

Devoir surveillé n° 6
Version 2

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Fonctions dilatantes.

Soit f une fonction définie et continue sur \mathbb{R} vérifiant

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \geq |x - y|.$$

L'objectif de ce problème est d'étudier l'ensemble des points fixes d'une telle fonction f (fonction dilatante).

- 1)
 - a) En revenant à la définition quantifiée, montrer que f est injective.
 - b) En déduire que f est strictement monotone.
- 2) On suppose dans cette question que f est strictement croissante. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde et considérer $f(x+1) - f(x)$.

- 3) En déduire que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
- 4) On suppose dans cette question qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f([a, b]) \subset [a, b]$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in [a, b], a \leq f(x) \leq b.$$

- a) En considérant la fonction $f - \text{Id}_{\mathbb{R}}$, montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ vérifiant $f(c) = c$.
- b) On suppose que f est croissante. Montrer que $f(a) = a$ et que $f(b) = b$.
- c) On suppose toujours que f est croissante. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) = x$.
- d) On suppose maintenant que f est décroissante. Expliciter alors f sur $[a, b]$.

Indication : on pourra considérer $f_1 : x \mapsto a + b - f(x)$ et vérifier que f_1 réalise toutes les hypothèses de la question 4)c).

On suppose dorénavant que f est strictement croissante. On rappelle que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

On considère l'ensemble A des points fixes de f :

$$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) = x \}.$$

- 5) On suppose dans cette question que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < x$.
 - a) Montrer que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.
Indication : on cherchera à encadrer $f(x)$ pour $x > 0$.
 - b) Montrer que $x \mapsto f(x) - x$ est croissante. Que peut-on en déduire lorsque x tend vers $+\infty$?
- 6) On suppose dans cette question que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > x$.

- a) Montrer de même que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 1$.
- b) Montrer que $x \mapsto f(x) - x$ est croissante. Que peut-on en déduire lorsque x tend vers $-\infty$?
- 7) Montrer que si $A = \emptyset$, alors on est dans l'un des cas précédents 5) ou 6).
- 8) On suppose dans cette question que $A \neq \emptyset$.
- a) Montrer que A est un intervalle.
- Indication* : on pensera à utiliser les résultats démontrés dans la question 4).
- b) On suppose que A est majoré. Montrer que $\sup(A)$ existe et appartient à A .

On traiterait de même la borne inférieure de A . On vient donc de montrer que, si A est non vide, alors A est un intervalle fermé.

- 9) On suppose toujours que $A \neq \emptyset$. On considère un point $x_0 \in \mathbb{R}$ et l'on définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f^{-1}(x_n).$$

Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est soit constante, soit converge vers une des bornes de A .

II. Un théorème de Kronecker.

On note $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{Z} . Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel non nul.

On note \mathcal{K}_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ unitaires, de degré égal à n , et dont toutes les racines complexes sont à la fois non nulles et de module inférieur ou égal à 1.

On note enfin \mathcal{R}_n l'ensemble des racines complexes des éléments de \mathcal{K}_n .

L'objectif de ce problème est de démontrer le théorème de Kronecker : il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{R}_n \subset \mathbb{U}_r$.

Si $P \in \mathbb{C}[X]$ est de degré n , on note $\sigma_1(P), \dots, \sigma_n(P)$ les fonctions symétriques élémentaires des racines de P .

On pourra utiliser sans justification le principe des tiroirs : si $n + 1$ éléments appartiennent à un ensemble contenant au plus n éléments, alors deux de ces éléments sont égaux (au moins).

- 1) Soit $P \in \mathcal{K}_n$, que l'on écrit sous forme développée réduite $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$.
 - a) Rappeler les expressions de $\sigma_1(P), \dots, \sigma_n(P)$.
 - b) Montrer que $|a_0| = 1$ et que $|a_{n-1}| \leq n$.
 - c) Montrer que $\mathcal{R}_n \subset \mathbb{U}$.
- 2) Cas particulier $n = 2$. Dans cette question uniquement, on écrit $P = (X - \alpha)(X - \beta)$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{U}$.
 - a) Montrer que si $\alpha \notin \mathbb{R}$, alors P est égal à l'un des polynômes suivants : $X^2 - X + 1$, $X^2 + 1$ et $X^2 + X + 1$.
 - b) Que peut valoir P si $\alpha \in \mathbb{R}$?
 - c) Dédurre des deux questions précédentes que $\mathcal{R}_2 \subset \mathbb{U}_{12}$.
- 3) Dans cette question uniquement, on considère un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré n .
 - a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $\hat{P} \in \mathbb{Z}[X]$ de degré n vérifiant $P(X)P(-X) = (-1)^n \hat{P}(X^2)$.

- b) Écrire la décomposition de \hat{P} en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$ en fonction de celle de P .
 - c) Montrer que si $P \in \mathcal{K}_n$, alors $\hat{P} \in \mathcal{K}_n$.
 - d) En déduire que \mathcal{R}_n est stable par la transformation $z \mapsto z^2$.
- 4)
- a) Montrer que l'ensemble $\{ |\sigma_k(P)| \mid 1 \leq k \leq n \text{ et } P \in \mathcal{K}_n \}$ est majoré.
 - b) Soit $N \in \mathbb{N}$, combien existe-t-il de polynômes $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaires, de degré n et à coefficients dans $\llbracket -N, N \rrbracket$?
 - c) En déduire que \mathcal{R}_n est fini.
- 5)
- a) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathcal{R}_n$, il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha \in \mathbb{U}_r$.
 - b) Démontrer le théorème de Kronecker.
 - c) Soit $r \in \mathbb{N}$ vérifiant $\mathcal{K}_n \subset \mathbb{U}_r$. Montrer qu'il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $P \in \mathcal{K}_n$, P divise $(X^r - 1)^s$.

— FIN —