

LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I. ET M.P.I.I.

ANNÉE 2025 - 2026



C5 : MODÉLISATION CINÉMATIQUE STRUCTURELLE DES SYSTÈMES

## TD 12 - Modélisation des liaisons mécaniques (C5-2)

### Compétences

- **Analyser**
  - Associer les fonctions aux constituants.
- **Modéliser**
  - Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.
- **Résoudre**
  - Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques.
  - Mener une simulation numérique.

## Exercice 1 : Nacelle articulée de grande portée

Source : XENS PSI 2019

### 1 Présentation

La nacelle articulée (Figure 1) étudiée permet de sécuriser des opérations de travail en hauteur.

Cette nacelle s'utilise en extérieur et est adaptée à tous les terrains grâce à ses 4 roues motrices et son essieu oscillant. Elle est principalement utilisée pour : la construction de gros et second œuvre, l'aménagement d'espaces verts, la logistique, la distribution et l'industrie, la maintenance et la restauration.

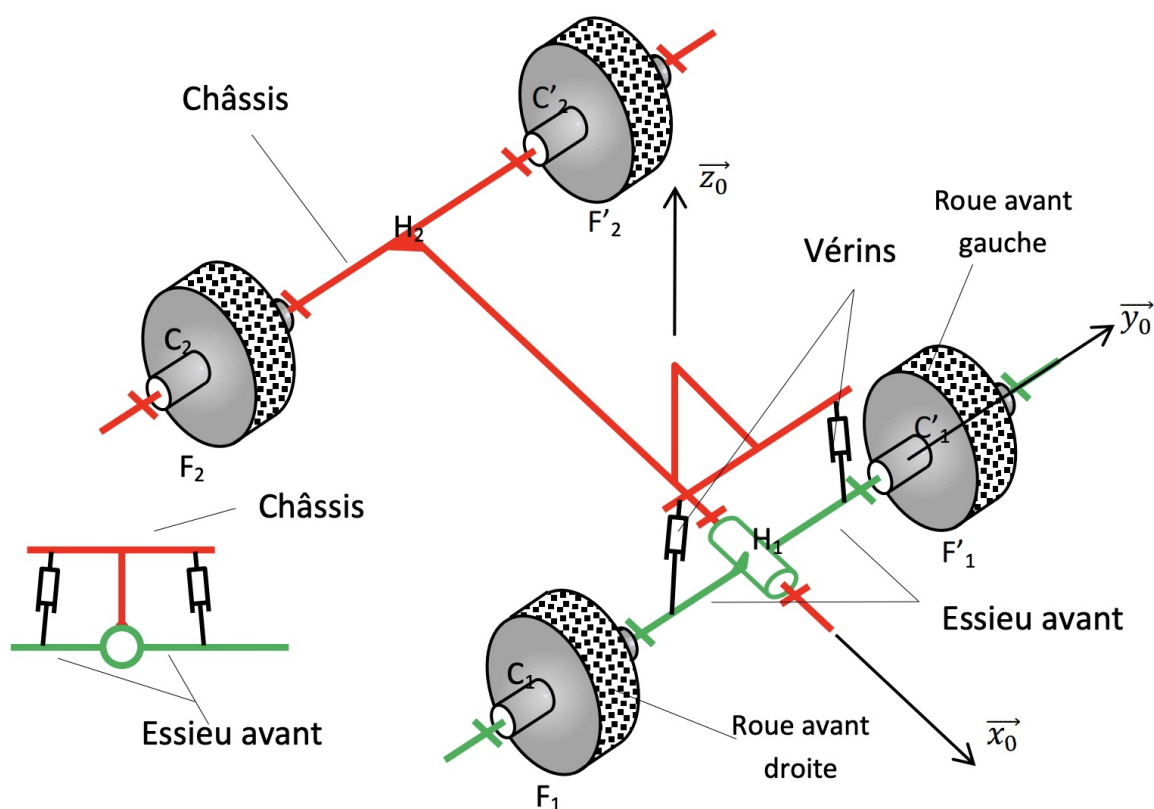
Son excellente maniabilité lui permet de se rendre dans des zones encombrées et de contourner facilement les obstacles grâce à son bras articulé. Le télescopage du bras et de la flèche permettent d'atteindre des hauteurs de travail très importantes (40 mètres environ).

