



C5 : ANALYSE DES PERFORMANCES CINÉMATIQUES DES SYSTÈMES COMPOSÉS DE CHAINES DE SOLIDE

C5-1 - Performances cinématiques des systèmes : détermination des lois d'entrée-sortie

12 Fevrier 2019

Table des matières

I Introduction	2
1 Présentation et problématique du support d'étude	2
2 Modélisation structurelle du système étudié	2
a) Chaine fonctionnelle d'information/d'énergie	2
b) Graphe des liaisons	3
c) Paramétrage	3
II Lois d'entrées-sorties d'un mécanisme	4
1 Lois d'entrées sorties géométriques	4
2 Lois d'entrées sorties cinématiques	5
III Exemples de système de transformation de mouvement	8
1 Vis-écrou	8
2 Pignon-crémaillère	9
3 Transmission par came	10
4 Transmission par bielle-manivelle	11
5 Joints de transmission ou accouplement mécaniques	12

Compétences

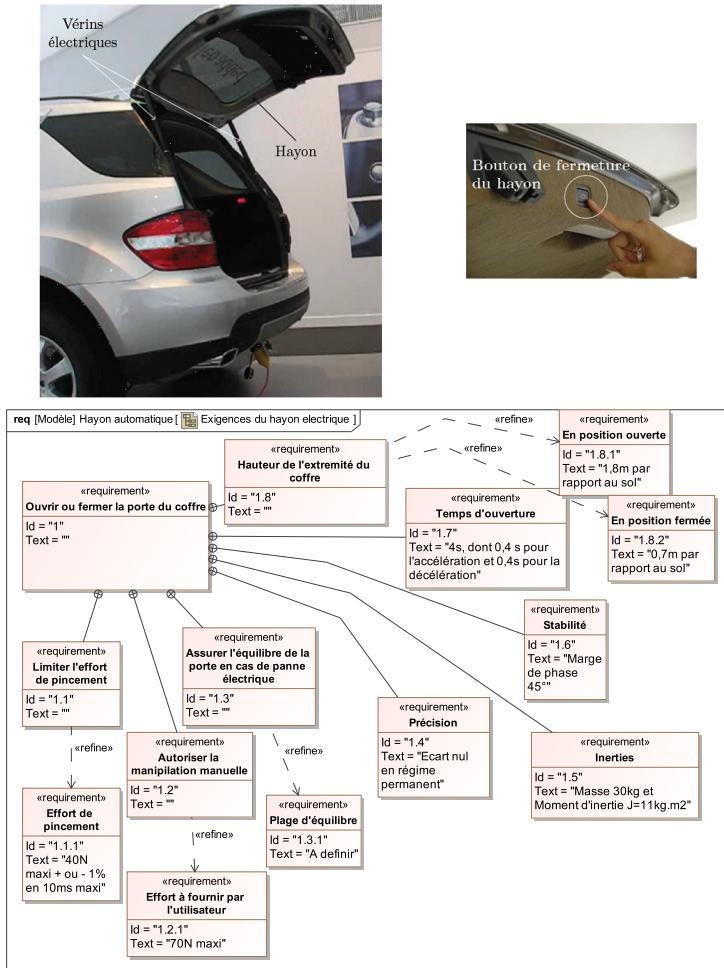
- **Modéliser :** Proposer un modèle de connaissance et de comportement :
 - Modélisation plane;
 - Torseur cinématique;
 - Liaisons.
- **Résoudre :** Procéder à la mise en oeuvre d'une démarche de résolution analytique
 - Lois d'entrée-sortie géométrique;
 - Lois d'entrée-sortie cinématique;

