



## C6 : Analyse fréquentielle des systèmes asservis

### C6-2 : Analyse fréquentielle des systèmes asservis : modèles élémentaires

Émilien DURIF

Lycée La Martinière Monplaisir Lyon  
Classe de MPSI  
6 Avril 2021



# Plan

## 1 Lieux de transfert : diagrammes de Bode

- Définition

## 2 Construction des diagrammes de Bode

- Gain pur
- Intégrateur
- Premier ordre
- Second ordre



# Plan

## 1 Lieux de transfert : diagrammes de Bode

- Définition

## 2 Construction des diagrammes de Bode

- Gain pur
- Intégrateur
- Premier ordre
- Second ordre



## Lieux de transfert : diagrammes de Bode

### Diagramme de Bode

- Il représente  $s(t) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi)$  (en régime permanent) en fonction de la pulsation  $\omega$  pour une fonction de transfert  $H(p)$ . Ce diagramme est composé :
  - d'un diagramme de gain représentant le gain en décibel ( $G_{db}$ ) en fonction de la pulsation  $\omega$

$$G_{db} = 20 \log(G) = 20 \log(|H(j\omega)|); \quad (1)$$

- d'un diagramme de phase représentant la phase en degré ( $\varphi$  en  $^{\circ}$ ) en fonction de la pulsation  $\omega$

$$\varphi = \arg(H(j\omega)). \quad (2)$$

- Pour ces deux diagrammes, les abscisses (concernant  $\omega$ ) sont représentées en échelle logarithmique.

### Remarque

Il suffit d'étudier le module et l'argument de l'expression  $H(j\omega)$  qui est obtenu en remplaçant  $p$  par  $j\omega$  dans  $H(p)$



## Lieux de transfert : diagrammes de Bode

### Diagramme de Bode

- Il représente  $s(t) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi)$  (en régime permanent) en fonction de la pulsation  $\omega$  pour une fonction de transfert  $H(p)$ . Ce diagramme est composé :
  - d'un diagramme de gain représentant le gain en décibel ( $G_{db}$ ) en fonction de la pulsation  $\omega$

$$G_{db} = 20 \log(G) = 20 \log(|H(j\omega)|); \quad (1)$$

- d'un diagramme de phase représentant la phase en degré ( $\varphi$  en  $^{\circ}$ ) en fonction de la pulsation  $\omega$

$$\varphi = \arg(H(j\omega)). \quad (2)$$

- Pour ces deux diagrammes, les abscisses (concernant  $\omega$ ) sont représentées en échelle logarithmique.

### Remarque

Il suffit d'étudier le module et l'argument de l'expression  $H(j\omega)$  qui est obtenu en remplaçant  $p$  par  $j\omega$  dans  $H(p)$



## Lieux de transfert : diagrammes de Bode

### Diagramme de Bode

- Il représente  $s(t) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi)$  (en régime permanent) en fonction de la pulsation  $\omega$  pour une fonction de transfert  $H(p)$ . Ce diagramme est composé :
  - d'un diagramme de gain représentant le gain en décibel ( $G_{db}$ ) en fonction de la pulsation  $\omega$

$$G_{db} = 20 \log(G) = 20 \log(|H(j\omega)|); \quad (1)$$

- d'un diagramme de phase représentant la phase en degré ( $\varphi$  en  $^{\circ}$ ) en fonction de la pulsation  $\omega$

$$\varphi = \arg(H(j\omega)). \quad (2)$$

- Pour ces deux diagrammes, les abscisses (concernant  $\omega$ ) sont représentées en échelle logarithmique.

### Remarque

Il suffit d'étudier le module et l'argument de l'expression  $H(j\omega)$  qui est obtenu en remplaçant  $p$  par  $j\omega$  dans  $H(p)$



## Lieux de transfert : diagrammes de Bode

### Diagramme de Bode

- Il représente  $s(t) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi)$  (en régime permanent) en fonction de la pulsation  $\omega$  pour une fonction de transfert  $H(p)$ . Ce diagramme est composé :
  - d'un diagramme de gain représentant le gain en décibel ( $G_{db}$ ) en fonction de la pulsation  $\omega$

$$G_{db} = 20 \log(G) = 20 \log(|H(j\omega)|); \quad (1)$$

- d'un diagramme de phase représentant la phase en degré ( $\varphi$  en  $^{\circ}$ ) en fonction de la pulsation  $\omega$

$$\varphi = \arg(H(j\omega)). \quad (2)$$

- Pour ces deux diagrammes, les abscisses (concernant  $\omega$ ) sont représentées en échelle logarithmique.

### Remarque

Il suffit d'étudier le module et l'argument de l'expression  $H(j\omega)$  qui est obtenu en remplaçant  $p$  par  $j\omega$  dans  $H(p)$



## Lieux de transfert : diagrammes de Bode

### Addition des fonction de transfert élémentaire

- **Produit** de fonctions de transfert élémentaires  $\Rightarrow$  **somme** de gains et d'arguments élémentaires.
- Pour la fonction de transfert de l'exemple de la suspension moto :

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log \left( \left| \frac{\frac{c}{k} j \omega + 1}{\frac{m}{k} (j\omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1} \right| \right) \\ &= 20 \log \left( \left| \frac{c}{k} j \omega + 1 \right| \right) - 20 \log \left( \left| \frac{m}{k} (j\omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1 \right| \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arg(H(j\omega)) = \arg \left( \frac{\frac{c}{k} j \omega + 1}{\frac{m}{k} (j\omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1} \right) \\ &= \arg \left( \frac{c}{k} j \omega + 1 \right) - \arg \left( \frac{m}{k} (j\omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1 \right) \end{aligned}$$

- Le gain et l'argument total sont respectivement la somme de gains élémentaires et d'arguments élémentaires de fonctions de transfert d'ordre 1 et 2.
- Nécessité d'analyser d'un point de vue fréquentiel successivement chacune des fonctions de transfert élémentaires d'ordre 1 ou 2.



## Lieux de transfert : diagrammes de Bode

### Addition des fonction de transfert élémentaire

- **Produit** de fonctions de transfert élémentaires  $\Rightarrow$  **somme** de gains et d'arguments élémentaires.
- Pour la fonction de transfert de l'exemple de la suspension moto :

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log \left( \left| \frac{\frac{c}{k} j \omega + 1}{\frac{m}{k} (j \omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1} \right| \right) \\ &= 20 \log \left( \left| \frac{c}{k} j \omega + 1 \right| \right) - 20 \log \left( \left| \frac{m}{k} (j \omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1 \right| \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arg(H(j\omega)) = \arg \left( \frac{\frac{c}{k} j \omega + 1}{\frac{m}{k} (j \omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1} \right) \\ &= \arg \left( \frac{c}{k} j \omega + 1 \right) - \arg \left( \frac{m}{k} (j \omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1 \right) \end{aligned}$$

- Le gain et l'argument total sont respectivement la somme de gains élémentaires et d'arguments élémentaires de fonctions de transfert d'ordre 1 et 2.
- Nécessité d'analyser d'un point de vue fréquentiel successivement chacune des fonctions de transfert élémentaires d'ordre 1 ou 2.



## Lieux de transfert : diagrammes de Bode

### Addition des fonction de transfert élémentaire

- **Produit** de fonctions de transfert élémentaires  $\Rightarrow$  **somme** de gains et d'arguments élémentaires.
- Pour la fonction de transfert de l'exemple de la suspension moto :

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log \left( \left| \frac{\frac{c}{k} j \omega + 1}{\frac{m}{k} (j \omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1} \right| \right) \\ &= 20 \log \left( \left| \frac{c}{k} j \omega + 1 \right| \right) - 20 \log \left( \left| \frac{m}{k} (j \omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1 \right| \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arg(H(j\omega)) = \arg \left( \frac{\frac{c}{k} j \omega + 1}{\frac{m}{k} (j \omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1} \right) \\ &= \arg \left( \frac{c}{k} j \omega + 1 \right) - \arg \left( \frac{m}{k} (j \omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1 \right) \end{aligned}$$

- Le gain et l'argument total sont respectivement la somme de gains élémentaires et d'arguments élémentaires de fonctions de transfert d'ordre 1 et 2.
- Nécessité d'analyser d'un point de vue fréquentiel successivement chacune des fonctions de transfert élémentaires d'ordre 1 ou 2.



## Lieux de transfert : diagrammes de Bode

### Addition des fonction de transfert élémentaire

- **Produit** de fonctions de transfert élémentaires  $\Rightarrow$  **somme** de gains et d'arguments élémentaires.
- Pour la fonction de transfert de l'exemple de la suspension moto :

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log \left( \left| \frac{\frac{c}{k} j \omega + 1}{\frac{m}{k} (j \omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1} \right| \right) \\ &= 20 \log \left( \left| \frac{c}{k} j \omega + 1 \right| \right) - 20 \log \left( \left| \frac{m}{k} (j \omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1 \right| \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arg(H(j\omega)) = \arg \left( \frac{\frac{c}{k} j \omega + 1}{\frac{m}{k} (j \omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1} \right) \\ &= \arg \left( \frac{c}{k} j \omega + 1 \right) - \arg \left( \frac{m}{k} (j \omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1 \right) \end{aligned}$$

- Le gain et l'argument total sont respectivement la somme de gains élémentaires et d'arguments élémentaires de fonctions de transfert d'ordre 1 et 2.
- Nécessité d'analyser d'un point de vue fréquentiel successivement chacune des fonctions de transfert élémentaires d'ordre 1 ou 2.



# Plan

1 Lieux de transfert : diagrammes de Bode

- Définition

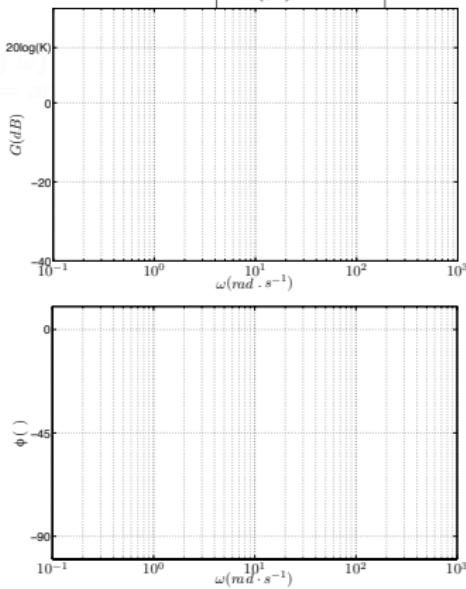
2 Construction des diagrammes de Bode

- Gain pur
- Intégrateur
- Premier ordre
- Second ordre

## Construction des diagrammes de Bode : gain pur

- #### • Fonction de transfert :

$$H(p) = K. \quad (3)$$





## Construction des diagrammes de Bode : gain pur

- Fonction de transfert :

$$H(j\omega) = K.$$

- Ainsi :

- $G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log(K)$
- $\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg(K) = 0$



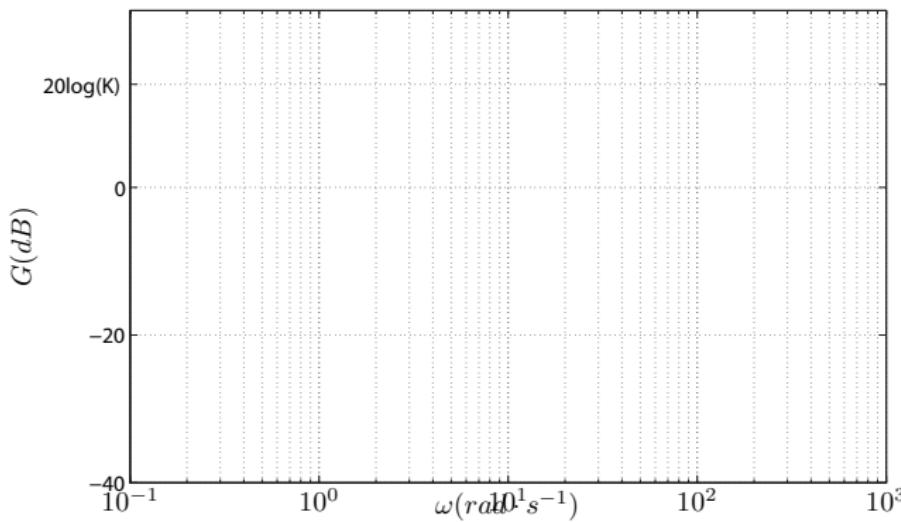
## Construction des diagrammes de Bode : gain pur

- Fonction de transfert :

$$H(j\omega) = K.$$

- Ainsi :

- $G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log(K)$ ,
- $\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg(K) = 0$ .





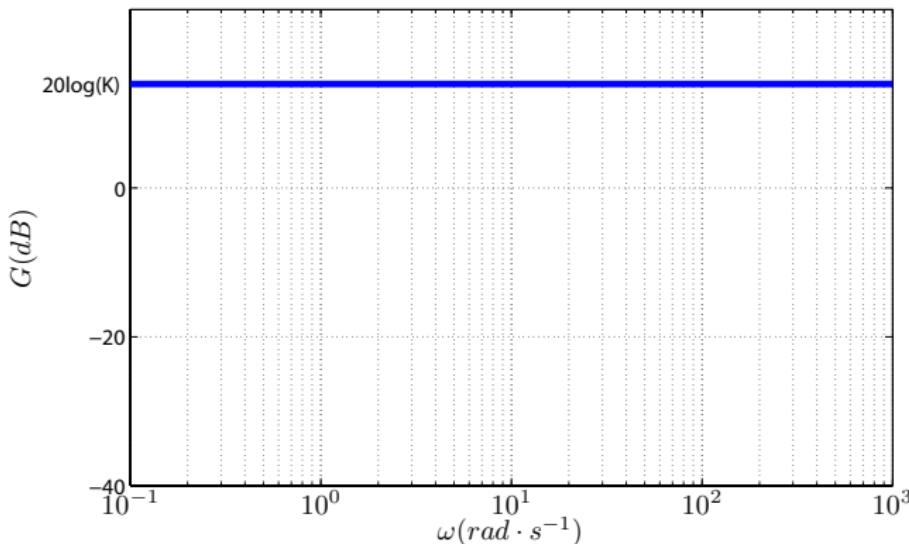
## Construction des diagrammes de Bode : gain pur

- Fonction de transfert :

$$H(j\omega) = K.$$

- Ainsi :

- $G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log(K)$ ,
- $\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg(K) = 0$ .

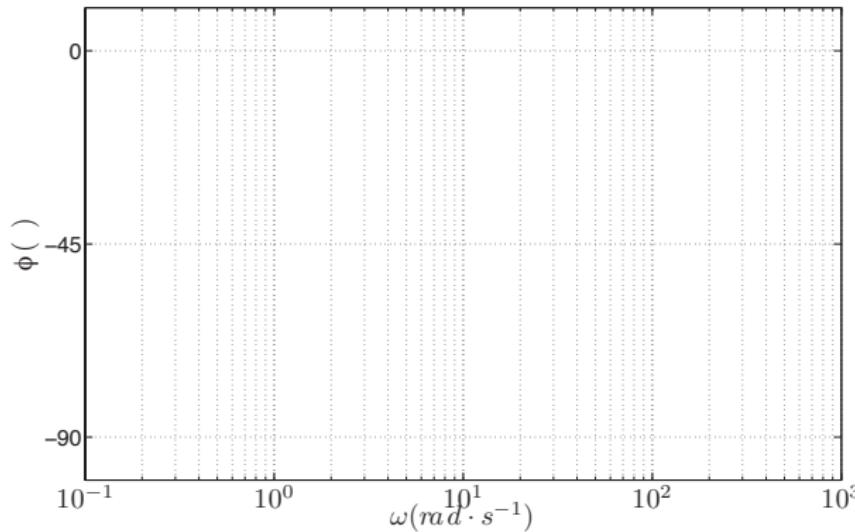


## Construction des diagrammes de Bode : gain pur

- #### • Fonction de transfert :

$$H(j\omega) = K.$$

- Ainsi :
    - $G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log(K)$ ,
    - $\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg(K) = 0$ .





