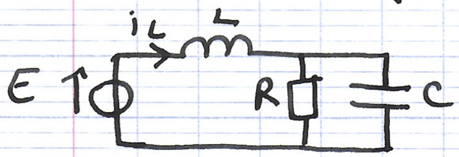
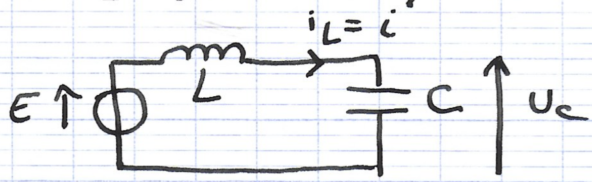
Exercice 1

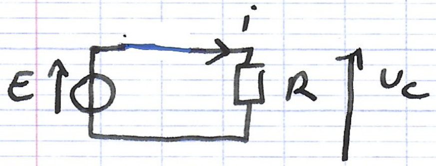
Circuit à $t < 0$ circuit à $t > 0$





1. Valeurs à $t = 0^+$

- u_c est la tension aux bornes du condensateur, c'est une fonction continue
  $\dot{u}_c$ pour $t > 0$: $\dot{u}_c = \frac{i_c}{C} = \frac{i_L}{C}$ le courant traverse une bobine c'est une fonction continue
  $u_c(0^-) = u_c(0^+)$
  $\dot{u}_c(0^-) = \dot{u}_c(0^+) = i_L(0^-)/C$
- Pour trouver les valeurs à 0^- on utilise le fait que le régime permanent est réalisé à $t < 0$
  Le condensateur est un interrupteur ouvert ($i_c = C\frac{du_c}{dt} = 0$)
  La bobine est un fil ($u_L = L\frac{di}{dt} = 0$)
  D'où le circuit à 0^-



$u_c(0^-) = \boxed{u_c(0^+) = E}$

$i_L(0^-) = i_L(0^+) = \frac{E}{R} \Rightarrow \boxed{\dot{u}_c(0^+) = \frac{E}{RC}}$

---

2. $u_c(t)$ et $i(t)$

Loi des mailles pour $t > 0$ $\quad L\frac{di}{dt} + Ri = E$

or $i = C\dot{u}_c$

$\Rightarrow \ddot{u}_c + \frac{u_c}{LC} = \frac{E}{LC}$ (forme canonique)

on pose $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$

on a donc $\begin{cases} u_c(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) + E \\ i(t) = C\dot{u}_c = -\omega_0 AC\sin(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$

Conditions initiales : on utilise les résultats du 1-

②

$$\begin{cases} u_C(0) = A\cos\varphi + E = E \\ i(0) = -CA\omega_0 \sin\varphi = E/R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = -\pi/2 \\ A = \dfrac{E}{RC\omega_0} \end{cases}$$

D'où
$$\boxed{u_C(t) = \frac{E}{RC\omega_0}\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + E}$$
$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

Applications numériques

La période : $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$

L'amplitude : $A = \dfrac{E}{RC\omega_0} = \dfrac{E\sqrt{LC}}{RC}$

on a donc $\dfrac{A}{T_0} = \dfrac{E}{2\pi RC}$ $\Rightarrow$ $\boxed{C = \dfrac{T_0 E}{2\pi R A} = 79\ \text{pF}}$

$\Rightarrow$ $\boxed{L = \dfrac{T_0^2}{4\pi^2 C} = 0{,}32\ \text{mH}}$

Exercice 2

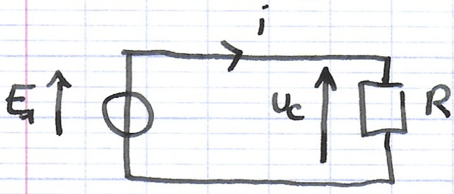
1. Valeurs à 0^+

u_C est une fonction continue car aux bornes de C
i est une fonction continue car traverse L.

