



C6 : ANALYSE FRÉQUENTIELLE DES SYSTÈMES ASSERVIS

C6-3 - Analyse fréquentielle des systèmes asservis : applications

30 Avril 2019

Table des matières

I Combinaison des diagrammes de Bode élémentaires	2
1 Caractérisation d'une fonction de transfert complexe	2
2 Méthodologie de tracé des fonctions de transferts complexes	2
II Application à l'exemple de la suspension d'un véhicule	2
1 Décomposition de la fonction de transfert	3
2 Construction du diagramme de Bode de $H_1(j\omega)$	3
3 Calcul et classement des pulsations de cassure	3
4 Construction du diagramme de Bode complet	4
5 Caractérisation fréquentielle paramétrée de la suspension automobile	6
6 Interprétation temporelle d'une étude fréquentielle	6
III Autres types de lieux de transfert	10
1 Diagramme de Nyquist	10
2 Diagramme de Black	10
IV Conclusion	11

Compétences

- **Modéliser :**
 - Identifier et caractériser les grandeurs physiques : caractéristiques fréquentielles
 - Systèmes linéaires continus et invariants
 - Signaux canoniques d'entrée : signaux sinusoïdaux
 - Schémas blocs, fonctions de transferts
- **Résoudre :** Procéder à la mise en oeuvre d'une démarche de résolution analytique
 - Réponse fréquentielle : systèmes du 1^{er} et 2^{ème} ordre, intégrateur.

I. Combinaison des diagrammes de Bode élémentaires

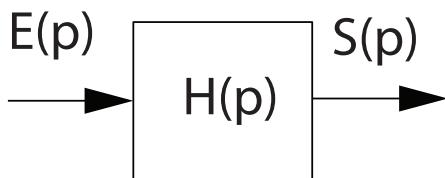
1 Caractérisation d'une fonction de transfert complexe

Définition 1 : Fonction de transfert complexe

On cherche à étudier dans le domaine fréquentiel un phénomène physique ou un composant. On considère alors la fonction de transfert reliant deux grandeurs physiques (d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$) qu'on pourra mettre dans la plupart des cas sous la forme :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K_S \prod_{k=1}^{n_3} (1 + \tau_k \cdot p) \cdot \prod_{l=1}^{n_4} \left(1 + \frac{2\xi_l}{\omega_{l0}} p + \frac{p^2}{\omega_{l0}^2} \right)}{p^\alpha \cdot \prod_{i=1}^{n_1} (1 + \tau_i \cdot p) \cdot \prod_{j=1}^{n_2} \left(1 + \frac{2\xi_j}{\omega_{j0}} p + \frac{p^2}{\omega_{j0}^2} \right)} \quad (1)$$

On remarque donc qu'on peut l'écrire qu'un produit de fonctions de transfert usuelles de type **intégrateur**, **premier ordre**, et **second ordre** qui résultera dans le plan de Bode à la somme de tracés élémentaires.



- K_S est le gain statique.
- α est la **classe** de la fonction transfert :
 - le nombre d'**intégrations** si $\alpha > 0$;
 - le nombre de **dérivations** si $\alpha < 0$.
- L'ordre de la fonction de transfert est donné par $n = \sum n_1 + n_2$ avec :
 - n_1 le nombre de fonction de transfert du **premier ordre**.
 - n_2 le nombre de fonction de transfert du **second ordre** à pôles complexes.

2 Méthodologie de tracé des fonctions de transferts complexes

1. Mise sous forme canonique de la fonction de transfert sous la forme donnée par l'équation 1;
2. identification de fonctions de transfert élémentaires : intégrateur, premier ordre, deuxième ordre;
3. calcul de toutes les pulsations de cassure ($\frac{1}{\tau_k}$, $\frac{1}{\tau_i}$, ω_{l0} et ω_{j0});
4. classement dans l'ordre croissant de toutes les pulsations de cassure;
5. construction d'un tableau permettant de caractériser les comportements asymptotiques de chaque fonction de transfert élémentaires.