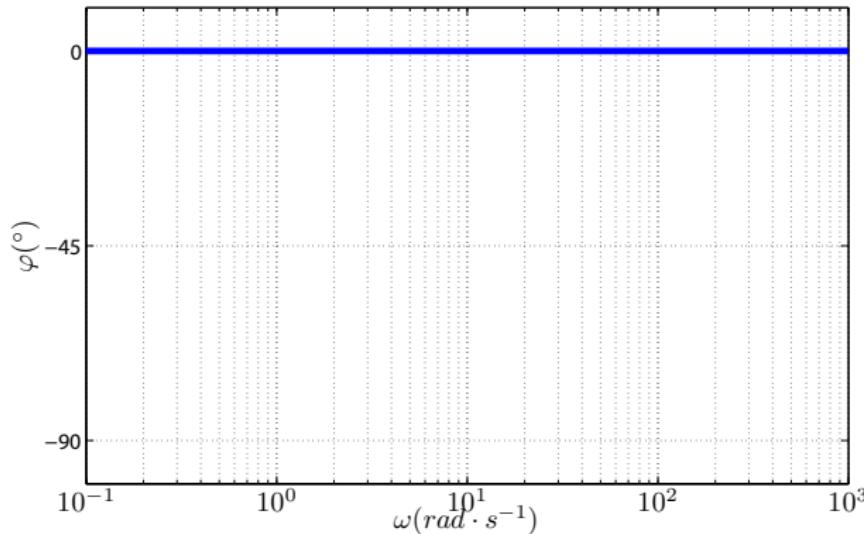
## Construction des diagrammes de Bode : gain pur

- Fonction de transfert :

$$H(j\omega) = K.$$

- Ainsi :

- $G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log(K)$ ,
- $\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg(K) = 0$ .

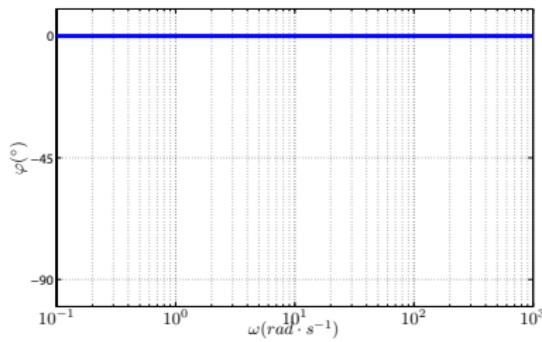
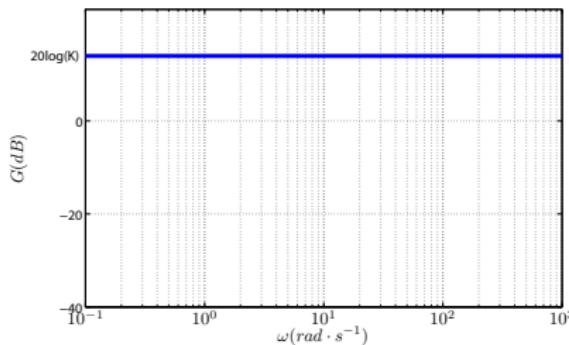




## Construction des diagrammes de Bode : gain pur

Fonction de transfert :

$$H(j\omega) = K.$$





# Plan

## 1 Lieux de transfert : diagrammes de Bode

- Définition

## 2 Construction des diagrammes de Bode

- Gain pur
- Intégrateur
- Premier ordre
- Second ordre



## Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

- Fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{p}. \quad (4)$$



## Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

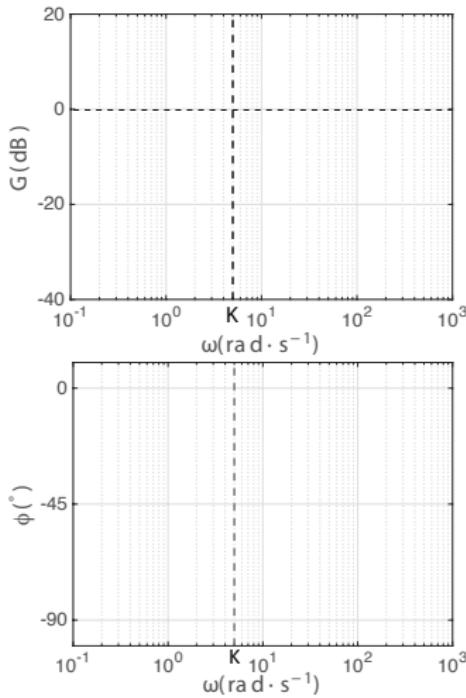
- Fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}.$$



## Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

- Fonction de transfert :





Lieux de transfert : diagrammes de Bode Construction des diagrammes de Bode

## Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

- $G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log(K) - 20 \log(\omega)$  : droit affine :
  - pour coefficient directeur  $-20 \text{ dB par décade}$ ,
  - et qui coupe l'axe des abscisses en  $\omega = K$ .



Lieux de transfert : diagrammes de Bode Construction des diagrammes de Bode

## Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

- $G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log(K) - 20 \log(\omega)$  : droit affine :
  - pour coefficient directeur **-20 dB par décade**,
  - et qui coupe l'axe des abscisses en  $\omega = K$ .



Lieux de transfert : diagrammes de Bode Construction des diagrammes de Bode

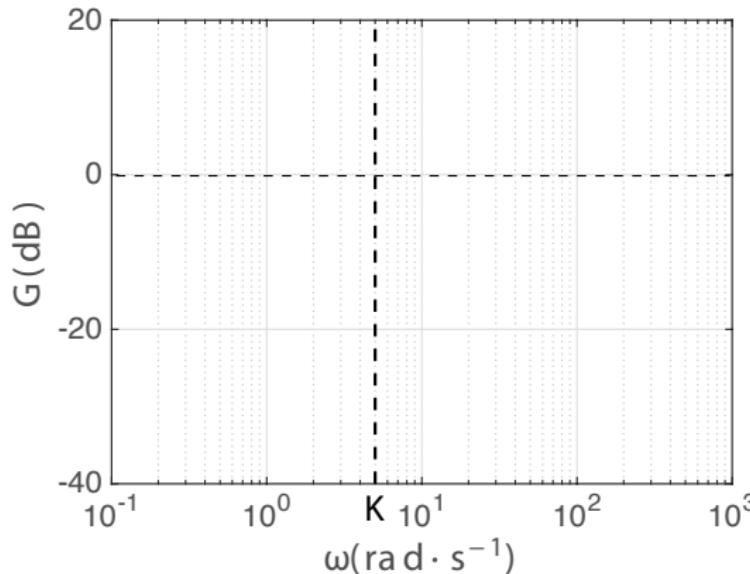
## Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

- $G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log(K) - 20 \log(\omega)$  : droit affine :
  - pour coefficient directeur **-20 dB par décade**,
  - et qui coupe l'axe des abscisses en  $\omega = K$ .



## Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

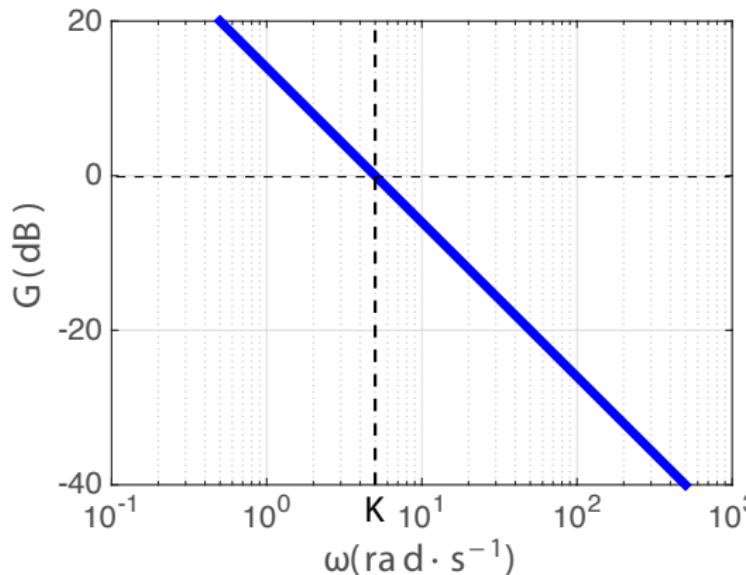
- $G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log(K) - 20 \log(\omega)$  : droit affine :
  - pour coefficient directeur **-20 dB par décade**,
  - et qui coupe l'axe des abscisses en  $\omega = K$ .





## Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

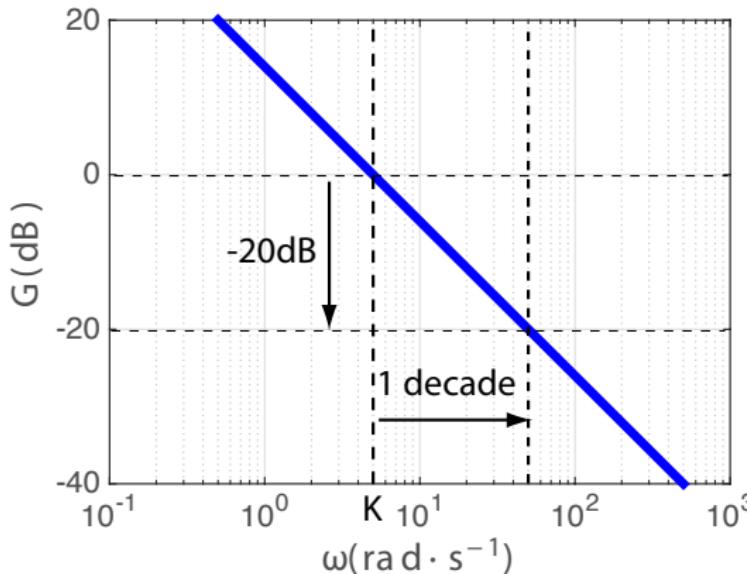
- $G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log(K) - 20 \log(\omega)$  : droit affine :
  - pour coefficient directeur **-20 dB par décade**,
  - et qui coupe l'axe des abscisses en  $\omega = K$ .





## Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

- $G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log(K) - 20 \log(\omega)$  : droit affine :
  - pour coefficient directeur **-20 dB par décade**,
  - et qui coupe l'axe des abscisses en  $\omega = K$ .





Lieux de transfert : diagrammes de Bode Construction des diagrammes de Bode

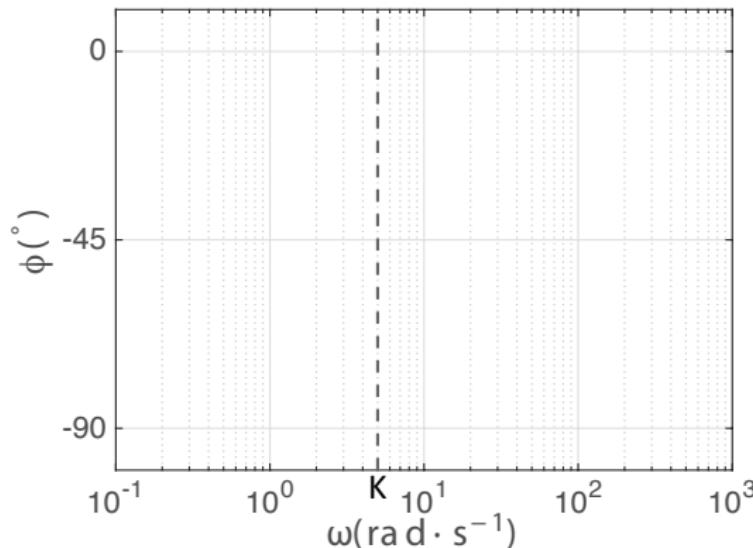
## Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

- $\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg(K) - \arg(j\omega) = -90^\circ$  : droite horizontale passant par  $\varphi = -90^\circ$ .



## Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

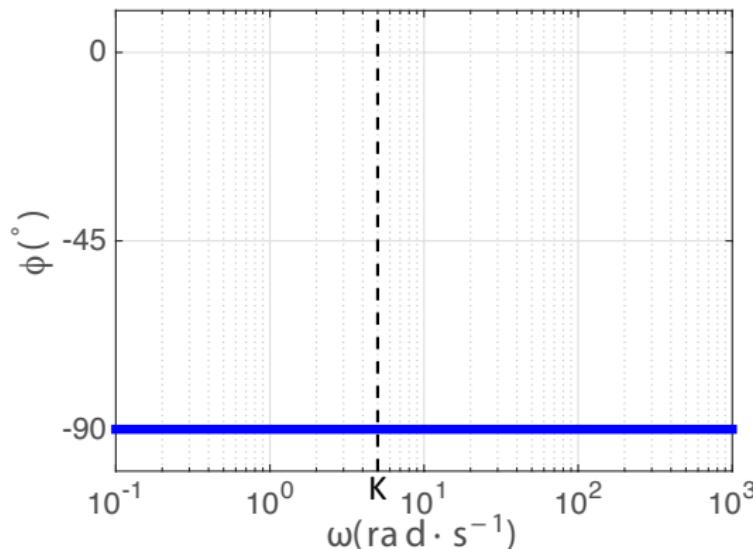
- $\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg(K) - \arg(j\omega) = -90^\circ$  : droite horizontale passant par  $\varphi = -90^\circ$ .





## Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

- $\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg(K) - \arg(j\omega) = -90^\circ$  : droite horizontale passant par  $\varphi = -90^\circ$ .

