

LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIER

CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I. ET M.P.I.I.

ANNÉE 2024 - 2025



C9 : MODÉLISATION DES PERFORMANCES STATIQUES DES SYSTÈMES

TD 19 - Modélisation des actions mécaniques (C9-1)

Compétences

- **Modéliser**
 - Compléter un modèle multiphysique.
 - Modéliser une action mécanique.
 - Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.
- **Résoudre**
 - Proposer une démarche permettant la détermination d'une action mécanique inconnue ou d'une loi de mouvement.
 - Déterminer les actions mécaniques en statique.
- **Communiquer**
 - Lire et décoder un document technique : Schéma Cinématique
 - Utiliser un vocabulaire technique, des symboles et des unités adéquats.

Exercice 1 : Modélisation du robot Roméo

Source : CPGE E3A filière MP 2014

1 Présentation

Roméo est un robot humanoïde d'assistance à la personne en perte d'autonomie. Il est capable d'intervenir sur les objets du quotidien (ouvrir et fermer une porte, manipuler un verre, une bouteille, un trousseau de clés...). Il peut également aider une personne à se déplacer à domicile et lui porter secours en cas de chute.

Au-delà de ses capacités physiques, Roméo offre une interface homme-machine très intuitive : la voix et les gestes sont les principaux moyens de communication avec le robot qui est capable de comprendre ce qu'on lui dit, d'entretenir un court dialogue et même de percevoir les intentions et les émotions de son interlocuteur pour en déduire les actions qu'il doit mettre en oeuvre.

Le cahier des charges est modélisé à l'aide du diagramme des exigences partiels donné sur la figure 1.

Vérifier le critère de non basculement du robot : supporter l'effort vertical exercé par la personne qui veut se lever d'un siège (effort maximal < 100 N).

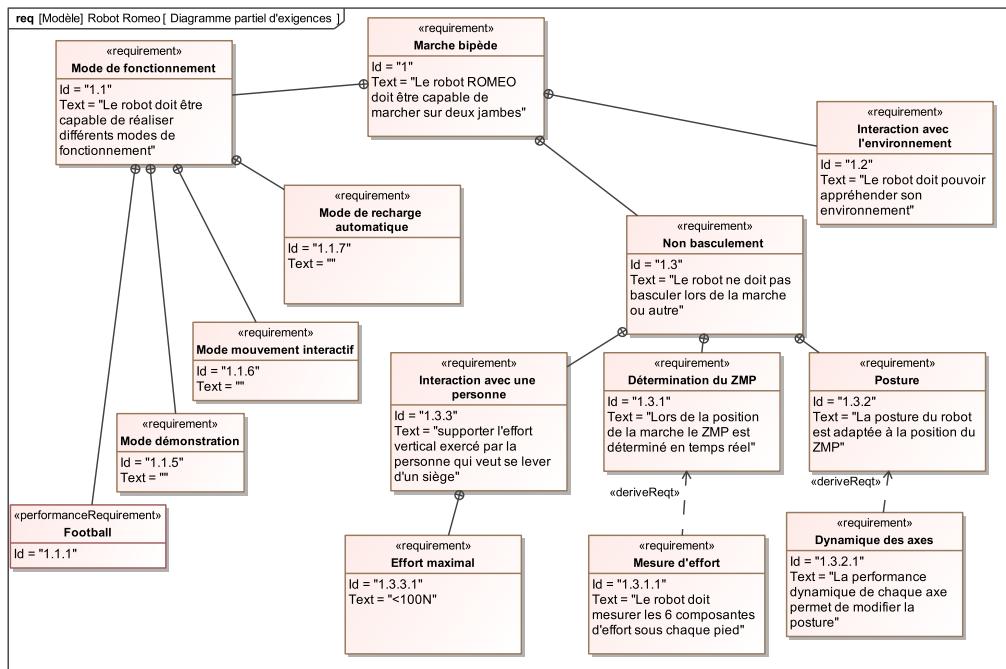
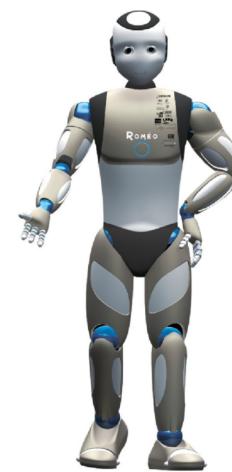


FIGURE 1 – Diagramme des exigences partiels du robot ROMEO

Description structurelle Le robot Roméo mesure 1,43 m. Cette petite taille permet de limiter son poids à environ 40 kg (batteries incluses) et donc d'être moins dangereux pour ses propres articulations et pour les personnes qui l'entourent. Ses proportions sont similaires à un individu de corpulence moyenne.

Concernant sa motricité, il est doté de :

- 4 actionneurs au niveau du cou,
- 6 actionneurs dans chaque jambe,
- 7 actionneurs dans chaque bras,
- 1 articulation élastique passive sur chaque pied.

Au total, Roméo est composé de 32 moteurs à courant continu, répartis dans 4 catégories de puissances différentes (11 W, 20 W, 60 W, 150 W).

Ses yeux sont aussi motorisés afin de modifier leurs orientations et ainsi augmenter leur champ visuel.

