Devoir à la maison n° 2

À rendre le 16 septembre

Dans cet exercice, on identifie le plan, muni d'un repère orthonormal, à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. Ainsi, on confondra tout point M avec son affixe z. On désigne par $\mathscr{H}$ l'ensemble des nombres complexes $z = x + iy$ dont la partie imaginaire est strictement positive (i.e $\mathrm{Im}(z) = y > 0$). On dit que $\mathscr{H}$ est le *demi-plan de Poincaré*.

1) Pour tout réel θ et pour tout complexe z dans $\mathscr{H}$, justifier l'existence puis l'appartenance à $\mathscr{H}$ du complexe $\dfrac{z\cos\theta - \sin\theta}{z\sin\theta + \cos\theta}$.
On précisera sa partie imaginaire.
Dans toute la suite de l'exercice, θ étant un réel fixé, on note A_θ l'application de $\mathscr{H}$ vers $\mathscr{H}$ définie par :

$$\forall z \in \mathscr{H},\ A_\theta(z) = \frac{z\cos\theta - \sin\theta}{z\sin\theta + \cos\theta}.$$

2) Rechercher les *points fixes* de A_θ, c'est-à-dire les solutions de $A_\theta(z) = z$.

3) Soient deux réels θ et θ'. Vérifier que pour tout $z \in \mathscr{H}$ on a

$$A_{\theta'}\left(A_\theta(z)\right) = A_{\theta'+\theta}(z).$$

De même, calculer $A_{-\theta}(z)$ puis $A_{-\theta}\left(A_\theta(z)\right)$.

4) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $a \in \mathscr{H}$ il existe un unique $b \in \mathscr{H}$ tel que $A_\theta(b) = a$. On dit que A_θ est une *bijection* de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}$.

5) On définit une fonction de $\mathscr{H}$ vers $\mathbb{R}$ en posant

$$\forall z \in \mathscr{H},\ c(z) = \frac{|z|^2 + 1}{2\,\mathrm{Im}(z)}.$$

Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $z \in \mathscr{H}$, $c\left(A_\theta(z)\right) = c(z)$.

6) Soient deux réels θ et θ' et $z \in \mathscr{H} \setminus \{i\}$. On note $\pi\mathbb{Z}$ l'ensemble $\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer l'équivalence :

$$\left(A_\theta(z) = A_{\theta'}(z)\right) \Leftrightarrow \left((\theta' - \theta) \in \pi\mathbb{Z}\right).$$

7) Soit $z_0 \in \mathscr{H} \setminus \{i\}$.

- **a)** Montrer que $c(z_0) \in \mathbb{R}_+^*$, puis que $c(z_0) > 1$.
- **b)** On appelle $\mathscr{C}$ le cercle de centre $ic(z_0)$ et de rayon $\sqrt{c(z_0)^2 - 1}$.
  - **i)** Vérifier que ce cercle $\mathscr{C}$ existe et qu'il est inclus dans $\mathscr{H}$.
  - **ii)** Vérifier que $z_0 \in \mathscr{C}$ et que $i \notin \mathscr{C}$.
  - **iii)** Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $A_\theta(z_0)$ est sur le cercle $\mathscr{C}$.

— FIN —