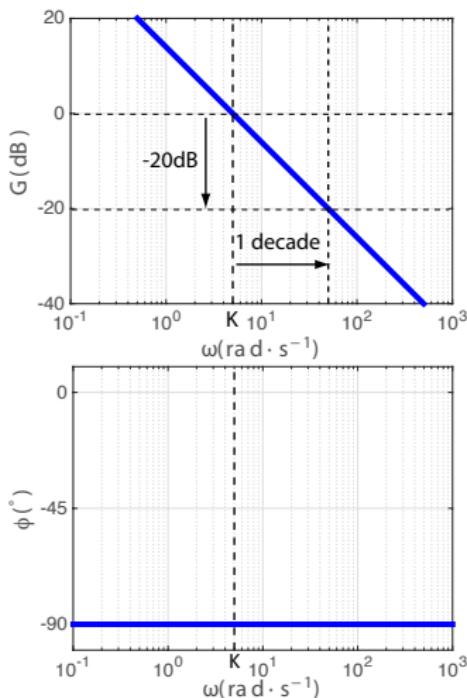




## Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

Fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}.$$





# Plan

## 1 Lieux de transfert : diagrammes de Bode

- Définition

## 2 Construction des diagrammes de Bode

- Gain pur
- Intégrateur
- Premier ordre
- Second ordre

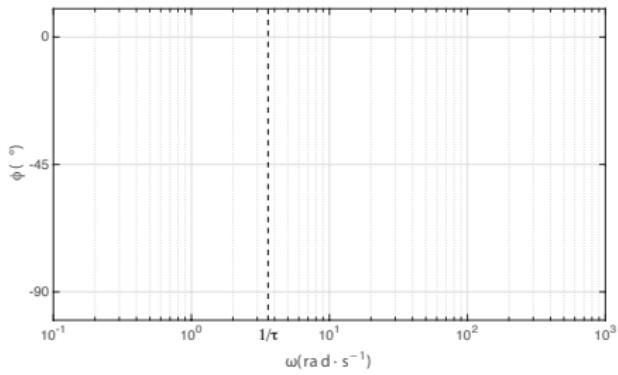
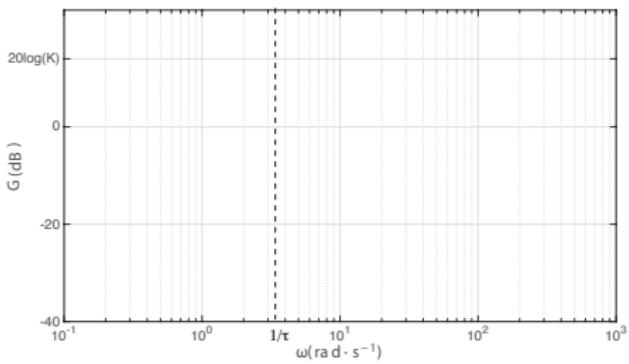


## Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- Fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}. \quad (5)$$

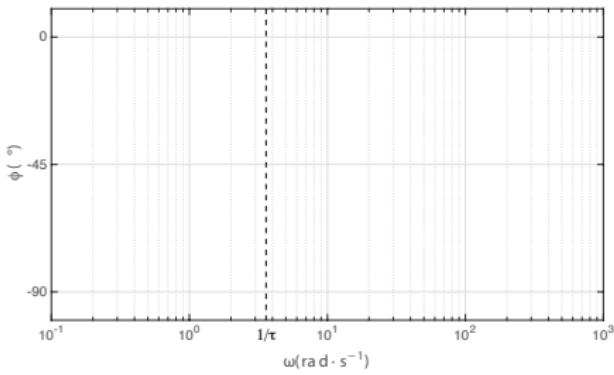
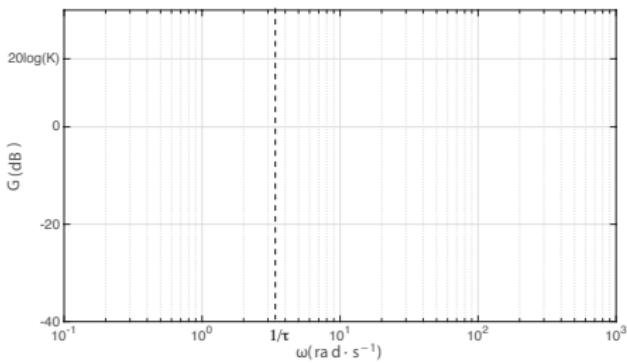
- Diagramme asymptotique : branches approximées de  $G_{dB}$  et  $\varphi$  lorsque :



## Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- Fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau j\omega}.$$





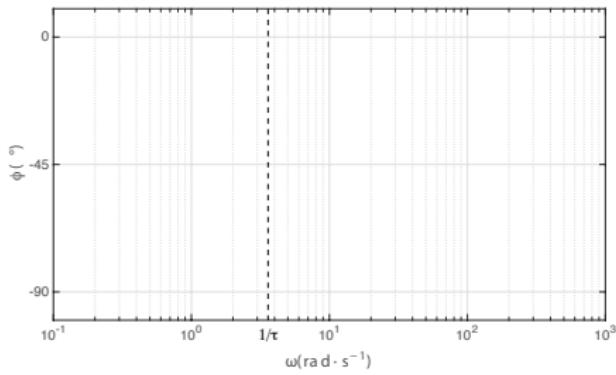
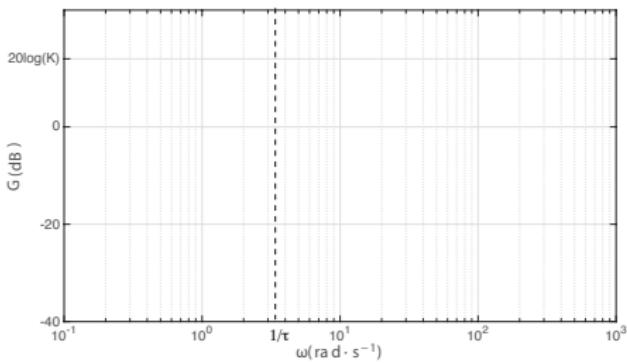
## Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- Fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau j\omega}.$$

- Diagramme asymptotique : branches approximées de  $G_{dB}$  et  $\varphi$  lorsque :

- ①  $\omega \rightarrow 0,$
- ②  $\omega \rightarrow +\infty.$





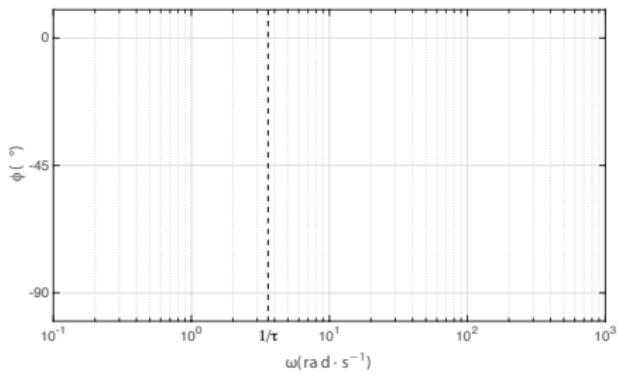
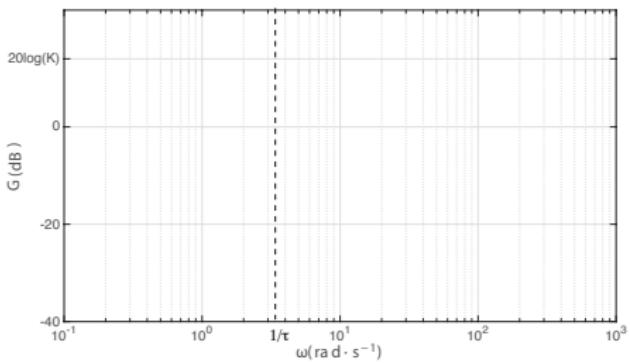
## Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- Fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau j\omega}.$$

- Diagramme asymptotique : branches approximées de  $G_{dB}$  et  $\varphi$  lorsque :

- ①  $\omega \rightarrow 0$ ,
- ②  $\omega \rightarrow +\infty$ .





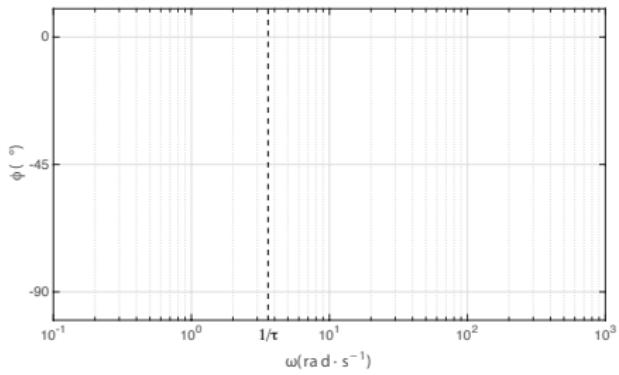
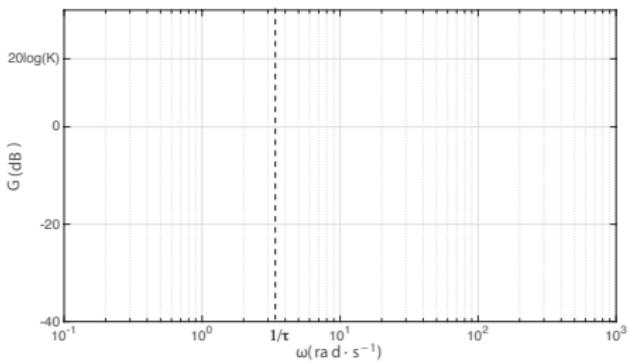
## Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- Fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau j\omega}.$$

- Diagramme asymptotique : branches approximées de  $G_{dB}$  et  $\varphi$  lorsque :

- ①  $\omega \rightarrow 0$ ,
- ②  $\omega \rightarrow +\infty$ .





## Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- Calcul du gain de  $H(j\omega)$  :

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log \left( \left| \frac{K}{1 + \tau j \omega} \right| \right) = 20 \log \left( \frac{K}{\sqrt{1 + (\tau \omega)^2}} \right) \\ &= 20 \log(K) - 20 \log \left( \sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right). \end{aligned}$$

- Tracé du diagramme asymptotique en gain :

➊  $\omega \rightarrow 0^+$

$$20 \log(K) - 20 \log \left( \sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right) \underset{\omega \rightarrow 0^+}{\approx} 20 \log(K)$$

➋  $\omega \rightarrow +\infty$

$$20 \log(K) - 20 \log \left( \sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right)$$

$$\underset{\omega \rightarrow +\infty}{\approx} 20 \log(K) - 20 \log \left( [\tau \omega]^{\frac{1}{2}} \right) = 20 \log(K) - 2 \cdot \frac{20}{2} \log(\tau \omega)$$

$$= 20 \log(K) - 20 \log(\tau \omega) = 20 \log(K) + 20 \log \left( \frac{1}{\tau} \right) = 20 \log(\omega)$$

Le diagramme asymptotique en gain est donc une droite horizontale à  $20 \log(K)$  et une droite descendante à  $20 \log(\omega)$ .

## Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- Calcul du gain de  $H(j\omega)$  :

$$G_{dB} = 20 \log \left( \left| \frac{K}{1 + \tau j \omega} \right| \right) = 20 \log \left( \frac{K}{\sqrt{1 + (\tau \omega)^2}} \right)$$

$$= 20 \log(K) - 20 \log \left( \sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right).$$



## Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- Calcul du gain de  $H(j\omega)$  :

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log \left( \left| \frac{K}{1 + \tau j \omega} \right| \right) = 20 \log \left( \frac{K}{\sqrt{1 + (\tau \omega)^2}} \right) \\ &= 20 \log(K) - 20 \log \left( \sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right). \end{aligned}$$

- Tracé du diagramme asymptotique en gain :

①  $\omega \rightarrow 0$  :

$$20 \log(K) - 20 \log \left( \sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right) \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 20 \log(K)$$

②  $\omega \rightarrow +\infty$  :

$$\begin{aligned} &\underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} 20 \log(K) - 20 \log \left( [\tau \omega]^2^{1/2} \right) = 20 \log(K) - 2 \frac{20}{2} \log(\tau \omega) \\ &= 20 \log(K) - 20 \log(\tau \omega) = 20 \log(K) + 20 \log \left( \frac{1}{\tau} \right) - 20 \log(\omega) \end{aligned}$$

- Sur le tracé semi-logarithmique, droite affine de coefficient directeur  $-20 \text{ dB par décade}$
- Atteignez la droite horizontale ( $20 \log(K)$ ) en  $\omega = \frac{1}{\tau}$



## Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- Calcul du gain de  $H(j\omega)$  :

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log \left( \left| \frac{K}{1 + \tau j \omega} \right| \right) = 20 \log \left( \frac{K}{\sqrt{1 + (\tau \omega)^2}} \right) \\ &= 20 \log(K) - 20 \log \left( \sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right). \end{aligned}$$

- Tracé du diagramme asymptotique en gain :

①  $\omega \rightarrow 0$  :

$$20 \log(K) - 20 \log \left( \sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right) \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 20 \log(K)$$

Droite horizontale située à  $20 \log(K)$

②  $\omega \rightarrow +\infty$  :

$$20 \log(K) - 20 \log \left( \sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right)$$

$$\underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} 20 \log(K) - 20 \log \left( [\tau \omega]^2 \right)^{1/2} = 20 \log(K) - 2 \frac{20}{2} \log(\tau \omega)$$

$$= 20 \log(K) - 20 \log(\tau \omega) = 20 \log(K) + 20 \log \left( \frac{1}{\tau} \right) - 20 \log(\omega)$$

- Sur le tracé semi-logarithmique, droite affine de coefficient directeur  $-20 \text{ dB par décade}$
- Atteignez la droite horizontale ( $20 \log(K)$ ) en  $\omega = \frac{1}{\tau}$



## Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- Calcul du gain de  $H(j\omega)$  :

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log \left( \left| \frac{K}{1 + \tau j \omega} \right| \right) = 20 \log \left( \frac{K}{\sqrt{1 + (\tau \omega)^2}} \right) \\ &= 20 \log(K) - 20 \log \left( \sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right). \end{aligned}$$

- Tracé du diagramme asymptotique en gain :

①  $\omega \rightarrow 0$  :

$$20 \log(K) - 20 \log \left( \sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right) \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 20 \log(K)$$

Droite horizontale situé à  $20 \log(K)$   
②  $\omega \rightarrow +\infty$  :

$$20 \log(K) - 20 \log \left( \sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right)$$

$$\underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} 20 \log(K) - 20 \log \left( [\tau \omega]^2 \right)^{1/2} = 20 \log(K) - 2 \frac{20}{2} \log(\tau \omega)$$

$$= 20 \log(K) - 20 \log(\tau \omega) = 20 \log(K) + 20 \log \left( \frac{1}{\tau} \right) - 20 \log(\omega)$$

- Sur le tracé semi-logarithmique, droite affine de coefficient directeur  $-20 \text{ dB par décade}$
- et qui coupe la droite horizontale ( $20 \log(K)$ ) en  $\omega = \frac{1}{\tau}$ .

## Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- Calcul du gain de  $H(j\omega)$  :

$$G_{dB} = 20 \log \left( \left| \frac{K}{1 + \tau j \omega} \right| \right) = 20 \log \left( \frac{K}{\sqrt{1 + (\tau \omega)^2}} \right)$$

$$= 20 \log(K) - 20 \log \left( \sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right)$$

- #### • Tracé du diagramme asymptotique en gain :

$$① \omega \rightarrow 0 :$$

$$20 \log(K) - 20 \log \left( \sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right) \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 20 \log(K)$$

Droite horizo  
②  $\omega \rightarrow +\infty$  :

$$\begin{aligned} \omega \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} & 20 \log(K) - 20 \log \left( [\tau \omega]^2 \right)^{1/2} = 20 \log(K) - 2 \frac{20}{2} \log(\tau \omega) \\ & = 20 \log(K) - 20 \log(\tau \omega) = 20 \log(K) + 20 \log \left( \frac{1}{\tau} \right) - 20 \log(\omega) \end{aligned}$$

- Sur le tracé semi-logarithmique, droite affine de coefficient directeur  $-20 \text{ dB par d閪ade}$  et qui coupe la droite horizontale ( $20 \log(K)$ ) en  $\omega = \frac{1}{\tau}$ .



## Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- Calcul du gain de  $H(j\omega)$  :

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log \left( \left| \frac{K}{1 + \tau j \omega} \right| \right) = 20 \log \left( \frac{K}{\sqrt{1 + (\tau \omega)^2}} \right) \\ &= 20 \log(K) - 20 \log \left( \sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right). \end{aligned}$$

- Tracé du diagramme asymptotique en gain :

①  $\omega \rightarrow 0$  :

$$20 \log(K) - 20 \log \left( \sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right) \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 20 \log(K)$$

Droite horizontale situé à  $20 \log(K)$   
②  $\omega \rightarrow +\infty$  :

$$20 \log(K) - 20 \log \left( \sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right)$$

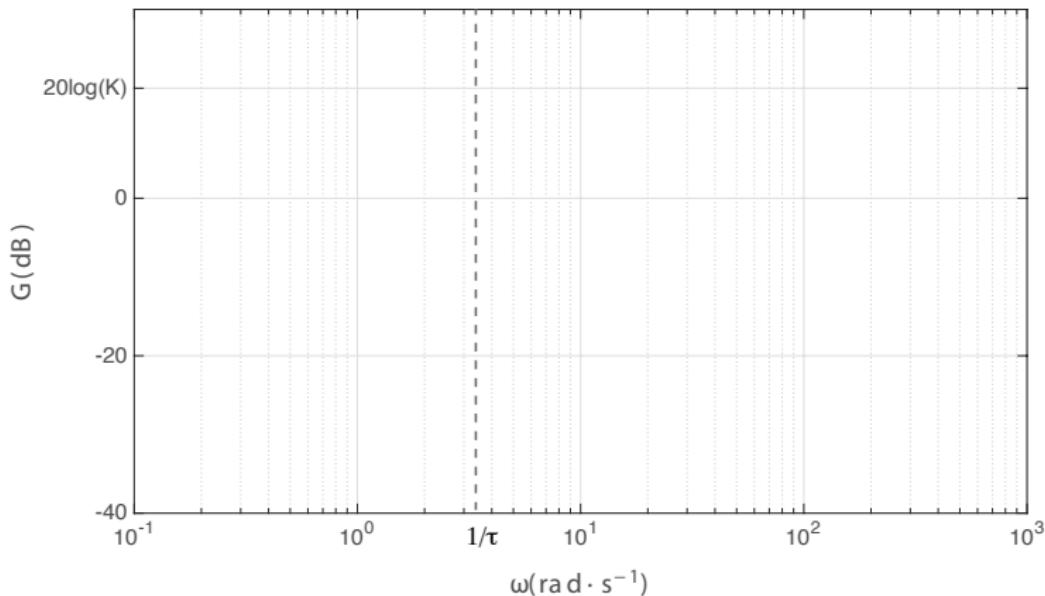
$$\underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} 20 \log(K) - 20 \log \left( [\tau \omega]^2 \right)^{1/2} = 20 \log(K) - 2 \frac{20}{2} \log(\tau \omega)$$

$$= 20 \log(K) - 20 \log(\tau \omega) = 20 \log(K) + 20 \log \left( \frac{1}{\tau} \right) - 20 \log(\omega)$$

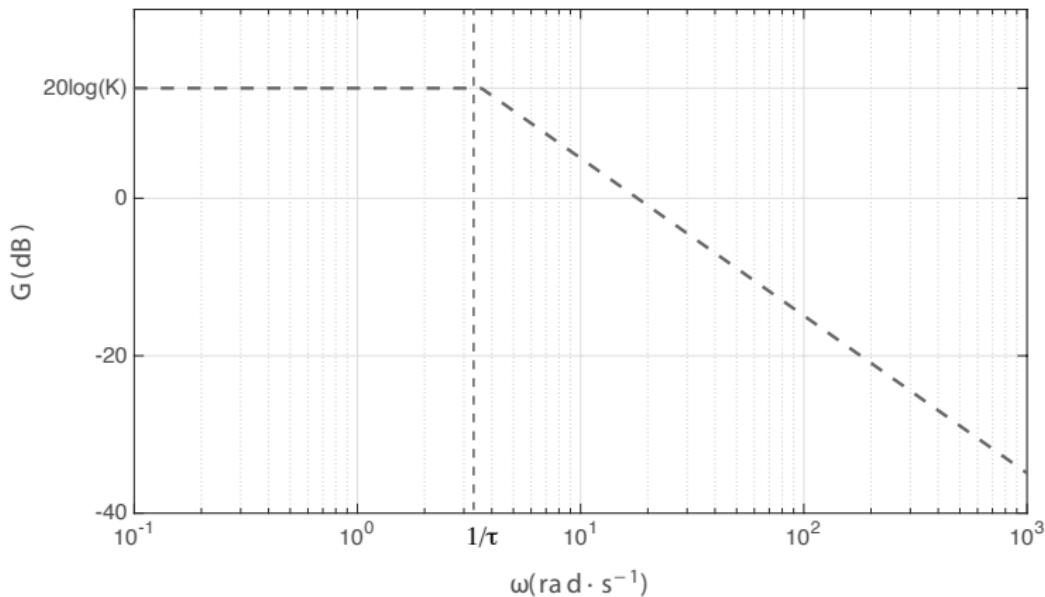
- Sur le tracé semi-logarithmique, droite affine de coefficient directeur  $-20 \text{ dB par d閏ade}$
- et qui coupe la droite horizontale ( $20 \log(K)$ ) en  $\omega = \frac{1}{\tau}$ .



## Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

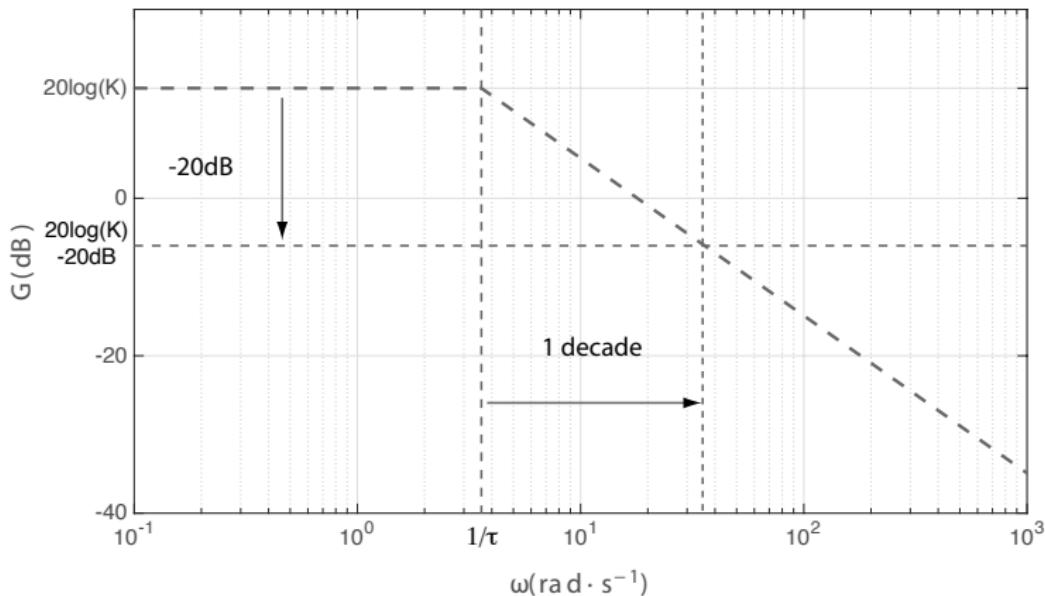


## Construction des diagrammes de Bode : premier ordre





## Construction des diagrammes de Bode : premier ordre





## Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

### Pulsion de coupure

La pulsation de coupure  $\omega_c$  se définit comme la valeur de  $\omega$  telle que :

$$|H(j\omega_c)| = \frac{|H(j\omega_0)|_0}{\sqrt{2}}. \quad (6)$$

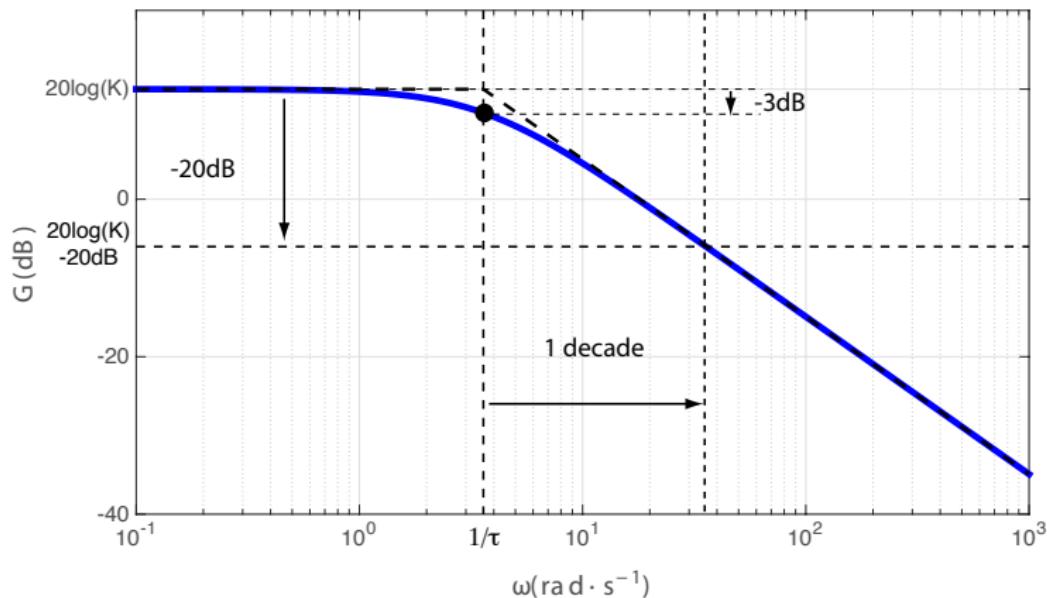
où  $|H(j\omega_0)|_0$  est le module de la fonction de transfert  $H(j\omega)$  lorsque  $\omega$  tend vers 0.  
On trouve que le gain de coupure :

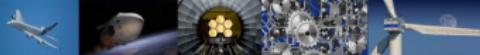
$$G_{dB}(\omega_c) = 20 \log(K) - 20 \log(\sqrt{2}) \simeq 20 \log(K) - 3dB \quad (7)$$

Pour un premier ordre,  $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ .



## Construction des diagrammes de Bode : premier ordre





## Lieux de transfert : diagrammes de Bode

- Calcul de la phase de  $H(j\omega)$  :

$$\begin{aligned}\varphi &= \arg\left(\frac{K}{1 + \tau j\omega}\right) = \arg(K) - \arg(1 + \tau j\omega) \\ &= 0 - \arctan(\tau\omega) \\ &= -\arctan(\tau\omega)\end{aligned}$$

- Tracé du diagramme asymptotique en phase :

①  $\omega \rightarrow 0$

$$\varphi = \arg(K) - \arg(1 + \tau j\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} -\arg(\tau\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$$

②  $\omega \rightarrow +\infty$

$$\varphi = \arg(K) - \arg(1 + \tau j\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} -\arg(\tau\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} -\frac{\pi}{2}$$



## Lieux de transfert : diagrammes de Bode

- Calcul de la phase de  $H(j\omega)$  :

$$\begin{aligned}\varphi &= \arg\left(\frac{K}{1 + \tau j\omega}\right) = \arg(K) - \arg(1 + \tau j\omega) \\ &= 0 - \arctan(\tau\omega) \\ &= -\arctan(\tau\omega)\end{aligned}$$

- Tracé du diagramme asymptotique en phase :

1)  $\omega \rightarrow 0$  :

$$\varphi = \arg(K) - \arg(1 + \tau j\omega) \xrightarrow[\omega \rightarrow 0]{} 0$$

2)  $\omega \rightarrow +\infty$  :

$$\varphi = \arg(K) - \arg(1 + \tau j\omega) \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} -\arg(\tau j\omega) \xrightarrow[\omega \rightarrow +\infty]{} -\frac{\pi}{2}$$



## Lieux de transfert : diagrammes de Bode

- Calcul de la phase de  $H(j\omega)$  :

$$\begin{aligned}\varphi &= \arg\left(\frac{K}{1 + \tau j\omega}\right) = \arg(K) - \arg(1 + \tau j\omega) \\ &= 0 - \arctan(\tau\omega) \\ &= -\arctan(\tau\omega)\end{aligned}$$

- Tracé du diagramme asymptotique en phase :

①  $\omega \rightarrow 0$  :

$$\varphi = \arg(K) - \arg(1 + \tau j\omega) \xrightarrow[\omega \rightarrow 0]{} 0$$

②  $\omega \rightarrow +\infty$  :

$$\varphi = \arg(K) - \arg(1 + \tau j\omega) \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} -\arg(\tau j\omega) \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} -\frac{\pi}{2}$$



## Lieux de transfert : diagrammes de Bode

- Calcul de la phase de  $H(j\omega)$  :

$$\begin{aligned}\varphi &= \arg\left(\frac{K}{1 + \tau j\omega}\right) = \arg(K) - \arg(1 + \tau j\omega) \\ &= 0 - \arctan(\tau\omega) \\ &= -\arctan(\tau\omega)\end{aligned}$$

- Tracé du diagramme asymptotique en phase :

①  $\omega \rightarrow 0$  :

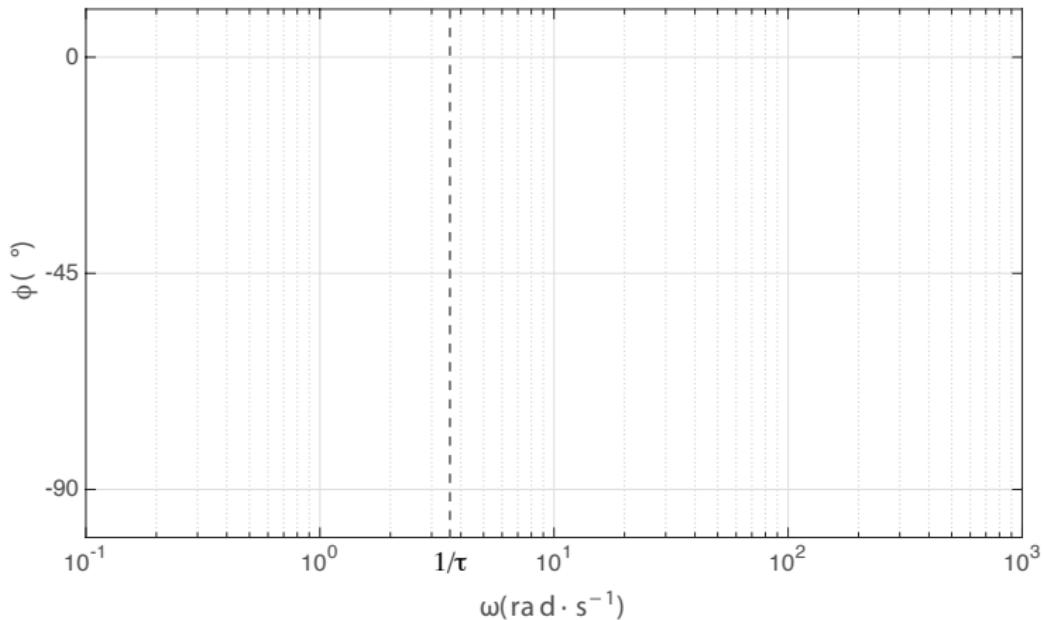
$$\varphi = \arg(K) - \arg(1 + \tau j\omega) \xrightarrow[\omega \rightarrow 0]{} 0$$

②  $\omega \rightarrow +\infty$  :

$$\varphi = \arg(K) - \arg(1 + \tau j\omega) \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} -\arg(\tau j\omega) \xrightarrow[\omega \rightarrow +\infty]{} -\frac{\pi}{2}$$

