

C3 : Modélisation cinématique des systèmes composés de chaînes de solides

C3-3 : Cinématique du point

Émilien DURIF

Lycée La Martinière Monplaisir Lyon
Classe de MPSI
16 Novembre 2021



Plan

1 Grandeur de base liées à la cinématique du point

2 Dérivation vectorielle

3 Composition cinématique

- Composition des vitesses
- Composition des accélérations
- Composition par relation de Chasles



Plan

1 Grandeur de base liées à la cinématique du point

2 Dérivation vectorielle

3 Composition cinématique

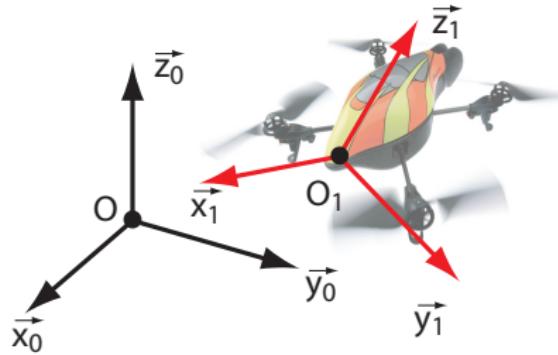
- Composition des vitesses
- Composition des accélérations
- Composition par relation de Chasles



Introduction

Introduction

- Ce chapitre présente les bases de calculs liées à la cinématique du point. Nous pourrons alors utiliser ces notions pour étudier les mouvements relatifs de solides.
- On étudiera les mouvements par rapport à des référentiels d'observation. Nous pourrons exprimer les champs de vitesses dans des repères ou des bases qui pourront être différents du référentiel d'observation. On les appellera repère d'expression.

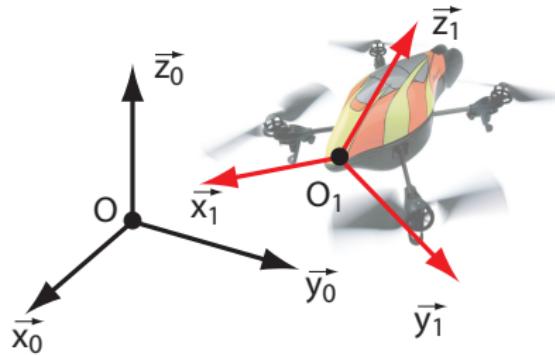


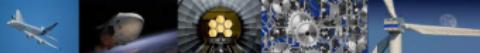


Introduction

Introduction

- Ce chapitre présente les bases de calculs liées à la cinématique du point. Nous pourrons alors utiliser ces notions pour étudier les mouvements relatifs de solides.
- On étudiera les mouvements par rapport à des **référentiels d'observation**. Nous pourrons exprimer les champs de vitesses dans des repères ou des bases qui pourront être différents du référentiel d'observation. On les appellera **repère d'expression**.

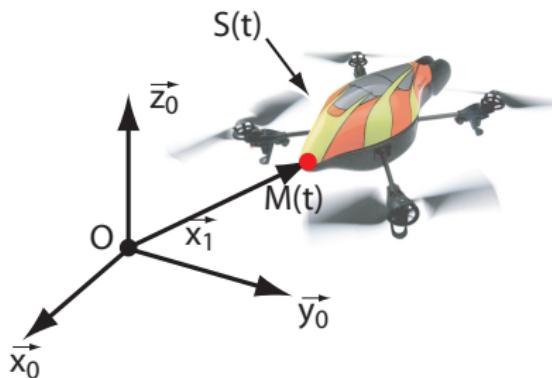




Cinématique du point : vecteur position

Vecteur position

Soit un solide S en mouvement par rapport à un repère R_O ($O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0}$). On repère un point $M(t)$ d'un solide à l'aide du vecteur position $\overrightarrow{OM(t)}$.



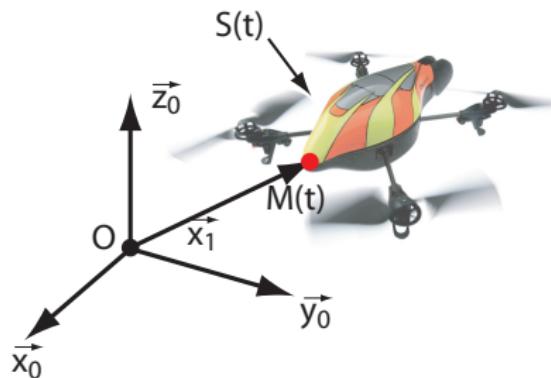
Remarque

Pour exprimer $\overrightarrow{OM(t)}$, on pourra utiliser le système de coordonnées le plus adapté (voir chapitre précédent) au problème en tenant compte de la nature du mouvement.

Cinématique du point : vecteur position

Vecteur position

Soit un solide S en mouvement par rapport à un repère R_O ($O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0}$). On repère un point $M(t)$ d'un solide à l'aide du vecteur position $\overrightarrow{OM(t)}$.



Remarque

Pour exprimer $\overrightarrow{OM(t)}$, on pourra utiliser le système de coordonnées le plus adapté (voir chapitre précédent) au problème en tenant compte de la nature du mouvement.