II. Application à l'exemple de la suspension d'un véhicule

Reprendons l'exemple de la suspension du véhicule Clever. Nous rappelons la fonction de transfert du véhicule.

$$H(p) = \frac{k + c p}{k + c p + m p^2} = \frac{1 + \frac{c}{k} p}{1 + \frac{c}{k} p + \frac{m}{k} p^2}$$

En remplaçant p par $j\omega$, on obtient :

$$H(j\omega) = \frac{1 + \frac{c}{k} j\omega}{1 + \frac{c}{k} j\omega + \frac{m}{k} (j\omega)^2} = \frac{1 + j\tau\omega}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega + \frac{1}{\omega_0^2} (j\omega)^2}$$



1 Décomposition de la fonction de transfert

On remarque donc que cette fonction de transfert est le produit entre une fonction de transfert du premier et du second ordre :

$$H(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)$$

Avec,

$$\begin{cases} H_1(j\omega) = 1 + j\tau\omega \\ H_2(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega + \frac{1}{\omega_0^2} (j\omega)^2} \end{cases}$$

On prendra pour valeurs numériques :

- $\tau = 0,01 \text{ s}$;
- $\xi = 0,2$;
- $\omega_0 = 28,3 \text{ rad/s}$

2 Construction du diagramme de Bode de $H_1(j\omega)$

On pose :

$$H_1(j\omega) = 1 + \tau j\omega$$

On se propose de tracer le diagramme de Bode de $H_1(j\omega)$ avec $\tau = 0,01 \text{ s}$

Expression du gain :

$$G_{dB} = 20 \log(|1 + \tau j\omega|) = 20 \log(\sqrt{1 + (\tau\omega)^2})$$

On a donc deux branches asymptotiques :

- Un branche horizontale jusqu'à $\omega = \frac{1}{\tau}$.
- Un branche correspondant à une droite de pente $+20dB/\text{décade}$ et coupant l'axe des abscisses en $\omega = \frac{1}{\tau}$.

Expression de la phase :

$$\varphi = \arg(1 + \tau j\omega)$$

On a donc deux branches asymptotiques :

- Un branche horizontale correspondant à $\varphi = 0^\circ$ pour $\omega < \frac{1}{\tau}$.
- Un branche horizontale correspondant à $\varphi = 90^\circ$ pour $\omega > \frac{1}{\tau}$.

3 Calcul et classement des pulsations de cassure

1. Expressions littérales des pulsations de cassure :

- Pour $H_1(p)$: $\omega_1 = \frac{1}{\tau}$
- Pour $H_2(p)$: $\omega_2 = \omega_0$

