Semaine 12 du 5 janvier 2026 (S2)

XII – Suites numériques.

1. Vocabulaire.

2. Limite d'une suite réelle.

2.1. Définition et premières propriétés.

2.2. Opérations sur les limites.

2.2a. Étude de $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.2b. Étude de $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.2c. Étude de $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.2d. Étude de $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.2e. Étude de $(\max(u_n, v_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

2.2f. Exemples de formes indéterminées.

2.3. Limites et suites extraites.

2.4. Limites et inégalités.

3. Résultats de convergence.

3.1. Composition.

3.2. Utilisation d'inégalités.

3.2a. Techniques d'encadrement.

3.2b. Suites monotones.

3.2c. Suites adjacentes.

3.3. Théorème de Bolzano-Weierstrass.

La démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass n'est pas exigible.

4. Traduction séquentielle de certaines propriétés.

5. Suites particulières.

5.1. Suites arithmétiques.

5.2. Suites géométriques.

5.3. Suites arithmético-géométriques.

Méthode de résolution

5.4. Suites récurrentes linéaires doubles.

6. Suites définies par une relation de récurrence d'ordre 1.

6.1. Définition de la suite.

6.2. Recherche d'une limite éventuelle.

6.3. Cas où f est croissante sur A.

6.4. Cas où f est décroissante sur A.

7. Suites à valeurs complexes.

8. Premiers exemples de séries numériques.

8.1. Séries télescopiques.

8.2. Séries géométriques.

Questions de cours

Ces questions de cours sont à savoir traiter, et non à apprendre par cœur.
Les colleurs sont libres de demander tout ou partie d'une de ces questions de cours, mais aussi de mélanger les différentes questions ou de donner des exemples numériques différents de ceux proposés.
L'évaluation de la maîtrise du cours ne se limite pas à la question de cours : la connaissance des définitions et théorèmes du cours pourra être évaluée à tout moment de la colle.

- Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner les définitions quantifiées de « u tend vers ℓ », de « u tend vers $+\infty$ » et de « u tend vers $-\infty$ ».
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, soit $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ tels que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2$. Montrer que $\ell_1 = \ell_2$.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer qu'on ne peut pas avoir simultanément $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
- Montrer qu'une suite convergente est bornée.
- Montrer que la somme de deux suites qui convergent vers 0 converge vers 0. Montrer que la somme de deux suites convergentes est convergente.
- Donner la définition d'une suite extraite. Montrer que si une suite (u_n) tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toutes ses suites extraites aussi. Montrer que la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.
- Montrer que si une suite (u_n) tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ et si $a < \ell$, alors à partir d'un certain rang, $a < u_n$.
- Énoncer le théorème de minoration pour les suites réelles, et le démontrer.
- Énoncer le théorème d'encadrement, et le démontrer.
- Énoncer le théorème de la limite monotone. Le démontrer dans le cas d'une suite croissante majorée/d'une suite croissante non majorée.
- Donner la définition de suites adjacentes. Enoncer et démontrer le théorème des suites adjacentes.
- Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass. Donner le principe de la démonstration (aucune formalisation n'est exigible).
- Soit $A \subset \mathbb{R}$ admettant une borne supérieure $a \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite u à valeurs dans A convergeant vers a.
- Déterminer les suites u vérifiant $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n + 4$.
- Déterminer le terme général de la suite réelle u vérifiant $u_0 = 4$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -3u_{n+1} + 4$, de la suite réelle v vérifiant $v_0 = v_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = -v_{n+1} - v_n$, de la suite réelle w définie par $w_0 = 1$, $w_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} = 4w_{n+1} - 4w_n$.
- Soit $I \subset \mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f(I) \subset I$. Considérons la suite (u_n) définie par : $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

  On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Que peut-on dire sur ℓ et sous quelles hypothèses ?
- Montrer que si une fonction f est croissante sur un intervalle D stable par f, et de plus si une suite u vérifie $u_0 \in D$ ainsi que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, alors (u_n) est monotone.
- Montrer que si f est décroissante sur un intervalle D, stable par f, et si u est définie par $u_0 \in D$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraires.
- Déterminer l'ensemble des points fixes de $f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1+x}$ et étudier la suite v définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \sqrt{1+v_n}$.