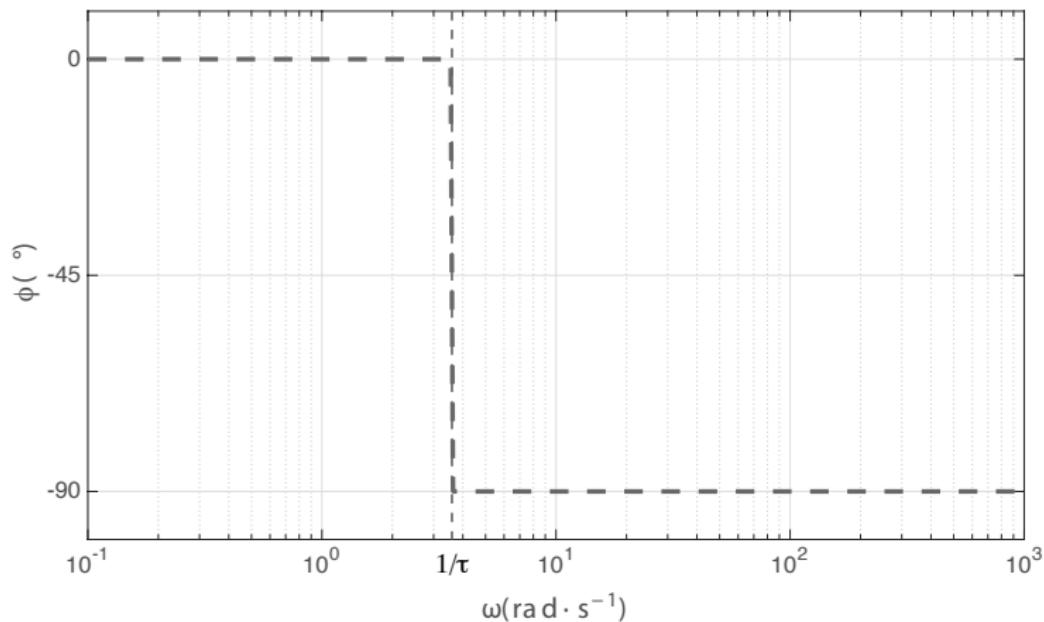


## Construction des diagrammes de Bode : premier ordre



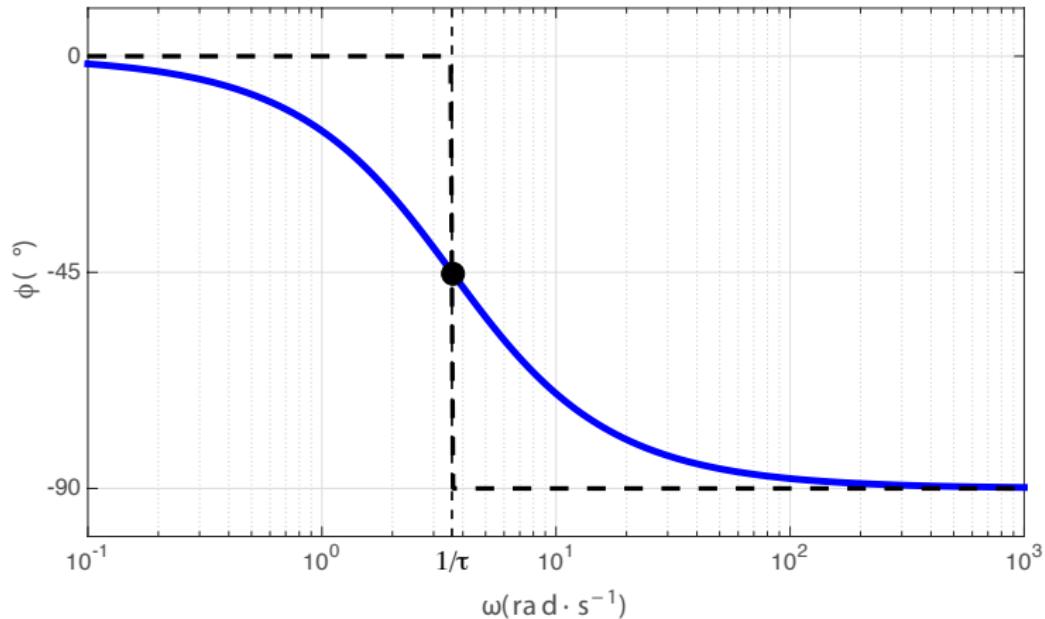


## Construction des diagrammes de Bode : premier ordre





## Construction des diagrammes de Bode : premier ordre





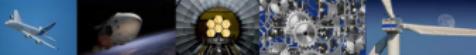
# Plan

## 1 Lieux de transfert : diagrammes de Bode

- Définition

## 2 Construction des diagrammes de Bode

- Gain pur
- Intégrateur
- Premier ordre
- Second ordre



## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

### Fonction de transfert d'un système du second ordre

- 

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad (8)$$

- Ainsi, en remplaçant  $p$  par  $j\omega$ , on obtient :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}.$$

- Le dénominateur peut alors s'écrire de différentes manières selon si :

  $\Delta > 0$  : poles réels  
  $\Delta < 0$  : poles complexes

## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

## Fonction de transfert d'un système du second ordre

- 1

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad (8)$$

- Ainsi, en remplaçant  $p$  par  $j\omega$ , on obtient :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}.$$

## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

## Fonction de transfert d'un système du second ordre

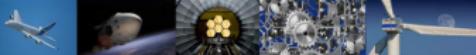
- 1

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad (8)$$

- Ainsi, en remplaçant  $p$  par  $j\omega$ , on obtient :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}.$$

- Le dénominateur peut alors s'écrire de différentes manières selon si :
    - $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$  : 2 pôles réels.
    - $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$  : 2 pôles complexes.



## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

### Fonction de transfert d'un système du second ordre

- 

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad (8)$$

- Ainsi, en remplaçant  $p$  par  $j\omega$ , on obtient :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}.$$

- Le dénominateur peut alors s'écrire de différentes manières selon si :
  - ➊  $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$  : 2 pôles réels.
  - ➋  $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$  : 2 pôles complexes.

## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

## Fonction de transfert d'un système du second ordre

- 1

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad (8)$$

- Ainsi, en remplaçant  $p$  par  $j\omega$ , on obtient :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}.$$

- Le dénominateur peut alors s'écrire de différentes manières selon si :
    - $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$  : 2 pôles réels.
    - $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$  : 2 pôles complexes.



## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

①  $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$  : 2 pôles réels.

- Les deux pôles sont réels
- Calcul de  $\Delta$

$$\Delta = \frac{4\xi^2 - 4}{\omega_0^2}$$

- Les racines s'écrivent donc :

$$p_{1/2} = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_0} \pm \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\xi^2 - 1}}{\frac{2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \left( -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

- La factorisation du dénominateur donne :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} (p - p_1)(p - p_2).$$

- On pose alors :

$$\begin{cases} T_1 &= -\frac{1}{p_1} \\ T_2 &= -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

- On a alors :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} \left( p + \frac{1}{T_1} \right) \left( p + \frac{1}{T_2} \right).$$



## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

❶  $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$  : 2 pôles réels.

- Les deux pôles sont réels
- Calcul de  $\Delta$

$$\Delta = \frac{4\xi^2 - 4}{\omega_0^2}$$

- Les racines s'écrivent donc :

$$p_{1/2} = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_0} \pm \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\xi^2 - 1}}{\frac{2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \left( -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

- La factorisation du dénominateur donne :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} (p - p_1)(p - p_2).$$

- On pose alors :

$$\begin{cases} T_1 &= -\frac{1}{p_1} \\ T_2 &= -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

- On a alors :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} \left( p + \frac{1}{T_1} \right) \left( p + \frac{1}{T_2} \right).$$

## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

④  $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0 : 2$  pôles réels.

- Les deux pôles sont réels
  - Calcul de  $\Delta$

$$\Delta = \frac{4\xi^2 - 4}{\omega_0^2}$$

## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ④  $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0 : 2$  pôles réels.

  - Les deux pôles sont réels
  - Calcul de  $\Delta$

$$\Delta = \frac{4\xi^2 - 4}{\omega_0^2}$$

- Les racines s'écrivent donc :

$$p_{1/2} = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_0} \pm \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\xi^2 - 1}}{\frac{2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \left( -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- 4  $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$  : 2 pôles réels.

  - Les deux pôles sont réels
  - Calcul de  $\Delta$

$$\Delta = \frac{4\xi^2 - 4}{\omega_0^2}$$

- Les racines s'écrivent donc :

$$p_{1/2} = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_0} \pm \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\xi^2 - 1}}{\frac{2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \left( -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

- La factorisation du dénominateur donne :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}(p - p_1)(p - p_2).$$



## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

①  $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$  : 2 pôles réels.

- Les deux pôles sont réels
- Calcul de  $\Delta$

$$\Delta = \frac{4\xi^2 - 4}{\omega_0^2}$$

- Les racines s'écrivent donc :

$$p_{1/2} = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_0} \pm \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\xi^2 - 1}}{\frac{2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \left( -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

- La factorisation du dénominateur donne :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} (p - p_1)(p - p_2).$$

- On pose alors :

$$\begin{cases} T_1 &= -\frac{1}{p_1} \\ T_2 &= -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

- On a alors :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} \left( p + \frac{1}{T_1} \right) \left( p + \frac{1}{T_2} \right).$$



## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

①  $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$  : 2 pôles réels.

- Les deux pôles sont réels
- Calcul de  $\Delta$

$$\Delta = \frac{4\xi^2 - 4}{\omega_0^2}$$

- Les racines s'écrivent donc :

$$p_{1/2} = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_0} \pm \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\xi^2 - 1}}{\frac{2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \left( -\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

- La factorisation du dénominateur donne :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} (p - p_1)(p - p_2).$$

- On pose alors :

$$\begin{cases} T_1 &= -\frac{1}{p_1} \\ T_2 &= -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

- On a alors :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} \left( p + \frac{1}{T_1} \right) \left( p + \frac{1}{T_2} \right).$$

## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

❶  $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$  : 2 pôles réels.

- On a alors :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} \left( p + \frac{1}{T_1} \right) \left( p + \frac{1}{T_2} \right).$$



## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

❶  $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$  : 2 pôles réels.

- On a alors :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} \left( p + \frac{1}{T_1} \right) \left( p + \frac{1}{T_2} \right).$$

- qui s'écrit également,

$$\frac{1}{\omega_0^2} \left( p + \frac{1}{T_1} \right) \left( p + \frac{1}{T_2} \right) = \frac{1}{T_1 T_2 \omega_0^2} (T_1 p + 1) (T_2 p + 1).$$

- On remarque que :

$$p_1 \cdot p_2 = \omega_0^2 = \frac{1}{T_1 T_2}.$$

- Donc,

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = (T_1 p + 1) (T_2 p + 1).$$



## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

❶  $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$  : 2 pôles réels.

- On a alors :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} \left( p + \frac{1}{T_1} \right) \left( p + \frac{1}{T_2} \right).$$

- qui s'écrit également,

$$\frac{1}{\omega_0^2} \left( p + \frac{1}{T_1} \right) \left( p + \frac{1}{T_2} \right) = \frac{1}{T_1 T_2 \omega_0^2} (T_1 p + 1) (T_2 p + 1).$$

- On remarque que :

$$p_1 \cdot p_2 = \omega_0^2 = \frac{1}{T_1 T_2}.$$

- Donc,

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = (T_1 p + 1) (T_2 p + 1).$$

## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

❶  $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$  : 2 pôles réels.

- On a alors :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} \left( p + \frac{1}{T_1} \right) \left( p + \frac{1}{T_2} \right).$$

- qui s'écrit également,

$$\frac{1}{\omega_0^2} \left( p + \frac{1}{T_1} \right) \left( p + \frac{1}{T_2} \right) = \frac{1}{T_1 T_2 \omega_0^2} (T_1 p + 1) (T_2 p + 1).$$

- On remarque que :

$$p_1 \cdot p_2 = \omega_0^2 = \frac{1}{T_1 T_2}.$$

- Donc,

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = (T_1 p + 1) (T_2 p + 1).$$



## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

❶  $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$  : 2 pôles réels.

- Les deux pôles réels sont donc :

$$\begin{cases} p_1 &= \omega_0 \left( -\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \\ p_2 &= \omega_0 \left( -\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \end{cases}$$

$$H(j\omega) = \frac{K}{(1 + j T_1 \omega)(1 + j T_2 \omega)}$$

- avec :

$$\begin{cases} T_1 &= -\frac{1}{p_1} \\ T_2 &= -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

❶  $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$  : 2 pôles réels.

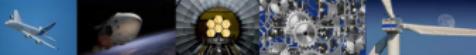
- Les deux pôles réels sont donc :

$$\begin{cases} p_1 = \omega_0 \left( -\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \\ p_2 = \omega_0 \left( -\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \end{cases}$$

$$H(j\omega) = \frac{K}{(1+jT_1\omega)(1+jT_2\omega)}$$

- avec :

$$\begin{cases} T_1 = -\frac{1}{p_1} \\ T_2 = -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$



## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

④  $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$  : 2 pôles réels.

- On peut alors calculer le gain :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log \left( \left| \frac{K}{1 + j T_1 \omega} \right| \right) + 20 \log \left( \left| \frac{1}{1 + j T_2 \omega} \right| \right)$$

- Somme de deux premier ordre :

- $G_{dB1}$  de gain statique  $K$  et de constante de temps  $T_1$ .
- $G_{dB2}$  de gain statique 1 et de constante de temps  $T_2$ .



## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

④  $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$  : 2 pôles réels.

- On peut alors calculer le gain :

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log \left( \left| \frac{K}{1 + j T_1 \omega} \right| \right) + 20 \log \left( \left| \frac{1}{1 + j T_2 \omega} \right| \right)$$

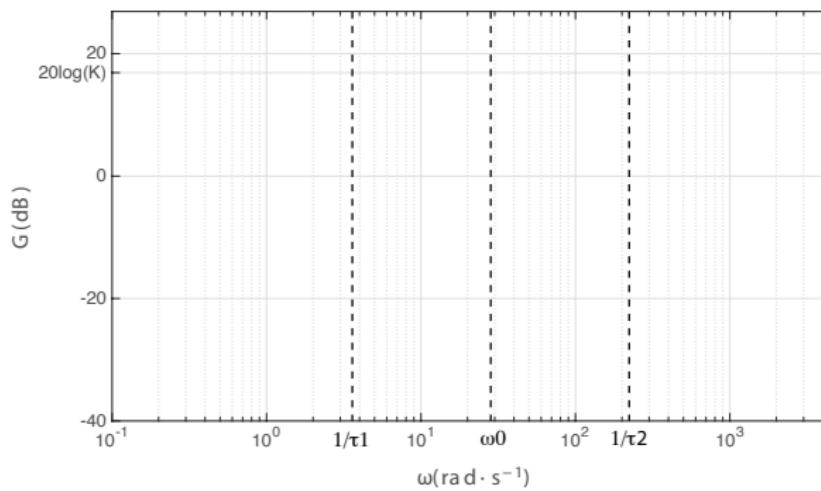
- Somme de deux premier ordre :

- $G_{dB1}$  de gain statique  $K$  et de constante de temps  $T_1$ .
- $G_{dB2}$  de gain statique 1 et de constante de temps  $T_2$ .

## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- $$\bullet \quad \xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0 : 2 \text{ pôles réels.}$$

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log \left( \left| \frac{K}{1+jT_1\omega} \right| \right) + 20 \log \left( \left| \frac{1}{1+jT_2\omega} \right| \right)$$

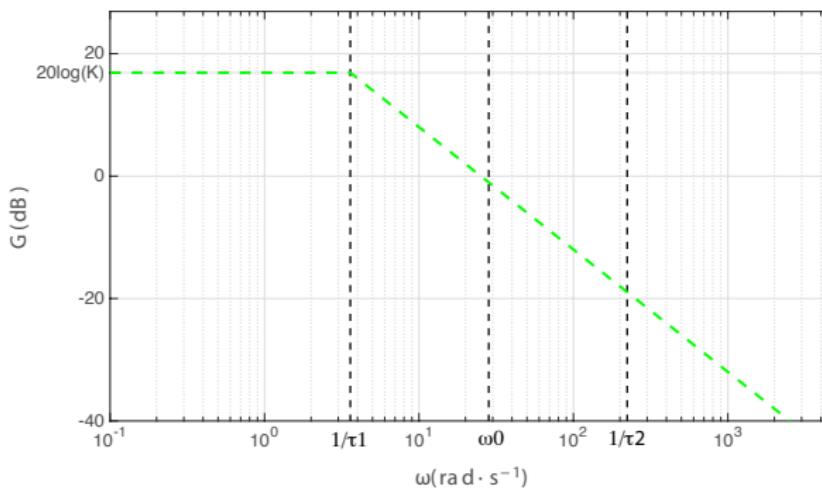




## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ❶  $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$  : 2 pôles réels.

