

Devoir à la maison n° 5

À rendre le 4 novembre

On se propose de déterminer par analyse-synthèse toutes les solutions ne s'annulant pas sur leur domaine de définition de l'équation différentielle non linéaire

$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = y^2. \quad (\spadesuit)$$

La détermination de ce domaine de définition n'est pas possible *a priori*. Il convient d'abord résoudre l'équation sur un intervalle I , puis après résolution préciser quel peut-être I , en le considérant le plus grand possible.

1) Préliminaire :

a) Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = \operatorname{sh} x$, et exprimer x en fonction de y . En déduire que la fonction sh est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et donner une expression de sa fonction réciproque, qui est nommée *argument sinus hyperbolique* et notée Argsh .

b) Justifier que Argsh est dérivable, et calculer Argsh' .

2) Analyse : Soit y une solution de (\spadesuit) définie sur un certain intervalle I et ne s'annulant pas sur cet intervalle. On note h la fonction $\frac{1}{y}$.

a) Montrer que h est solution de l'équation linéaire d'ordre 1

$$h' - \frac{x}{1+x^2} h = -1 \quad (\clubsuit)$$

b) Résoudre l'équation homogène associée à (\clubsuit) .

c) Donner une solution particulière de (\clubsuit) .

d) En déduire une expression de h , puis de y .

e) Pour une telle expression de cette fonction y , quel est le plus grand intervalle I que l'on puisse considérer ? On trouvera deux formes différentes pour cet intervalle.

3) Synthèse : Conclure, en donnant l'ensemble des solutions de (\spadesuit) ne s'annulant pas.

— FIN —