### 2 Accessibilité Tout terrain

La nacelle est amenée à évoluer dans des terrains parfois accidentés (chantier, terrain en friche...). L'objectif est de valider la motricité du châssis par rapport au sol, même sur un terrain accidenté. Le châssis possède un essieu avant monté sur un palonnier pilotable par deux vérins.



FIGURE 1 – Nacelle de grande portée



$C_1, C'_1, C_2, C'_2$  sont les centres respectivement des roues avant droite, avant gauche, arrière droite et arrière gauche. Les quatre roues sont considérées en liaison ponctuelle parfaite avec le sol. Les points de contact sont notés respectivement  $F_1, F'_1, F_2, F'_2$ .

On pose :

$$\overrightarrow{C_1 C'_1} = L_1 \vec{y}_0$$

**Q1 : Donner le graphe de liaison du modèle proposé.**

**Q2 : Etablir la liaison équivalente réalisée par le train avant entre le sol et le châssis. Donner chaque étape de la**

démarche.

## Exercice 2 : Modélisation cinématique du Robovolc

**Source :** XENS PSI 2018

### 1 Contexte et présentation du système

#### a) Contexte

Les éruptions volcaniques peuvent avoir un impact important sur l'activité humaine, provoquant à la fois des déplacements de population, des dégâts matériels, ainsi que des changements de topographie et de climat. On considère qu'actuellement 10% de la population terrestre vit sous la menace des volcans, et 1500 volcans potentiellement en activité sont répertoriés sur la planète. Par conséquent, une compréhension fine des phénomènes volcaniques et une meilleure maîtrise des risques associés constituent un enjeu scientifique majeur.

Les observations scientifiques réalisées pendant les phases éruptives sont aujourd'hui fondamentales pour l'étude des volcans. En effet, les prélèvements des gaz magmatiques et des échantillons rocheux rejetés lors de ces phases constituent des indicateurs fiables de l'activité interne des volcans ; ils sont donc une riche source d'informations pour les volcanologues. Cependant, les phases éruptives sont aussi des phases actives très dangereuses et il est primordial de limiter les risques humains lors d'observations et de prélèvements à proximité des cratères en éruption (Figure 2).

Avec ce constat, allié aux avancées technologiques dans le domaine de la robotique, la Communauté Européenne a financé le projet ROBOVOLC dont le but était la réalisation d'un robot mobile pour l'exploration volcanique (figure 3). Ce robot devait être capable de :

- s'approcher d'un cratère actif ;
- collecter des échantillons rocheux issus de rejets éruptifs ;
- collecter des échantillons gazeux ;
- collecter d'autres données physiques et chimiques.

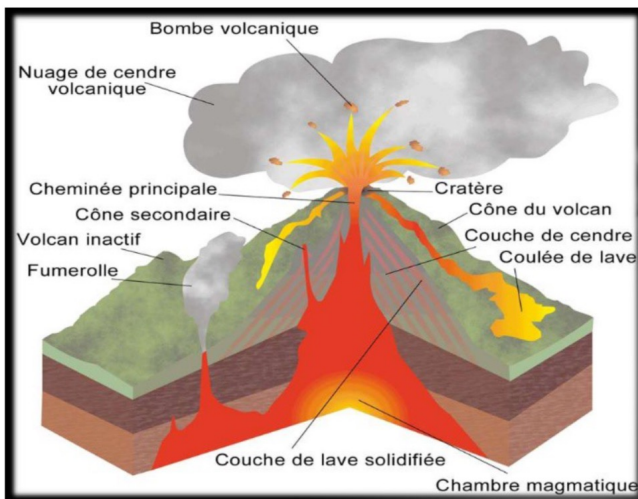


FIGURE 2 – Schématisation d'un volcan en éruption



FIGURE 3 – Robot ROBOVOLC

**Le sujet propose d'étudier quelques parties structurelles du système ROBOVOLC et de valider plusieurs performances (liées à la mobilité et au prélèvement) de ce système.**

#### b) Présentation du système

Le système ROBOVOLC est représenté sur la Figure 4. Il se divise en plusieurs sous-systèmes (liés à la navigation, au prélèvement et à la communication) qui sont détaillés dans les diagrammes SysML fournis dans l'annexe 1.