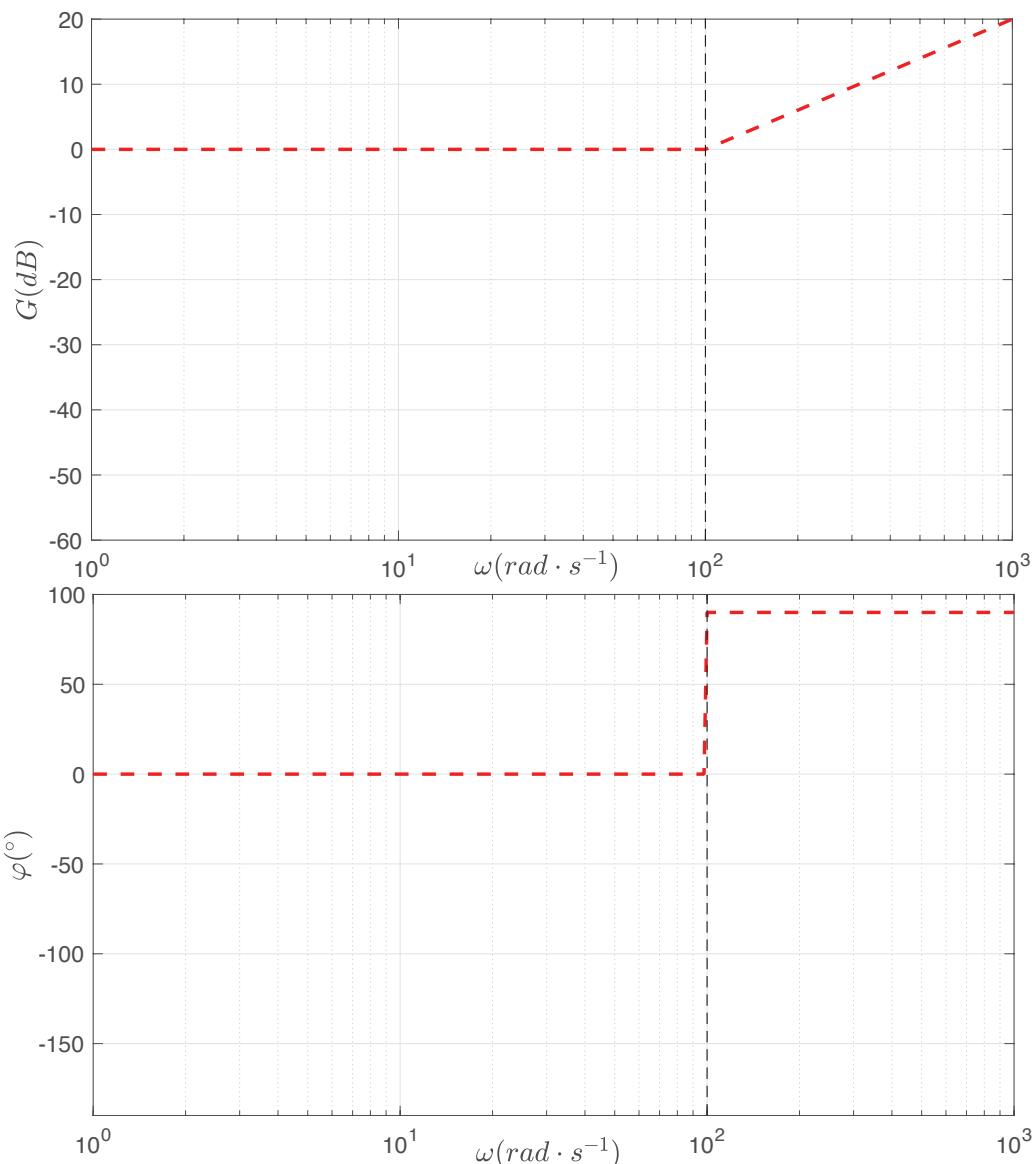


FIGURE 1 – Diagramme de Bode pour une fonction de transfert du premier ordre de $H_1(j\omega)$

2. Applications numériques :

- Pour $H_1(p) : \omega_1 = 100 \text{ rad/s}$
- Pour $H_2(p) : \omega_2 = 28,3 \text{ rad/s}$

3. Classement des pulsations de cassure

$$\omega_2 < \omega_1$$

4 Construction du diagramme de Bode complet

On va utiliser ici un tableau permettant de caractériser complètement le tracé asymptotique de $H(j\omega)$.

ω	$0 \rightarrow \omega_2$		ω_2	$\omega_2 \rightarrow \omega_1$		ω_1	$\omega_1 \rightarrow \infty$	
Tracé asymptotique	Gain (dB/dec)	$\varphi(^{\circ})$	Gain (dB)	Gain (dB/dec)	$\varphi(^{\circ})$	Gain (dB)	Gain (dB/dec)	$\varphi(^{\circ})$
$H_1(p)$	0	0	0	0	0	0	+20	+90
$H_2(p)$	0	0	0	-40	-180	Continuité	-40	-180
$H(p)$	0	0	0	-40	-180	Continuité	-20	-90

