



C8 : Analyse des performances des systèmes asservis

C8-1 : Stabilité des systèmes asservis

Émilien DURIF

Lycée La Martinière Monplaisir Lyon
Classe de MPSI
12 Avril 2022



Plan

1 Intérêts et objectifs

- Introduction
- Classe et ordre d'une fonction de transfert
- Exemple du cours

2 Stabilité

- Définition et propriétés
- Critères de stabilité
- Marge de stabilité
- Application aux systèmes du premier et deuxième ordre



Plan

1 Intérêts et objectifs

- Introduction
- Classe et ordre d'une fonction de transfert
- Exemple du cours

2 Stabilité

- Définition et propriétés
- Critères de stabilité
- Marge de stabilité
- Application aux systèmes du premier et deuxième ordre



Introduction : intérêts et objectifs

Précision et stabilité

- Ce chapitre permet d'énoncer les outils nécessaires à la caractérisation de la **stabilité** des systèmes linéaires continus et invariants asservis.
- Durant tout ce chapitre nous allons énoncer les principes de quantification de la stabilité d'un système modélisé par une fonction de transfert.



Introduction : intérêts et objectifs

Précision et stabilité

- Ce chapitre permet d'énoncer les outils nécessaires à la caractérisation de la **stabilité** des systèmes linéaires continus et invariants asservis.
- Durant tout ce chapitre nous allons énoncer les principes de quantification de la stabilité d'un système modélisé par une fonction de transfert.



Plan

1 Intérêts et objectifs

- Introduction
- Classe et ordre d'une fonction de transfert
- Exemple du cours

2 Stabilité

- Définition et propriétés
- Critères de stabilité
- Marge de stabilité
- Application aux systèmes du premier et deuxième ordre



Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

Classe et ordre d'une fonction de transfert

Soit une fonction de transfert en boucle ouverte ($FTBO(p)$) ou en boucle fermée ($FTBF(p)$) donnée par la fonction $H(p)$:

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n}. \quad (1)$$

On appelle :

- zéros de la fonction de transfert, celles qui annulent son numérateur ;
- pôles de la fonction de transfert, les valeurs de p qui annulent son dénominateur ;
- $\alpha (\geq 0)$, sa classe (pour une $FTBO(p)$, il correspond directement au nombre d'intégrateurs purs dans la boucle ouverte) ;
- $n_o = n + \alpha$ l'ordre du système qui correspond au nombre de pôles du système ;
- K , le gain de la fonction de transfert ;



Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

Classe et ordre d'une fonction de transfert

Soit une fonction de transfert en boucle ouverte ($FTBO(p)$) ou en boucle fermée ($FTBF(p)$) donnée par la fonction $H(p)$:

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n}. \quad (1)$$

On appelle :

- **zéros** de la fonction de transfert, celles qui annulent son numérateur ;
- **pôles** de la fonction de transfert, les valeurs de p qui annulent son dénominateur ;
- $\alpha (\geq 0)$, sa **classe** (pour une $FTBO(p)$, il correspond directement au nombre d'intégrateurs purs dans la boucle ouverte) ;
- $n_o = n + \alpha$ l'**ordre** du système qui correspond au nombre de pôles du système ;
- K , le **gain** de la fonction de transfert ;



Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

Classe et ordre d'une fonction de transfert

Soit une fonction de transfert en boucle ouverte ($FTBO(p)$) ou en boucle fermée ($FTBF(p)$) donnée par la fonction $H(p)$:

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n}. \quad (1)$$

On appelle :

- **zéros** de la fonction de transfert, celles qui annulent son numérateur ;
- **pôles** de la fonction de transfert, les valeurs de p qui annulent son dénominateur ;
- $\alpha (\geq 0)$, sa classe (pour une $FTBO(p)$, il correspond directement au nombre d'intégrateurs purs dans la boucle ouverte) ;
- $n_o = n + \alpha$ l'ordre du système qui correspond au nombre de pôles du système ;
- K , le gain de la fonction de transfert ;



Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

Classe et ordre d'une fonction de transfert

Soit une fonction de transfert en boucle ouverte ($FTBO(p)$) ou en boucle fermée ($FTBF(p)$) donnée par la fonction $H(p)$:

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n}. \quad (1)$$

On appelle :

- **zéros** de la fonction de transfert, celles qui annulent son numérateur ;
- **pôles** de la fonction de transfert, les valeurs de p qui annulent son dénominateur ;
- $\alpha (\geq 0)$, sa **classe** (pour une $FTBO(p)$, il correspond directement au nombre d'intégrateurs purs dans la boucle ouverte) ;
- $n_o = n + \alpha$ l'ordre du système qui correspond au nombre de pôles du système ;
- K , le **gain** de la fonction de transfert ;

Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

Classe et ordre d'une fonction de transfert

Soit une fonction de transfert en boucle ouverte ($FTBO(p)$) ou en boucle fermée ($FTBF(p)$) donnée par la fonction $H(p)$:

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n}. \quad (1)$$

On appelle :

- **zéros** de la fonction de transfert, celles qui annulent son numérateur ;
- **pôles** de la fonction de transfert, les valeurs de p qui annulent son dénominateur ;
- $\alpha (\geq 0)$, sa **classe** (pour une $FTBO(p)$, il correspond directement au nombre d'intégrateurs purs dans la boucle ouverte) ;
- $n_o = n + \alpha$ l'ordre du système qui correspond au nombre de pôles du système ;
- K , le **gain** de la fonction de transfert ;

Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

Classe et ordre d'une fonction de transfert

Soit une fonction de transfert en boucle ouverte ($FTBO(p)$) ou en boucle fermée ($FTBF(p)$) donnée par la fonction $H(p)$:

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n}. \quad (1)$$

On appelle :

- **zéros** de la fonction de transfert, celles qui annulent son numérateur ;
- **pôles** de la fonction de transfert, les valeurs de p qui annulent son dénominateur ;
- $\alpha (\geq 0)$, sa **classe** (pour une $FTBO(p)$, il correspond directement au nombre d'intégrateurs purs dans la boucle ouverte) ;
- $n_o = n + \alpha$ l'ordre du système qui correspond au nombre de pôles du système ;
- K , le **gain** de la fonction de transfert ;



Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

Classe d'une FTBO quelconque

Ordre, gain et classe de : $H_1(p) = \frac{8 p^3 + 2 p^2 + 3 p + 12}{9 p^5 + 4 p^3 + 6 p^2}$



$$H_1(p) = \frac{8 p^3 + 2 p^2 + 3 p + 12}{9 p^5 + 4 p^3 + 6 p^2} = \frac{12}{6 p^2} \frac{\frac{2}{3}p^3 + \frac{1}{6}p^2 + \frac{1}{4}p + 1}{\frac{3}{2}p^3 + \frac{2}{3}p + 1}$$

- a) Ordre 5
- b) Gain 12
- c) Classe 2



Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

Classe d'une FTBO quelconque

Ordre, gain et classe de : $H_1(p) = \frac{8 p^3 + 2 p^2 + 3 p + 12}{9 p^5 + 4 p^3 + 6 p^2}$



$$H_1(p) = \frac{8 p^3 + 2 p^2 + 3 p + 12}{9 p^5 + 4 p^3 + 6 p^2} = \frac{12}{6 p^2} \frac{\frac{2}{3}p^3 + \frac{1}{6}p^2 + \frac{1}{4}p + 1}{\frac{3}{2}p^3 + \frac{2}{3}p + 1}$$

- Ordre : 5.
- Gain : 2.
- Classe : 2.



Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

Classe d'une FTBO quelconque

Ordre, gain et classe de : $H_1(p) = \frac{8 p^3 + 2 p^2 + 3 p + 12}{9 p^5 + 4 p^3 + 6 p^2}$



$$H_1(p) = \frac{8 p^3 + 2 p^2 + 3 p + 12}{9 p^5 + 4 p^3 + 6 p^2} = \frac{12}{6 p^2} \frac{\frac{2}{3}p^3 + \frac{1}{6}p^2 + \frac{1}{4}p + 1}{\frac{3}{2}p^3 + \frac{2}{3}p + 1}$$

- Ordre : 5.
- Gain : 2.
- Classe : 2.



Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

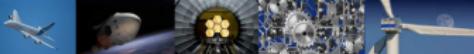
Classe d'une FTBO quelconque

Ordre, gain et classe de : $H_1(p) = \frac{8 p^3 + 2 p^2 + 3 p + 12}{9 p^5 + 4 p^3 + 6 p^2}$



$$H_1(p) = \frac{8 p^3 + 2 p^2 + 3 p + 12}{9 p^5 + 4 p^3 + 6 p^2} = \frac{12}{6 p^2} \frac{\frac{2}{3}p^3 + \frac{1}{6}p^2 + \frac{1}{4}p + 1}{\frac{3}{2}p^3 + \frac{2}{3}p + 1}$$

- Ordre : 5.
- Gain : 2.
- Classe : 2.



Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

Classe d'une FTBO quelconque

Ordre, gain et classe de : $H_1(p) = \frac{8 p^3 + 2 p^2 + 3 p + 12}{9 p^5 + 4 p^3 + 6 p^2}$



$$H_1(p) = \frac{8 p^3 + 2 p^2 + 3 p + 12}{9 p^5 + 4 p^3 + 6 p^2} = \frac{12}{6 p^2} \frac{\frac{2}{3}p^3 + \frac{1}{6}p^2 + \frac{1}{4}p + 1}{\frac{3}{2}p^3 + \frac{2}{3}p + 1}$$

- Ordre : 5.
- Gain : 2.
- Classe : 2.



Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

Classe d'une FTBO quelconque

Ordre, gain et classe de : $H_2(p) = \frac{7 p^4 + 3 p^3 + 2 p + 7}{p^3 + 2 p^2 + 6}$



$$H_2(p) = \frac{7 p^4 + 3 p^3 + 2 p + 7}{p^3 + 2 p^2 + 6} = \frac{7}{6 p^0} \frac{p^4 + \frac{3}{7} p^3 + \frac{2}{7} p + 1}{\frac{1}{6} p^3 + \frac{1}{3} p^2 + 1}$$

- Ordre 3
- Gain 7
- Classe 0



Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

Classe d'une FTBO quelconque

Ordre, gain et classe de : $H_2(p) = \frac{7 p^4 + 3 p^3 + 2 p + 7}{p^3 + 2 p^2 + 6}$



$$H_2(p) = \frac{7 p^4 + 3 p^3 + 2 p + 7}{p^3 + 2 p^2 + 6} = \frac{7}{6 p^0} \frac{p^4 + \frac{3}{7} p^3 + \frac{2}{7} p + 1}{\frac{1}{6} p^3 + \frac{1}{3} p^2 + 1}$$

- Ordre : 3.
- Gain : $\frac{7}{6}$.
- Classe : 0.

Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

Classe d'une FTBO quelconque

Ordre, gain et classe de : $H_2(p) = \frac{7 p^4 + 3 p^3 + 2 p + 7}{p^3 + 2 p^2 + 6}$



$$H_2(p) = \frac{7 p^4 + 3 p^3 + 2 p + 7}{p^3 + 2 p^2 + 6} = \frac{7}{6 p^0} \frac{p^4 + \frac{3}{7} p^3 + \frac{2}{7} p + 1}{\frac{1}{6} p^3 + \frac{1}{3} p^2 + 1}$$

- Ordre : 3.
- Gain : $\frac{7}{6}$.
- Classe : 0.

Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

Classe d'une FTBO quelconque

Ordre, gain et classe de : $H_2(p) = \frac{7 p^4 + 3 p^3 + 2 p + 7}{p^3 + 2 p^2 + 6}$



$$H_2(p) = \frac{7 p^4 + 3 p^3 + 2 p + 7}{p^3 + 2 p^2 + 6} = \frac{7}{6 p^0} \frac{p^4 + \frac{3}{7} p^3 + \frac{2}{7} p + 1}{\frac{1}{6} p^3 + \frac{1}{3} p^2 + 1}$$

- Ordre : 3.
- Gain : $\frac{7}{6}$.
- Classe : 0.



Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

Classe d'une FTBO quelconque

Ordre, gain et classe de : $H_2(p) = \frac{7 p^4 + 3 p^3 + 2 p + 7}{p^3 + 2 p^2 + 6}$

-

$$H_2(p) = \frac{7 p^4 + 3 p^3 + 2 p + 7}{p^3 + 2 p^2 + 6} = \frac{7}{6 p^0} \frac{p^4 + \frac{3}{7} p^3 + \frac{2}{7} p + 1}{\frac{1}{6} p^3 + \frac{1}{3} p^2 + 1}$$

- Ordre : 3.
- Gain : $\frac{7}{6}$.
- Classe : 0.



