



## C6 : Analyse fréquentielle des systèmes asservis

### C6-1 : Introduction à l'analyse fréquentielle des systèmes linéaires continus et invariants

Émilien DURIF

Lycée La Martinière Monplaisir Lyon  
Classe de MPSI



# Plan

- ① Définition de l'analyse fréquentielle
- ② Intérêts de l'étude fréquentielle
- ③ Exemple d'une suspension d'un véhicule
- ④ Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique
- ⑤ Annexes : Démonstrations complémentaires



## Définition de l'analyse fréquentielle

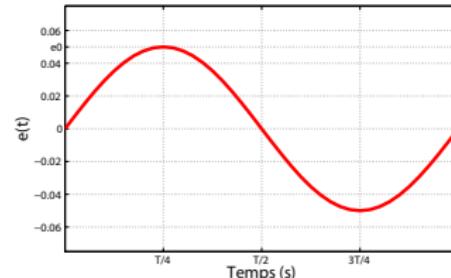
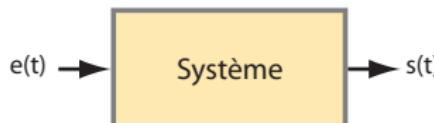
### Analyse fréquentielle ou harmonique

L'**analyse fréquentielle** d'un système linéaire, continu et invariant consiste à étudier la réponse ( $s(t)$ ) vis à vis d'une entrée ( $e(t)$ ) de type **harmonique ou sinusoïdale** :

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t) = e_0 \sin(2\pi f t) \quad (1)$$

Ce signal est caractérisé par :

- sa **fréquence**  $f = 1/T$  (inverse de la période  $T$ ),
- ou sa **pulsation**  $\omega = 2\pi f$ ,
- son **amplitude**  $e_0$ .





## Intérêts de l'étude fréquentielle

### Décomposition en série de Fourier

Tout signal **périodique** se décompose en une **somme de signaux harmoniques** (e.g. sinusoïdale).

Par exemple un signal périodique et impaire de fréquence  $f$  peut se décomposer de la façon suivante :

$$e(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cdot \sin(2\pi k f t) \quad (2)$$

### Remarque

En pratique : décomposition finie en série de Fourier ( $\tilde{e}(t)$ ) ( $n$  termes) :

$$\tilde{e}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sin(2\pi k f t) \quad (3)$$

La précision de la décomposition sera alors d'autant plus fidèle au signal de départ que le nombre de termes ( $n$ ) sera grand.



## Intérêts de l'étude fréquentielle

### Décomposition en série de Fourier

Tout signal périodique se décompose en une somme de signaux harmoniques (e.g. sinusoïdale).

Par exemple un signal périodique et impaire de fréquence  $f$  peut se décomposer de la façon suivante :

$$e(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cdot \sin(2\pi k f t) \quad (2)$$

### Remarque

En pratique : décomposition finie en série de Fourier ( $\tilde{e}(t)$ ) ( $n$  termes) :

$$\tilde{e}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sin(2\pi k f t) \quad (3)$$

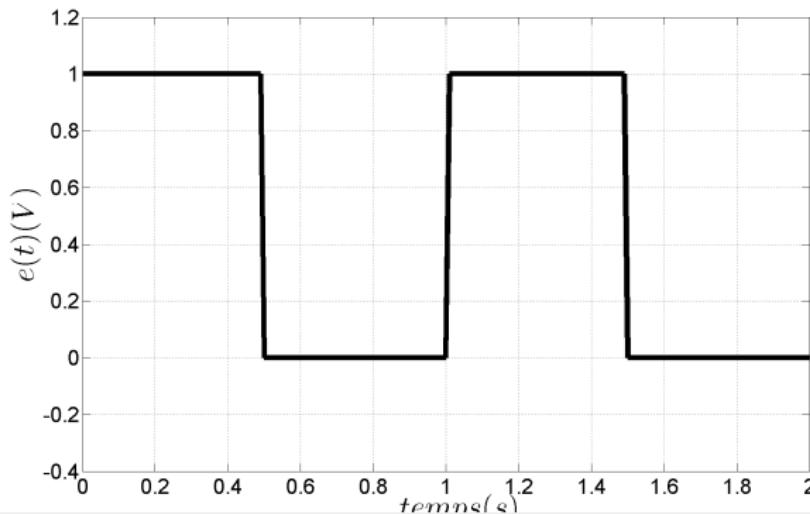
La précision de la décomposition sera alors d'autant plus fidèle au signal de départ que le nombre de termes ( $n$ ) sera grand.



## Intérêts de l'étude fréquentielle

Reconstitution d'un signal carré périodique à l'aide d'une décomposition finie en série de Fourier :

$$\tilde{e}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sin(2\pi k f t)$$

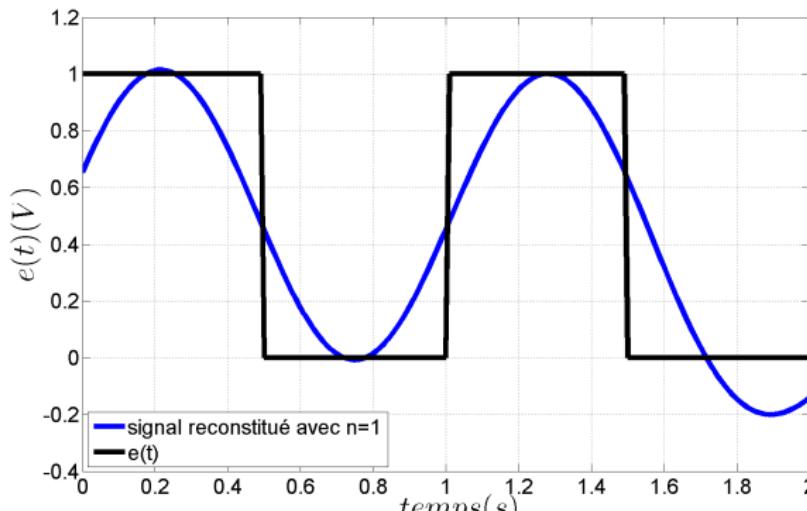




## Intérêts de l'étude fréquentielle

Reconstitution d'un signal carré périodique à l'aide d'une décomposition finie en série de Fourier :

