

LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I. ET M.P.I.I.



ANNÉE 2025 - 2026

C5 : MODÉLISATION CINÉMATIQUE STRUCTURELLE DES SYSTÈMES

TD 11 - Modélisation cinématique des liaisons mécaniques (C5-1)

Compétences

- **Analyser**
 - Associer les fonctions aux constituants.
- **Modéliser**
 - Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.
- **Résoudre**
 - Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques.
 - Mener une simulation numérique.

Exercice 1 :

1 Présentation générale

Objectif 1 :

L'objectif est de mettre en place un système permettant à un véhicule de suivre une ligne de manière automatique. On utilise pour cela le prototype du robot maqueen qui est capable de détecter des lignes.



1.1.2 suivre une ligne courbée

Critère	Niveau	Flexibilité
Temps pour faire un tour sur place	t_{tour}	À déterminer
Temps pour suivre une trajectoire circulaire de rayon de courbure 10cm	t_{tour}	À déterminer

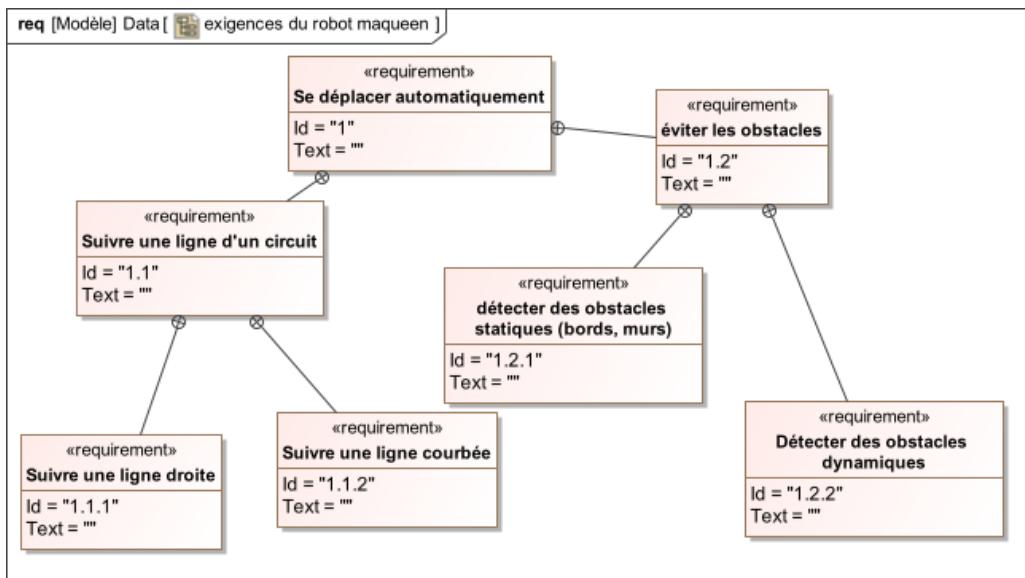


FIGURE 1 – Diagramme des exigences partiel concernant le déplacement autonome robot maqueen

2 Vérification de l'exigence 1.1.2 : suivre une ligne courbée

On donne les caractéristiques du moteur utilisé pour la propulsion.

Grandeur	Valeur
Vitesse maximale sans chargement	$N_{max} = 320 \text{ tr/min}$
Couple maximal	$C_{maxi} = 21,6 \cdot N \cdot cm$
Diamètre des roues utilisées	$D_r = 4,3 \text{ cm}$
Masse du robot maqueen	$m = 0,133 \text{ kg}$



paramétrage :

On donne le schéma cinématique du problème sur la figure 2. Voici le paramétrage :

