Devoir surveillé n°4

Barème

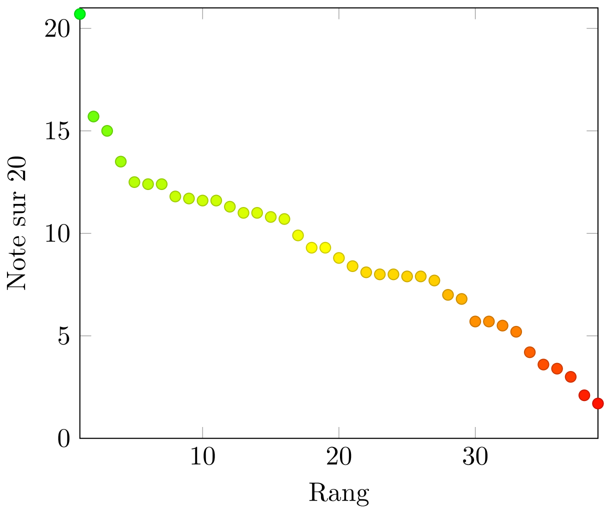
Calculs : 17 questions sur 2 points, total sur 34 , ramené sur 5 points
Problème : 39 questions sur 4 points, total sur 156, ramené sur 15 points

Soit $\varphi : x \mapsto \frac{1}{10}\lfloor 10x \rfloor$, c le nombre de points obtenus sur la fiche de calculs et p le nombre de points obtenus sur les exercices, la note sur 20 est le réel $n = \min\left\{\varphi\left(\frac{5c}{34}+\frac{15p}{\alpha}\right), 20\right\}$ avec $\alpha = 95$

Statistiques

	Calculs	Problème	*Précision*
Minimum	4	3	*5%*
Q1	14	26	*45%*
Médiane	19	40	*57%*
Q3	22	56	*66%*
Maximum	29	104	*86%*
Moyenne	17.7	40.5	*54.0%*

Répartition des notes



Remarques générales

— Noël approchant, j'ai été plutôt généreuse concernant les résultats non encadrés tant qu'ils n'étaient pas trop nombreux. Cela ne se poursuivra pas en janvier...
— J'ai croisé quelques numérotations de copies ou de pages assez exotiques.
— Il faut définir et quantifier **toutes** les variables que vous utilisez. Cela a encore posé problème dans les exercices de ce devoir, avec des réponses sans aucun sens faute d'avoir correctement introduit les objets.

Exercice 1

— Le passage d'une inégalité stricte à une inégalité large a fréquemment été faite n'importe comment... Si $n < m$ et si n **ET** m sont des entiers, alors $n \leqslant m-1$. En revanche, $\frac{3}{4} < 1$ et 1 est un entier, pourtant $\frac{3}{4} > 0$...

Exercice 2

— **Question 2.** On ne commence pas la réponse à une question par « Non », on rédige une phrase. D'ailleurs, ici, on commence plutôt par donner un contre-exemple (en prouvant bien qu'il s'agit d'un contre-exemple), puis on termine par une phrase de conclusion qui répond à la question.
Certains, probablement inspirés par la question suivante, ont affirmé que « la somme de deux matrices nilpotentes est nilpotente si ~~et seulement~~ si les deux matrices commutent », sans aucune preuve : c'est faux, on

pourra le vérifier avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Mais dans tous les cas, donner une telle réponse sans preuve ne vous aurait rapporté aucun point !

- **Question 3a.** Si B est une matrice quelconque (ou pire : une matrice nilpotente), vous ne pouvez pas écrire que $B^{n-k} = B^n \cancel{B^{-k}}$. **Si** B est inversible, alors B^{-k} désigne $(B^{-1})^k$. Ici, B est nilpotente, donc non inversible...
- **Question 3b.** Certaines acrobaties calculatoires pour tenter de faire croire que la formule est démontrée frôlent l'indécence. Transformer un $\times$ en $+$ ou écrire que pour deux matrices A et B et un entier naturel k, $(A+B)^k = A^k + B^k$ risque de faire dégringoler votre capital crédibilité...
- **Questions 6c/6d/6e.** Chacune de ces questions est en deux parties. Vous ne pouvez pas espérer avoir tous les points si vous répondez uniquement à la deuxième.

Exercice 3

- **Question 2a.** Le fait que p et q sont premiers entre eux n'est pas une justification suffisante pour affirmer que $p \not\equiv 0[q]$. Par exemple, 3 et 1 sont premiers entre eux, mais $3 \equiv 0[1]$.
- **Question 2c.** Pour utiliser le petit théorème de Fermat ici, il est indispensable d'indiquer explicitement que q est un nombre premier.
- **Question 3.** Il n'est pas possible d'utiliser directement les résultats de la question 2 ici, car dans la question 2, $q \neq p$, alors qu'aucune hypothèse similaire n'est faite sur q_i ici
- **Question 4.** La question précédente permet de démontrer qu'il n'existe pas un nombre fini *non nul* de nombres premiers q tels que l'équation $\varphi(x) \equiv 0[q]$ admette des solutions.