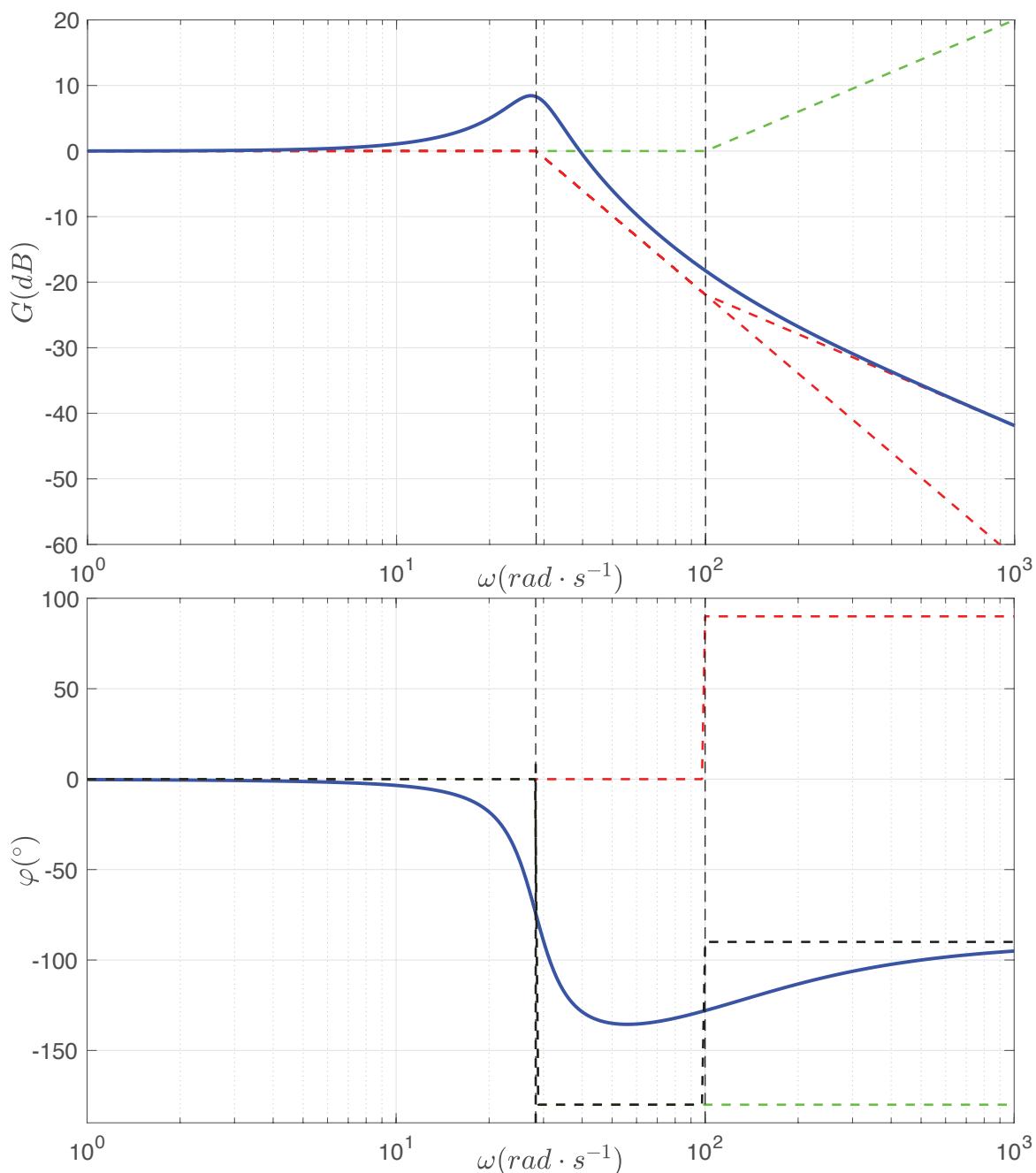


FIGURE 2 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert globale de la suspension d'un véhicule

5 Caractérisation fréquentielle paramétrée de la suspension automobile

On peut alors tracer pour différentes valeurs de ξ les différents diagrammes de Bode (figure 3 avec $\tau = 0,05\text{s}$).

- Pour des pulsations faibles ($\omega \rightarrow 0$) :
 - G_{dB} est proche de 0 c'est à dire que G est proche de 1 et donc que l'amplitude du signal de sortie est similaire à celle du signal d'entrée.
 - $\varphi \approx 0^\circ$ ainsi le retard est très faible : peu de déphasage entre l'entrée et la sortie.
- Pour des pulsations proche de la pulsation de coupure ($\omega \approx \omega_0 \approx \omega_r$) :
 - La résonance apparaît dès lors que $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$ à $\omega = \omega_r \approx \omega_0$.
 - Dans ce cas G_{dB} est grand donc G aussi et l'amplitude de sortie est fortement amplifiée par rapport à l'amplitude d'entrée.
 - Le déphasage est équivalent à -90° soit environ 1/4 de période.
- Pour des pulsations élevées ($\omega \rightarrow +\infty$) :
 - G_{dB} diminue fortement c'est à dire que G est très faible et donc que l'amplitude du signal de sortie est très amortie par rapport à celle du signal d'entrée.
 - $\varphi \approx -90^\circ$ ainsi le retard est de l'ordre d'un quart de période.