- Le châssis (S_0) de repère $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est supposé galiléen.
- Le châssis (S_3) de repère $(C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_{0,3})$ est animé d'un mouvement de rotation d'axe $(O, \vec{z}_{0,3})$ par rapport au bâti (S_0) $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. On définit l'angle $\theta_{30}(t)$ tel que $\theta_{30}(t) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3) = (\vec{x}_0, \vec{z}_3)$. On définit aussi le rayon de courbure ρ comme $\rho = \overrightarrow{OC} \cdot \vec{y}_3$.
- La roue (S_1) de repère $(B', \vec{x}_1, \vec{y}_{3,1}, \vec{z}_1)$ est en liaison pivot d'axe $(B', \vec{y}_{1,3})$ par rapport au châssis (S_3). On définit l'angle $\theta_{13}(t)$ tel que $\theta_{13}(t) = (\vec{x}_3, \vec{x}_1) = (\vec{z}_3, \vec{z}_1)$. La roue (S_1) est également en liaison ponctuelle de normale (B, \vec{z}_0) avec le sol S_0 avec roulement sans glissement en B. On définit le rayon de la roue R comme $\overrightarrow{B'B} = -R \cdot \vec{z}_{0,3}$.
- La roue (S_2) de repère $(A', \vec{x}_2, \vec{y}_{3,2}, \vec{z}_2)$ est en liaison pivot d'axe $(A', \vec{y}_{1,2})$ par rapport au châssis (S_3). On définit l'angle $\theta_{23}(t)$ tel que $\theta_{23}(t) = (\vec{x}_3, \vec{x}_2) = (\vec{z}_3, \vec{z}_2)$. La roue (S_2) est également en liaison ponctuelle de normale (A, \vec{z}_0) avec le sol S_0 avec roulement sans glissement en A. On définit le rayon de la roue R comme $\overrightarrow{A'A} = -R \cdot \vec{z}_{0,3}$.
- On définit la distance L , comme $\overrightarrow{BA} = L \cdot \vec{y}_3 = \overrightarrow{B'A'}$
- S_4 est la rotule qui est liaison rotule en D avec S_3 et en liaison sphère plan avec le sol S_0 de normale $(D, \vec{z}_{0,3})$.

Q1 : Représenter les figures planes de projection permettant de paramétrier le problème

Q2 : Donner l'expression du torseur cinématique $\{\mathcal{V}_{(3/0)}\}$ au point O puis en A.

Q3 : Donner l'expression du torseur cinématique $\{\mathcal{V}_{(2/3)}\}$ au point A' puis en A.

Q4 : En exploitant la condition de roulement sans glissement en A, donner l'expression du torseur cinématique

