Devoir surveillé n°3

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD et un autre.

Soit E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$. et $g : F \to G$. Établir les implications suivantes.

1) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.

2) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.

3) $g \circ f$ injective et f surjective $\Rightarrow g$ injective.

4) $g \circ f$ surjective et g injective $\Rightarrow f$ surjective.

5) $f \circ g \circ f$ bijective $\Rightarrow f$ et g bijectives.

II. $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}^p$ sont dénombrables.

On se propose dans ce problème de montrer qu'il y a « autant d'éléments » dans $\mathbb{N}$ que dans $\mathbb{Z}$, et même mieux : « autant d'éléments » dans $\mathbb{N}$ que dans $\mathbb{N}^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que $\mathbb{Z}$ ainsi que les $\mathbb{N}^p$ sont *dénombrables*.
On rappelle que deux ensembles « ont le même nombre d'éléments » s'il existe une bijection entre ces deux ensembles.
On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'un entier est pair ou impair, mais ne peut être pair et impair simultanément.

1) *Questions préliminaires.*

- **a)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $k, \ell \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2^k(2\ell + 1)$.
- **b)** Montrer que, si $n \in \mathbb{N}^*$, de tels entiers k, ℓ sont uniques. On dit alors que 2^k est la plus grande puissance de 2 divisant n.

2) On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & \dfrac{(-1)^n}{4} \times (2n + 1 - (-1)^n) \end{array} \right.$. On veut montrer que f est une bijection.

- **a)** Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $f(2k)$, et pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $f(2k - 1)$.
- **b)** En déduire un antécédent de $p \in \mathbb{Z}$ par f, en distinguant les cas p positif ou négatif.
- **c)** En déduire une fonction $\tilde{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ telle que $\tilde{f} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ et $f \circ \tilde{f} = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$.
- **d)** Conclure.

3) On veut montrer que l'application $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (m, n) & \mapsto & 2^m(2n + 1) - 1 \end{array} \right.$ est une bijection.

- **a)** Montrer que g est injective.
- **b)** Montrer que g est surjective.

4) On souhaite montrer par récurrence l'existence d'une bijection de $\mathbb{N}^p$ sur $\mathbb{N}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Le cas $p = 1$ est immédiat ; le cas $p = 2$ vient d'être traité. On suppose donc que pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$, il existe une bijection φ_p de $\mathbb{N}^p$ sur $\mathbb{N}$. On définit alors une application $\varphi_{p+1} \ : \ \mathbb{N}^{p+1} \to \mathbb{N}$ de la façon suivante :

$$\forall (n_1, n_2, \ldots, n_{p+1}) \in \mathbb{N}^{p+1}, \ \varphi_{p+1}(n_1, n_2, \ldots, n_{p+1}) = g\left(\varphi_p(n_1, n_2, \ldots, n_p), n_{p+1}\right).$$

Montrer que φ_{p+1} est une bijection de $\mathbb{N}^{p+1}$ sur $\mathbb{N}$.

III. Résolution d'une équation différentielle non linéaire.

On note (E) l'équation différentielle : $xy' - |y| = x^2$.
Cette équation différentielle est non linéaire, en raison de la valeur absolue.
Dans cet exercice, on propose la résolution de cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire on cherche à déterminer toutes les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables et telles que
pour tout $x \in \mathbb{R}, xy'(x) - |y(x)| = x^2$.
Dans la suite, on note (E_+) l'équation différentielle $xy' + y = x^2$ et (E_-) l'équation différentielle $xy' - y = x^2$.

1) Soit I un intervalle ne contenant pas 0 .
- **a)** Résoudre (E_+) sur I.
- **b)** Résoudre (E_-) sur I.

A. Résolution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$

2) Déterminer les solutions strictement positives de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Montrer qu'il n'existe pas de solution strictement négative de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que y n'est pas strictement positive, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $y\left(x_0\right) \leqslant 0$.
- **a)** Prouver que y est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- **b)** Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $y(\alpha) = 0$.
- **c)** En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, \ y(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - \alpha^3}{3x} & \text{si } x \leqslant \alpha \\ x(x-\alpha) & \text{si } x > \alpha \end{cases}$
- **d)** Déterminer la limite de y en 0^+.

5) Réciproquement, soit $\alpha > 0$ et soit y_α la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ y_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - \alpha^3}{3x} & \text{si } x \leqslant \alpha \\ x(x-\alpha) & \text{si } x > \alpha \end{cases}$$

Montrer que y_α est dérivable en α. En déduire que y_α est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

6) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

B. Résolution de (E) sur $\mathbb{R}$.

7) Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
- **a)** Prouver qu'il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, y(x) = x(x+\lambda)$.
- **b)** Soit $z : x \mapsto y(-x)$. Montrer que z est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

8) Prouver alors que (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$.

— **FIN** —