



C4 : MODÉLISATION CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES COMPOSÉS DE CHAINES DE SOLIDES

C4-5 - Modélisation des liaisons mécaniques

14 Janvier 2020

Table des matières

| | |
|--|----------|
| I Modélisation des contacts entre solides | 2 |
| 1 Paramétrage | 2 |
| 2 Vitesse de glissement/ Roulement sans glissement | 2 |
| 3 Vitesse de roulement / Vitesse de pivotement | 3 |
| II Modélisation des liaisons mécaniques | 3 |
| 1 Contact entre les solides | 3 |
| 2 Degrés de liberté | 4 |
| III Modélisation des liaisons entre solides | 4 |
| 1 Liaisons normalisées | 4 |
| a) La liaison encastrement | 4 |
| b) La liaison sphère-plan | 5 |
| c) La liaison pivot | 5 |
| d) La liaison pivot-glissant | 6 |
| e) La liaison glissière | 6 |
| f) La liaison hélicoïdale | 7 |
| g) La liaison sphérique | 8 |
| h) La liaison sphérique à doigt | 8 |
| i) La liaison plan-plan | 9 |
| j) La liaison sphère-cylindre | 9 |
| k) La liaison cylindre-plan | 10 |
| 2 Tableau des liaisons cinématiques normalisées | 11 |

Compétences

- **Modéliser;** Proposer un modèle de connaissance et de comportement : Solide indéformable : définition; référentiel, repère; équivalence solide/référentiel; degrés de liberté; vecteur-vitesse angulaire de deux référentiels en mouvement l'un par rapport à l'autre
- **Communiquer;** Rechercher et traiter des informations : Torseur cinématique
- **Communiquer;** Mettre en oeuvre une communication : Liaisons : géométrie des contacts entre deux solides; définition du contact ponctuel entre deux solides : roulement, pivotement, glissement, condition cinématique de maintien du contact; définition d'une liaison; liaisons normalisées entre solides, caractéristiques géométriques et repères d'expression privilégiés; torseur cinématique des liaisons normalisées; torseur des actions mécaniques transmissibles dans les liaisons normalisées; associations de liaisons en série et parallèle; liaisons cinématiquement équivalentes

I. Modélisation des contacts entre solides

1 Paramétrage

- Soient deux solides S_1 et S_2 **en contact** pendant leur mouvement dans un repère R_0 (fig.1).
- Soit I un point de la zone de contact (on notera que la zone de contact sera souvent ramenée à cet unique point I).
- Soit Π le plan tangent au contact (i.e. tangent aux deux solides au point de contact).
- Soit \vec{n} la normale à ce plan.

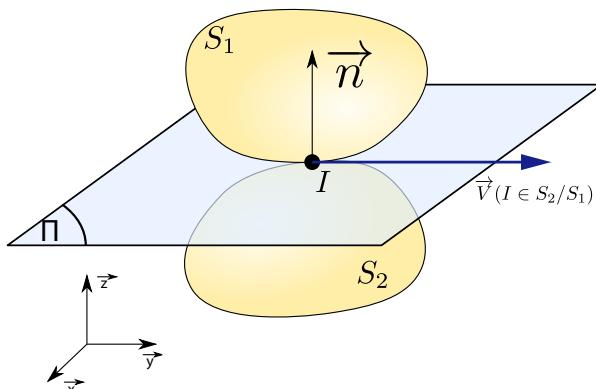


FIGURE 1 – Solides en contact, de plan tangent Π .

2 Vitesse de glissement/ Roulement sans glissement



Définition 1 : vitesse de glissement/roulement sans glissement

- On appelle **vitesse de glissement** au point I , de S_2 par rapport à S_1 le vecteur vitesse du point I dans le mouvement de S_2 par rapport à S_1 (fig.1) :

$$\boxed{\vec{V}(I \in S_2/S_1).} \quad (1)$$

- On dit qu'il y a **roulement sans glissement** au point I si :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{(I \in S_2/S_1)}} = \vec{0}} \quad (2)$$

Dans ce cas, on dit que S_2 “roule sans glisser” sur S_1 .