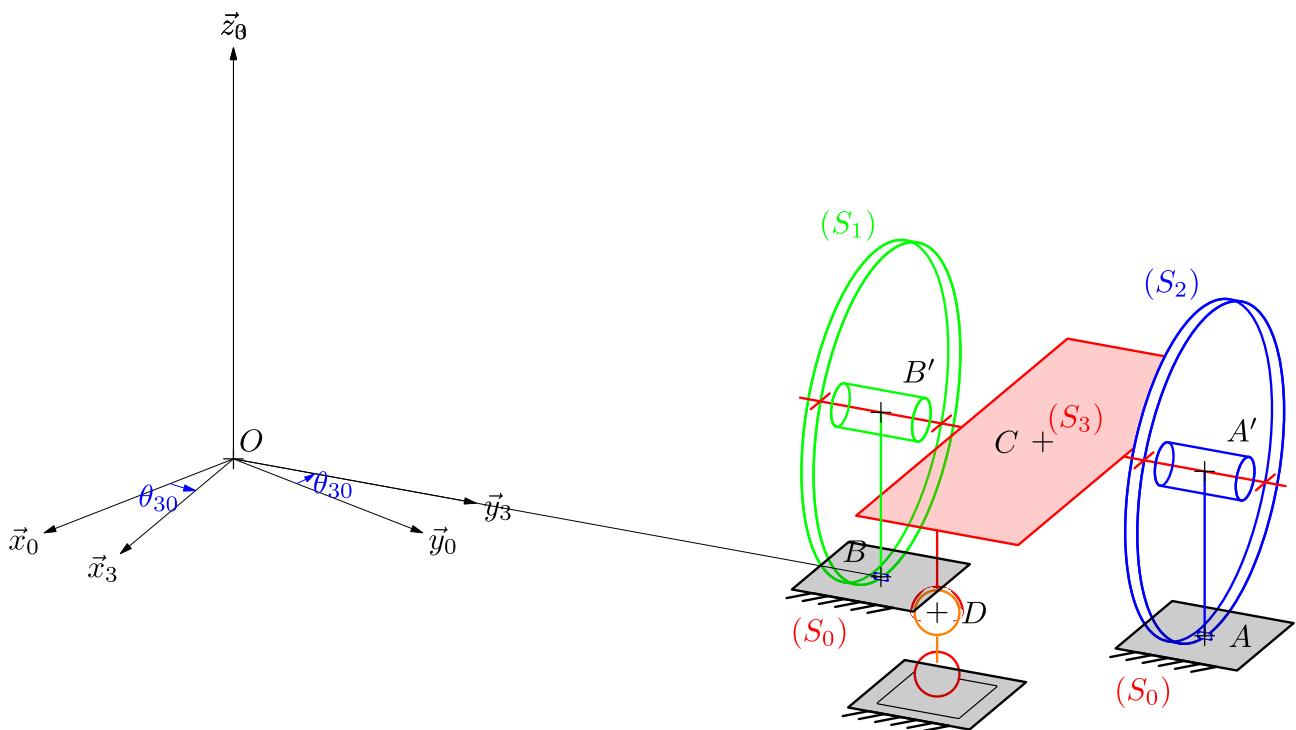


FIGURE 2

$\{\mathcal{V}_{(2/0)}\}$ au point A sans expliciter $\overrightarrow{\Omega_{(2/0)}}$.

Q5 : Traduire la relation de Chasles au Point A : $\{\mathcal{V}_{(3/0)}\} = \{\mathcal{V}_{(3/2)}\} + \{\mathcal{V}_{(2/0)}\}$.

Q6 : En déduire une relation entre $\dot{\theta}_{30}(t)$, $\dot{\theta}_{23}(t)$, ρ , L et R .

Q7 : Donner l'expression du torseur cinématique $\{\mathcal{V}_{(1/3)}\}$ au point B' puis en B .

Q8 : En exploitant la condition de roulement sans glissement en B , donner l'expression du torseur cinématique $\{\mathcal{V}_{(1/0)}\}$ au point B sans expliciter $\overrightarrow{\Omega_{(1/0)}}$.

Q9 : Donner l'expression du torseur cinématique $\{\mathcal{V}_{(3/0)}\}$ en B .

Q10 : Traduire la relation de Chasles au Point B : $\{\mathcal{V}_{(3/0)}\} = \{\mathcal{V}_{(3/1)}\} + \{\mathcal{V}_{(1/0)}\}$.

Q11 : En déduire une relation entre $\dot{\theta}_{30}(t)$, $\dot{\theta}_{13}(t)$, ρ , L et R .

On donne :

- $R = 4,3\text{cm}$
- $L = 9,1\text{cm}$
- $\rho = 17,5\text{cm}$

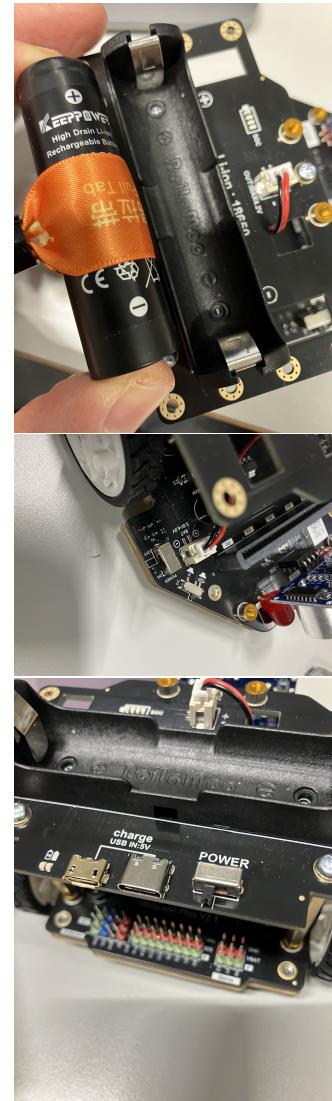
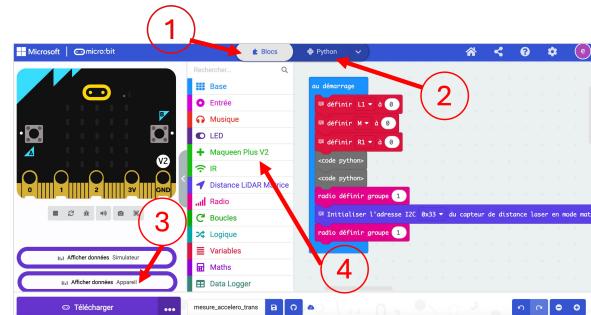
Q12 : En déduire la vitesse de rotation $\dot{\theta}_{30}(t)$ maximale du châssis par rapport au sol en tournant sur place ou en suivant le circuit de rayon $\rho = 17,5\text{cm}$.

3 Programmation du robot

Pour programmer le robot on peut utiliser l'environnement makecode en ligne sur le site makecode.microbit.org.

