C5 : Analyse et résolution pour déterminer les performances cinématiques des systèmes composés de chaines de solide
C5-2 : Transmission de puissance

Émilien DURIF

Lycée La Martinière Monplaisir Lyon
Classe de PSI
10 Mars 2020

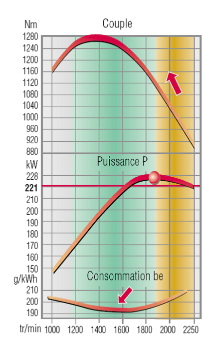
Plan

Plan

Réducteur de vitesse

Exemple : Transmission de puissance d'un tracteur

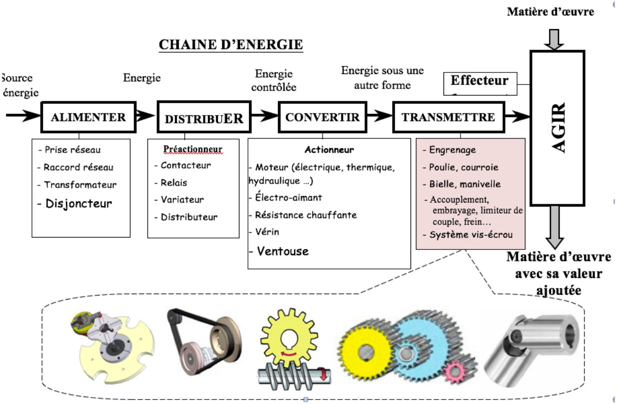
On s'intéresse ici à la chaîne de transmission de puissance utilisée sur les tracteur "Fendt 300-900 Vario" dont l'actionneur est un moteur thermique. Les performances de ces moteurs sont identifiées par des courbes caractéristiques (voir figure ci-dessous) dont en particulier la puissance (en kW) et le couple (en $N \cdot m$) disponibles sur l'arbre de sortie du moteur que l'on note C_m en fonction de la vitesse de rotation de l'arbre moteur ω_m (en radians par seconde) ou plus souvent N (en tours par minute).



Réducteur de vitesse

Remarques

En transmission de puissance, on désigne par couple le moment (actions mécaniques qui provoquent la rotation d'un solide) par rapport à l'axe de rotation des actions d'un arbre sur une autre pièce qui l'entraîne.



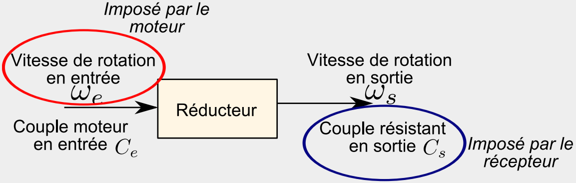
Réducteur de vitesse

Définition : Réducteur de vitesse

- Généralement le cahier des charges d'un tracteur impose un régime de fonctionnement donnant une valeur de couple à vaincre (par exemple directement lié à la charge à tracter) sur une certaine plage de vitesse.
- On souhaite donc adapter le **régime moteur** (couple disponible et vitesse à fournir).
- On utilise pour cela un **réducteur de vitesse**. Il permet d'adapter le couple d'entrée (qui est égale au couple moteur $C_e = C_m$) et la vitesse de rotation d'entrée (qui correspond à la vitesse de sortie du moteur $\omega_e = \omega_m$) au couple de sortie C_s (qui dépend aux actions mécaniques à vaincre) et de la vitesse de rotation sur l'arbre de sortie ω_s (par exemple les roues du tracteur).

Réducteur de vitesse

Définition : Réducteur de vitesse



La taille d'un moteur thermique est directement liée au couple C_e qu'il peut produire. Généralement on limite le poids et l'encombrement du moteur. Il faut donc multiplier le couple C_e et donc réduire la vitesse de rotation ω_e.

