DS n°5 : Fiche de calculs

Durée : 60 minutes, calculatrices et documents interdits

Nom et prénom : | | Note : | |

Porter directement les réponses sur la feuille, sans justification.

Suites

Une suite (u_n) telle que (u_n) est positive, tend vers 0 mais n'est pas décroissante à partir d'un certain rang est par exemple la suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \boxed{} \tag{1}$$

Déterminer l'ensemble des suites complexes u vérifiant : $u_0 = 0, u_1 = 1 + 4i$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = (3-2i)u_{n+1} - (5-5i)u_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \boxed{}\ . \tag{2}$$

Déterminer l'ensemble des suites réelles u vérifiant : $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 8u_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \boxed{}. \tag{3}$$

Pour chacune de ces suites définies par récurrence, donner sa limite si elle existe, et écrire Div en cas de divergence sans limite.

$$u_0 = \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{2} \ : \qquad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{} \tag{4}$$

$$v_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \mathrm{e}^{v_n} - 1 \ : \qquad v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{} \tag{5}$$

$$w_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = 1 - 2w_n \ : \qquad w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{} \tag{6}$$

$$z_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n - 2}{z_n + 1 + i} \ : \qquad z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{} \tag{7}$$

Algèbre

On munit $\mathbb{R}$ d'une structure de groupe avec la loi $*$ par : $x \star y = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}$.

Le neutre de ce groupe est $\boxed{}$. (8)

Si $x \in \mathbb{R}$, l'inverse de x pour $*$ est $\boxed{}$. (9)

Le groupe $(\mathbb{R}, *)$ est-il abélien (répondre Oui ou Non) ? $\boxed{}$ (10)

Soit $\mathbb{D} = \left\{ \dfrac{p}{10^q} \;\middle|\; (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}$ l'ensemble des nombres décimaux. $\mathbb{D}$ est-il un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$ (répondre par **OUI** ou **NON**) ?

$\boxed{}$ (11)

Déterminer l'ensemble $\mathbb{D}^\times$ des éléments inversibles de $\mathbb{D}$ pour $\times$.

$\mathbb{D}^\times = \boxed{}$ (12)

Soit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$: $\varphi \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\mathbb{N} & \to & \mathbb{R}^\mathbb{N} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$. Alors

$\operatorname{Ker}\varphi = \boxed{}$ (13)

Limites de fonctions et continuité

Calculer les limites de fonctions suivantes (écrire Pas de limite le cas échéant) :

$$\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{} \quad (14)$$

$$\left\lfloor -x^2 \right\rfloor \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{} \quad (15)$$

$$\frac{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor - 1} \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{} \quad (16)$$

$$\frac{\sin(\pi x)}{x\,(x^2-1)} \xrightarrow[x\to 1]{} \boxed{} \quad (17)$$

$$\frac{x^x - 1}{\ln(x)\ln(1+2x)} \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{} \quad (18)$$

— FIN —