  On peut donc affirmer qu'il existe une infinité de nombres premiers q tels que cette équation admet des solutions, **ou qu'il n'en existe aucun**.

  Par ailleurs, pour terminer l'exercice, il ne suffit pas de se préoccuper de cette équation, mais il faut démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers q congrus à 1 modulo p.

  On remarquera par ailleurs que la question 2 supposait que q était différent de p, et qu'il faudra donc y prendre garde.

Exercice 4

Vous ne pouvez pas comprendre les questions de cet exercice (et encore moins y répondre) si vous n'introduisez pas correctement les variables en jeu, notamment n. Certaines réponses reposent sur le fait qu'une propriété donnée est vérifiée POUR TOUT n. Se contenter d'écrire cette propriété pour n, sans jamais quantifier ni introduire n est forcément faux, et est de toute façon incompréhensible si on ne connaît pas n.
Vous avez parfois deviné quels étaient les résultats, et les avaient donnés, mais sans aucune démonstration. Cela permet parfois mais rarement de glâner un petit point, mais en général : pas de preuve, pas de point.

Pour une suite réelle u, ce n'est pas parce que $u \to 0$ que $\inf u = 0$. Il fallait manipuler précisément la borne inférieure.

Question 1a. $\sigma(A)$ est définie comme une borne inférieure, c'est donc l'existence de cette borne inférieure qu'il convient de prouver. On n'oubliera ni d'indiquer que la partie est non vide, ni de justifier qu'elle est minorée.

Question 1c. Il est incohérent de donner une réponse dépendant de n. Vous devez introduire soigneusement n est examiner scrupuleusement ce que vous avez montré : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\{1, \ldots, n\} \subset A$.

Question 1d. J'aurais apprécié que le « passage à la borne inférieure » soit détaillé. Vous ne pouvez pas passer de $S_n(A)/n \leq S_n(B)/n$ à $\sigma(A) \leq \sigma(B)$ sans explications ... surtout si le n se promène sans avoir été introduit.

Question 2c. Vous êtes nombreux à avoir bien remarqué que, si n est pair, $S_n(A)/n = 1/2$ et, si n est impair, $S_n(A)/n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$. Cela se gâte ensuite : indiquer que $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \to \frac{1}{2}$ ne justifie aucunement que $\frac{1}{2}$ est un minorant ! $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \to \frac{1}{2}$ mais $\frac{1}{2}$ ne minore pas $\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Répartition des points

Version 1

	Question	Non traité	Non encadré	0	1	2	3	4
ex1	1	3	0	8	3	2	6	17
	2	6	0	6	1	8	3	15
ex2	1	3	0	4	1	2	10	19
	2	7	0	10	5	3	6	8
	3a	9	0	6	6	4	1	13
	3b	14	1	9	7	8	0	0
	4	29	0	5	0	0	1	4
	5	33	0	4	1	0	0	1
	6a	11	0	2	1	4	2	19
	6b	14	0	2	0	5	6	12
	6c	7	0	12	4	8	3	5
	6d	19	0	6	4	6	1	3
	6e	23	0	7	2	4	0	3
	6f	27	0	5	2	0	2	3
	6g	33	0	4	0	0	0	2
	6h	35	0	2	0	1	1	0
	6i	38	0	0	0	0	0	1
ex3	1	1	0	1	1	4	0	32
	2a	1	1	4	2	2	14	15
	2b	6	0	8	0	0	4	21
	2c	11	0	4	5	10	2	7
	2d	11	0	1	3	3	3	18
	2e	20	0	9	4	0	2	4
	2f	20	0	17	0	0	1	1
	2g	32	0	2	2	0	2	1
	2h	29	0	2	0	0	1	7
	3a	35	0	4	0	0	0	0
	3b	37	0	0	0	0	1	1
	4	35	0	2	2	0	0	0
ex4	1a	20	0	8	0	1	1	9
	1b	21	1	6	2	0	2	7
	1c	19	0	7	9	3	1	0
	1d	20	0	1	1	1	4	12
	2a	23	0	5	1	3	2	5
	2b	23	0	1	9	1	2	3
	2c	34	0	4	0	0	0	1
	3a	37	0	2	0	0	0	0
	3b	37	0	1	0	0	1	0
	3c	37	0	1	0	0	1	0