K en position 1 depuis longtemps

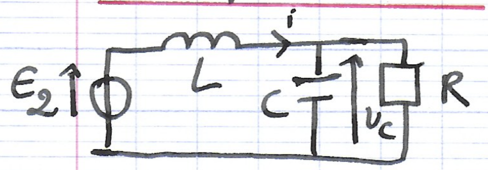
Le régime permanent est obtenu. La capacité est un interrupteur ouvert la bobine un fil

circuit à 0^-



$$\boxed{\begin{aligned} i(0^-) &= E_1/R = i(0^+) \\ u_C(0^-) &= E_1 = u_C(0^+) \end{aligned}}$$

K en position 2



Loi des mailles $\quad E_2 = L\dfrac{di}{dt} + u_C$

$$\Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{E_2 - u_C}{L}$$

or à 0^+ $u_C = E_1$

d'où $\boxed{\dfrac{di}{dt}(0^+) = \dfrac{E_2 - E_1}{L}}$

Loi des noeuds $\quad i = i_C + i_R$.

$$i = C\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{du_C}{dt} = \frac{iR - u_C}{RC}$$

or à 0^+ $u_C = E_1 \quad Ri = E_1$

d'où $\boxed{\dfrac{du_C}{dt}(0^+) = 0}$

2. Valeurs à t_∞

On a comme pour $t<0$ avec E_1 échangé avec E_2

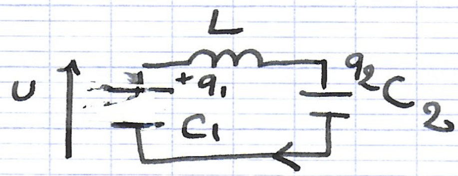
$$\boxed{\begin{aligned} i_\infty &= E_2/R \\ u_{C\infty} &= E_2 \end{aligned}}$$

4

Exercice 3

[La distinction C_1 et C_2 c'est uniquement pour savoir qui est chargé qui ne l'est pas. Comme on donne $C_1 = C_2 = C$ dés le début de la question on peut l'utiliser :]

1. $u(t)$ $i(t)$



Loi des mailles

$$u = \frac{q_1}{C} = L\frac{di}{dt} + \frac{q_2}{C}$$

or $i = -\dot{q}_1 = \dot{q}_2 \Rightarrow q_1 + q_2 = K$

CI : continuité de la charge d'un condensateur

$$q_i(0^-) = q_i(0^+)$$

$$\Rightarrow \quad q_1 + q_2 = Q_1$$

d'où $\quad \frac{q_1}{C} = -L\ddot{q}_1 + \frac{Q_1 - q_1}{C}$

d'où $\quad \ddot{q}_1 + \frac{2}{LC} q_1 = \frac{Q_1}{LC}$

on a $u = \frac{q_1}{C}$ et on pose $\omega_0 = \sqrt{2}/\sqrt{LC}$

on a donc $\quad \ddot{u} + \omega_0^2 u = \frac{Q_1}{2C}\omega_0^2$

Solution generale : $\begin{cases} u(t) = a\cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{Q_1}{2C} \\ i = -C\frac{du}{dt} = \omega_0 a C \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$

Conditions initales Continuite de la charge du condensateur et de l'intensite traversant la bobine

$$\begin{cases} u(0^-) = u(0^+) \\ i(0^-) = i(0^+) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{Q_1}{C} = a\cos\varphi + \frac{Q_1}{2C} \\ 0 = \omega_0 a C \sin\varphi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = +Q_1/2C \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &= \frac{Q_1}{2C}(1 + \cos\omega_0 t) \\ i(t) &= \frac{Q_1}{2}\omega_0 \sin\omega_0 t \end{aligned} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}}}$$

⑤

2) Bilan énergétique

Loi des mailles $\dfrac{q_1}{C} = L\dfrac{di}{dt} + \dfrac{q_2}{C}$ $\Big) \times i\,dt = -dq_1 = dq_2$

$$-d\left(\frac{q_1^2}{2C}\right) = d\left(\frac{Li^2}{2}\right) + d\left(\frac{q_2^2}{2C}\right)$$

1^re^ alternance $q_1(t)$ se décharge : $Q_1 \longrightarrow 0$

$q_2(t)$ se charge : $0 \longrightarrow Q_1$

$i(t)$ passe de 0 à 0

Il y a transfert d'énergie entre C_1 et C_2

2^e^ alternance : c'est l'inverse il y a transfert d'énergie entre C_2 et C_1

La bobine s'oppose aux variations de l'intensité, elle prélève de l'énergie quand $i(t)$ augmente et en restitue quand $i(t)$ diminue

---

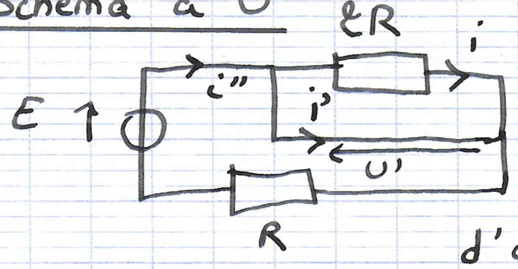
Exercice 5

1. Les valeurs à 0^+

La tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue : $\boxed{u(0^-) = u(0^+) = 0\text{ V}}$
$\boxed{u'(0^-) = u'(0^+) = 0\text{ V}}$