6 Interprétation temporelle d'une étude fréquentielle

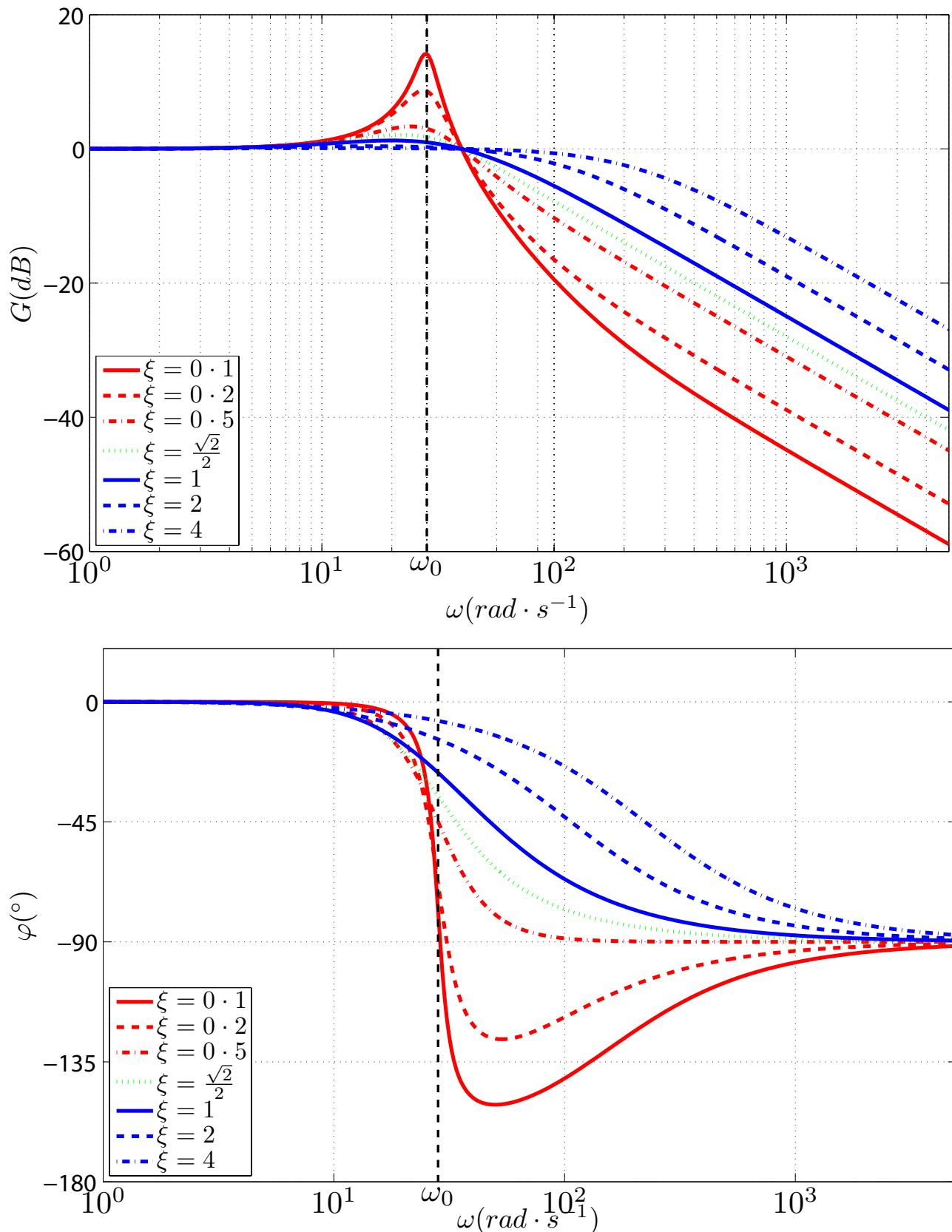
On se place dans le cas de $\xi = 0,2$, $\tau = 0,05\text{s}$ et $\omega_0 = 28,3 \text{ rad/s}$. Les diagrammes de Bode sont donnés sur la figure 4.

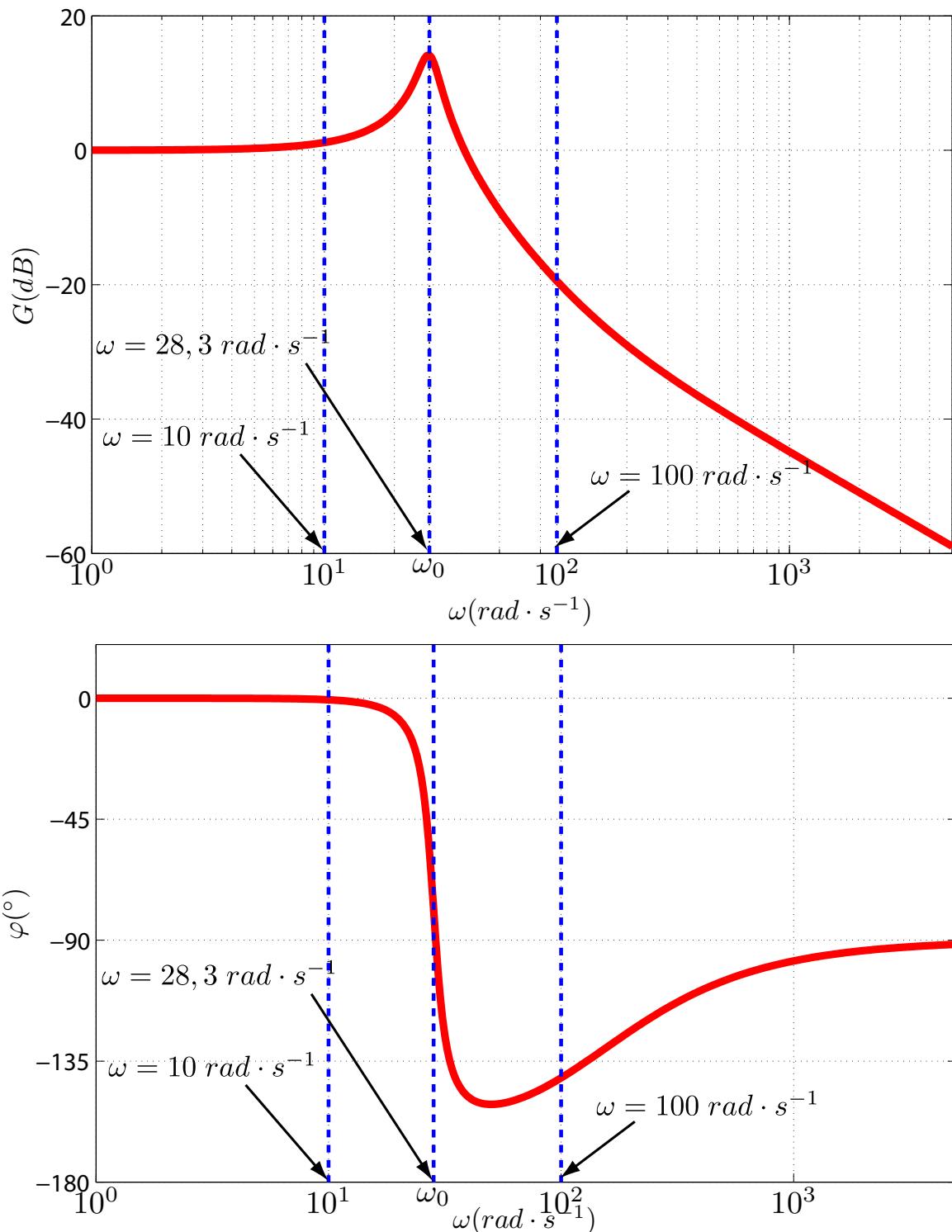
On note bien ici l'existence d'une résonance lorsque $\omega = \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$.

