

LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIER

CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I. ET M.P.I.I.

ANNÉE 2023 - 2024



C3 : MODÉLISATION CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES  
COMPOSÉS DE CHAINES DE SOLIDES

### C3-3 - Cinématique du point

21 Novembre 2023

## Table des matières

<b>I Grandeurs de base liées à la cinématique du point</b>	
1 Introduction . . . . .	1
2 Vecteur position d'un point d'un solide . . . . .	2
3 Vecteur vitesse d'un point du solide . . . . .	2
4 Vecteur accélération d'un point d'un solide . . . . .	3
5 Trajectoire . . . . .	3
6 Vecteur de rotation instantané . . . . .	4
<b>II Dérivation vectorielle</b>	5
1 Vecteur exprimé dans la base de dérivation . . . . .	5
2 Vecteur exprimé dans une autre base . . . . .	5
<b>III Composition cinématique</b>	6
1 Composition des vitesses . . . . .	6
2 Composition des accélérations . . . . .	7
3 Composition par relation de Chasles . . . . .	7

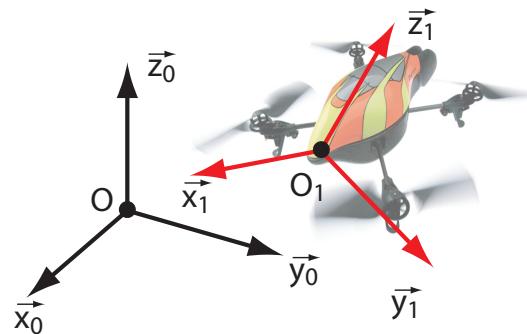
## Compétences

- **Modéliser**
  - Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.
  - Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.
  - Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.
- **Résoudre**
  - Caractériser le mouvement d'un repère par rapport à un autre repère.
- **Communiquer**
  - Utiliser un vocabulaire technique, des symboles et des unités adéquats.

## I. Grandeurs de base liées à la cinématique du point

### 1 Introduction

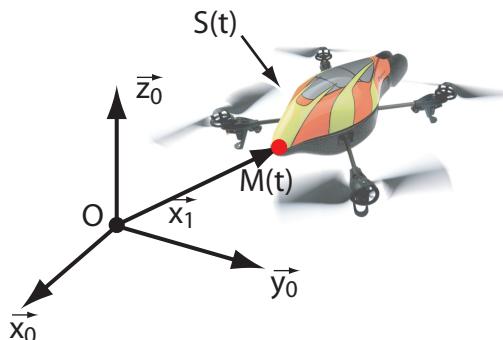
Ce chapitre présente les bases de calculs liées à la cinématique du point. Nous pourrons alors utiliser ces notions pour étudier les mouvements relatifs de solides. On étudiera les mouvements par rapport à des **référentiels d'observation**. Nous pourrons exprimer les champs de vitesses dans des repères ou des bases qui pourront être différents du référentiel d'observation. On les appellera **repère d'expression**.



## 2 Vecteur position d'un point d'un solide

### Définition 1 : Vecteur position

Soit un solide  $S$  en mouvement par rapport à un repère  $R_O$  ( $O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ ). On repère un point  $M(t)$  d'un solide à l'aide du vecteur position  $\overrightarrow{OM(t)}$ .



### Remarque 1 :

Pour exprimer  $\overrightarrow{OM(t)}$ , on pourra utiliser le système de coordonnées le plus adapté (voir chapitre précédent) au problème en tenant compte de la nature du mouvement.

## 3 Vecteur vitesse d'un point du solide

### Définition 2 : Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse par rapport au repère  $R_0$  du point  $M(t)$  du solide  $S$  à l'instant  $t$  est la dérivée par rapport à  $t$  par rapport au repère  $R_0$  (pour un observateur lié au repère  $R_0$ ) du vecteur position  $\overrightarrow{OM(t)}$  ( $O$  doit être fixe dans  $R_0$ ) :

$$\vec{V}(M/R_0) = \left[ \frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt} \right]_{R_0}. \quad (1)$$

- Le vecteur vitesse a une direction tangente à la trajectoire.
- La norme du vecteur vitesse est homogène à une longueur divisée par un temps.



