\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & & 0\\ x & 1+x^2 & x & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & x & 1+x^2 & x\\ 0 & & & x & 1+x^2\end{vmatrix}$$

$$B_n=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1 & \dots & \dots & a_1\\ a_2 & a_2+b_2 & a_2 & \dots & a_2\\ a_3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots\\ a_n & \dots & \dots & a_n & a_n+b_n\end{vmatrix}$$

Exercice 14 Soit $a_1, \dots, a_n$ sont n réels. Calculer les déterminants :

$$S_n = \begin{vmatrix} \sin(a_1+a_1) & \sin(a_1+a_2) & \dots & \sin(a_1+a_n) \\ \sin(a_2+a_1) & & & \vdots \\ \vdots & & & \sin(a_{n-1}+a_n) \\ \sin(a_n+a_1) & \sin(a_n+a_2) & \dots & \sin(a_n+a_n) \end{vmatrix}$$

$$C_n = \begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \cos a_1 & \dots & \dots & \cos a_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \cos((n-1)a_1) & \dots & \dots & \cos((n-1)a_n) \end{vmatrix}$$

Exercice 15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$. On définit la matrice A_p de $\mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ par :

$$A_{n,p} = \begin{pmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{p} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} & \dots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & \binom{n+p}{1} & \binom{n+p}{2} & \dots & \binom{n+p}{p} \end{pmatrix}$$

Calculer $\det A_{n,p}$.

Exercice 16 (✎🚲)

1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (notée $\mathscr{C}$) est $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
   a) On appelle valeur propre de f tout scalaire λ pour lequel $f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas injective. Déterminer toutes les valeurs propres de f en calculant un déterminant. On notera λ_1, λ_2 et λ_3 ces valeurs propres, avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
   b) Si λ est une valeur propre de f, on appelle sous-espace propre de f associé à λ le noyau de $f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Déterminer les trois sous-espaces propres de f. On appellera E_i le sous-espace propre associé à λ_i, et on le notera $E_i = \mathrm{Vect}(v_i)$, pour un vecteur v_i à déterminer.
   c) Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$. De quelle forme est-elle ?

Feuille d'exercice n° 25 : **Espaces euclidiens**

Exercice 1 ( ) Sur $\mathbb{R}_3[X]$ on considère les formes bilinéaires suivantes. Dire lesquelles sont des produits scalaires.

1. $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$
2. $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(P'(t)Q(t) + P(t)Q'(t)\right)\mathrm{d}t$
3. $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t + P(0)Q(0).$

Exercice 2 ( ) À deux polynômes $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on associe

$$< P, Q >= (a_0 + a_1)b_0 + (a_0 + 3a_1)b_1 + 3a_2b_2$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Exercice 3 ( ) Soient $(E,(,))$ un espace euclidien et $\|.\|$ la norme associée ; $n \in \mathbb{N}^*$, et $v_1, \dots, v_n \in E$. Montrer l'inégalité : $\displaystyle\left\|\sum_{i=1}^{n} v_i\right\|^2 \leqslant n\sum_{i=1}^{n}\|v_i\|^2$.

Exercice 4 ( ) Soit $a < b$ deux réels.

1. Soient f et g deux applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :
   $\forall (f,g) \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}),\ \displaystyle\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t$. Étudier le cas d'égalité.
2. Soit f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :
   $\forall f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}),\ \displaystyle\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t$. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 5 ( )

1. Montrer que sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'application :
   $$(A,B) \to \mathrm{tr}\,({}^tAB)$$
   est un produit scalaire.

2. Soit N la norme associée (on l'appelle *norme de Frobenius*), montrer que :

$$\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

3. Montrer que :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), |\mathrm{tr}\,(A)| \leqslant \sqrt{n}N(A).$$

Exercice 6 Soit E un espace euclidien, et $(e_1, ..., e_n)$ des vecteurs unitaires vérifiant : $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$.

1. Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une famille orthogonale.
2. Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale.