La partie mécanique de ROBOVOLC est constituée de deux parties : (i) la plateforme (châssis, roues) servant à la locomotion; (ii) l'équipement d'analyse (bras manipulateur, pince, sondes) pour le prélèvement et la mesure.

Une contrainte particulière dans la conception du système ROBOVOLC est qu'il est soumis à des conditions extérieures particulièrement difficiles : terrain volcanique non structuré avec obstacles et fortes pentes, températures très élevées près des zones éruptives (les gaz atteignent 600°C) mais basses ailleurs à cause de l'altitude, présence de poussières de cendre très fines, ambiance corrosive due aux composants acides, etc.

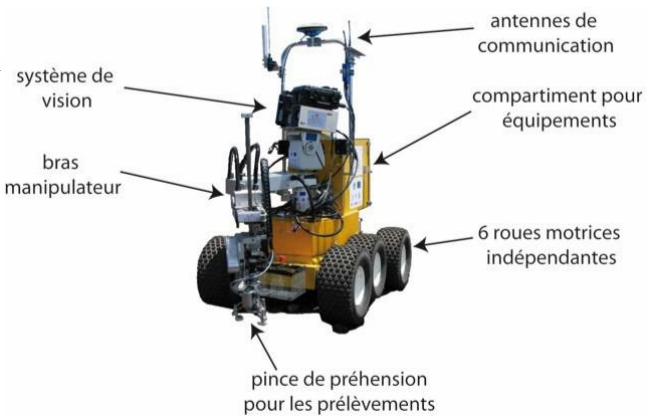


FIGURE 4 – Représentation du système ROBOVOLC

**Q3 : Dans la phase de conception de ROBOVOLC, une alternative à un système de locomotion à roues était un système volant. Donner deux inconvénients d'un tel système remettant en cause son utilisation dans l'environnement volcanique considéré.**

ROBOVOLC est piloté à distance depuis un poste de contrôle (Figure 5). La position géographique du robot est obtenue par un système GPS et est envoyée au poste de contrôle par liaison radio. De plus, l'opérateur peut visualiser en permanence les actions du système grâce aux images transmises par une caméra embarquée.

L'énergie électrique nécessaire au système est apportée par une unité de puissance avec quatre batteries couplées pour constituer deux unités de 24 V. La première est utilisée pour la plateforme, l'autre pour l'équipement d'analyse. Ces batteries sont positionnées sur la partie basse du châssis.