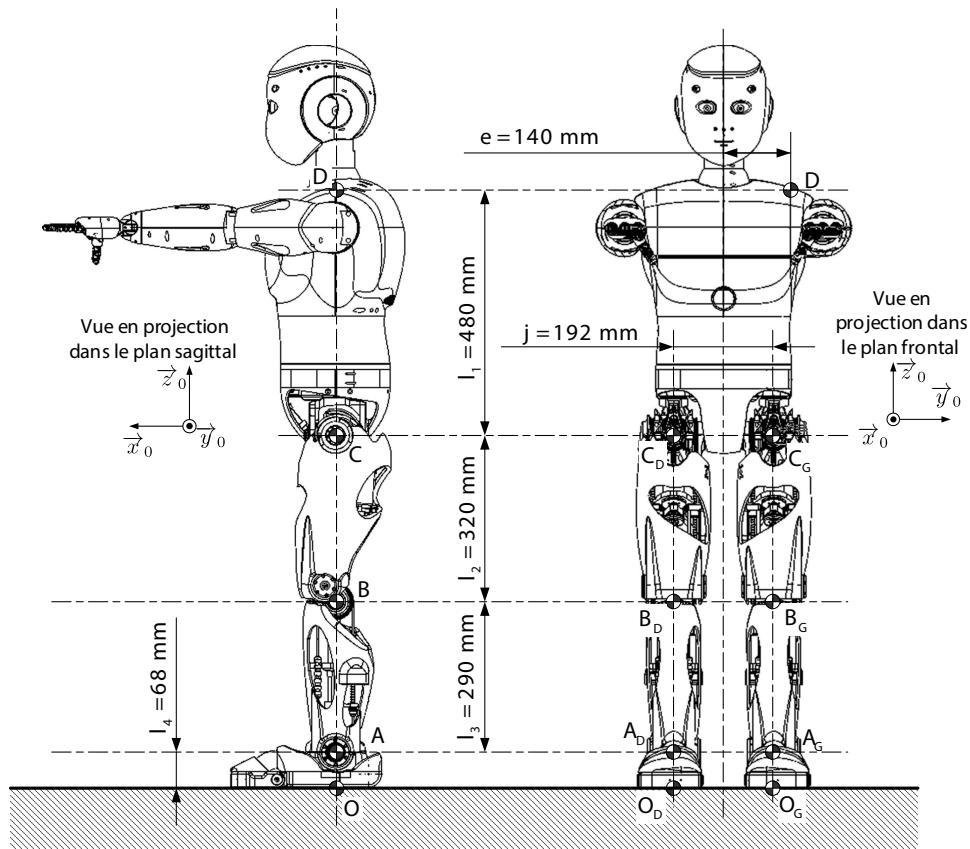


FIGURE 2 – Paramétrage dimensionnel du robot

Scénario d'assistance L'étude suivante concerne le robot dans une phase d'assistance spécifique consistant à aider une personne à se lever de sa chaise. Le protocole se décompose en ces termes :

Appel vocal ou électronique du robot	Roméo se rapproche et se positionne correctement pour aider la personne	Roméo adapte la hauteur de son épaule grâce à une génuflexion
La personne pose une main sur l'épaule de Roméo pour s'aider de cet appui	Roméo contrôle ses articulations pour assurer son équilibre tout en soutenant l'effort de la personne	

2 Validation du critère de non basculement

Objectif 1 :

On souhaite ici vérifier le critère de l'exigence 1.3.3 (figure 1) de non basculement du robot dans le cas d'une interaction avec un personne.

La personne qui désire se lever est initialement en position assise. Elle positionne sa main droite ou sa main gauche sur l'épaule du robot (0,9 à 1,1 m de haut) puis exerce un effort vertical sur celle-ci afin d'aider ses membres inférieurs.

Il est important de vérifier que le robot peut réaliser le scénario proposé en s'assurant qu'il ne basculera pas suite à l'appui de la personne sur l'épaule.

Dans cette étude statique, toutes les articulations sont supposées bloquées : les moteurs fournissent les couples de maintien nécessaires.

Le modèle simplifié plan (projection dans le plan frontal) ci-contre est proposé pour l'étude. Le robot (ensemble (E)) est en équilibre en genuflexion, les deux pieds en appui sur le sol.

Les liaisons pieds/sol sont modélisées par deux liaisons ponctuelles aux points O_D et O_G (Droit et Gauche).

L'effort de la personne sur le robot est modélisé par une force verticale $\vec{F} = -F \cdot \vec{z}_0$ appliquée au point D situé sur l'épaule : $\overrightarrow{OD} \cdot \vec{y}_0 = e = 140 \text{ mm}$

La gravité exerce une force verticale $\vec{P} = -Mg \cdot \vec{z}_0$ appliquée au centre de masse G du robot.

Le point O est situé à égale distance des deux pieds :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OG} = d \cdot \vec{y}_0$$

Notation : Pour la suite de l'étude, le torseur modélisant les actions transmissibles du solide i sur le solide j par la liaison de centre n , exprimé dans le repère $R_k(\vec{x}_k, \vec{y}_k, \vec{z}_k)$ et au point A s'écrit :

$$\{\mathcal{T}_{i \rightarrow j}^n\} = \begin{Bmatrix} X_{ij}^n & L_{ij}^n \\ Y_{ij}^n & M_{ij}^n \\ Z_{ij}^n & N_{ij}^n \end{Bmatrix}_b$$

ou

$$\{\mathcal{T}_{i \rightarrow j}^n\} = \begin{Bmatrix} X_{ij}^n \vec{x}_k + Y_{ij}^n \vec{y}_k + Z_{ij}^n \vec{z}_k \\ L_{ij}^n \vec{x}_k + M_{ij}^n \vec{y}_k + N_{ij}^n \vec{z}_k \end{Bmatrix}$$

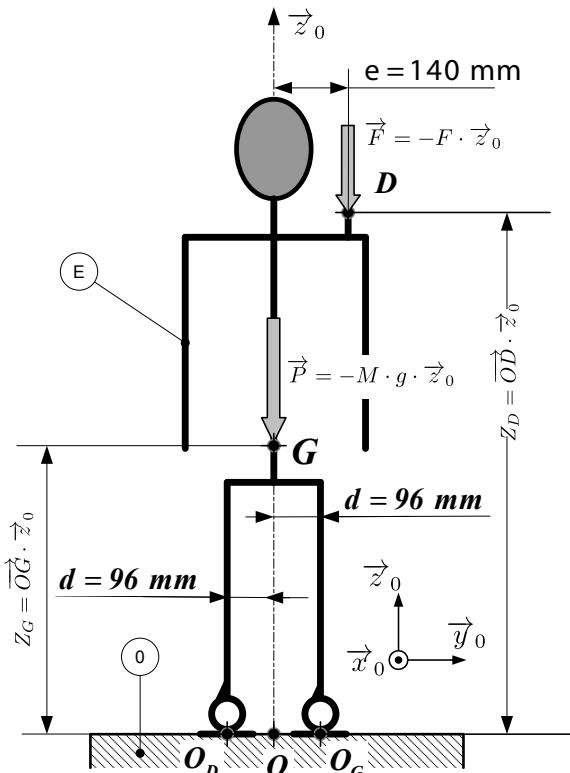


FIGURE 3 – Paramétrage du problème

Q 1 : Écrire les expressions de tous les torseurs des actions mécaniques extérieures appliquées au robot (E) ainsi modélisé et isolé.

Q 2 : Exprimer tous ces torseurs en O_D .

L'équilibre du robot se traduit par les deux équations scalaires suivantes :

$$\begin{cases} \sum \vec{R}_{ext \rightarrow E} \cdot \vec{z}_0 = 0 \\ \sum \vec{M}_{O_D}(ext \rightarrow E) \cdot \vec{x}_0 = 0 \end{cases}$$

Q 3 : Traduire ces deux équations et en déduire les expression de $Z_{01}^{O_D}$ et $Z_{01}^{O_G}$.

Q 4 : Déterminer les expressions des composantes des deux torseurs des actions mécaniques du sol (0) sur chacun des pieds en fonction F , M , g , d et e , lorsqu'ils sont exprimés aux points O_G et O_D .