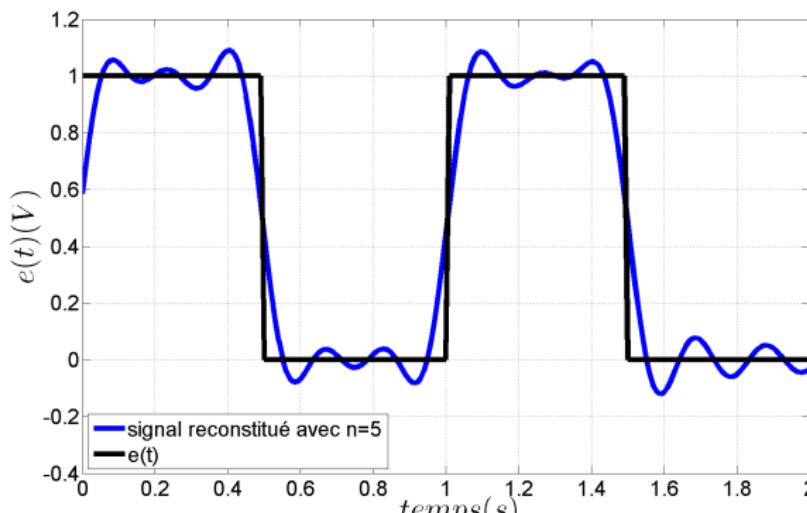
$$\tilde{e}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sin(2\pi k f t)$$



## Intérêts de l'étude fréquentielle

Reconstitution d'un signal carré périodique à l'aide d'une décomposition finie en série de Fourrier :

$$\tilde{e}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sin(2\pi k f t)$$

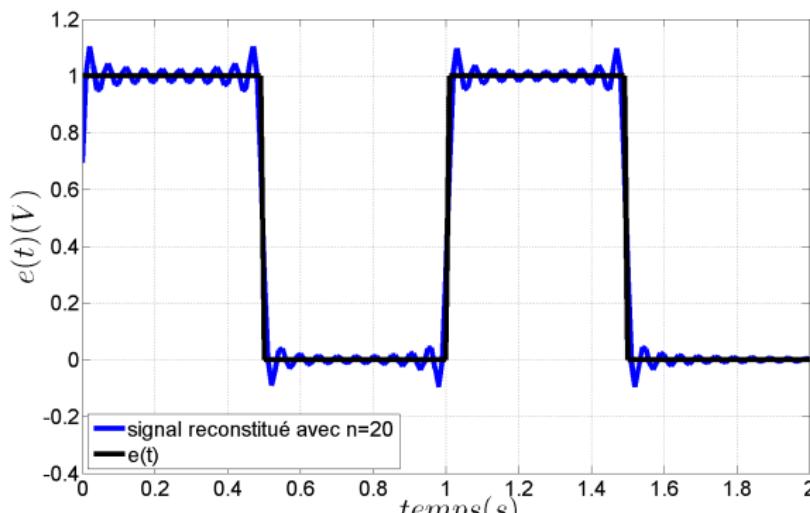




## Intérêts de l'étude fréquentielle

Reconstitution d'un signal carré périodique à l'aide d'une décomposition finie en série de Fourier :

$$\tilde{e}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sin(2\pi k f t)$$

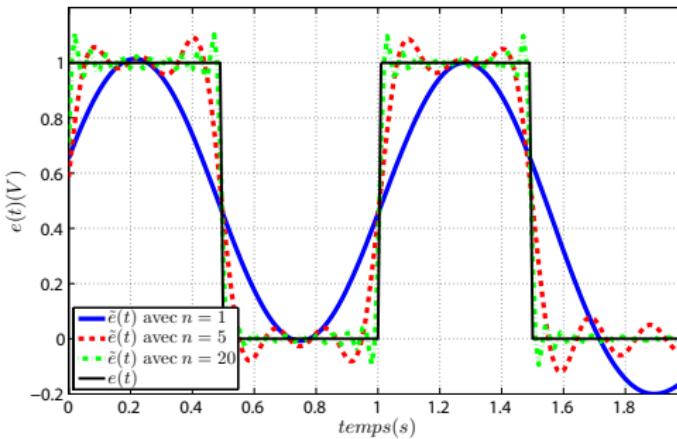




## Intérêts de l'étude fréquentielle

### Étude d'un signal quelconque

- Pour étudier la réponse d'un système vis-à-vis d'un signal quelconque, il faudra alors être capable de caractériser **la réponse fréquentielle** sur une plage de fréquence ( $f$ ) ou de pulsation ( $\omega$ ) étendue.
- On peut également choisir cette méthode d'analyse pour vérifier le comportement d'un système vis à vis d'une entrée harmonique caractérisée par différentes valeurs de fréquence ( $f$ ) ou de pulsation ( $\omega$ ).

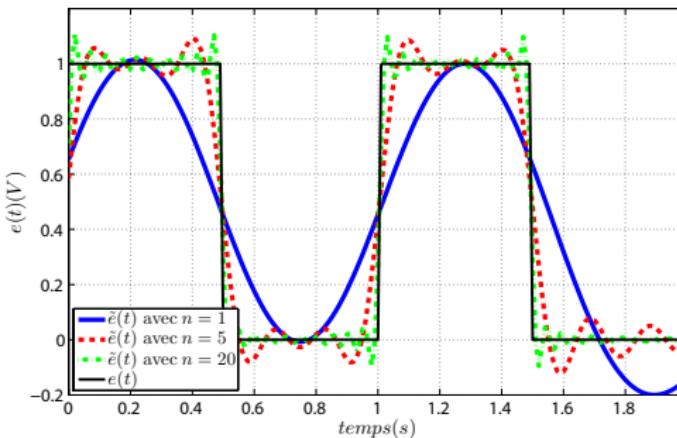




## Intérêts de l'étude fréquentielle

### Étude d'un signal quelconque

- Pour étudier la réponse d'un système vis-à-vis d'un signal quelconque, il faudra alors être capable de caractériser **la réponse fréquentielle** sur une plage de fréquence ( $f$ ) ou de pulsation ( $\omega$ ) étendue.
- On peut également choisir cette méthode d'analyse pour vérifier le comportement d'un système vis à vis d'une entrée harmonique caractérisée par différentes valeurs de fréquence ( $f$ ) ou de pulsation ( $\omega$ ).