### Attention :

Le vecteur vitesse est obtenu par dérivation vectorielle. La définition du repère par rapport auquel le vecteur position est dérivé est primordiale. Ce vecteur peut toutefois être exprimé dans n'importe quelle base. On préfèrera bien souvent représenter ce vecteur dans la base locale.



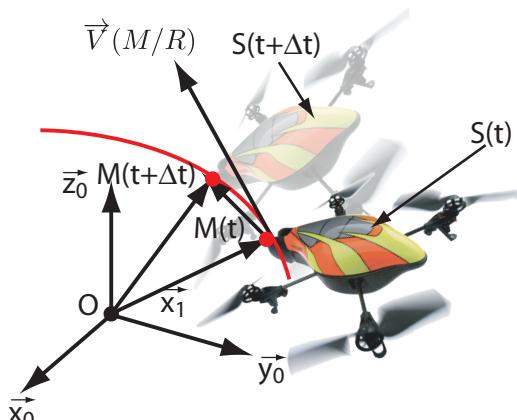
### Remarque 2 : Interprétation graphique

En reprenant la définition de la dérivée d'un vecteur, on écrit :

$$\vec{V}(M/R_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM(t + \Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)}}{\Delta t}.$$

où  $\Delta t$  représente un petit accroissement de la variable  $t$ . Or,

$$\overrightarrow{OM(t + \Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)}$$



La figure ci-contre est l'interprétation graphique de cette dernière équation. On remarque que lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\vec{V}(M/R_0) \rightarrow \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)}/\Delta t$

## 4 Vecteur accélération d'un point d'un solide



### Définition 3 : Vecteur accélération

Le vecteur accélération par rapport au repère  $R_0$  du point  $M(t)$  du solide  $S$  à l'instant  $t$  est la dérivée par rapport à  $t$  par rapport au repère  $R_0$  (pour un observateur lié au repère  $R_0$ ) du vecteur vitesse  $\vec{V}(M/R_0)$  ou la dérivée seconde par rapport à  $t$  par rapport au repère  $R_0$  (pour un observateur lié au repère  $R_0$ ) du vecteur position  $\overrightarrow{OM(t)}$  :

$$\vec{a}(M/R_0) = \left[ \frac{d\vec{V}(M/R_0)}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d^2\overrightarrow{OM(t)}}{dt^2} \right]_{R_0}. \quad (2)$$

La norme du vecteur accélération est homogène à une longueur divisée par un temps au carré.

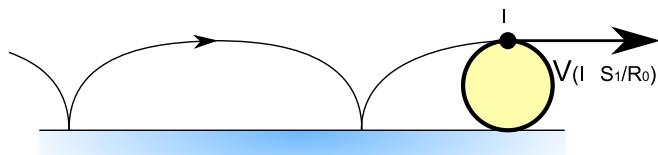
## 5 Trajectoire



### Définition 4 : Trajectoire

On définit la trajectoire ( $\Delta$ ) du point  $M$  dans le repère  $R_0$  par l'ensemble des points  $I$  de  $R$  par lequel passe  $M$  au cours du temps.

$$(\Delta) = \{M_{(t)}, \forall t\}$$



Épicycloïde : trajectoire d'une roue qui roule sans glisser sur un plan.

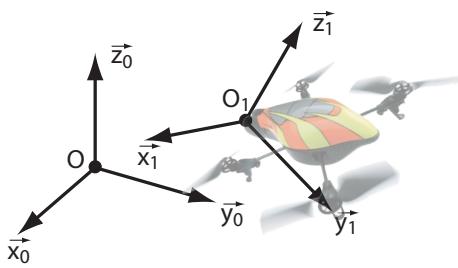
## 6 Vecteur de rotation instantané

### Définition 5 : Vecteur de rotation instantané

Soit le repère  $R_1$  attaché à  $S$ , le **vecteur de rotation instantané** du repère  $R_1$  par rapport à  $R_0$  (ou de  $S/R_0$ ) mesure la vitesse angulaire de changement d'orientation du repère  $R_1$  par rapport à  $R_0$ . On le note :

$$\vec{\Omega}(R_1/R_0). \quad (3)$$

Sa norme est homogène à un angle divisé par une unité de temps donc à l'inverse d'un temps (une mesure d'angle est sans dimension).