Plan

1 Intérêts et objectifs

- Introduction
- Classe et ordre d'une fonction de transfert
- Exemple du cours

2 Stabilité

- Définition et propriétés
- Critères de stabilité
- Marge de stabilité
- Application aux systèmes du premier et deuxième ordre



Exemple du cours

Robot Lola

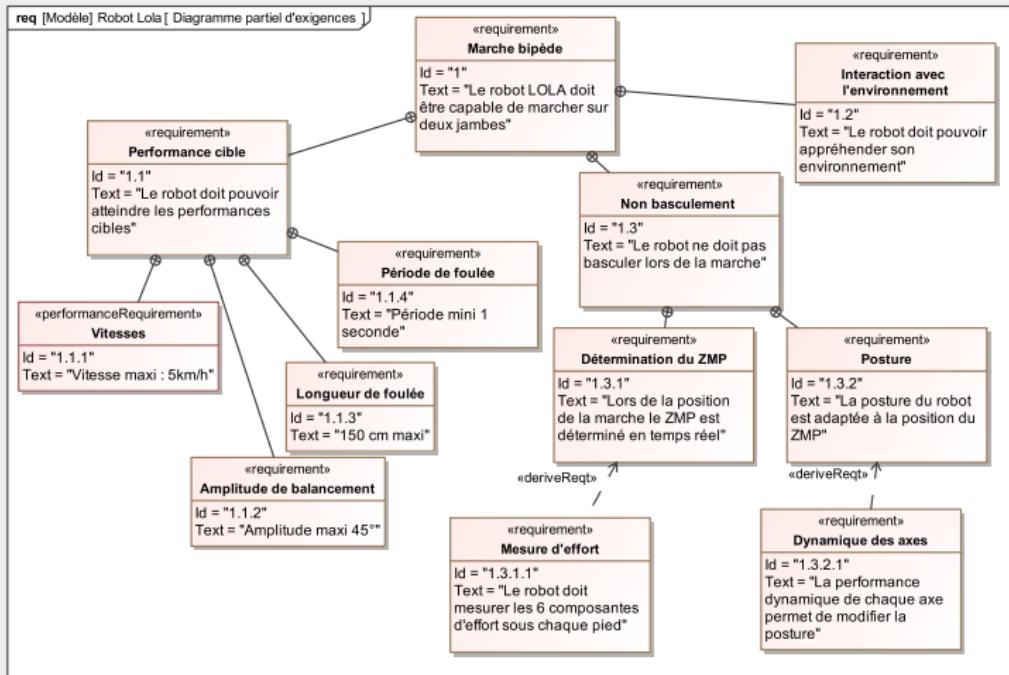
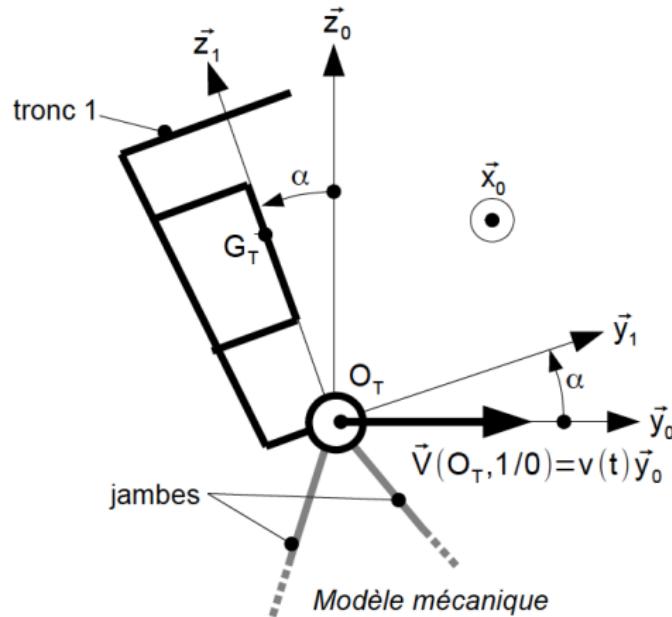
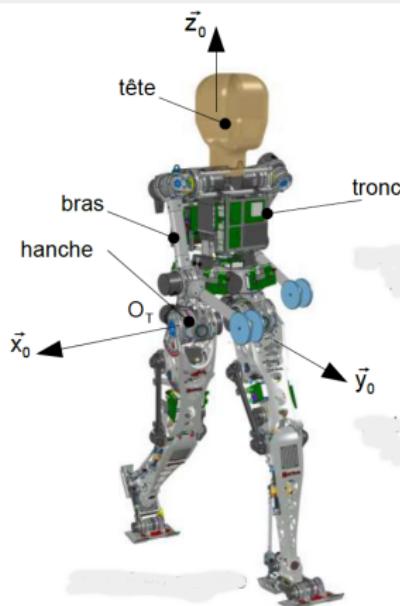


Diagramme des exigences

Exemple du cours

Robot Lola





Exemple du cours

Robot Lola

On s'intéresse ici à la mise en place d'une commande permettant d'assurer les performances dynamiques du robot Lola en terme de maintien d'une posture vertical. On note $\alpha(t)$, l'**angle de tangage**. Cet axe est actionné par un moteur à courant continu avec une tension d'alimentation noté $U_c(t)$.

1.3.2.1 Performance dynamique de chaque axe permet de modifier la posture

Critère	Niveau	Flexibilité
Marge de phase	$M\varphi = 50^\circ$	Mini
Erreur Statique	0°	$\pm 0,5^\circ$
Bandé passante à 0 dB en boucle ouverte	$\omega_{BP} = 50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$	Mini
Temps de réponse à 5%	$0,2s$	Maxi
Dépassement	1°	Maxi



Exemple du cours

Robot Lola

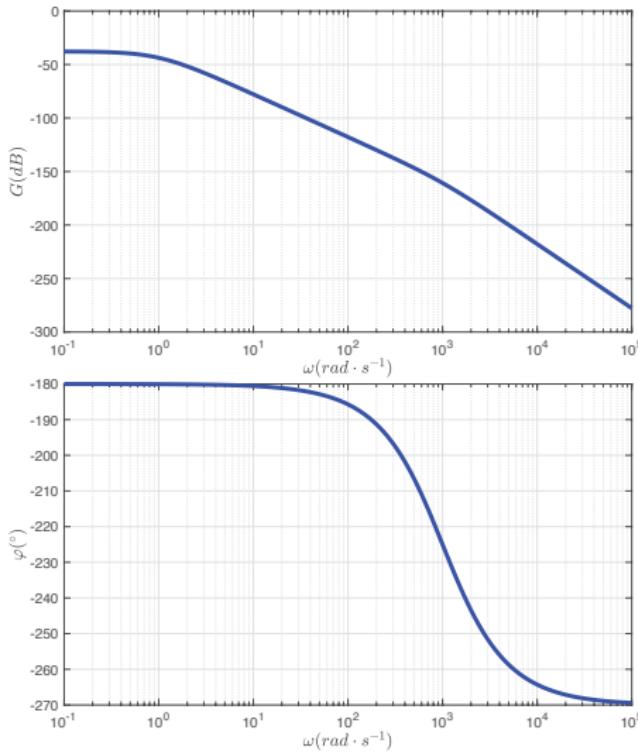
On peut montrer que la fonction de transfert du robot Lola en boucle ouverte est de la forme :

$$F(p) = \frac{\alpha(p)}{U_c(p)} = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p)(-1 + \tau_1 \cdot p)(1 + \tau_2 \cdot p)}$$

Q 1 : Proposer un tracé asymptotique sur le diagramme de Bode de $F(p)$

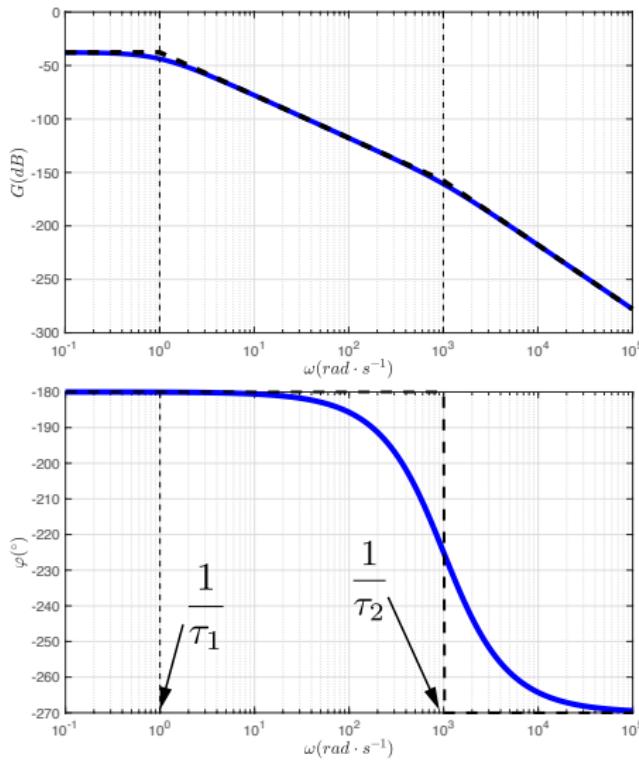


Exemple du cours





Exemple du cours

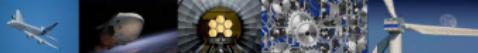




Exemple du cours

Q 2 : En analysant les diagrammes de Bode ci-dessus, déterminer les valeurs de τ_1 , τ_2 et K .

ω	$0 \rightarrow \frac{1}{\tau_1}$	$\frac{1}{\tau_1}$	$\frac{1}{\tau_1} \rightarrow \frac{1}{\tau_2}$	$\frac{1}{\tau_2}$	$\frac{1}{\tau_2} \rightarrow \infty$
Tracé asymptotique	Gain (dB/dec)	$\varphi(^{\circ})$	Gain (dB)	Gain (dB/dec)	$\varphi(^{\circ})$
$\frac{K}{-1+\tau_1 \cdot p}$					
$\frac{1}{1+\tau_1 \cdot p}$					
$\frac{1}{1+\tau_2 \cdot p}$					
$F(p)$					



Exemple du cours

Q 2 : En analysant les diagrammes de Bode ci-dessus, déterminer les valeurs de τ_1 , τ_2 et K .

ω	$0 \rightarrow \frac{1}{\tau_1}$		$\frac{1}{\tau_1}$	$\frac{1}{\tau_1} \rightarrow \frac{1}{\tau_2}$		$\frac{1}{\tau_2}$	$\frac{1}{\tau_2} \rightarrow \infty$	
Tracé asymptotique	Gain (dB/dec)	$\varphi(^{\circ})$	Gain (dB)	Gain (dB/dec)	$\varphi(^{\circ})$	Gain (dB)	Gain (dB/dec)	$\varphi(^{\circ})$
$\frac{K}{-1+\tau_1 \cdot p}$	0	-180	$20\log K$	-20	-90	Continuité	-20	-90
$\frac{1}{1+\tau_1 \cdot p}$	0	0	0	-20	-90	Continuité	-20	-90
$\frac{1}{1+\tau_2 \cdot p}$	0	0	0	0	0	0	-20	-90
$F(p)$	0	-180	$20\log K$	-40	-180	Continuité	-60	-270



Exemple du cours

Robot Lola

Q 2 : En analysant les diagrammes de Bode ci-dessus, déterminer les valeurs de τ_1 , τ_2 et K .



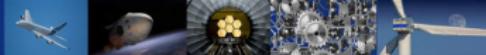
Exemple du cours

Robot Lola

Q 2 : En analysant les diagrammes de Bode ci-dessus, déterminer les valeurs de τ_1 , τ_2 et K .

Par identification, on trouve :

- $\tau_1 = 1 \text{ s}$;
- $\tau_2 = 10^{-3} \text{ s}$;
- $K = 10^{-\frac{37,5}{20}} = 0,013 \text{ rad} \cdot V^{-1}$.



Exemple du cours

Robot Lola

Par la suite, on simplifie $F(p)$ par $\frac{K}{(1+\tau_1 \cdot p)(-1+\tau_1 \cdot p)}$.

Q 3 : Justifier ce choix de simplification.



Exemple du cours

Robot Lola

Par la suite, on simplifie $F(p)$ par $\frac{K}{(1+\tau_1 \cdot p)(-1+\tau_1 \cdot p)}$.

Q 3 : Justifier ce choix de simplification.

$\tau_2 \ll \tau_1$ donc l'effet de $\frac{1}{1+\tau_2 \cdot p}$ est négligeable sur la réponse.

La forme simplifiée est justifiée. Sur le Bode on remarque que le modèle simplifié est satisfaisant jusqu'à $100\text{rad/s} > 50\text{rad/s}$ (bande passante visée en BO)



Plan

1 Intérêts et objectifs

- Introduction
- Classe et ordre d'une fonction de transfert
- Exemple du cours

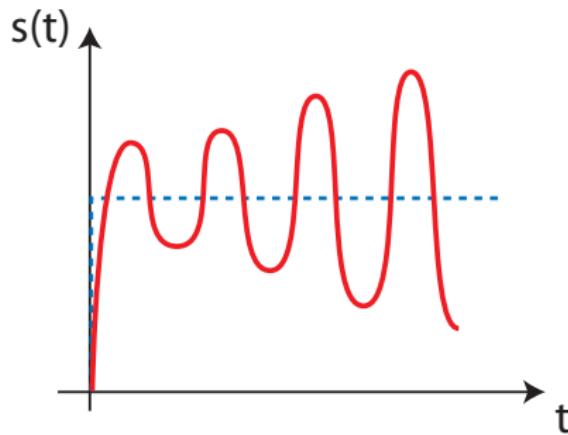
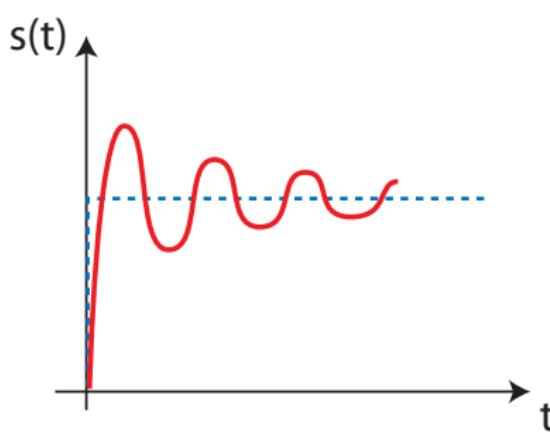
2 Stabilité

- Définition et propriétés
- Critères de stabilité
- Marge de stabilité
- Application aux systèmes du premier et deuxième ordre

Stabilité

Stabilité

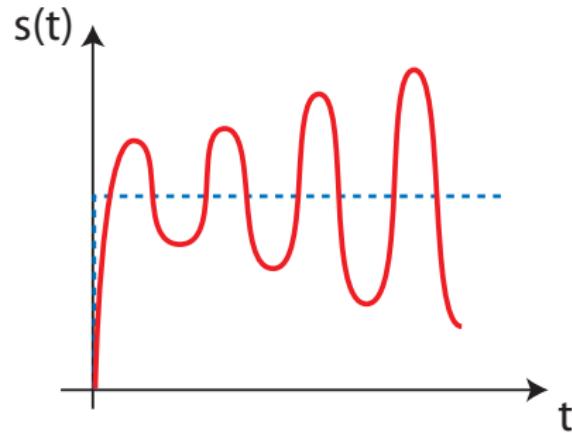
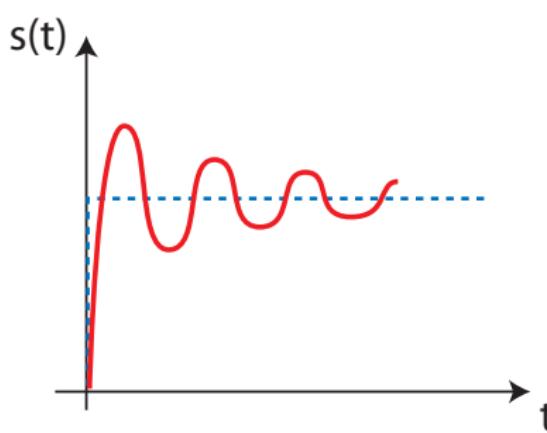
- La stabilité traduit la propriété de convergence temporelle asymptotique vers un état d'équilibre d'un système.
- Un système est dit stable au sens Entrée-Bornée-Sortie-Bornée (EBSB) si, lorsqu'on lui applique une entrée bornée, la sortie reste bornée.



Stabilité

Stabilité

- La stabilité traduit la propriété de convergence temporelle asymptotique vers un état d'équilibre d'un système.
- Un système est dit stable au sens **Entrée-Bornée-Sortie-Bornée (EBSB)** si, lorsqu'on lui applique une entrée bornée, la sortie reste bornée.



