Semaine 2 du 22 septembre 2025 (S39)

Fonctions usuelles

1 Rappels d'analyse.

Les théorèmes d'analyse sont admis, à ce stade de l'année.

1.1 Régularité de fonctions.

Aucun travail technique n'a été mené sur ces notions, nous nous bornons à rappeler les définitions et propriétés vues au lycée.

1.2 Parité, imparité, périodicité.

1.3 Monotonie.

1.4 Lecture de tableaux de variations.

2 Effet d'une transformation sur le graphe.

3 Composée de fonctions, réciproque.

Ces notions sont vues dans le cadre restreint de l'étude de fonctions réelles.

3.1 Rappels de dérivation.

3.2 Composée de deux fonctions.

3.3 Propriétés d'une composée.

3.4 Cas des bijections.

La notion de bijection n'a pas été définie, on utilise à chaque fois le théorème des fonctions continues strictement monotones sur un intervalle.

4 Fonction valeur absolue

5 Fonctions puissances entières, polynomiales et rationnelles

5.1 Fonctions puissances entières

5.2 Fonctions polynomiales et rationnelles

6 Fonctions exponentielles, logarithmes et puissances quelconques

6.1 Exponentielle et logarithme

6.2 Exponentielle de base quelconque

6.3 Racines énièmes.

6.4 Croissances comparées

7 Fonctions circulaires réciproques

La notion de réciproque a uniquement été vue dans le cadre du théorème des fonctions continues strictement monotones sur un intervalle.

7.1 Arccos et Arcsin

7.2 Arctangente

7.3 Coordonnées polaires

8 Fonctions hyperboliques

8.1 ch, sh et th

Les fonctions réciproques de trigonométrie hyperbolique (argch, argsh et argth) sont strictement hors programme.

La seule formule de trigonométrie hyperbolique au programme est $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$.

*

Questions de cours

Ces questions de cours sont à savoir traiter, et non à apprendre par cœur.
Les colleurs sont libres de demander tout ou partie d'une de ces questions de cours, mais aussi de mélanger les différentes questions ou de donner des exemples numériques différents de ceux proposés.
L'évaluation de la maîtrise du cours ne se limite pas à la question de cours : la connaissance des définitions et théorèmes du cours pourra être évaluée à tout moment de la colle.

- Rappeler la définition de la dérivabilité d'une fonction en un point, de la dérivabilité sur un intervalle. Énoncer les propriétés de dérivabilité et les formules de dérivation d'une combinaison linéaire, d'un produit.

- Donner la définition de fonction composée (on fera attention à introduire précisément tous les objets utilisés). Donner la dérivée d'une composée de deux fonctions dérivables.

- Donner la définition d'une fonction paire, d'une fonction impaire. Que peut-on dire de la dérivée d'une fonction paire dérivable, d'une fonction impaire dérivable/de la composée de deux fonctions impaires, d'une fonction paire et d'une fonction impaire, etc./de la réciproque d'une fonction bijective impaire ? Le prouver (ou non).

- Donner les définitions des notions de « fonction croissante », de « fonction décroissante », de « fonction strictement croissante », de « fonction strictement décroissante ». Énoncer la propriété sur la composée de deux fonctions (strictement) monotones ; faire la démonstration d'un ou plusieurs cas.

- Énoncer le théorème de la bijection, pour une fonction f définie sur un segment $[a, b]$.

  Quelle fonction peut-on alors définir à partir de f ?

- Montrer que pour tous réels x et y, $|x+y| \leqslant |x|+|y|$; dans quel cas y a-t-il égalité ?

- Soit $a<b$ deux réels et $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Supposons que la réciproque de f, notée f^{-1}, existe. Sous quelles conditions f^{-1} est-elle dérivable ? Donner dans ce cas la formule donnant la dérivée de f^{-1}.

- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \geqslant x+1$; montrer que pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

- Soit $x, x' \in \mathbb{R}_+^*$ et $y, y' \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition de x^y ; montrer que $(xx')^y = x^y x'^y$, que $x^{y+y'} = x^y x^{y'}$, $x^{yy'} = (x^y)^{y'}$ que $\left(\frac{1}{x}\right)^y = \frac{1}{x^y} = x^{-y}$.

- Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner le domaine de définition, le domaine de dérivabilité, la dérivée, les variations et limites de $x \mapsto x^\alpha$.

- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\exp(x) \geqslant 1+x+\frac{x^2}{2}$. En déduire la limite de $\frac{\exp(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

- Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Donner et démontrer les limites de $\frac{\exp(ax)}{x^b}$, de $\frac{(\ln(x))^a}{x^b}$ lorsque x tend vers $+\infty$, de $|x|^b \exp(ax)$ lorsque x tend vers $-\infty$, de $x^b |\ln(x)|^a$ lorsque x tend vers 0. On supposera connue la limite de $\frac{\exp(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

- Déterminer (en la justifiant) la limite lorsque $n \longrightarrow +\infty$ de $\dfrac{3^n + \ln^6(n) - n}{n^\pi - \pi^n}$.

- Donner la définition de la fonction Arccos (ou Arcsin, ou Arctan), préciser ses domaines de continuité et de dérivabilité puis donner sa dérivée ; tracer son graphe.

- Pour $x \in [-1,1]$, simplifier $\cos(\mathrm{Arcsin}(x))$ et $\sin(\mathrm{Arccos}(x))$. Justifier la dérivabilité des fonctions Arcsin et Arccos sur $]-1,1[$, et calculer leurs dérivées.

- Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$, $\mathrm{Arcsin}\, x + \mathrm{Arccos}\, x = \frac{\pi}{2}$.

- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si} \quad x>0\ ; \\ -\pi/2 & \text{si} \quad x<0\ . \end{cases}$

- Donner la définition des fonction *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique*, leurs principales propriétés, retrouver l'expression de leurs dérivées, donner leurs tableaux de variations, l'allure de leurs graphes.

- Donner la définition de la fonction *tangente hyperbolique*, ses principales propriétés, retrouver l'expression de sa dérivée et donner l'allure de son graphe.

- Soit $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux uniques fonctions $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que g est paire, h est impaire et $f = g+h$.