- $\overrightarrow{V_{(I \in S_2/S_1)}}$ est contenu dans le plan Π (sinon il y aura inter-pénétration des deux solides, ou décollement du contact)

- **Décomposition :**

$$\overrightarrow{V_{(I \in S_2/S_1)}} = \overrightarrow{V_{(I \in S_2/R_0)}} - \overrightarrow{V_{(I \in S_1/R_0)}}$$

3 Vitesse de roulement / Vitesse de pivotement

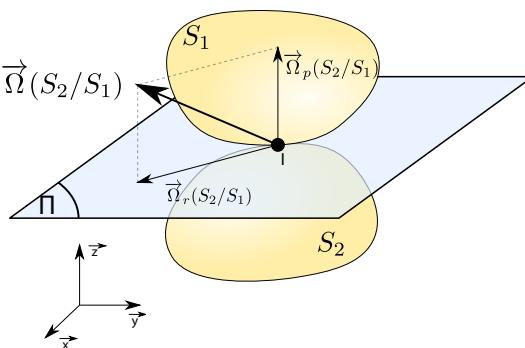
 **Définition 2 : Vitesse de roulement / Vitesse de pivotement**

Soit $\overrightarrow{\Omega}_{(S_2/S_1)}$ le vecteur vitesse de rotation de S_2 par rapport à S_1 . On peut décomposer $\overrightarrow{\Omega}_{(S_2/S_1)}$ en la somme de deux vecteurs $\overrightarrow{\Omega}_{r(S_2/S_1)}$ et $\overrightarrow{\Omega}_{p(S_2/S_1)}$:

$$\overrightarrow{\Omega}_{(S_2/S_1)} = \overrightarrow{\Omega}_{r(S_2/S_1)} + \overrightarrow{\Omega}_{p(S_2/S_1)} \quad (3)$$

où :

- $\overrightarrow{\Omega}_{r(S_2/S_1)}$ est le **vecteur vitesse de rotation de roulement** de S_2 par rapport à S_1 . Il est contenu dans le plan Π .
- $\overrightarrow{\Omega}_{p(S_2/S_1)}$ est le **vecteur vitesse de rotation de pivotement** de S_2 par rapport à S_1 . Il est normal au plan Π



Remarque 1 :

De manière général, ces deux vecteurs s'obtiennent par :

$$\overrightarrow{\Omega}_{p(S_2/S_1)} = \dots \quad (4)$$

$$\overrightarrow{\Omega}_{r(S_2/S_1)} = \dots \quad (5)$$

II. Modélisation des liaisons mécaniques

1 Contact entre les solides

 **Définition 3 : Système mécanique**

- Un **système mécanique** est composé de plusieurs solides qui sont liés entre eux par **des liaisons mécaniques**.
- Une **liaison mécanique** résulte d'un **contact** entre deux solides.
- Dans la réalité tout contact est surfacique mais suivant les dimensions de certaines zones de contact, on peut idéaliser le contact comme étant parfois ponctuel ou linéaire.
- La **nature des surfaces** de contact va engendrer des mouvements relatifs autorisés entre les deux solides.

2 Degrés de liberté

Définition 4 : Degrés de liberté

Les mouvements relatifs autorisés entre deux solides liés par une liaison mécanique sont les **degrés de liberté**.

Dans l'espace (3D), on considère 6 degrés de liberté élémentaires (3 translations et 3 rotations) que l'on donne par rapport à un repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

- rotations respectivement autour de (O, \vec{x}) , (O, \vec{y}) et (O, \vec{z}) : R_x , R_y et R_z ,
- translations respectivement suivant \vec{x} , \vec{y} et \vec{z} : T_x , T_y et T_z .

Les degrés de liberté autorisés par une liaison dépendent des surfaces de contact entre les solides.



III. Modélisation des liaisons entre solides

1 Liaisons normalisées

Il existe 11 liaisons usuelles et normalisées entre deux solides. Elles sont définies ci-dessous. Un tableau récapitulatif est donné dans la partie 2. Ces liaisons sont considérées comme parfaites, c'est à dire avec des contacts géométriques parfaits et sans jeu (ce qui est rarement le cas dans la réalité).

Pour la suite de la section, on considère deux solides S_1 et S_2 en liaison.