Pour vérifier le respect du critère de non basculement du robot, il faut que les contacts en O_G et O_D respectent toujours la contrainte d'unilatéralité : le sol ne peut exercer qu'un effort de réaction vertical ascendant sous chacun des pieds.

Q 5 : Écrire les deux inégalités qui découlent du respect de ce critère.

Données	Données géométriques
Masse du robot Roméo : $M = 40,5 \text{ kg}$	$d = 96 \text{ mm}$
Accélération de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$	$e = 140 \text{ mm}$

Q 6 : Déterminer l'effort maximal qui peut être exercé sur le robot au point D, tout en assurant la condition de non basculement. Conclure quant au respect du cahier des charges.

3 Stabilité du robot : modélisation des actions mécaniques transmissibles au niveau du contact pied/sol

Objectif 2 :

L'objectif de cette partie est de trouver à quelle condition le maintien du contact sur le sol est possible lorsque le robot marche (Exigence 1.3.1 de la figure 1). On passera par la détermination du ZMP ^a

^a. Zero Moment Point (ZMP) : de l'anglais « point de moment nul ».

Par définition, le robot humanoïde bipède s'appuie sur ses deux jambes. Comme tout système de solides en équilibre statique, ROMEO est à l'équilibre si la projection de son centre de gravité sur le sol est contenu dans le polygone de sustentation qui est tracé en rouge autour de ses deux pieds sur la figure 4. Lorsque le robot marche, il y a une phase où il n'est en appui que sur un seul pied. Dans ce cas, le polygone de sustentation est réduit à un seul pied.

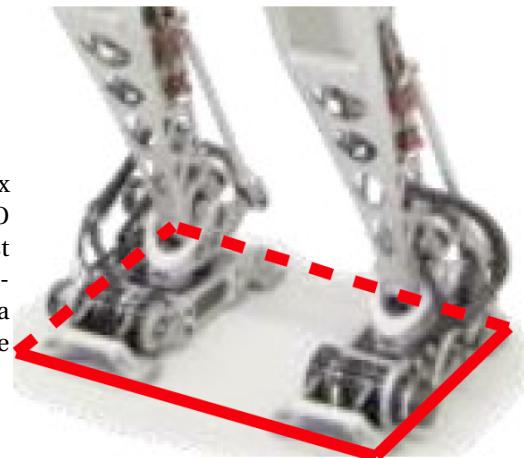


FIGURE 4 – polygone de sustentation sur deux pieds

Le contact du pied sur le sol est modélisé sans frottement par la figure 5

Hypothèses :

- Sous la semelle du robot, la pression de contact avec le sol est supposée répartie de manière uniforme transversalement (suivant la direction \vec{x}_0).
- Sa longueur vaut L soit : $O_S C_S = L \cdot \vec{y}_0$.
- Le plan $(O_S, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est plan de symétrie.
- En chaque point M (d'ordonnée y) de ces segments, la densité d'efforts de contact est $p(M) \vec{z}_0$, avec $p(M)$ en $\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$.
- Ainsi $p(M)$ ne dépend pas de x .
- On notera que si le robot n'est pas équipé de semelles magnétiques ou adhésives, on a $p(M) > 0$.
- Ainsi, en notant b la largeur de la semelle suivant \vec{x}_0 et $\Sigma = [O_S; A_S] \cup [B_S; C_S]$.

Q 7 : Montrer que le modèle global d'action mécanique de contact du sol sur le pied peut être donné par le torseur :

$$\left\{ \mathcal{T}_{(sol-pied)} \right\} = \underset{O_S}{\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{(sol-pied)}} = b \cdot \int_{P \in \Sigma} p(M) \cdot \vec{z}_0 dy \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{O_S(sol-pied)}} = b \cdot \int_{P \in \Sigma} y \cdot p(M) \cdot \vec{x}_0 dy \end{array} \right\}}$$

Q 8 : Montrer que $\left\{ \mathcal{T}_{(sol-pied)} \right\}$ est un glisseur.

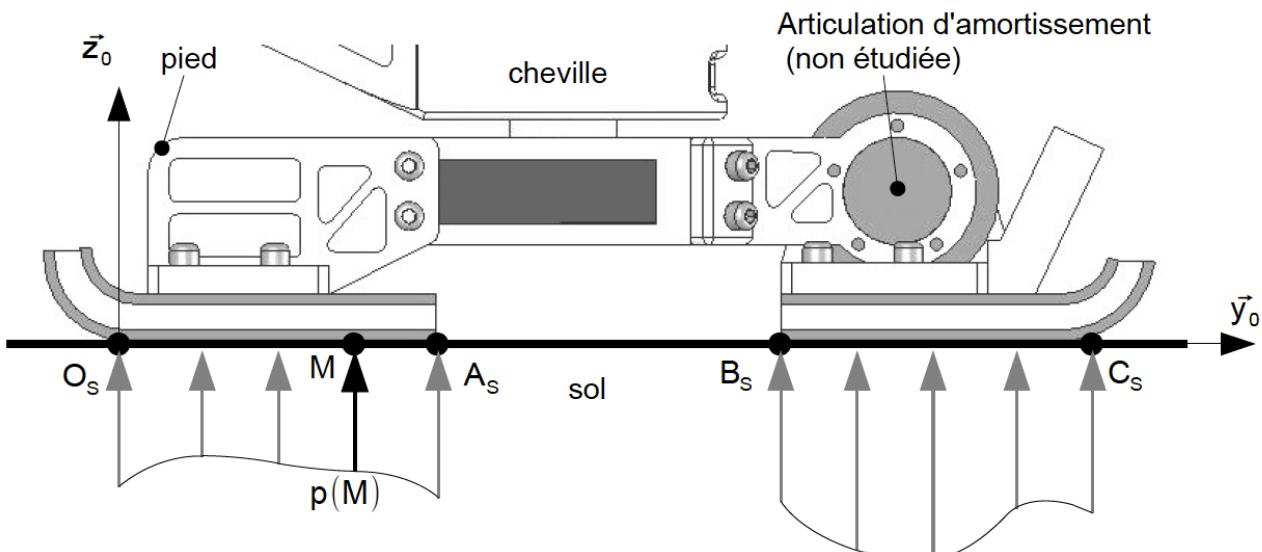


FIGURE 5 – Modélisation du contact entre le pied et le sol

Soit H_S le point de la droite (O_S, \vec{y}_0) tel que $\vec{M}(H_S, \text{sol} \rightarrow \text{pied}) = \vec{0}$, on notera $\overrightarrow{O_S H_S} = Y_{HS} \cdot \vec{y}_0$.

