



LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON
SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR
CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.
ANNÉE 2021 - 2022

C1 : PERFORMANCES STATIQUES ET CINÉMATIQUES DES SYSTÈMES COMPOSÉS DE CHAÎNE DE SOLIDES

TD 19 - Modélisation des actions mécaniques (C9-1)

17 Mai 2022

Compétences

- **Modéslier**
 - Modéliser une action mécanique.
 - Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.
- **Résoudre**
 - Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.
 - Déterminer les actions mécaniques en statique.
- **Communiquer**
 - Lire et décoder un document technique : Schéma Cinématique
 - Utiliser un vocabulaire technique, des symboles et des unités adéquats.

Exercice 1 :

1 Stabilité mécanique du robot ROMEO

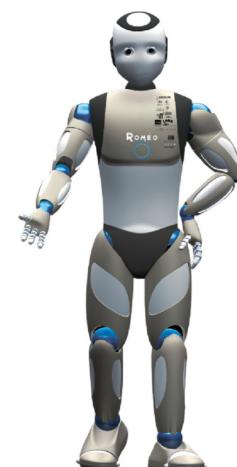
a) Présentation

Roméo est un robot humanoïde d'assistance à la personne en perte d'autonomie. Il est capable d'intervenir sur les objets du quotidien (ouvrir et fermer une porte, manipuler un verre, une bouteille, un trousseau de clés...). Il peut également aider une personne à se déplacer à domicile et lui porter secours en cas de chute.

Au-delà de ses capacités physiques, Roméo offre une interface homme-machine très intuitive : la voix et les gestes sont les principaux moyens de communication avec le robot qui est capable de comprendre ce qu'on lui dit, d'entretenir un court dialogue et même de percevoir les intentions et les émotions de son interlocuteur pour en déduire les actions qu'il doit mettre en oeuvre.

Le cahier des charges est modélisé à l'aide du diagramme des exigences partiels donné sur la figure 1.

Vérifier le critère de non basculement du robot : supporter l'effort vertical exercé par la personne qui veut se lever d'un siège (effort maximal < 100 N).



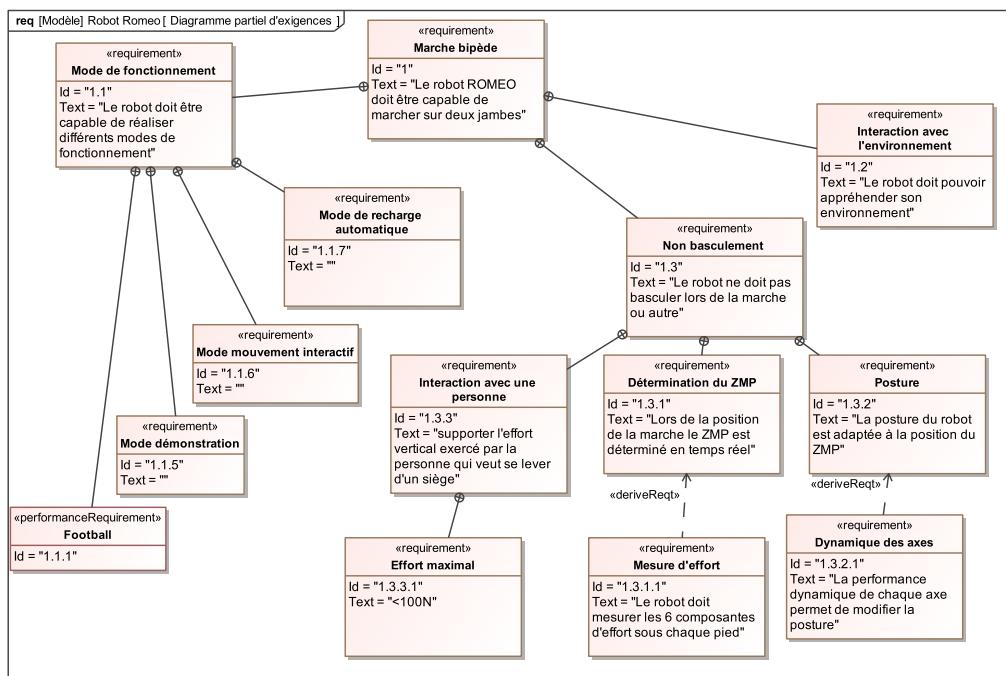


FIGURE 1 – Diagramme des exigences partiel du robot ROMEO

Description structurelle Le robot Roméo mesure 1,43 m. Cette petite taille permet de limiter son poids à environ 40 kg (batteries incluses) et donc d'être moins dangereux pour ses propres articulations et pour les personnes qui l'entourent. Ses proportions sont similaires à un individu de corpulence moyenne.

Concernant sa motricité, il est doté de :

- 4 actionneurs au niveau du cou,
- 6 actionneurs dans chaque jambe,
- 7 actionneurs dans chaque bras,
- 1 articulation élastique passive sur chaque pied.

Au total, Roméo est composé de 32 moteurs à courant continu, répartis dans 4 catégories de puissances différentes (11 W, 20 W, 60 W, 150 W).

Ses yeux sont aussi motorisés afin de modifier leurs orientations et ainsi augmenter leur champ visuel.

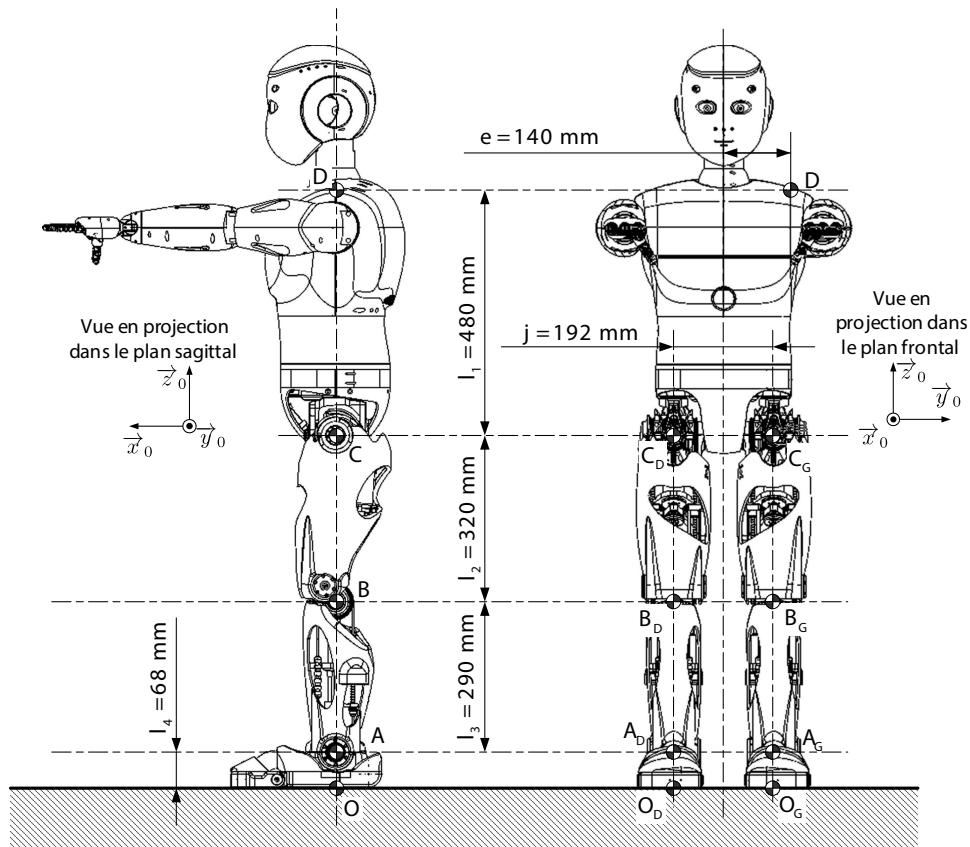


FIGURE 2 – Paramétrage dimensionnel du robot

Scénario d'assistance L'étude suivante concerne le robot dans une phase d'assistance spécifique consistant à aider une personne à se lever de sa chaise. Le protocole se décompose en ces termes :

Appel vocal ou électronique du robot	Roméo se rapproche et se positionne correctement pour aider la personne	Roméo adapte la hauteur de son épaule grâce à une génuflexion
La personne pose une main sur l'épaule de Roméo pour s'aider de cet appui	Roméo contrôle ses articulations pour assurer son équilibre tout en soutenant l'effort de la personne	

b) Validation du critère de non basculement

Objectif 1 :

On souhaite ici vérifier le critère de l'exigence 1.3.3 (figure 1) de non basculement du robot dans le cas d'une interaction avec un personne.

La personne qui désire se lever est initialement en position assise. Elle positionne sa main droite ou sa main gauche sur l'épaule du robot (0,9 à 1,1 m de haut) puis exerce un effort vertical sur celle-ci afin d'aider ses membres inférieurs.

Il est important de vérifier que le robot peut réaliser le scénario proposé en s'assurant qu'il ne basculera pas suite à l'appui de la personne sur l'épaule.

Dans cette étude statique, toutes les articulations sont supposées bloquées : les moteurs fournissent les couples de maintien nécessaires.

Le modèle simplifié plan (projection dans le plan frontal) ci-contre est proposé pour l'étude. Le robot (ensemble (E)) est en équilibre en genouflexion, les deux pieds en appui sur le sol.

Les liaisons pieds/sol sont modélisées par deux liaisons ponctuelles aux points O_D et O_G (Droit et Gauche).

L'effort de la personne sur le robot est modélisé par une force verticale $\vec{F} = -F \cdot \vec{z}_0$ appliquée au point D situé sur l'épaule : $\overrightarrow{OD} \cdot \vec{y}_0 = e = 140 \text{ mm}$

La gravité exerce une force verticale $\vec{P} = -Mg \cdot \vec{z}_0$ appliquée au centre de masse G du robot.