Stabilité

Condition de stabilité avec les pôle de la FTBF

- Soit un système linéaire continu et invariant. Sa fonction de transfert en boucle fermée ($FTBF(p)$) peut se mettre sous la forme suivant :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{a \prod_{i=1}^n (p - z_i)^{k_i}}{b \prod_{j=1}^m (p - d_j)^{l_j}}$$

(2)



- Les z_1, \dots, z_n sont les racines de $N(p)$ et sont appelés les **zéros de la FTBF**.
- Les d_1, \dots, d_n sont les racines de $D(p)$ et sont appelés les **pôles de la FTBF**.
- Un système est stable si les pôles de sa FTBF sont tous à partie réelle strictement négative.

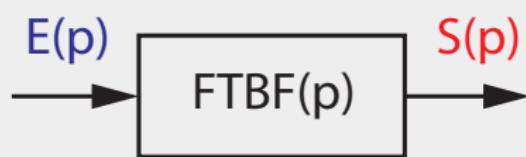
Stabilité

Condition de stabilité avec les pôle de la FTBF

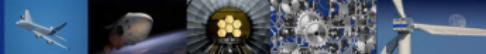
- Soit un système linéaire continu et invariant. Sa fonction de transfert en boucle fermée ($FTBF(p)$) peut se mettre sous la forme suivant :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{a \prod_{i=1}^n (p - z_i)^{k_i}}{b \prod_{j=1}^m (p - d_j)^{l_j}}$$

(2)



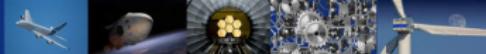
- Les z_1, \dots, z_n sont les racines de $N(p)$ et sont appelés les zéros de la FTBF.
- Les d_1, \dots, d_n sont les racines de $D(p)$ et sont appelés les pôles de la FTBF.
- Un système est stable si les pôles de sa FTBF sont tous à partie réelle strictement négative.



Stabilité

Démonstration

- On peut classifier les pôles suivant qu'ils soient :
 - réels : d_i^r ;
 - réels multiples d'ordre n_i : d_i^m ;
 - complexes : $d_i^c = r_i \pm j \omega_i$;
 - complexes multiples d'ordre n_i : $d_i = r_i^m \pm j \omega_i^m$;
- On peut alors réaliser une décomposition en éléments simples en classifiant les termes suivant les quatre catégories précédentes. On obtient alors la sortie $s(t)$ qui s'écrit comme une combinaison linéaire de quatre type de fonctions :
 - $s_1(t) = e^{d_i^r t} u(t)$;
 - $s_2(t) = t^{n_i-1} e^{d_i^r t} u(t)$;
 - $s_3(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) e^{d_i^c t} u(t)$;
 - $s_4(t) = B_i \cos(\omega_i^m t + \varphi_i) t^{n_i-1} e^{d_i^m t} u(t)$;
- Ainsi pour que la sortie reste bornée, il faut donc que les fonctions exponentielles soient décroissantes et donc que d_i^r , d_i^m , r_i et r_i^m soient négatifs donc que les pôles soient à partie réelle strictement négative.



Stabilité

Démonstration

- On peut classifier les pôles suivant qu'ils soient :
 - réels : d_i^r ;
 - réels multiples d'ordre n_i : d_i^m ;
 - complexes : $d_i^c = r_i \pm j \omega_i$;
 - complexes multiples d'ordre n_i : $d_i = r_i^m \pm j \omega_i^m$;
- On peut alors réaliser une décomposition en éléments simples en classifiant les termes suivant les quatre catégories précédentes. On obtient alors la sortie $s(t)$ qui s'écrit comme une combinaison linéaire de quatre type de fonctions :
 - $s_1(t) = e^{d_i^r t} u(t)$;
 - $s_2(t) = t^{n_i-1} e^{d_i^r t} u(t)$;
 - $s_3(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) e^{d_i^c t} u(t)$;
 - $s_4(t) = B_i \cos(\omega_i^m t + \varphi_i) t^{n_i-1} e^{d_i^m t} u(t)$;
- Ainsi pour que la sortie reste bornée, il faut donc que les fonctions exponentielles soient décroissantes et donc que d_i^r , d_i^m , r_i et r_i^m soient négatifs donc que les pôles soient à partie réelle strictement négative.

Stabilité

Démonstration

- On peut classifier les pôles suivant qu'ils soient :
 - réels : d_i^r ;
 - réels multiples d'ordre n_i : d_i^m ;
 - complexes : $d_i^c = r_i \pm j \omega_i$;
 - complexes multiples d'ordre n_i : $d_i = r_i^m \pm j \omega_i^m$;
- On peut alors réaliser une décomposition en éléments simples en classifiant les termes suivant les quatre catégories précédentes. On obtient alors la sortie $s(t)$ qui s'écrit comme une combinaison linéaire de quatre type de fonctions :
 - $s_1(t) = e^{d_i^r t} u(t)$;
 - $s_2(t) = t^{n_i-1} e^{d_i^r t} u(t)$;
 - $s_3(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) e^{d_i^c t} u(t)$;
 - $s_4(t) = B_i \cos(\omega_i^m t + \varphi_i) t^{n_i-1} e^{d_i^m t} u(t)$;
- Ainsi pour que la sortie reste bornée, il faut donc que les fonctions exponentielles soient décroissantes et donc que d_i^r , d_i^m , r_i et r_i^m soient négatifs donc que les pôles soient à partie réelle strictement négative.

Stabilité

Démonstration

- On peut classifier les pôles suivant qu'ils soient :
 - réels : d_i^r ;
 - réels multiples d'ordre n_i : d_i^m ;
 - complexes : $d_i^c = r_i \pm j \omega_i$;
 - complexes multiples d'ordre n_i : $d_i = r_i^m \pm j \omega_i^m$;
- On peut alors réaliser une décomposition en éléments simples en classifiant les termes suivant les quatre catégories précédentes. On obtient alors la sortie $s(t)$ qui s'écrit comme une combinaison linéaire de quatre type de fonctions :
 - $s_1(t) = e^{d_i^r t} u(t)$;
 - $s_2(t) = t^{n_i-1} e^{d_i^r t} u(t)$;
 - $s_3(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) e^{d_i^c t} u(t)$;
 - $s_4(t) = B_i \cos(\omega_i^m t + \varphi_i) t^{n_i-1} e^{d_i^m t} u(t)$;
- Ainsi pour que la sortie reste bornée, il faut donc que les fonctions exponentielles soient décroissantes et donc que d_i^r , d_i^m , r_i et r_i^m soient négatifs donc que les pôles soient à partie réelle strictement négative.

Stabilité

Démonstration

- On peut classifier les pôles suivant qu'ils soient :
 - réels : d_i^r ;
 - réels multiples d'ordre n_i : d_i^m ;
 - complexes : $d_i^c = r_i \pm j \omega_i$;
 - complexes multiples d'ordre n_i : $d_i = r_i^m \pm j \omega_i^m$;
- On peut alors réaliser une décomposition en éléments simples en classifiant les termes suivant les quatre catégories précédentes. On obtient alors la sortie $s(t)$ qui s'écrit comme une combinaison linéaire de quatre type de fonctions :
 - $s_1(t) = e^{d_i^r t} u(t)$;
 - $s_2(t) = t^{n_i-1} e^{d_i^r t} u(t)$;
 - $s_3(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) e^{d_i^c t} u(t)$;
 - $s_4(t) = B_i \cos(\omega_i^m t + \varphi_i) t^{n_i-1} e^{d_i^m t} u(t)$;
- Ainsi pour que la sortie reste bornée, il faut donc que les fonctions exponentielles soient décroissantes et donc que d_i^r , d_i^m , r_i et r_i^m soient négatifs donc que les pôles soient à partie réelle strictement négative.



Stabilité

Démonstration

- On peut classifier les pôles suivant qu'ils soient :
 - réels : d_i^r ;
 - réels multiples d'ordre n_i : d_i^m ;
 - complexes : $d_i^c = r_i \pm j \omega_i$;
 - complexes multiples d'ordre n_i : $d_i = r_i^m \pm j \omega_i^m$;
- On peut alors réaliser une décomposition en éléments simples en classifiant les termes suivant les quatre catégories précédentes. On obtient alors la sortie $s(t)$ qui s'écrit comme une combinaison linéaire de quatre type de fonctions :
 - $s_1(t) = e^{d_i^r t} u(t)$;
 - $s_2(t) = t^{n_i-1} e^{d_i^m t} u(t)$;
 - $s_3(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) e^{r_i t} u(t)$;
 - $s_4(t) = B_i \cos(\omega_i^m t + \varphi_i) t^{n_i-1} e^{r_i^m t} u(t)$;
- Ainsi pour que la sortie reste bornée, il faut donc que les fonctions exponentielles soient décroissantes et donc que d_i^r , d_i^m , r_i et r_i^m soient négatifs donc que les pôles soient à partie réelle strictement négative.



Stabilité

Démonstration

- On peut classifier les pôles suivant qu'ils soient :
 - réels : d_i^r ;
 - réels multiples d'ordre n_i : d_i^m ;
 - complexes : $d_i^c = r_i \pm j \omega_i$;
 - complexes multiples d'ordre n_i : $d_i = r_i^m \pm j \omega_i^m$;
- On peut alors réaliser une décomposition en éléments simples en classifiant les termes suivant les quatre catégories précédentes. On obtient alors la sortie $s(t)$ qui s'écrit comme une combinaison linéaire de quatre type de fonctions :
 - $s_1(t) = e^{d_i^r t} u(t)$;
 - $s_2(t) = t^{n_i-1} e^{d_i^m t} u(t)$;
 - $s_3(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) e^{r_i^m t} u(t)$;
 - $s_4(t) = B_i \cos(\omega_i^m t + \varphi_i) t^{n_i-1} e^{r_i^m t} u(t)$;
- Ainsi pour que la sortie reste bornée, il faut donc que les fonctions exponentielles soient décroissantes et donc que d_i^r , d_i^m , r_i et r_i^m soient négatifs donc que les pôles soient à partie réelle strictement négative.



Stabilité

Démonstration

- On peut classifier les pôles suivant qu'ils soient :
 - réels : d_i^r ;
 - réels multiples d'ordre n_i : d_i^m ;
 - complexes : $d_i^c = r_i \pm j \omega_i$;
 - complexes multiples d'ordre n_i : $d_i = r_i^m \pm j \omega_i^m$;
- On peut alors réaliser une décomposition en éléments simples en classifiant les termes suivant les quatre catégories précédentes. On obtient alors la sortie $s(t)$ qui s'écrit comme une combinaison linéaire de quatre type de fonctions :
 - $s_1(t) = e^{d_i^r t} u(t)$;
 - $s_2(t) = t^{n_i-1} e^{d_i^m t} u(t)$;
 - $s_3(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) e^{r_i^m t} u(t)$;
 - $s_4(t) = B_i \cos(\omega_i^m t + \varphi_i) t^{n_i-1} e^{r_i^m t} u(t)$;
- Ainsi pour que la sortie reste bornée, il faut donc que les fonctions exponentielles soient décroissantes et donc que d_i^r , d_i^m , r_i et r_i^m soient négatifs donc que les pôles soient à partie réelle strictement négative.



Stabilité

Démonstration

- On peut classifier les pôles suivant qu'ils soient :
 - réels : d_i^r ;
 - réels multiples d'ordre n_i : d_i^m ;
 - complexes : $d_i^c = r_i \pm j \omega_i$;
 - complexes multiples d'ordre n_i : $d_i = r_i^m \pm j \omega_i^m$;
- On peut alors réaliser une décomposition en éléments simples en classifiant les termes suivant les quatre catégories précédentes. On obtient alors la sortie $s(t)$ qui s'écrit comme une combinaison linéaire de quatre type de fonctions :
 - $s_1(t) = e^{d_i^r t} u(t)$;
 - $s_2(t) = t^{n_i-1} e^{d_i^m t} u(t)$;
 - $s_3(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) e^{r_i t} u(t)$;
 - $s_4(t) = B_i \cos(\omega_i^m t + \varphi_i) t^{n_i-1} e^{r_i^m t} u(t)$;
- Ainsi pour que la sortie reste bornée, il faut donc que les fonctions exponentielles soient décroissantes et donc que d_i^r , d_i^m , r_i et r_i^m soient négatifs donc que les pôles soient à partie réelle strictement négative.



Stabilité

Démonstration

- On peut classifier les pôles suivant qu'ils soient :
 - réels : d_i^r ;
 - réels multiples d'ordre n_i : d_i^m ;
 - complexes : $d_i^c = r_i \pm j \omega_i$;
 - complexes multiples d'ordre n_i : $d_i = r_i^m \pm j \omega_i^m$;
- On peut alors réaliser une décomposition en éléments simples en classifiant les termes suivant les quatre catégories précédentes. On obtient alors la sortie $s(t)$ qui s'écrit comme une combinaison linéaire de quatre type de fonctions :
 - $s_1(t) = e^{d_i^r t} u(t)$;
 - $s_2(t) = t^{n_i-1} e^{d_i^m t} u(t)$;
 - $s_3(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) e^{r_i t} u(t)$;
 - $s_4(t) = B_i \cos(\omega_i^m t + \varphi_i) t^{n_i-1} e^{r_i^m t} u(t)$;
- Ainsi pour que la sortie reste bornée, il faut donc que les fonctions exponentielles soient décroissantes et donc que d_i^r , d_i^m , r_i et r_i^m soient négatifs donc que les pôles soient à partie réelle strictement négative.