Définition : Rapport de réduction

On définit le **rapport de réduction** r d'un réducteur comme :

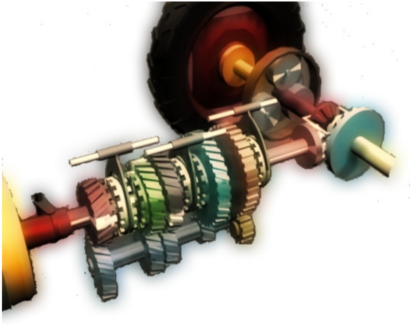
$$\boxed{r = \frac{\omega_{s/0}}{\omega_{e/0}}} \tag{1}$$

- si $r > 1$ on parle de **multiplicateur de vitesse** (rare) ;
- si $r < 1$ on parle de **réducteur de vitesse** (plus commun).

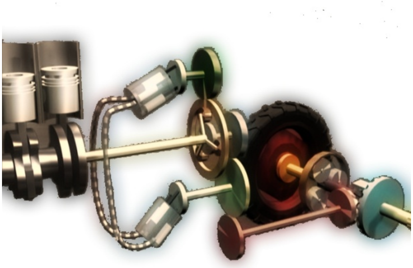
Réducteur de vitesse

Pour cette étude, on retient deux technologies de réducteur :

- Réducteur à engrenages (nombre fini de rapports de réduction des vitesses) ;
- réducteur à train épicycloïdal (variation continu des rapports de vitesses).



Réducteur à engrenage



Réducteur à train épicycloïdal

Définition : Engrenages

- Les **engrenages** sont constitués de roues dentées engrenant l'une avec l'autre. Chaque roue est en mouvement de rotation autour d'un axe. La transmission entre les roues se fait par obstacle grâce à l'existence d'une zone de contact entre les différentes dents.
- Habituellement, la petite roue est appelée **pignon** (ici S_2) alors que la grande **roue** (ici S_1).
- Au point de contact (noté I) entre deux roues dentées, il y a **roulement sans glissement** :

$$\boxed{\overrightarrow{V}(I \in S_2/S_1)} \tag{2}$$

- Le point de contact décrit une **trajectoire circulaire** dans les référentiels respectivement liés à chaque roue dentée. Ces cercles sont appelés **cercles primitifs** que l'on caractérise par leur diamètre primitif (D_i) et leur rayon primitif (r_i).
- Pour garantir l'engrènement, les **pas primitifs** des dentures du pignon et de la roue doivent être les mêmes. Il correspond à la longueur de l'arc le long du cercle primitif compris entre deux dents consécutives :

$$\boxed{pas = \frac{\pi\ D_1}{Z_1} = \frac{\pi\ D_2}{Z_2}} \tag{3}$$

Cas des transmissions par engrenages

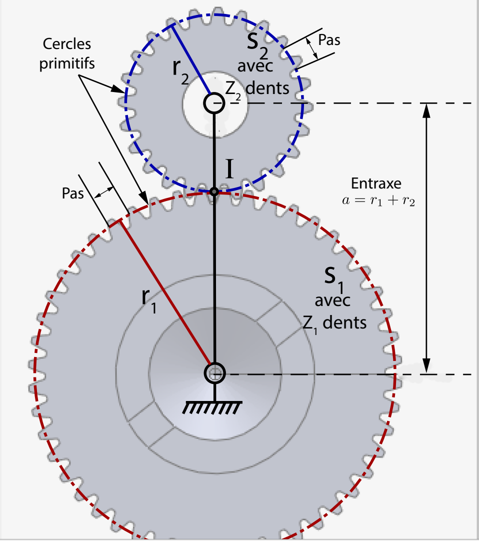
Définition : Engrenages

- On en déduit alors que :

$$\boxed{\frac{D_1}{D_2} = \frac{Z_1}{Z_2}} \qquad (4)$$

- Le **module** $m = \frac{pas}{\pi}$ est une grandeur normalisée pour caractériser l'aptitude à l'engrènement des engrenages. Le pignon et la roue doivent avoir le même module pour fonctionner :