Le point O est situé à égale distance des deux pieds :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OG} = d \cdot \vec{y}_0$$

Notation : Pour la suite de l'étude, le torseur modélisant les actions transmissibles du solide i sur le solide j par la liaison de centre n , exprimé dans le repère $R_k(\vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ et au point A s'écrit :

$$\{\mathcal{T}_{i \rightarrow j}^n\} = \begin{Bmatrix} X_{ij}^n & L_{ij}^n \\ Y_{ij}^n & M_{ij}^n \\ Z_{ij}^n & N_{ij}^n \end{Bmatrix}_b$$

ou

$$\{\mathcal{T}_{i \rightarrow j}^n\} = \begin{Bmatrix} X_{ij}^n \vec{x}_k + Y_{ij}^n \vec{y}_k + Z_{ij}^n \vec{z}_k \\ L_{ij}^n \vec{x}_k + M_{ij}^n \vec{y}_k + N_{ij}^n \vec{z}_k \end{Bmatrix}_k$$

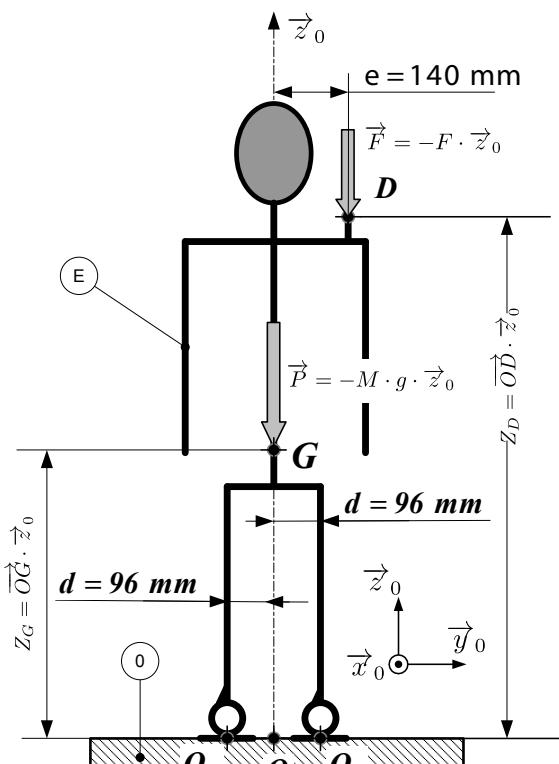


FIGURE 3 – Paramétrage du problème

Q 1 : Écrire les expressions de tous les torseurs des actions mécaniques extérieures appliquées au robot (E) ainsi modélisé et isolé.

Q 2 : Exprimer tous ces torseurs en O_D .

L'équilibre du robot se traduit par les deux équations scalaires suivantes :

$$\begin{cases} \sum \vec{R}_{ext \rightarrow E} \cdot \vec{z}_0 = 0 \\ \sum \vec{M}_{O_D}(ext \rightarrow E) \cdot \vec{x}_0 = 0 \end{cases}$$

Q 3 : Traduire ces deux équations et en déduire les expression de $Z_{01}^{O_D}$ et $Z_{01}^{O_G}$.

Q 4 : Déterminer les expressions des composantes des deux torseurs des actions mécaniques du sol (0) sur chacun des pieds en fonction F , M , g , d et e , lorsqu'ils sont exprimés aux points O_G et O_D .

Pour vérifier le respect du critère de non basculement du robot, il faut que les contacts en O_G et O_D respectent toujours la contrainte d'unilatéralité : le sol ne peut exercer qu'un effort de réaction vertical ascendant sous chacun des pieds.

Q 5 : Écrire les deux inégalités qui découlent du respect de ce critère.

Données	Données géométriques
Masse du robot Roméo : $M = 40,5 \text{ kg}$	$d = 96 \text{ mm}$
Accélération de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$	$e = 140 \text{ mm}$

Q 6 : Déterminer l'effort maximal qui peut être exercé sur le robot au point D, tout en assurant la condition de non basculement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

c) **Stabilité du robot : modélisation des actions mécaniques transmissibles au niveau du contact pied/sol**

💡 Objectif 2 :

L'objectif de cette partie est de trouver à quelle condition le maintien du contact sur le sol est possible lorsque le robot marche (Exigence 1.3.1 de la figure 1). On passera par la détermination du ZMP ^a

a. Zero Moment Point (ZMP) : de l'anglais « point de moment nul ».

Par définition, le robot humanoïde bipède s'appuie sur ses deux jambes. Comme tout système de solides en équilibre statique, ROMEO est à l'équilibre si la projection de son centre de gravité sur le sol est contenu dans le polygone de sustentation qui est tracé en rouge autour de ses deux pieds sur la figure 4. Lorsque le robot marche, il y a une phase où il n'est en appui que sur un seul pied. Dans ce cas, le polygone de sustentation est réduit à un seul pied.

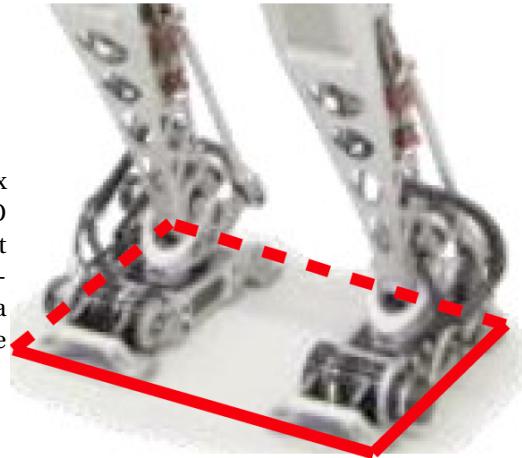


FIGURE 4 – polygone de sustentation sur deux pieds

Le contact du pied sur le sol est modélisé sans frottement par la figure 5

Hypothèses :

- Sous la semelle du robot, la pression de contact avec le sol est supposée répartie de manière uniforme transversalement (suivant la direction \vec{x}_0).
- Sa longueur vaut L soit : $\overrightarrow{O_S C_S} = L \cdot \vec{y}_0$.
- Le plan $(O_S, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est plan de symétrie.
- En chaque point M (d'ordonnée y) de ces segments, la densité d'efforts de contact est $p(M) \vec{z}_0$, avec $p(M)$ en $N \cdot m^{-2}$.
- Ainsi $p(M)$ ne dépend pas de x .
- On notera que si le robot n'est pas équipé de semelles magnétiques ou adhésives, on a $p(M) > 0$.
- Ainsi, en notant b la largeur de la semelle suivant \vec{x}_0 et $\Sigma = [O_S; A_S] \cup [B_S; C_S]$.

Q 7 : Montrer que le modèle global d'action mécanique de contact du sol sur le pied peut être donné par le torseur :

$$\left\{ \mathcal{T}_{(sol \rightarrow pied)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{(sol \rightarrow pied)}} = b \cdot \int_{P \in \Sigma} p(M) \cdot \vec{z}_0 dy \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{O_S(sol \rightarrow pied)}} = b \cdot \int_{P \in \Sigma} y \cdot p(M) \cdot \vec{x}_0 dy \end{array} \right\}$$

Q 8 : Montrer que $\left\{ \mathcal{T}_{(sol \rightarrow pied)} \right\}$ est un glisseur.

Soit H_S le point de la droite (O_S, \vec{y}_0) tel que $\overrightarrow{M(H_S, sol \rightarrow pied)} = \vec{0}$, on notera $\overrightarrow{O_S H_S} = Y_{HS} \cdot \vec{y}_0$.

Ce point est fondamental en robotique humanoïde, il prend le nom de Zero Moment Point (ZMP) : de l'anglais « point de moment nul ».

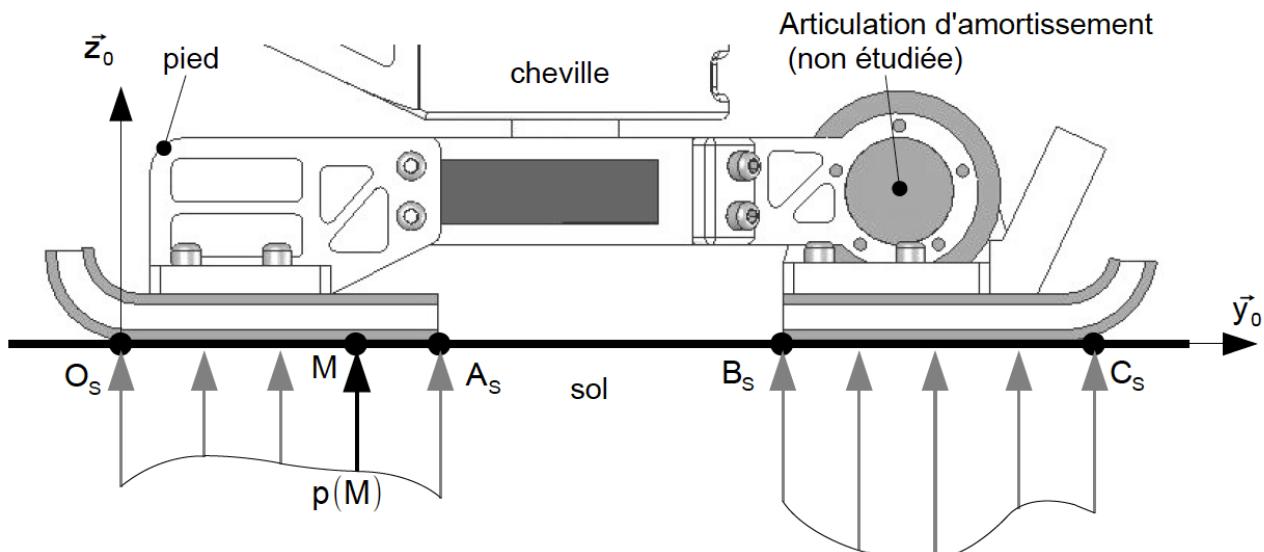


FIGURE 5 – Modélisation du contact entre le pied et le sol

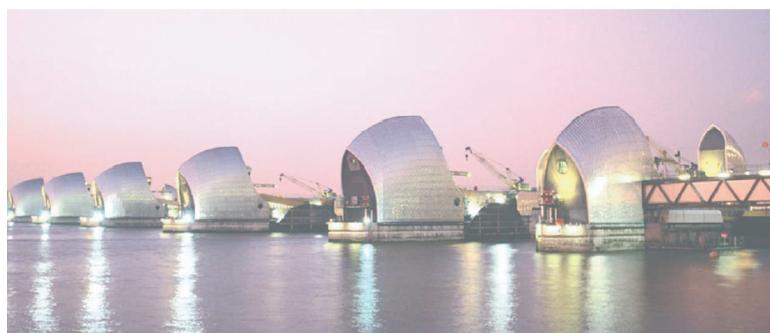
Q 9 : Montrer que $H_S \in [O_S; C_S]$, c'est à-dire qu'il est situé sous le pied du robot. On pourra pour cela étudier le signe des vecteurs $\overrightarrow{O_S H_S}$ et $\overrightarrow{C_S H_S}$.