(NB : on ne suppose pas que la dimension de l'espace est n.)

Exercice 7 (✎) Soit $(E, (.|.))$ un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que :

1. $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$; 2. $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$; 3. $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 8 (🚲)

On munit $\mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$ du prod. scal. $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Soit $F = \{f \in \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. Déterminer $F^\perp$. (indication : Si $f \in F^\perp$, on pourra s'intéresser à la fonction $t \mapsto tf(t)$). Conclusion ?

Exercice 9 (✎) On sait que l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}\,({}^tAB)$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire. Calculer l'orthogonal de l'ensemble des matrices diagonales puis celui des matrices symétriques.

Exercice 10 (✎) $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Vérifier que les vecteurs $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (1, 0, 2)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt.

Exercice 11 (🚲) On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire : $(P, Q) \to \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. Existe t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}[X], (P|A) = P(0)$?

Exercice 12 Soit $(E, (.|.))$ un espace euclidien et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est orthogonal (c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}(p)$) si et seulement si : $\forall x \in E : \|p(x)\| \leqslant \|x\|$. (indication : pour le sens $\Leftarrow$, considérer $k \in \mathrm{Ker}\,p$ et $i \in \mathrm{Im}\,p$, et le vecteur $i + \lambda k$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, et montrer que i et k sont orthogonaux).

Exercice 13 Soit $(E, (.|.))$ un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2. Soient x et $y \in E$. Montrer que :

1. Si $\|x\| = \|y\|$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y = s(x)$ où s est la symétrie orthogonale par rapport à H.
2. Si $(x|y) = \|y\|^2$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y = p(x)$ où p est la projection orthogonale sur H.
3. Les hyperplans trouvés précédemment sont-ils uniques ?

Exercice 14 Déterminer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^1 (\mathrm{e}^{\,x} - (ax+b))^2 dx$.

Exercice 15 ( ) $E = \mathbb{R}_n[X]$. A tout couple (P, Q) de E on associe $: < P, Q >= \displaystyle\int_0^\pi P(\cos t)Q(\cos t)dt$. Montrer que ceci définit un produit scalaire sur E. On appelle $k^{\text{ème}}$ polynôme de Tschebychev le polynôme défini par : $P_k(\cos\theta) = \cos(k\theta)$. Montrer que les polynômes de Tchebychev $P_0, \ldots, P_n$ constituent une base orthogonale de E.

Bonus : si cela n'est pas clair, montrez l'existence et l'unicité de ces polynômes, déterminer le degré et le coefficient dominant de chacun.

Exercice 16 Soit E un espace euclidien, f et g deux endomorphismes de E qui commutent. On suppose que les matrices de f et de g dans une BON sont respectivement symétriques et antisymétriques. Montrer que $\forall u \in E,\ (f(u)|g(u)) = 0$, puis que $\forall u \in E,\ \|(f-g)(u)\| = \|(f+g)(u)\|$.

Exercice 17 ( ) Soit E un espace euclidien de dimension 3, (i, j, k) une base orthonormale de E. Déterminer la matrice dans la base (i, j, k) de :

1. la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation : $x - 2y + 3z = 0$.
2. la projection orthogonale sur ce plan.
3. la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par le vecteur : $i - 4k$.
4. la projection orthogonale sur cette droite.

Exercice 18 Soit E un espace euclidien de dimension n, et $\mathcal{B} = (e_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une base orthonormale de E. Soit $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ un vecteur unitaire de E.

1. Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur la droite D engendrée par u.
2. En déduire les matrices de la projection orthogonale sur $D^\perp$, de la symétrie orthogonale par rapport à D et de la symétrie orthogonale par rapport à $D^\perp$.

Exercice 19 Soit f un automorphisme orthogonal d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id})^\perp$.
2. En déduire que si $(f - \mathrm{Id})^2 = 0$, alors $f = \mathrm{Id}$.