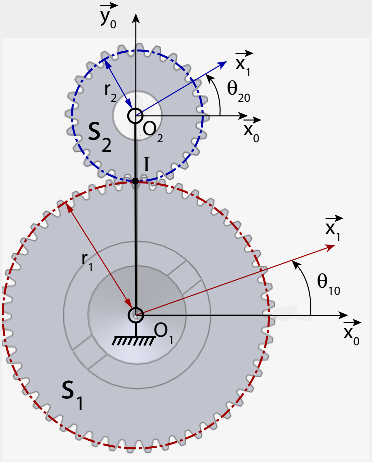
$$\boxed{D = m\,Z} \qquad (5)$$



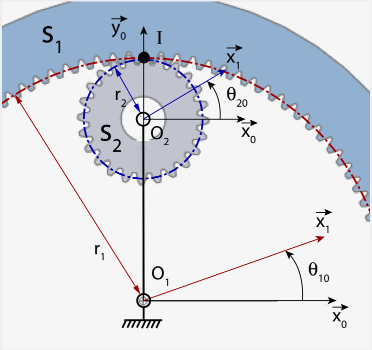
Cas des transmissions par engrenages

Propriétés : Rapport de réduction pour un train d'engrenage simple

On considère deux roues dentées S_1 et S_2 en mouvement de rotation par rapport aux axes respectifs $\left(O_1, \overrightarrow{z}_{0,1}\right)$ et $\left(O_2, \overrightarrow{z}_{0,2}\right)$ fixes par rapport au bâti S_0.



Contact extérieur



Contact Intérieur

Cas des transmissions par engrenages

- **Condition de roulement sans glissement en I**

$$\overrightarrow{V}(I \in S_1/S_2) = \overrightarrow{0}$$

- **Décomposition de la vitesse de glissement**

$$\overrightarrow{V}(I \in S_1/S_2) = \overrightarrow{V}(I \in S_1/S_0) - \overrightarrow{V}(I \in S_2/S_0)$$

Cas des transmissions par engrenages

- **Condition de roulement sans glissement en I**

$$\overrightarrow{V}(I \in S_1/S_2) = \overrightarrow{0}$$

- **Décomposition de la vitesse de glissement**

$$\overrightarrow{V}(I \in S_1/S_2) = \overrightarrow{V}(I \in S_1/S_0) - \overrightarrow{V}(I \in S_2/S_0)$$

Cas des transmissions par engrenages

- **Calcul de $\overrightarrow{V}(I \in S_1/S_0)$ et $\overrightarrow{V}(I \in S_2/S_0)$:**

Contact intérieur

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V}(I \in S_1/S_0) &= \\
\overrightarrow{V}(O_1 \in S_1/S_0) + \overrightarrow{IO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0) \\
&= \overrightarrow{0} - r_1 \cdot \overrightarrow{y}_0 \wedge \dot{\theta}_{10} \cdot \overrightarrow{z}_0 \\
&= -r_1 \cdot \dot{\theta}_{10} \cdot \overrightarrow{y}_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V}(I \in S_2/S_0) &= \\
\overrightarrow{V}(O_2 \in S_2/S_0) + \overrightarrow{IO_2} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S_2/S_0) \\
&= \overrightarrow{0} + r_2 \cdot \overrightarrow{y}_0 \wedge \dot{\theta}_{20} \cdot \overrightarrow{z}_0 \\
&= r_2 \cdot \dot{\theta}_{20} \cdot \overrightarrow{y}_0
\end{aligned}$$

Contact intérieur

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V}(I \in S_1/S_0) &= \\
\overrightarrow{V}(O_1 \in S_1/S_0) + \overrightarrow{IO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0) \\
&= \overrightarrow{0} - r_1 \cdot \overrightarrow{y}_0 \wedge \dot{\theta}_{10} \cdot \overrightarrow{z}_0 \\
&= -r_1 \cdot \dot{\theta}_{10} \cdot \overrightarrow{y}_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V}(I \in S_2/S_0) &= \\
\overrightarrow{V}(O_2 \in S_2/S_0) + \overrightarrow{IO_2} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S_2/S_0) \\
&= \overrightarrow{0} - r_2 \cdot \overrightarrow{y}_0 \wedge \dot{\theta}_{20} \cdot \overrightarrow{z}_0 \\
&= -r_2 \cdot \dot{\theta}_{20} \cdot \overrightarrow{y}_0
\end{aligned}$$