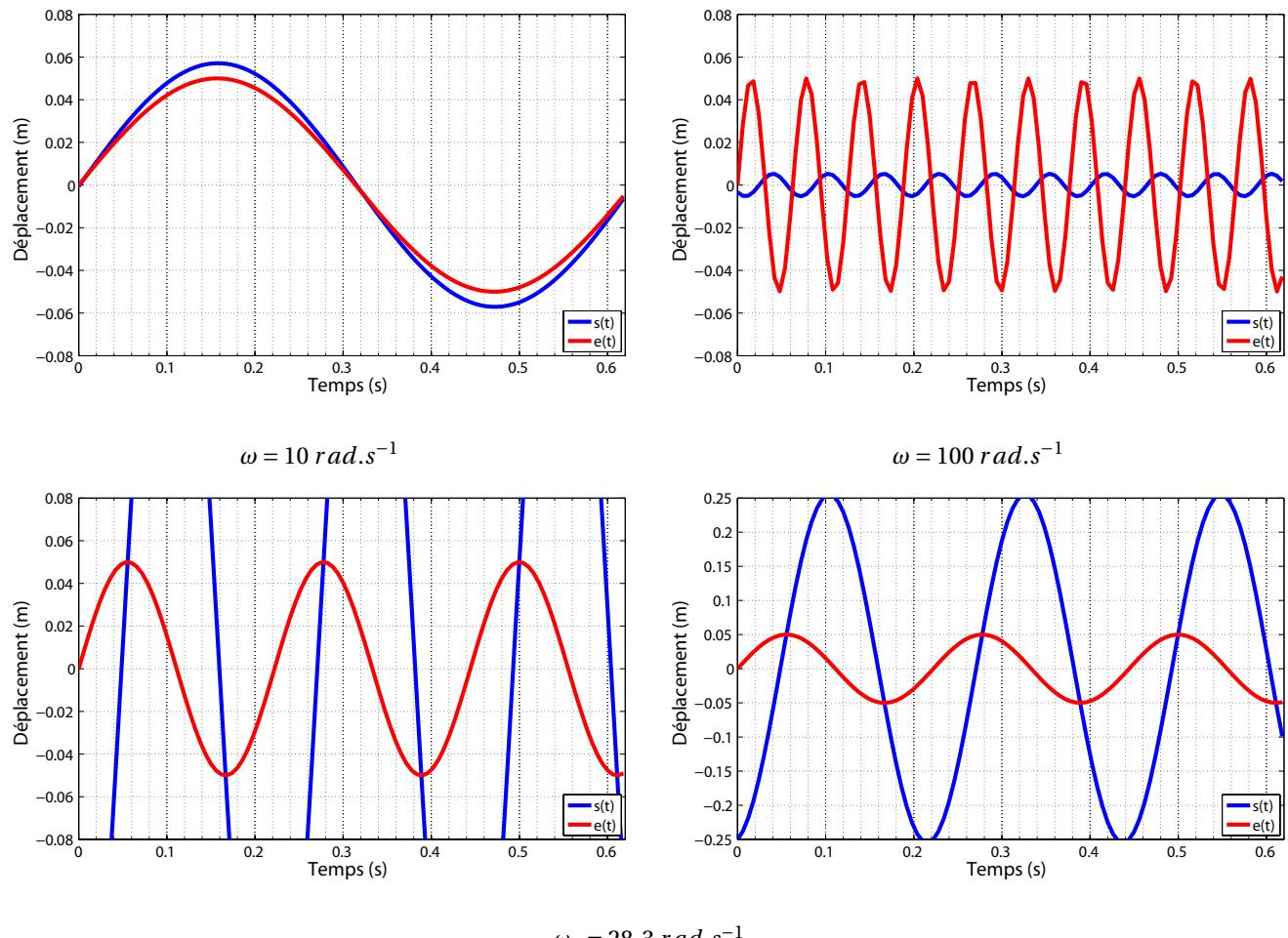
On se place alors sur trois valeurs de ω pour étudier le signal temporel.