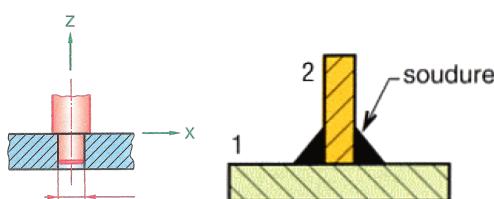
a) La liaison encastrement

Aussi appelée "liaison fixe" ou "liaison complète", cette liaison n'admet aucun degré de liberté. Elle est rarement utilisée.

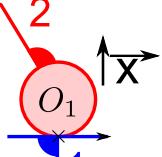
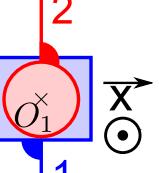
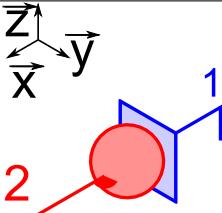
| Liaison Encastrement | | |
|---|----------------------|-------------|
| Degrés de liberté | Symbole normalisé | |
| | Représentation plane | Perspective |
| 0 degré de liberté : • 0 rotation • 0 translation | | |



Exemple 1 :

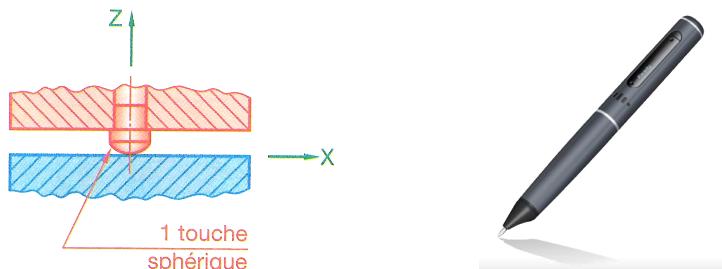


b) La liaison sphère-plan

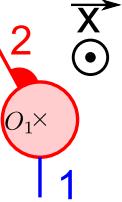
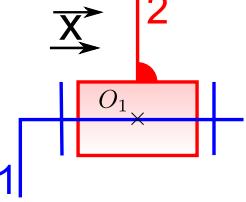
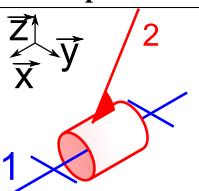
| Liaison sphère-plan de centre O_1 , de normale \vec{x} | | |
|---|---|---|
| Degrés de liberté | Symbole normalisé | |
| | Représentation plane | Perspective |
| 5 degrés de liberté : <ul style="list-style-type: none"> • 3 rotations : R_x, R_y, R_z • 2 translations : T_y, T_z |   |  |

Historiquement appelée “liaison ponctuelle”, elle constitue une **liaison élémentaire** : toute autre liaison peut être considérée comme une combinaison de liaisons sphère-cylindre.

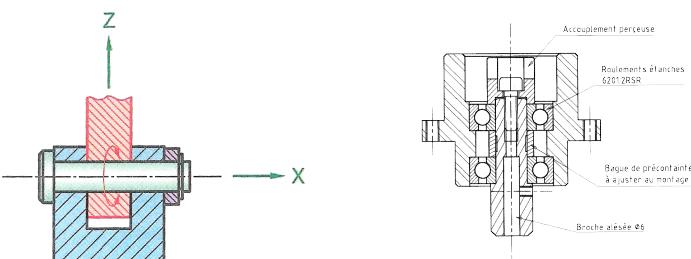
 **Exemple 2 :**



c) La liaison pivot

| Liaison pivot d'axe (O_1, \vec{x}) | | |
|--|---|---|
| Degrés de liberté | Symbole normalisé | |
| | Représentation plane | Perspective |
| 1 degré de liberté : <ul style="list-style-type: none"> • 1 rotation : R_x • 0 translation |   |  |

 **Exemple 3 :**

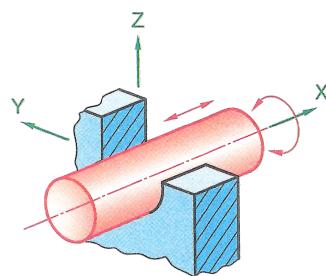


d) La liaison pivot-glissant

| Degrés de liberté | Liaison pivot-glissant d'axe (O_1, \vec{x}) | |
|--|---|-------------|
| | Symbole normalisé | |
| | Représentation plane | Perspective |
| 2 degrés de liberté : <ul style="list-style-type: none"> • 1 rotation : R_x • 1 translation : T_x | | |