Cas des transmissions par engrenages

- **Relation entre $\dot{\theta}_{10}$, $\dot{\theta}_{10}$, r_1 et r_2.**

Contact extérieur

$$\overrightarrow{V}(I \in S_1/S_0) - \overrightarrow{V}(I \in S_2/S_0) = \overrightarrow{0} \Rightarrow -r_1 \cdot \dot{\theta}_{10} - r_2 \cdot \dot{\theta}_{20} = 0$$

D'où :

$$\boxed{\frac{\dot{\theta}_{10}}{\dot{\theta}_{20}} = -\frac{r_2}{r_1}} \tag{6}$$

Contact intérieur

$$\overrightarrow{V}(I \in S_1/S_0) - \overrightarrow{V}(I \in S_2/S_0) = \overrightarrow{0} \Rightarrow -r_1 \cdot \dot{\theta}_{10} + r_2 \cdot \dot{\theta}_{20} = 0$$

D'où :

$$\boxed{\frac{\dot{\theta}_{10}}{\dot{\theta}_{20}} = +\frac{r_2}{r_1}} \tag{7}$$

Cas des transmissions par engrenages

- Pour que deux roues dentées engrènent, il faut que leur pas de denture et le module (m) soient le même. Or le nombre de dents d'une roue i (noté Z_i) est relié par son rayon (noté r_i) avec la relation :

$$2 \cdot r_i = m \cdot Z_i$$

On obtient ainsi les rapports de réduction :

Contact extérieur

$$\boxed{\frac{\dot{\theta}_{10}}{\dot{\theta}_{20}} = -\frac{Z_2}{Z_1}} \tag{8}$$

Contact intérieur

$$\boxed{\frac{\dot{\theta}_{10}}{\dot{\theta}_{20}} = +\frac{Z_2}{Z_1}} \tag{9}$$

- Ces relations ne sont valables que lorsque l'axe de rotation de chaque roue dentée est fixe par rapport au référentiel d'observation (ici S_0).
- Dans un problème comportant un ensemble de trains d'engrenages simples, on exprimera chaque relation d'engrènement puis on les combinera entre elles pour obtenir une **relation d'entrée-sortie**.
- Dans le cas d'un **train épicycloïdal**, les axes de rotation ne sont fixes que par rapport au porte-satellite, il faudra donc veiller à choisir comme référentiel d'observation celui lié au **porte-satellite**.

Cas des transmissions par engrenages

- Pour que deux roues dentées engrènent, il faut que leur pas de denture et le module (m) soient le même. Or le nombre de dents d'une roue i (noté Z_i) est relié par son rayon (noté r_i) avec la relation :

$$2 \cdot r_i = m \cdot Z_i$$

On obtient ainsi les rapports de réduction :

Contact extérieur

$$\boxed{\frac{\dot{\theta}_{10}}{\dot{\theta}_{20}} = -\frac{Z_2}{Z_1}} \qquad (8)$$

Contact intérieur

$$\boxed{\frac{\dot{\theta}_{10}}{\dot{\theta}_{20}} = +\frac{Z_2}{Z_1}} \qquad (9)$$

- Ces relations ne sont valables que lorsque l'axe de rotation de chaque roue dentée est fixe par rapport au référentiel d'observation (ici S_0).
- Dans un problème comportant un ensemble de trains d'engrenages simples, on exprimera chaque relation d'engrènement puis on les combinera entre elles pour obtenir une **relation d'entrée-sortie**.
- Dans le cas d'un **train épicycloïdal**, les axes de rotation ne sont fixes que par rapport au porte-satellite, il faudra donc veiller à choisir comme référentiel d'observation celui lié au **porte-satellite**.