Cinématique du point : vecteur vitesse

Vecteur vitesse

$$\vec{V}(M/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} \right]_{R_0}. \quad (1)$$

- Le vecteur vitesse a une direction tangente à la trajectoire.
- La norme du vecteur vitesse est homogène à une longueur divisée par un temps.

Attention

- Le vecteur vitesse est obtenu par dérivation vectorielle.
- La définition du repère par rapport auquel le vecteur position est dérivé est primordiale.
- Ce vecteur peut toutefois être exprimé dans n'importe quelle base.
- On préfère bien souvent représenter ce vecteur dans la base locale.



Cinématique du point : vecteur vitesse

Vecteur vitesse

$$\vec{V}(M/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} \right]_{R_0}. \quad (1)$$

- Le vecteur vitesse a une direction tangente à la trajectoire.
- La norme du vecteur vitesse est homogène à une longueur divisée par un temps.

Attention

- Le vecteur vitesse est obtenu par dérivation vectorielle.
- La définition du repère par rapport auquel le vecteur position est dérivé est primordiale.
- Ce vecteur peut toutefois être exprimé dans n'importe quelle base.
- On préfère bien souvent représenter ce vecteur dans la base locale.



Cinématique du point : vecteur vitesse

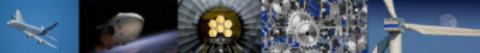
Vecteur vitesse

$$\vec{V}(M/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} \right]_{R_0}. \quad (1)$$

- Le vecteur vitesse a une direction tangente à la trajectoire.
- La norme du vecteur vitesse est homogène à une longueur divisée par un temps.

Attention

- Le vecteur vitesse est obtenu par dérivation vectorielle.
- La définition du repère par rapport auquel le vecteur position est dérivé est primordiale.
- Ce vecteur peut toutefois être exprimé dans n'importe quelle base.
- On préfère bien souvent représenter ce vecteur dans la base locale.



Cinématique du point : vecteur vitesse

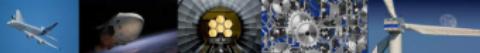
Vecteur vitesse

$$\vec{V}(M/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} \right]_{R_0}. \quad (1)$$

- Le vecteur vitesse a une direction tangente à la trajectoire.
- La norme du vecteur vitesse est homogène à une longueur divisée par un temps.

Attention

- Le vecteur vitesse est obtenu par dérivation vectorielle.
- La définition du repère par rapport auquel le vecteur position est dérivé est primordiale.
- Ce vecteur peut toutefois être exprimé dans n'importe quelle base.
- On préférera bien souvent représenter ce vecteur dans la base locale.



Cinématique du point : vecteur vitesse

Vecteur vitesse

$$\vec{V}(M/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} \right]_{R_0}. \quad (1)$$

- Le vecteur vitesse a une direction tangente à la trajectoire.
- La norme du vecteur vitesse est homogène à une longueur divisée par un temps.

Attention

- Le vecteur vitesse est obtenu par dérivation vectorielle.
- La définition du repère par rapport auquel le vecteur position est dérivé est primordiale.
- Ce vecteur peut toutefois être exprimé dans n'importe quelle base.
- On préférera bien souvent représenter ce vecteur dans la base locale.

Cinématique du point : vecteur vitesse

Vecteur vitesse

$$\vec{V}(M/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} \right]_{R_0}. \quad (1)$$

- Le vecteur vitesse a une direction tangente à la trajectoire.
- La norme du vecteur vitesse est homogène à une longueur divisée par un temps.

Attention

- Le vecteur vitesse est obtenu par dérivation vectorielle.
- La définition du repère par rapport auquel le vecteur position est dérivé est primordiale.
- Ce vecteur peut toutefois être exprimé dans n'importe quelle base.
- On préférera bien souvent représenter ce vecteur dans la base locale.



Cinématique du point : vecteur vitesse

Vecteur vitesse

$$\vec{V}(M/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} \right]_{R_0}. \quad (1)$$

- Le vecteur vitesse a une direction tangente à la trajectoire.
- La norme du vecteur vitesse est homogène à une longueur divisée par un temps.

Attention

- Le vecteur vitesse est obtenu par dérivation vectorielle.
- La définition du repère par rapport auquel le vecteur position est dérivé est primordiale.
- Ce vecteur peut toutefois être exprimé dans n'importe quelle base.
- On préférera bien souvent représenter ce vecteur dans la base locale.



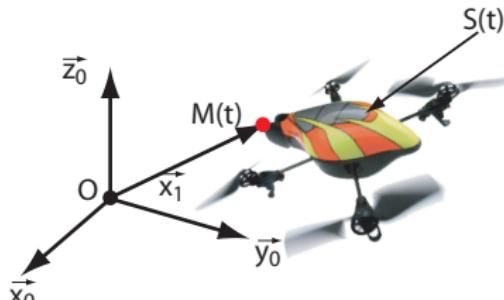
Cinématique du point : vecteur vitesse

Interprétation graphique

$$\vec{V}(M/R_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM(t + \Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)}}{\Delta t}.$$

$$\overrightarrow{OM(t + \Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)}$$

On remarque que lorsque $\Delta t \rightarrow 0$, $\vec{V}(M/R_0) \mapsto \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)} / \Delta t$