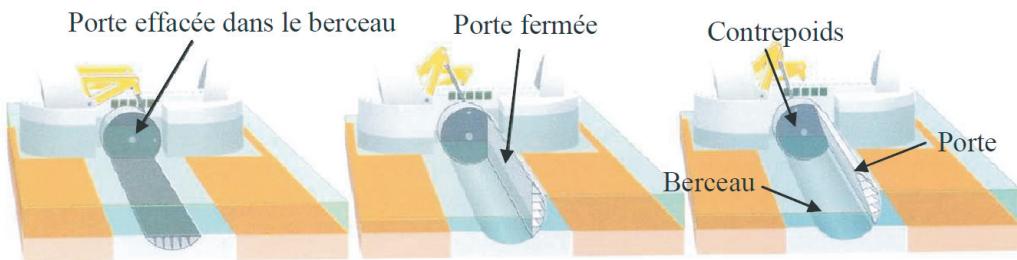
Q 10 : Donner la forme du torseur $\{\mathcal{T}_{(sol \rightarrow pied)}\}$ dans le cas d'un contact avec frottement dans le plan sagittal (c'est-à-dire que la densité d'efforts de contact est $p(M) \cdot \vec{z}_0 + t(M) \cdot \vec{y}_0$). Montrer que les résultats des questions précédentes sont inchangés.

Exercice 2 : Barrage sur la Thames

Source : Florestan Mathurin

Le Thames Barrier est un barrage spectaculaire conçu pour protéger la ville de Londres des fortes marées qui peuvent remonter de la mer du nord. Sa construction s'est achevée en 1982 et a nécessité 51000 tonnes d'acier et 210000 m³, ce qui en fait le 2^{ème} barrage mobile le plus grand du monde. La structure s'étend sur 520 mètres de large et est constituée de 10 portes en forme de secteur angulaire de 20 mètres de haut. Chaque porte est totalement effacée dans un berceau de béton coulé au fond de la rivière. En cas de montée des eaux, les portes pivotent en position verticale actionnées par une machinerie hydraulique.

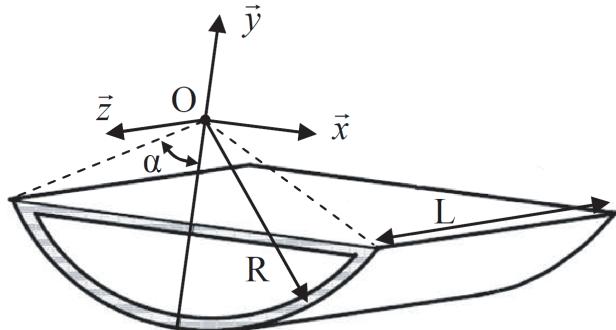




L'objectif est de déterminer la position du centre de gravité de la porte qui est une structure creuse en tôle épaisse et dont on donne le modèle ci-contre.

Données :

- Longueur porte : $L = 58m$
- Rayon : $R = 12,4m$
- Épaisseur tôle : $e = 0,05 m$ (considéré négligeable de R)
- Masse volumique porte : $\rho = 7700 \text{ km/m}^3$ et $\alpha = \pi/3$.



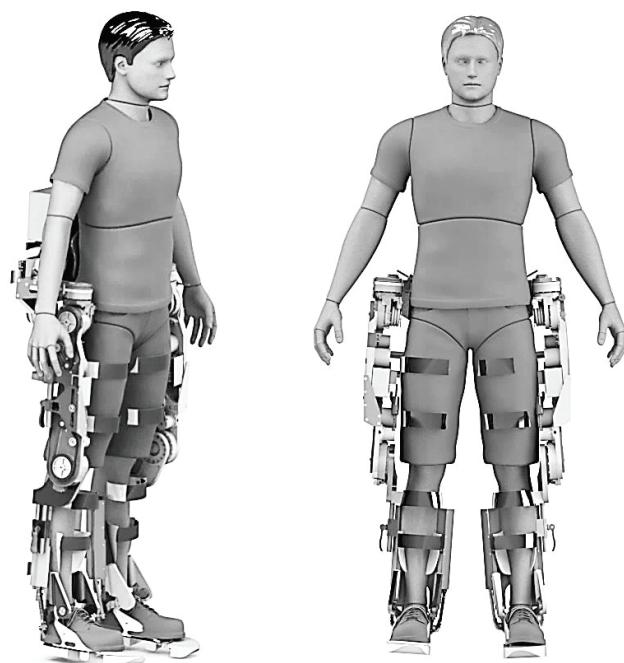
Q 11 : Déterminer les coordonnées du centre de gravité de la porte.

Exercice 3 :

1 Exosquelette ATALANTE

a) Présentation du sujet

Les mains sont indispensables dans la plupart de nos actions quotidiennes qui restent donc, actuellement, irréalisables pour les utilisateurs de fauteuil roulant. Fort de ce constat, l'entreprise Wandercraft a développé l'exosquelette Atalante pour offrir la possibilité à ses utilisateurs de se lever, s'asseoir, marcher dans toutes les directions et de monter quelques marches en toute autonomie et sans l'aide des mains.



Les exigences principales associées à la conception de l'exosquelette *Atalante* sont données figure 6. Seules les exigences 1.1 (compatibilité) et 1.3 (mouvement) seront étudiées dans ce sujet. Le détail de leurs sous exigences est

donné en annexe 1.

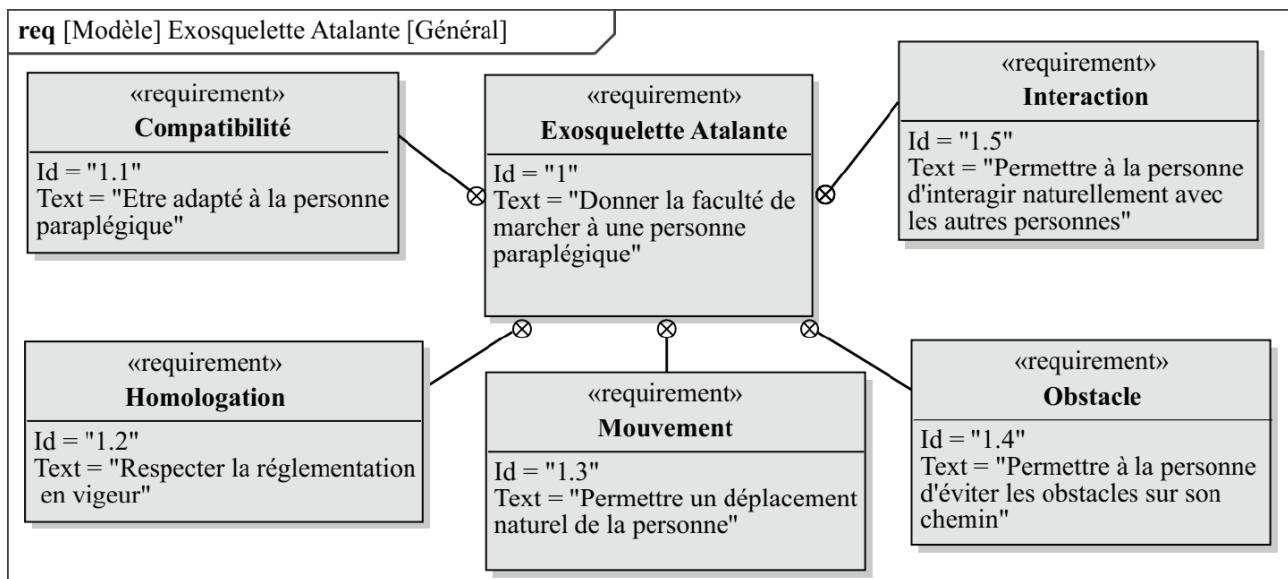


FIGURE 6 – exigences principales associées à l'exosquelette Atalante.

Objectif 3 :

L'objectif de cette partie est de vérifier que la conception de l'exosquelette permet de garantir sa compatibilité avec l'usager (exigence 1.1 de la Figure 6).

Pour réaliser cette étude, un modèle cinématique simplifié de l'exosquelette est proposé Figure 7. Chaque jambe est composée trois solides : le fémur (2) ou (2'), le tibia (3) ou (3') et le pied (4) ou (4'). Ces solides sont reliés par des liaisons pivots situées au genou (point B) et à la cheville (point C). Le bassin (1) est également en liaison pivot à la hanche (point A) avec le fémur (2) ou (2'). Le point I représente la position théorique du nombril de l'usager.

b) Force maximale à exercer pour effectuer le réglage

Objectif 4 :

S'assurer que l'exigence 1.1.1.2.1 du cahier des charges soit respectée. Ainsi, la force exercée par l'utilisateur pour régler les dimensions de l'exosquelette ne doit pas dépasser 150 N.

Pour des raisons de sécurité, le réglage des dimensions de l'exosquelette est réalisé en position assise (Figure 8). C'est une tierce personne (différente de la personne tétraplégique) qui vient successivement régler puis verrouiller les différentes dimensions de l'exosquelette. Le réglage le plus critique est celui des dimensions du fémur (solides (2.1) et (2.2) de la figure ??). Il se fait avec celui du tibia (solides (3.1) et (3.2)) en position déverrouillée. Pour simplifier l'étude, on considérera que :

- le bassin (1), la partie supérieure du fémur (2.2) et le pied (4) sont fixes par rapport à la chaise (ou le sol) noté (0),
- le jeu dans la liaison (déverrouillée) entre les solides (3.1) et (3.2) étant important on pourra considérer qu'il n'y a pas de contact entre ces deux solides,
- seuls les frottements dans la liaison entre les solides (2.1) et (2.2) sont pris en compte,
- le problème est plan de normale \vec{z} .