**Q4 : Citer un intérêt à mettre les batteries en position basse sur le système.**

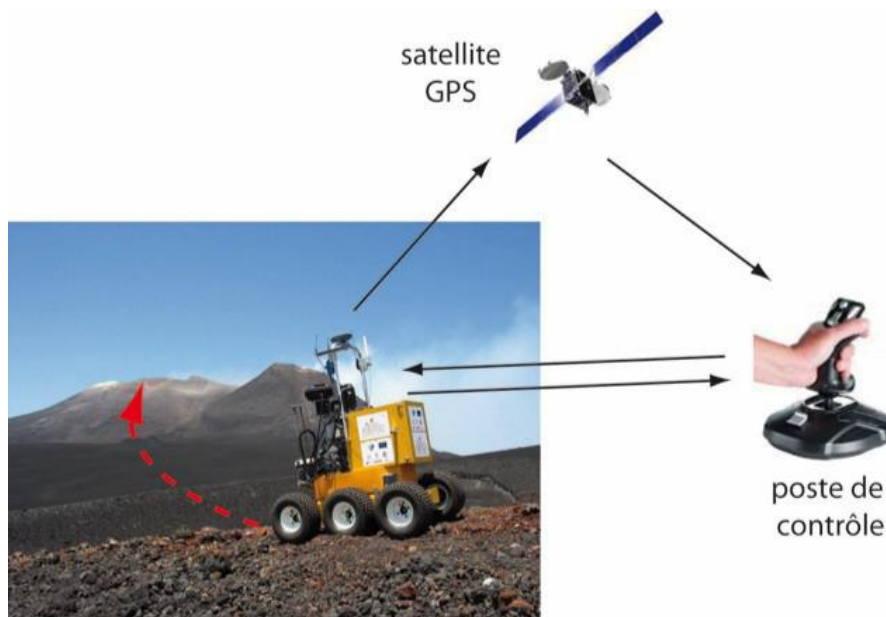


FIGURE 5 – Illustration du pilotage à distance du système ROBOVOLC

Un cahier des charges partiel est donné dans le tableau ci-dessous (tableau 1).

**Q5 : Citer une phase de vie du système qui contraint sa taille maximale et son poids maximal.**



Critère	VALEUR
distance maximale entre ROBOVOLC et le poste de contrôle	2 km
temps de trajet pour une mission de 24 heures	1,5 h
vitesse de déplacement atteignable	0,5 m/s
dimensions du système (longueur/largeur/hauteur)	1900 mm x 1200 mm x 800 mm
masse maximale des composants modulaires	200 kg
charge utile maximale (instruments, etc.)	30 kg
pente maximale du sol	40°
hauteur maximale d'un obstacle	400 mm
diamètre des objets à saisir	entre 40 mm et 300 mm
masse maximale des objets à saisir	2,5 kg

TABLE 1 – Extrait du cahier des charges

## 2 Étude de la mobilité sur un sol plan



### Objectif 1 :

L'objectif de cette partie est de valider les performances de mobilité, de manoeuvrabilité et de contrôle du système de locomotion de ROBOVOLC. On cherche notamment à vérifier le critère suivant du cahier des charges :

Critère	VALEUR
vitesse de déplacement atteignable	0,5 m/s

### a) Présentation du système de locomotion

Dans cette sous-partie, on présente l'architecture du système de locomotion de ROBOVOLC.

La plateforme de ROBOVOLC est équipée d'un châssis et de six roues motrices indépendantes et non directionnelles réparties symétriquement sur trois essieux (Figure 6).

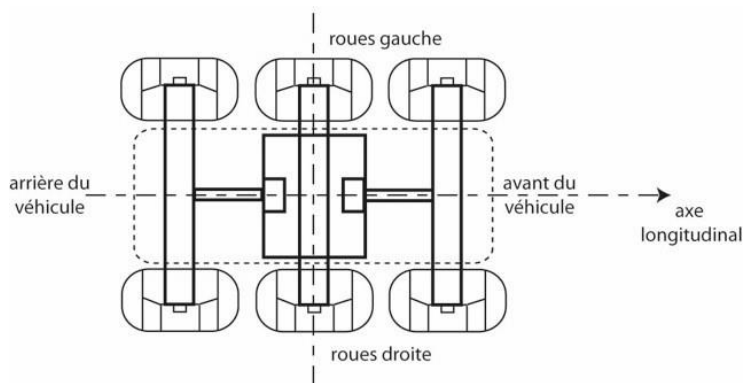


FIGURE 6 – schématisation de la plateforme de ROBOVOLC (vue de dessus)

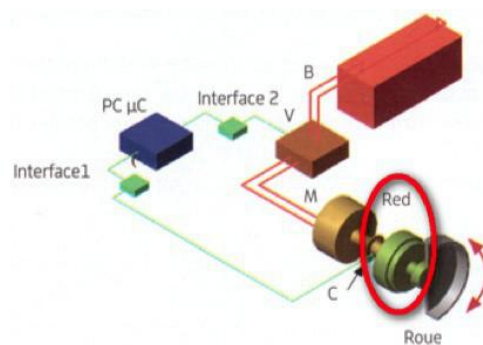


FIGURE 7 – schéma de transmission de puissance pour chaque roue

Chaque roue représente un module autonome (Figure 7) dont la chaîne d'énergie est constituée d'une batterie, d'un variateur de vitesse, d'un moteur électrique à courant continu, d'un réducteur

de vitesse (de rapport de réduction  $r = 1/236$ , entouré sur la Figure 7), d'un capteur de vitesse et d'un micro-contrôleur.