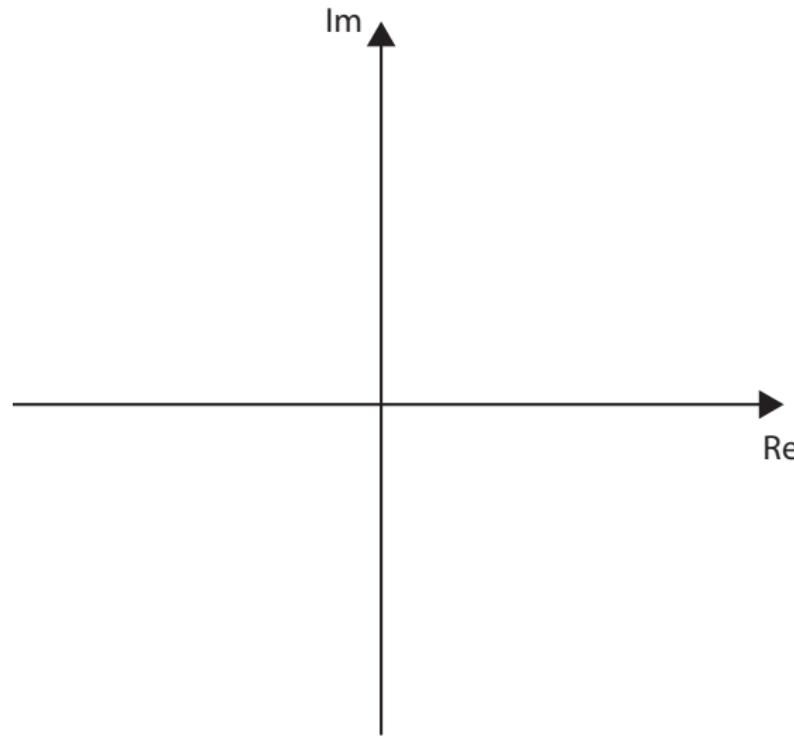
Stabilité

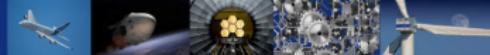
Démonstration

- On peut classifier les pôles suivant qu'ils soient :
 - réels : d_i^r ;
 - réels multiples d'ordre n_i : d_i^m ;
 - complexes : $d_i^c = r_i \pm j \omega_i$;
 - complexes multiples d'ordre n_i : $d_i = r_i^m \pm j \omega_i^m$;
- On peut alors réaliser une décomposition en éléments simples en classifiant les termes suivant les quatre catégories précédentes. On obtient alors la sortie $s(t)$ qui s'écrit comme une combinaison linéaire de quatre type de fonctions :
 - $s_1(t) = e^{d_i^r t} u(t)$;
 - $s_2(t) = t^{n_i-1} e^{d_i^m t} u(t)$;
 - $s_3(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) e^{r_i t} u(t)$;
 - $s_4(t) = B_i \cos(\omega_i^m t + \varphi_i) t^{n_i-1} e^{r_i^m t} u(t)$;
- Ainsi pour que la sortie reste bornée, il faut donc que les fonctions exponentielles soient décroissantes et donc que d_i^r , d_i^m , r_i et r_i^m soient négatifs donc que **les pôles soient à partie réelle strictement négative.**