I. Introduction

1 Présentation et problématique du support d'étude



Exemple 1 : Hayon automatique d'un coffre

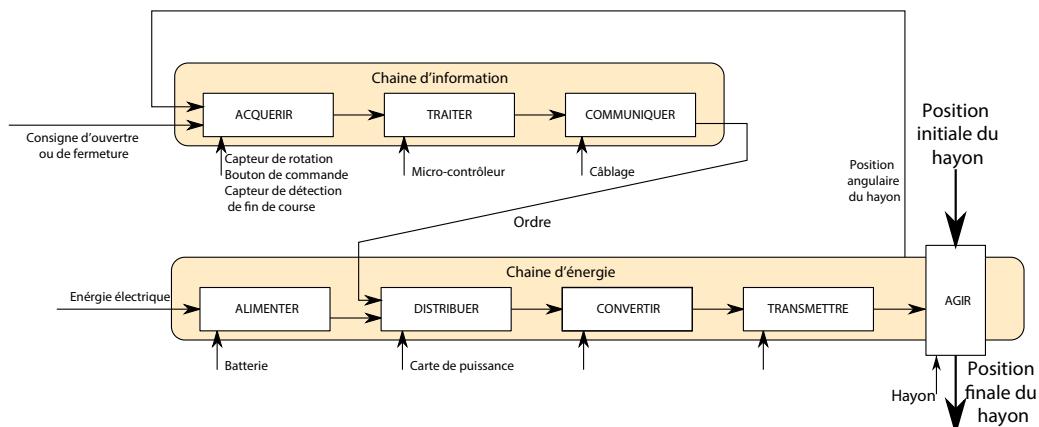


On s'intéresse dans cette étude au dimensionnement de l'**actionneur** (fonction convertir) d'un hayon automatique de voiture vis-à-vis de l'**exigence 1.8** : "hauteur de l'extrémité du coffre".

2 Modélisation structurelle du système étudié

a) Chaine fonctionnelle d'information/d'énergie

On donne la chaîne fonctionnelle partielle du système.



Q 1 : Compléter les constituants associés aux blocs convertir et transmettre.

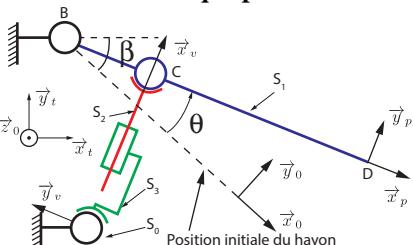
- **Convertir :** Vérin électrique.
- **Transmettre :** Système de transformation de mouvement articulé.

b) Graphes des liaisons



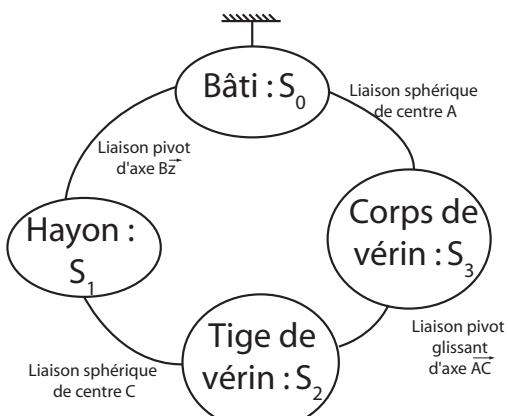
Exemple 2 : Graphe des liaisons

Schéma cinématique paramétré



- S_0 : bâti;
- S_1 : hayon;
- S_2 : tige de vérin;
- S_3 : corps de vérin;

Q 2 : Graphe des liaisons associé



c) Paramétrage

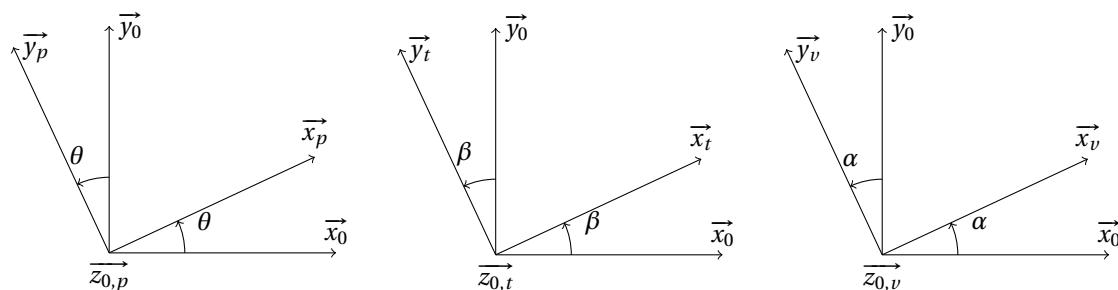


Exemple 3 : Paramétrage du système

On donne :

- $\vec{AB} = -a \vec{x}_0 + b \vec{y}_0$; $\vec{AC} = \lambda(t) \vec{x}_v$; $\vec{BC} = c \vec{x}_p$; $\vec{BD} = d \vec{x}_p$, avec $a = 0,55m$; $b = 0,14m$; $c = 0,14m$ et $d = 1m$.
- $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_p)$; $\beta = 42^\circ = (\vec{x}_0, \vec{x}_t)$ et $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_v)$;
- $\vec{z}_0 = \vec{z}_t = \vec{z}_v = \vec{z}_p$

Q 3 : Représenter les figures planes de projections



II. Lois d'entrées-sorties d'un mécanisme

1 Lois d'entrées sorties géométriques



Définition 1 : Fermeture géométrique

Lorsqu'un système possède une architecture en **chaîne fermée**, on écrit une relation vectorielle de **fermeture de la boucle géométrique** qui passe par les points caractéristiques O_i des liaisons entre solides. Cette relation vectorielle traduit la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_0O_1} + \cdots + \overrightarrow{O_nO_0} = \vec{0} \quad (1)$$

On projette alors cette relation vectorielle dans une base pour obtenir des relations scalaires entre les paramètres de position ou d'orientation des solides.



Remarque 1 :

- Pour les **chaînes complexes** on écrit une relation vectorielle par boucle fermée indépendante.
- Cette méthode s'applique bien pour des "systèmes mécaniques articulés".



Exemple 4 : Fermeture géométrique du hayon automatique

Q 4 : Déterminer les paramètres d'entrée et de sortie du problème

- Entrée** : longueur du vérin : $\lambda(t)$;
- Sortie** : angle d'ouverture du hayon : $\theta(t)$.

Q 5 : Écrire la fermeture géométrique associée

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \\ L \cdot \vec{x}_v - c \cdot \vec{x}_p + a \cdot \vec{x}_0 - b \cdot \vec{y}_0 &= \vec{0} \end{aligned}$$

Q 6 : Projeter cette équation dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$\begin{cases} \lambda(t) \cos \alpha - c \cos \theta + a = 0 \\ \lambda(t) \sin \alpha - c \sin \theta - b = 0 \end{cases}$$

Q 7 : Trouver une combinaison entre ces deux équations pour obtenir une loi entrée-sortie entre $\lambda(t)$ et $\theta(t)$

Il faut éliminer α , on l'isole alors dans chaque équation :

$$\begin{aligned} (1) \quad &\left\{ \begin{array}{l} \lambda(t) \cos \alpha = c \cos \theta - a \\ (2) \quad \left. \begin{array}{l} \lambda(t) \sin \alpha = c \sin \theta + b \end{array} \right. \end{array} \right. \end{aligned}$$

On peut alors éliminer α en calculant $(1)^2 + (2)^2$:

$$\lambda^2(t) = (c \cos \theta - a)^2 + (c \sin \theta + b)^2 = 2c(b \sin \theta - a \cos \theta) + a^2 + b^2 + c^2$$

$\lambda(t)^2$ est strictement croissante pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

En $\theta = 0$, $\lambda(\theta = 0)^2 = -2 \cdot c \cdot a + a^2 + b^2 + c^2 \approx 0,19 m^2$

$$\lambda(t) = \sqrt{2c(b \sin \theta - a \cos \theta) + a^2 + b^2 + c^2}$$

2 Lois d'entrées sorties cinématiques



Définition 2 : Fermeture cinématique

Lorsqu'un système possède une architecture en chaîne fermée, on écrit une relation "torseurielle" de fermeture de la boucle **cinématique**.

$$\{\mathcal{V}_{(S_1/S_n)}\} = \{\mathcal{V}_{(S_1/S_2)}\} + \{\mathcal{V}_{(S_2/S_3)}\} + \dots + \{\mathcal{V}_{(S_{n-1}/S_n)}\} \quad (2)$$

On obtient alors deux équations vectorielles (une en vitesse au même point et une en vitesse de rotation) que l'on peut projeter dans une base. Il en résulte un système linéaire d'équations (3 en 2D et 6 en 3D).



Exemple 5 : Fermeture cinématique du hayon automatique

Q 8 : Déterminer la fermeture cinématique du problème en s'appuyant du graphe des liaisons.

$$\{\mathcal{V}_{(S_1/S_0)}\} = \{\mathcal{V}_{(S_1/S_2)}\} + \{\mathcal{V}_{(S_2/S_3)}\} + \{\mathcal{V}_{(S_3/S_0)}\}$$

Q 9 : Justifier l'utilisation d'une modélisation plane

Le mouvement des solides restent dans le plan (\vec{x}_0, \vec{y}_0) .

Q 10 : Exprimer chaque torseur aux "centres de liaisons".

$$\{\mathcal{V}_{(1/0)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{(1/0)}} = \dot{\theta} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

$$\{\mathcal{V}_{(1/2)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{(1/2)}} = \dot{\theta}_{21} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

$$\{\mathcal{V}_{(2/3)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{(2/3)}} = \vec{0} \\ \vec{V}(C \in 2/3) = \lambda \cdot \vec{x}_v \end{array} \right\}$$

$$\{\mathcal{V}_{(3/0)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{(3/0)}} = \dot{\alpha} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

Q 11 : Exprimer tous les torseurs en C

$$\vec{V}(C \in 1/0) = \vec{V}(B \in 1/0) + \vec{CB} \wedge \dot{\theta} \vec{z}_0 = c \vec{x}_p \wedge \dot{\theta} \vec{z}_0 = c \dot{\theta} \vec{y}_p$$

$$\vec{V}(C \in 3/0) = \vec{V}(A \in 3/0) + \vec{CA} \wedge \dot{\alpha} \vec{z}_0 = -\lambda \vec{x}_v \wedge \dot{\alpha} \vec{z}_0 = \lambda \dot{\alpha} \vec{y}_v$$

D'où :

$$\{\mathcal{V}_{(1/0)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta} \vec{z}_0 \\ c \dot{\theta} \vec{y}_p \end{array} \right\}$$

$$\{\mathcal{V}_{(3/0)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{\alpha} \vec{z}_0 \\ \lambda \dot{\alpha} \vec{y}_v \end{array} \right\}$$

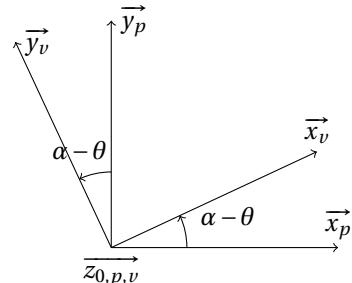


Exemple 6 : Fermeture cinématique du hayon automatique

Q 12 : Écrire la fermeture cinématique en vitesse en projection selon \vec{x}_v et déduire une relation entre $\dot{\lambda}$, c , $\dot{\theta}$, α et θ .

$$\left(\vec{V}(C \in 1/0) = \vec{V}(C \in 1/2) + \vec{V}(C \in 2/3) + \vec{V}(C \in 3/0) \right) \cdot \vec{x}_v$$

$$c\dot{\theta} \vec{y}_p \cdot \vec{x}_v = \dot{\lambda}$$



$$\boxed{\dot{\lambda} = c\dot{\theta} \sin(\alpha - \theta)}$$

Q 13 : Utiliser les résultats de la fermetures géométriques pour exprimer $\dot{\lambda}$ en fonction de θ , $\dot{\theta}$ et des paramètres géométriques du problème (a , b et c).
Or,

$$\sin(\alpha - \theta) = \sin \alpha \cos \theta - \cos \alpha \sin \theta$$

Et $\cos \theta \cdot (2) - \sin \theta \cdot (1)$ donne :

$$\sin(\alpha - \theta) = \frac{b \cos \theta + a \sin \theta}{\lambda(t)}$$

On obtient donc :

$$\boxed{\dot{\lambda} = c\dot{\theta} \frac{b \cos \theta + a \sin \theta}{\sqrt{2c(b \sin \theta - a \cos \theta) + a^2 + b^2 + c^2}}}$$



Remarque 2 :

On peut obtenir cette relation en dérivant $\lambda(t)$ obtenue avec la fermeture géométrique.

Q 14 : Retrouver $\dot{\lambda}$ en dérivant $\lambda(t)$

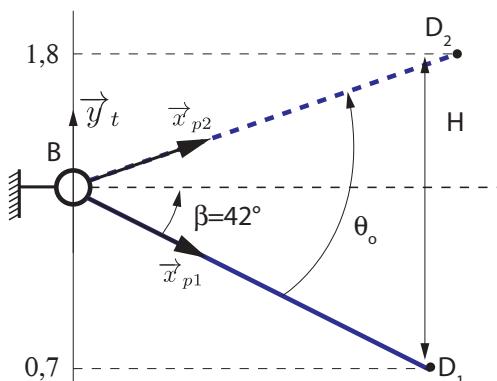
$$\dot{\lambda} = \frac{2c\dot{\theta}(b \cos \theta + a \sin \theta)}{2\lambda}$$



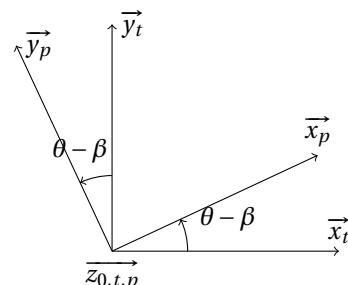
Conclusion : Validation du cahier des charges et dimensionnement du vérin

- On note D_1 et D_2 respectivement les positions du point D lorsque le coffre est fermé puis ouvert.
- On définit alors H la hauteur d'ouverture du coffre comme $H = \overrightarrow{D_1 D_2} \cdot \vec{y}_t$
- On note \vec{x}_{p1} et \vec{x}_{p2} respectivement les deux vecteurs directeurs unitaires de $\overrightarrow{BD_1}$ et $\overrightarrow{BD_2}$.

Paramétrage



Q 15 : Dessiner la figure de projection permettant de passer de la base $(\vec{x}_t, \vec{y}_t, \vec{z}_t)$ à $(\vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_p)$



Q 16 : Déterminer les valeurs de θ_O (angle d'ouverture du coffre) pour valider l'exigence 1.8 en exprimant H en fonction de H , d et β . Faire l'application numérique.

$$H = \overrightarrow{D_1 D_2} \cdot \vec{y}_t = (\overrightarrow{BD_2} - \overrightarrow{BD_1}) \cdot \vec{y}_t = (d \vec{x}_{p2} - d \vec{x}_{p1}) \cdot \vec{y}_t$$

- Pour $D_1 : \theta = 0$:
- Pour $D_2 : \theta = \theta_O$

Ainsi :

$$H = d \sin(\theta_O - \beta) - d \sin(-\beta)$$

On obtient alors :

$$\theta_O = \beta + \arcsin\left(\frac{H - d \sin \beta}{d}\right) \approx 67,5^\circ$$

Q 17 : Déterminer alors la course du vérin.

$$\text{course} = \lambda(\theta_O) - \lambda(0) = \sqrt{2c(b \sin \theta_O - a \cos \theta_O) + a^2 + b^2 + c^2} - \sqrt{-2ca + a^2 + b^2 + c^2} = 13,2 \text{ cm}$$

III. Exemples de système de transformation de mouvement

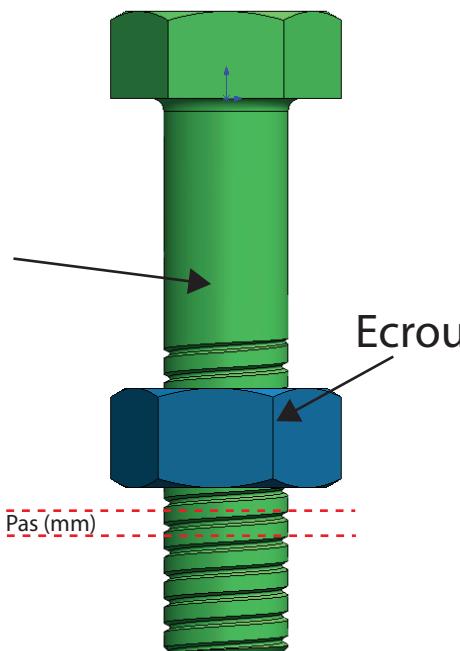
1 Vis-écrou

 **Définition 3 : Vis-écrou**

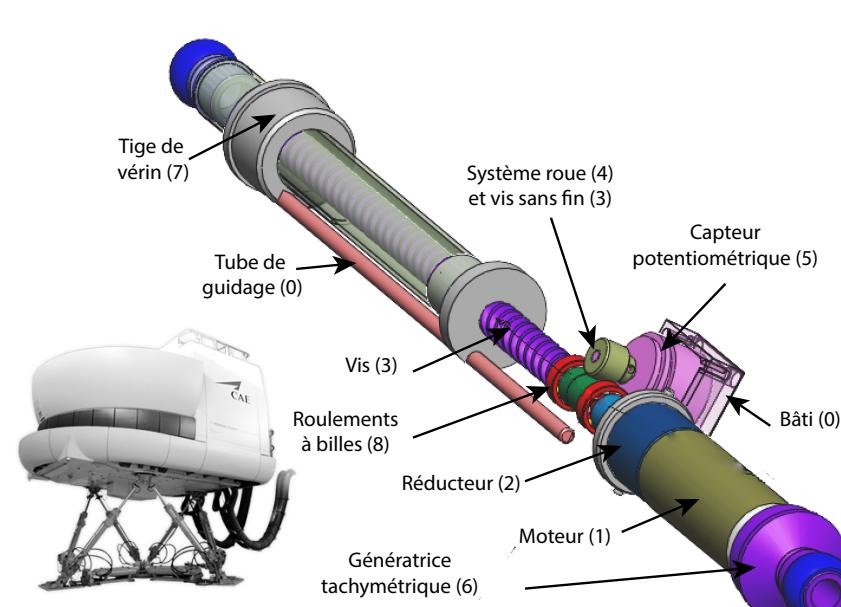
- **Type de transformation :** rotation continue en translation continue
- **Réversibilité :** généralement mais dépend du coefficient de frottement entre la vis et l'écrou
- **Applications technologiques :** Vérins électriques, chariot de machines outils
- **Caractéristiques :** pas de vis défini en *m/tour*

$$\lambda = \frac{\text{pas}}{2\pi} \theta \quad (3)$$

Un tour de vis par rapport à l'écrou correspond à une translation du pas par rapport à l'écrou.



 **Exemple 7 : Application technologique des systèmes vis-écrou**

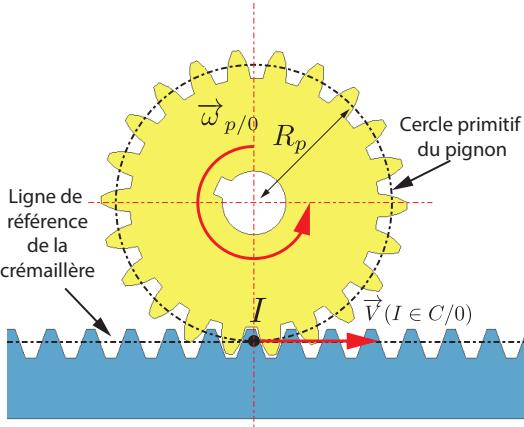


Vérin électrique de la plate-forme de simulateur 6 axes

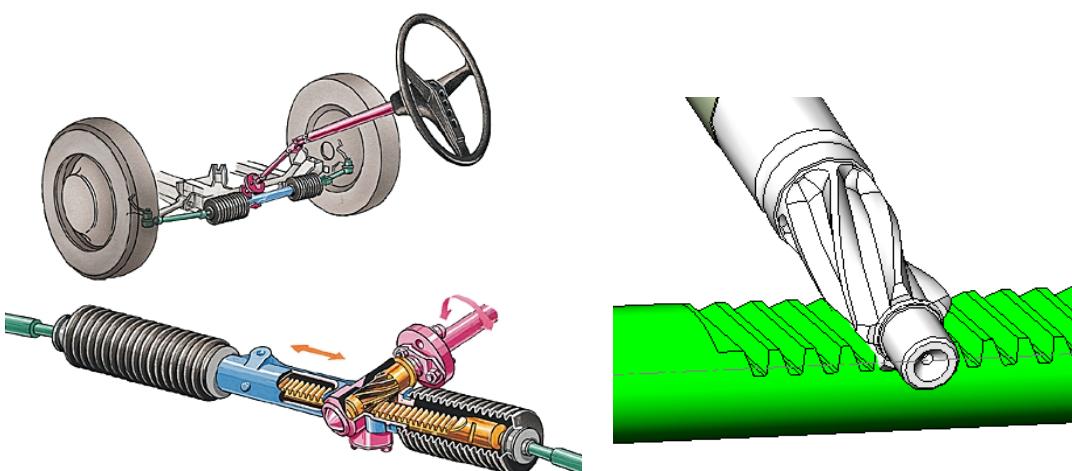
2 Pignon-crémaillère

 **Définition 4 : Pignon-crémaillère**

- **Type de transformation :** rotation continue en translation continue
- **Réversibilité :** oui
- **Applications technologiques :** Porte de train, porte de garage, direction de voiture
- **Caractéristiques :** Rayon primitif du pignon : R_p

$$\| \vec{V}(I \in C/0) \| = R_p \cdot \omega_{p/0} \quad (4)$$


 **Exemple 8 : Application technologique des systèmes pignons-crémaillère**



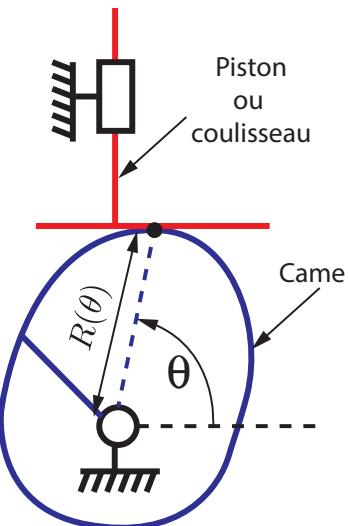
Système de direction d'une automobile

3 Transmission par came

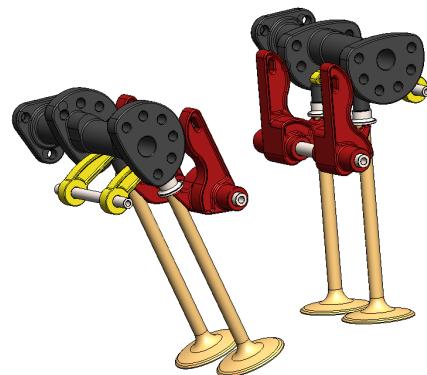
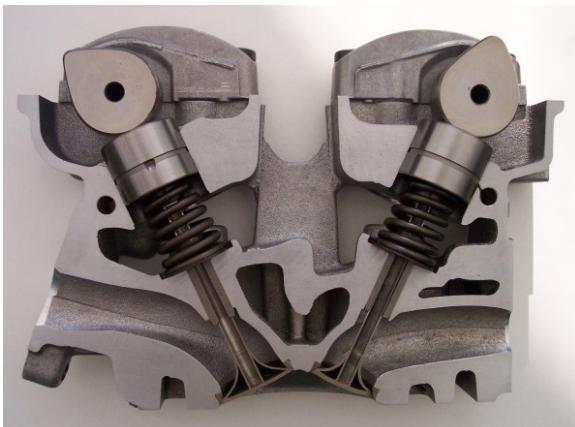


Définition 5 : *Transmission par came*

- **Type de transformation :** rotation continue en translation alternative
- **Réversibilité :** non
- **Applications technologiques :** Pompe hydraulique, arbre à came
- **Caractéristiques :** La rotation continue de la came dont le rayon $R(\theta)$ est défini en coordonnées polaires est transformée en rotation alternative



Exemple 9 : *Application technologique des systèmes de transmission par came*



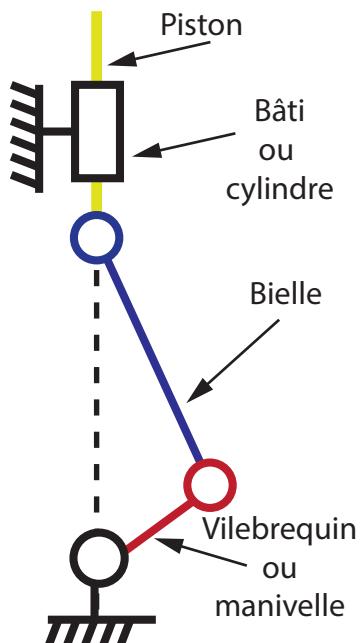
Soupapes de moteurs à explosions actionnées par des cames