1. On peut programmer par bloc;
2. ou en python.
3. On peut afficher les données qui viennent de la fonction **print**.
4. On peut aller chercher des fonctions dans la bibliothèque.
5. Si la carte est branchée au PC on peut télécharger la carte sur le pc et lire les données

Pour mettre en oeuvre le robot



1. Vérifier que la pile est mise dans le bon sens
2. Mettre en service le robot en basculant les interrupteurs de puissances ("power") sur "on"
3. On peut afficher les données qui viennent de la fonction **print**.
4. On peut aller chercher des fonctions dans la bibliothèque.
5. Si la carte est branchée au PC on peut télécharger la carte sur le pc et lire les données

Sur le lien <https://makecode.microbit.org/S00943-06283-58626-29342> vous trouverez un fichier initial à utiliser et à tester avec la procédure donnée plus haut.



Voici un programme pour revoir les données et visualiser l'accélération en radio via une autre carte. : [https:](https://)

//makecode.microbit.org/S82779-93068-40204-00267

Q13 : Programmer le robot pour vérifier ces performances.

Exercice 2 : Modélisation d'une souris mécanique

Source : Raphael Allais

1 présentation et paramétrage

On se propose d'étudier le fonctionnement d'une souris mécanique associée à un ordinateur (figure 3).

L'ensemble des paramétrage indiqués ci-dessous font référence à la figure 4.

- Le plan de travail (0) est lié au repère $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- Le cadre lié à la souris porte le numéro (1). On lui lie un repère $R_1 = (C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.
- En fonctionnement normal, la bille (2) de rayon R **roule sans glisser** sur le plan (0). On note I le point de contact avec le sol (0).
- Le galet (3), de rayon a est en liaison pivot d'axe (L, \vec{y}_1) , avec le cadre (1).
- Le galet (4), de rayon a est en liaison pivot d'axe (M, \vec{x}_1) , avec le cadre (1).

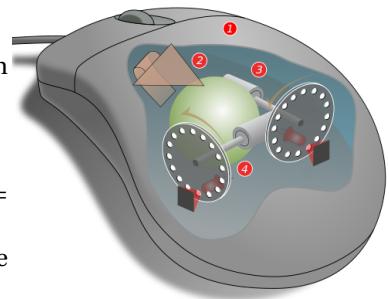


FIGURE 3 – Dessin du mécanisme d'une souris de micro-ordinateur.

Les deux galets (3) et (4) commandent chacun un capteur de position angulaire (codeur incrémental). En fonctionnement normal, ils **roulent sans glisser** sur la bille (2), respectivement aux points J et K .

On notera :

- $\overrightarrow{\Omega_{(3/1)}} = \omega_{31} \vec{y}_1$ le vecteur vitesse de rotation (inconnu) de (3) par rapport à (1).
- $\overrightarrow{\Omega_{(4/1)}} = \omega_{41} \vec{x}_1$ le vecteur vitesse de rotation (inconnu) de (4) par rapport à (1).

La souris (1) est animée d'un mouvement plan par rapport à (0).

Objectif :

Le but de cet exercice est de trouver les valeurs de ω_{31} et ω_{41} en fonction du déplacement de la souris.

La condition de contact en I impose que : $\overrightarrow{OC} \cdot \vec{z}_0 = R$.

La position de la souris (1) par rapport à (0) est alors donnée par :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= x \vec{x}_1 + y \vec{y}_1 + R \vec{z}_1 \\ \theta &= (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) \\ \text{avec } \vec{z}_0 &= v_z \vec{1}\end{aligned}$$

On note le torseur cinématique de la bille (2) par rapport au cadre (1) par :

$$\{\mathcal{V}_{(2/1)}\} = \underset{C}{\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{(2/1)}} = p \vec{x}_1 + q \vec{y}_1 + r \vec{z}_1 \\ \overrightarrow{V(C \in 2/1)} = \vec{0} \end{array} \right\}}$$

(Pour l'instant, p , q et r ne sont pas connus.)