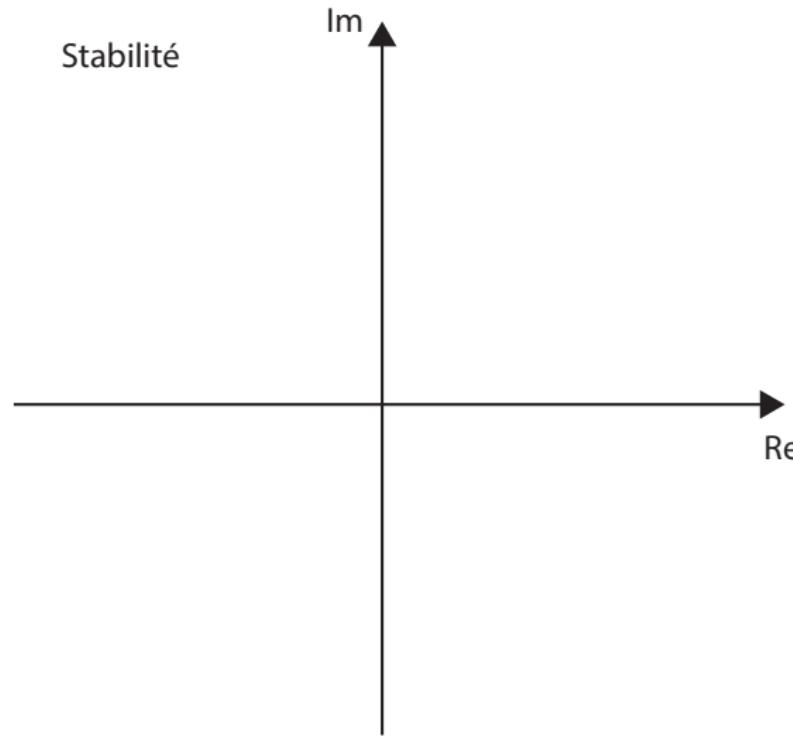


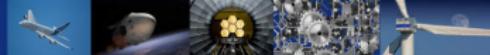
Stabilité



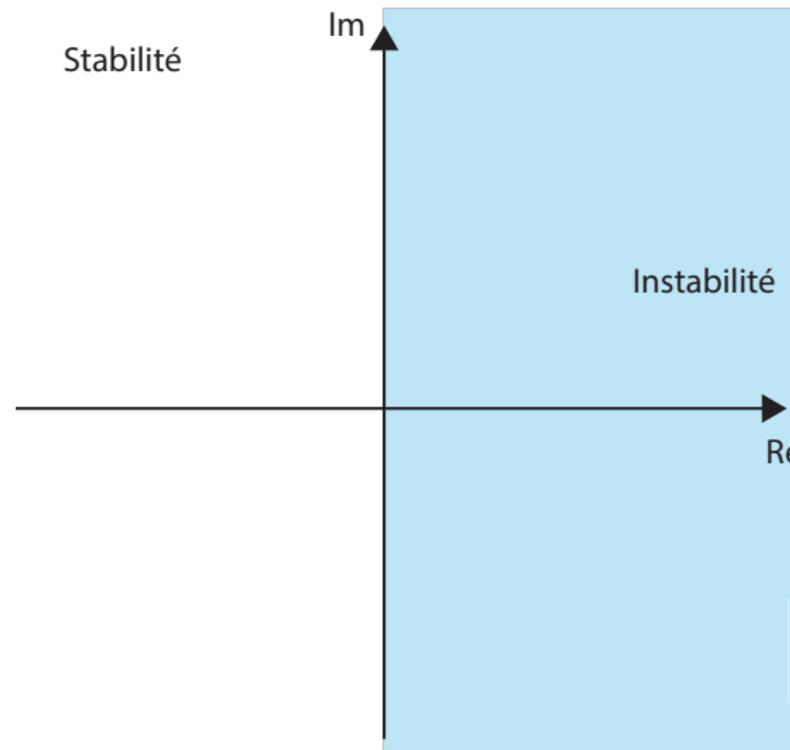


Stabilité



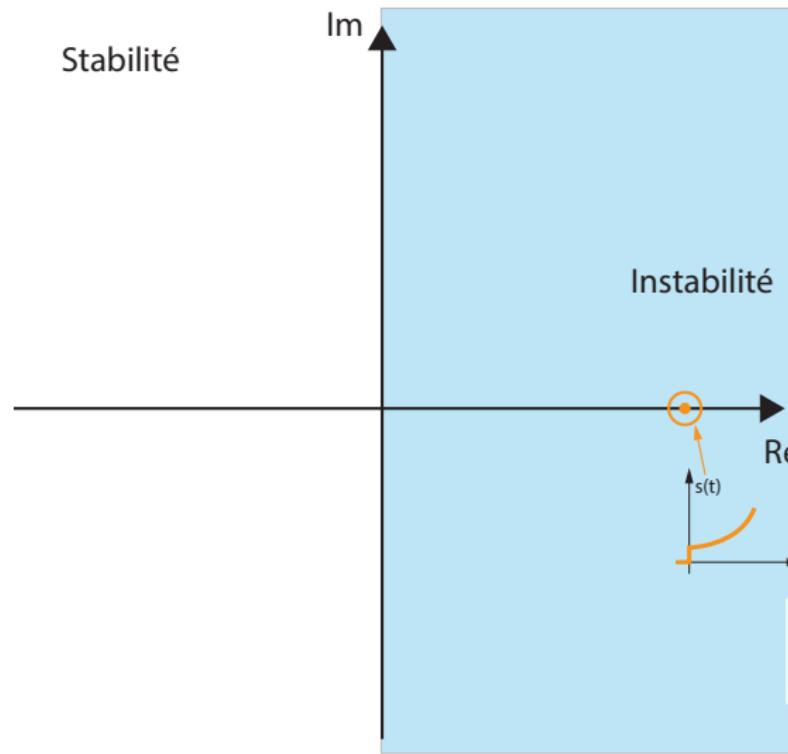


Stabilité



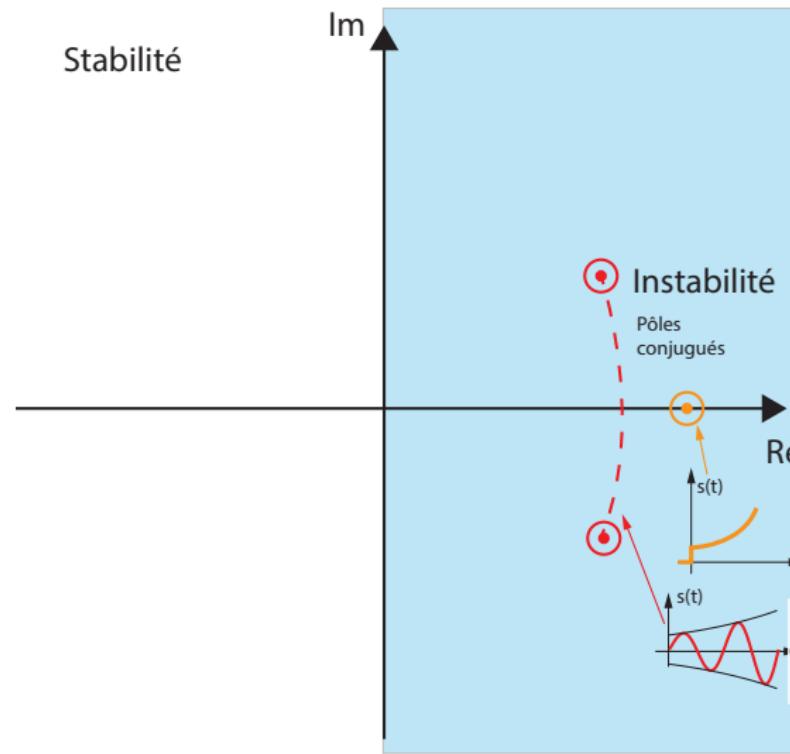


Stabilité



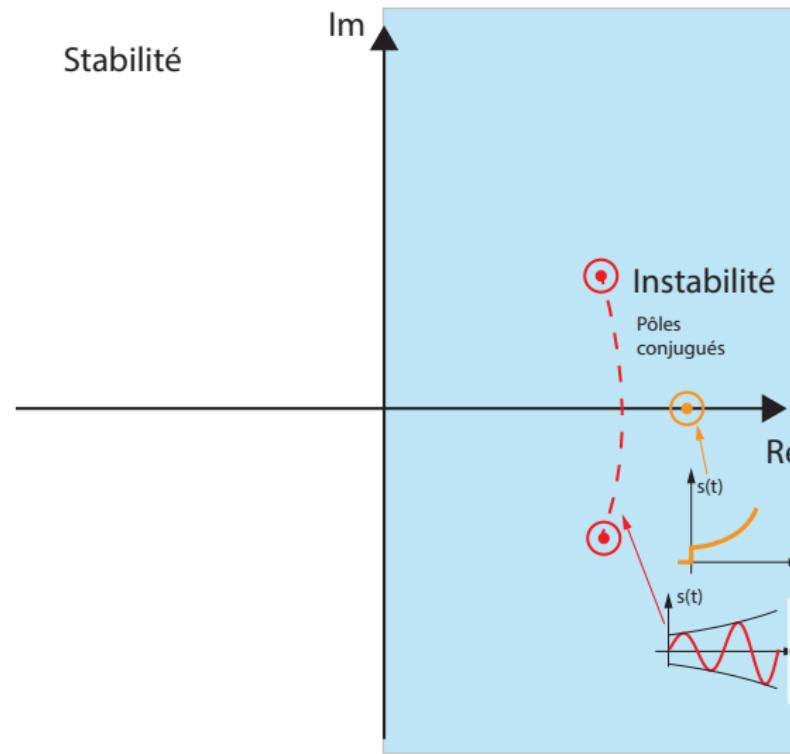


Stabilité



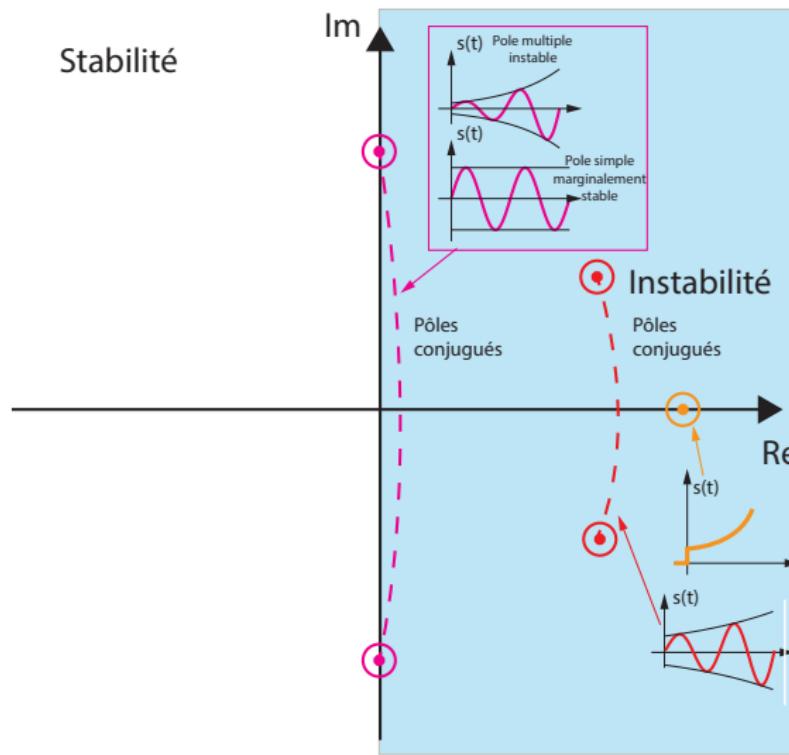


Stabilité



Stabilité

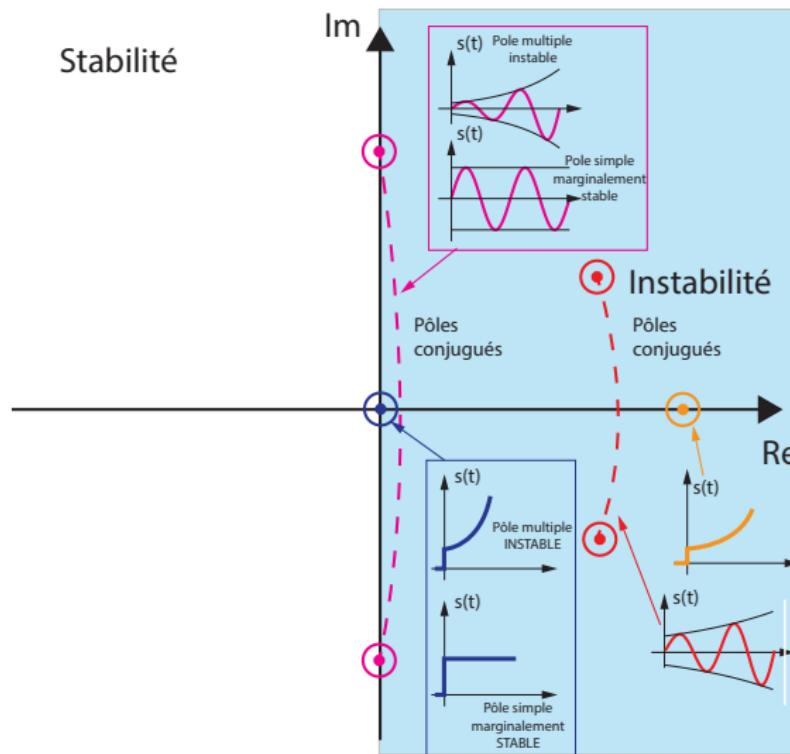
Stabilité





Stabilité

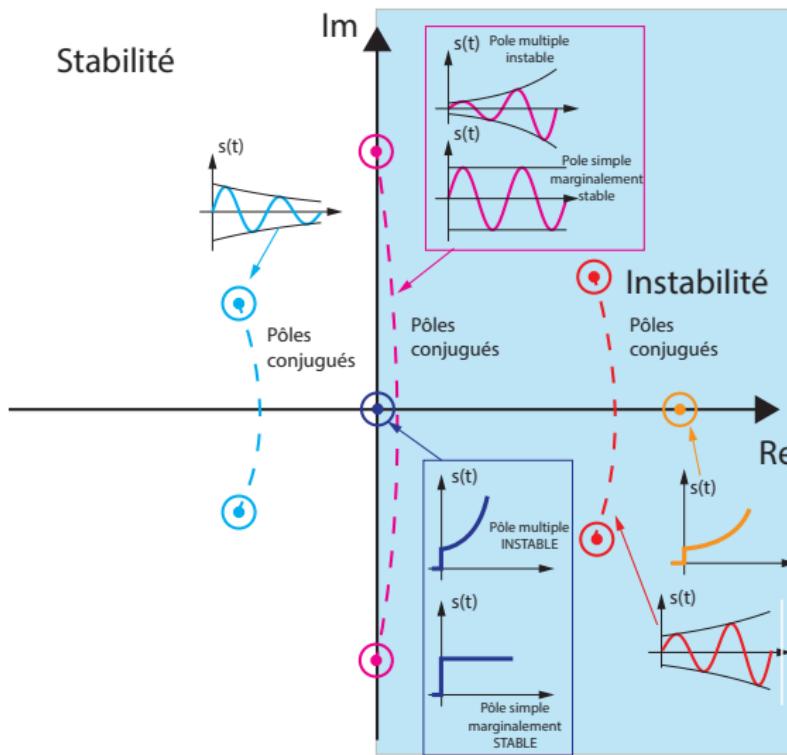
Stabilité





Stabilité

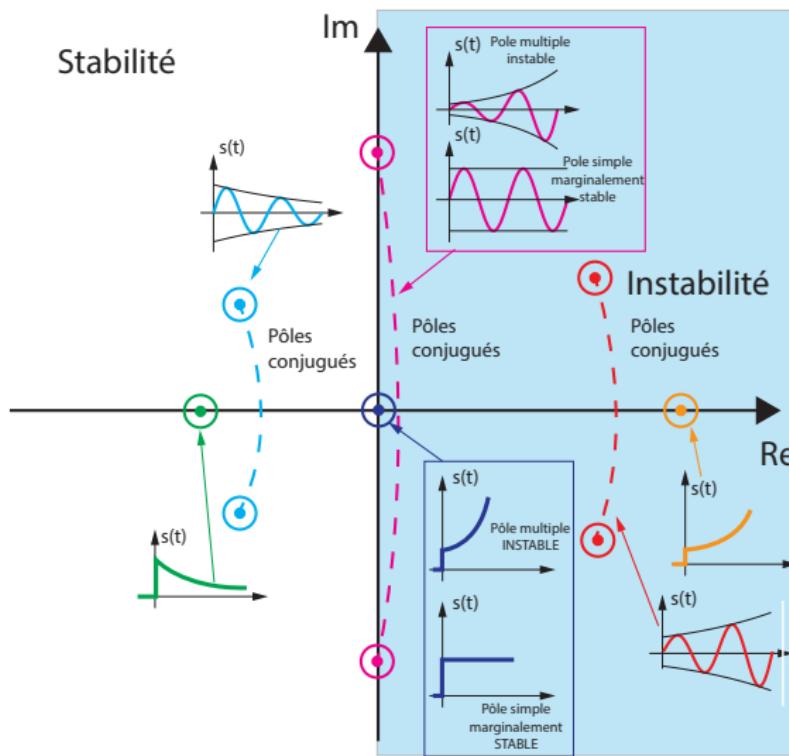
Stabilité

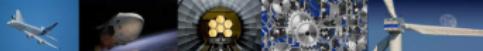




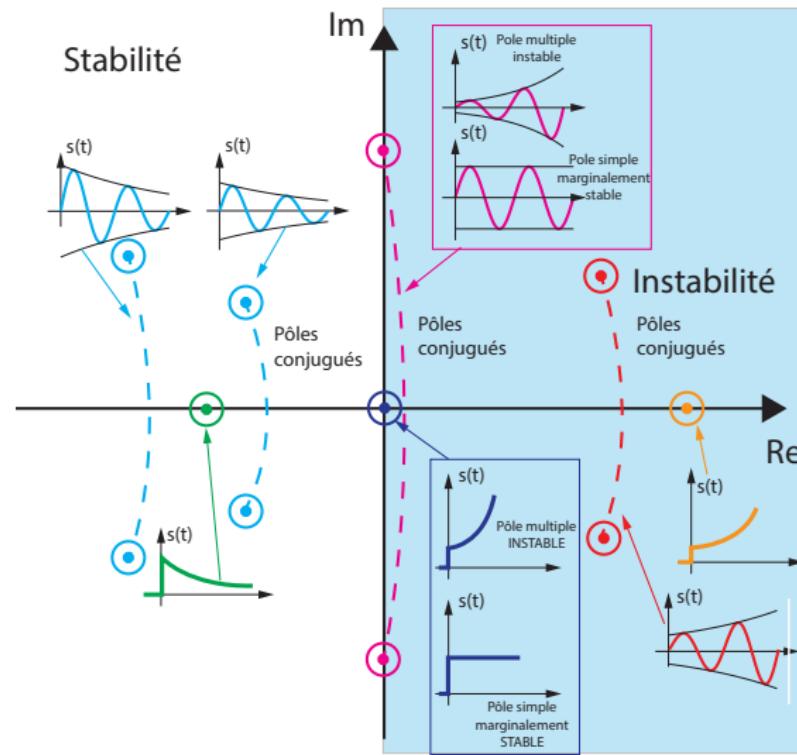
Stabilité

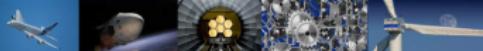
Stabilité





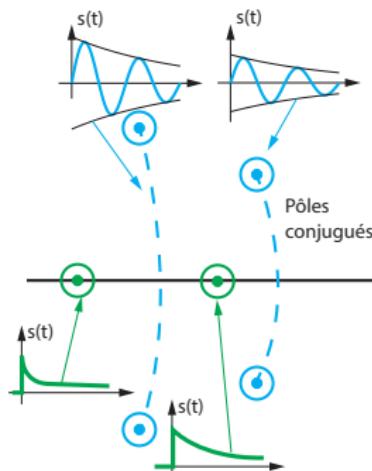
Stabilité





Stabilité

Stabilité



Im

Re

Pôles conjugués

Pôles conjugués

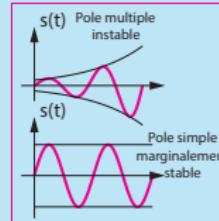
○

○

○

○

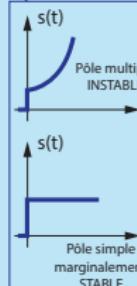
○

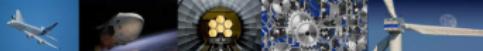


Instabilité

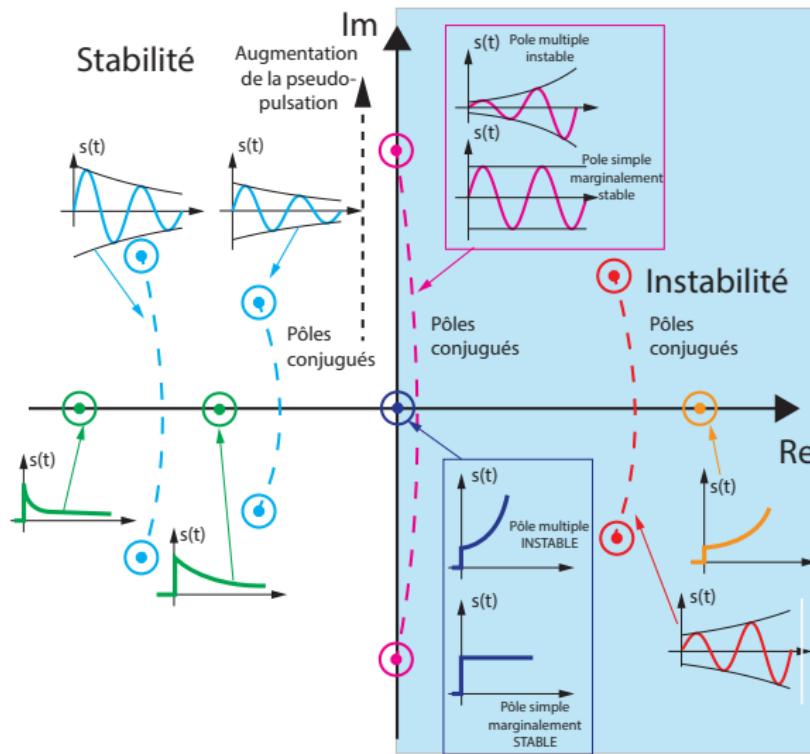
Pôles conjugués

Re



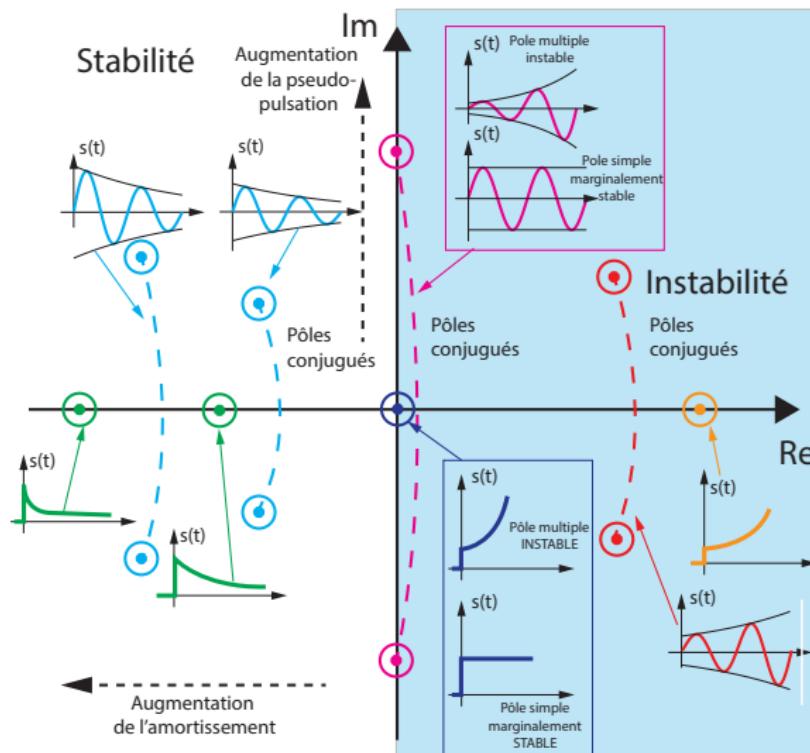


Stabilité





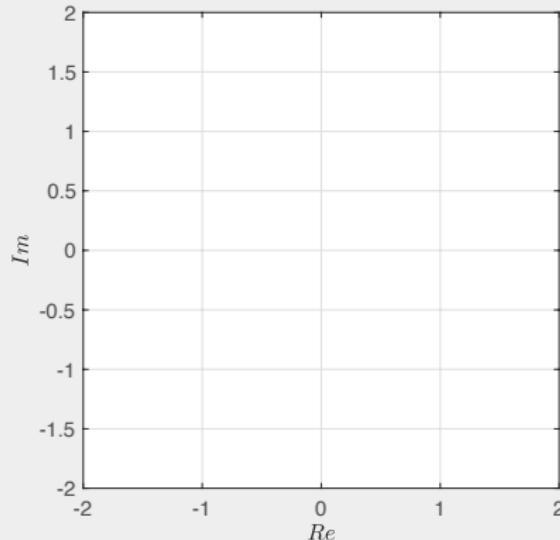
Stabilité



Stabilité

Robot Lola

Q 4 : Représenter les pôles de $F(p)$ dans le plan complexe.

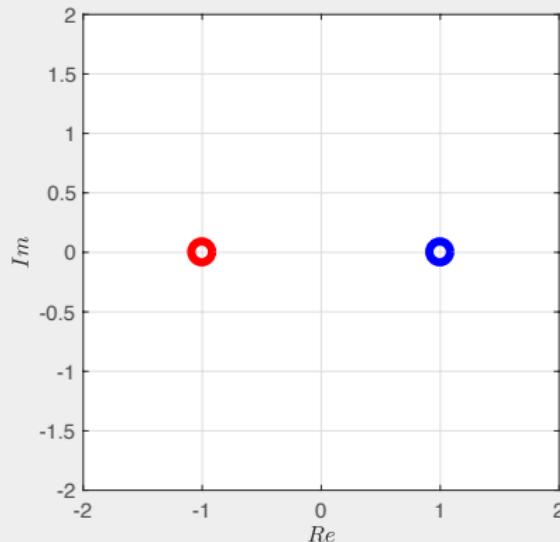


Q 5 : Que pouvons-nous dire sur la stabilité en boucle ouverte du système.

Stabilité

Robot Lola

Q 4 : Représenter les pôles de $F(p)$ dans le plan complexe.

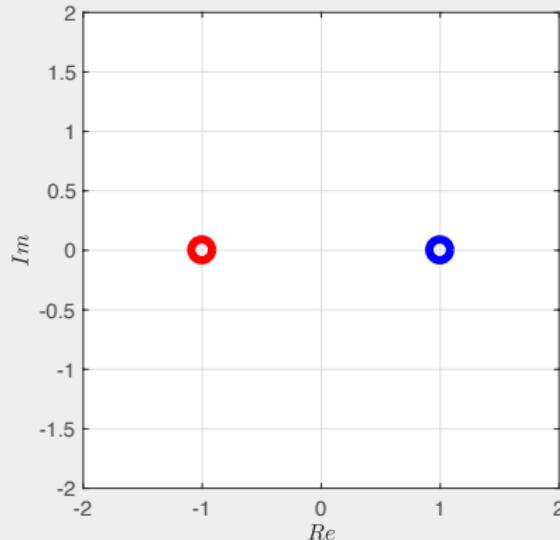


Q 5 : Que pouvons-nous dire sur la stabilité en boucle ouverte du système.