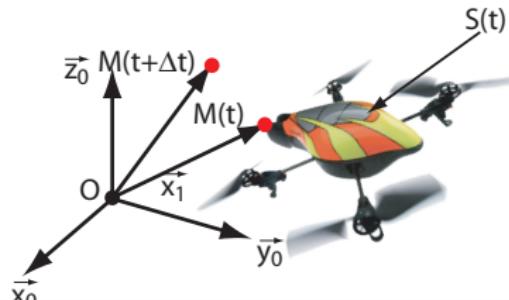
Cinématique du point : vecteur vitesse

Interprétation graphique

$$\vec{V}(M/R_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM(t + \Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)}}{\Delta t}.$$

$$\overrightarrow{OM(t + \Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)}$$

On remarque que lorsque $\Delta t \rightarrow 0$, $\vec{V}(M/R_0) \mapsto \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)} / \Delta t$





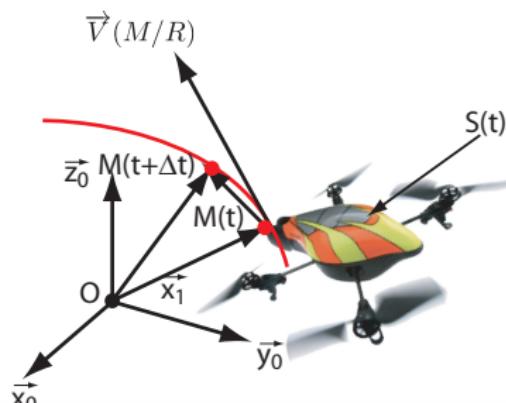
Cinématique du point : vecteur vitesse

Interprétation graphique

$$\vec{V}(M/R_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM(t + \Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)}}{\Delta t}.$$

$$\overrightarrow{OM(t + \Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)}$$

On remarque que lorsque $\Delta t \rightarrow 0$, $\vec{V}(M/R_0) \mapsto \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)} / \Delta t$





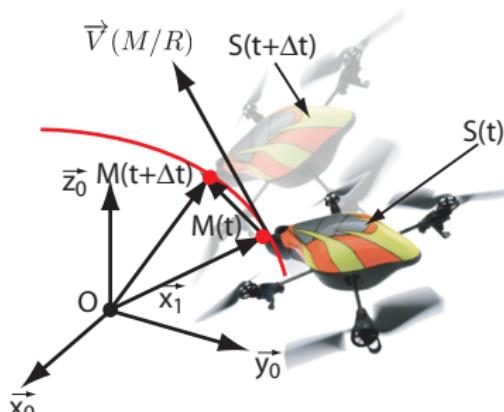
Cinématique du point : vecteur vitesse

Interprétation graphique

$$\vec{V}(M/R_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM(t + \Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)}}{\Delta t}.$$

$$\overrightarrow{OM(t + \Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)}$$

On remarque que lorsque $\Delta t \rightarrow 0$, $\vec{V}(M/R_0) \mapsto \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)} / \Delta t$



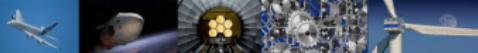


Cinématique du point : vecteur accélération

Vecteur accélération

$$\vec{a}(M/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{V}(M/R_0)}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d^2\overrightarrow{OM}(t)}{dt^2} \right]_{R_0}. \quad (2)$$

La norme du vecteur accélération est homogène à une longueur divisée par un temps au carré.

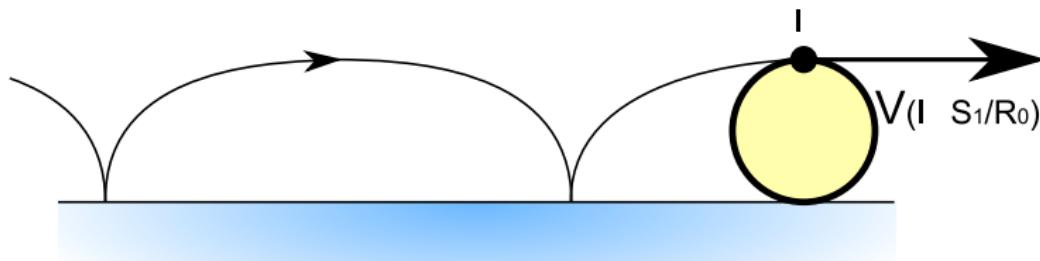


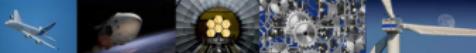
Cinématique du point : Trajectoire

Trajectoire

On définit la trajectoire (Δ) du point M dans le repère R_0 par l'ensemble des points I de R par lequel passe M au cours du temps.

$$(\Delta) = \{M_{(t)}, \forall t\}$$





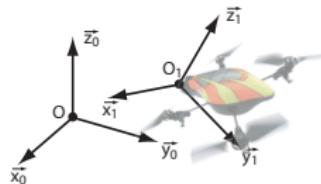
Cinématique du point : vecteur de rotation instantané

Vecteur de rotation instantané

Soit le repère R_1 attaché à S , le **vecteur de rotation instantané** du repère R_1 par rapport à R_0 (ou de S/R_0) mesure la vitesse angulaire de changement d'orientation du repère R_1 par rapport à R_0 . On le note

$$\vec{\Omega}(R_1/R_0). \quad (3)$$

Sa norme est homogène à un angle divisé par une unité de temps donc à l'inverse d'un temps (une mesure d'angle est sans dimension).