Exemple 4 :



Attention :

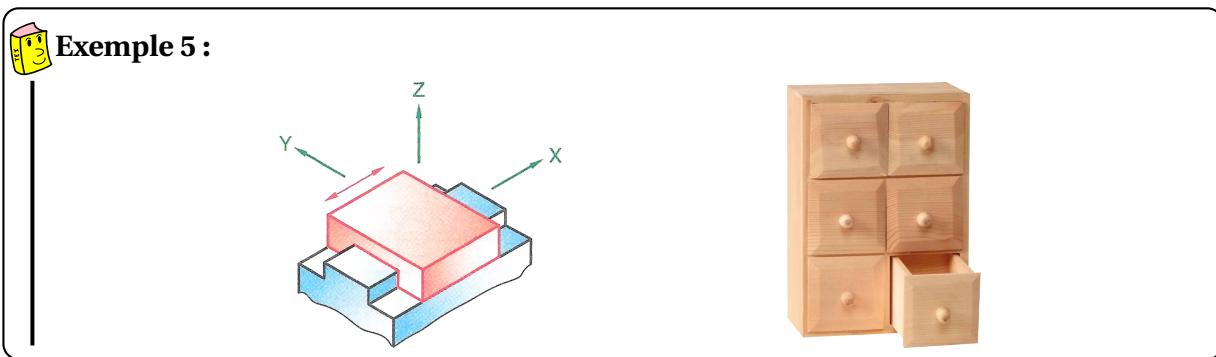
Un arbre de diamètre D dans un alésage de longueur L pourra être modélisé avec une **liaison pivot-glissant si le guidage est long** (c'est à dire si L est suffisamment grand par rapport à D). Généralement, on considère que c'est le cas si :

$$\frac{L}{D} \geq 1,5$$

Dans le cas contraire, elle sera assimilée à une **liaison sphère-cylindre**.

e) La liaison glissière

| Degrés de liberté | Liaison glissière d'axe \vec{x} | |
|--|-----------------------------------|-------------|
| | Symbole normalisé | |
| | Représentation plane | Perspective |
| 1 degré de liberté : <ul style="list-style-type: none"> • 0 rotation : • 1 translation T_x | | |



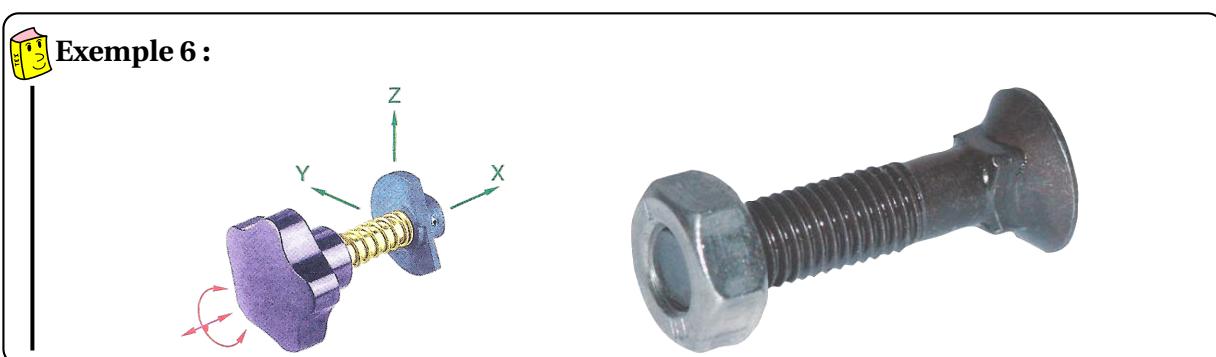
f) La liaison hélicoïdale

| Exemple de désignation | Liaison hélicoïdale d'axe (O_1, \vec{x}) | |
|---|--|-------------------|
| | Représentation plane | Symbole normalisé |
| 1 rotation R_x + 1 translation T_x couplée | | |

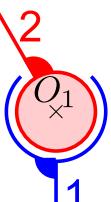
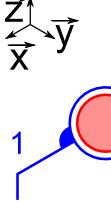
Un seul degré de liberté est considéré. Le mouvement de rotation R_x et celui de translation T_x sont couplés et ne constituent ainsi qu'un seul mouvement indépendant.