Cas des transmissions par engrenages

- Pour que deux roues dentées engrènent, il faut que leur pas de denture et le module (m) soient le même. Or le nombre de dents d'une roue i (noté Z_i) est relié par son rayon (noté r_i) avec la relation :

$$2 \cdot r_i = m \cdot Z_i$$

On obtient ainsi les rapports de réduction :

Contact extérieur

$$\boxed{\frac{\dot{\theta}_{10}}{\dot{\theta}_{20}} = -\frac{Z_2}{Z_1}} \qquad (8)$$

Contact intérieur

$$\boxed{\frac{\dot{\theta}_{10}}{\dot{\theta}_{20}} = +\frac{Z_2}{Z_1}} \qquad (9)$$

- Ces relations ne sont valables que lorsque l'axe de rotation de chaque roue dentée est fixe par rapport au référentiel d'observation (ici S_0).
- Dans un problème comportant un ensemble de trains d'engrenages simples, on exprimera chaque relation d'engrènement puis on les combinera entre elles pour obtenir une **relation d'entrée-sortie**.
- Dans le cas d'un **train épicycloïdal**, les axes de rotation ne sont fixes que par rapport au porte-satellite, il faudra donc veiller à choisir comme référentiel d'observation celui lié au **porte-satellite**.

Cas des transmissions par engrenages

- Pour que deux roues dentées engrènent, il faut que leur pas de denture et le module (m) soient le même. Or le nombre de dents d'une roue i (noté Z_i) est relié par son rayon (noté r_i) avec la relation :

$$2 \cdot r_i = m \cdot Z_i$$

On obtient ainsi les rapports de réduction :

Contact extérieur

$$\boxed{\frac{\dot{\theta}_{10}}{\dot{\theta}_{20}} = -\frac{Z_2}{Z_1}} \qquad (8)$$

Contact intérieur

$$\boxed{\frac{\dot{\theta}_{10}}{\dot{\theta}_{20}} = +\frac{Z_2}{Z_1}} \qquad (9)$$

- Ces relations ne sont valables que lorsque l'axe de rotation de chaque roue dentée est fixe par rapport au référentiel d'observation (ici S_0).
- Dans un problème comportant un ensemble de trains d'engrenages simples, on exprimera chaque relation d'engrènement puis on les combinera entre elles pour obtenir une **relation d'entrée-sortie**.
- Dans le cas d'un **train épicycloïdal**, les axes de rotation ne sont fixes que par rapport au porte-satellite, il faudra donc veiller à choisir comme référentiel d'observation celui lié au **porte-satellite**.

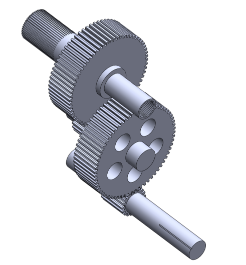
Plan

1. Transmission de puissance
   - Réducteur de vitesse
   - Cas des transmissions par engrenages

2. Réalisation technologique
   - Géométrie des dentures pour un train d'engrenage simple
   - Transmission par liens flexibles
   - Transmission des pignons coniques
   - Transmission par roue et vis sans fin
   - Trains épicycloïdaux

Géométrie des dentures pour un train d'engrenage simple

Définition : Engrenages à dentures cylindriques



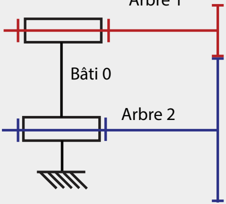
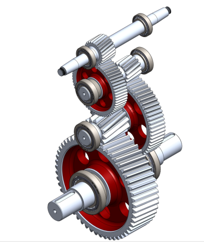


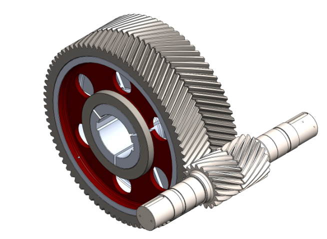
Schéma cinématique

-  plus simples et économiques ;
-  autorisent un déplacement axial ;
-  plus bruyants.