Les roues sont équipées de pneumatiques spéciaux de diamètre extérieur  $D = 300\text{ mm}$ .

On introduit le nombre (adimensionnel) de Froude  $F_r = \frac{v}{\sqrt{g \cdot l_c}}$  qui caractérise la vitesse de déplacement  $v$  de ROBOVOLC relativement à sa taille caractéristique  $l_c$ ;  $g$  est l'accélération de la pesanteur. Lorsque  $F_r > 1$ , les effets dynamiques ont une influence importante sur la trajectoire.

**Q6 : Montrer que les effets dynamiques peuvent être ici négligés.**

Dans la suite de cette partie, on suppose un roulement sans glissement longitudinal au niveau du contact roue-sol. On suppose de plus que le sol est plan et horizontal, que le contact roue-sol est ponctuel, et que le châssis et les roues sont des solides indéformables.

### b) Comportement en ligne droite

**Dans cette sous-partie, on détermine la commande permettant d'assurer une vitesse de déplacement en ligne droite donnée.**

Une modélisation de la plateforme est donnée sur la Figure 8. On définit un repère local  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  lié au châssis,  $\vec{x}$  correspondant à l'axe longitudinal du châssis (appelé aussi ligne de foi) illustré sur la Figure 6, et  $\vec{z}$  correspondant à l'axe vertical. Le point  $O$  est le centre géométrique et de masse de la plateforme dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  parallèle au sol.

Pour chaque roue notée  $S_i$  ( $1 \leq i \leq 6$ ), on définit :

- le point de contact  $P_i$  entre la roue et le sol;
- le point  $O_i$  qui est la projection du point  $P_i$  sur l'axe de rotation de la roue.

La position de chaque point  $O_i$  est définie par  $\overrightarrow{OO_i} = a_i \vec{x} + e_i \vec{y}$  avec  $a_i = \pm a$  et  $e_i = \pm e$ .

Le châssis est noté  $S_c$  et le sol est noté  $S_0$ .

FIGURE 8 – Configuration de la plateforme

On donne le torseur cinématique du châssis par rapport au sol, correspondant à une translation rectiligne suivant la direction longitudinale  $\vec{x}$  à la vitesse constante  $v$ .

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_c/S_0)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ v \cdot \vec{x} \end{array} \right\}_O$$

**Q7 : Donner la condition de roulement sans glissement pour une roue  $S_i$  par rapport à  $S_0$ .**

**Q8 : Exprimer la vitesse de rotation  $\omega_r$  de chaque roue par rapport au châssis, ainsi que la vitesse de rotation  $\omega_m$  du moteur correspondant. Faire l'application numérique pour une vitesse  $v = 0,5 \text{ m/s}$ .**

### c) Comportement en virage

**Dans cette sous-partie, on analyse les glissements latéraux occasionnés au niveau des roues dans les phases de rotation du châssis.**

Pour le système ROBOVOLC, un système à roues non directionnelles a été privilégié. Par conséquent, il n'y a pas de mécanisme de direction des roues et la rotation du châssis est obtenue par le mouvement différentiel des roues (comme sur un système à chenilles). Cette solution technique, même sans glissement longitudinal au contact roue-sol, engendre un glissement latéral des roues pendant une phase de virage; c'est une condition nécessaire à la rotation.

On ne considère que le glissement latéral de la roue  $i$  au point  $P_i$   $v_{gi}$  tel que  $\vec{V}(P_i \in S_i/S_0) = v_{gi} \cdot \vec{y}$ .