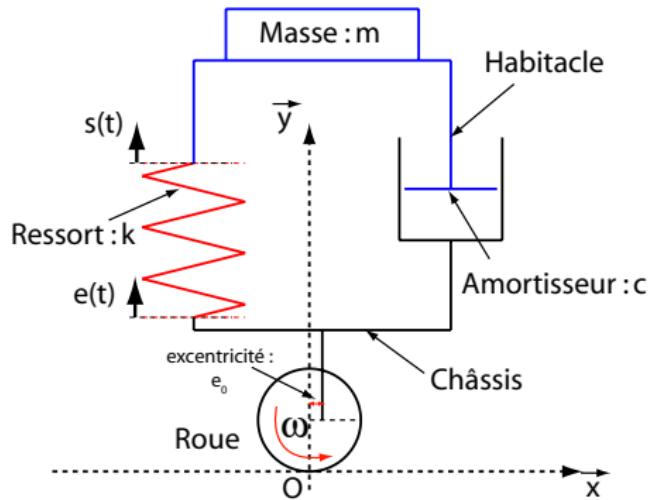




## Exemple d'une suspension d'un véhicule

### Suspension de véhicule

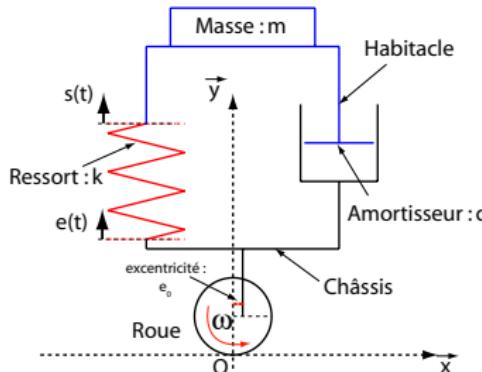
- $m = 100\text{kg}$ ,
- $c = 1,13\text{kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$ ,
- $k = 80\text{kN.m}^{-1}$ .



## Exemple d'une suspension d'un véhicule

- L'axe de la roue est légèrement excentrée par rapport à son centre. Ceci provoque donc un déplacement du châssis en fonction de la vitesse de rotation de la roue  $\omega$ .

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t).$$



- Le PFD en résultante suivant la direction  $\vec{y}$  appliquée à l'habitacle par rapport au repère  $R_0$  :

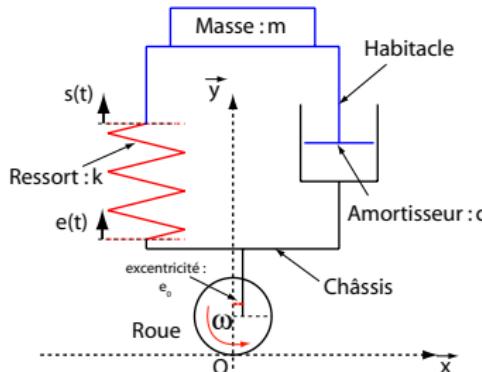
$$-c \left( \frac{d(s(t) - e(t))}{dt} \right) - k(s(t) - e(t)) = m \frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$



## Exemple d'une suspension d'un véhicule

- L'axe de la roue est légèrement excentrée par rapport à son centre. Ceci provoque donc un déplacement du châssis en fonction de la vitesse de rotation de la roue  $\omega$ .

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t).$$



- Le PFD en résultante suivant la direction  $\vec{y}$  appliquée à l'habitacle par rapport au repère  $R_0$  :

$$-c \left( \frac{d(s(t) - e(t))}{dt} \right) - k(s(t) - e(t)) = m \frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$



## Exemple d'une suspension d'un véhicule

- Le PFD en résultante suivant la direction  $\vec{y}$  appliqué à l'habitacle par rapport au repère  $R_0$  :

$$-c \left( \frac{d(s(t) - e(t))}{dt} \right) - k(s(t) - e(t)) = m \frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$

- La fonction de transfert du système  $H(p) = S(p)/E(p)$  est égale à :

$$H(p) = \frac{c p + k}{m p^2 + c p + k} = \frac{\frac{c}{k} p + 1}{\frac{m}{k} p^2 + \frac{c}{k} p + 1}$$

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t).$$



## Exemple d'une suspension d'un véhicule

- Le PFD en résultante suivant la direction  $\vec{y}$  appliqué à l'habitacle par rapport au repère  $R_0$  :

$$-c \left( \frac{d(s(t) - e(t))}{dt} \right) - k(s(t) - e(t)) = m \frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$

- La fonction de transfert du système  $H(p) = S(p)/E(p)$  est égale à :

$$H(p) = \frac{c p + k}{m p^2 + c p + k} = \frac{\frac{c}{k} p + 1}{\frac{m}{k} p^2 + \frac{c}{k} p + 1}$$

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t).$$

## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

- Transformée de Laplace de l'entrée harmonique ( $e(t)$ )

$$E(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2}$$



## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

- Transformée de Laplace de l'entrée harmonique ( $e(t)$ )

$$E(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2}$$

- Dans le domaine de Laplace la sortie  $S(p)$  d'un système soumis à une entrée harmonique s'écrit :

$$S(p) = H(p)E(p) = H(p) \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2}$$

- Pour le cas de la suspension d'un véhicule, nous obtenons alors :

$$S(p) = \left( \frac{\frac{c}{k} p + 1}{\frac{m}{k} p^2 + \frac{c}{k} p + 1} \right) \left( \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2} \right)$$



## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

- Transformée de Laplace de l'entrée harmonique ( $e(t)$ )

$$E(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2}$$

- Dans le domaine de Laplace la sortie  $S(p)$  d'un système soumis à une entrée harmonique s'écrit :

$$S(p) = H(p)E(p) = H(p) \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2}$$

- Pour le cas de la suspension d'un véhicule, nous obtenons alors :

$$S(p) = \left( \frac{\frac{c}{k} p + 1}{\frac{m}{k} p^2 + \frac{c}{k} p + 1} \right) \left( \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2} \right)$$

## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

On obtient alors par une transformée de Laplace inverse,

$$S(t) = e_0 \left[ \frac{G}{2j} \left( -e^{-j(\varphi + \omega t)} + e^{j(\varphi + \omega t)} \right) + e^{a t} Q(t) \right] \\ = e_0 [G \sin(\omega t + \varphi) + e^{a t} Q(t)]$$

Avec  $a < 0$  :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{at} Q(t) = 0$  (régime transitoire)

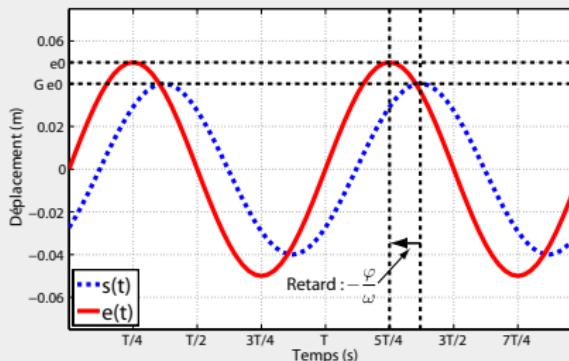
## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

### Réponse fréquentielle en régime permanent

Ainsi, en régime établi ou permanent la sortie  $s(t)$  est égale à :

$$s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

- $G = \frac{s_0}{e_0} = |H(j\omega)|$  caractérise le gain (c'est à dire le facteur d'amplitude du sinus),
- $\varphi = \arg(H(j\omega))$  est le déphasage (c'est à dire l'avance ou le retard du sinus).





## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t)$$

$$s(t) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi)$$



## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t)$$
$$s(t) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi)$$



## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

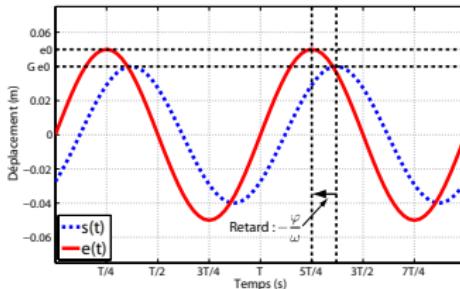
### Remarque : cas général

Dans le cas général d'un système linéaire continu invariant, sous les hypothèses de stabilité et avec des **conditions initiales nulles** le résultat précédent est encore valable.



## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : Conclusion

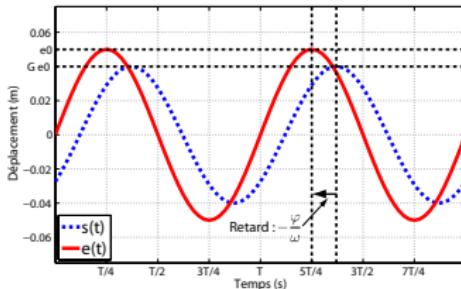
- L'étude fréquentielle d'un système linéaire continu et invariant revient à étudier :
  - le gain fréquentielle  $G$ ,
  - la phase  $\varphi$  de la fonction de transfert  $H(p)$ ,
- en fonction de la pulsation  $\omega$  ou de la fréquence  $f$ .
- On utilisera pour cela des outils des outils graphiques appelés "lieux de transfert".





## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : Conclusion

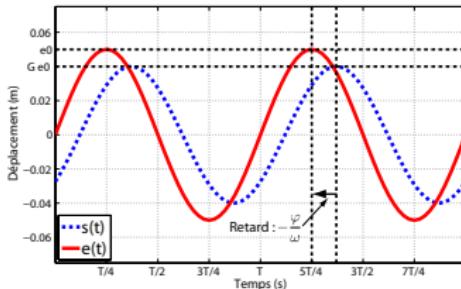
- L'étude fréquentielle d'un système linéaire continu et invariant revient à étudier :
  - le gain fréquentielle  $G$ ,
  - la phase  $\varphi$  de la fonction de transfert  $H(p)$ ,
- en fonction de la pulsation  $\omega$  ou de la fréquence  $f$ .
- On utilisera pour cela des outils des outils graphiques appelés "lieux de transfert".





## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : Conclusion

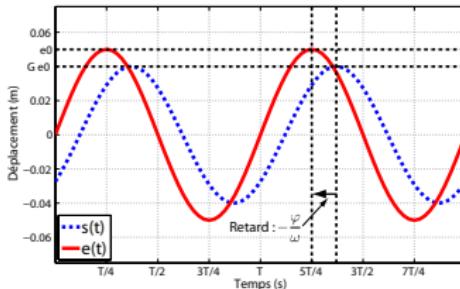
- L'étude fréquentielle d'un système linéaire continu et invariant revient à étudier :
  - le gain fréquentielle  $G$ ,
  - la phase  $\varphi$  de la fonction de transfert  $H(p)$ ,
- en fonction de la pulsation  $\omega$  ou de la fréquence  $f$ .
- On utilisera pour cela des outils des outils graphiques appelés "lieux de transfert".





## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : Conclusion

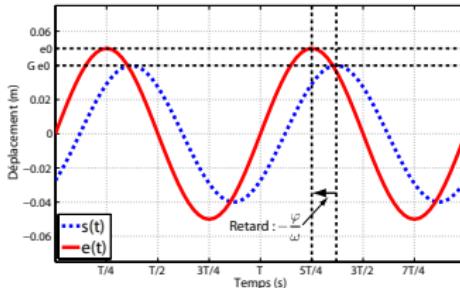
- L'étude fréquentielle d'un système linéaire continu et invariant revient à étudier :
  - le gain fréquentielle  $G$ ,
  - la phase  $\varphi$  de la fonction de transfert  $H(p)$ ,
- en fonction de la pulsation  $\omega$  ou de la fréquence  $f$ .
- On utilisera pour cela des outils des outils graphiques appelés "lieux de transfert".





## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : Conclusion

- L'étude fréquentielle d'un système linéaire continu et invariant revient à étudier :
  - le gain fréquentielle  $G$ ,
  - la phase  $\varphi$  de la fonction de transfert  $H(p)$ ,
- en fonction de la pulsation  $\omega$  ou de la fréquence  $f$ .
- On utilisera pour cela des outils des outils graphiques appelés “lieux de transfert”.





Définition de l'analyse fréquentielle Intérêts de l'étude fréquentielle Exemple d'une suspension d'un véhicule Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : Conclusion



Définition de l'analyse fréquentielle Intérêts de l'étude fréquentielle Exemple d'une suspension d'un véhicule Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique :

## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : Conclusion



Définition de l'analyse fréquentielle Intérêts de l'étude fréquentielle Exemple d'une suspension d'un véhicule Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique :

## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : Conclusion

## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

- La décomposition dans le domaine de Laplace de  $S(p)$  donne

$$S(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2} H(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{(p + j\omega)(p - j\omega)} H(p) = e_0 \left[ \frac{A}{p + j\omega} + \frac{B}{p - j\omega} + \frac{D}{p - p_1} + \frac{E}{p - p_2} \right]$$



## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

- La décomposition dans le domaine de Laplace de  $S(p)$  donne

$$S(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2} H(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{(p + j\omega)(p - j\omega)} H(p) = \\ e_0 \left[ \frac{A}{p + j\omega} + \frac{B}{p - j\omega} + \frac{D}{p - p_1} + \frac{E}{p - p_2} \right]$$

- $p_1 = a + b j$  et  $p_2 = a - b j$  sont les pôles de  $H(p)$  avec  $a = -\frac{c k}{2 m k} = -\frac{c}{2m} < 0$ .