Exercice 20 (✎) Déterminer la nature et déterminer les éléments caractéristiques des transformations de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base canonique sont les suivantes :

$$A = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -7 & 24 \\ 24 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 21 (✎)

Caractériser les endomorphismes f et g dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Exercice 22 Soient E un espace euclidien orienté de dimension 2, r une rotation de E et s une réflexion de E. Calculer $r \circ s \circ r$ et $s \circ r \circ s$.

Feuille d'exercice n° 26 : **Séries numériques**

Exercice 1 On considère deux séries (u_n) et (v_n) à termes positifs.

1. Démontrer que si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors la série de terme général $\sqrt{u_n v_n}$ converge aussi.
2. On suppose maintenant que $v_n = \dfrac{1}{1+n^2 u_n}$.
   (a) Exprimer $\sqrt{u_n v_n}$ en fonction de v_n et de n.
   (b) En déduire que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ ne peuvent pas converger toutes les deux.

Exercice 2 (🚲) Comment choisir deux réels a et b tels que $\sum u_n$ converge, avec $u_n = \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$? Dans le cas de convergence, donner la valeur de la somme.

Exercice 3 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle décroissante de limite nulle.
On suppose que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $v_n = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\right) - nu_n$ est bornée. On veut montrer que la série $\sum u_n$ converge.

1. Montrer que (v_n) est croissante, puis convergente. On note ℓ sa limite.
2. Exprimer $u_n - u_{n+1}$ en fonction de v_n et v_{n+1}.
3. En sommant l'égalité précédente de n à $+\infty$, montrer que $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}(\ell - v_n)$.
4. En déduire que $nu_n \to 0$, et enfin que la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 4 (🚲) On étudie la suite (u_n) définie par : $u_0 \in]0, \pi/2[$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que (u_n) est une suite à termes positifs, et qu'elle est convergente.
2. Déterminer la limite de (u_n).
3. (a) Donner un DL à l'ordre 3 de u_{n+1} en fonction de u_n, quand n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent de u_n^3 en fonction de $(u_{n+1} - u_n)$.
   (b) Déterminer la nature de la série de terme général u_n^3.
4. Déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
5. (a) Donner un équivalent de $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ en fonction de u_n, quand n tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire la nature des séries de termes généraux u_n^2 et u_n.

Exercice 5 (✎) Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} 2n}$
2. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$
3. $u_n = \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
4. $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
5. $u_n = \frac{1}{n\cos^2 n}$
6. $u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

Exercice 6 (✎) Déterminer la nature des séries de terme général, avec $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\dfrac{2^n n}{n!}$
2. $\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\ln n}$
3. $\left(\dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}\right)^n$
4. $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln^2 k$

Indication pour 4 : grâce à un encadrement, trouver un équivalent de u_n.

Exercice 7 Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \begin{cases} 1/n \text{ si } n \text{ est un carré} \\ 1\big/n^2 \text{ sinon} \end{cases}$.

Exercice 8 Existence et calcul de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$$

Exercice 9 Existence et calcul de

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 10 Sachant $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$, calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!}$$

Exercice 11 Convergence puis calcul de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$$

Exercice 12 (🚲) — Transformation d'Abel —
Soient (a_n) une suite positive décroissante de limite nulle et (S_n) une suite bornée.
a) Montrer que la série $\sum (a_n - a_{n+1})S_n$ est convergente.
b) En déduire que la série $\sum a_n(S_n - S_{n-1})$ est convergente.
c) Etablir que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, la série $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ est convergente.

Exercice 13 Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{(\ln 2)^2 + \cdots + (\ln n)^2}$$

Exercice 14 (⛰) Pour $\alpha > 1$, on pose

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \text{ et } R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Étudier, selon α, la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{R_n}{S_n}$.

Exercice 15 (🚲) Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, telle que $f(0) = 0$ et $|f'(0)| < 1$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $|u_0| < \alpha$, la série de terme général u_n converge absolument.