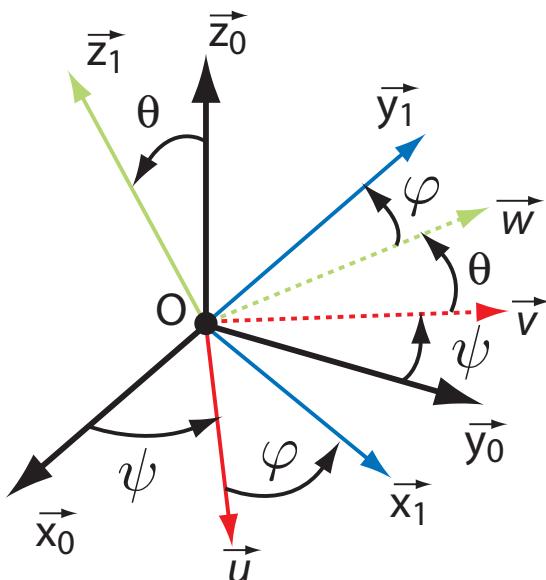


### Propriété 1 :

Contrairement au vecteur vitesse, le **vecteur de rotation instantané est le même pour tous les points d'un même solide**. Il ne dépend pas du point considéré.

### Exemple 1 :

Vecteur de rotation instantané de  $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  par rapport à  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  en fonction des angles d'Euler.



## II. Dérivation vectorielle

### 1 Vecteur exprimé dans la base de dérivation

La dérivation vectorielle consiste à dériver les coordonnées mais également les vecteurs unitaires d'une décomposition vectorielle.

On dérive le vecteur  $\overrightarrow{U(t)}$  qui est exprimé dans la base de dérivation  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt} \right]_{R_0} &= \left[ \frac{d(x(t) \cdot \vec{x}_0 + y(t) \cdot \vec{y}_0 + z(t) \cdot \vec{z}_0)}{dt} \right]_{R_0} \\ &= \frac{dx(t)}{dt} \cdot \vec{x}_0 + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \vec{y}_0 + \frac{dz(t)}{dt} \cdot \vec{z}_0 + x(t) \cdot \left[ \frac{d\vec{x}_0}{dt} \right]_{R_0} + y(t) \cdot \left[ \frac{d\vec{y}_0}{dt} \right]_{R_0} + z(t) \cdot \left[ \frac{d\vec{z}_0}{dt} \right]_{R_0}. \end{aligned}$$

Or les vecteurs unitaires  $\vec{x}_0$ ,  $\vec{y}_0$  et  $\vec{z}_0$  sont fixes dans le repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  donc par rapport au temps. On obtient alors :

$$\left[ \frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt} \right]_R = \frac{dx(t)}{dt} \cdot \vec{x}_0 + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \vec{y}_0 + \frac{dz(t)}{dt} \cdot \vec{z}_0. \quad (4)$$

### 2 Vecteur exprimé dans une autre base

Dans le cas où le vecteur  $\overrightarrow{U}$  est exprimé dans un autre repère (par exemple  $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ ) et que l'on souhaite dériver ce vecteur par rapport au repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .



#### Définition 6 : Formule de dérivation vectorielle

La formule de dérivation vectorielle s'écrit :

$$\left[ \frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{U(t)}, \quad (5)$$

où  $\vec{\Omega}(R_1/R_0)$  est le vecteur de rotation instantané du repère  $R_1$  par rapport au repère  $R_0$ .

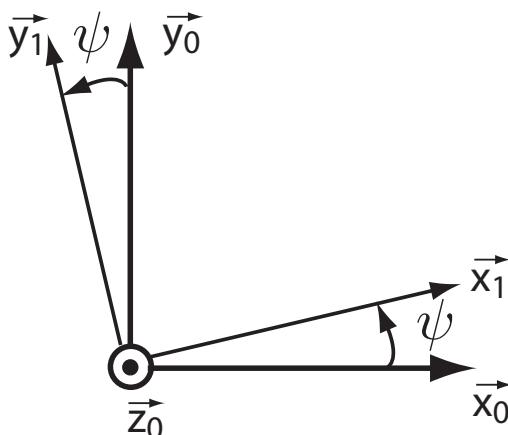


#### Exemple 2 :

Cas particulier de la rotation de  $R_1$  par rapport à  $R_0$  autour d'un seul axe fixe  $\vec{z}_0$  par rapport  $R_0$  avec pour paramètre de rotation  $\psi$ .