1. $\omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$,
2. $\omega = \omega_0 = 28,3 \text{ rad.s}^{-1}$,
3. $\omega = 100 \text{ rad.s}^{-1}$.

Grâce au diagramme de bode pour chacun de ces trois cas, on peut reconstituer le signal temporel de sortie avec $G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|)$ et $\varphi = \arg(H(j\omega))$.

FIGURE 3 – Diagramme de Bode de la suspension d'un véhicule pour différentes valeurs de ξ

FIGURE 4 – Diagramme de Bode de la suspension d'un véhicule pour $\xi = 0,2$

FIGURE 5 – Réponse temporelle de la suspension du Clever avec $\xi = 0,2$

III. Autres types de lieux de transfert

1 Diagramme de Nyquist



Définition 2 : Diagramme de Nyquist

Le **diagramme de Nyquist** permet de représenter l'état de la réponse fréquentielle ($s(t) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi)$) en fonction de la pulsation ω pour une fonction de transfert $H(p)$. Ce diagramme donne l'évolution de la partie imaginaire de la fonction de transfert ($Im(H(j\omega))$) en fonction de sa partie réelle ($R(H(j\omega))$).

On obtient alors une **courbe paramétrée** qui évolue en fonction de ω (figure 6).

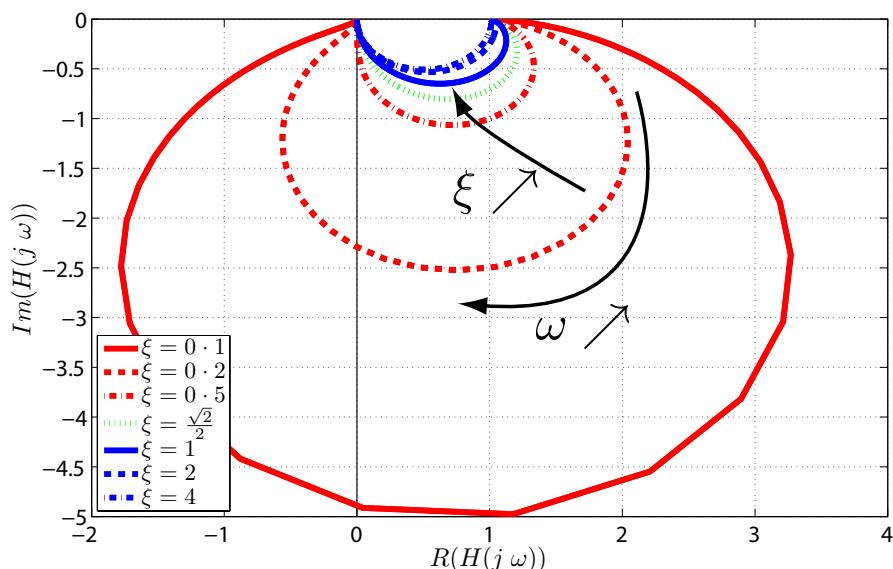


FIGURE 6 – Diagramme de Nyquist de la suspension de véhicule pour différentes valeurs de ξ

2 Diagramme de Black



Définition 3 : Diagramme de Black

Le **diagramme de Black** permet de représenter l'état de la réponse fréquentielle ($s(t) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi)$) en fonction de la pulsation ω pour une fonction de transfert $H(p)$. Ce diagramme donne l'évolution du gain en décibel (G_{dB})

$$G_{dB} = 20 \log(G) = 20 \log(|H(j\omega)|);$$

en fonction de la phase en degré (φ en °).

$$\varphi = \arg(H(j\omega)).$$

On obtient alors une **courbe paramétrée** qui évolue en fonction de ω (figure 7).