Ce point est fondamental en robotique humanoïde, il prend le nom de Zero Moment Point (ZMP) : de l'anglais « point de moment nul ».

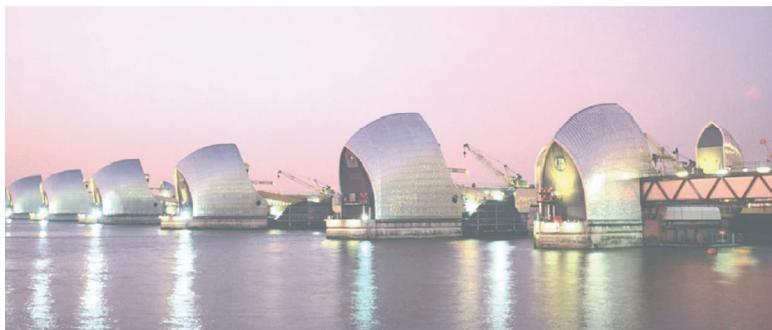
Q 9 : Montrer que $H_S \in [O_S; C_S]$, c'est à-dire qu'il est situé sous le pied du robot. On pourra pour cela étudier le signe des vecteurs $\overrightarrow{O_S H_S}$ et $\overrightarrow{C_S H_S}$.

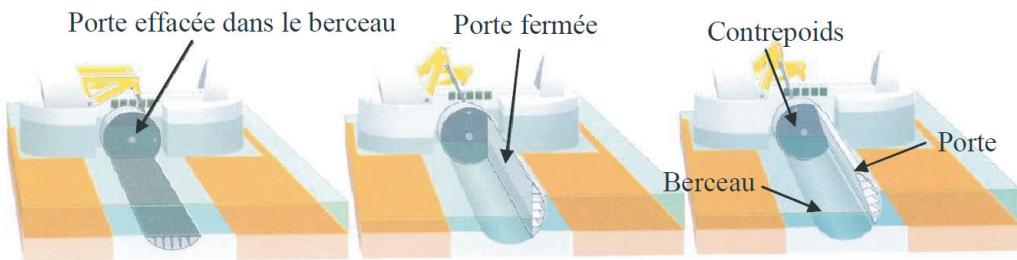
Q 10 : Donner la forme du torseur $\{\mathcal{T}_{(\text{sol} \rightarrow \text{pied})}\}$ dans le cas d'un contact avec frottement dans le plan sagittal (c'est-à-dire que la densité d'efforts de contact est $p(M) \cdot \vec{z}_0 + t(M) \cdot \vec{y}_0$). Montrer que les résultats des questions précédentes sont inchangés.

Exercice 2 : Barrage sur la Thames

Source : Florestan Mathurin

Le Thames Barrier est un barrage spectaculaire conçu pour protéger la ville de Londres des fortes marées qui peuvent remonter de la mer du nord. Sa construction s'est achevée en 1982 et a nécessité 51000 tonnes d'acier et 210000 m³, ce qui en fait le 2^{ème} barrage mobile le plus grand du monde. La structure s'étend sur 520 mètres de large et est constituée de 10 portes en forme de secteur angulaire de 20 mètres de haut. Chaque porte est totalement effacée dans un berceau de béton coulé au fond de la rivière. En cas de montée des eaux, les portes pivotent en position verticale actionnées par une machinerie hydraulique.

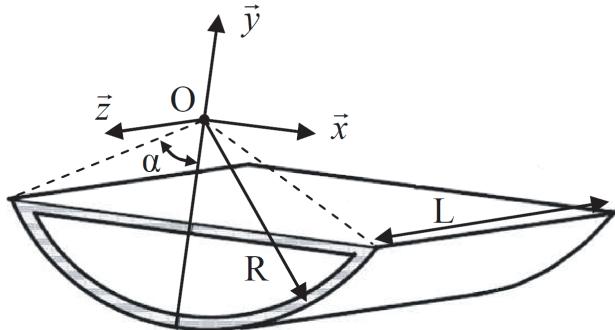




L'objectif est de déterminer la position du centre de gravité de la porte qui est une structure creuse en tôle épaisse et dont on donne le modèle ci-contre.

Données :

- Longueur porte : $L = 58\text{m}$
- Rayon : $R = 12,4\text{m}$
- Épaisseur tôle : $e = 0,05 \text{ m}$ (considéré négligeable de R)
- Masse volumique porte : $\rho = 7700\text{kg/m}^3$ et $\alpha = \pi/3$.



Q 11 : Déterminer les coordonnées du centre de gravité de la porte.

Q 12 : Donner le torseur de l'action mécanique du poids sur la porte au point O.

Exercice 3 : Exosquelette Atalante

Source : e3a PSI 2019

1 Présentation du sujet

Les exigences principales associées à la conception de l'exosquelette *Atalante* sont données figure 6. Seules les exigences 1.1 (compatibilité) et 1.3 (mouvement) seront étudiées dans ce sujet. Le détail de leurs sous exigences est donné en annexe 1.

Objectif 3 :

L'objectif de cette partie est de vérifier que la conception de l'exosquelette permet de garantir sa compatibilité avec l'usager (exigence 1.1 de la Figure 6).

Pour réaliser cette étude, un modèle cinématique simplifié de l'exosquelette est proposé Figure 7. Chaque jambe est composée trois solides : le fémur (2) ou (2'), le tibia (3) ou (3') et le pied (4) ou (4'). Ces solides sont reliés par des liaisons pivots situées au genou (point B) et à la cheville (point C). Le bassin (1) est également en liaison pivot à la hanche (point A) avec le fémur (2) ou (2'). Le point I représente la position théorique du nombril de l'usager.

Les mains sont indispensables dans la plupart de nos actions quotidiennes qui restent donc, actuellement, irréalisables pour les utilisateurs de fauteuil roulant. Fort de ce constat, l'entreprise Wandercraft a développé l'exosquelette Atalante pour offrir la possibilité à ses utilisateurs de se lever, s'asseoir, marcher dans toutes les directions et de monter quelques marches en toute autonomie et sans l'aide des mains.