Stabilité

Robot Lola

Q 4 : Représenter les pôles de $F(p)$ dans le plan complexe.



Q 5 : Que pouvons-nous dire sur la stabilité en boucle ouverte du système.

Il existe un pôle à partie réelle positive donc le système n'est pas stable en boucle ouverte.

Instabilité après bouclage

Un système peut être intrinsèquement stable (en Boucle ouverte) mais le fait de l'asservir peut le rendre instable.

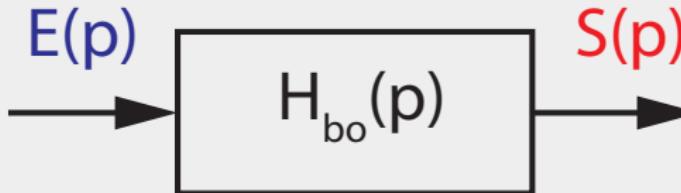
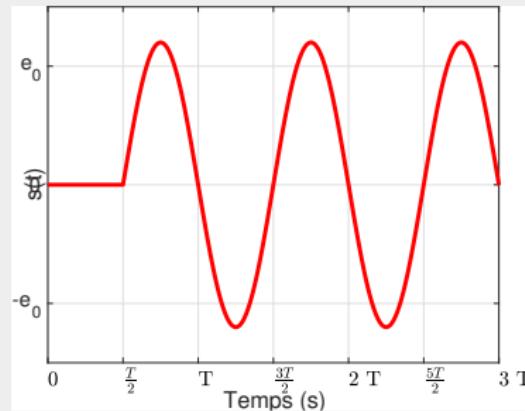
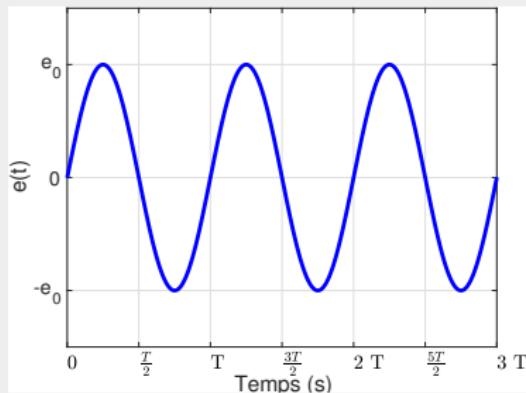
Propriété : instabilité d'un système après bouclage

Soit un système en boucle ouverte :

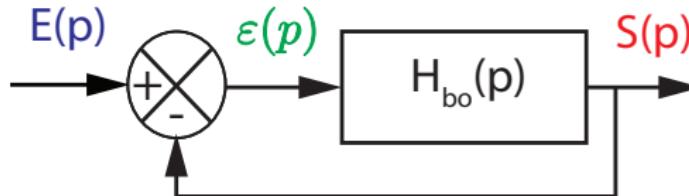
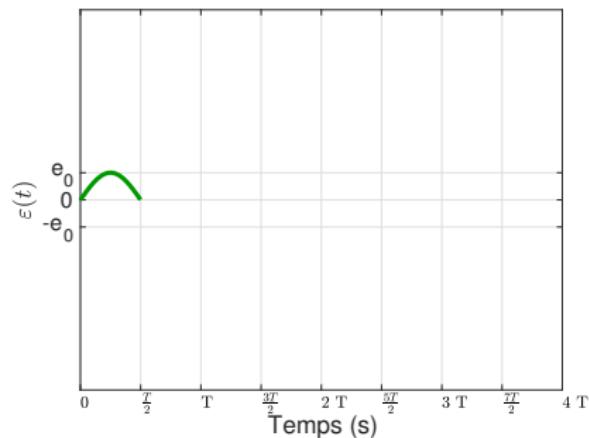
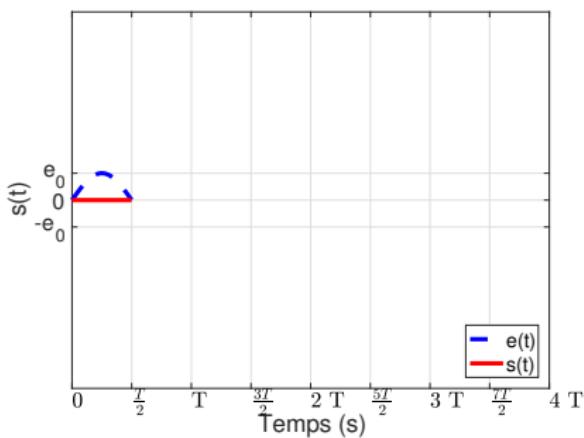
- sollicité par une entrée sinusoïdale de période T et d'amplitude e_0 ;
- de fonction de transfert $H_{bo}(p)$;
- avec un gain $K_{bo}(T) > 1$;
- dans une configuration avec un déphasage d'une demi période ($\varphi(T) = -180^\circ$).

Instabilité après bouclage

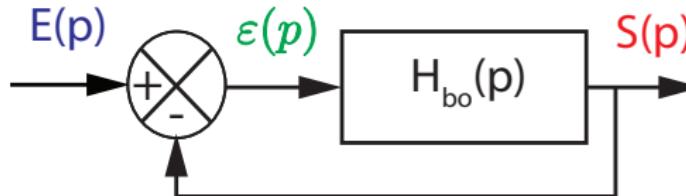
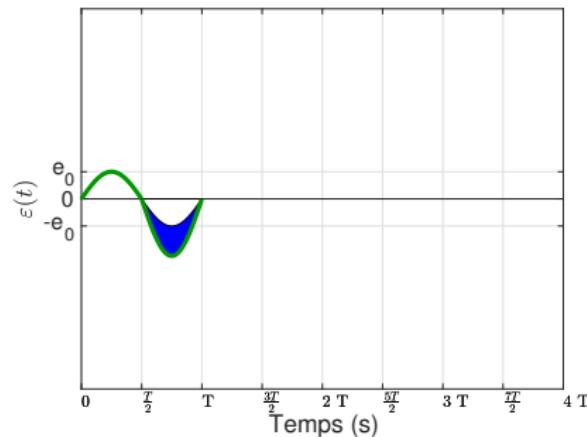
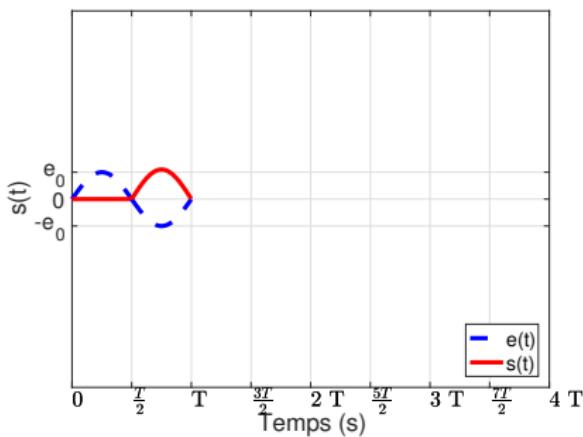
Propriété : instabilité d'un système après bouclage



Instabilité après bouclage

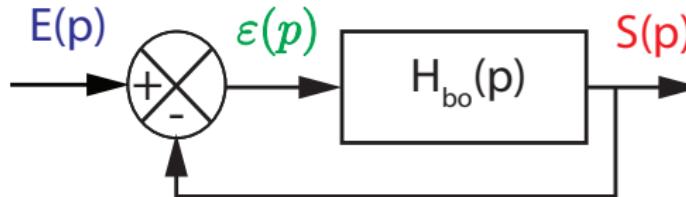
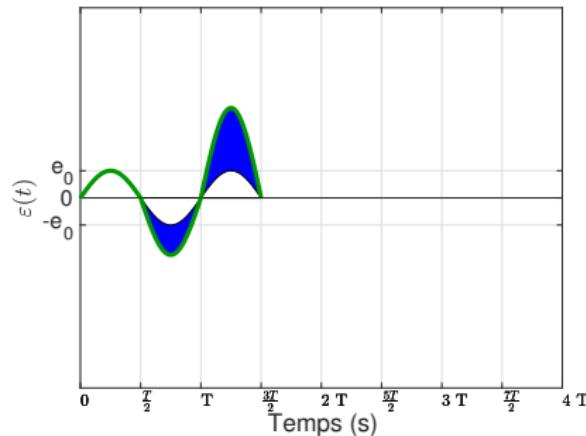
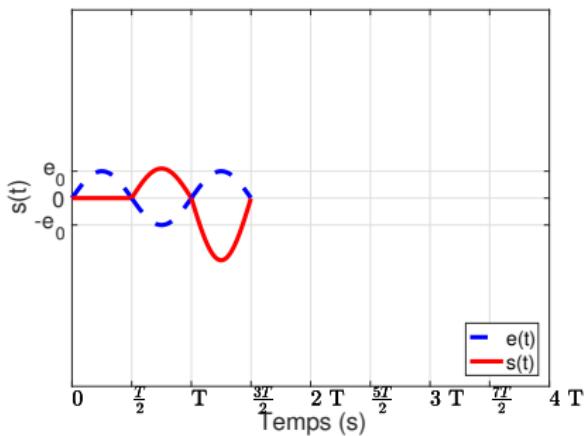


Instabilité après bouclage



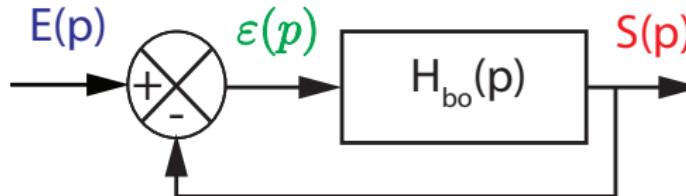
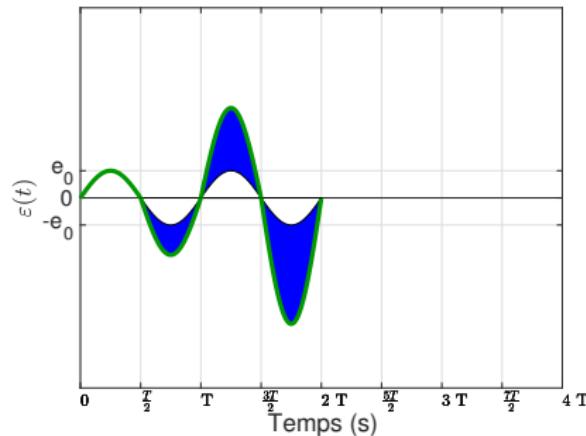
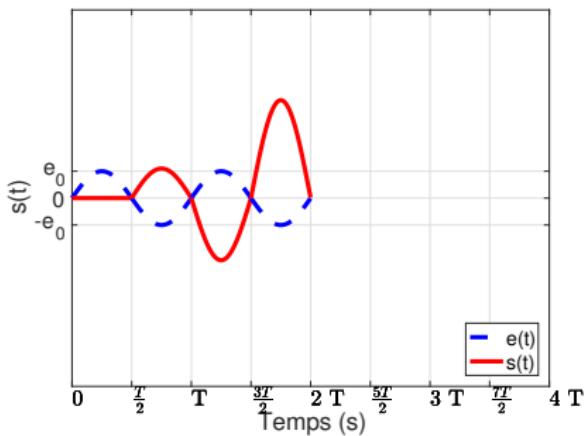


Instabilité après bouclage



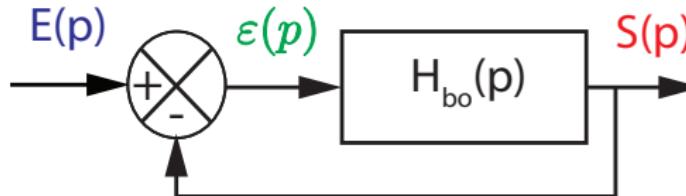
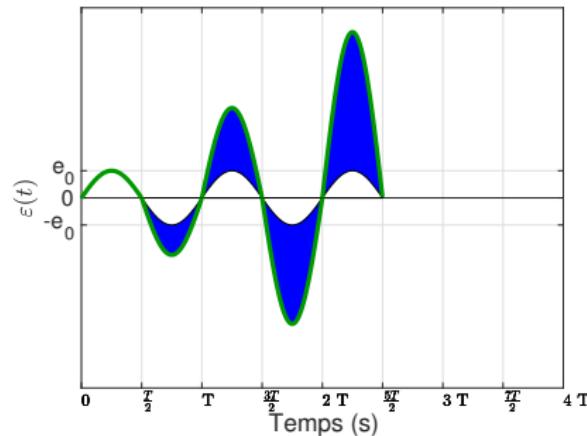
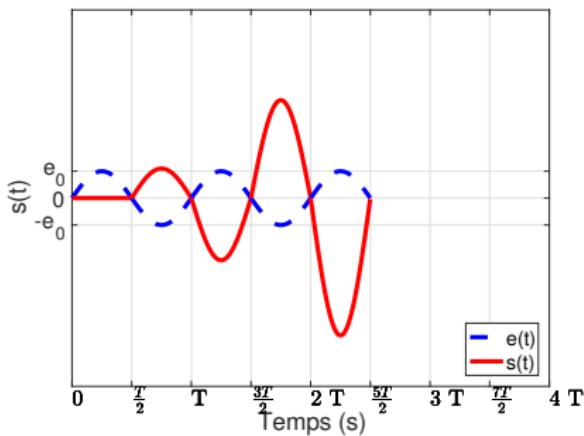