Définition 5 : pas de la liaison hélicoïdal

On appelle le **pas de la liaison hélicoïdal** le rapport entre la translation et la rotation : $p = 2\pi \frac{T_x}{R_x}$

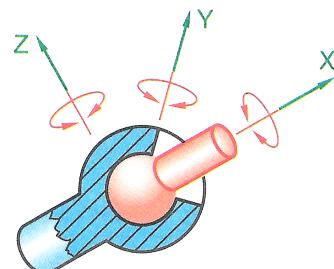


g) La liaison sphérique

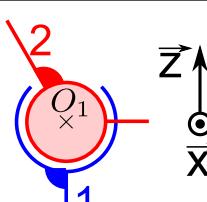
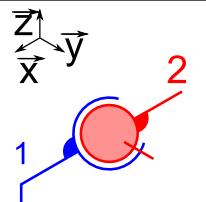
| Liaison sphérique de centre O_1 | | |
|--|---|---|
| Exemple de désignation | Symbole normalisé | |
| | Représentation plane | Perspective |
| 3 degrés de liberté : <ul style="list-style-type: none"> • 3 rotations : R_x, R_y, R_z • 0 translation |  |  |



Exemple 7 :

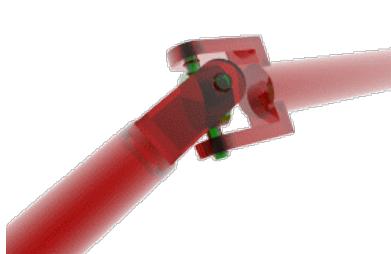
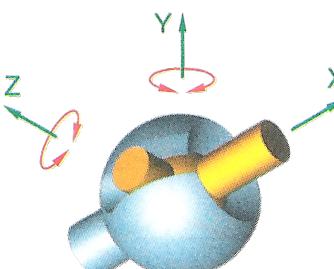


h) La liaison sphérique à doigt

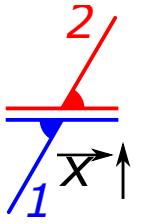
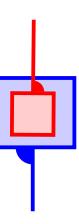
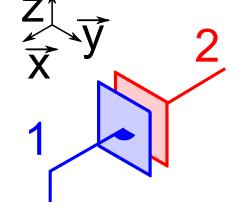
| Liaison sphérique à doigt de centre O_1 et d'axe bloqué \vec{z} | | |
|---|---|---|
| Exemple de désignation | Symbole normalisé | |
| | Représentation plane | Perspective |
| 2 degrés de liberté : <ul style="list-style-type: none"> • 2 rotations : R_x, R_y • 0 translation |  |  |



Exemple 8 :



i) La liaison plan-plan

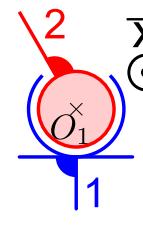
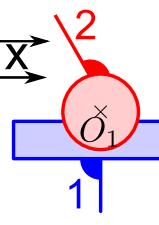
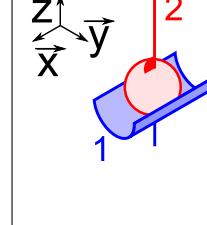
| Liaison plan-plan de normale \vec{x} | | |
|--|--|---|
| Exemple de désignation | Symbole normalisé | |
| | Représentation plane | Perspective |
| 3 degrés de liberté : <ul style="list-style-type: none"> • 1 rotation : R_x • 2 translations : T_y, T_z |   |  |

Historiquement, cette liaison s'appelait “liaison appui-plan”. Cette dénomination est parfois encore utilisée.

