# C6 : Analyse temporelle des systèmes asservis
# C6-2 : Analyse temporelle des SLCI (2nd ordre)

Émilien DURIF

Lycée La Martinière Monplaisir Lyon

Classe de MPSI

19 Mars 2024

# Plan

# Plan

# Système du second ordre

## Système du second ordre

On appelle système du **deuxième ordre** *fondamental* tout système linéaire, continu et invariant régi par une équation différentielle de la forme :

$$\boxed{\frac{1}{{\omega_0}^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{2\xi}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=K\ e(t).} \quad (1)$$

## Propriété

La fonction de transfert de ces systèmes peut s'écrire sous la **forme canonique suivante** :

$$\boxed{H(p)=\frac{K}{\frac{1}{{\omega_0}^2}p^2+\frac{2\xi}{\omega_0}p+1}.} \quad (2)$$

où :

- $K$ est le **gain statique**,
- $\xi$ est le **coefficient d'amortissement**,
- $\omega_0$ est la **pulsation propre** (en $rad\ s^{-1}$).

# Système du second ordre

## Remarque

On parle de système du second ordre *fondamental* par opposition a un système *généralisé*, pour lequel le membre de droite de l'équation :

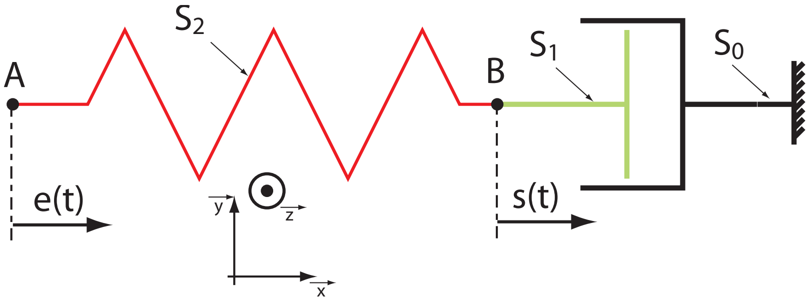
$$\frac{1}{{\omega_0}^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2}+\frac{2\xi}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=K\left(e(t)+\tau\frac{de(t)}{dt}\right)$$

est une équation différentielle du $1^{er}$ ordre. Dans ce cas, la fonction de transfert *généralisée* sera de la forme :

$$\boxed{H(p)=\frac{K\left(1+\tau p\right)}{1+\frac{2\xi}{\omega_0}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}}.} \tag{3}$$

# Système du second ordre : exemple

**Exemple : ressort de raideur** $k$ **et amortisseur de coefficient** $c$

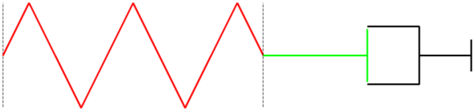



On déplace l'extrémité A d'une longueur $e(t)$. Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur $s(t)$.

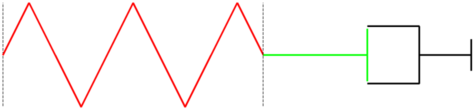
# Système du second ordre : exemple

**Exemple : ressort de raideur $k$ et amortisseur de coefficient $c$**
**Question : Comment le système va répondre ?**

Système oscillant

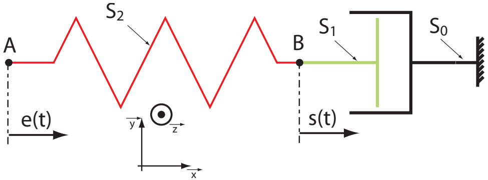


Système amorti



# Système du second ordre : exemple

**Exemple : ressort de raideur $k$ et amortisseur de coefficient $c$**



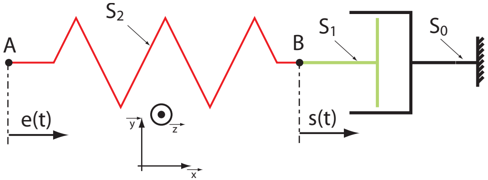

Sans négliger la masse $m$ de la tige, le principe fondamental de la dynamique appliqué à la tige donne :