- En calculant la limite de  $(p + j\omega)S(p)$  en  $-j\omega$  :

$$A = H(-j\omega) \frac{\omega}{-2j\omega} = \frac{H(-j\omega)}{-2j}$$

- En calculant la limite de  $(p - j\omega)S(p)$  en  $j\omega$  :

$$B = H(j\omega) \frac{\omega}{2j\omega} = \frac{H(j\omega)}{2j}$$

- Pour le cas de la suspension d'un véhicule, nous obtenons alors :

$$S(p) = \left( \frac{\frac{c}{k} p + 1}{\frac{m}{k} p^2 + \frac{c}{k} p + 1} \right) \left( \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2} \right)$$



## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

- La décomposition dans le domaine de Laplace de  $S(p)$  donne

$$S(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2} H(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{(p + j\omega)(p - j\omega)} H(p) = \\ e_0 \left[ \frac{A}{p + j\omega} + \frac{B}{p - j\omega} + \frac{D}{p - p_1} + \frac{E}{p - p_2} \right]$$

- $p_1 = a + b j$  et  $p_2 = a - b j$  sont les pôles de  $H(p)$  avec  $a = -\frac{c k}{2 m k} = -\frac{c}{2m} < 0$ .

- En calculant la limite de  $(p + j\omega)S(p)$  en  $-j\omega$  :

$$A = H(-j\omega) \frac{\omega}{-2j\omega} = \frac{H(-j\omega)}{-2j}$$

- En calculant la limite de  $(p - j\omega)S(p)$  en  $j\omega$  :

$$B = H(j\omega) \frac{\omega}{2j\omega} = \frac{H(j\omega)}{2j}$$

- Pour le cas de la suspension d'un véhicule, nous obtenons alors :

$$S(p) = \left( \frac{\frac{c}{k} p + 1}{\frac{m}{k} p^2 + \frac{c}{k} p + 1} \right) \left( \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2} \right)$$



## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

- La décomposition dans le domaine de Laplace de  $S(p)$  donne

$$S(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2} H(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{(p + j\omega)(p - j\omega)} H(p) = \\ e_0 \left[ \frac{A}{p + j\omega} + \frac{B}{p - j\omega} + \frac{D}{p - p_1} + \frac{E}{p - p_2} \right]$$

- $p_1 = a + b j$  et  $p_2 = a - b j$  sont les pôles de  $H(p)$  avec  $a = -\frac{c}{2m k} = -\frac{c}{2m} < 0$ .

- En calculant la limite de  $(p + j\omega)S(p)$  en  $-j\omega$  :

$$A = H(-j\omega) \frac{\omega}{-2j\omega} = \frac{H(-j\omega)}{-2j}$$

- En calculant la limite de  $(p - j\omega)S(p)$  en  $j\omega$  :

$$B = H(j\omega) \frac{\omega}{2j\omega} = \frac{H(j\omega)}{2j}$$

- Pour le cas de la suspension d'un véhicule, nous obtenons alors :

$$S(p) = \left( \frac{\frac{c}{k} p + 1}{\frac{m}{k} p^2 + \frac{c}{k} p + 1} \right) \left( \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2} \right)$$



## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

- La décomposition dans le domaine de Laplace de  $S(p)$  donne

$$S(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2} H(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{(p + j\omega)(p - j\omega)} H(p) = \\ e_0 \left[ \frac{A}{p + j\omega} + \frac{B}{p - j\omega} + \frac{D}{p - p_1} + \frac{E}{p - p_2} \right]$$

- $p_1 = a + b j$  et  $p_2 = a - b j$  sont les pôles de  $H(p)$  avec  $a = -\frac{c}{2m k} = -\frac{c}{2m} < 0$ .

- En calculant la limite de  $(p + j\omega)S(p)$  en  $-j\omega$  :

$$A = H(-j\omega) \frac{\omega}{-2j\omega} = \frac{H(-j\omega)}{-2j}$$

- En calculant la limite de  $(p - j\omega)S(p)$  en  $j\omega$  :

$$B = H(j\omega) \frac{\omega}{2j\omega} = \frac{H(j\omega)}{2j}$$

- Pour le cas de la suspension d'un véhicule, nous obtenons alors :

$$S(p) = \left( \frac{\frac{c}{k} p + 1}{\frac{m}{k} p^2 + \frac{c}{k} p + 1} \right) \left( \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2} \right)$$



## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

### Remarque : stabilité des systèmes

- L'étude fréquentielle d'un système asservi n'a de sens que si le **système est stable**.
- La condition  $a = -\frac{c \cdot k}{2 \cdot m \cdot k} = -\frac{c}{2m} < 0$  revient à dire que les pôles de la fonction de transfert sont à partie réelle négative ce qui est une condition de stabilité des systèmes asservis.
- Dans le cours de première année, nous n'étudierons que des système stables. En deuxième année, nous étudierons la méthode pour caractériser la stabilité d'un système.

## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

### Remarque : stabilité des systèmes

- L'étude fréquentielle d'un système asservi n'a de sens que si le **système est stable**.
- La condition  $a = -\frac{c k}{2 m k} = -\frac{c}{2m} < 0$  revient à dire que les pôles de la fonction de transfert sont à partie réelle négative ce qui est une condition de stabilité des systèmes asservis.
- Dans le cours de première année, nous n'étudierons que des système stables. En deuxième année, nous étudierons la méthode pour caractériser la stabilité d'un système.



## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

### Remarque : stabilité des systèmes

- L'étude fréquentielle d'un système asservi n'a de sens que si le **système est stable**.
- La condition  $a = -\frac{c k}{2 m k} = -\frac{c}{2m} < 0$  revient à dire que les pôles de la fonction de transfert sont à partie réelle négative ce qui est une condition de stabilité des systèmes asservis.
- Dans le cours de première année, nous n'étudierons que des système stables. En deuxième année, nous étudierons la méthode pour caractériser la stabilité d'un système.



## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

- **A et B sont des complexes conjugués.**
- $H(j\omega)$  est un nombre complexe et peut donc s'écrire sous la forme  $H(j\omega) = G e^{j\varphi}$ , avec  $G = |H(j\omega)|$  et  $\varphi = \arg(H(j\omega))$ .
- On obtient alors,

$$\begin{aligned} S(p) &= e_0 \left[ \frac{H(-j\omega)}{-2j(p+j\omega)} + \frac{H(j\omega)}{2j(p-j\omega)} + \frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2} \right] \\ &= e_0 \left[ \frac{1}{2j} \left( -\frac{Ge^{-j\varphi}}{p+j\omega} + \frac{Ge^{j\varphi}}{p-j\omega} \right) + \frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2} \right] \end{aligned}$$

- La transformée de Laplace inverse de  $\frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2}$  est de la forme  $e^{a t} Q(t)$  avec  $Q(t)$  une fonction bornée dans le temps.

$$\begin{aligned} S(t) &= e_0 \left[ \frac{G}{2j} \left( -e^{-j(\varphi+\omega t)} + e^{j(\varphi+\omega t)} \right) + e^{a t} Q(t) \right] \\ &= e_0 [G \sin(\omega t + \varphi) + e^{a t} Q(t)] \end{aligned}$$

- $a < 0 : \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{a t} Q(t) = 0$  (régime transitoire)



## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

- **$A$  et  $B$  sont des complexes conjugués.**
- $H(j\omega)$  est un nombre complexe et peut donc s'écrire sous la forme  $H(j\omega) = G e^{j\varphi}$ , avec  $G = |H(j\omega)|$  et  $\varphi = \arg(H(j\omega))$ .
- On obtient alors,

$$\begin{aligned} S(p) &= e_0 \left[ \frac{H(-j\omega)}{-2j(p+j\omega)} + \frac{H(j\omega)}{2j(p-j\omega)} + \frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2} \right] \\ &= e_0 \left[ \frac{1}{2j} \left( -\frac{Ge^{-j\varphi}}{p+j\omega} + \frac{Ge^{j\varphi}}{p-j\omega} \right) + \frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2} \right] \end{aligned}$$

- La transformée de Laplace inverse de  $\frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2}$  est de la forme  $e^{a t} Q(t)$  avec  $Q(t)$  une fonction bornée dans le temps.

$$\begin{aligned} S(t) &= e_0 \left[ \frac{G}{2j} \left( -e^{-j(\varphi+\omega t)} + e^{j(\varphi+\omega t)} \right) + e^{a t} Q(t) \right] \\ &= e_0 [G \sin(\omega t + \varphi) + e^{a t} Q(t)] \end{aligned}$$

- $a < 0 : \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{a t} Q(t) = 0$  (régime transitoire)

## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

- A et B sont des complexes conjugués.
  - $H(j\omega)$  est un nombre complexe et peut donc s'écrire sous la forme  $H(j\omega) = G e^{j\varphi}$ , avec  $G = |H(j\omega)|$  et  $\varphi = \arg(H(j\omega))$ .
  - On obtient alors,

$$S(p) = e_0 \left[ \frac{H(-j\omega)}{-2j(p+j\omega)} + \frac{H(j\omega)}{2j(p-j\omega)} + \frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2} \right]$$

$$= e_0 \left[ \frac{1}{2j} \left( -\frac{Ge^{-j\varphi}}{p+j\omega} + \frac{Ge^{j\varphi}}{p-j\omega} \right) + \frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2} \right]$$



## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

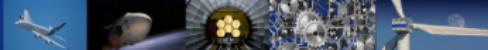
- $A$  et  $B$  sont des complexes conjugués.
- $H(j\omega)$  est un nombre complexe et peut donc s'écrire sous la forme  $H(j\omega) = G e^{j\varphi}$ , avec  $G = |H(j\omega)|$  et  $\varphi = \arg(H(j\omega))$ .
- On obtient alors,

$$\begin{aligned} S(p) &= e_0 \left[ \frac{H(-j\omega)}{-2j(p+j\omega)} + \frac{H(j\omega)}{2j(p-j\omega)} + \frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2} \right] \\ &= e_0 \left[ \frac{1}{2j} \left( -\frac{Ge^{-j\varphi}}{p+j\omega} + \frac{Ge^{j\varphi}}{p-j\omega} \right) + \frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2} \right] \end{aligned}$$

- La transformée de Laplace inverse de  $\frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2}$  est de la forme  $e^{a t} Q(t)$  avec  $Q(t)$  une fonction bornée dans le temps.

$$\begin{aligned} S(t) &= e_0 \left[ \frac{G}{2j} \left( -e^{-j(\varphi+\omega t)} + e^{j(\varphi+\omega t)} \right) + e^{a t} Q(t) \right] \\ &= e_0 [G \sin(\omega t + \varphi) + e^{a t} Q(t)] \end{aligned}$$

- $a < 0 : \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{a t} Q(t) = 0$  (régime transitoire)



## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

- $A$  et  $B$  sont des complexes conjugués.
- $H(j\omega)$  est un nombre complexe et peut donc s'écrire sous la forme  $H(j\omega) = G e^{j\varphi}$ , avec  $G = |H(j\omega)|$  et  $\varphi = \arg(H(j\omega))$ .
- On obtient alors,

$$\begin{aligned} S(p) &= e_0 \left[ \frac{H(-j\omega)}{-2j(p+j\omega)} + \frac{H(j\omega)}{2j(p-j\omega)} + \frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2} \right] \\ &= e_0 \left[ \frac{1}{2j} \left( -\frac{Ge^{-j\varphi}}{p+j\omega} + \frac{Ge^{j\varphi}}{p-j\omega} \right) + \frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2} \right] \end{aligned}$$

- La transformée de Laplace inverse de  $\frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2}$  est de la forme  $e^{a t} Q(t)$  avec  $Q(t)$  une fonction bornée dans le temps.

$$\begin{aligned} S(t) &= e_0 \left[ \frac{G}{2j} \left( -e^{-j(\varphi+\omega t)} + e^{j(\varphi+\omega t)} \right) + e^{a t} Q(t) \right] \\ &= e_0 [G \sin(\omega t + \varphi) + e^{a t} Q(t)] \end{aligned}$$

- $a < 0 : \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{a t} Q(t) = 0$  (régime transitoire)



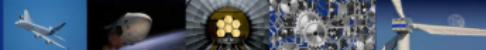
## Démonstrations complémentaires

On remarque que  $A$  et  $B$  sont des complexes conjugués.