**Q9 : Donner trois avantages et deux inconvénients d'un système à roues non directionnelles.**

On définit le torseur cinématique du châssis par rapport au sol pendant une phase de virage :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_c/S_0)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \omega_z \cdot \vec{z} \\ v_x \cdot \vec{x} + v_y \cdot \vec{y} \end{array} \right\}_O$$

On donne le vecteur de rotation instantané traduisant la rotation d'une roue  $S_i$  par rapport au châssis  $S_c$  :  $\vec{\Omega}(R_i/S_c) = \omega_{ri} \vec{y}$

Pour les trois questions suivantes, on utilisera les notations génériques  $a_i$  et  $e_i$  afin de mener un calcul unique valable pour les 6 roues de la plateforme.

**Q10 : Exprimer la vitesse  $\vec{V}(P_i \in S_c/S_0)$  du point  $P_i$  en fonction de  $\omega_z$ ,  $v_x$ ,  $v_y$  et des données géométriques.**

**Q11 : Exprimer d'autre part cette même vitesse  $\vec{V}(P_i \in S_c/S_0)$  en fonction de la vitesse de glissement latéral  $v_{gi}$ , de la vitesse de rotation  $\omega_{ri}$  de la roue  $i$  et des données géométriques.**

**Q12 : En déduire la vitesse de glissement latéral  $v_{gi}$  et la vitesse de rotation  $\omega_{ri}$  de chaque roue en fonction de  $\omega_z$ ,  $v_x$ ,  $v_y$  et des données géométriques.**

**Q13 : Pour un mouvement de rotation pure ( $\omega_z > 0$ ) autour du point  $O$ , indiquer sur le document réponse :**

- le signe de la vitesse de rotation  $\omega_{ri}$  de chaque roue;
- le sens de la vitesse de glissement latéral  $v_{gi}$

Faire de même pour un mouvement de rotation pure autour du point  $O_1$ . On précisera le raisonnement et on remplira les cases en utilisant les notations introduites sur le document réponse.

Q14 : Donner une conséquence du glissement latéral sur les roues et proposer une solution technologique pour prendre en compte cette conséquence.

#### d) Modélisation cinématique de l'ensemble

On souhaite déterminer la liaison équivalente entre le châssis  $S_c$  et le sol  $S_0$ . On se place dans le cas simplifié illustré par la figure 9.

- Chaque roue  $S_i$  est en liaison pivot d'axe  $(O_i, \vec{y})$  avec le châssis  $S_c$ .
- Le contact entre chaque roue  $S_i$  et le sol  $S_0$  est supposé ponctuel et on considère donc que la liaison est de type sphère-plan de normale  $(P_i, \vec{z})$ .
- La position de chaque point  $O_i$  est définie par  $\overrightarrow{OO_i} = a_i \vec{x} + e_i \vec{y}$  avec  $a_i = \pm a$  et  $e_i = \pm e$ .
- La position de chaque point  $P_i$  est définie par  $\overrightarrow{O_i P_i} = -R \vec{z}$ .

