

## Devoir à la maison n° 6

À rendre le 10 novembre

### I. Conjugaison par une application

Soit  $E$  un ensemble et  $f : E \rightarrow E$  bijective.

La conjugaison par  $f$  est l'application  $\Phi_f : \begin{cases} E^E & \rightarrow & E^E \\ \varphi & \mapsto & f \circ \varphi \circ f^{-1} \end{cases}$ .

- 1) Simplifier  $\Phi_f \circ \Phi_g$  pour  $g \in E^E$  bijective. Que vaut aussi  $\Phi_{\text{Id}_E}$  ?
- 2) En déduire que  $\Phi_f$  est une bijection de  $E^E$  dans  $E^E$ . Que vaut  $(\Phi_f)^{-1}$  ?
- 3) Soient  $\mathcal{I}$ ,  $\mathcal{S}$ , les sous-ensembles de  $E^E$  constitués respectivement des injections et des surjections :

$$\mathcal{I} = \{ g : E \rightarrow E \mid g \text{ est injective} \} \text{ et } \mathcal{S} = \{ g : E \rightarrow E \mid g \text{ est surjective} \}$$

Montrer que  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{S}$  sont stables par  $\Phi_f$ , c'est-à-dire que  $\Phi_f(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$  et que  $\Phi_f(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$ .

- 4) Montrer que  $\Phi_f(\mathcal{I}) = \mathcal{I}$  et que  $\Phi_f(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ .
- 5) Lorsque  $\varphi$  est bijective, qu'est-ce que  $\left( \Phi_f(\varphi) \right)^{-1}$  ?

### II. Images directe et réciproque

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles,  $f : E \rightarrow F$ ,  $A$  une partie de  $E$  et  $B$  une partie de  $F$ . Montrer que :

$$f(A \cap f^{\leftarrow}(B)) = f(A) \cap B.$$

— FIN —