La liaison entre le bâti (0) et le fémur (1) est la liaison pivot-glissante étudiée par ailleurs entre les solides (1) et (2).

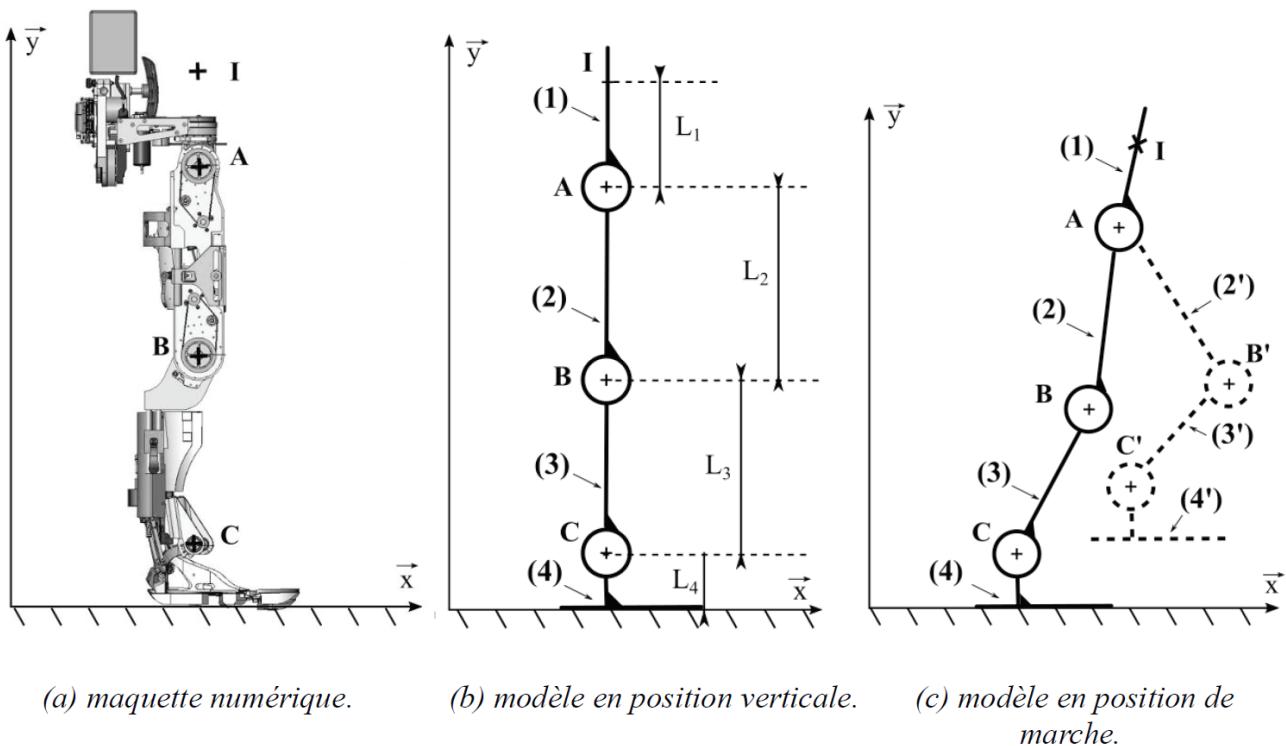


FIGURE 7 – modèle cinématique de l'exosquelette.

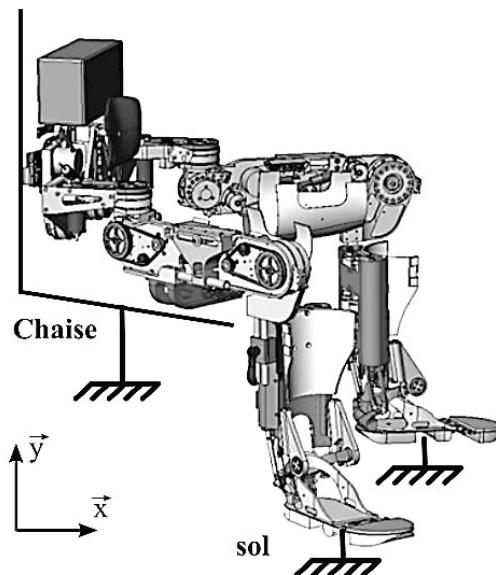


FIGURE 8 – Position de l'exosquelette lors de la phase de réglage de ses dimensions.

Le contact cylindre-cylindre modélisé par la liaison pivot-glissant en J admet un jeu radial. Ce jeu est présenté sur la figure 10. Pour le prendre en compte, une modélisation cinématique du mécanisme est proposée à la figure 11.

- L'action mécanique extérieure exercée sur la partie inférieure du fémur (1) pour effectuer le réglage est définie ci-dessous :

$$\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{c} F_x \\ 0 \end{array} \right\}_B$$

- L'action mécanique de la partie supérieure du tibia (1) sur le fémur (2) est donnée par :

$$\{ \mathcal{T}_{1-2} \}_B = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ m_{32} \cdot g & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_b$$

Les différents paramètres du modèle sont donnés dans le tableau de la figure 9. On cherche à déterminer l'effort F

Solide	Paramètres géométriques	Masses et inertie
Sol (0) + chaise + partie supérieure du fémur + bassin + pied		
Partie inférieure du fémur (2.1) notée (1)		Masse du fémur : $m_{21} = 6,4 \text{ kg}$ Le centre de gravité du solide (2.1) est assimilé au point B.
Partie supérieure du tibia (3.2) notée (2)	$\overrightarrow{BG_{32}} = -L_3 \vec{y}$ avec $L_3 = 280 \text{ mm}$	Masse partie haute du tibia : $m_{32} = 4,2 \text{ kg}$. Le centre de gravité du solide (3.2) est noté G_{32} .

FIGURE 9 – Paramètres du modèle

à exercer pour effectuer le réglage.

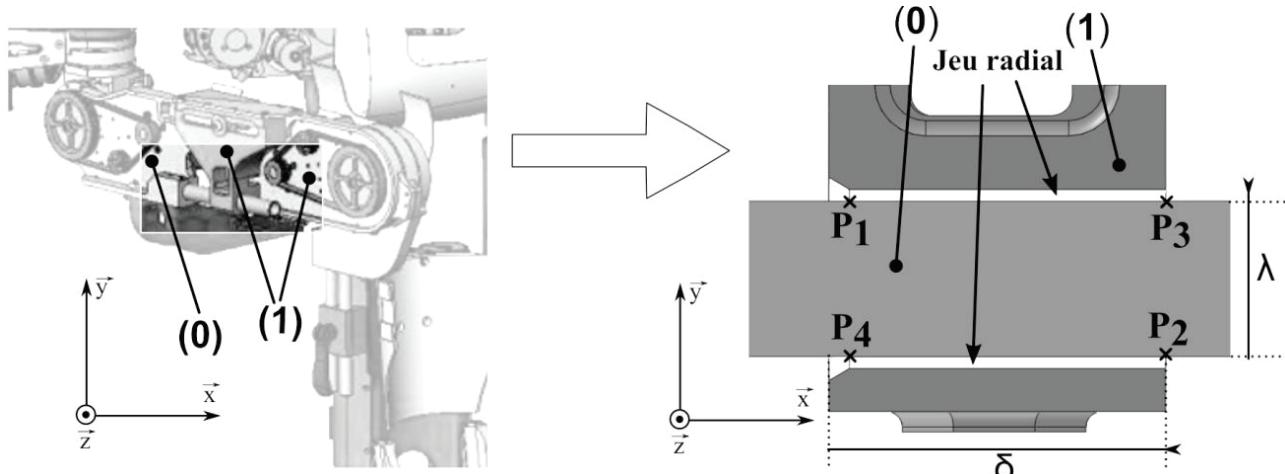


FIGURE 10 – détail du contact cylindre-cylindre entre le fémur supérieur (0) et le fémur inférieur (1).

Q 12 : À partir de la figure 10, justifier le nouveau modèle de liaison entre le bâti (0) et fémur (1) proposé figure 11.

On note : $\overrightarrow{BP_2} = -\mu \vec{x}$ et $\overrightarrow{P_1P_2} = \delta \vec{x}$ (l'influence de la longueur λ est négligée). Soit $f = 0,33$ le coefficient de frottement entre le bâti (0) et la partie inférieure du fémur (1).

On donne $\mu = 150 \text{ mm}$.

Q 13 : On se place à la limite du glissement. À partir du modèle donné figure 11, déterminer la valeur absolue de la force F en fonction de f , m_{21} , m_{32} , δ et μ . La méthode et les théorèmes utilisés seront explicités.

Q 14 : Le phénomène d'arc-boutement apparaît-il avec le modèle de la figure 11 ? Justifier.

Quelles hypothèses simplificatrices pourraient remettre en cause cette réponse ?

Expliquer en quoi ce phénomène serait un problème pour le réglage dimensionnel de l'exosquelette.

Q 15 : Déterminer l'expression de δ , la longueur du contact cylindre-cylindre, qui permet de respecter le cahier des charges. Faire l'application numérique.

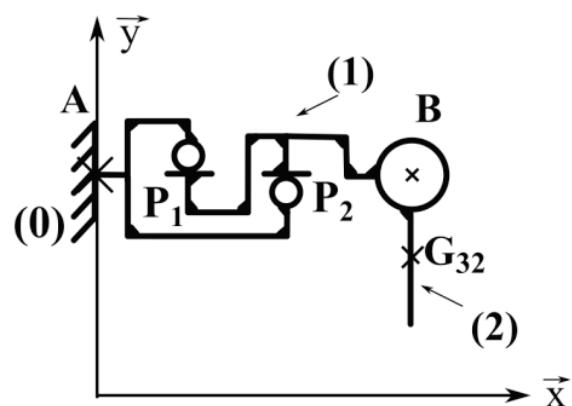


FIGURE 11 – nouveau modèle cinématique de l'exosquelette lors du réglage de la longueur du fémur.