Instabilité après bouclage



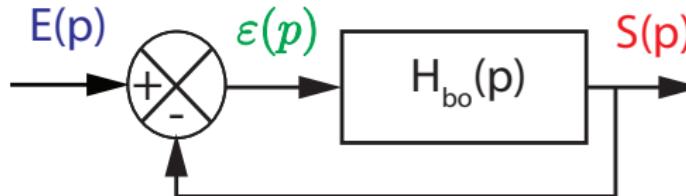
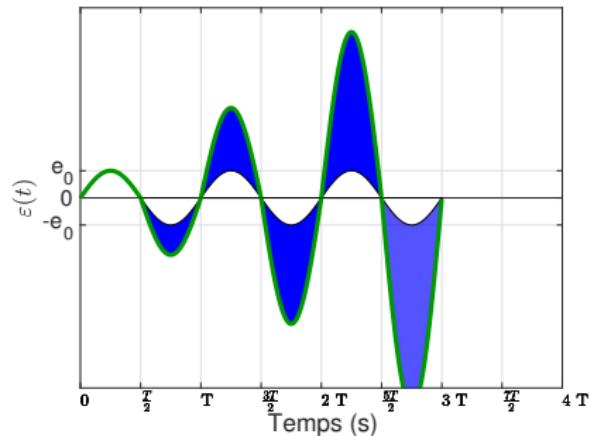
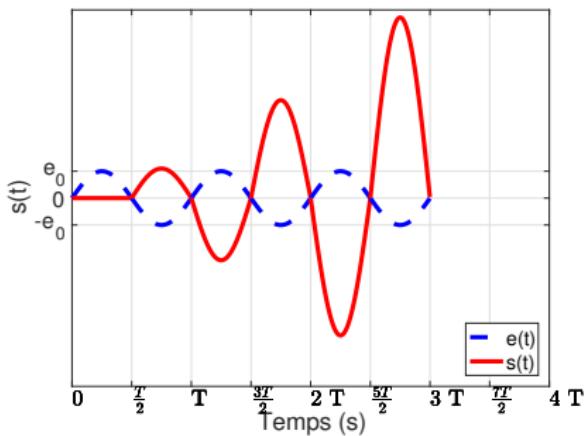


Instabilité après bouclage



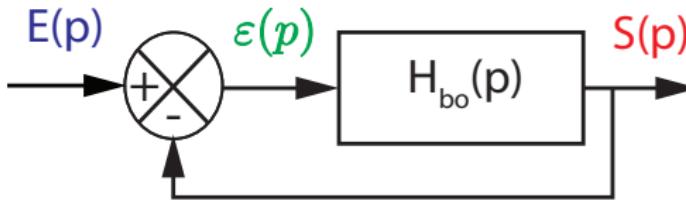
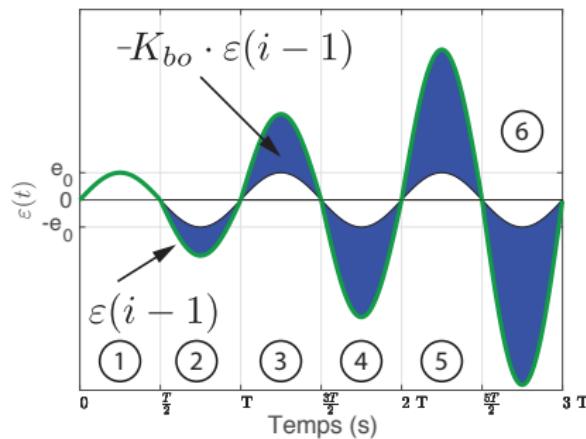
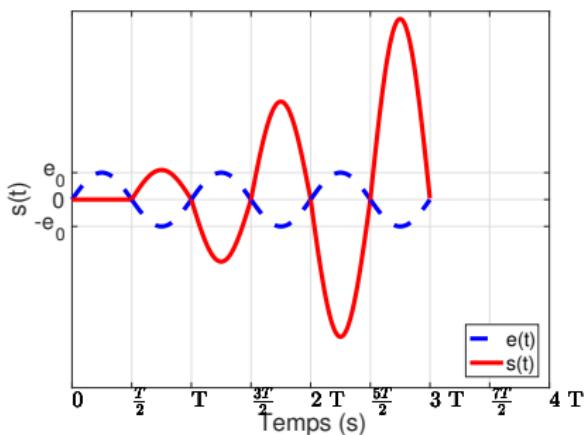


Instabilité après bouclage





Instabilité après bouclage





Plan

1 Intérêts et objectifs

- Introduction
- Classe et ordre d'une fonction de transfert
- Exemple du cours

2 Stabilité

- Définition et propriétés
- Critères de stabilité
- Marge de stabilité
- Application aux systèmes du premier et deuxième ordre



Stabilité : critère de stabilité algébrique

Soit un système linéaire, continu et invariant quelconque avec pour fonction de transfert :

$$FTBF(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Avec $D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0$

Condition nécessaire de stabilité

Pour qu'un système soit stable au sens "EBSB", il est nécessaire que les coefficients a_0, \dots, a_n du polynôme du dénominateur de sa **fonction de transfert en boucle fermée** soient tous strictement positifs



Stabilité : critère de stabilité algébrique

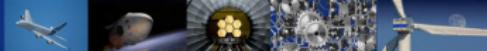
Soit un système linéaire, continu et invariant quelconque avec pour fonction de transfert :

$$FTBF(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

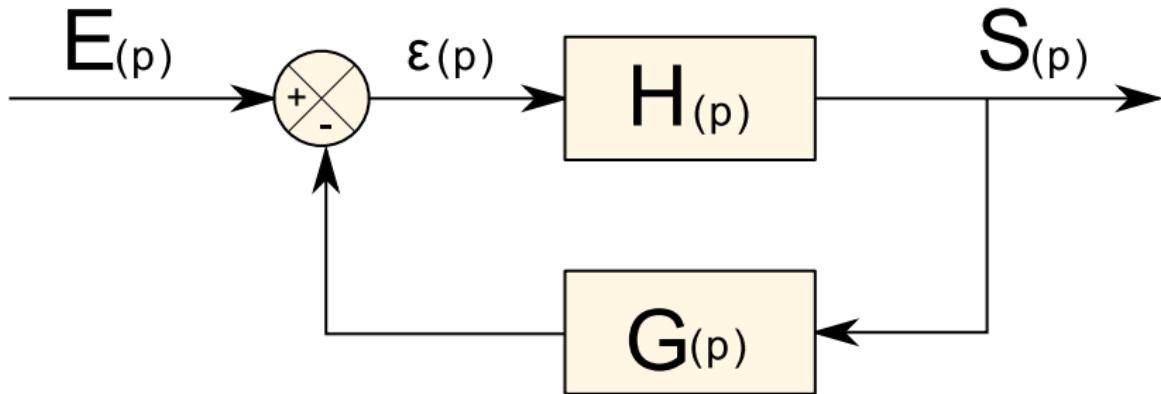
Avec $D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0$

Condition nécessaire de stabilité

Pour qu'un système soit stable au sens "EBSB", il est nécessaire que les coefficients a_0, \dots, a_n du polynôme du dénominateur de sa **fonction de transfert en boucle fermée** soient tous strictement positifs



Stabilité : critères graphiques



$$FTBF(p) = \frac{H(p)}{1 + FTBO(p)}.$$

Ainsi chercher une condition sur les pôles de la $FTBF(p)$ revient à chercher des conditions sur les zéros de $1 + FTBO(p)$ appelé **polynôme caractéristique**.

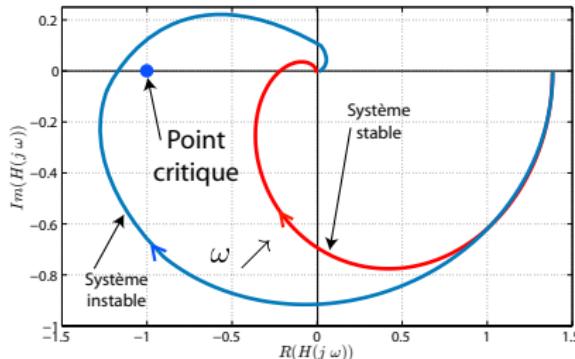
On appelle alors le **point critique**, le point qui dans le plan complexe a pour affixe -1 (module 1, argument -180°).



Stabilité : critères graphiques

Critère du revers

Un système est stable en boucle fermée si en parcourant le lieu de Nyquist de la FTBO(p), dans le sens des ω croissants, on laisse le point critique -1 sur la gauche.



Remarque

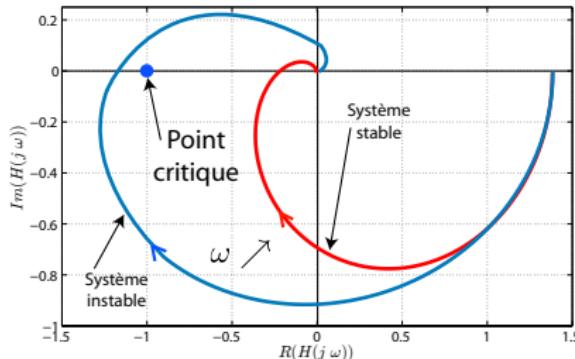
- Ce critère vaut uniquement si la FTBO(p) ne possède pas de pôle à partie réelle strictement positive.
- Si un système a son diagramme de Nyquist qui passe par le point -1 , alors cela signifie que la fonction $1 + \text{FTBO}(p)$ possède un pôle imaginaire pour réponse indiciale oscillatoire.



Stabilité : critères graphiques

Critère du revers

Un système est stable en boucle fermée si en parcourant le lieu de Nyquist de la FTBO(p), dans le sens des ω croissants, on laisse le point critique -1 sur la gauche.



Remarque

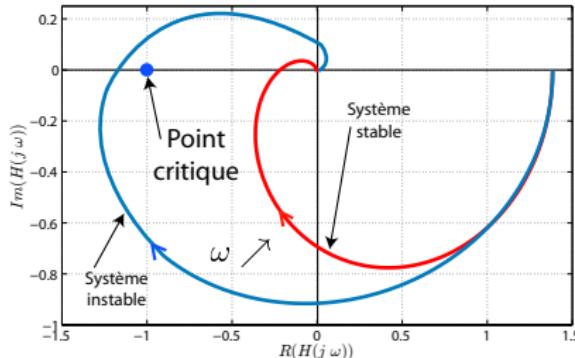
- Ce critère valable uniquement si la FTBO(p) ne possède pas de pôle à partie réelle strictement positive.
- Si un système a son diagramme de Nyquist qui passe par le point -1 , alors cela signifie que la fonction $1 + FTBO(p)$ possède un pôle imaginaire pur : réponse indicielle est oscillatoire.



Stabilité : critères graphiques

Critère du revers

Un système est stable en boucle fermée si en parcourant le lieu de Nyquist de la FTBO(p), dans le sens des ω croissants, on laisse le point critique -1 sur la gauche.



Remarque

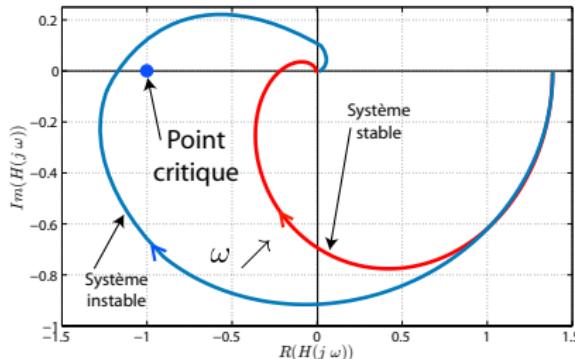
- Ce critère valable uniquement si la **FTBO(p)** ne possède pas de pôle à partie réelle strictement positive.
- Si un système a son diagramme de Nyquist qui passe par le point -1 , alors cela signifie que la fonction $1 + \text{FTBO}(p)$ possède un pôle imaginaire pur : réponse indicielle est oscillatoire.



Stabilité : critères graphiques

Critère du revers

Un système est stable en boucle fermée si en parcourant le lieu de Nyquist de la FTBO(p), dans le sens des ω croissants, on laisse le point critique -1 sur la gauche.



Remarque

- Ce critère valable uniquement si la FTBO(p) ne possède pas de pôle à partie réelle strictement positive.
- Si un système a son diagramme de Nyquist qui passe par le point -1 , alors cela signifie que la fonction $1 + FTBO(p)$ possède un pôle imaginaire pur : réponse indicielle est oscillatoire.



Critères de stabilité : diagramme de Bode

- Le point critique d'affixe -1 s'écrit $e^{-i\pi}$. Dans le diagramme de Bode en gain ce point correspond à un gain nul car $G_{dB} = 20 \log(1) = 0$. Ainsi pour laisser le point critique -1 "à gauche" sur le diagramme de Nyquist et donc avoir un système stable, il faut :
 - avoir, pour la pulsation $\omega = \omega_{\varphi 180}$ correspondant à $\arg(FTBO(j\omega)) = -180^\circ$, un gain inférieur à $0dB$ ($G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega_{\varphi 180})|) < 0dB$), ou bien
 - avoir, pour la pulsation $\omega = \omega_{c0}$ correspondant à un gain nul ($G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega)|) = 0$), un argument supérieur à -180° ($\arg(FTBO(j\omega_{c0})) > -180^\circ$).

Remarque

Dans le cas de l'égalité des deux conditions précédentes :

- $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega_{\varphi 180})|) = 0dB$
- $\arg(FTBO(j\omega_{c0})) = -180^\circ$; la fonction $1 + FTBO(s)$ possède un pôle imaginaire pur. Cela se traduit par un gain infini pour une pulsation donnée sur le diagramme de Bode. Le système est donc instable. La réponse indicielle est oscillatoire.

Critères de stabilité : diagramme de Bode

- Le point critique d'affixe -1 s'écrit $e^{-i\pi}$. Dans le diagramme de Bode en gain ce point correspond à un gain nul car $G_{dB} = 20 \log(1) = 0$. Ainsi pour laisser le point critique -1 "à gauche" sur le diagramme de Nyquist et donc avoir un système stable, il faut :
 - avoir, pour la pulsation $\omega = \omega_{\varphi 180}$ correspondant à $\arg(FTBO(j\omega)) = -180^\circ$, un gain inférieur à $0dB$ ($G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega_{\varphi 180})|) < 0dB$), ou bien
 - avoir, pour la pulsation $\omega = \omega_{c0}$ correspondant à un gain nul ($G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega)|) = 0$), un argument supérieur à -180° ($\arg(FTBO(j\omega_{c0})) > -180^\circ$).

Remarque

Dans le cas de l'égalité des deux conditions précédentes :

- $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega_{\varphi 180})|) = 0dB$
- $\arg(FTBO(j\omega_{c0})) = -180^\circ$; la fonction $1 + FTBO(s)$ possède un pôle imaginaire pur. Cela se traduit par un gain infini pour une pulsation donnée sur le diagramme de Bode. Le système est donc instable. La réponse indicielle est oscillatoire.



Critères de stabilité : diagramme de Bode

- Le point critique d'affixe -1 s'écrit $e^{-i\pi}$. Dans le diagramme de Bode en gain ce point correspond à un gain nul car $G_{dB} = 20 \log(1) = 0$. Ainsi pour laisser le point critique -1 "à gauche" sur le diagramme de Nyquist et donc avoir un système stable, il faut :
 - avoir, pour la pulsation $\omega = \omega_{\varphi 180}$ correspondant à $\arg(FTBO(j\omega)) = -180^\circ$, un gain inférieur à $0dB$ ($G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega_{\varphi 180})|) < 0dB$), ou bien
 - avoir, pour la pulsation $\omega = \omega_{c0}$ correspondant à un gain nul ($G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega)|) = 0$), un argument supérieur à -180° ($\arg(FTBO(j\omega_{c0})) > -180^\circ$).