Géométrie des dentures pour un train d'engrenage simple

Définition : engrenages à dentures hélicoïdales



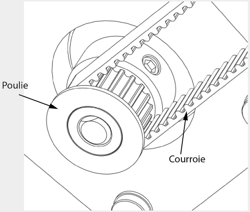


- les hélices doivent être de sens opposés ;
- nombre de dents en contact plus important ;
- engrènement plus progressif et continu ;
- engrènement plus silencieux ;
- transmission d'effort plus important ;
- employé seul génère des efforts axiaux à compenser par un jumelage de 2 engrenages à dentures hélicoïdales inversées ou des roues à chevrons.

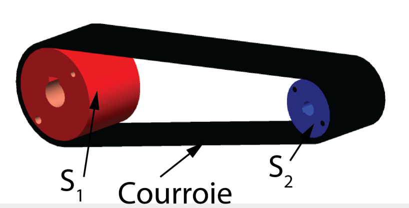
Transmission par liens flexibles

Définition : Transmission par liens flexibles

La transmission de mouvement par poulie-courroie se fait par l'intermédiaire de l'adhérence entre la poulie et la courroie ou par obstacle dans le cas des poulies crantées.



Courroie crantée



Courroie lisse maintenue par adhérence

Transmission par liens flexibles

Définition : Transmission par liens flexibles

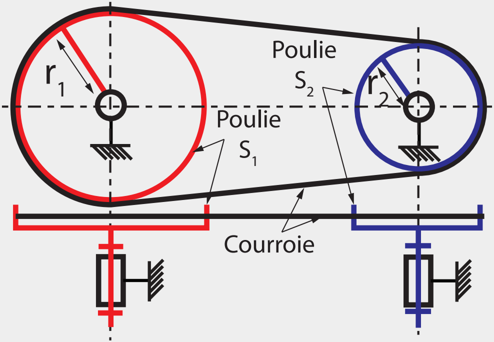


schéma cinématique

Ici il n'y a pas d'inversion du sens de rotation :

$$\boxed{r = \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{r_1}{r_2}} \tag{10}$$

Réducteur de vitesse

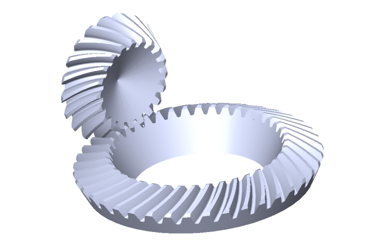
Remarques

Ces différents moyens permettent de transmettre un mouvement de rotation entre deux **arbres parallèles**. D'autres moyens permettent de transmettre des mouvements entre deux **axes perpendiculaires**.

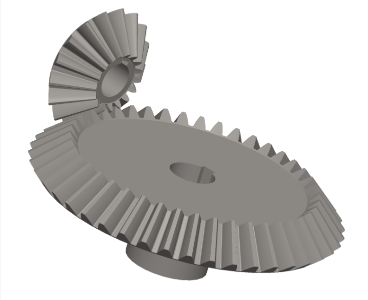
Transmission des pignons coniques

Définition : Transmission par des pignons coniques

Les **engrenages coniques** à denture hélicoïdale ou droite permettent de transmettre des mouvement entre deux arbres à axes concourants généralement perpendiculaires.



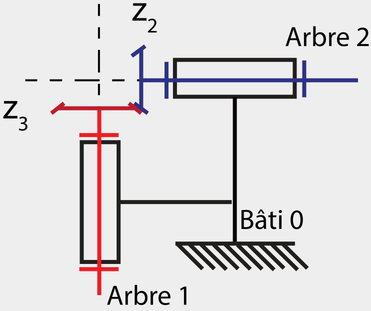
Pignons coniques à dentures hélicoïdales



Pignons coniques à dentures droites

Transmission des pignons coniques

Définition : Transmission par des pignons coniques



La détermination du rapport de réduction est la même que précédemment et dépend du rapport des nombres de dents :

$$\boxed{r = \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{3/0}} = \frac{Z_3}{Z_2}} \qquad (11)$$

-  Solution simple d'un point de vue de la conception.
-  les arbres sont en porte à faux ;
-  les sommets des cônes doivent coïncider.