Annexes

Annexe 1

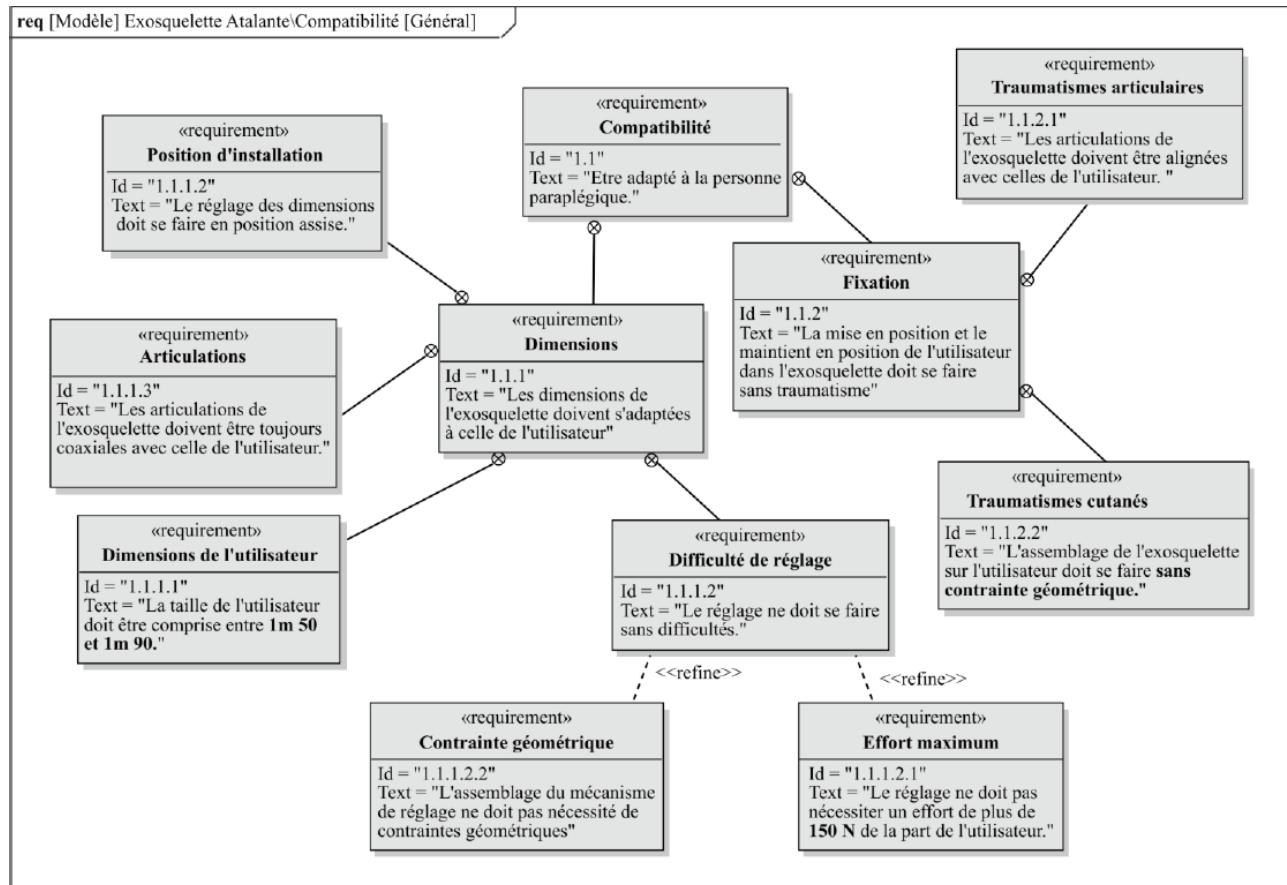


FIGURE 12 – sous exigences associées à la compatibilité de l'exosquelette avec l'utilisateur.

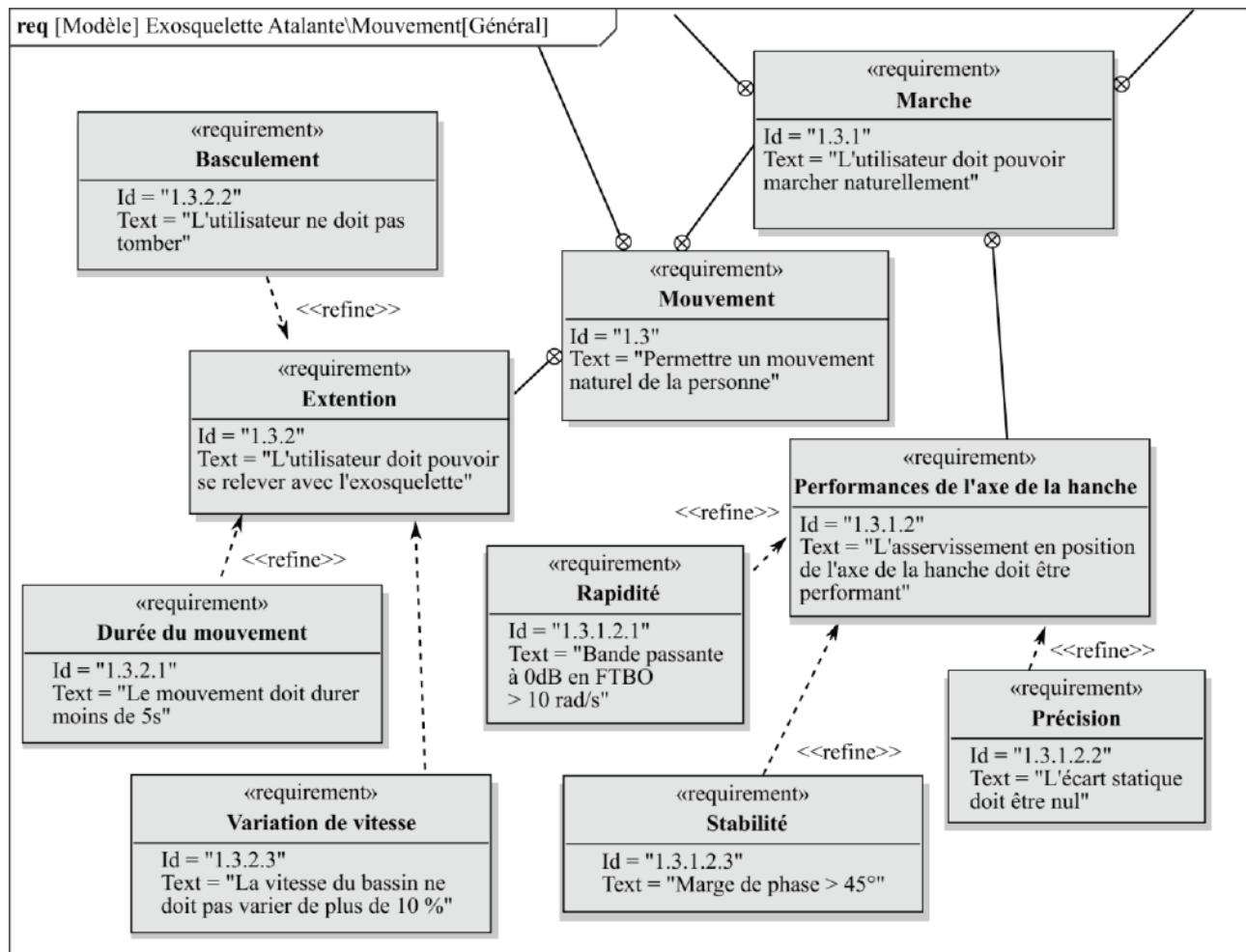


FIGURE 13 – sous exigences associées au mouvement de l'utilisateur équipé de l'exosquelette.

Annexe 2

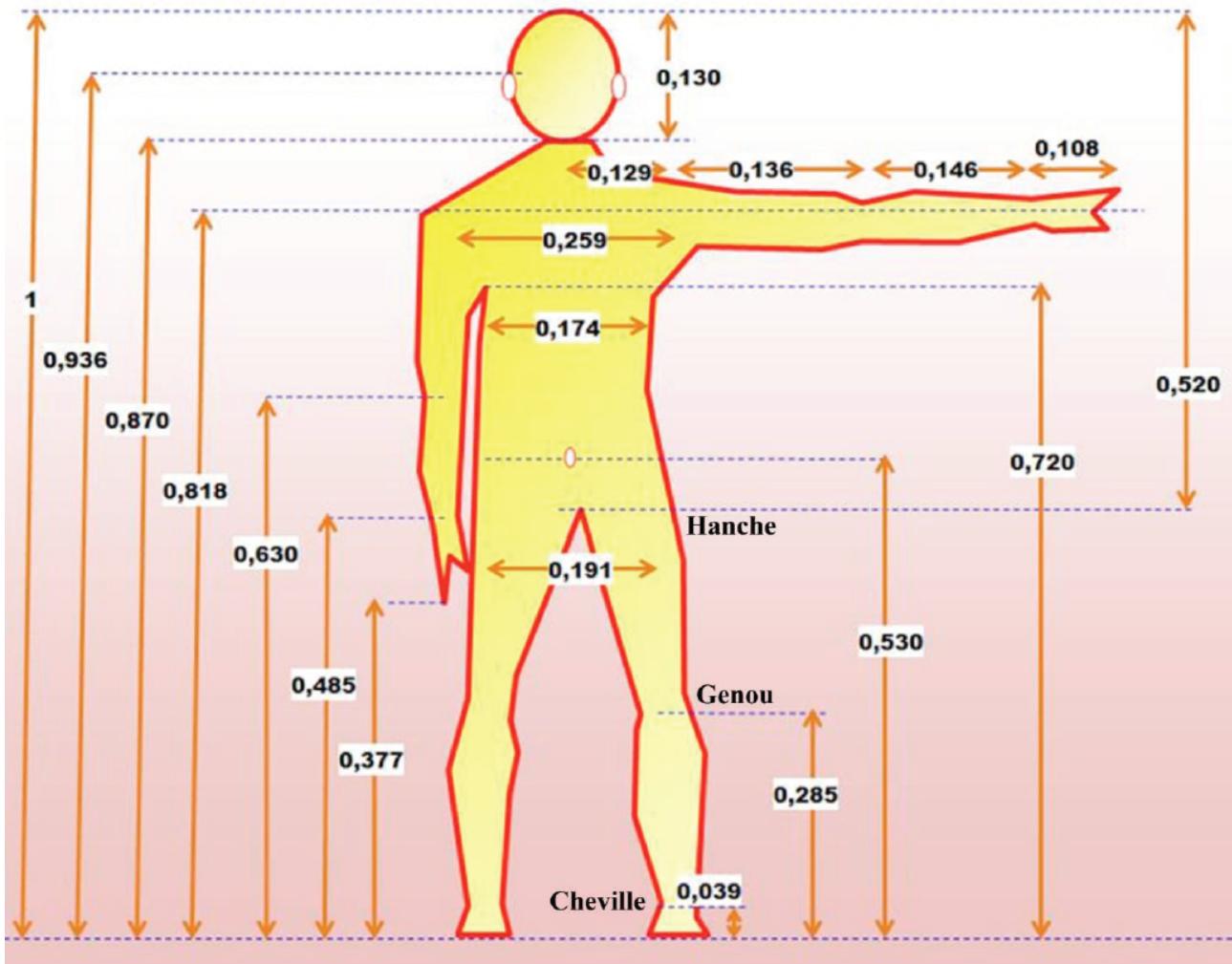


FIGURE 14 – proportions du corps humain

Ces données sont toutes relatives à un individu de taille 1 unité. Par exemple pour une personne de 173 cm, la taille de la main sera $173 \times 0,108 = 18,7$ cm.