Remarque

Dans le cas de l'égalité des deux conditions précédentes :

- $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega_{\varphi 180})|) = 0dB$
- $\arg(FTBO(j\omega_{c0})) = -180^\circ$, la fonction $1 + FTBO(s)$ possède un pôle imaginaire pur. Cela se traduit par un gain infini pour une pulsation donnée sur le diagramme de Bode. Le système est donc instable. La réponse indicielle est oscillatoire.



Critères de stabilité : diagramme de Bode

- Le point critique d'affixe -1 s'écrit $e^{-i\pi}$. Dans le diagramme de Bode en gain ce point correspond à un gain nul car $G_{dB} = 20 \log(1) = 0$. Ainsi pour laisser le point critique -1 "à gauche" sur le diagramme de Nyquist et donc avoir un système stable, il faut :
 - avoir, pour la pulsation $\omega = \omega_{\varphi 180}$ correspondant à $\arg(FTBO(j\omega)) = -180^\circ$, un gain inférieur à $0dB$ ($G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega_{\varphi 180})|) < 0dB$), ou bien
 - avoir, pour la pulsation $\omega = \omega_{c0}$ correspondant à un gain nul ($G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega)|) = 0$), un argument supérieur à -180° ($\arg(FTBO(j\omega_{c0})) > -180^\circ$).

Remarque

Dans le cas de l'égalité des deux conditions précédentes :

- $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega_{\varphi 180})|) = 0dB$
- $\arg(FTBO(j\omega_{c0})) = -180^\circ$; la fonction $1 + FTBO(p)$ possède un pôle imaginaire pur. Cela se traduit par un gain infini pour une pulsation donnée sur le diagramme de Bode. Le système est donc instable. La réponse indicielle est oscillatoire.



Critères de stabilité : diagramme de Bode

- Le point critique d'affixe -1 s'écrit $e^{-i\pi}$. Dans le diagramme de Bode en gain ce point correspond à un gain nul car $G_{dB} = 20 \log(1) = 0$. Ainsi pour laisser le point critique -1 "à gauche" sur le diagramme de Nyquist et donc avoir un système stable, il faut :
 - avoir, pour la pulsation $\omega = \omega_{\varphi 180}$ correspondant à $\arg(FTBO(j\omega)) = -180^\circ$, un gain inférieur à $0dB$ ($G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega_{\varphi 180})|) < 0dB$), ou bien
 - avoir, pour la pulsation $\omega = \omega_{c0}$ correspondant à un gain nul ($G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega)|) = 0$), un argument supérieur à -180° ($\arg(FTBO(j\omega_{c0})) > -180^\circ$).

Remarque

Dans le cas de l'égalité des deux conditions précédentes :

- $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega_{\varphi 180})|) = 0dB$
- $\arg(FTBO(j\omega_{c0})) = -180^\circ$; la fonction $1 + FTBO(p)$ possède un pôle imaginaire pur. Cela se traduit par un gain infini pour une pulsation donnée sur le diagramme de Bode. Le système est donc instable. La réponse indicielle est oscillatoire.

Critères de stabilité : diagramme de Bode

- Le point critique d'affixe -1 s'écrit $e^{-i\pi}$. Dans le diagramme de Bode en gain ce point correspond à un gain nul car $G_{dB} = 20 \log(1) = 0$. Ainsi pour laisser le point critique -1 "à gauche" sur le diagramme de Nyquist et donc avoir un système stable, il faut :
 - avoir, pour la pulsation $\omega = \omega_{\varphi 180}$ correspondant à $\arg(FTBO(j\omega)) = -180^\circ$, un gain inférieur à $0dB$ ($G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega_{\varphi 180})|) < 0dB$), ou bien
 - avoir, pour la pulsation $\omega = \omega_{c0}$ correspondant à un gain nul ($G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega)|) = 0$), un argument supérieur à -180° ($\arg(FTBO(j\omega_{c0})) > -180^\circ$).

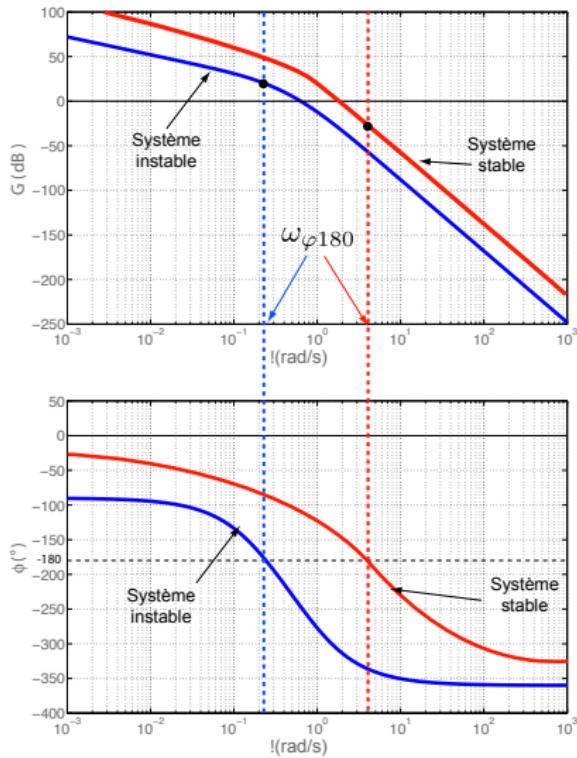
Remarque

Dans le cas de l'égalité des deux conditions précédentes :

- $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega_{\varphi 180})|) = 0dB$
- $\arg(FTBO(j\omega_{c0})) = -180^\circ$; la fonction $1 + FTBO(p)$ possède **un pôle imaginaire pur**. Cela se traduit par un **gain infini pour une pulsation donnée** sur le diagramme de Bode. Le système est donc instable. La **réponse indicielle est oscillatoire**.

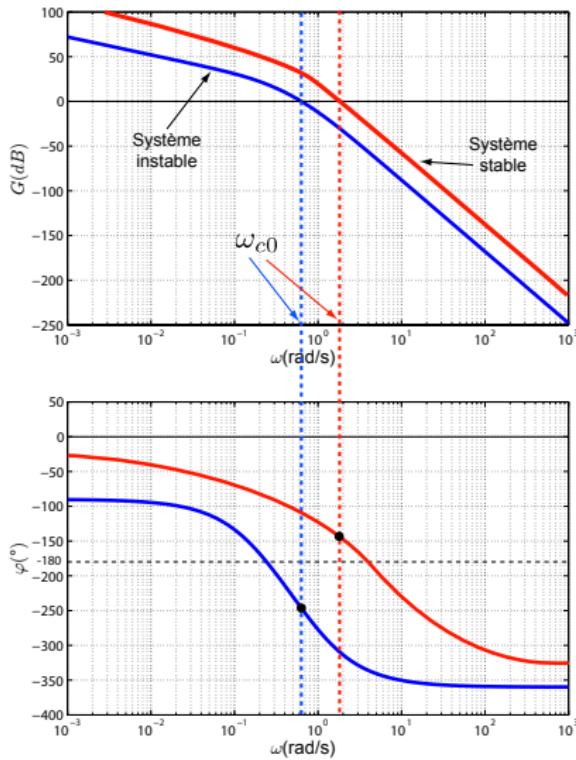


Critères de stabilité : diagramme de Bode





Critères de stabilité : diagramme de Bode





Critères de stabilité graphique

Robot Lola

Q 6 : Expliquer pourquoi le critère du revers ne peut pas être appliqué pour étudier la stabilité en boucle fermée.



Critères de stabilité graphique

Robot Lola

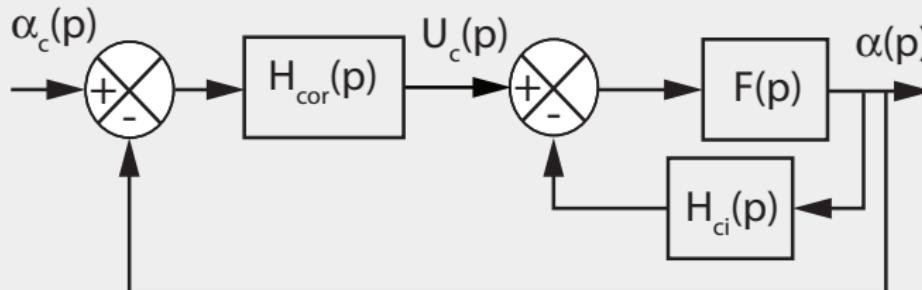
Q 6 : Expliquer pourquoi le critère du revers ne peut pas être appliqué pour étudier la stabilité en boucle fermée.

La fonction de transfert en BO a un pôle à partie réelle positive. Le système est donc instable en BO. Le critère du Revers stipule que le système en BO ne doit pas comporter de pôle à partie réelle strictement positive pour qu'il ait un sens. Ce critère n'est donc pas adapté pour vérifier la stabilité du système en BF.

Critères de stabilité graphique

Robot Lola

Afin de résoudre ce problème, il est décidé d'asservir la chaîne directe en position et en vitesse. Pour cela, la centrale inertie permet de mesurer l'angle de tangage $\alpha(t)$ ainsi que la vitesse angulaire $\frac{d\alpha(t)}{dt}$. L'asservissement ainsi réalisé est présenté sous la forme du schéma-bloc ci-dessous. $U_c(p)$ est la tension de commande en sortie du correcteur. La fonction de transfert de la centrale inertie sera prise égale à $H_{ci}(p) = K_1 \cdot (p + 1)$.





Critères de stabilité graphique

Robot Lola

Q 7 : Déterminer deux conditions sur K_1 pour que la fonction de transfert en boucle ouverte non-corrigée $F_{BO}(p) = \frac{\alpha(p)}{U_c(p)}$ soit stable. En déduire la valeur minimale de K_1

Critères de stabilité graphique

Robot Lola

Q 7 : Déterminer deux conditions sur K_1 pour que la fonction de transfert en boucle ouverte non-corrigée $F_{BO}(p) = \frac{\alpha(p)}{U_c(p)}$ soit stable. En déduire la valeur minimale de K_1

$$\begin{aligned} F_{BO}(p) &= \frac{\alpha(p)}{U_c(p)} = \frac{F(p)}{1 + F(p)H_{ci}(p)} = \frac{\frac{K}{(1+\tau_1 \cdot p)(-1+\tau_1 \cdot p)}}{1 + \frac{K \cdot K_1 \cdot (p+1)}{(1+\tau_1 \cdot p)(-1+\tau_1 \cdot p)}} \\ &= \frac{K}{K \cdot K_1 \cdot (p+1) + (1 + \tau_1 \cdot p)(-1 + \tau_1 \cdot p)} = \frac{K}{K \cdot K_1 - 1 + K \cdot K_1 \cdot p + \tau_1^2 \cdot p^2} \end{aligned}$$



Critères de stabilité graphique

Robot Lola

Q 7 : Déterminer deux conditions sur K_1 pour que la fonction de transfert en boucle ouverte non-corrigée $F_{BO}(p) = \frac{\alpha(p)}{U_c(p)}$ soit stable. En déduire la valeur minimale de K_1



Critères de stabilité graphique

Robot Lola

Q 7 : Déterminer deux conditions sur K_1 pour que la fonction de transfert en boucle ouverte non-corrigée $F_{BO}(p) = \frac{\alpha(p)}{U_c(p)}$ soit stable. En déduire la valeur minimale de K_1

Pour vérifier la condition nécessaire de stabilité, à savoir que tous les coefficients du dénominateur soit du même signe, sachant que $K > 0$:

Il faut donc : $K_1 > \frac{1}{K}$.



Plan

1 Intérêts et objectifs

- Introduction
- Classe et ordre d'une fonction de transfert
- Exemple du cours

2 Stabilité

- Définition et propriétés
- Critères de stabilité
- Marge de stabilité
- Application aux systèmes du premier et deuxième ordre



Critères de stabilité : diagramme de Bode

Marge de gain

La marge de gain (ΔG ou MG_{dB}) se définit par :

$$\Delta G = -20 \log (|FTBO(j \omega_{\varphi 180})|). \quad (3)$$

avec $\omega_{\varphi 180}$, la pulsation correspondant à $\arg(FTBO(j \omega)) = -180^\circ$.

Marge de phase

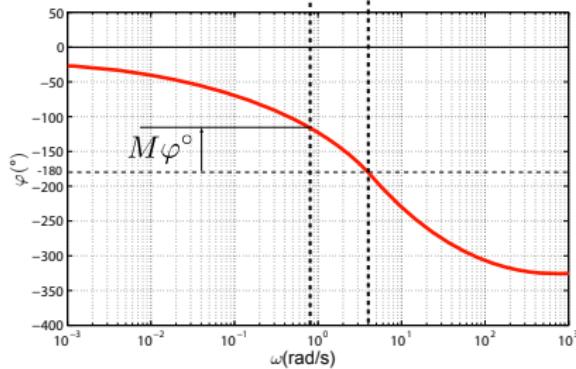
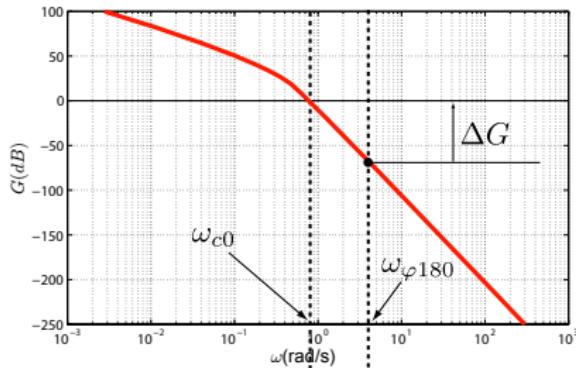
La marge de phase ($M\varphi^\circ$) se définit par :

$$M\varphi^\circ = 180 + \arg(FTBO(j \omega_{c0})). \quad (4)$$

avec ω_{c0} , la pulsation correspondant à $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j \omega)|) = 0$ ou $|FTBO(j \omega_{c0})| = 1$.



Interprétation dans le plan de Bode





Plan

1 Intérêts et objectifs

- Introduction
- Classe et ordre d'une fonction de transfert
- Exemple du cours

2 Stabilité

- Définition et propriétés
- Critères de stabilité
- Marge de stabilité
- Application aux systèmes du premier et deuxième ordre

Stabilité : application aux systèmes du premier et deuxième ordre

Stabilité des systèmes du premier et deuxième ordre

Ces systèmes sont inconditionnellement stables.

(5)