Une tension nulle correspond à un interrupteur fermé

Schéma à 0^+



on a $u' = 2R\,i$

$\Rightarrow \boxed{i(0^+) = 0\text{ A}}$

Loi des noeuds $i'' = i' + i$

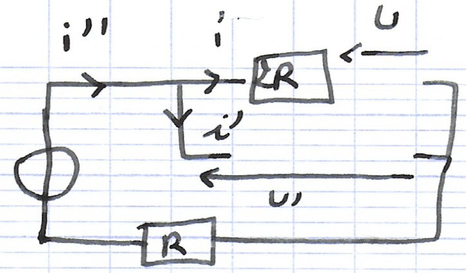
d'où à 0^+ $\boxed{i'' = i'(0^+) = \dfrac{E}{R}}$

---

2. Valeurs à $t\infty$

En régime permanent le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert

Schema à t_∞



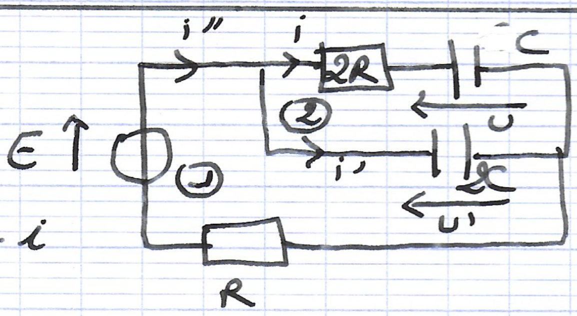
Ainsi $\boxed{i_\infty = i'_\infty = 0\,A}$

Loi des noeuds $i'' = i' + i = 0\,A$

Il n'y a pas de chute de potentiel aux bornes des resistance

$\boxed{u_\infty = u'_\infty = E}$

3. Equation en u



Loi des noeuds $i'' = i' + i$

Lois des mailles :

① $E - Ri'' = u'$

② $u' = 2R.i + u$

or $i = C\dot{u}$ et $i' = 2C\dot{u}'$

D'où $E = R(i'+i) + u'$

② $= 2RC\dot{u}' + RC\dot{u} + 2RC\dot{u} + u$

or ② $\Rightarrow \dot{u}' = 2RC\ddot{u} + \dot{u}$

on a donc $E = (2RC)^2\ddot{u} + 5RC\dot{u} + u$

on pose $\tau = RC$

on a bien $\boxed{4\tau^2\ddot{u} + 5\tau\dot{u} + u = E}$

4. Regime speudoperiodique

Equation caracteristique pour l'equation homogene

$4\tau^2 s^2 + 5\tau s + 1 = 0$

$\Delta = 25\tau^2 - 16\tau^2 = 9\tau^2 > 0$

Le discriminant est positif quelque soit la valeur de τ, il ne peut pas y avoir de regime pseudoperiodique

5. Portrait de phase

a : Les conditions initiales $u = 0$ $i = 0$ ne sont pas respectées

c : le regime n'est pas pseudopériodique

d : on remarque qu'il y a bien le point $(0,0)$.
Mais on a toujours $\frac{du}{dt} < 0$ donc la tension decroit
or on a $u(0^+) = 0$ et $u_\infty(t_\infty) = E$
donc u augmente

Le portrait de phase qui convient est le b

---

6. Solution $u(t)$

Les racines de l'equation caracteristique :

$$r_1 = -\frac{5\tau}{8\tau^2} - \frac{3\tau}{8\tau^2} = -\frac{1}{\tau} \qquad r_2 = -\frac{5\tau}{8\tau^2} + \frac{3\tau}{8\tau^2} = \frac{-1}{4\tau}$$

$$u(t) = A e^{-t/\tau} + B e^{-t/4\tau} + E$$

$$i(t) = C\frac{du}{dt} = -\frac{CA}{\tau} e^{-t/\tau} - \frac{BC}{4\tau} e^{-t/4\tau}$$

on utilise les conditions initiales

$$\begin{cases} u(0) = E + A + B = 0 \\ i(0) = 0 = -\frac{A}{R} - \frac{B}{4R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E + B\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 0 \\ A = -\frac{B}{4} \end{cases}$$

$$B = -\frac{4}{3}E \qquad A = +\frac{E}{3}$$

$$\boxed{u(t) = E\left(1 + \frac{1}{3} e^{-t/\tau} - \frac{4}{3} e^{-t/4\tau}\right)}$$