Si  $H(p)$  est du type :  $H(p) = \alpha p^2 + \beta p + \gamma$

$$A = \frac{H(-j\omega)}{-2j} = \frac{\alpha (-j\omega)^2 + \beta (-j\omega) + \gamma}{-2j} = \frac{\gamma - \alpha\omega^2 - j\beta\omega}{-2j} = \frac{j(\gamma - \alpha\omega^2) + \beta\omega}{2}$$

$$\begin{aligned}B &= \frac{H(j\omega)}{2j} = \frac{\alpha (j\omega)^2 + \beta (j\omega) + \gamma}{2j} = \frac{\gamma - \alpha\omega^2 + j\beta\omega}{2j} = -\frac{j(\gamma - \alpha\omega^2) - \beta\omega}{2} \\&= \frac{-j(\gamma - \alpha\omega^2) + \beta\omega}{2}\end{aligned}$$



## Démonstrations complémentaires

**Transformée de Laplace inverse de  $\frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2}$  :**

- On peut déjà montrer que D et E sont complexes conjugués.

Dans l'exemple du cours en utilisant les limites et en posant  $\tau = \frac{c}{k}$ , on obtient

$$\begin{aligned} D &= \lim_{p \rightarrow p_1} (p - p_1) S(p) = \frac{e_0 \omega (1 + \tau p_1)}{(p_1 - p_2)(p_1^2 + \omega^2)} = \frac{e_0 \omega (1 + \tau (a + j b))}{(2 b j)(a^2 + 2 j a b - b^2 + \omega^2)} \\ &= \frac{e_0 \omega (1 + \tau (a + j b))}{2 b (-2 a b + j(a^2 - b^2 + \omega^2))} = \frac{e_0 \omega (1 + \tau a + j b) (-2 a b - j(a^2 - b^2 + \omega^2))}{2 b (4 a^2 b^2 + (a^2 - b^2 + \omega^2)^2)} \\ &= \frac{e_0 \omega [-2 a b (1 + \tau a) + \tau b (a^2 - b^2 + \omega^2) + j (-2 \tau a b^2 - (1 + \tau a)(a^2 - b^2 + \omega^2))]}{2 b (4 a^2 b^2 + (a^2 - b^2 + \omega^2)^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \lim_{p \rightarrow p_2} (p - p_2) S(p) = \frac{e_0 \omega (1 + \tau p_2)}{(p_2 - p_1)(p_2^2 + \omega^2)} = \frac{e_0 \omega (1 + \tau (a - j b))}{-2 b j (a^2 - 2 j a b - b^2 + \omega^2)} \\ &= \frac{e_0 \omega (1 + \tau (a - j b))}{-2 b (2 a b + j(a^2 - b^2 + \omega^2))} = \frac{e_0 \omega (1 + \tau a - j b) (2 a b - j(a^2 - b^2 + \omega^2))}{-2 b (4 a^2 b^2 + (a^2 - b^2 + \omega^2)^2)} \\ &= \frac{e_0 \omega [2 a b (1 + \tau a) - \tau b (a^2 - b^2 + \omega^2) + j (-2 \tau a b^2 - (1 + \tau a)(a^2 - b^2 + \omega^2))]}{2 b (4 a^2 b^2 + (a^2 - b^2 + \omega^2)^2)} \end{aligned}$$

- On remarque que D et E sont complexes conjugués.



## Démonstrations complémentaires

Transformée de Laplace inverse de  $\frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2}$  :

- On remarque que D et E sont complexes conjugués, donc on pose :

$$D = \beta e^{j\alpha}$$

$$E = \beta e^{-j\alpha}$$

- Ainsi,

$$\frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2} = \frac{\beta e^{j\alpha}}{p-(a+bj)} + \frac{\beta e^{-j\alpha}}{p-(a-bj)}$$

- La transformée de Laplace inverse donne :

$$\begin{aligned} & \left( \beta e^{j\alpha} e^{(a+bj)t} + \beta e^{-j\alpha} e^{(a-bj)t} \right) u(t) \\ &= \beta e^{at} \left( e^{j(\alpha+bt)} + e^{-j(\alpha+bt)} \right) u(t) = 2\beta e^{at} \cos(bt + \alpha). \end{aligned}$$

Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : cas général

- Système linéaire continu invariant, stable avec des conditions initiales nulles :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : cas général

- Système linéaire continu invariant, stable avec des conditions initiales nulles :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

- Avec une réponse à un échelon pour avoir la condition initiale  $s(0) = 0$ , il faut que,

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p S(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p H(p) E(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \frac{1}{p} H(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} H(p) = 0.$$

Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : cas général

- Système linéaire continu invariant, stable avec des conditions initiales nulles :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

- Avec une réponse à un échelon pour avoir la condition initiale  $s(0) = 0$ , il faut que,

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p S(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p H(p) E(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \frac{1}{p} H(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} H(p) = 0.$$

- Degré du dénominateur  $D(p) >$  au degré de son numérateur  $N(p)$
  - Décomposition en éléments simples de  $S(p)$  :



## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : cas général

- Système linéaire continu invariant, stable avec des conditions initiales nulles :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

- Avec une réponse à un échelon pour avoir la condition initiale  $s(0) = 0$ , il faut que,

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p S(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p H(p) E(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \frac{1}{p} H(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} H(p) = 0.$$

- Degré du dénominateur  $D(p) >$  au degré de son numérateur  $N(p)$ .
- Décomposition en éléments simples de  $S(p)$  :

$$S(p) = e_0 \left[ \frac{A}{p + j\omega} + \frac{B}{p - j\omega} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\alpha_i} \frac{C_{ki}}{(p - p_i)^i} \right]$$



## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : cas général

- Décomposition en éléments simples de  $S(p)$  :

$$S(p) = e_0 \left[ \frac{A}{p + j\omega} + \frac{B}{p - j\omega} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\alpha_k} \frac{C_{ki}}{(p - p_i)^i} \right]$$

- L'entier  $\alpha_i$  représente la classe du  $i^{\text{ème}}$  pôle ( $p_i$ ).
- La condition de stabilité du système fait que les pôles  $p_i = a_i \pm jb_i$  sont à partie réelles négatives.
- La transformée de Laplace inverse de  $\frac{C_{ki}}{(p - p_i)^i}$  est de la forme :

$$e^{a_i t} Q_i(t)$$

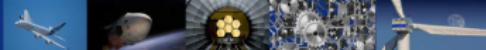
Elle représente le régime transitoire et tend vers 0 en  $+\infty$ .