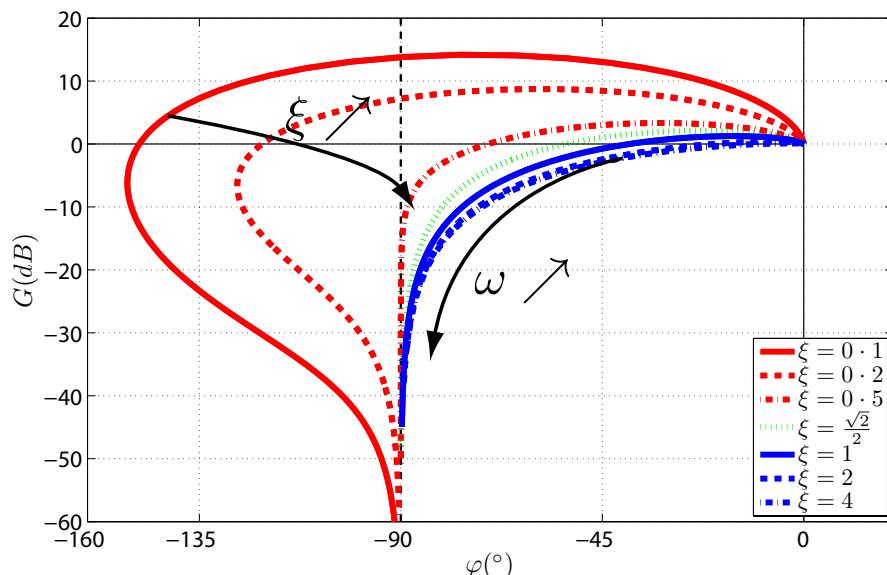


FIGURE 7 – Diagramme de black de la suspension de véhicule pour différentes valeurs de ξ



Remarque 1 :

Ces deux derniers diagrammes (Nyquist et Black) sont utilisés habituellement sous la forme d'abaques pour caractériser la **stabilité** des systèmes asservis.

IV. Conclusion



Conclusion : Analyse fréquentielle

L'analyse fréquentielle présente des outils très puissant pour caractériser la réponse d'un système vis-à-vis d'une consigne harmonique. Ce chapitre a mis en exergue dans un premier temps la nécessité d'étudier :

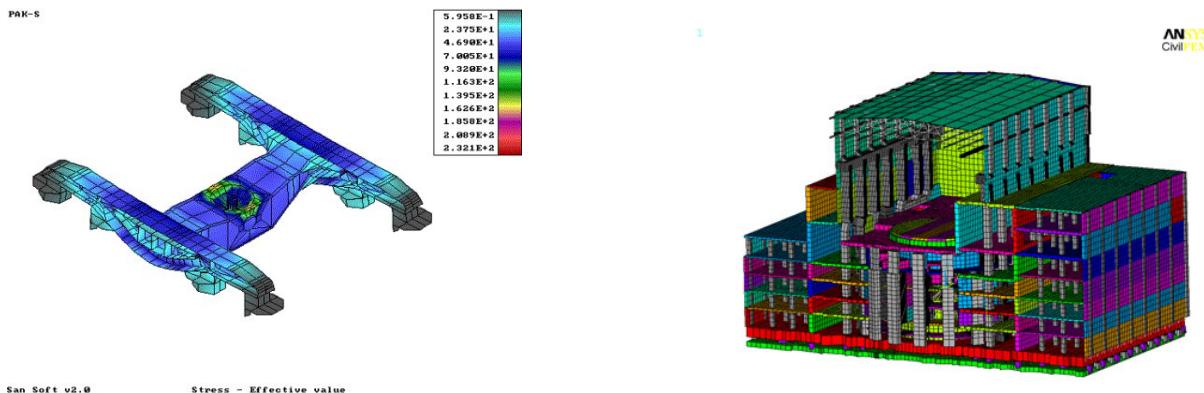
- le gain ($G_d B = 20 \log(|H(j\omega)|)$),
- la phase ($\varphi = \arg(H(j\omega))$),

en fonction de la pulsation ω . On peut alors facilement reconstituer temporellement l'évolution de la sortie puisque celle-ci est simplement de type harmonique en régime permanent.

Ce type de procédé est très répandu dans plusieurs domaines de l'ingénierie :

- **analyse modale** pour la conception de système mécanique,
- conception de bâtiments résistant à des **ondes sismiques**.

Néanmoins dans ces domaines bien souvent, les comportements des systèmes sont **complexes ou non-linéaires**. On utilisera alors des **moyens numériques** pour caractériser complètement leur comportement fréquentiel.



Analyse modale d'un bogie de TGV

Analyse modale pour le dimensionnement para-sismique d'un bâtiment



Effondrement du pont de Tacoma (1940)