Transmission des pignons coniques

Remarques

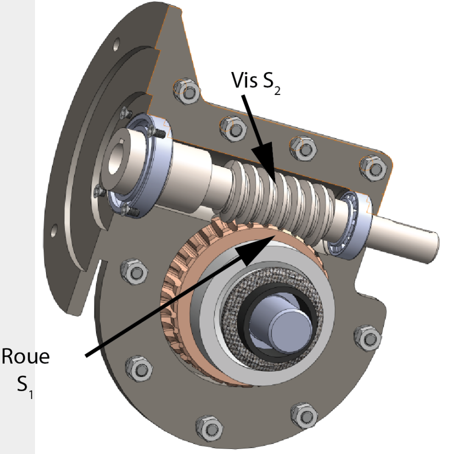
- Dans tous ces cas on peut calculer les rapports de réduction en faisant le rapport entre les nombres de dents des pignons concernés. Ce qui n'est pas le cas de la transmission par roue et vis sans fin.
- Généralement un réducteur est une combinaison de trains d'engrenages présentés précédemment. Pour obtenir le rapport de réduction global il faut alors combiner les différentes relations obtenues pour chaque train d'engrenage simple. On peut éventuellement utiliser la formule de Willis :

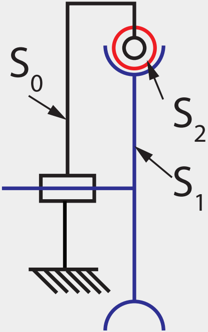
$$\boxed{r = \frac{\omega_{s/0}}{\omega_{e/0}} = (-1)^n \cdot \frac{\prod Z_{\text{roues menantes}}}{\prod Z_{\text{roues menées}}}} \quad (12)$$

Transmission par roue et vis sans fin

Définition : Transmission par roue et vis sans fin

Les engrenages à **roue et vis sans fin** transmettent un mouvement entre deux arbres à **axes non concourants**.





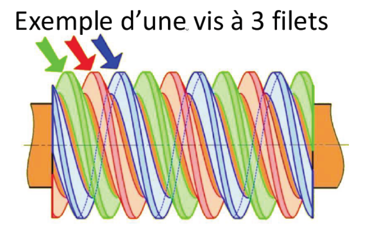
Transmission par roue et vis sans fin

Définition : Transmission par roue et vis sans fin

Le rapport de réduction s'écrit ici :

$$\boxed{r = \frac{\omega_{1/0}}{\omega_{2/0}} = \frac{\omega_{roue/0}}{\omega_{vis/0}} = \frac{Z_{vis}}{Z_{roue}}} \quad (13)$$

- Z_{vis} est le nombre de **filets** de vis ;
- Z_{roue} est le nombre de **dents** de la roue.



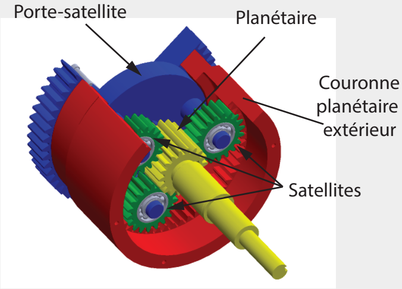
- Irréversibilité possible : sécurité anti-retour utile quand le récepteur peut devenir moteur (appareil de levage) ;
- grand rapport de réduction ;
- engrènement avec beaucoup de glissement et donc beaucoup d'usure et rendement faible ;
- la vis subit un effort axial important.

Trains épicycloïdaux

Définition : Train épicycloïdal

Un train épicycloïdal est un reducteur composé de roue denté dont les axes de rotation ne sont pas fixes les uns par rapport aux autre. La figure ci-dessous donne la représentation d'un train épicycloïdal qui est constitué :

- d'un planétaire 1 ;
- de satellites 3 ;
- d'un porte-satellite 4 (solide par rapport auquel tous les axes sont fixes) ;
- d'un planétaire extérieur ou couronne 5.