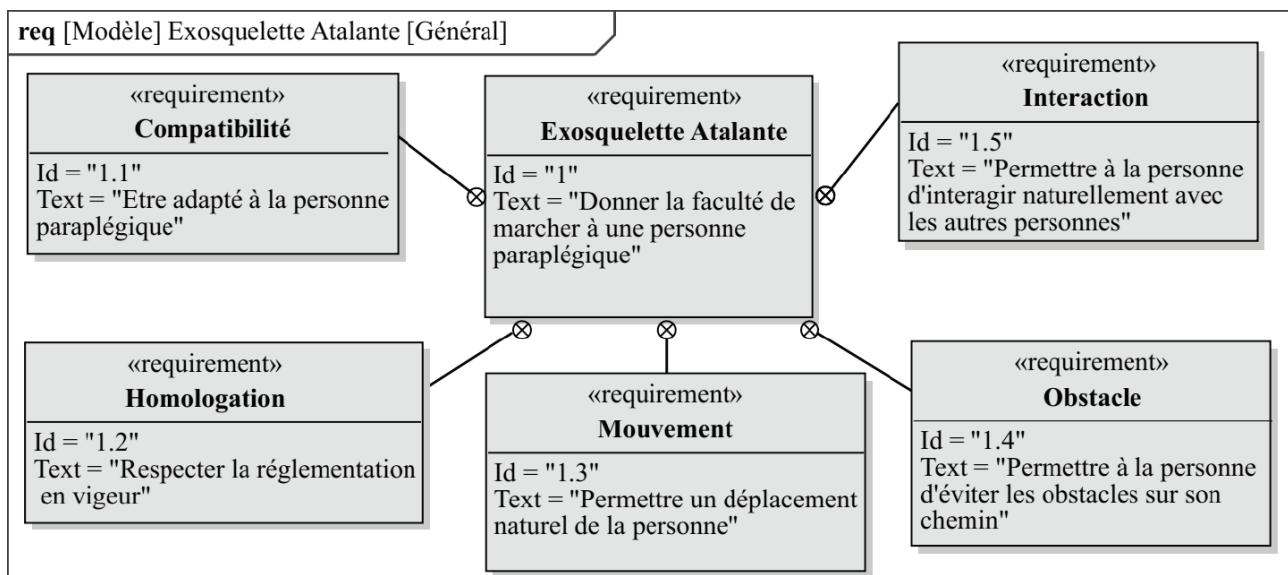
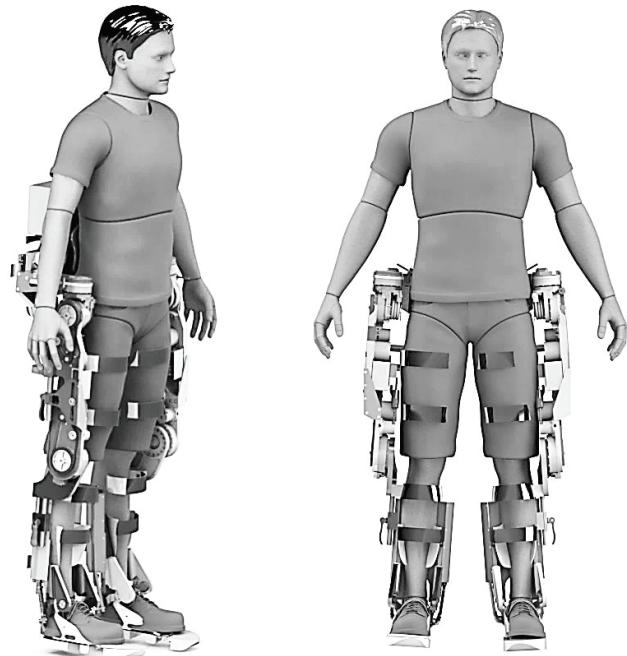


FIGURE 6 – exigences principales associées à l'exosquelette Atalante.

2 Force maximale à exercer pour effectuer le réglage

Objectif 4 :

S'assurer que l'exigence 1.1.1.2.1 du cahier des charges soit respectée. Ainsi, la force exercée par l'utilisateur pour régler les dimensions de l'exosquelette ne doit pas dépasser 150 N.

Pour des raisons de sécurité, le réglage des dimensions de l'exosquelette est réalisé en position assise (Figure 8). C'est une tierce personne (différente de la personne tétraplégique) qui vient successivement régler puis verrouiller les différentes dimensions de l'exosquelette. Le réglage le plus critique est celui des dimensions du fémur (solides (2.1) et (2.2) de la figure ??). Il se fait avec celui du tibia (solides (3.1) et (3.2)) en position déverrouillée. Pour simplifier l'étude, on considérera que :

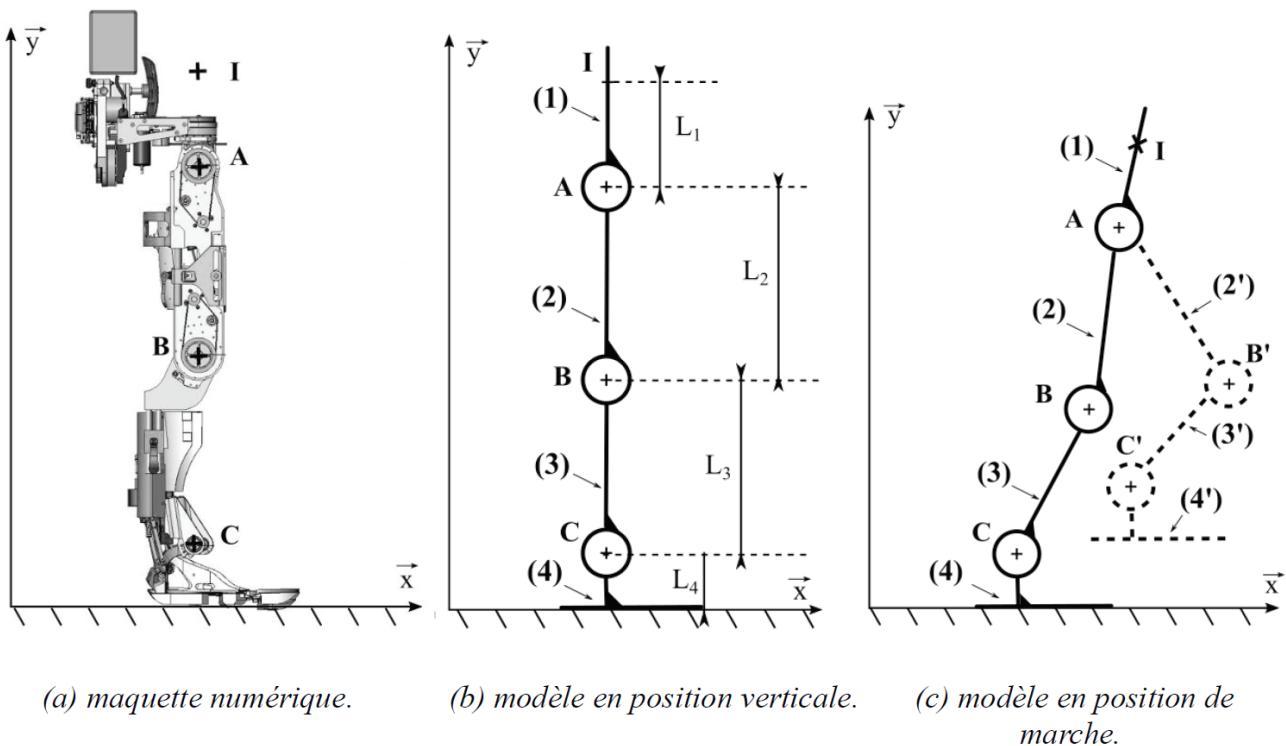


FIGURE 7 – modèle cinématique de l'exosquelette.