Propriété

Contrairement au vecteur vitesse, le vecteur de rotation instantané est le même pour tous les points d'un même solide. Il ne dépend pas du point considéré.



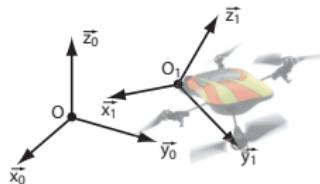
Cinématique du point : vecteur de rotation instantané

Vecteur de rotation instantané

Soit le repère R_1 attaché à S , le **vecteur de rotation instantané** du repère R_1 par rapport à R_0 (ou de S/R_0) mesure la vitesse angulaire de changement d'orientation du repère R_1 par rapport à R_0 . On le note

$$\vec{\Omega}(R_1/R_0). \quad (3)$$

Sa norme est homogène à un angle divisé par une unité de temps donc à l'inverse d'un temps (une mesure d'angle est sans dimension).



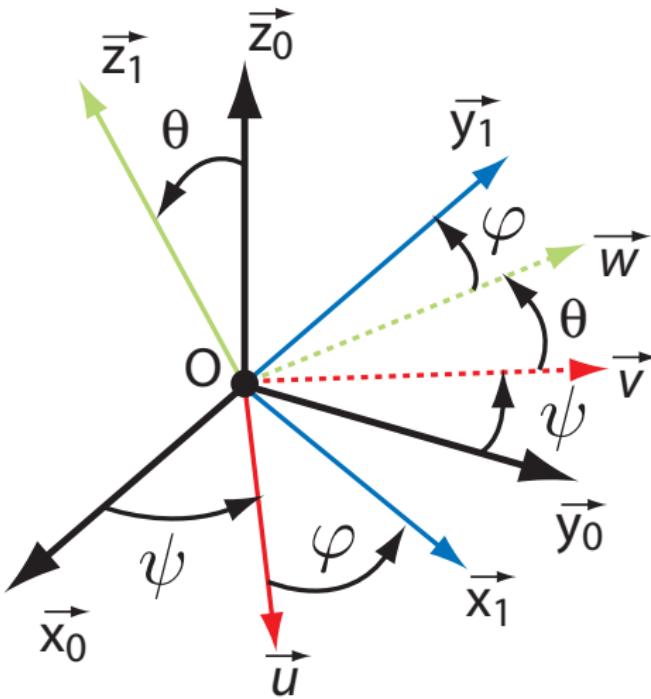
Propriété

Contrairement au vecteur vitesse, le vecteur de rotation instantané est le même pour tous les points d'un même solide. Il ne dépend pas du point considéré.



Cinématique du point : vecteur de rotation instantané

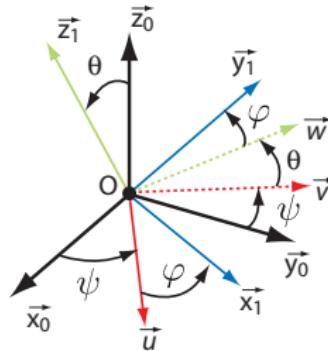
Exemple : angles d'Euler :





Cinématique du point : vecteur de rotation instantané

Exemple : angles d'Euler :

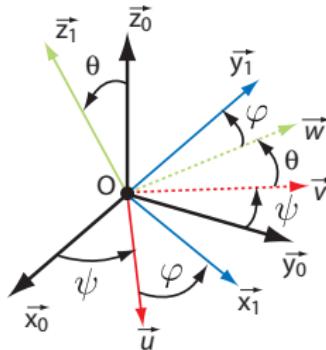


$$\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\psi} \vec{z}_0 + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\varphi} \vec{z}_1$$

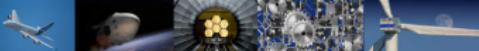


Cinématique du point : vecteur de rotation instantané

Exemple : angles d'Euler :

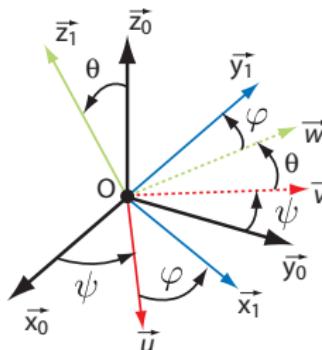


$$\begin{aligned}\vec{\Omega}(R_1/R_0) &= \dot{\psi} \vec{z}_0 + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\varphi} \vec{z}_1 \\ &= \dot{\psi} \vec{z}_0 + \dot{\theta} (\cos(\psi) \vec{x}_0 + \sin(\psi) \vec{y}_0) + \dot{\varphi} (\cos(\theta) \vec{z}_0 - \sin(\theta) \vec{v})\end{aligned}$$