- $$k(e(t) - s(t)) - c \cdot \frac{ds(t)}{dt} = m\frac{d^2s(t)}{dt^2}$$
- Équation différentielle de degré 2, ce qui montre que le **système est du deuxième ordre**.
- Avec les conditions initiales nulles ($s(t=0)=0$ et $s'(t=0)=0$) :

$$m \cdot p^2 \cdot S(p) + c \cdot p \cdot S(p) + k \cdot S(p) = k \cdot E(p).$$

# Système du second ordre : exemple

**Exemple : ressort de raideur** $k$ **et amortisseur de coefficient** $c$



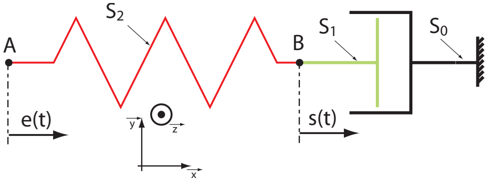

Sans négliger la masse $m$ de la tige, le principe fondamental de la dynamique appliqué à la tige donne :

- $$k(e(t) - s(t)) - c \cdot \frac{ds(t)}{dt} = m\frac{d^2s(t)}{dt^2}$$
- Équation différentielle de degré 2, ce qui montre que le **système est du deuxième ordre**.
- Avec les conditions initiales nulles ($s(t=0) = 0$ et $s'(t=0) = 0$) :

$$m \cdot p^2 \cdot S(p) + c \cdot p \cdot S(p) + k \cdot S(p) = k \cdot E(p).$$

# Système du second ordre : exemple

**Exemple : ressort de raideur $k$ et amortisseur de coefficient $c$**



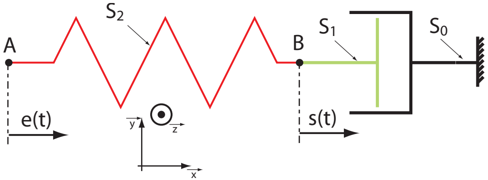

Sans négliger la masse $m$ de la tige, le principe fondamental de la dynamique appliqué à la tige donne :

- $$k(e(t) - s(t)) - c \cdot \frac{ds(t)}{dt} = m\frac{d^2s(t)}{dt^2}$$
- Équation différentielle de degré 2, ce qui montre que le **système est du deuxième ordre**.
- Avec les conditions initiales nulles ($s(t=0)=0$ et $s'(t=0)=0$) :

$$m \cdot p^2 \cdot S(p) + c \cdot p \cdot S(p) + k \cdot S(p) = k \cdot E(p).$$

## Système du second ordre : exemple

**Exemple : ressort de raideur** $k$ **et amortisseur de coefficient** $c$

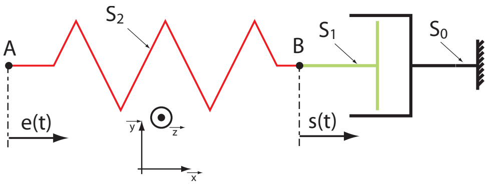



Sans négliger la masse $m$ de la tige, le principe fondamental de la dynamique appliqué à la tige donne :

- $$k(e(t) - s(t)) - c \cdot \frac{ds(t)}{dt} = m\frac{d^2s(t)}{dt^2}$$
- Équation différentielle de degré 2, ce qui montre que le **système est du deuxième ordre**.
- Avec les conditions initiales nulles ($s(t=0) = 0$ et $s'(t=0) = 0$) :

$$m \cdot p^2 \cdot S(p) + c \cdot p \cdot S(p) + k \cdot S(p) = k \cdot E(p).$$

# Système du second ordre : exemple




On obtient alors l'expression de la transmittance :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{1}{{\omega_0}^2}p^2 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + 1}.$$

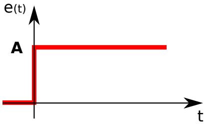
Avec,

- $K = 1$,
- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$,
- $\xi = \frac{c\omega_0}{2k}$.

# Plan

# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Transformée de Laplace d'un échelon :
$E(p) = \frac{e_0}{p}$




$$S(p) = H(p)\ E(p) = \frac{K\ e_0}{p\left(\frac{1}{{\omega_0}^2}p^2 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + 1\right)}$$
$$= \frac{K\ e_0\ \omega_0^2}{p\left(p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2\right)}$$

# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- **Comportement asymptotique :**

Au voisinage de $+\infty$ :

$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = \ldots$$

Au voisinage de 0 :

$$\lim_{t \to 0} s(t) = \ldots$$

# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- **Comportement asymptotique :**