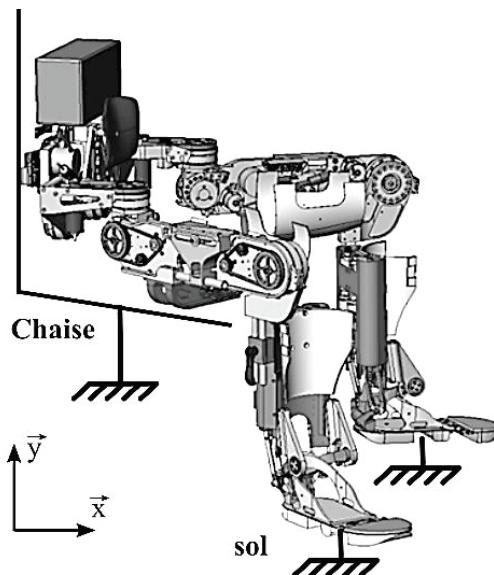


FIGURE 8 – Position de l'exosquelette lors de la phase de réglage de ses dimensions.

- le bassin (1), la partie supérieure du fémur (2.2) et le pied (4) sont fixes par rapport à la chaise (ou le sol) noté (0),
- le jeu dans la liaison (déverrouillée) entre les solides (3.1) et (3.2) étant important on pourra considérer qu'il n'y a pas de contact entre ces deux solides,
- seuls les frottements dans la liaison entre les solides (2.1) et (2.2) sont pris en compte,
- le problème est plan de normale \vec{z} .

La liaison entre le bâti (0) et le fémur (1) est la liaison pivot-glissante étudiée par ailleurs entre les solides (1) et (2).

Le contact cylindre-cylindre modélisé par la liaison pivot-glissant en J admet un jeu radial. Ce jeu est présenté sur

la figure 10. Pour le prendre en compte, une modélisation cinématique du mécanisme est proposée à la figure 11.

- L'action mécanique extérieure exercée sur la partie inférieure du fémur (1) pour effectuer le réglage est définie ci-dessous :

$$\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow 1}\}_B = \left\{ \begin{array}{c} F \vec{x} \\ 0 \end{array} \right\}$$

- L'action mécanique de la partie supérieure du tibia (1) sur le fémur (2) est donnée par :

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\}_b = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ m_{32} \cdot g \\ - \\ - \\ 0 \end{array} \right\}_b$$

Les différents paramètres du modèle sont donnés dans le tableau de la figure 9. On cherche à déterminer l'effort F

Solide	Paramètres géométriques	Masses et inertie
Sol (0) + chaise + partie supérieure du fémur + bassin + pied		
Partie inférieure du fémur (2.1) notée (1)		Masse du fémur : $m_{21} = 6,4 \text{ kg}$ Le centre de gravité du solide (2.1) est assimilé au point B.
Partie supérieure du tibia (3.2) notée (2)	$\overrightarrow{BG_{32}} = -L_3 \vec{y}$ avec $L_3 = 280 \text{ mm}$	Masse partie haute du tibia : $m_{32} = 4,2 \text{ kg}$. Le centre de gravité du solide (3.2) est noté G_{32} .

FIGURE 9 – Paramètres du modèle

à exercer pour effectuer le réglage.

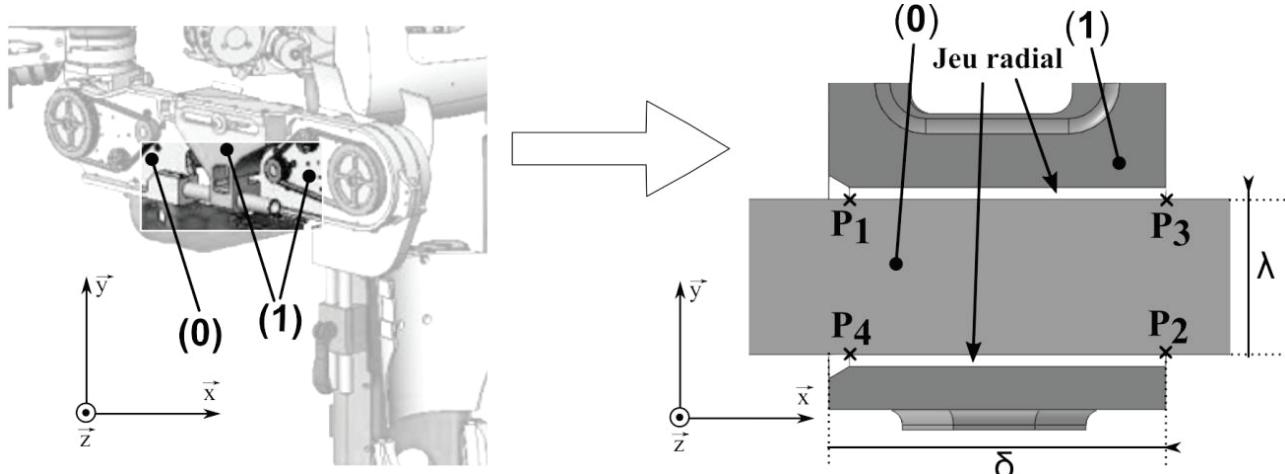


FIGURE 10 – détail du contact cylindre-cylindre entre le fémur supérieur (0) et le fémur inférieur (1).

Q 13 : À partir de la figure 10, justifier le nouveau modèle de liaison entre le bâti (0) et fémur (1) proposé figure 11.

On note : $\overrightarrow{BP_2} = -\mu \vec{x}$ et $\overrightarrow{P_1 P_2} = \delta \vec{x}$ (l'influence de la longueur λ est négligée). Soit $f = 0,33$ le coefficient de frottement entre le bâti (0) et la partie inférieure du fémur (1).

On donne $\mu = 150 \text{ mm}$.

Q 14 : On se place à la limite du glissement. À partir du modèle donné figure 11, déterminer la valeur absolue de la force F en fonction de f , m_{21} , m_{32} , δ et μ . La méthode et les théorèmes utilisés seront explicités.