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log \left( \left| \frac{K}{1 + j \frac{1}{\tau_1} \omega} \right| \right) + 20 \log \left( \left| \frac{1}{1 + j \frac{1}{\tau_2} \omega} \right| \right)$$

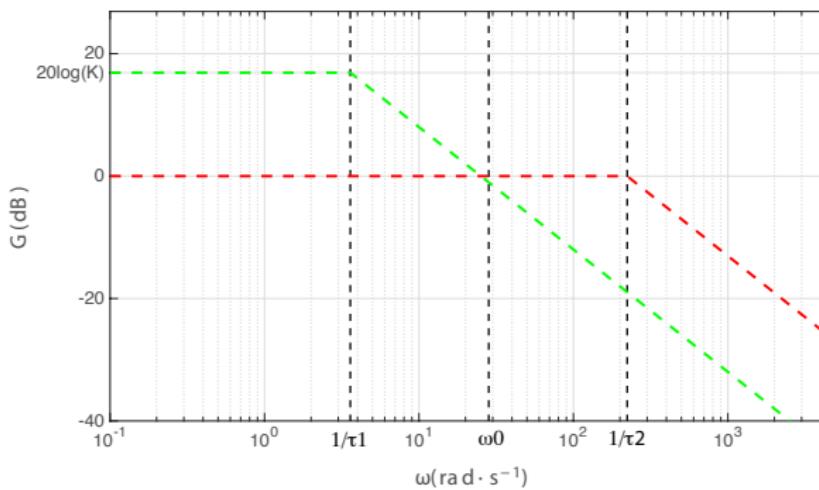




## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ❶  $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$  : 2 pôles réels.

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log \left( \left| \frac{K}{1 + j \frac{1}{\tau_1} \omega} \right| \right) + 20 \log \left( \left| \frac{1}{1 + j \frac{1}{\tau_2} \omega} \right| \right)$$

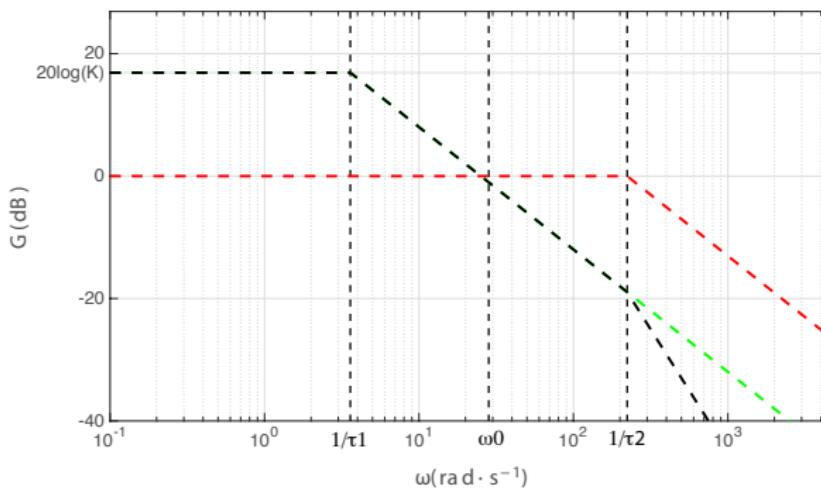




## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ❶  $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$  : 2 pôles réels.

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log \left( \left| \frac{K}{1 + j \frac{1}{\tau_1} \omega} \right| \right) + 20 \log \left( \left| \frac{1}{1 + j \frac{1}{\tau_2} \omega} \right| \right)$$

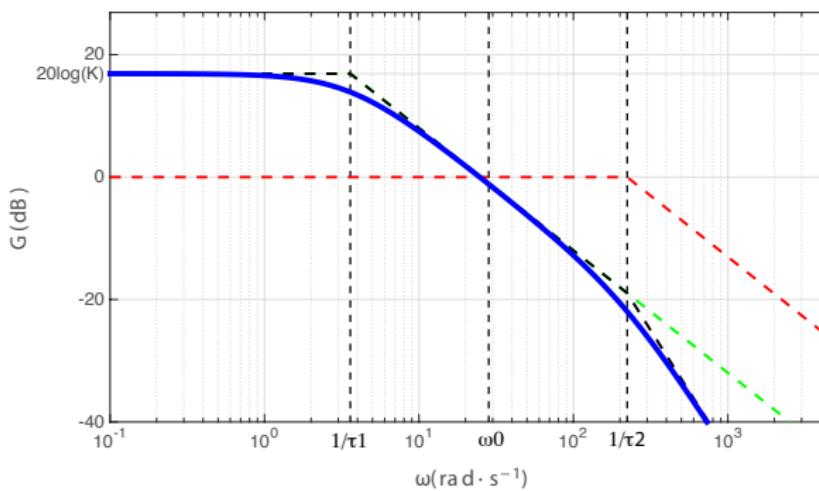




## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ❶  $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$  : 2 pôles réels.

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log \left( \left| \frac{K}{1 + j \frac{1}{\tau_1} \omega} \right| \right) + 20 \log \left( \left| \frac{1}{1 + j \frac{1}{\tau_2} \omega} \right| \right)$$

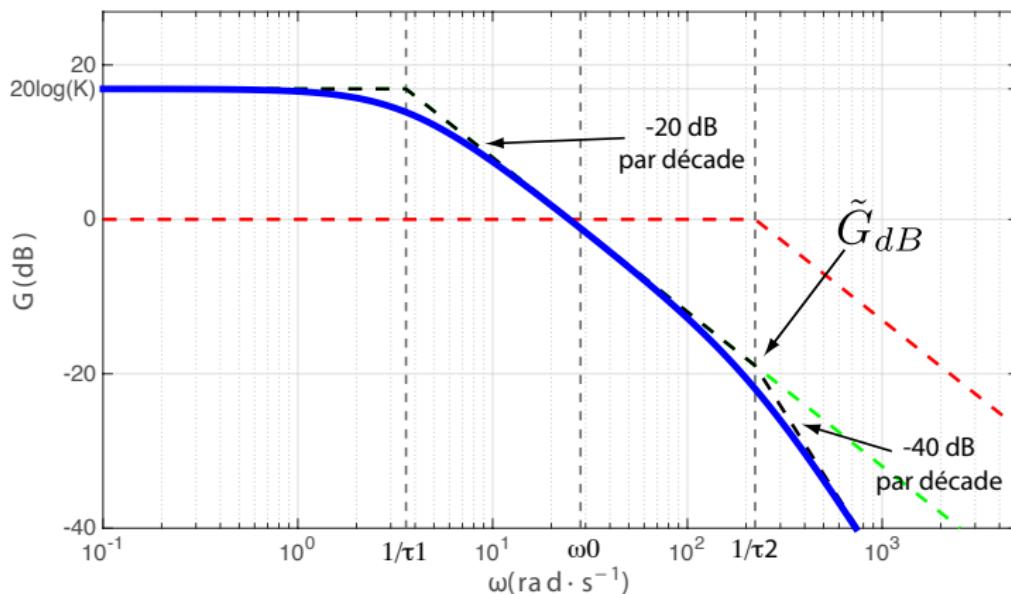




## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- 1  $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$  : 2 pôles réels.

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log \left( \left| \frac{K}{1 + j \frac{1}{\tau_1} \omega} \right| \right) + 20 \log \left( \left| \frac{1}{1 + j \frac{1}{\tau_2} \omega} \right| \right)$$





## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ④  $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$  : 2 pôles réels.

- Pour la phase on obtient :

$$\varphi(\omega) = \arg\left(\frac{K}{1 + j T_1 \omega}\right) + \arg\left(\frac{1}{1 + j T_2 \omega}\right)$$

- Somme de deux premier ordre :

- $\varphi_1$  de gain statique  $K$  et de constante de temps  $T_1$ .
- $\varphi_2$  de gain statique 1 et de constante de temps  $T_2$ .

## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ④  $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$  : 2 pôles réels.

  - Pour la phase on obtient :

$$\varphi(\omega) = \arg\left(\frac{K}{1+jT_1\omega}\right) + \arg\left(\frac{1}{1+jT_2\omega}\right)$$

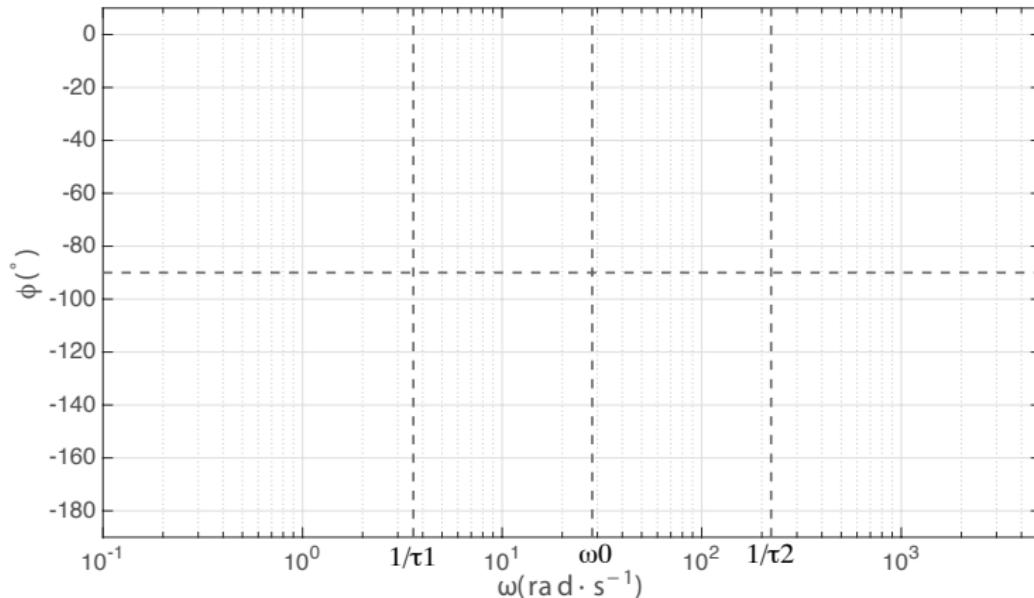
- Somme de deux premier ordre :
    - $\varphi_1$  de gain statique  $K$  et de constante de temps  $T_{1\text{--}}$
    - $\varphi_2$  de gain statique 1 et de constante de temps  $T_{2\text{--}}$



## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

①  $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$  : 2 pôles réels.

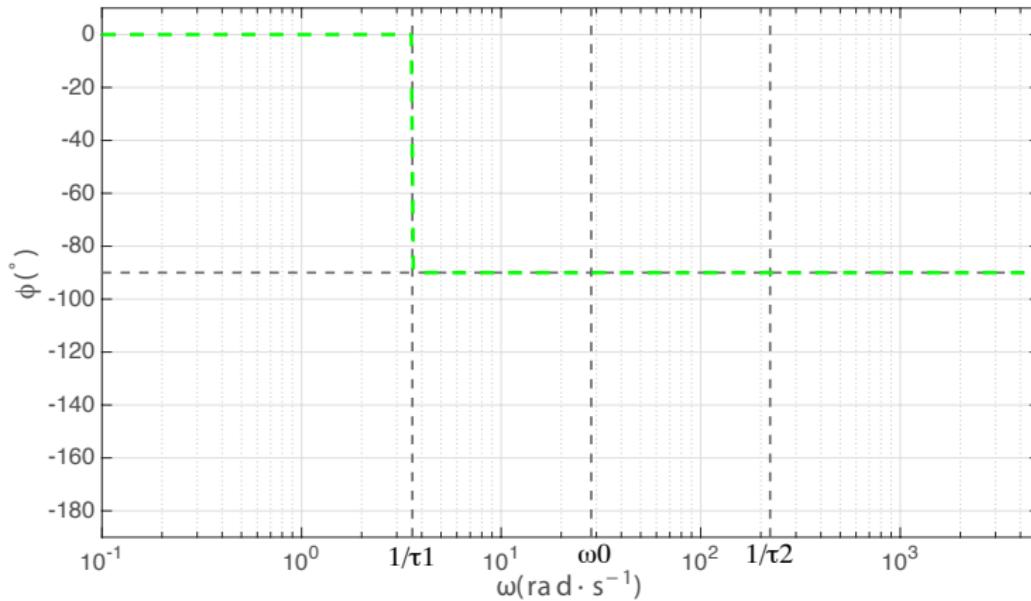
$$\varphi(\omega) = \arg\left(\frac{K}{1+j T_1 \omega}\right) + \arg\left(\frac{1}{1+j T_2 \omega}\right)$$



## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

$$\textcircled{1} \quad \xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0 : 2 \text{ pôles réels.}$$

$$\varphi(\omega) = \arg\left(\frac{K}{1+jT_1\omega}\right) + \arg\left(\frac{1}{1+jT_2\omega}\right)$$

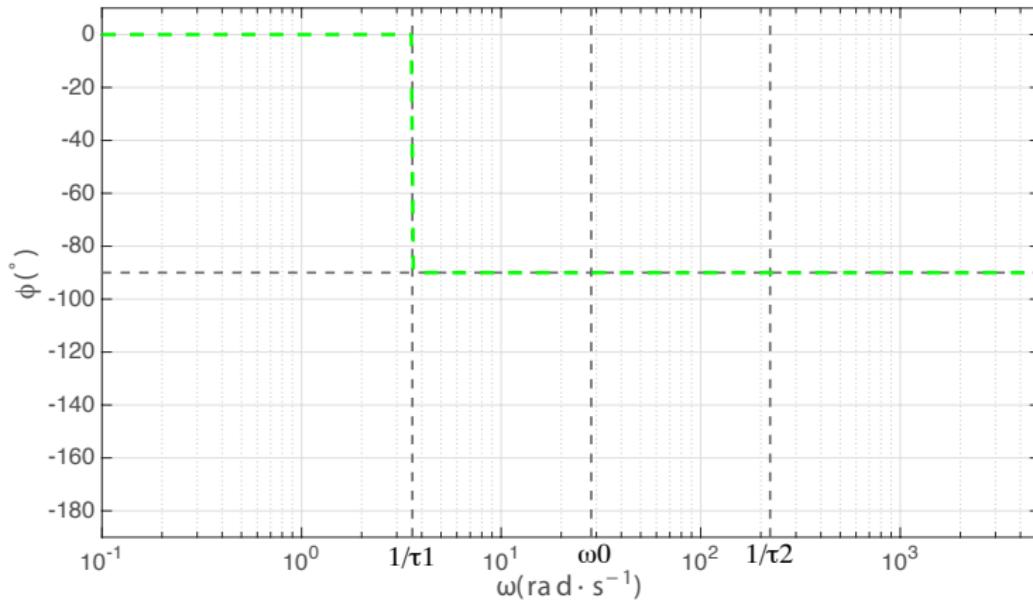




## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

①  $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$  : 2 pôles réels.

$$\varphi(\omega) = \arg\left(\frac{K}{1+j T_1 \omega}\right) + \arg\left(\frac{1}{1+j T_2 \omega}\right)$$