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} s(t) &= \lim_{p\to 0} p\, S(p)\\ &= \lim_{p\to 0} \frac{K\ e_0\ \omega_0^2\ p}{p\left(p^2+2\xi\omega_0 p+\omega_0^2\right)}\\ &= K\ e_0\end{aligned}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{ds(t)}{dt} = 0$$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} s(t) &= \lim_{p\to+\infty} p\, S(p)\\ &= \lim_{p\to+\infty} \frac{K\ e_0\ \omega_0^2\ p}{p\left(p^2+2\xi\omega_0 p+\omega_0^2\right)}\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{ds(t)}{dt} &= \lim_{p\to+\infty} p\left[\frac{K\ e_0\ \omega_0^2\ p}{p\left(p^2+2\xi\omega_0 p+\omega_0^2\right)}\right]\\ &= 0\end{aligned}$$

# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- **Comportement asymptotique :**

## Propriétés

La réponse d'une système du deuxième ordre sollicité par un échelon possède :

- une **asymptote horizontale** d'équation $s(t) = k\ e_0$ au voisinage de $+\infty$,
- une **tangente horizontale** au voisinage de 0.

# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Pour calculer s(t), il faut décomposer S(p) en éléments simples. Cette opération débute par le calcul **des pôles** de la fonction de transfert.

## pôles de la fonction de transfert

On appelle **pôles de la fonction de transfert** les "zéros" du dénominateur (c'est à dire les racines).

$$S(p) = \frac{K\ e_0\ \omega_0^2}{p\left(p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2\right)}.$$

Ici $p = 0$ est déjà une racine évidente, reste à trouver $p_1$ et $p_2$ les racines de $p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2$ :

$$S(p) = \frac{K\ e_0\ \omega_0^2}{p\,(p - p_1)\,(p - p_2)}$$

# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

**Recherche des racines de $p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2$ :**
Discriminant : $\Delta = (2\xi\omega_0)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left(\xi^2 - 1\right)$ 3 cas possibles :

1. cas où $\xi > 1 \rightarrow \Delta > 0$ : 2 pôles réels ;
2. cas où $\xi = 1 \rightarrow \Delta = 0$ : 1 pôle réel double ;
3. cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$ : 2 pôles complexes.

## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

**Recherche des racines de $p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2$ :**

1. cas où $\xi > 1 \rightarrow \Delta > 0$ : 2 pôles réels ;

- $$\left\{ \begin{array}{ll} p_1 & = \omega_0 \left( -\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \\ p_2 & = \omega_0 \left( -\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \end{array} \right.$$
- avec $p_1 \; p_2 = \omega_0^2$.

$$S(p) = \frac{K \; e_0 \; \omega_0^2}{p \left( p - p_1 \right) \left( p - p_2 \right)} = K e_0 \omega_0^2 \left( \frac{A}{p} + \frac{B}{(p - p_1)} + \frac{C}{(p - p_2)} \right)$$

- Il reste à identifier $A$, $B$ et $C$ :
  - En multiplier par $p$ et faisant $p = 0$, on obtient :
    $$A = 1/\omega_0^2$$
    .
  - En multipliant par $p - p_1$ et faisant $p = p_1$, on obtient :
    $$B = \frac{1}{p_1(p_1 - p_2)}$$
    .
  - En multipliant par $p - p_2$ et faisant $p = p_2$, on obtient :
    $$C = \frac{1}{p_2(p_2 - p_1)}$$

# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

**Recherche des racines de $p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2$ :**

1. cas où $\xi > 1 \rightarrow \Delta > 0$ : 2 pôles réels ;

- $$\begin{cases} p_1 & = \omega_0 \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \\ p_2 & = \omega_0 \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \end{cases}$$
- avec $p_1 \; p_2 = \omega_0^2$.

$$S(p) = \frac{K \; e_0 \; \omega_0^2}{p\left(p - p_1\right)\left(p - p_2\right)} = K e_0 \omega_0^2 \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{(p - p_1)} + \frac{C}{(p - p_2)}\right)$$

- Il reste à identifier $A$, $B$ et $C$ :
  - En multipliant par $p$ et faisant $p = 0$, on obtient :
    $$A = 1/\omega_0^2$$
    .
  - En multipliant par $p - p_1$ et faisant $p = p_1$, on obtient :
    $$B = \frac{1}{p_1(p_1 - p_2)}$$
    .
  - En multipliant par $p - p_2$ et faisant $p = p_2$, on obtient :
    $$C = \frac{1}{p_2(p_2 - p_1)}$$

# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

**Recherche des racines de $p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2$ :**

1. cas où $\xi > 1 \rightarrow \Delta > 0$ : 2 pôles réels ;

- $$\left\{ \begin{array}{ll} p_1 & = \omega_0 \left( -\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \\ p_2 & = \omega_0 \left( -\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \end{array} \right.$$
- avec $p_1 \; p_2 = \omega_0^2$.

$$S(p) = \frac{K \; e_0 \; \omega_0^2}{p \left( p - p_1 \right) \left( p - p_2 \right)} = K e_0 \omega_0^2 \left( \frac{A}{p} + \frac{B}{(p - p_1)} + \frac{C}{(p - p_2)} \right)$$

- Il reste à identifier $A$, $B$ et $C$ :
  - En multipliant par $p$ et faisant $p = 0$, on obtient :
    $$A = 1/\omega_0^2$$
    .
  - En multipliant par $p - p_1$ et faisant $p = p_1$, on obtient :
    $$B = \frac{1}{p_1(p_1 - p_2)}$$
    .
  - En multipliant par $p - p_2$ et faisant $p = p_2$, on obtient :
    $$C = \frac{1}{p_2(p_2 - p_1)}$$

# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

**Recherche des racines de** $p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2$ **:**

1. cas où $\xi > 1 \rightarrow \Delta > 0$ : 2 pôles réels ;

- $$\begin{cases} p_1 &= \omega_0 \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \\ p_2 &= \omega_0 \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \end{cases}$$
- avec $p_1\ p_2 = \omega_0^2$.

$$S(p) = \frac{K\ e_0\ \omega_0^2}{p\left(p - p_1\right)\left(p - p_2\right)} = Ke_0\omega_0^2 \left(\frac{A}{p} + \frac{B}{\left(p - p_1\right)} + \frac{C}{\left(p - p_2\right)}\right)$$

- Il reste à identifier $A$, $B$ et $C$ :
  - En multipliant par $p$ et faisant $p = 0$, on obtient :
  $$A = 1/\omega_0^2$$
  .
  - En multipliant par $p - p_1$ et faisant $p = p_1$, on obtient :
  $$B = \frac{1}{p_1(p_1 - p_2)}$$
  .
  - En multipliant par $p - p_2$ et faisant $p = p_2$, on obtient :
  $$C = \frac{1}{p_2(p_2 - p_1)}$$

## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

1. cas où $\xi > 1 \rightarrow \Delta > 0$ : 2 pôles réels ;

$$S(p) = Ke_0\omega_0^2\left(\frac{1}{\omega_0^2 p} + \frac{1}{p_1\left(p_1 - p_2\right)\left(p - p_1\right)} + \frac{1}{p_2\left(p_2 - p_1\right)\left(p - p_2\right)}\right)$$

On rappelle que $\frac{1}{p+a}$ est la transformée de Laplace de $e^{-at}u(t)$. Après résolution, on trouve :

$$\boxed{s(t) = K\ e_0\left[1 - \frac{1}{p_2 - p_1}\left(p_2\ e^{p_1\ t} - p_1\ e^{p_2\ t}\right)\right]\ u(t).}$$

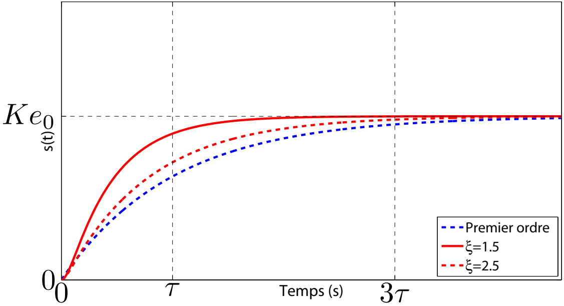
**Définition**

Il s'agit d'un **régime apériodique**.

# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

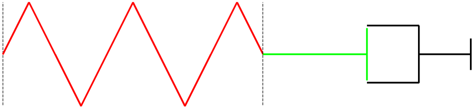
1. cas où $\xi > 1 \rightarrow \Delta > 0$ : 2 pôles réels : **régime apériodique**

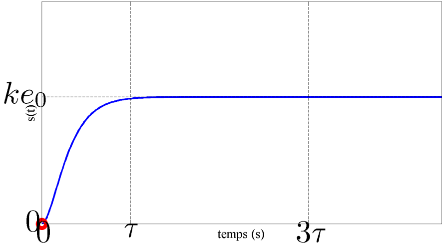
$$\boxed{s(t) = K\ e_0 \left[1 - \frac{1}{p_2 - p_1}\left(p_2\ e^{p_1\ t} - p_1\ e^{p_2\ t}\right)\right]\ u(t).} \qquad (4)$$



# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

1. cas où $\xi > 1 \rightarrow \Delta > 0$ : 2 pôles réels : **régime apériodique**





# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

2. cas où $\xi = 1 \rightarrow \Delta = 0$ : 1 pôle réel double

- Racines doubles :

$$r_1 = r_2 = r = -\omega_0$$

- La décomposition en éléments simple est alors :

$$S(p) = \frac{K\ e_0\ \omega_0^2}{p\,(p-r)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p-r)} + \frac{C}{(p-r)^2}$$

- On trouve au final :

$$s(t) = K\ e_0\left[1-(1+\omega_0\ t)e^{-\omega_0\ t}\right]\ u(t)$$

**Definition**

On parle alors de **régime apériodique critique**.

# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

2. cas où $\xi = 1 \rightarrow \Delta = 0$ : 1 pôle réel double

- Racines doubles :

$$r_1 = r_2 = r = -\omega_0$$

- La décomposition en éléments simple est alors :

$$S(p) = \frac{K\ e_0\ \omega_0^2}{p\,(p-r)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p-r)} + \frac{C}{(p-r)^2}$$

- On trouve au final :

$$s(t) = K\ e_0 \left[1 - (1+\omega_0\ t)e^{-\omega_0\ t}\right]\ u(t)$$

**Definition**

On parle alors de **régime apériodique critique**.

# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

2. cas où $\xi = 1 \rightarrow \Delta = 0$ : 1 pôle réel double

- Racines doubles :

$$r_1 = r_2 = r = -\omega_0$$

- La décomposition en éléments simple est alors :

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{K\ e_0\ \omega_0^2}{p\,(p-r)^2} \\ &= \frac{A}{p} + \frac{B}{(p-r)} + \frac{C}{(p-r)^2} \end{aligned}$$

- On trouve au final :

$$s(t) = K\ e_0\left[1 - (1 + \omega_0\ t)e^{-\omega_0\ t}\right]\ u(t)$$

**Definition**

On parle alors de **régime apériodique critique**.

# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

2. cas où $\xi = 1 \rightarrow \Delta = 0$ : 1 pôle réel double

- Racines doubles :

$$r_1 = r_2 = r = -\omega_0$$

- La décomposition en éléments simple est alors :

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{K\ e_0\ \omega_0^2}{p\,(p-r)^2} \\ &= \frac{A}{p} + \frac{B}{(p-r)} + \frac{C}{(p-r)^2} \end{aligned}$$

- On trouve au final :

$$s(t) = K\ e_0 \left[1 - (1 + \omega_0\ t)e^{-\omega_0\ t}\right]\ u(t)$$

**Definition**

On parle alors de **régime apériodique critique**.

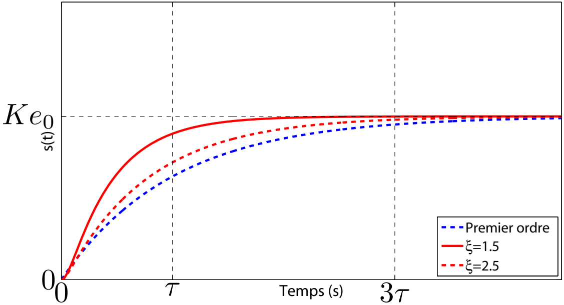
-

# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

2. cas où $\xi = 1 \rightarrow \Delta = 0$ : 1 pôle réel double : **Régime critique**

On trouve au final :

$$\boxed{s(t) = K\ e_0 \left[1 - (1 + \omega_0\ t)e^{-\omega_0\ t}\right]\ u(t).} \quad (5)$$

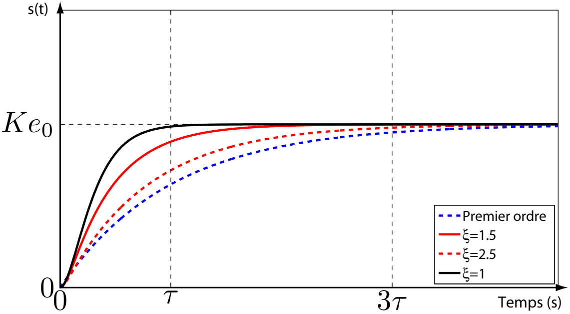


# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

2. cas où $\xi = 1 \rightarrow \Delta = 0$ : 1 pôle réel double : **Régime critique**

