Semaine 13 du 12 janvier 2026 (S3)

XIII – Algèbre générale.

1 Lois de composition internes.

1.1 Définition.

1.2 Propriétés usuelles des lci.

Le vocabulaire de magma est hors programme et n'a pas été utilisé. Les distinctions « à gauche » / « à droite » pour la distributivité, l'élément neutre et les éléments inversibles sont hors programme, et ne sont pas exigibles.

2 Structure de groupe.

2.1 Définition et exemples.

2.2 Sous-groupes.

2.3 Morphismes de groupes.

3 Anneaux

3.1 Structure d'anneau.

Dans le cadre du programme, tout anneau est unitaire.

3.2 Sous-anneaux

3.3 Morphismes d'anneaux

4 Structure de corps.

Dans le cadre du programme, tout corps est commutatif.

Questions de cours

Ces questions de cours sont à savoir traiter, et non à apprendre par cœur.
Les colleurs sont libres de demander tout ou partie d'une de ces questions de cours, mais aussi de mélanger les différentes questions ou de donner des exemples numériques différents de ceux proposés.
L'évaluation de la maîtrise du cours ne se limite pas à la question de cours : la connaissance des définitions et théorèmes du cours pourra être évaluée à tout moment de la colle.

- Donner la définition d'un groupe, d'un groupe abélien, d'un anneau, d'un corps.
- Donner la définition de « morphisme de groupes ».
- Montrer que la composée de deux morphismes est un morphisme.
- Montrer que l'image du neutre par un morphisme est le neutre.
- Montrer que l'image de l'inverse d'un élément par un morphisme est l'inverse de l'image de cet élément.
- Montrer que l'image directe d'un sous-groupe par un morphisme de groupes est un sous-groupe.
- Montrer que l'image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme de groupes est un sous-groupe.
- Montrer qu'un morphisme de groupes est injectif si et seulement si son noyau est réduit au neutre.
- Montrer que la réciproque d'un isomorphisme de groupes est un isomorphisme.
- Donner deux exemples de groupes, puis pour chacun de ses groupes un exemple de sous groupe. Donner aussi un exemple d'ensemble muni d'une loi de composition interne qui n'est pas un groupe.
- Montrer que l'ensemble des permutations d'un ensemble X est un groupe pour la composition.
- Donner trois exemples de morphismes de groupes, pour lesquels vous déterminerez les images et noyaux.
- Donner la définition de morphisme entre deux anneaux.
- Donner deux exemples de morphismes d'anneaux.
- Donner deux exemples d'anneaux qui ne sont pas intègres.
- Montrer que l'ensemble des éléments inversibles d'un anneau $(A,+,\times)$ est un groupe pour la loi $\times$.
- Montrer qu'un corps est intègre.