Donner les dérivées temporelles par rapport à  $R_0$  de  $\vec{x}_1$  et  $\vec{y}_1$  :

$$\bullet \left[ \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_0} :$$



$$\bullet \left[ \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_{R_0} :$$

**Remarque 3 :**

On remarque que la dérivée d'un vecteur tournant autour d'un axe fixe par rapport au repère de dérivation, a pour norme, la vitesse angulaire et est dirigée par le vecteur directement orthogonal au vecteur initial.

## III. Composition cinématique

---

### 1 Composition des vitesses

Soit un point  $M$  repéré par deux repères  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  et  $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ . Les centres  $O$  et  $O_1$  des repères  $R_0$  et  $R_1$  sont respectivement fixes par rapport à  $R_0$  et  $R_1$ . On décompose ainsi le vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  en passant par  $O_1$  :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$$

On calcule alors la vitesse de  $M$  par rapport au repère  $R_0$  à l'aide de la dérivée vectorielle du vecteur position :

Or,

On obtient alors

Où  $\vec{V}_e(M/R_0)$  se définit comme la vitesse d'entrainement de  $M$  par rapport à  $R_0$  :

De plus  $\vec{V}_r(M/R_1)$  se définit comme la vitesse relative de  $M$  par rapport au repère  $R_1$  :

**Définition 7 : Composition des vitesses**

La formule de composition des vitesses s'écrit alors :

$$\vec{V}(M/R_0) = \vec{V}_r(M/R_1) + \vec{V}_e(M, R_1/R_0) = \vec{V}(M/R_1) + \vec{V}(M \in R_1/R_0). \quad (6)$$

**Remarque 4 : Interprétation de la vitesse d'entraînement**

La vitesse d'entraînement  $\vec{V}(M \in R_1/R_0)$  s'interprète comme la vitesse du point  $M$  appartenant à  $R_1$  par rapport à  $R_0$ . C'est à dire comme si  $M$  était fixe dans  $R_1$ .

## 2 Composition des accélérations

**Définition 8 : Composition des accélérations**

La formule de composition des accélérations s'écrit :

$$\vec{a}(M/R_0) = \vec{a}(M/R_1) + \vec{a}(M, R_1/R_0) + 2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1) \quad (7)$$

L'accélération **absolue**  $\vec{a}(M/R_0)$  se décompose ainsi en :

- une accélération **relative** :  $\vec{a}(M/R_1)$ ,
- une accélération **d'entraînement** :  $\vec{a}(M, R_1/R_0) = \left[ \frac{d}{dt} (\vec{\Omega}(R_1/R_0)) \right]_{R_0} \wedge \vec{O_1 M} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge (\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{O_1 M})$ ,
- une accélération **complémentaire ou de Coriolis** :  $2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1)$ .

## 3 Composition par relation de Chasles

**Définition 9 : Composition par relation de Chasles**

Les champs cinématiques associés à la cinématique des solides sont décomposables à l'aide d'une "relation de Chasles" :

- Les vecteurs rotation instantanés :

$$\vec{\Omega}(S_n/S_0) = \vec{\Omega}(S_n/S_{n-1}) + \vec{\Omega}(S_{n-1}/S_{n-2}) \cdots \vec{\Omega}(1/0) \quad (8)$$

- les vecteurs vitesses d'entraînement en un même point  $A$  :

$$\vec{V}(A \in S_n/S_0) = \vec{V}(A \in S_n/S_{n-1}) + \vec{V}(A \in S_{n-1}/S_{n-2}) \cdots \vec{V}(A \in 1/0) \quad (9)$$

**Remarque 5 : Notion de torseur**

On verra dans le chapitre suivant que ces deux grandeurs seront modélisables dans un même outil : **Le Torseur Cinématique**.