Cinématique du point : vecteur de rotation instantané

Exemple : angles d'Euler :



$$\begin{aligned}\vec{\Omega}(R_1/R_0) &= \dot{\psi} \vec{z}_0 + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\varphi} \vec{z}_1 \\&= \dot{\psi} \vec{z}_0 + \dot{\theta} (\cos(\psi) \vec{x}_0 + \sin(\psi) \vec{y}_0) + \dot{\varphi} (\cos(\theta) \vec{z}_0 - \sin(\theta) \vec{v}) \\&= \dot{\psi} \vec{z}_0 + \dot{\theta} (\cos(\psi) \vec{x}_0 + \sin(\psi) \vec{y}_0) + \dot{\varphi} (\cos(\theta) \vec{z}_0 - \sin(\theta) (\cos(\psi) \vec{y}_0 - \sin(\psi) \vec{x}_0)) \\&= \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \sin(\theta) \sin(\psi) + \dot{\theta} \cos(\psi) \\ -\dot{\varphi} \sin(\theta) \cos(\psi) + \dot{\theta} \sin(\psi) \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos(\theta) \end{bmatrix}_{R_0}\end{aligned}$$



Plan

1 Grandeur de base liées à la cinématique du point

2 Dérivation vectorielle

3 Composition cinématique

- Composition des vitesses
- Composition des accélérations
- Composition par relation de Chasles



Cinématique du point : Dérivation vectorielle

Vecteur exprimé dans la base de dérivation

•

$$\left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d(x(t) \cdot \vec{x}_0 + y(t) \cdot \vec{y}_0 + z(t) \cdot \vec{z}_0)}{dt} \right]_{R_0}$$

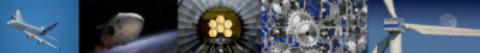
•

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt} \right]_{R_0} &= \frac{dx(t)}{dt} \cdot \vec{x}_0 + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \vec{y}_0 + \frac{dz(t)}{dt} \cdot \vec{z}_0 \\ &+ x(t) \cdot \left[\frac{d\vec{x}_0}{dt} \right]_{R_0} + y(t) \cdot \left[\frac{d\vec{y}_0}{dt} \right]_{R_0} + z(t) \cdot \left[\frac{d\vec{z}_0}{dt} \right]_{R_0}. \end{aligned}$$

- Or les vecteurs unitaires \vec{x}_0 , \vec{y}_0 et \vec{z}_0 sont fixes dans le repère R_0 (O , \vec{x}_0 , \vec{y}_0 , \vec{z}_0) donc par rapport au temps. On obtient alors :

•

$$\boxed{\left[\frac{d\vec{U}(t)}{dt} \right]_R = \frac{dx(t)}{dt} \cdot \vec{x}_0 + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \vec{y}_0 + \frac{dz(t)}{dt} \cdot \vec{z}_0.} \quad (4)$$



Cinématique du point : Dérivation vectorielle

Vecteur exprimé dans la base de dérivation



$$\left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d(x(t) \cdot \overrightarrow{x_0} + y(t) \cdot \overrightarrow{y_0} + z(t) \cdot \overrightarrow{z_0})}{dt} \right]_{R_0}$$



$$\begin{aligned} \left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt} \right]_{R_0} &= \frac{dx(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{x_0} + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{y_0} + \frac{dz(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{z_0} \\ &+ x(t) \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{x_0}}{dt} \right]_{R_0} + y(t) \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{y_0}}{dt} \right]_{R_0} + z(t) \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{z_0}}{dt} \right]_{R_0}. \end{aligned}$$

- Or les vecteurs unitaires $\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{z_0}$ sont fixes dans le repère R_0 ($O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}$) donc par rapport au temps. On obtient alors :



$$\boxed{\left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt} \right]_R = \frac{dx(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{x_0} + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{y_0} + \frac{dz(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{z_0}.} \quad (4)$$



Cinématique du point : Dérivation vectorielle

Vecteur exprimé dans la base de dérivation



$$\left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d(x(t) \cdot \overrightarrow{x_0} + y(t) \cdot \overrightarrow{y_0} + z(t) \cdot \overrightarrow{z_0})}{dt} \right]_{R_0}$$



$$\begin{aligned} \left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt} \right]_{R_0} &= \frac{dx(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{x_0} + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{y_0} + \frac{dz(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{z_0} \\ &+ x(t) \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{x_0}}{dt} \right]_{R_0} + y(t) \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{y_0}}{dt} \right]_{R_0} + z(t) \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{z_0}}{dt} \right]_{R_0}. \end{aligned}$$

- Or les vecteurs unitaires $\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{z_0}$ sont fixes dans le repère R_0 (O , $\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{y_0}$, $\overrightarrow{z_0}$) donc par rapport au temps. On obtient alors :



$$\boxed{\left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt} \right]_R = \frac{dx(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{x_0} + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{y_0} + \frac{dz(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{z_0}.} \quad (4)$$



Cinématique du point : Dérivation vectorielle

Vecteur exprimé dans la base de dérivation



$$\left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d(x(t) \cdot \overrightarrow{x_0} + y(t) \cdot \overrightarrow{y_0} + z(t) \cdot \overrightarrow{z_0})}{dt} \right]_{R_0}$$



$$\begin{aligned} \left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt} \right]_{R_0} &= \frac{dx(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{x_0} + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{y_0} + \frac{dz(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{z_0} \\ &+ x(t) \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{x_0}}{dt} \right]_{R_0} + y(t) \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{y_0}}{dt} \right]_{R_0} + z(t) \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{z_0}}{dt} \right]_{R_0}. \end{aligned}$$

