Semaine 14 du 19 janvier 2026 (S4)

XIV – Limite de fonctions.

1 Préliminaires.

2 Définitions de la limite d'une fonction.

2.1 Limite en un point.

2.2 Limites à gauche et à droite en un point.

3 Propriétés des limites de fonctions.

3.1 Opérations sur les limites.

3.2 Passage à la limite et relations d'ordre.

4 Théorèmes d'existence.

4.1 Théorèmes des gendarmes et de minoration/majoration.

4.2 Théorème de la limite monotone.

5 Cas des fonctions à valeurs complexes.

.

XV – Continuité

1 Définitions et premières propriétés.

1.1 Définitions.

1.2 Prolongement par continuité en un point.

1.3 Caractérisation séquentielle de la continuité.

1.4 Opérations sur la continuité.

2 Les grands théorèmes.

2.1 Théorème des valeurs intermédiaires.

2.2 Image d'un segment par une fonction continue.

2.3 Rappels concernant les fonctions strictement monotones.

2.4 Monotonie stricte, bijectivité et continuité.

3 Extension au cas des fonctions à valeurs complexes.

Questions de cours

Ces questions de cours sont à savoir traiter, et non à apprendre par cœur.
Les colleurs sont libres de demander tout ou partie d'une de ces questions de cours, mais aussi de mélanger les différentes questions ou de donner des exemples numériques différents de ceux proposés.
L'évaluation de la maîtrise du cours ne se limite pas à la question de cours : la connaissance des définitions et théorèmes du cours pourra être évaluée à tout moment de la colle.

- Montrer qu'une fonction ayant une limite finie en $a \in \mathbb{R}$ est bornée au voisinage de a.
- Soit $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathring{I}$. Quel rapport y a-t-il entre l'existence d'une limite de f en a et l'existence de limites à droite et à gauche pour f en a ? Le montrer.
- Démontrer le théorème de composition des limites (limite de $f \circ g$), dans le cas où toutes les limites en jeu sont finies.
- Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathring{I}$. Montrer que si f admet une limite ℓ en a et si $\ell < m$, alors $f < m$ dans au voisinage de a.
- Énoncer et démontrer le théorème de la limite monotone, dans le cas d'une fonction croissante. On donnera notamment toutes les inégalités concernant les limites à gauche et à droite et les valeurs en les points concernés.
- Énoncer et démontrer la caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction.
- La fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x \sin(x)$ admet-elle une limite en $+\infty$ (le justifier) ? Le cas échéant, laquelle ? et en 0 ?
- La fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ a-t-elle une limite en 0 ? Le démontrer.
- Démontrer le théorème de prolongement par continuité.
- Donner les grandes lignes de la démonstration du TVI.
- Montrer que l'image d'un segment par une application continue est un segment.
- Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ continue et injective telle que $f(I)$ est un intervalle. Montrer que f est strictement monotone.
- Démontrer que si l'image d'une fonction monotone est un intervalle, alors cette fonction est continue.