Supposons que l'on bouge la souris (i.e. le cadre (1)) par rapport à (0) par le mouvement plan suivant suivant :

$$\{\mathcal{V}_{(1/0)}\} = \underset{C}{\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{(1/0)}} = \dot{\theta} \vec{z}_0 \\ \overrightarrow{V(C \in 1/0)} = \dot{x} \vec{x}_1 + \dot{y} \vec{y}_1 \end{array} \right\}}$$

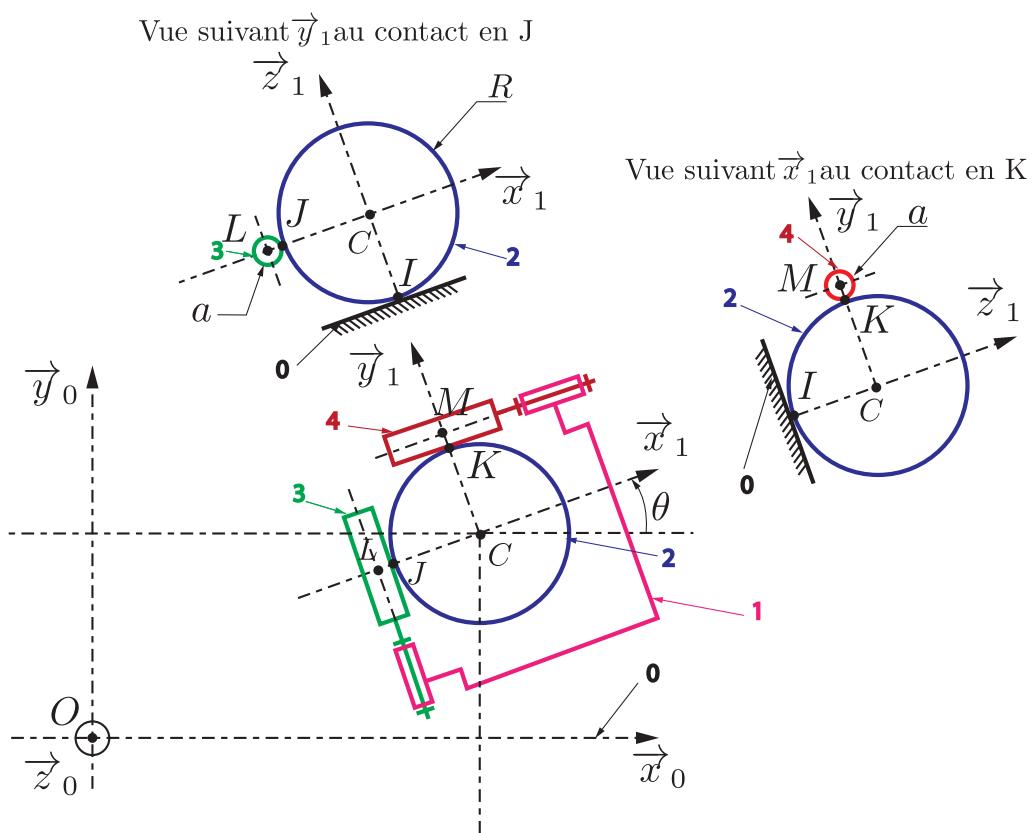


FIGURE 4 – Schéma cinématique mécanique d'une souris de micro-ordinateur.

2 Modélisation cinématique

Modélisation globale de la bille et de la souris Q14 : En analysant les torseurs cinématiques donnés précédemment, proposer une liaison permettant de modéliser les mouvements de 1/0 et de 2/0

Roulement sans glissement de la bille Q15 : Expliciter la condition de roulement sans glissement au point *I*.

Q16 : Par composition des vitesses, en déduire la relation liant les paramètres du mouvement de la boule (issus de $\{\mathcal{V}_{(2/1)}\}$) à ceux du mouvement de la souris (issu de $\{\mathcal{V}_{(1/0)}\}$).

Q17 : En déduire les composantes *p* et *q* du vecteur vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega_{(2/1)}}$, en fonction du mouvement de la souris.

Roulement du galet (3) Q18 : Expliciter la condition de roulement sans glissement au point *J*.

Q19 : En déduire le vecteur vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega_{(3/1)}}$.

Q20 : En déduire également la valeur de la composante *r* de $\overrightarrow{\Omega_{(2/1)}}$.

Roulement du galet (4) Q21 : Expliciter la condition de roulement sans glissement au point *K*.

Q22 : En déduire le vecteur vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega_{(4/1)}}$.

Mouvement global Q23 : Exprimez alors les éléments de réduction des torseurs $\{\mathcal{V}_{(2/1)}\}$, $\{\mathcal{V}_{(3/1)}\}$ et $\{\mathcal{V}_{(4/1)}\}$, respectivement aux points *C*, *L* et *M*, en fonction des composantes de $\{\mathcal{V}_{(1/0)}\}$.

Q24 : De quels types sont ces torseurs ?