Trains épicycloïdaux

Définition : Train épicycloïdal

- Pour étudier cinématiquement ce système on choisira toujours le **référentiel lié au porte satellite 4** comme référentiel d'observation car tous les axes sont fixes par rapport à lui.
- Ce dispositif permet d'obtenir des rapports de **réduction assez élevés** avec un encombrement réduit.
- Si tous les composants du système sont laissés libre en rotation, le dispositif présente **deux mobilités** ce qui laisse beaucoup de possibilités de réglage.

Trains épicycloïdaux

Exemple : Paramétrage et rapport de réduction d'un train épicycloïdal

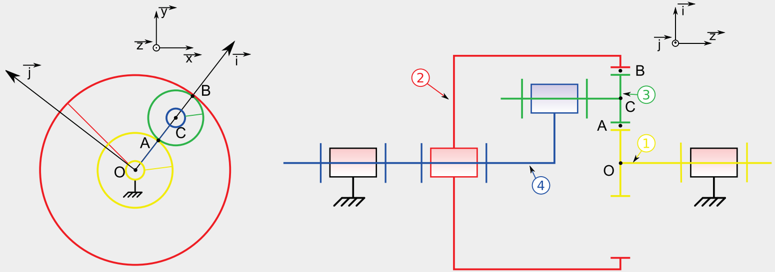
Les liaisons $L_{1/0}$, $L_{4/0}$, $L_{2/4}$ et $L_{3/4}$ sont des liaisons pivots d'axe $\overrightarrow{z}$.
On pose $\overrightarrow{\Omega}(1/0) = \omega_1\ \overrightarrow{z}$, $\overrightarrow{\Omega}(2/0) = \omega_2\ \overrightarrow{z}$ et $\overrightarrow{\Omega}(4/0) = \omega_4\ \overrightarrow{z}$.
Les rotations sont toutes suivant le même axe $\overrightarrow{z}$, ainsi on note ω_{ij} la norme de la rotation relative entre le solide i et le solide j suivant $\overrightarrow{z}$

$$\omega_{ij} = \overrightarrow{\Omega}(i/0) \cdot \overrightarrow{z} - \overrightarrow{\Omega}(j/0) \cdot \overrightarrow{z}$$

Le satellite 3 de centre C roule sans glisser en A sur 1 et en B sur 2. Soit le repère $R_i\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{z}\right)$ le repère tel que $\overrightarrow{i}$ ait même direction et même sens que OC.
On appelle Z_1, Z_2 et Z_3 les nombres de dents des roues 1, 2 et 3 et m leur module.

Trains épicycloïdaux

Exemple : Paramétrage et rapport de réduction d'un train épicycloïdal



Trains épicycloïdaux

Exemple : Paramétrage et rapport de réduction d'un train épicycloïdal

Questions

1. Donner l'expression de $\frac{\omega_{34}}{\omega_{14}}$.

Trains épicycloïdaux

Exemple : Paramétrage et rapport de réduction d'un train épicycloïdal

Questions

1. Donner l'expression de $\frac{\omega_{34}}{\omega_{14}}$.

$$\boxed{\frac{\omega_{34}}{\omega_{14}} = -\frac{Z_1}{Z_3}.}$$

Trains épicycloïdaux

Exemple : Paramétrage et rapport de réduction d'un train épicycloïdal

Questions

2. Donner l'expression de $\frac{\omega_{24}}{\omega_{34}}$.

Trains épicycloïdaux

Exemple : Paramétrage et rapport de réduction d'un train épicycloïdal

Questions

2. Donner l'expression de $\frac{\omega_{24}}{\omega_{34}}$.

$$\boxed{\frac{\omega_{24}}{\omega_{34}} = \frac{Z_3}{Z_2}.}$$

Trains épicycloïdaux

Exemple : Paramétrage et rapport de réduction d'un train épicycloïdal

Questions

3. Déterminer une relation entre ω_1, ω_2 et ω_4.

Trains épicycloïdaux

Exemple : Paramétrage et rapport de réduction d'un train épicycloïdal

Questions

En combinant les résultats des deux questions précédentes, nous obtenons,

$$\boxed{\frac{\omega_2 - \omega_4}{\omega_1 - \omega_4} = -\frac{Z_1}{Z_2}.}$$