Q 15 : Le phénomène d'arc-boutement apparaît-il avec le modèle de la figure 11 ? Justifier.

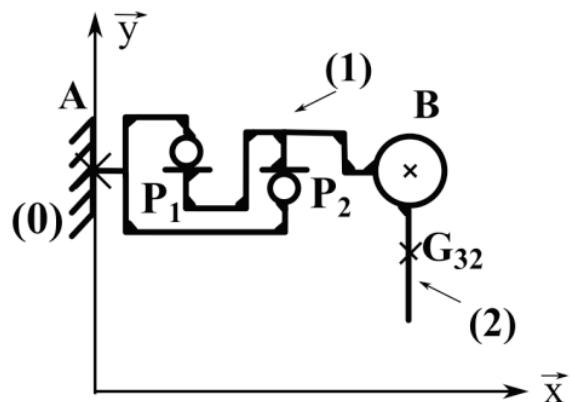


FIGURE 11 – nouveau modèle cinématique de l'exosquelette lors du réglage de la longueur du fémur.

Quelles hypothèses simplificatrices pourraient remettre en cause cette réponse?

Expliquer en quoi ce phénomène serait un problème pour le réglage dimensionnel de l'exosquelette.

Q 16 : Déterminer l'expression de δ , la longueur du contact cylindre-cylindre, qui permet de respecter le cahier des charges. Faire l'application numérique.

Annexes

Annexe 1

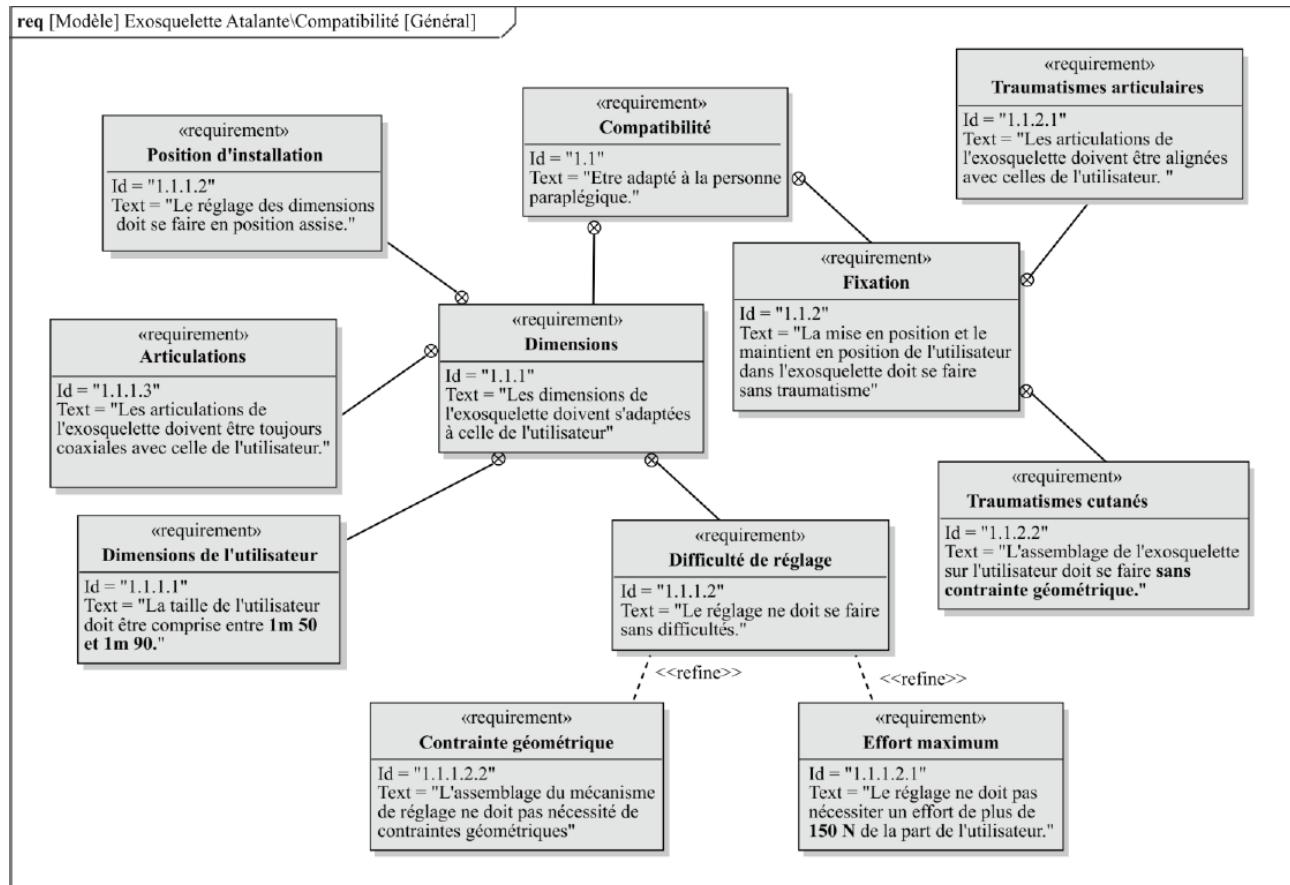


FIGURE 12 – sous exigences associées à la compatibilité de l'exosquelette avec l'utilisateur.