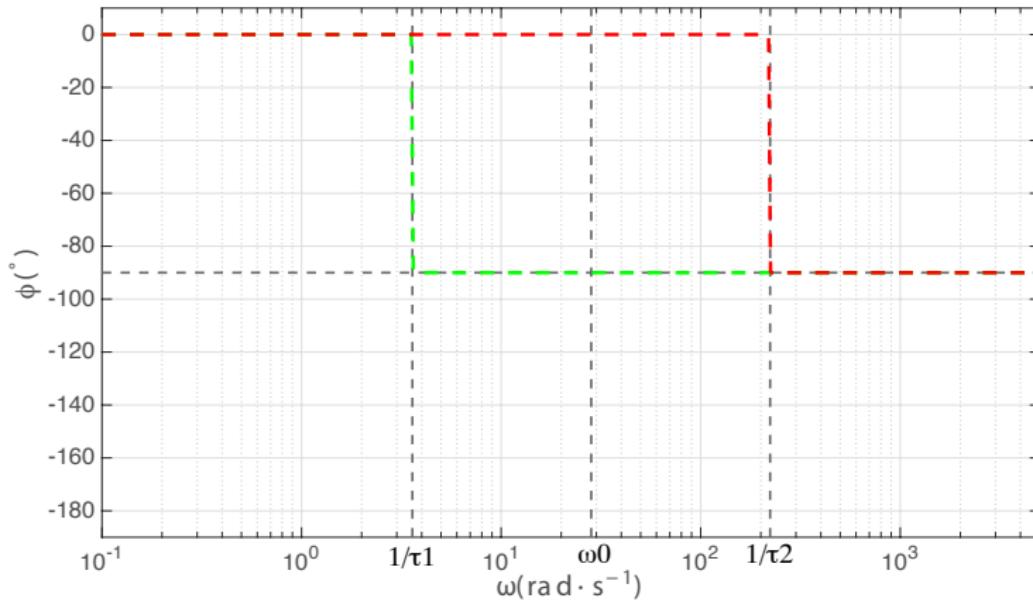


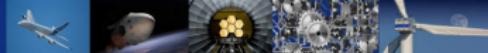


## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

①  $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$  : 2 pôles réels.

$$\varphi(\omega) = \arg\left(\frac{K}{1+j T_1 \omega}\right) + \arg\left(\frac{1}{1+j T_2 \omega}\right)$$

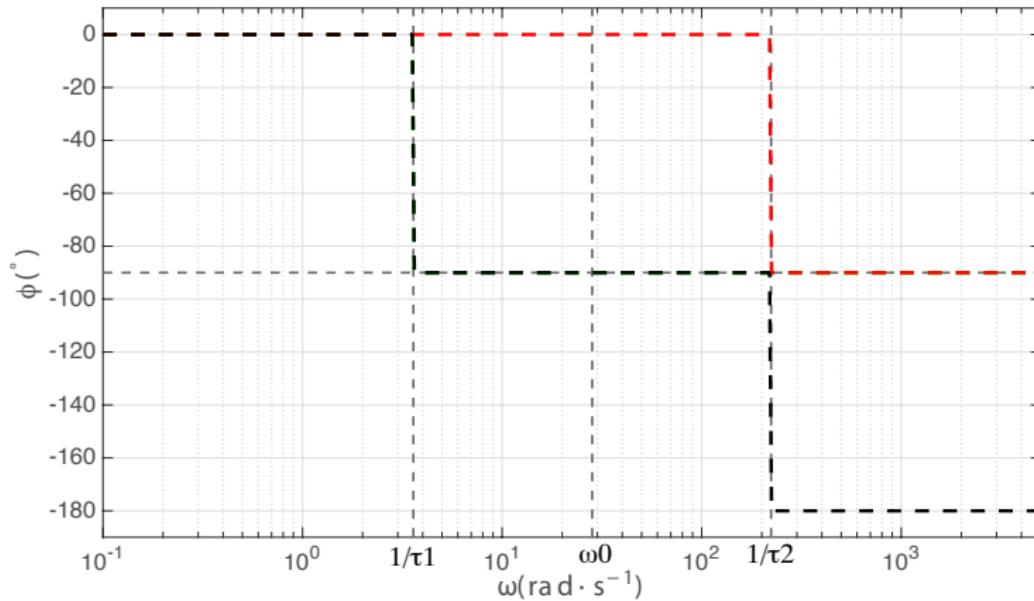




## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

①  $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$  : 2 pôles réels.

$$\varphi(\omega) = \arg\left(\frac{K}{1+j T_1 \omega}\right) + \arg\left(\frac{1}{1+j T_2 \omega}\right)$$

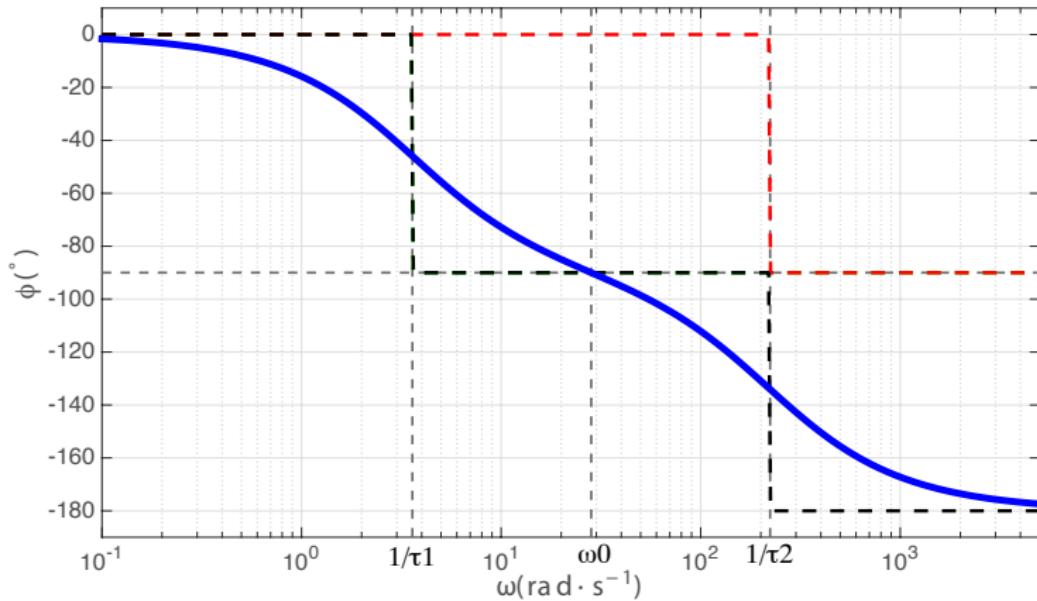




## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

①  $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$  : 2 pôles réels.

$$\varphi(\omega) = \arg\left(\frac{K}{1+j T_1 \omega}\right) + \arg\left(\frac{1}{1+j T_2 \omega}\right)$$



## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- Cas où  $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$  : 2 pôles complexes.



## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ② • Cas où  $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$  : 2 pôles complexes.



$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\omega\right)^2}}.$$

- Diagramme asymptotique de  $G_{dB}$  et  $\varphi$  lorsque :



## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- Cas où  $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$  : 2 pôles complexes.

- 1

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\omega\right)^2}}.$$

- Diagramme asymptotique de  $G_{dB}$  et  $\varphi$  lorsque :

## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

• Cas où  $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$  : 2 pôles complexes.

- 

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\omega\right)^2}}.$$

- Diagramme asymptotique de  $G_{dB}$  et  $\varphi$  lorsque :

- ①  $\omega \rightarrow 0$ ,  
 ②  $\omega \rightarrow +\infty$ .

## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ② Cas où  $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$  : 2 pôles complexes.

1

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\omega\right)^2}}.$$

- Diagramme asymptotique de  $G_{dB}$  et  $\varphi$  lorsque :

- 1**  $\omega \rightarrow 0,$   
**2**  $\omega \rightarrow +\infty.$

## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- Cas où  $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$  : 2 pôles complexes.

①  $\omega \rightarrow 0 :$

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0} \omega\right)^2} \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 20 \log(K)$$

Droite horizontale située à  $20 \log(K)$

## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- Cas où  $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$  : 2 pôles complexes.

$$① \omega \rightarrow 0 :$$

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\omega\right)^2} \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 20 \log(K)$$

Droite horizontale située à  $20 \log(K)$

- $$② \omega \rightarrow +\infty :$$

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log\left(\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\omega\right)^2}\right) \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} 20 \log(K) - 40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ② • Cas où  $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$  : 2 pôles complexes.

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\omega\right)^2} \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 20 \log(K)$$

Droite horizontale située à  $20 \log(K)$

- $$② \omega \rightarrow +\infty :$$

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log\left(\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\omega\right)^2}\right) \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} 20 \log(K) - 40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

- Équation du gain asymptotique  $\tilde{G}_{dB}$  en  $+\infty$  est donnée par :

$$\tilde{G}_{dB} = 20 \log(K) + 40 \log(\omega_0) - 40 \log(\omega)$$

Sur le tracé semi-logarithmique, ceci correspond à une droite affine avec

## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ② • Cas où  $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$  : 2 pôles complexes.

①  $\omega \rightarrow 0 :$

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\omega\right)^2} \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 20 \log(K)$$

Droite horizontale située à  $20 \log(K)$

- $$② \omega \rightarrow +\infty :$$

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log\left(\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\omega\right)^2}\right) \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} 20 \log(K) - 40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

- Équation du gain asymptotique  $\tilde{G}_{dB}$  en  $+\infty$  est donnée par :

$$\tilde{G}_{dB} = 20 \log(K) + 40 \log(\omega_0) - 40 \log(\omega)$$

Sur le tracé semi-logarithmique, ceci correspond à une droite affine avec

- pour coefficient directeur  $-40 \text{ dB par d閎cada}$ ,
  - et qui coupe la branche asymptotique  $\omega \rightarrow 0$  en  $\omega = \omega_0$

## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ② • Cas où  $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$  : 2 pôles complexes.

①  $\omega \rightarrow 0 :$

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\omega\right)^2} \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 20 \log(K)$$

Droite horizontale située à  $20 \log(K)$

- $$② \omega \rightarrow +\infty :$$

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log\left(\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\omega\right)^2}\right) \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} 20 \log(K) - 40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

- Équation du gain asymptotique  $\tilde{G}_{dB}$  en  $+\infty$  est donnée par :

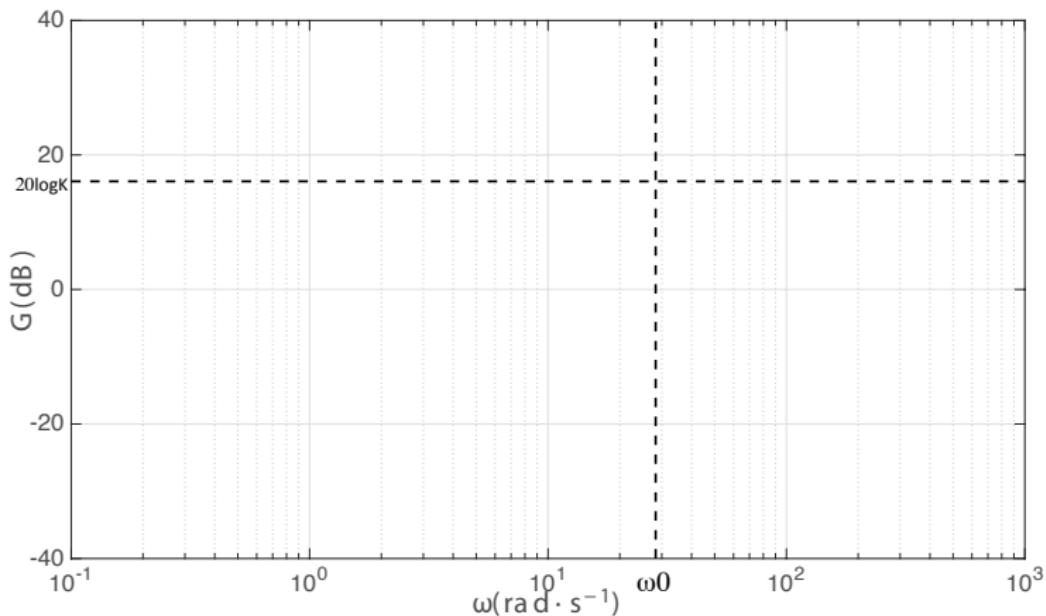
$$\tilde{G}_{dB} = 20 \log(K) + 40 \log(\omega_0) - 40 \log(\omega)$$

Sur le tracé semi-logarithmique, ceci correspond à une droite affine avec

- pour coefficient directeur  $-40 \text{ dB par d閎cada}$ ,
  - et qui coupe la branche asymptotique  $\omega \rightarrow 0$  en  $\omega = \omega_0$