- Ainsi, en reprenant, le raisonnement vu précédemment, on trouve aisément que la transformée de Laplace inverse de  $S(p)$ ,  $s(t)$  est de la forme :

$$s(t) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

[

Remarque : cas général] Dans le cas général d'un système linéaire continu invariant, sous les hypothèses de stabilité et avec des conditions initiales nulles le résultat



## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : cas général

- Décomposition en éléments simples de  $S(p)$  :

$$S(p) = e_0 \left[ \frac{A}{p + j\omega} + \frac{B}{p - j\omega} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\alpha_k} \frac{C_{ki}}{(p - p_i)^i} \right]$$

- L'entier  $\alpha_i$  représente la classe du  $i^{\text{ème}}$  pôle ( $p_i$ ).
- La condition de stabilité du système fait que les pôles  $p_i = a_i \pm jb_i$  sont à partie réelles négatives.
- La transformée de Laplace inverse de  $\frac{C_{ki}}{(p - p_i)^i}$  est de la forme :

$$e^{a_i t} Q_i(t)$$

Elle représente le régime transitoire et tend vers 0 en  $+\infty$ .

- Ainsi, en reprenant, le raisonnement vu précédemment, on trouve aisément que la transformée de Laplace inverse de  $S(p)$ ,  $s(t)$  est de la forme :

$$s(t) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

[

Remarque : cas général] Dans le cas général d'un système linéaire continu invariant, sous les hypothèses de stabilité et avec des conditions initiales nulles le résultat

Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : cas général

- Décomposition en éléments simples de  $S(p)$  :

$$S(p) = e_0 \left[ \frac{A}{p + j\omega} + \frac{B}{p - j\omega} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\alpha_k} \frac{C_{ki}}{(p - p_i)^i} \right]$$

- L'entier  $\alpha_i$  représente la classe du  $i^{\text{ème}}$  pôle ( $p_i$ ).
  - La condition de stabilité du système fait que les pôles  $p_i = a_i \pm jb_i$  sont à partie réelles négatives.
  - La transformée de Laplace inverse de  $\frac{C_{ki}}{(p - p_i)^{\alpha_i}}$  est de la forme :

[

Remarque : cas général] Dans le cas général d'un système linéaire continu invariant, sous les hypothèses de **stabilité** et avec des **conditions initiales nulles** le résultat



## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : cas général

- Décomposition en éléments simples de  $S(p)$  :

$$S(p) = e_0 \left[ \frac{A}{p + j\omega} + \frac{B}{p - j\omega} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\alpha_k} \frac{C_{ki}}{(p - p_i)^i} \right]$$

- L'entier  $\alpha_i$  représente la classe du  $i^{\text{ème}}$  pôle ( $p_i$ ).
- La condition de stabilité du système fait que les pôles  $p_i = a_i \pm jb_i$  sont à partie réelles négatives.
- La transformée de Laplace inverse de  $\frac{C_{ki}}{(p - p_i)^i}$  est de la forme :

$$e^{a_i t} Q_i(t)$$

Elle représente le régime transitoire et tend vers 0 en  $+\infty$ .

- Ainsi, en reprenant, le raisonnement vu précédemment, on trouve aisément que la transformée de Laplace inverse de  $S(p)$ ,  $s(t)$  est de la forme :

$$s(t) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

[

Remarque : cas général] Dans le cas général d'un système linéaire continu invariant, sous les hypothèses de stabilité et avec des conditions initiales nulles le résultat



## Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : cas général

- Décomposition en éléments simples de  $S(p)$  :

$$S(p) = e_0 \left[ \frac{A}{p + j\omega} + \frac{B}{p - j\omega} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\alpha_k} \frac{C_{ki}}{(p - p_i)^i} \right]$$

- L'entier  $\alpha_i$  représente la classe du  $i^{\text{ème}}$  pôle ( $p_i$ ).
- La condition de stabilité du système fait que les pôles  $p_i = a_i \pm jb_i$  sont à partie réelles négatives.
- La transformée de Laplace inverse de  $\frac{C_{ki}}{(p - p_i)^i}$  est de la forme :

$$e^{a_i t} Q_i(t)$$

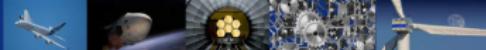
Elle représente le régime transitoire et tend vers 0 en  $+\infty$ .

- Ainsi, en reprenant, le raisonnement vu précédemment, on trouve aisément que la transformée de Laplace inverse de  $S(p)$ ,  $s(t)$  est de la forme :

$$s(t) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

[

Remarque : cas général] Dans le cas général d'un système linéaire continu invariant, sous les hypothèses de stabilité et avec des conditions initiales nulles le résultat



## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Démonstration du facteur de résonance  $|H(j \omega)|_{max}$  est obtenu lorsque

$$\omega = \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}.$$

- On obtient alors,

$$\begin{aligned}|H(j \omega)|_{max} &= \frac{K}{\sqrt{\left(1 - (1 - 2\xi^2) \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0} \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}\right)^2}} \\&= \frac{K}{\sqrt{(1 - 1 + 2\xi^2)^2 + \left(2\xi \sqrt{1 - 2\xi^2}\right)^2}} = \frac{K}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2 (1 - 2\xi^2)}} = \frac{K}{2 \xi \sqrt{1 - \xi^2}}\end{aligned}$$

- De plus on peut calculer  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j \omega)|$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j \omega)| = K.$$



## Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Démonstration du facteur de résonance  $|H(j \omega)|_{max}$  est obtenu lorsque

$$\omega = \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}.$$

- On obtient alors,

$$\begin{aligned}|H(j \omega)|_{max} &= \frac{K}{\sqrt{\left(1 - (1 - 2\xi^2) \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0} \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}\right)^2}} \\&= \frac{K}{\sqrt{(1 - 1 + 2\xi^2)^2 + \left(2\xi \sqrt{1 - 2\xi^2}\right)^2}} = \frac{K}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2 (1 - 2\xi^2)}} = \frac{K}{2 \xi \sqrt{1 - \xi^2}}\end{aligned}$$

- De plus on peut calculer  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j \omega)|$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j \omega)| = K.$$