Corrigé

Exercice 1 :

Q 16 : Écrire les expressions de tous les torseurs des actions mécaniques extérieures appliquées au robot (E) ainsi modélisé et isolé.

$$\{\mathcal{T}_{pesanteur \rightarrow E}\}_G = \begin{Bmatrix} -M \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix};$$

$$\{\mathcal{T}_{personne \rightarrow E}\}_D = \begin{Bmatrix} -F \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix};$$

En supposant qu'il n'y a pas de frottement au niveau des contacts pieds/sol :

$$\{\mathcal{T}_{solD \rightarrow E}\}_{O_D} = \begin{Bmatrix} Z_{01}^D \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix};$$

$$\{\mathcal{T}_{solG \rightarrow E}\}_{O_G} = \begin{Bmatrix} Z_{01}^G \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix};$$

Q 17 : Exprimer tous ces torseurs en O_D .

$$\{\mathcal{T}_{pesanteur \rightarrow E}\}_{O_D} = \begin{Bmatrix} -M \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ -M \cdot g \cdot d \vec{x}_0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{T}_{personne \rightarrow E}\}_D = \begin{Bmatrix} -F \cdot \vec{z}_0 \\ -F \cdot (e+d) \vec{x}_0 \end{Bmatrix};$$

$$\{\mathcal{T}_{solD \rightarrow E}\}_{O_D} = \begin{Bmatrix} Z_{01}^D \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{T}_{solG \rightarrow E}\}_{O_G} = \begin{Bmatrix} Z_{01}^G \vec{z}_0 \\ Z_{01}^G \cdot 2d \vec{x}_0 \end{Bmatrix};$$

Q 18 : Traduire ces deux équations et en déduire les expression de $Z_{01}^{O_D}$ et $Z_{01}^{O_G}$.

En isolant l'ensemble E et en appliquant le principe fondamental de la statique au point O_D :

- l'équation de la résultante en projection suivant l'axe \vec{z}_0 donne : $-F - M \cdot g + Z_{01}^G + Z_{01}^D = 0$

- l'équation du moment en projection suivant $O_D \vec{x}_0$: $-M \cdot g \cdot d - F \cdot (e+d) + Z_{01}^G \cdot 2d = 0$

Ainsi :

$$Z_{01}^G = \frac{M \cdot g \cdot d + F \cdot (e+d)}{2d} \quad \text{et} \quad Z_{01}^D = F + M \cdot g - Z_{01}^G = \frac{M \cdot g \cdot d + F \cdot (d-e)}{2d}$$

Q 19 : Déterminer les expressions des composantes des deux torseurs des actions mécaniques du sol (0) sur chacun des pieds en fonction F , M , g , d et e , lorsqu'ils sont exprimés aux points O_G et O_D .

$$\{\mathcal{T}_{solD \rightarrow E}\}_{O_D} = \begin{Bmatrix} \frac{M \cdot g \cdot d + F \cdot (d-e)}{2d} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathcal{T}_{solG \rightarrow E}\}_{O_G} = \begin{Bmatrix} \frac{M \cdot g \cdot d + F \cdot (e+d)}{2d} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix};$$

Q 20 : Écrire les deux inégalités qui découlent du respect de ce critère.

$$Z_{01}^D \geq 0 \quad \text{et} \quad Z_{01}' \geq 0$$

soit :

$$\boxed{F \left(\frac{d+e}{2d} \right) + \frac{M \cdot g}{2} \geq 0} \quad \text{et} \quad \boxed{F \left(\frac{d-e}{2d} \right) + \frac{M \cdot g}{2} \geq 0}$$

Q 21 : Déterminer l'effort maximal qui peut être exercé sur le robot au point D, tout en assurant la condition de non basculement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

En exerçant l'effort au point D , le basculement ferait perdre le contact au point O_D , d'où $Z_{01} = 0$

$$0 = \frac{M \cdot g \cdot d + F \cdot (d - e)}{2d} \Rightarrow F = -\frac{M \cdot g \cdot d}{d - e}$$

Application numérique :

$$F = 866 \text{ N} > 100 \text{ N}$$

Le cahier des charges exige un effort maximal de 100 N.

La condition de non basculement du robot pour aider une personne à se lever de son siège est respectée.

Q 22 : Montrer que le modèle global d'action mécanique de contact du sol sur le pied peut être donné par le torseur :

$$\left\{ \mathcal{T}_{(sol \rightarrow pied)} \right\} = \underset{O_S}{\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{(sol \rightarrow pied)}} = b \cdot \int_{P \in \Sigma} p(M) \cdot \vec{z}_0 dy \\ \overline{\mathcal{M}_{O_S(sol \rightarrow pied)}} = b \cdot \int_{P \in \Sigma} y \cdot p(M) \cdot \vec{x}_0 dy \end{array} \right\}}$$

Il s'agit d'une action mécanique répartie sur une surface donc :

$$\left\{ \mathcal{T}_{(sol \rightarrow pied)} \right\} = \underset{O_S}{\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{(sol \rightarrow pied)}} = \int_{P \in S} \vec{f}_p(sol \rightarrow pied) ds \\ \overline{\mathcal{M}_{O_S(sol \rightarrow pied)}} = \int_{P \in S} \overrightarrow{O_S P} \wedge \vec{f}_p(sol \rightarrow pied) ds \end{array} \right\}}$$

Ici $\vec{f}_p(sol \rightarrow pied) = p(M) \cdot \vec{z}_0$ (densité surfacique d'effort).

De plus $p(M)$ ne dépend pas de x ,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{R_{(sol \rightarrow pied)}} &= \int_{P \in S} p(M) \vec{z}_0 ds = \int_{x=-b/2}^{b/2} \int_{P \in \Sigma} p(M) \vec{z}_0 dy dx \\ &= \int_{x=-b/2}^{b/2} dx \int_{P \in \Sigma} p(M) \vec{z}_0 dy = b \int_{P \in \Sigma} p(M) \vec{z}_0 dy \end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}_{O_S(sol \rightarrow pied)}} &= \int_{P \in S} \overrightarrow{O_S P} \wedge p(M) \vec{z}_0 ds = \int_{x=-b/2}^{b/2} \int_{P \in \Sigma} (x \cdot \vec{x}_0 + y \cdot \vec{y}_0) \wedge p(M) \vec{z}_0 dy dx \\ &= \int_{x=-b/2}^{b/2} \int_{P \in \Sigma} -x \cdot p(M) \vec{y}_0 dy dx + \int_{x=-b/2}^{b/2} \int_{P \in \Sigma} y \cdot p(M) \vec{x}_0 dy dx \\ &= \int_{x=-b/2}^{b/2} -x \cdot dx \int_{P \in \Sigma} p(M) dy \cdot \vec{y}_0 + \int_{x=-b/2}^{b/2} dx \int_{P \in \Sigma} y \cdot p(M) dy \cdot \vec{x}_0 = \vec{0} + b \cdot \int_{P \in \Sigma} y \cdot p(M) \vec{x}_0 dy \end{aligned}$$

Q 23 : Montrer que $\left\{ \mathcal{T}_{(sol \rightarrow pied)} \right\}$ est un glisseur.

Si le comoment de $\left\{ \mathcal{T}_{(sol \rightarrow pied)} \right\}$ est nul alors il s'agit d'un glisseur.

On obtient :

$$b \cdot \int_{P \in \Sigma} y \cdot p(M) \cdot \vec{x}_0 dy \cdot b \int_{P \in \Sigma} p(M) \vec{z}_0 dy = 0$$

Il s'agit donc bien d'un glisseur.

Soit H_S le point de la droite (O_S, \vec{y}_0) tel que $\vec{M}(H_S, sol \rightarrow pied) = \vec{0}$, on notera $\overrightarrow{O_S H_S} = Y_{HS} \cdot \vec{y}_0$.

Ce point est fondamental en robotique humanoïde, il prend le nom de Zero Moment Point (ZMP) : de l'anglais « point de moment nul ».

Q 24 : Montrer que $H_S \in [O_S; C_S]$, c'est à-dire qu'il est situé sous le pied du robot. On pourra pour cela étudier le signe des vecteurs $\overrightarrow{O_S H_S}$ et $\overrightarrow{C_S H_S}$.

• **Signe de $\overrightarrow{O_S H_S}$:**

On cherche H_S tel que $\overrightarrow{\mathcal{M}_{H_S(sol \rightarrow pied)}} = \vec{0}$.

En utilisant la formule de Varignon entre O_S et H_S , on obtient :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O_S(sol \rightarrow pied)}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{H_S(sol \rightarrow pied)}} + \overrightarrow{O_S H_S} \wedge \overrightarrow{R_{(sol \rightarrow pied)}}$$

\Leftrightarrow

$$b \cdot \int_{P \in \Sigma} y \cdot p(M) \cdot \vec{x}_0 dy = \vec{0} + Y_{HS} \cdot \vec{y}_0 \wedge b \int_{P \in \Sigma} p(M) \vec{z}_0 dy.$$

\Leftrightarrow

$$b \cdot \int_{P \in \Sigma} y \cdot p(M) dy = Y_{HS} \cdot b \int_{P \in \Sigma} p(M) dy$$

On obtient donc :

$$Y_{HS} = \frac{\int_{P \in \Sigma} y \cdot p(M) dy}{\int_{P \in \Sigma} p(M) dy} > 0$$

Ainsi H_S est à droite de O_S .