- Or les vecteurs unitaires $\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{z_0}$ sont fixes dans le repère R_0 (O , $\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{y_0}$, $\overrightarrow{z_0}$) donc par rapport au temps. On obtient alors :



$$\boxed{\left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt} \right]_R = \frac{dx(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{x_0} + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{y_0} + \frac{dz(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{z_0}.} \quad (4)$$



Cinématique du point : dérivation vectorielle

Vecteur exprimé dans une autre base

dérivation vectorielle

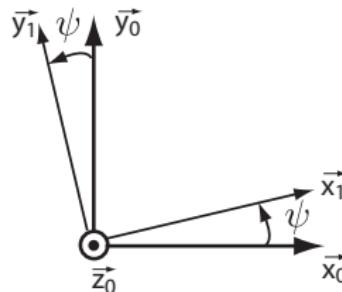
$$\left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt} \right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{U(t)}, \quad (5)$$

où $\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0)$ est le vecteur de rotation instantané du repère R_1 par rapport au repère R_0 .



Cinématique du point : dérivation vectorielle

Cas particulier de la rotation de R_1 par rapport à R_0 autour d'un seul axe fixe \vec{z}_0



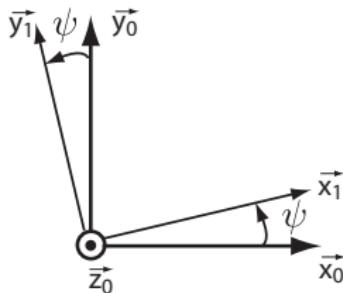
$$\left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_0} = \dots$$

$$\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_{R_0} = \dots$$

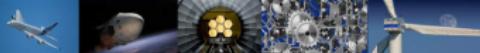


Cinématique du point : dérivation vectorielle

Cas particulier de la rotation de R_1 par rapport à R_0 autour d'un seul axe fixe \vec{z}_0

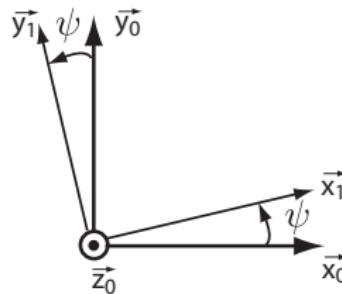


$$\begin{aligned}\left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_0} &= \left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{x}_1 \\ &= \vec{0} + \dot{\psi} \vec{z}_{0,1} \wedge \vec{x}_1 = \dot{\psi} \vec{y}_1\end{aligned}$$
$$\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_{R_0} = \dots$$



Cinématique du point : dérivation vectorielle

Cas particulier de la rotation de R_1 par rapport à R_0 autour d'un seul axe fixe \vec{z}_0



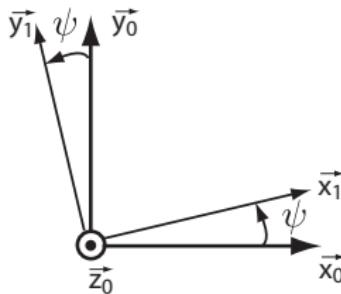
$$\begin{aligned}\left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_0} &= \left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{x}_1 \\ &= \vec{0} + \dot{\psi} \vec{z}_{0,1} \wedge \vec{x}_1 = \dot{\psi} \vec{y}_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_{R_0} &= \left[\frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{y}_1 \\ &= \vec{0} + \dot{\psi} \vec{z}_{0,1} \wedge \vec{y}_1 = -\dot{\psi} \vec{x}_1.\end{aligned}$$



Cinématique du point : dérivation vectorielle

Cas particulier de la rotation de R_1 par rapport à R_0 autour d'un seul axe fixe \vec{z}_0



$$\left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_0} = \dot{\psi} \vec{y}_1$$

$$\left[\frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_{R_0} = -\dot{\psi} \vec{x}_1$$

Remarque

On remarque que la dérivée d'un vecteur tournant autour d'un axe fixe par rapport au repère de dérivation, a pour norme, la vitesse angulaire et est dirigée par le vecteur directement orthogonal au vecteur initial.



Plan

1 Grandeurs de base liées à la cinématique du point

2 Dérivation vectorielle

3 **Composition cinématique**

- Composition des vitesses
- Composition des accélérations
- Composition par relation de Chasles



Cinématique du point : composition des vitesses

-

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$$

- On calcule alors la vitesse de M par rapport au repère R_0 à l'aide de la dérivée vectorielle du vecteur position :

$$\vec{V}(M/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \right]_{R_0} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_0}.$$

- Or,

$$\left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}.$$

- On obtient alors

$$\begin{aligned} \vec{V}(M/R_0) &= \left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \right]_{R_0} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}. \\ &= \vec{V}_e(M, R_1/R_0) + \vec{V}_r(M/R_1). \end{aligned}$$



Cinématique du point : composition des vitesses

-

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$$

- On calcule alors la vitesse de M par rapport au repère R_0 à l'aide de la dérivée vectorielle du vecteur position :

$$\vec{V}(M/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \right]_{R_0} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_0}.$$

- Or,

$$\left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}.$$

- On obtient alors

$$\begin{aligned} \vec{V}(M/R_0) &= \left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \right]_{R_0} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}. \\ &= \vec{V}_e(M, R_1/R_0) + \vec{V}_r(M/R_1). \end{aligned}$$