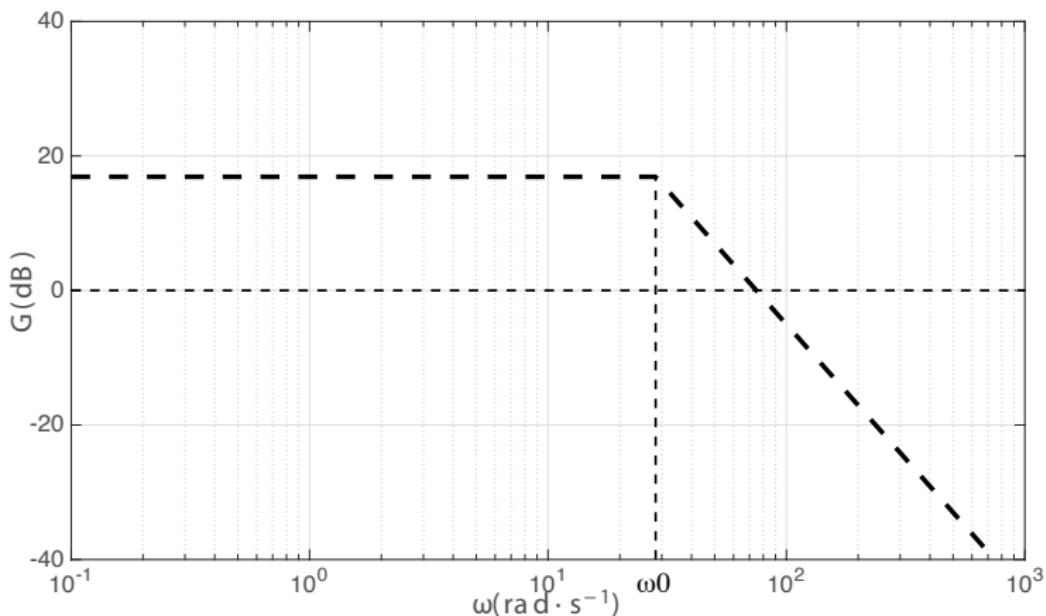


## Construction des diagrammes de Bode : second ordre



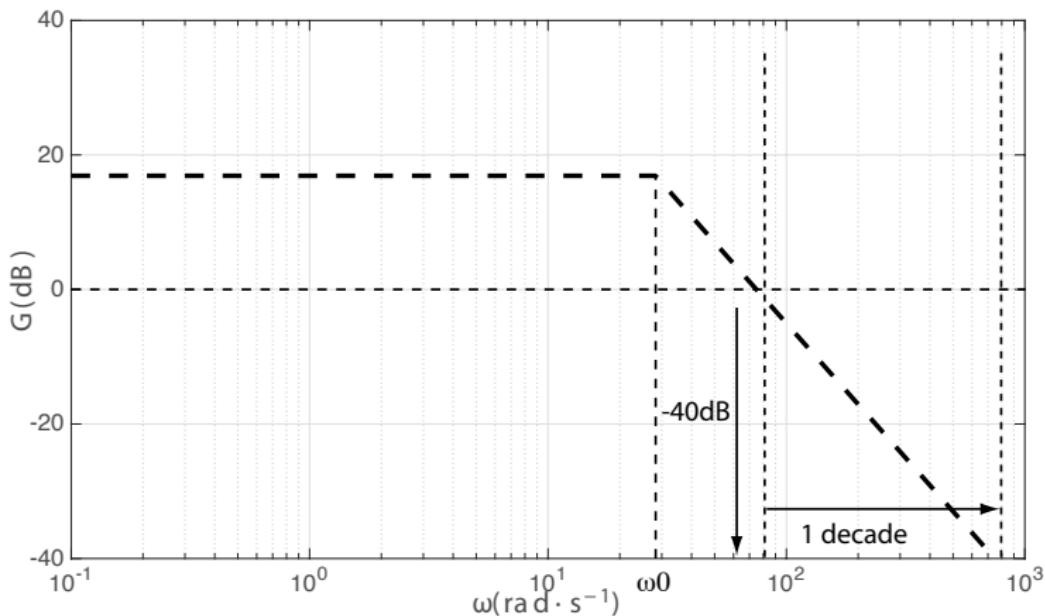


## Construction des diagrammes de Bode : second ordre



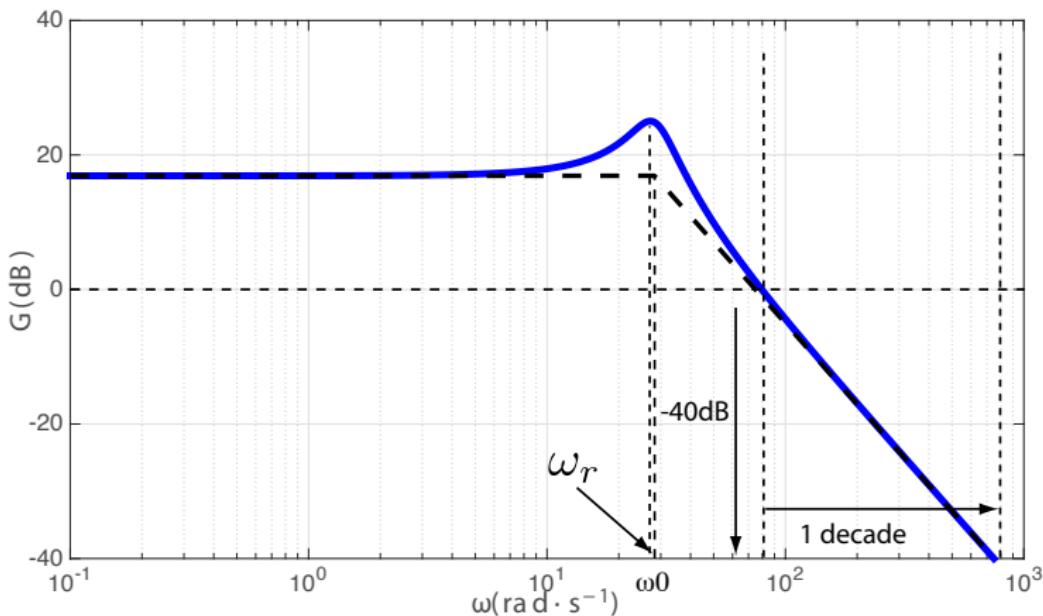


## Construction des diagrammes de Bode : second ordre





## Construction des diagrammes de Bode : second ordre





## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ② • Cas où  $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$ , 2 pôles complexes : : tracé du diagramme asymptotique en phase

$$\varphi = \arg(K) - \arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)$$

- ①  $\omega \rightarrow 0$  :

$$\varphi \xrightarrow[\omega \rightarrow 0]{} 0$$

ce qui correspond à une droite horizontale située à  $0^\circ$

- ②  $\omega \rightarrow +\infty$  :

$$\varphi \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} -\arg\left(-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right).$$

• Ce qui correspond à l'opposé de l'argument d'un réel sur la partie réelle négative, donc :

$$\varphi \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} -\arg(-1) = -180^\circ$$

## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ❷ • Cas où  $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$ , 2 pôles complexes : : tracé du diagramme asymptotique en phase

$$\varphi = \arg(K) - \arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)$$

- ①  $\omega \rightarrow 0 :$

$$\varphi \xrightarrow[\omega \rightarrow 0]{} 0$$

ce qui correspond à une droite horizontale située à  $0^\circ$

- ②  $\omega \rightarrow +\infty$  :

$$\varphi \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} -\arg \left( -\left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right).$$

## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- Cas où  $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$ , 2 pôles complexes : : tracé du diagramme asymptotique en phase

$$\varphi = \arg(K) - \arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)$$

- ①  $\omega \rightarrow 0 :$

$$\varphi \xrightarrow[\omega \rightarrow 0]{} 0$$

ce qui correspond à une droite horizontale située à  $0^\circ$

- ②  $\omega \rightarrow +\infty$ :

$$\varphi \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} -\arg \left( -\left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right).$$

- Ce qui correspond à l'opposé de l'argument d'un réel pur à partie réelle négative, donc :

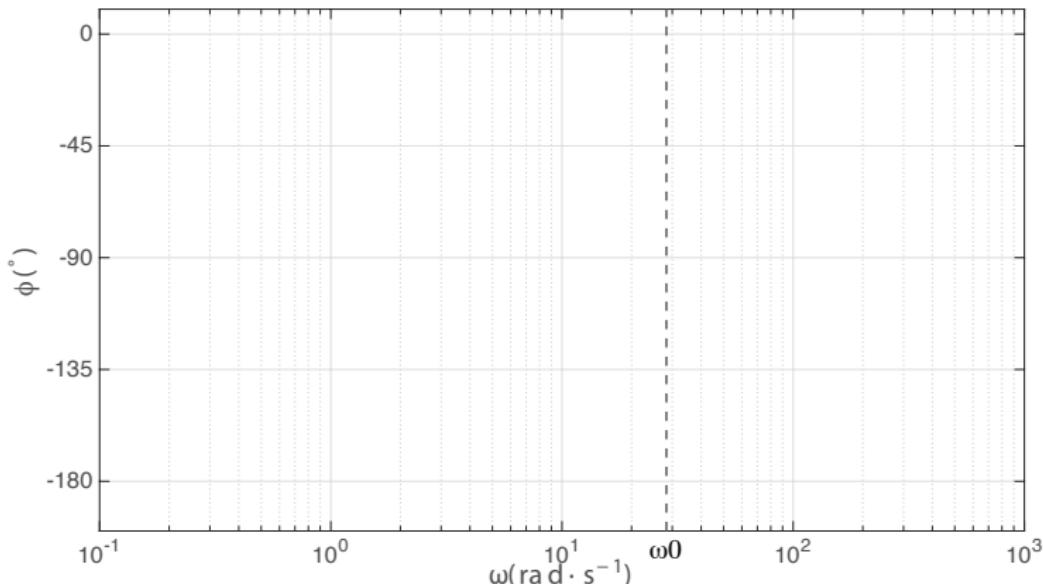
$$\varphi \xrightarrow[\omega \rightarrow +\infty]{} -\pi = -180^\circ.$$



## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ❷ • Cas où  $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$ , 2 pôles complexes : tracé du diagramme asymptotique en phase

$$\varphi = \arg(K) - \arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)$$

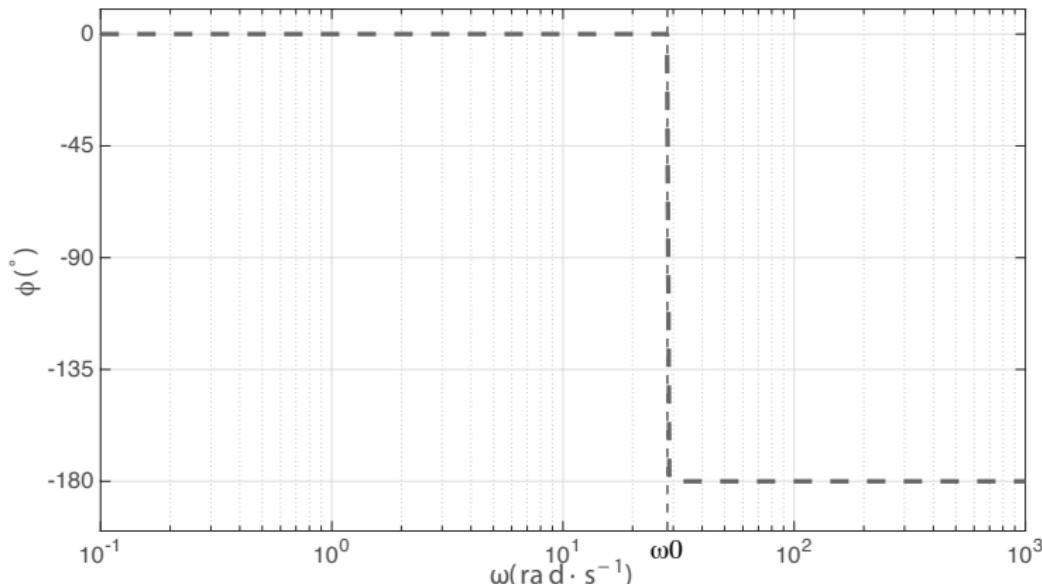




## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ❷ Cas où  $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$ , 2 pôles complexes : tracé du diagramme asymptotique en phase

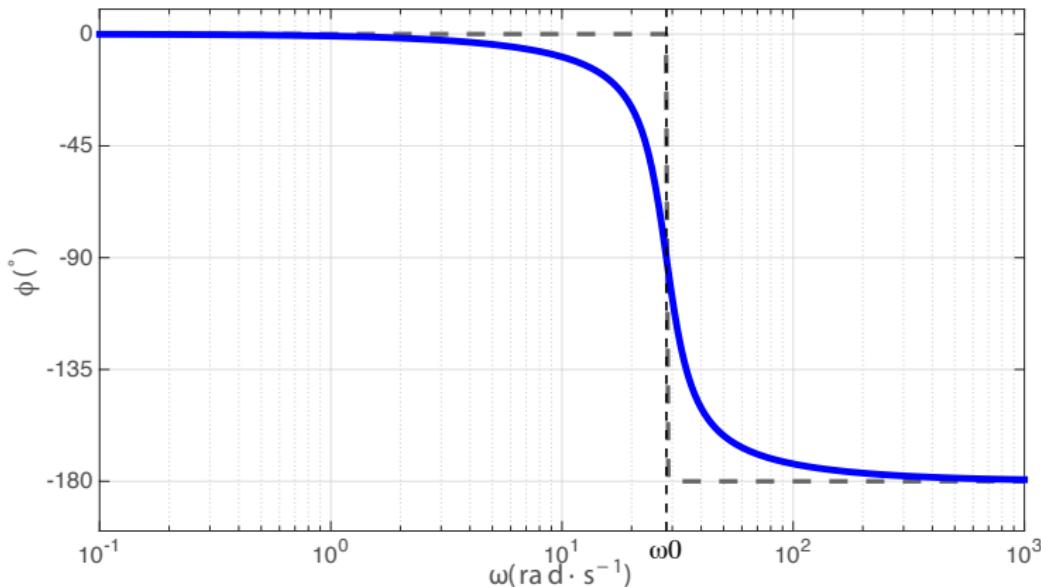
$$\varphi = \arg(K) - \arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)$$



## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- Cas où  $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$ , 2 pôles complexes : tracé du diagramme asymptotique en phase

$$\varphi = \arg(K) - \arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)$$





## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

### Pulsation de résonance

**La pulsation de résonance** est définie comme la pulsation correspondant au maximum du gain.

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (9)$$

Ainsi la résonance existe uniquement si  $\xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

### Facteur de résonance

On appelle le facteur de résonance ou coefficient de surtension la grandeur  $Q$  définie par :

$$Q = \frac{|H(j\omega)|_{max}}{\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)|} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (10)$$



## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

### Pulsation de résonance

**La pulsation de résonance** est définie comme la pulsation correspondant au maximum du gain.

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (9)$$

Ainsi la résonance existe uniquement si  $\xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

### Facteur de résonance

On appelle le **facteur de résonance ou coefficient de surtension** la grandeur  $Q$  définie par :

$$Q = \frac{|H(j\omega)|_{max}}{\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)|} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (10)$$



## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Démonstration du facteur de résonance  $|H(j\omega)|_{max}$  est obtenu lorsque  $\omega = \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$ .

- On obtient alors,

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|_{max} &= \frac{K}{\sqrt{\left(1 - (1 - 2\xi^2) \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0} \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}\right)^2}} \\ &= \frac{K}{\sqrt{(1 - 1 + 2\xi^2)^2 + \left(2\xi\sqrt{1 - 2\xi^2}\right)^2}} = \frac{K}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2(1 - 2\xi^2)}} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \end{aligned}$$

- De plus on peut calculer  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)|$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)| = K.$$



## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Démonstration du facteur de résonance  $|H(j\omega)|_{max}$  est obtenu lorsque  $\omega = \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$ .

- On obtient alors,

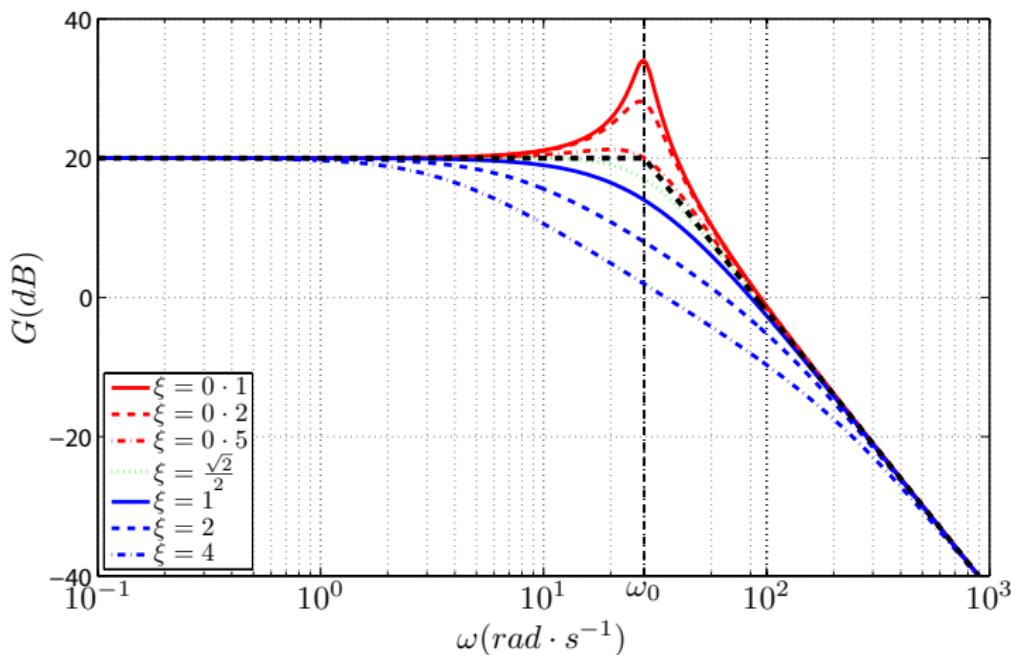
$$\begin{aligned} |H(j\omega)|_{max} &= \frac{K}{\sqrt{\left(1 - (1 - 2\xi^2) \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0} \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}\right)^2}} \\ &= \frac{K}{\sqrt{(1 - 1 + 2\xi^2)^2 + \left(2\xi\sqrt{1 - 2\xi^2}\right)^2}} = \frac{K}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2(1 - 2\xi^2)}} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \end{aligned}$$

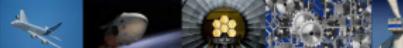
- De plus on peut calculer  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)|$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)| = K.$$



## Construction des diagrammes de Bode : second ordre





## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