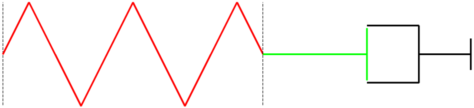
On trouve au final :

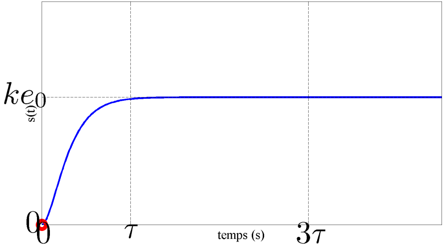
$$\boxed{s(t) = K\ e_0 \left[1 - (1 + \omega_0\ t)e^{-\omega_0\ t}\right]\ u(t).} \qquad (5)$$



# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

2. cas où $\xi = 1 \rightarrow \Delta = 0$ : 1 pôle réel double : **Régime critique**





# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

3. cas où $\xi =< 1 \rightarrow \Delta < 0$ : 2 pôles complexes :

La décomposition en éléments simple est alors :

$$S(p) = \frac{K\ e_0\ \omega_0}{p\left(p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2\right)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

La résolution et le retour dans le domaine temporel donne alors :

## Réponse temporelle

$$\boxed{s(t) = K\ e_0 \left[1 - e^{-\xi\omega_0 t}\left(\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\ t\right) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\ t\right)\right)\right]\ u(t).} \tag{6}$$

# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

3. cas où $\xi =< 1 \rightarrow \Delta < 0$ : 2 pôles complexes :

La décomposition en éléments simple est alors :

$$S(p) = \frac{K\ e_0\ \omega_0}{p\left(p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2\right)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

La résolution et le retour dans le domaine temporel donne alors :

## Réponse temporelle

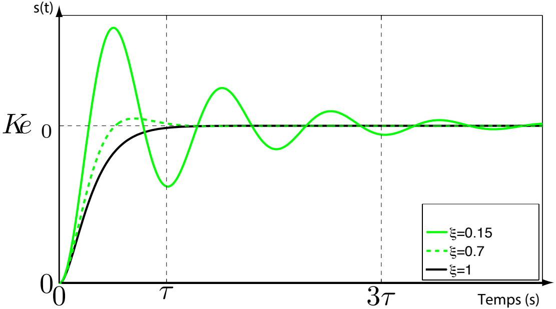
En posant $\xi = \cos(\phi)$ et $\sqrt{1-\xi^2} = \sin(\phi)$, le résultat peut se simplifier sous la forme :

$$\boxed{s(t) = K\ e_0 \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\ t + \phi\right)\right]\ u(t).} \tag{7}$$

# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

3. cas où $\xi =< 1 \rightarrow \Delta < 0$ : 2 pôles complexes : **Régime oscillatoire amorti** ou **pseudo-périodique**

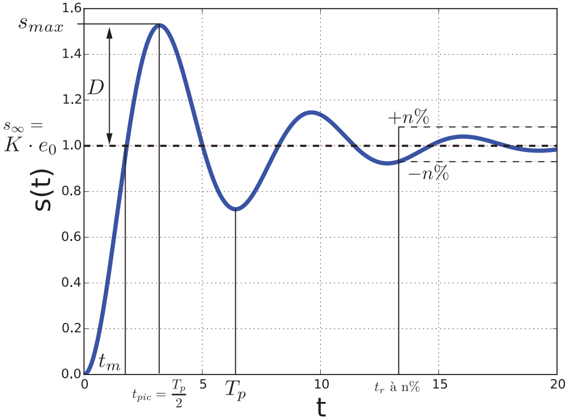
$$s(t) = K\ e_0 \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\ t + \phi\right)\right]\ u(t).$$



# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

3. cas où $\xi =< 1 \rightarrow \Delta < 0$ : 2 pôles complexes : **Régime oscillatoire amorti** ou **pseudo-périodique**

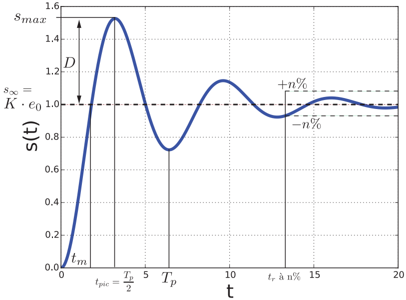
$$s(t) = K\, e_0 \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\; t + \phi\right)\right] \; u(t).$$



# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

3. cas où $\xi =< 1 \rightarrow \Delta < 0$ : 2 pôles complexes : **Régime oscillatoire amorti** ou **pseudo-périodique**

$$s(t) = K\, e_0 \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\; t + \phi\right)\right]\; u(t).$$

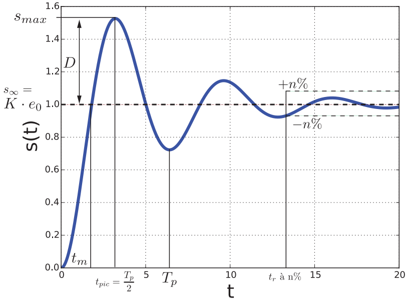



| | |
|---|---|
| Pseudo-pulsation | $\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ |
| Pseudo-période | $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$ |
| Temps de pic | $t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$ |

# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

3. cas où $\xi =< 1 \rightarrow \Delta < 0$ : 2 pôles complexes : **Régime oscillatoire amorti** ou **pseudo-périodique**

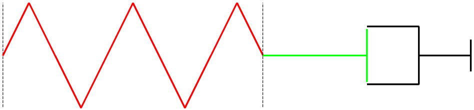
$$s(t) = K\ e_0 \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\ t + \phi\right)\right]\ u(t).$$

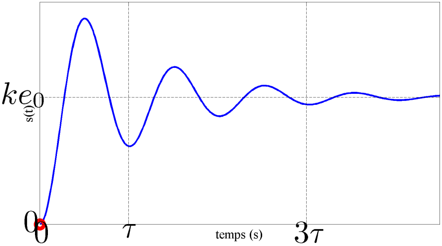



| | |
|---|---|
| Dépassement relatif | $Dr = \frac{s_{max} - s_\infty}{s_\infty} = exp\left(\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$ |
| Temps de montée | $t_m = \frac{1}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}(\pi - Arccos(\xi))$ |
| Temps de réponse à 5% pour $\xi = 0,7$ | $t_{r5\%} \cong \frac{3}{\omega_0 \xi}$ |

# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

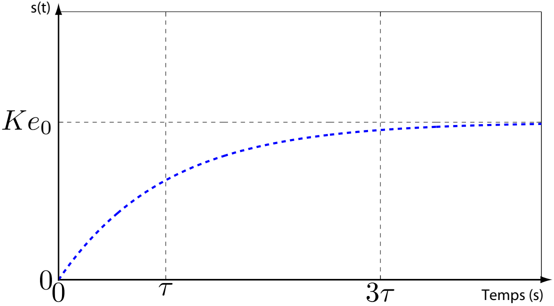
3. cas où $\xi =< 1 \rightarrow \Delta < 0$ : 2 pôles complexes : **Régime oscillatoire amorti** ou **pseudo-périodique**





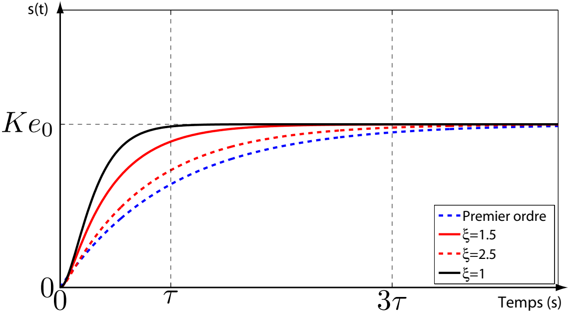
# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- Le paramètre $\xi$ **contribue à l'amortissement** du système mais également la diminution de la rapidité.
- Le paramètre $\omega_0$ **augmente la rapidité** du système mais contribue à augmenter l'instabilité car il diminue la période d'oscillation du régime pseudo-harmonique.
- Lorsque $\xi$ augmente, le comportement du système se rapproche de celui d'un premier ordre.