• **Signe de $\overrightarrow{C_S H_S}$:**

Calculons tout d'abord $\overrightarrow{\mathcal{M}_{C_S(sol \rightarrow pied)}}$ à partir de $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O_S(sol \rightarrow pied)}}$.

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{C_S(sol \rightarrow pied)}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{O_S(sol \rightarrow pied)}} + \overrightarrow{C_S O_S} \wedge \overrightarrow{R_{(sol \rightarrow pied)}}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{C_S(sol \rightarrow pied)}} = b \cdot \int_{P \in \Sigma} y \cdot p(M) \cdot \vec{x}_0 dy - L \cdot \vec{y}_0 \wedge b \int_{P \in \Sigma} p(M) \vec{z}_0 dy = b \cdot \int_{P \in \Sigma} (y - L) \cdot p(M) \cdot \vec{x}_0 dy$$

Obtenons une relation entre $\overrightarrow{\mathcal{M}_{C_S(sol \rightarrow pied)}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_{H_S(sol \rightarrow pied)}}$.

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{C_S(sol \rightarrow pied)}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{H_S(sol \rightarrow pied)}} + \overrightarrow{C_S H_S} \wedge \overrightarrow{R_{(sol \rightarrow pied)}}$$

\Leftrightarrow

$$b \cdot \int_{P \in \Sigma} (y - L) \cdot p(M) \cdot \vec{x}_0 dy = \vec{0} + (Y_{HS} - L) \vec{y}_0 \wedge b \int_{P \in \Sigma} p(M) \vec{z}_0 dy$$

\Leftrightarrow

$$b \cdot \int_{P \in \Sigma} (y - L) \cdot p(M) dy = (Y_{HS} - L) b \int_{P \in \Sigma} p(M) dy$$

Ainsi, on obtient :

$$(Y_{HS} - L) = \frac{\int_{P \in \Sigma} (y - L) \cdot p(M) dy}{\int_{P \in \Sigma} p(M) dy} < 0$$

Ainsi H_S est à gauche de C_S .

Q 25 : Donner la forme du torseur $\{\mathcal{T}_{(sol \rightarrow pied)}\}$ dans le cas d'un contact avec frottement dans le plan sagittal (c'est-à-dire que la densité d'efforts de contact est $p(M) \cdot \vec{z}_0 + t(M) \cdot \vec{y}_0$). Montrer que les résultats des questions précédentes sont inchangés.

$$\left\{ \mathcal{T}_{(sol \rightarrow pied)} \right\}_{O_S} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{(sol \rightarrow pied)}} = \int_{P \in S} \vec{f}_p(sol \rightarrow pied) \, ds = \int_{P \in S} (p(M) \cdot \vec{z}_0 + t(M) \cdot \vec{y}_0) \, ds \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{O_S}(sol \rightarrow pied)} = \int_{P \in S} \overrightarrow{O_S P} \wedge \vec{f}_p(sol \rightarrow pied) \, ds = \int_{P \in S} \overrightarrow{O_S P} \wedge (p(M) \cdot \vec{z}_0 + t(M) \cdot \vec{y}_0) \, ds \end{array} \right\}$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{R_{(sol \rightarrow pied)}} = \int_{x=-b/2}^{b/2} dx \int_{P \in \Sigma} (p(M) \cdot \vec{z}_0 + t(M) \cdot \vec{y}_0) \, dy = b \cdot \int_{P \in \Sigma} (p(M) \cdot \vec{z}_0 + t(M) \cdot \vec{y}_0) \, dy$$

Et,

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O_S}(sol \rightarrow pied)} = \int_{P \in S} \overrightarrow{O_S P} \wedge \vec{f}_p(sol \rightarrow pied) \, ds = \int_{x=-b/2}^{b/2} \int_{P \in \Sigma} (x \cdot \vec{x}_0 + y \cdot \vec{y}_0) \wedge (p(M) \cdot \vec{z}_0 + t(M) \cdot \vec{y}_0) \, dxdy$$

$$= -\vec{y}_0 \int_{x=-b/2}^{b/2} x \cdot dx \int_{P \in \Sigma} p(M) \, dy + \vec{z}_0 \int_{x=-b/2}^{b/2} x \cdot dx \int_{P \in \Sigma} t(M) \, dy + \vec{x}_0 \int_{x=-b/2}^{b/2} dx \int_{P \in \Sigma} y \cdot p(M) \, dy + \vec{0}$$

On obtient donc :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O_S}(sol \rightarrow pied)} = b \vec{x}_0 \int_{P \in \Sigma} y \cdot p(M) \, dy$$

Montrons qu'il s'agit encore d'un glisseur dont H_S reste l'axe central.

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{H_S}(sol \rightarrow pied)} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{O_S}(sol \rightarrow pied)} + \overrightarrow{H_S O_S \wedge R_{(sol \rightarrow pied)}}$$

$$= b \vec{x}_0 \int_{P \in \Sigma} y \cdot p(M) \, dy - Y_{HS} \vec{y}_0 \wedge b \cdot \int_{P \in \Sigma} (p(M) \cdot \vec{z}_0 + t(M) \cdot \vec{y}_0) \, dy$$

$$= b \vec{x}_0 \int_{P \in \Sigma} y \cdot p(M) \, dy - Y_{HS} \vec{x}_0 \cdot \int_{P \in \Sigma} p(M) \, dy$$

Or d'après la question précédente :

$$Y_{HS} = \frac{\int_{P \in \Sigma} y \cdot p(M) \, dy}{\int_{P \in \Sigma} p(M) \, dy}$$

On trouve donc :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{H_S}(sol \rightarrow pied)} = \vec{0}$$

Exercice 2 : Barrage sur la Tamise

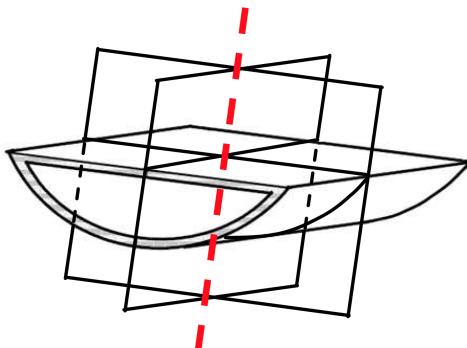
1 Corrigé : Barrage de la Tamise

Q 26 : Déterminer les coordonnées du centre de gravité de la porte.

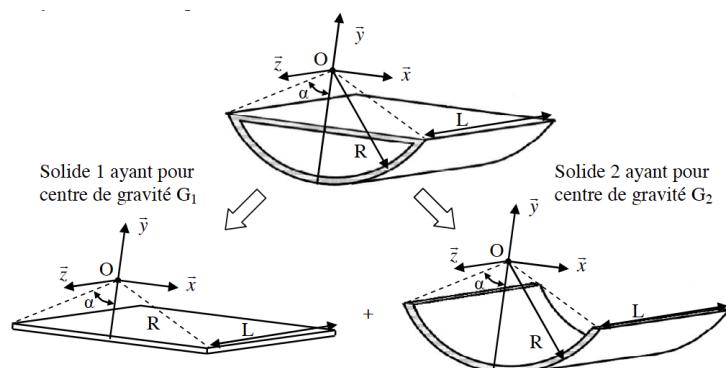
On recherche les coordonnées du centre de gravité G du solide S sous la forme :

$$\overrightarrow{OG} = x_G \vec{x} + y_G \vec{y} + z_G \vec{z}.$$

Le système possède deux plans de symétrie perpendiculaires, le centre de gravité est sur la droite intersection des 2 plans de symétrie. D'où $z_G = -\frac{L}{2}$ et $x_G = 0$



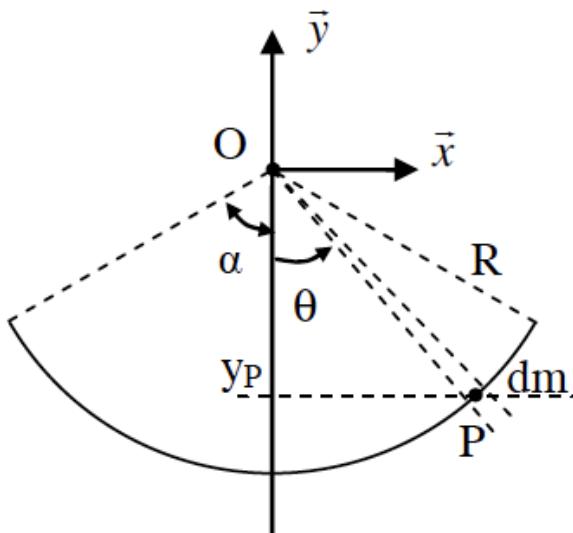
On décompose le système en solides élémentaires (les solides élémentaires possèdent les mêmes plans de symétrie identifiés précédemment).



1. **Solide 1 :** Il y a un plan de symétrie supplémentaire. Il y a donc 3 plans de symétrie perpendiculaires donc le centre de gravité de S1 est à $y_G = -R \cos \alpha$ (si e est négligeable).
2. **Solide 2 :** Il n'y a pas de plan de symétrie supplémentaire. On utilise alors la définition :

$$m_2 \overrightarrow{OG_1} = \int_{S_2} \overrightarrow{OP} dm.$$

que l'on projette sur l'axe \vec{y} .



$$m_2 \cdot y_{G_2} = \int_{S_2} y_P dm$$

Avec $m_2 = \rho e L (2 R \alpha)$ et $dm = \rho e L R d\theta$.

$$2 R \alpha y_{G_2} = \int_{-\alpha}^{\alpha} -R \cos \theta R d\theta$$

$$2 R \alpha y_{G_2} = -2 R^2 \sin \alpha.$$

On obtient finalement,

$$y_{G_2} = -R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

3. Pour les deux solides combinées :

$$(m_1 + m_2) y_G = m_1 y_{G_1} + m_2 y_{G_2}$$

Avec

$$m_1 = \rho e L (2 R \sin \alpha)$$

et

$$m_2 = \rho e L (2 R \alpha).$$

On trouve alors :

$$y_G = \frac{-R \sin \alpha (1 + \cos \alpha)}{\alpha + \sin \alpha}$$

En faisant l'application numérique, on obtient :

$$y_G = -8,42 \text{ m.}$$

Exercice 3 :

Q 27 : À l'aide de l'annexe 2, déterminer la longueur de réglage minimale ΔL_2 que doit permettre l'exosquelette pour respecter le cahier des charges.

Q 28 : À l'aide de l'annexe 2, déterminer la longueur de réglage minimale $\Delta L3$ que doit permettre l'exosquelette pour respecter le cahier des charges.

$$\Delta L2 = \max(\overline{AB}) - \min(\overline{AB})$$

D'après l'annexe 2, on a :

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \text{hauteur(Hanche)} - \text{hauteur(Genou)} \\ \overline{AB} &= ((1 - 0,520) - 0,285) \times \text{hauteur(individu)} \\ \left\{ \begin{array}{l} \max(\overline{AB}) = (0,480 - 0,285) \times 1,90m \\ \min(\overline{AB}) = (0,480 - 0,285) \times 1,50m \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \max(\overline{AB}) = 0,195 \times 1,90m \\ \min(\overline{AB}) = 0,195 \times 1,50m \end{array} \right.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{array}{l} \max(\overline{BC}) = (0,285 - 0,039) \times 1,90m \\ \min(\overline{BC}) = (0,285 - 0,039) \times 1,50m \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \max(\overline{BC}) = 0,246 \times 1,90m \\ \min(\overline{BC}) = 0,246 \times 1,50m \end{array} \right.\end{aligned}$$

Finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta L2 = 0,195 \times (1,90 - 1,50) \\ \Delta L3 = 0,246 \times (1,90 - 1,50) \end{array} \right.$$

xz

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta L2 = 0,078m \\ \Delta L3 = 0,0984m \end{array} \right.$$

Q 29 : À partir de la figure 10, justifier le nouveau modèle de liaison entre le bâti (0) et fémur (1) proposé figure 11.

Le jeu entre les solides 0 et 1 autorise un pivotement de ce dernier. Ainsi le contact entre les deux solides ne se fait plus par une surface cylindrique mais par deux petites surfaces assimilées à deux points. Ces deux points sont P1 et P2 car la force de 2 sur 1 à tendance à faire basculer le solide 1 dans le sens horaire.

Q 30 : On se place à la limite du glissement. À partir du modèle donné figure 11, déterminer la valeur absolue de la force F en fonction de f , m_{21} , m_{32} , δ et μ . La méthode et les théorèmes utilisés seront explicités.

On isole le solide 1.

BAME :

$$\begin{aligned}\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^1\} &= \begin{Bmatrix} X_{01} & - \\ Y_{01} & - \\ - & - \end{Bmatrix}_b \quad \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^2\} = \begin{Bmatrix} X_{01} & - \\ Y_{01} & - \\ - & - \end{Bmatrix}_b \\ \{\mathcal{T}_{pes \rightarrow 1}\} &= \begin{Bmatrix} 0 & - \\ -m_{21} \cdot g & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_b \quad \{\mathcal{T}_{ext \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} F & - \\ 0 & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_b \quad \{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} = -\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = - \begin{Bmatrix} 0 & - \\ m_{32} \cdot g & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_b\end{aligned}$$

Il y a 5 inconnues mais le PFS ne fournit que 3 équations. Le système ne peut pas être résolu. Il faut donc établir deux équations supplémentaires :

Avec les hypothèses du modèle de Coulomb, et compte-tenu qu'on se place à la limite de glissement, les composantes tangentielle et normale des efforts de contact sont proportionnelles :

$$\text{en } P_1 : \|X_{01}^1\| = f \|Y_{01}^1\|$$

$$\text{en } P_2 : \|X_{01}^2\| = f \|Y_{01}^2\|$$

On fait l'hypothèse que le frottement exerce un effort selon les x positifs sur 1; ceci revient à faire l'hypothèse que $X_{01}^1 \geq 0$ et $Y_{01}^1 \geq 0$.

$$\begin{aligned}\|Y_{01}^1\| &= -Y_{01}^1 \quad \text{donc : } \|X_{01}^1\| = X_{01}^1 = -f Y_{01}^1 \\ \|Y_{01}^2\| &= Y_{01}^2 \quad \text{donc : } \|X_{01}^2\| = X_{01}^2 = f Y_{01}^2\end{aligned}$$

On peut alors réécrire le BAME :

$$\begin{aligned}\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^1\} &= \begin{Bmatrix} -f Y_{01}^1 & - \\ Y_{01}^1 & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_b \quad \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^2\} = \begin{Bmatrix} f Y_{01}^2 & - \\ Y_{01}^2 & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_b \\ \{\mathcal{T}_{ext \rightarrow 1}\} &= \begin{Bmatrix} F & - \\ 0 & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_b \quad \{\mathcal{T}_{pes \rightarrow 1}\} + \{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & - \\ (-m_{32} - m_{32}) \cdot g & - \\ - & 0 \end{Bmatrix}_b\end{aligned}$$

On dispose désormais de 3 équations et 3 inconnues, on peut donc résoudre le système.

Application du théorème de la résultante statique projeté sur \vec{x} et sur \vec{y} :

$$\begin{cases} -f Y_{01}^1 + f Y_{01}^2 + F = 0 \\ Y_{01}^1 + Y_{01}^2 - (m_{32} + m_{32}) \cdot g = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F = f(Y_{01}^1 - Y_{01}^2) \\ Y_{01}^1 + Y_{01}^2 = (m_{32} + m_{32}) \cdot g \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

On déplace les moments en P_2 en vue d'appliquer le théorème du moment statique :

$$\begin{aligned}\vec{M}_{P_2}^1(0 \rightarrow 1) &= \vec{M}_{P_1}^1(0 \rightarrow 1) + \overrightarrow{P_2 P_1} \wedge \vec{R}^1(0 \rightarrow 1) \\ &= \vec{0} + (-\delta \vec{x}) \wedge (-f Y_{01}^1 \vec{x} + Y_{01}^1 \vec{y}) \\ &= -\delta Y_{01}^1 \vec{z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{M}_{P_2}(ext \rightarrow 1) &= \vec{M}_B(ext \rightarrow 1) + \overrightarrow{P_2 B} \wedge \vec{R}_{ext \rightarrow 1} \\ &= \vec{0} + \mu \vec{x} \wedge \vec{x} \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{M}_{P_2}(2 + pes \rightarrow 1) &= \vec{M}_B(2 + pes \rightarrow 1) + \overrightarrow{P_2 B} \wedge \vec{R}_{2+pes \rightarrow 1} \\ &= \vec{0} + \mu \vec{x} \wedge (-(m_{32} + m_{21}) \cdot g) \vec{y} \\ &= -\mu(m_{32} + m_{21}) \cdot g \vec{z}\end{aligned}$$

Application du théorème du moment statique exprimé en P_2 et projeté selon \vec{z} :

$$\begin{aligned}-\delta Y_{01}^1 + 0 + 0 - \mu(m_{32} + m_{21}) \cdot g &= 0 \\ Y_{01}^1 &= -\frac{\mu}{\delta} \cdot (m_{32} + m_{21}) \cdot g \quad (3)\end{aligned}$$

de (1) :

$$Y_{01}^1 - Y_{01}^2 = \frac{F}{f}$$

de (2) :

$$Y_{01}^1 + Y_{01}^2 = (m_{32} + m_{21}) \cdot g$$

(1) + (2) :

$$2Y_{01}^1 = \frac{F}{f} + (m_{32} + m_{21}) \cdot g$$

on injecte ce résultat dans (3) :

$$\begin{aligned}-2 \frac{\mu}{\delta} (m_{32} + m_{21}) \cdot g &= \frac{F}{f} + (m_{32} + m_{21}) \cdot g \\ -\frac{2\mu}{\delta} (m_{32} + m_{21}) \cdot g \cdot f - (m_{32} + m_{21}) \cdot g \cdot f &= F \\ F &= -(m_{32} + m_{21}) \cdot g \cdot f \left(\frac{2\mu}{\delta} + 1 \right) \\ F &= -\frac{2\mu + \delta}{\delta} (m_{32} + m_{21}) \cdot g \cdot f \\ |F| &= \frac{2\mu + \delta}{\delta} (m_{32} + m_{21}) \cdot g \cdot f\end{aligned}$$

Q 31 : Le phénomène d'arc-boutement apparaît-il avec le modèle de la figure 11 ? Justifier.

Quelles hypothèses simplificatrices pourraient remettre en cause cette réponse ?

Expliquer en quoi ce phénomène serait un problème pour le réglage dimensionnel de l'exosquelette.
Ici il n'y a pas d'arc-boutement. La condition de glissement dépend de la norme de l'effort extérieur.

Les hypothèses simplificatrices à remettre en question sont deux hypothèses géométriques : choix du point d'application de l'action mécanique extérieure exercée sur la partie inférieure du fémur (1) pour effectuer le réglage (en B, sur la droite ($P_1 P_2$) dans cette étude) et choix de la longueur λ prise en compte (négligée dans cette étude). En effet, pour qu'il y ait arc boutement, il faut que le support du glisseur de l'action extérieure soit différent de la droite passant par les deux points de contact avec frottement.

Ce phénomène, s'il était présent, pourrait être dommageable car le glissement du solide 1 par rapport au solide 0 ne pourrait tout simplement pas se faire et ce quelle que soit l'amplitude de l'effort extérieur appliquée.

Q 32 : Déterminer l'expression de δ , la longueur du contact cylindre-cylindre, qui permet de respecter le cahier des charges. Faire l'application numérique.

$$\delta = \frac{2(m_{32} + m_{21}) \cdot g \cdot f}{|F| - (m_{32} + m_{21}) \cdot g \cdot f} \mu$$
$$\delta = \frac{2}{\frac{|F|}{(m_{32} + m_{21}) \cdot g \cdot f} - 1} \mu$$
$$\delta = 89 \text{ mm}$$