Cinématique du point : composition des vitesses

-

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$$

- On calcule alors la vitesse de M par rapport au repère R_0 à l'aide de la dérivée vectorielle du vecteur position :

$$\vec{V}(M/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \right]_{R_0} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_0}.$$

- Or,

$$\left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}.$$

- On obtient alors

$$\begin{aligned}\vec{V}(M/R_0) &= \left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \right]_{R_0} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}. \\ &= \vec{V}_e(M, R_1/R_0) + \vec{V}_r(M/R_1).\end{aligned}$$



Cinématique du point : composition des vitesses

-

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$$

- On calcule alors la vitesse de M par rapport au repère R_0 à l'aide de la dérivée vectorielle du vecteur position :

$$\vec{V}(M/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \right]_{R_0} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_0}.$$

- Or,

$$\left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}.$$

- On obtient alors

$$\begin{aligned} \vec{V}(M/R_0) &= \left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \right]_{R_0} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}. \\ &= \vec{V}_e(M, R_1/R_0) + \vec{V}_r(M/R_1). \end{aligned}$$



Cinématique du point : composition des vitesses

- Où $\vec{V}_e(M/R_0)$ se définit comme la vitesse d'entrainement de M par rapport à R_0 :

$$\begin{aligned}\vec{V}_e(M/R_0) &= \vec{V}(M \in R_1/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \right]_{R_0} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M} \\ &= \vec{V}(O_1/R_0) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M} \\ &= \vec{V}(M \in R_1/R_0)\end{aligned}$$

- De plus $\vec{V}_r(M/R_1)$ se définit comme la vitesse relative de M par rapport au repère R_1 :

$$\vec{V}_r(M/R_1) = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_1}.$$



Cinématique du point : composition des vitesses

- Où $\vec{V}_e(M/R_0)$ se définit comme la vitesse d'entrainement de M par rapport à R_0 :

$$\begin{aligned}\vec{V}_e(M/R_0) &= \vec{V}(M \in R_1/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1 M}}{dt} \right]_{R_0} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1 M} \\ &= \vec{V}(O_1/R_0) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1 M} \\ &= \vec{V}(M \in R_1/R_0)\end{aligned}$$

- De plus $\vec{V}_r(M/R_1)$ se définit comme la vitesse relative de M par rapport au repère R_1 :

$$\vec{V}_r(M/R_1) = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1 M}}{dt} \right]_{R_1}.$$



Cinématique du point : composition des vitesses

- Où $\vec{V}_e(M/R_0)$ se définit comme la vitesse d'entrainement de M par rapport à R_0 :

$$\begin{aligned}\vec{V}_e(M/R_0) &= \vec{V}(M \in R_1/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1 M}}{dt} \right]_{R_0} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1 M} \\ &= \vec{V}(O_1/R_0) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1 M} \\ &= \vec{V}(M \in R_1/R_0)\end{aligned}$$

- De plus $\vec{V}_r(M/R_1)$ se définit comme la vitesse relative de M par rapport au repère R_1 :

$$\vec{V}_r(M/R_1) = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1 M}}{dt} \right]_{R_1}.$$



Cinématique du point : composition des vitesses

Composition des vitesses

La formule de composition des vitesses s'écrit alors :

$$\vec{V}(M/R_0) = \vec{V}_r(M/R_1) + \vec{V}_e(M, R_1/R_0) = \vec{V}(M/R_1) + \vec{V}(M \in R_1/R_0). \quad (6)$$

Avec



Cinématique du point : composition des vitesses

Composition des vitesses

La formule de composition des vitesses s'écrit alors :

$$\vec{V}(M/R_0) = \vec{V}_r(M/R_1) + \vec{V}_e(M, R_1/R_0) = \vec{V}(M/R_1) + \vec{V}(M \in R_1/R_0). \quad (6)$$

Avec



$$\begin{aligned}\vec{V}_e(M, R_1/R_0) &= \left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \right]_{R_0} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1 M} \\ &= \vec{V}(O_1/R_0) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1 M} = \vec{V}(M, R_1/R_0)\end{aligned}$$



$$\vec{V}_r(M/R_1) = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1 M}}{dt} \right]_{R_1}.$$



Cinématique du point : composition des vitesses

Composition des vitesses

La formule de composition des vitesses s'écrit alors :

$$\vec{V}(M/R_0) = \vec{V}_r(M/R_1) + \vec{V}_e(M, R_1/R_0) = \vec{V}(M/R_1) + \vec{V}(M \in R_1/R_0). \quad (6)$$

Avec



$$\begin{aligned} \vec{V}_e(M, R_1/R_0) &= \left[\frac{d \overrightarrow{O_1 O}}{dt} \right]_{R_0} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1 M} \\ &= \vec{V}(O_1/R_0) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1 M} = \vec{V}(M, R_1/R_0) \end{aligned}$$



$$\vec{V}_r(M/R_1) = \left[\frac{d \overrightarrow{O_1 M}}{dt} \right]_{R_1}.$$



Cinématique du point : composition des vitesses

Composition des vitesses

La formule de composition des vitesses s'écrit alors :

$$\vec{V}(M/R_0) = \vec{V}_r(M/R_1) + \vec{V}_e(M, R_1/R_0) = \vec{V}(M/R_1) + \vec{V}(M \in R_1/R_0). \quad (6)$$

Avec

Interprétation de la vitesse d'entraînement

La vitesse d'entraînement $\vec{V}(M \in R_1/R_0)$ s'interprète comme la vitesse du point M appartenant à R_1 par rapport à R_0 . C'est à dire comme si M était fixe dans R_1 .