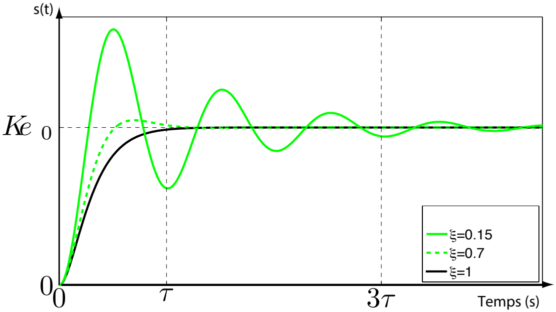
# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- Le paramètre $\xi$ **contribue à l'amortissement** du système mais également la diminution de la rapidité.
- Le paramètre $\omega_0$ **augmente la rapidité** du système mais contribue à augmenter l'instabilité car il diminue la période d'oscillation du régime pseudo-harmonique.
- Lorsque $\xi$ augmente, le comportement du système se rapproche de celui d'un premier ordre.



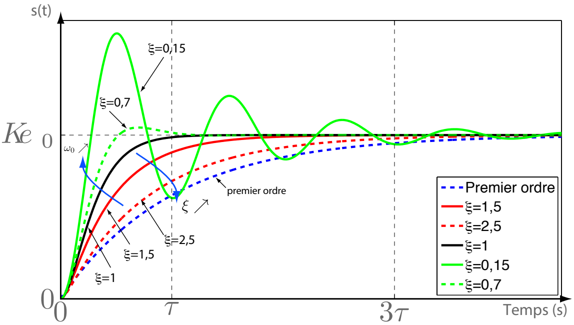
# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- Le paramètre $\xi$ **contribue à l'amortissement** du système mais également la diminution de la rapidité.
- Le paramètre $\omega_0$ **augmente la rapidité** du système mais contribue à augmenter l'instabilité car il diminue la période d'oscillation du régime pseudo-harmonique.
- Lorsque $\xi$ augmente, le comportement du système se rapproche de celui d'un premier ordre.



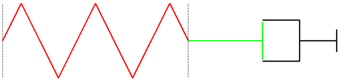
# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

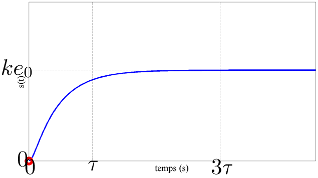
- Le paramètre $\xi$ **contribue à l'amortissement** du système mais également la diminution de la rapidité.
- Le paramètre $\omega_0$ **augmente la rapidité** du système mais contribue à augmenter l'instabilité car il diminue la période d'oscillation du régime pseudo-harmonique.
- Lorsque $\xi$ augmente, le comportement du système se rapproche de celui d'un premier ordre.



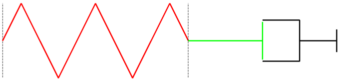
# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

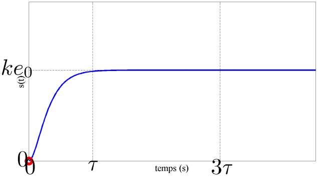
1. Régime apériodique





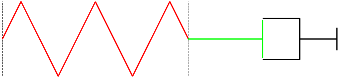

2. Régime critique

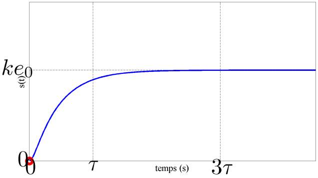




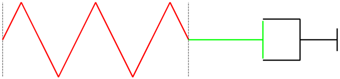
# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

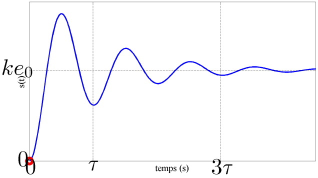
1. Régime apériodique



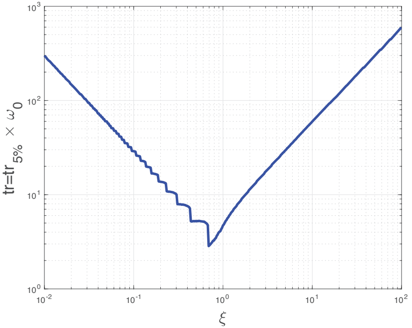



3. Régime pseudo-periodique





# Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon




## Rapidité

Le temps de réponse pour un système du second ordre dépend du coefficient d'amortissement $\xi$. Pour une valeur de $\xi$ donnée, il existe une relation entre $\omega_0$ et $t_r$ . On retiendra en particulier :

- le temps de réponse minimum obtenu pour $\xi = 0,7$ avec $t_r\,\omega_0 \approx 3$,
- le temps de réponse en régime apériodique critique $(\xi = 1)$ : $t_r\,\omega_0 \approx 5$

## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon