

LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I. ET M.P.I.I.

ANNÉE 2025 - 2026



## C2 : MODÉLISATION DES SYSTÈMES ASSERVIS

# TD 5 - Représentation des SLCI par les schéma blocs (C2-2)

## Compétences

- **Analyser**
  - Identifier la structure d'un système asservi.
- **Modéliser**
  - Établir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert.
  - Modéliser le signal d'entrée.
  - Modéliser un système par schéma-blocs.
- **Résoudre**
  - Déterminer la réponse temporelle.
  - Déterminer les performances d'un système asservi.

## Exercice 1 : Modélisation de la commande d'un vélo autonome

**Source :** Emilien DURIF

### 1 Présentation générale

Dans une activité précédente, nous avons étudier le comportement dynamique du vélo autonome pour assurer sa stabilité. On se propose dans ce sujet d'en étudier la structure d'asservissement.

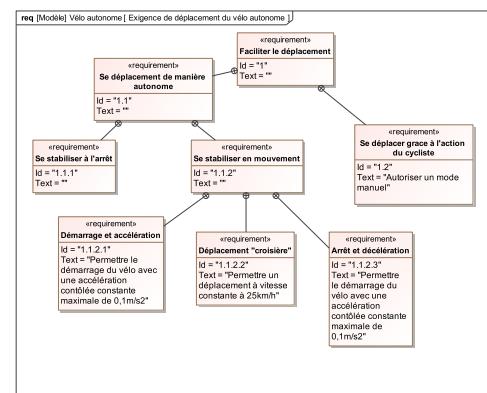


FIGURE 1 – Diagramme des exigences partiel concernant le déplacement autonome du vélo

## 2 Rappel de la modélisation du comportement dynamique du vélo

L'équation obtenue est donnée ci-dessous :

$$\begin{cases} I_{velo}\ddot{\theta}(t) = m \cdot g \cdot L_1 \sin\theta(t) - I_2\ddot{\varphi}(t) \\ I_2\ddot{\varphi}(t) = C_{m2}(t) \end{cases}$$

Avec,

- $I_{velo} = I_1 + m_2 \cdot L_2^2$  le moment d'inertie du vélo ramené à l'axe passant par les points de contact entre les deux roues et le sol;
- $m$  la masse du vélo;
- $I_2$  le moment d'inertie de la roue à réaction autour de son axe de rotation;
- $\varphi$  l'angle de rotation de la roue à réaction;
- $\theta$  l'angle d'inclinaison du vélo par rapport à l'axe vertical;
- $C_{m2}$  le couple exercé par le moteur de la roue à réaction.

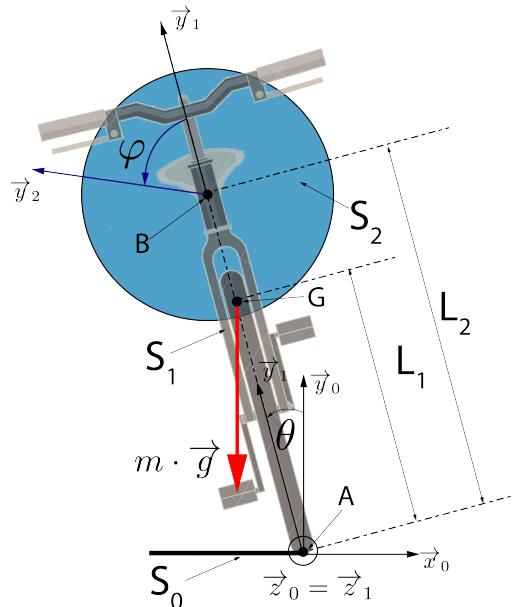


FIGURE 2 – Paramétrage du problème

On se focalisera sur des petites variations de l'angle  $\theta$ , ainsi on pourra utiliser l'approximation  $\sin\theta(t) \approx \theta(t)$ .

**Q 1 : Réécrire les équations différentielles en tenant compte de cette hypothèse.**

**Q 2 : En supposant les conditions initiales nulles, exprimer les équations issues de la modélisation mécanique dans le domaine de Laplace.**

**Q 3 : Déterminer la fonction de transfert**  $H_{velo}(p) = \frac{\theta(p)}{\dot{\varphi}(p)}$

## 3 Modélisation d'un moteur à courant continu

Le moteur à courant continu entraînant la roue à réaction est modélisé par les équations ci-dessous.

Un moteur à courant continu est mis en rotation grâce à une force magnétique : la force de Laplace. Cette force s'applique à un conducteur parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique.

Un moteur à courant continu est constitué d'un circuit d'induit (rotor) soumis à un champ magnétique créé par le stator. Les moteurs d'asservissement de petite puissance utilisent en général un aimant permanent pour créer ce champ. Le moteur à courant continu est alors commandé par une tension  $u_m(t)$  au borne de l'induit. L'induit est équivalent à un circuit  $R - L$  en série.

### Constantes de la modélisation

- $K_c$  : la constante de couple;
- $K_e$  : la constante de force contre électromotrice (fcem);
- $R$  : la résistance de l'induit;
- $L$  : l'inductance de l'induit;
- $J$  : l'inertie (inertie propre du moteur + inertie de la mécanique entraînée);
- $f$  : le coefficient de frottement visqueux mécanique.

On suppose que la roue à réaction ne subit que le couple du moteur  $C_m(t)$  en effectuant un bilan en moment autour de son axe de rotation. Du fait des faibles mouvements on se ramènera à un principe fondamental de la dynamique appliqué à un solide en rotation autour d'un axe fixe.

**Q 4 : Transformer ces équations dans le domaine de Laplace.**

**Q 5 : Représenter le comportement du moteur à courant continu sous la forme d'un schéma bloc où l'entrée correspondrait à  $U_m(p)$  et la sortie  $\Omega_m(p)$ .**

### Variables de la modélisation

- $u_m(t)$  : la tension appliquée aux bornes de l'induit;
- $e(t)$  : tension de force contre-électromotrice;
- $i(t)$  : le courant absorbé par l'induit;
- $\omega_m(t)$  : la vitesse angulaire de l'arbre;
- $C_m(t)$  : le couple moteur;
- $C_r(t)$  : le couple résistant exercé sur l'arbre du moteur.



Moteur de la roue à réaction



Moteur de propulsion

Les équations temporelles décrivant le fonctionnement d'un moteur à courant continu sont données ci-dessous :

$$C_m(t) - C_r(t) - f \cdot \omega_m(t) = J \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt}$$

$$u_m(t) = e(t) + L \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t)$$

$$e(t) = K_e \cdot \omega_m(t)$$

$$C_m(t) = K_c \cdot i(t).$$

FIGURE 3 – Moteur utilisé sur le prototype du vélo autonome

On considère dans un premier temps que la perturbation est nulle ( $C_r(t) = 0$ )

**Q 6 : Calculer la fonction de transfert  $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$  et la mettre sous forme canonique.**

Pour assurer le bon fonctionnement du vélo autonome il faudra contrôler la roue à réaction en vitesse et le moteur de propulsion en position. C'est l'objet des deux parties suivantes.

#### 4 Modélisation de l'asservissement en vitesse du moteur à courant continu de stabilisation

Pour assurer la l'asservissement en vitesse de la roue à réaction un capteur magnétique à effet Hall est utilisé en combinant des aimants permanents présents sur la roue à réaction.

- On poser  $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)} = \frac{K_m}{1 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2}$  ( $a_1$ ,  $a_2$  et  $K_m$  sont des constantes ayant pu être identifiées dans la partie précédente) la fonction de transfert trouvée précédemment avec un couple de perturbation nulle.
- ici  $\omega_m(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \dot{\varphi}(t)$ .
- on suppose que le capteur de vitesse délivre une tension proportionnelle à la vitesse  $\dot{\varphi}(t)$  ( $u_{\varphi}(t)$ ), avec pour gain  $K_v$ .
- $\dot{\varphi}_c(t)$  la consigne en vitesse et  $\dot{\varphi}(t)$  la réponse.
- La consigne  $\dot{\varphi}_c(t)$  est amplifié par un gain d'adaptation  $K_a$  pour délivré une tension  $u_{\varphi_c}(t)$ .
- Les deux tensions  $u_{\varphi_c}(t)$  et  $u_{\varphi}(t)$  sont comparées plus amplifiées d'un gain  $K_{pv}$  (correcteur proportionnel en vitesse) pour correspondre à la tension d'alimentation du moteur.
- On note  $\dot{\varphi}(p)$  et  $\dot{\varphi}_c(p)$  les transformées de Laplace respectives de  $\dot{\varphi}(t)$  et  $\dot{\varphi}_c(t)$ .

**Q 7 : Proposer une modélisation de cet asservissement sans tenir compte d'une perturbation.**

**Q 8 : Proposer une expression du gain d'adaptation  $K_a$  pour avoir un système précis ( $\varepsilon(p) = 0 \Leftrightarrow \dot{\varphi}(p) = \dot{\varphi}_c(p)$ ).**

**Q 9 : Calculer la fonction de transfert  $H_v(p) = \frac{\dot{\varphi}(p)}{\dot{\varphi}_c(p)}$**

#### 5 Modélisation de l'asservissement en position du moteur à courant continu de propulsion

On souhaite asservir en position le vélo selon sa propulsion. On donne la structure de l'asservissement sur la figure 4.

- $x_c(t)$  et  $x(t)$  correspondent respectivement à la consigne et au déplacement en translation du vélo.
- A la sortie du moteur à courant continu de propulsion, il y a un réducteur d'un rapport de réduction noté  $K_r$ .
- On prendra les même notations pour les caractéristiques du moteur sauf pour le moment d'inertie que l'on notera  $J_{eq}$  et qui est donné par la relation :

$$J_{eq} = J_m + 2 \cdot J_{roue} K_r^2 + m \cdot \left( \frac{D_r \cdot K_r}{2} \right)^2$$

avec  $J_m$  l'inertie de l'arbre moteur,  $J_{roue}$  l'inertie d'une roue du vélo et  $m$  la masse du vélo sans les roues.

- Ce moteur est équipé d'un codeur incrémental qui mesure directement la position à la sortie du moteur  $\beta(p)$ .
- La roue tourne à la même vitesse que l'arbre à la sortie du réducteur et possède un diamètre notée  $D_r$ .

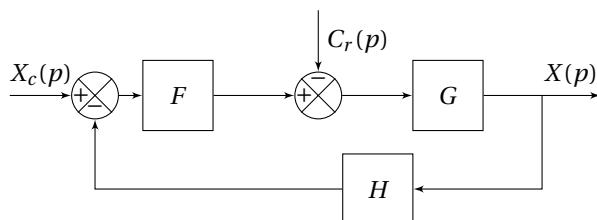
**Q 10 :** Déterminer les expression des blocs  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  en fonction des paramètres  $R$ ,  $L$ ,  $K_c$ ,  $J_{eq}$ ,  $f$  et  $K_e$ .

**Q 11 :** Quelle relation dans le domaine temporelle relie  $\omega_m(t)$  à  $\beta(t)$ . En déduire une expression de  $E$ .

**Q 12 :** Proposer une modélisation du bloc  $K_{cin}$ .

**Q 13 :** Proposer une expression du gain d'adaptation  $K_a$  pour avoir un système précis ( $\varepsilon(p) = 0 \Leftrightarrow X(p) = X_c(p)$ ).

**Q 14 :** Montrer que l'on peut modifier le schéma bloc de la figure 4 pour obtenir la structure ci-dessous.



**Q 15 :** Donner les expression des blocs  $F$ ,  $G$  et  $H$  en fonction de  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $K_p$ ,  $K_a$ ,  $K_{cin}$ .

**Q 16 :** Montrer que  $X(p)$  peut s'exprimer sous la forme  $X(p) = H_x(p) \cdot X_c(p) + H_c(p) \cdot C_r(p)$  et déterminer les expressions de  $H_x(p)$  et  $H_c(p)$  en fonction de  $F$ ,  $G$  et  $H$ .

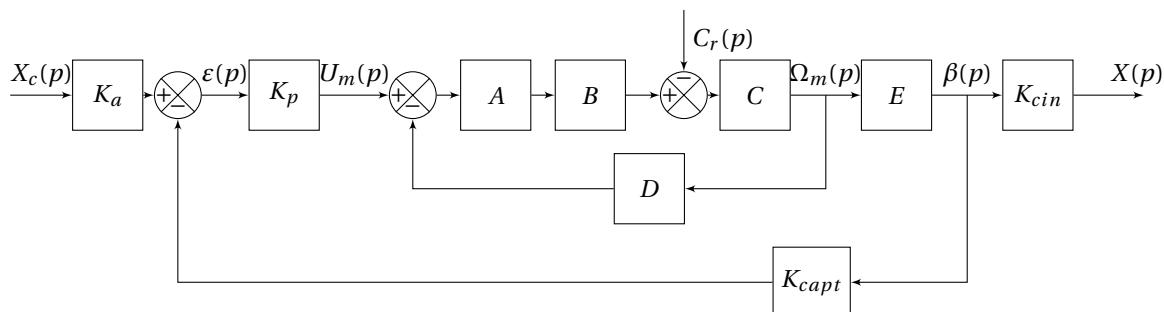


FIGURE 4 – Structure de l'asservissement en position du groupe de propulsion

## 6 Modélisation de l'asservissement en position angulaire du vélo pour assurer sa stabilisation

L'asservissement en position angulaire du vélo autonome est assuré par une centrale inertuelle qui permet directement de mesurer l'angle  $\theta(t)$ . Elle possède un gain noté  $K_{ci}$ .

On utilisera un correcteur que l'on notera  $C(p)$ .

On donne la structure de l'asservissement ci-dessous.

**Q 17 :** Compléter les différents blocs manquant en fonction des parties précédentes pour représenter la modélisation de l'asservissement du vélo autonome en stabilisation verticale.

