Devoir surveillé n°4

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice de TD.

Soient a et b deux réels. Montrer que :

1) $a \leqslant b \Rightarrow \lfloor a \rfloor \leqslant \lfloor b \rfloor$;

2) $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leqslant \lfloor a+b \rfloor \leqslant \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1$.

II. Exponentielle de Matrice.

On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. On définit alors l'exponentielle de A comme

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} A^k.$$

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente et $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. Montrer que pour tout $q \geqslant p$:

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} A^k.$$

2) La somme de deux matrices nilpotentes est-elle nécessairement nilpotente ?

3) Soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices nilpotentes qui commutent : $AB = BA$.

  a) Montrer que $A+B$ est nilpotente.

  b) Montrer que $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. Est-ce que $\exp(A)$ et $\exp(B)$ commutent ?

4) Montrer que l'exponentielle d'une matrice nilpotente est inversible et déterminer son inverse.

5) L'exponentielle d'une matrice nilpotente est-elle nilpotente ?

6) Un exemple. On pose $A = \begin{pmatrix} -10 & 8 & -8 \\ -7 & 6 & -5 \\ 5 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

  a) Vérifier que A est nilpotente.

  b) Calculer $\exp(A)$.

  c) Écrire et résoudre le système $AX = 0$. Donner un vecteur u solution dont la première composante est 4.

  d) Écrire et résoudre le système $AX = u$. Donner un vecteur v solution dont la première composante est 2.

  e) Écrire et résoudre le système $AX = v$. Donner un vecteur w solution dont la première composante est -1.

  f) En notant P la matrice dont les trois colonnes sont respectivement u, v et w, montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

  g) Calculer $N = P^{-1}AP$.

  h) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}$ A^n en fonction de N^n. En déduire une expression de $\exp(A)$ en fonction de $\exp(N)$, que l'on calculera.

  i) Déterminer $\exp(A)^{-1}$.

III. Un cas particulier du théorème de la progression arithmétique de Dirichlet.

Soit p un nombre premier. L'objectif de cet exercice est de montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo p.

Dans la suite, on note φ l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} x^k \end{array}$$

1) Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, simplifier $\varphi(x)$.

2) Soit q un nombre premier distinct de p, et soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que $\varphi(x) \equiv 0[q]$.
On note :

$$A = \{n \in \mathbb{N}^*, x^n \equiv 1[q]\}$$

- **a)** Montrer que $x \neq 1$.
- **b)** Montrer que $p \in A$.
- **c)** Montrer que x est premier avec q, puis que $q-1 \in A$.
- **d)** Montrer que A admet un plus petit élément, que l'on notera m dans la suite du problème.
- **e)** Soit $a \in A$. En utilisant la division euclidienne de a par m, montrer que m divise a.
- **f)** Montrer que $m \neq 1$.
- **g)** En déduire que $m = p$.
- **h)** En déduire que $q \equiv 1[p]$.

3) On suppose qu'il existe seulement un nombre fini non nul de nombres premiers q tels que l'équation $\varphi(x) \equiv 0[q]$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$ possède au moins une solution. On note $q_1, q_2, \ldots, q_r$ ces nombres premiers.

- **a)** Montrer qu'il existe $i \in [\![1, r]\!]$ tel que $\varphi(q_1 q_2 \ldots q_r) \equiv 0[q_i]$.
- **b)** Aboutir à une contradiction.

4) Conclure.

IV. Densité de Schnirelmann.

Pour tout ensemble fini X, on note $\mathrm{Card}(X)$ son nombre d'éléments. Pour toute partie A de $\mathbb{N}$ et tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n(A) = \mathrm{Card}(A \cap \{1, 2, \cdots, n\})$$

et on appelle *densité de Schnirelmann* de A le réel

$$\sigma(A) = \inf \left\{ \frac{S_n(A)}{n} \;\middle|\; n \geqslant 1 \right\}.$$

Si A et B sont deux parties de $\mathbb{N}$, on pose

$$A + B = \{ a + b \mid a \in A \text{ et } b \in B \}.$$

1) **a)** Justifier la définition de $\sigma(A)$.

b) Que vaut $\sigma(A)$ si $1 \notin A$?

c) Sous quelle condition a-t-on $\sigma(A) = 1$?

d) Si $A \subset B$, comparer $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$.

2) Calculer $\sigma(A)$ pour les parties suivantes.

a) A est une partie finie de $\mathbb{N}$.

b) A est l'ensemble des entiers naturels impairs.

c) Si $k \geqslant 2$ est un entier fixé, A est l'ensemble des puissances k^{es} d'entiers : $A = \left\{ m^k, m \in \mathbb{N}^* \right\}$.

3) Soit A et B deux parties de $\mathbb{N}$ contenant 0 et $n \geqslant 1$ un entier.

a) En considérant

$$C = \{ n - b \mid b \in \{0, 1, \cdots, n\} \cap B \},$$

montrer que

$$S_n(A) + S_n(B) \geqslant n \Rightarrow n \in A + B$$

b) Montrer que si $\sigma(A) + \sigma(B) \geqslant 1$ alors $A + B = \mathbb{N}$.

c) Montrer que si $0 \in A$ et $\sigma(A) \geqslant \frac{1}{2}$ alors tout nombre entier est la somme de deux éléments de A.

— FIN —