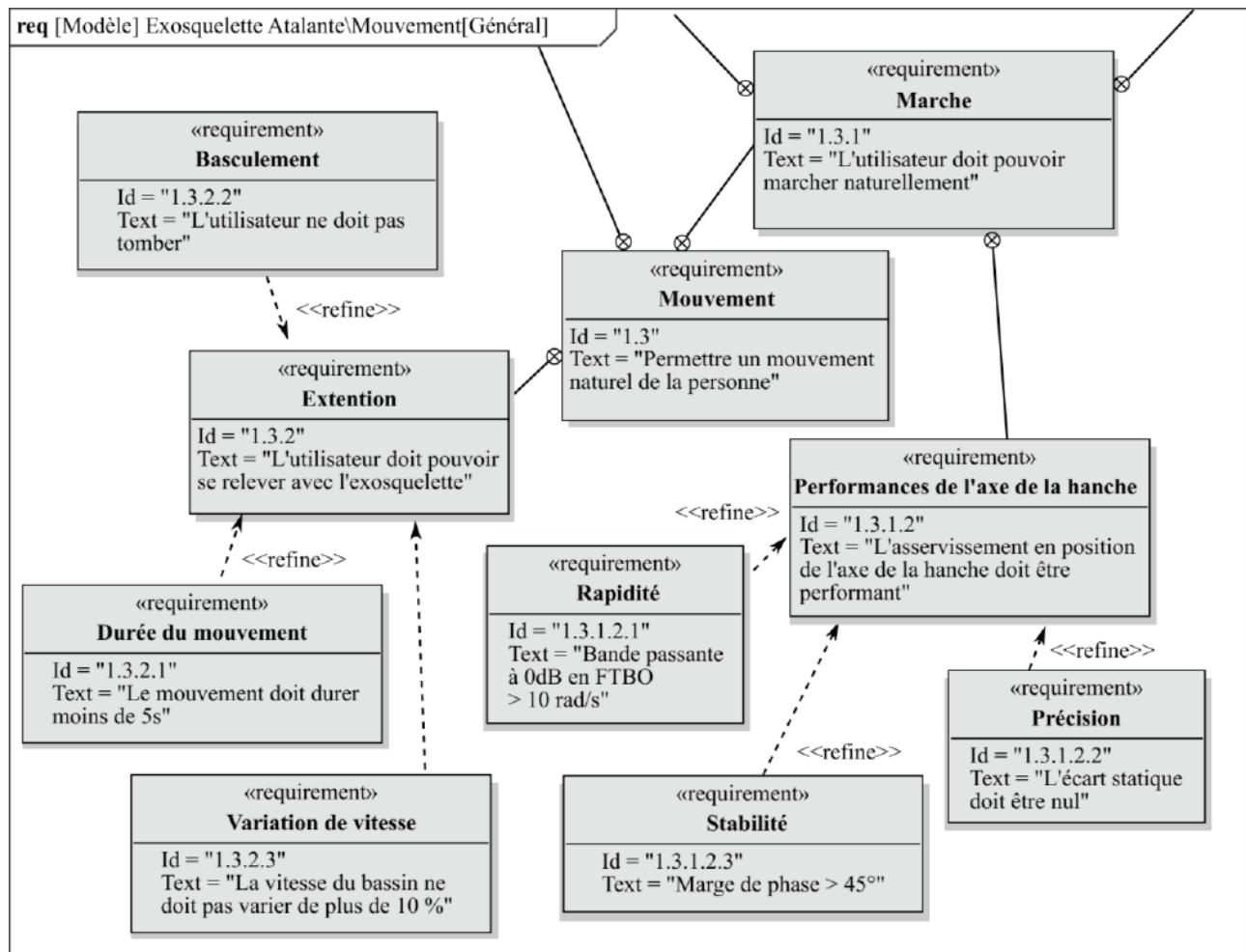


FIGURE 13 – sous exigences associées au mouvement de l'utilisateur équipé de l'exosquelette.

Annexe 2

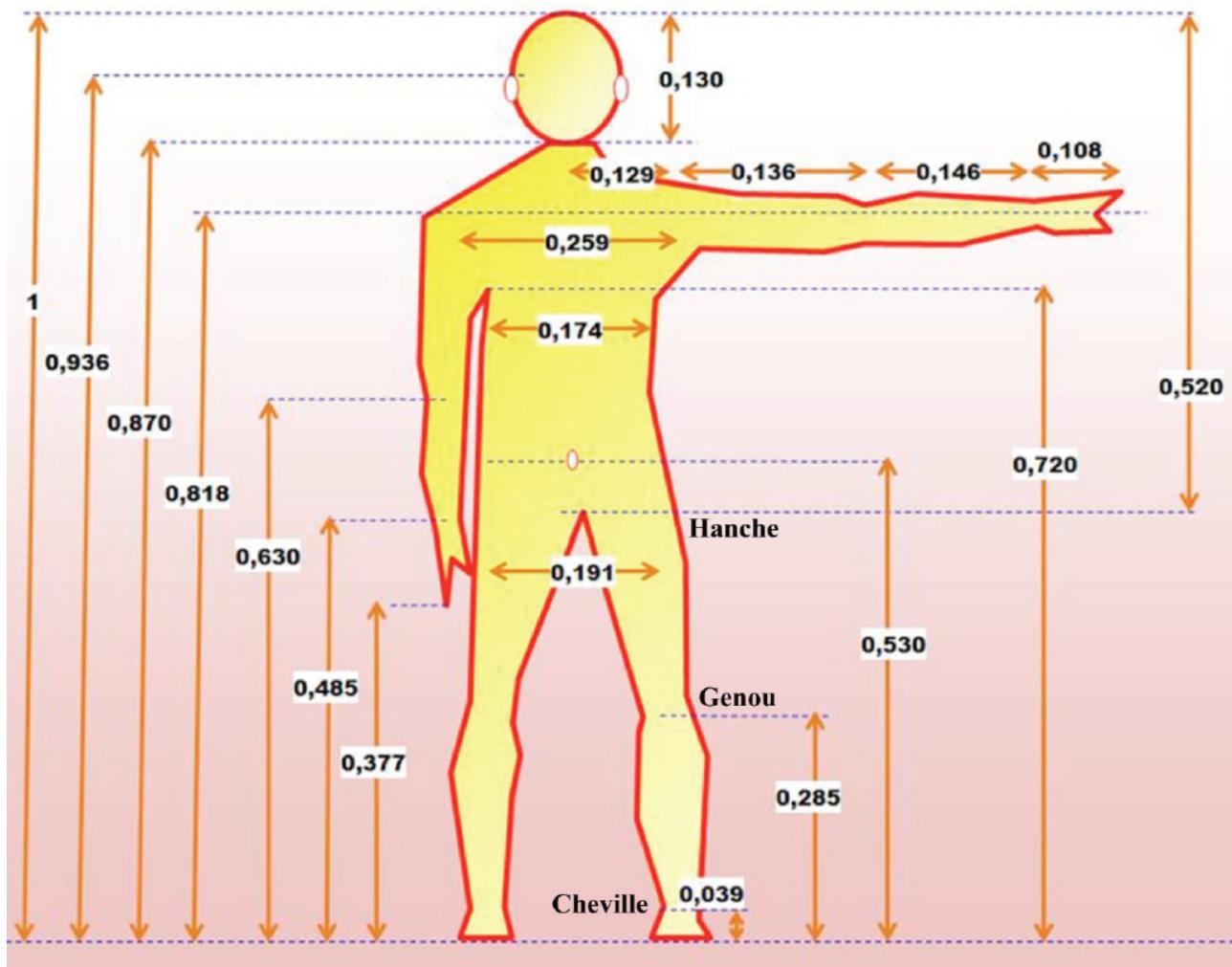


FIGURE 14 – proportions du corps humain

Ces données sont toutes relatives à un individu de taille 1 unité. Par exemple pour une personne de 173 cm, la taille de la main sera $173 \times 0,108 = 18,7$ cm.