 **Exemple 9 :**



j) La liaison sphère-cylindre

| Liaison sphère-cylindre d'axe (O_1, \vec{x}) | | |
|---|---|---|
| Exemple de désignation | Symbole normalisé | |
| | Représentation plane | Perspective |
| 4 degrés de liberté : <ul style="list-style-type: none"> • 3 rotations : R_x, R_y, R_z • 1 translation : T_x |   |  |

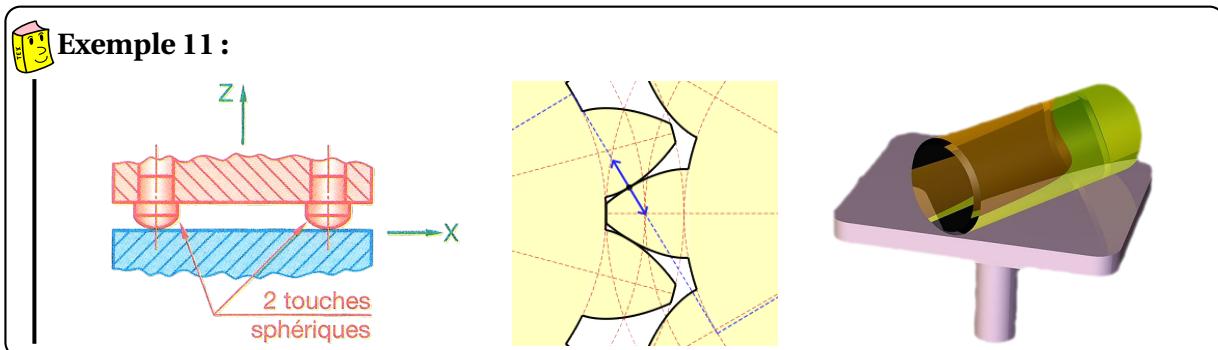
Cette liaison était autrefois appelée “linéaire anulaire”



k) La liaison cylindre-plan

Cette liaison était autrefois appelée “*linéaire-rectiligne*”. Malgré son nom, elle se représente par un liaison de forme prismatique. Certains la représentent toutefois par un cylindre posé sur un plan.

| Exemple de désignation | Symbole normalisé | |
|---|----------------------|-------------|
| | Représentation plane | Perspective |
| 4 degrés de liberté : <ul style="list-style-type: none"> • 2 rotations : R_x, R_z • 2 translations : T_x, T_y | | |



2 Tableau des liaisons cinématiques normalisées



Définition 6 : Torseur cinématique du mouvement relatif entre deux solides

On caractérise le mouvement relatif du solide S_2 par rapport au solide S_1 par le torseur cinématique qu'on exprimera en un point P :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_2/S_1)} \right\} = \underset{O_1}{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}} \\ \overrightarrow{V_{(O_1 \in S_2/S_1)}} \end{array} \right\}} = \underset{O_1}{\left\{ \begin{array}{cc} p_{21} & u_{21} \\ q_{21} & v_{21} \\ r_{21} & w_{21} \end{array} \right\}}_R = \underset{O_1}{\left\{ \begin{array}{c} p_{21} \cdot \vec{x}_1 + q_{21} \cdot \vec{y}_1 + r_{21} \vec{z}_1 \\ u_{21} \cdot \vec{x}_1 + v_{21} \cdot \vec{y}_1 + w_{21} \vec{z}_1 \end{array} \right\}} \quad (6)$$

- $R(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) = R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$, le repère lié à S_1
- p_{21}, q_{21} et r_{21} sont les composantes du vecteur rotation instantané $\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}}$ dans le repère R .
- u_{21}, v_{21} et w_{21} sont les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{(O_1 \in S_2/S_1)}}$ dans le repère R .

| Nom | Représentation | Torseur cinématique |
|---|----------------|---------------------|
| Liaisons pivot d'axe (Δ) = (O_1, \vec{x}) | | |
| Liaisons glissière de direction \vec{x} | | |
| Liaisons hélicoïdale d'axe (Δ) = (O_1, \vec{x}) et de pas p | | |
| Liaison pivot glissant d'axe (Δ) = (O_1, \vec{x}) | | |
| Liaison sphérique de centre O_1 | | |
| Liaison plane de normale \vec{x} | | |
| Liaison sphérique à doigt de centre O_1 , d'axe bloqué \vec{z} | | |
| Liaison sphère-cylindre d'axe (O_1, \vec{x}) | | |
| Liaison cylindre-plan de normale \vec{z} et d'axe (O_1, \vec{x}) et de plan normal $\Pi = (O_1, \vec{z}, \vec{x})$ | | |
| Liaison sphère-plan de normale (Δ) = (O_1, \vec{x}) | | |
| Liaison encastrement | | |

Avec $R(O_1, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, le repère associé au solide 1.