Cinématique du point : composition des accélérations

Composition des accélérations

La formule de **composition des accélérations** s'écrit :

$$\vec{a}(M/R_0) = \vec{a}(M/R_1) + \vec{a}(M, R_1/R_0) + 2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1) \quad (7)$$

L'accélération **absolue** $\vec{a}(M/R_0)$ se décompose ainsi en :

- une accélération **relative** : $\vec{a}(M/R_1)$,
- une accélération **d'entraînement** :
$$\vec{a}(M, R_1/R_0) = \left[\frac{d}{dt} (\vec{\Omega}(R_1/R_0)) \right]_{R_0} \wedge \overrightarrow{O_1 M} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge (\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1 M}),$$
- une accélération **complémentaire ou de Coriolis** : $2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1)$.



Cinématique du point : composition des accélérations

Composition des accélérations

La formule de **composition des accélérations** s'écrit :

$$\vec{a}(M/R_0) = \vec{a}(M/R_1) + \vec{a}(M, R_1/R_0) + 2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1) \quad (7)$$

L'accélération **absolue** $\vec{a}(M/R_0)$ se décompose ainsi en :

- une accélération **relative** : $\vec{a}(M/R_1)$,
- une accélération **d'entraînement** :
$$\vec{a}(M, R_1/R_0) = \left[\frac{d}{dt} (\vec{\Omega}(R_1/R_0)) \right]_{R_0} \wedge \overrightarrow{O_1 M} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge (\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1 M}),$$
- une accélération **complémentaire ou de Coriolis** : $2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1)$.



Cinématique du point : composition des accélérations

Composition des accélérations

La formule de **composition des accélérations** s'écrit :

$$\vec{a}(M/R_0) = \vec{a}(M/R_1) + \vec{a}(M, R_1/R_0) + 2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1) \quad (7)$$

L'accélération **absolue** $\vec{a}(M/R_0)$ se décompose ainsi en :

- une accélération **relative** : $\vec{a}(M/R_1)$,
- une accélération **d'entraînement** :
$$\vec{a}(M, R_1/R_0) = \left[\frac{d}{dt} \left(\vec{\Omega}(R_1/R_0) \right) \right]_{R_0} \wedge \overrightarrow{O_1 M} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge (\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1 M}),$$
- une accélération **complémentaire ou de Coriolis** : $2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1)$.



Cinématique du point : composition des accélérations

Composition des accélérations

La formule de **composition des accélérations** s'écrit :

$$\vec{a}(M/R_0) = \vec{a}(M/R_1) + \vec{a}(M, R_1/R_0) + 2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1) \quad (7)$$

L'accélération **absolue** $\vec{a}(M/R_0)$ se décompose ainsi en :

- une accélération **relative** : $\vec{a}(M/R_1)$,
- une accélération **d'entraînement** :
$$\vec{a}(M, R_1/R_0) = \left[\frac{d}{dt} \left(\vec{\Omega}(R_1/R_0) \right) \right]_{R_0} \wedge \overrightarrow{O_1 M} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge (\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1 M}),$$
- une accélération **complémentaire ou de Coriolis** : $2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1)$.



Composition par relation de Chasles

Composition par relation de Chasles

Les champs cinématiques associés à la cinématique des solides sont décomposables à l'aide d'une "relation de Chasles" :

- Les vecteurs rotation instantanés :

$$\vec{\Omega}(S_n/S_0) = \vec{\Omega}(S_n/S_{n-1}) + \vec{\Omega}(S_{n-1}/S_{n-2}) + \cdots + \vec{\Omega}(1/0) \quad (8)$$

- les vecteurs vitesses d'entrainement en un même point A :

$$\vec{V}(A \in S_n/S_0) = \vec{V}(A \in S_n/S_{n-1}) + \vec{V}(A \in S_{n-1}/S_{n-2}) + \cdots + \vec{V}(A \in 1/0) \quad (9)$$

Remarque : notion de torseur

On verra dans le chapitre suivant que ces deux grandeurs seront modélisables dans un même outil : **Le Torseur Cinématique**.



Composition par relation de Chasles

Composition par relation de Chasles

Les champs cinématiques associés à la cinématique des solides sont décomposables à l'aide d'une "relation de Chasles" :

- Les vecteurs rotation instantanés :

$$\vec{\Omega}(S_n/S_0) = \vec{\Omega}(S_n/S_{n-1}) + \vec{\Omega}(S_{n-1}/S_{n-2}) \cdots \vec{\Omega}(1/0) \quad (8)$$

- les vecteurs vitesses d'entrainement en un même point A :

$$\vec{V}(A \in S_n/S_0) = \vec{V}(A \in S_n/S_{n-1}) + \vec{V}(A \in S_{n-1}/S_{n-2}) \cdots \vec{V}(A \in 1/0) \quad (9)$$

Remarque : notion de torseur

On verra dans le chapitre suivant que ces deux grandeurs seront modélisables dans un même outil : **Le Torseur Cinématique**.