4 Transmission par bielle-manivelle

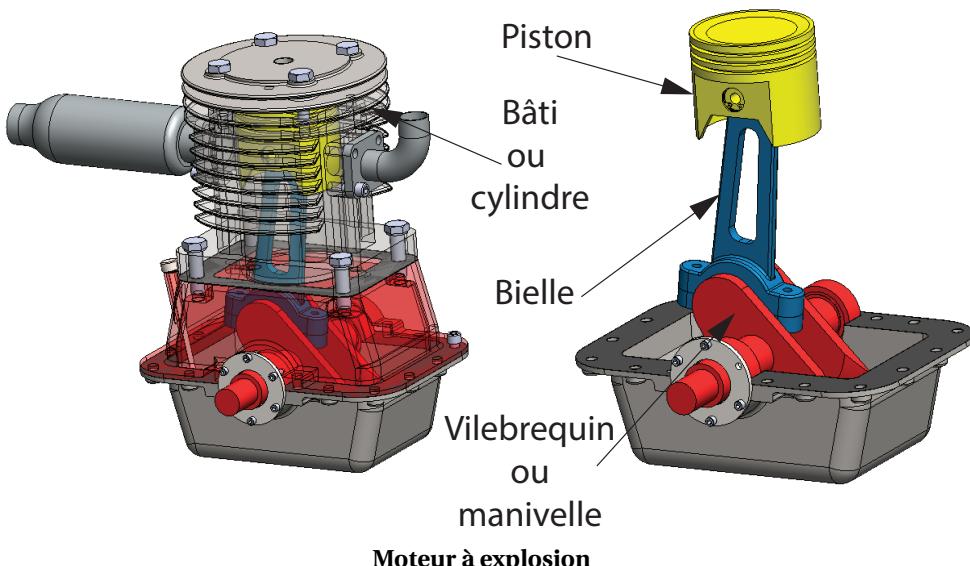


Définition 6 : Transmission par bielle-manivelle

- Type de transformation :** translation alternative en rotation continu
- Réversibilité :** oui
- Applications technologiques :** Moteurs thermiques, compresseurs, pompes et moteurs hydrauliques
- Caractéristiques :** La relation entre la rotation de la manivelle et la translation du piston dépend de la longueur de l'excentrage sur la manivelle (ou vilebrequin) et la longueur de la bielle.



Exemple 10 : Application technologique des systèmes de transmission par bielle-manivelle

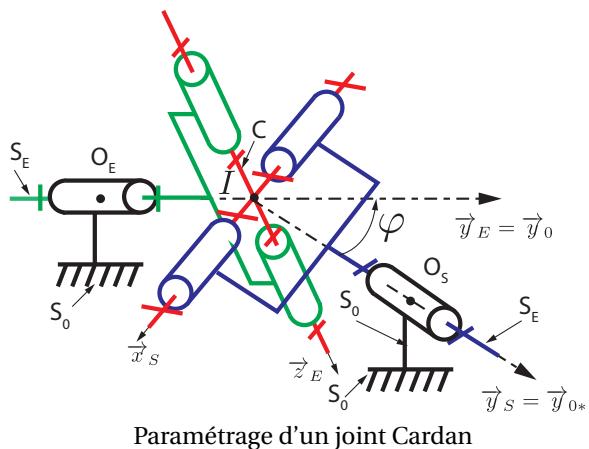


5 Joints de transmission ou accouplement mécaniques

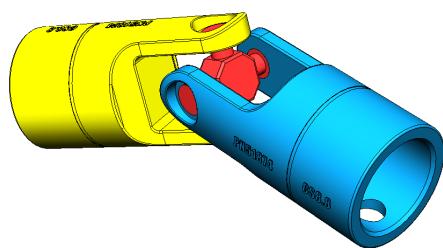


Définition 7 : Joints de transmission ou accouplement mécaniques

- Type de transformation :** Rotation autour d'un axe vers une rotation autour d'un autre axe non colinéaire mais concourant.
- Réversibilité :** oui
- Applications technologiques :** Transmission automobile.
- Caractéristiques :** Transmission pas systématiquement homocinétique.



Exemple 11 : Application technologique des joints de transmission



Joint Cardan



Joint tripode