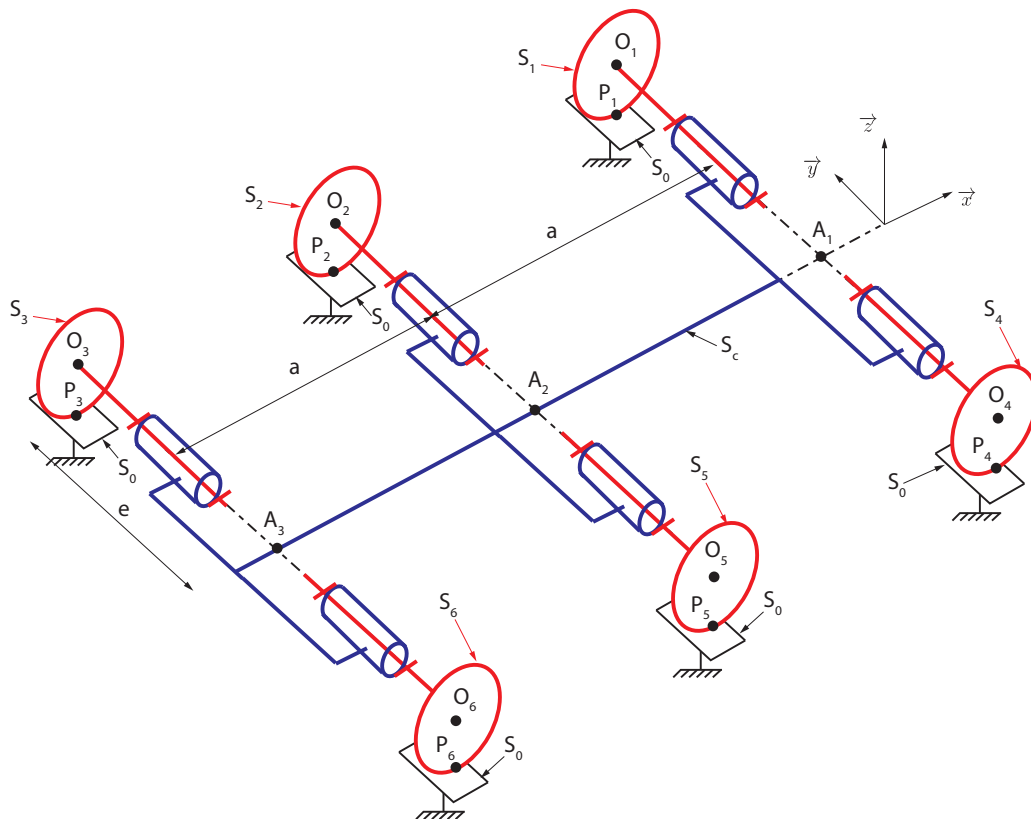


FIGURE 9 – Modélisation cinématique simplifiée du système.

Q15 : Dessiner le graphe de liaison permettant de modéliser ce problème.

Q16 : Donner la forme du torseur cinématique de la liaison entre une roue  $S_i$  et le sol  $S_0$  ( $\{\mathcal{V}_{(S_i/S_0)}\}$ ).

Q17 : Donner la forme du torseur cinématique de la liaison entre une roue  $S_i$  et le châssis  $S_c$  ( $\{\mathcal{V}_{(S_i/S_c)}\}$ ).

Q18 : Donner la forme du torseur cinématique équivalent entre  $S_c$  et  $S_0$  en passant par une roue  $S_i$  que l'on notera  $\{\mathcal{V}^{eq_i}(S_c/S_0)\}$  (On traduira la chaîne  $S_c - S_i - S_0$ ). En déduire le nom de la liaison équivalente associée.

Q19 : Donner la forme du torseur cinématique équivalent entre  $S_c$  et  $S_0$  en considérant toutes les chaînes  $S_c - S_i - S_0$  que l'on notera  $\{\mathcal{V}^{eq}(S_c/S_0)\}$ . En déduire le nom de la liaison équivalente associée.

### 3 Étude du bras manipulateur

Le package scientifique équipant ROBOVOLC est formé d'un bras manipulateur et d'une pince servant d'effecteur pour collecter des échantillons rocheux et poser/prendre des instruments sur le sol. Ces organes sont pilotés par des moteurs à courant continu contrôlés par des modules électroniques. Le système est en outre constitué d'un système d'échantillonnage des gaz (avec sonde) qui ne sera pas étudié ici.

**L'objectif de cette partie est de valider les performances de déplacement multidirectionnel du bras manipulateur et de vérifier leur compatibilité avec le critère suivant du cahier des charges :**

CRITÈRE	VALEUR
masse maximale des objets à saisir	2,5 kg

#### a) Modélisation cinématique

**Dans cette sous-partie, on établit le lien entre la cinématique des liaisons et la cinématique de la pince située au bout du bras.**

Le bras manipulateur est de type SCARA (*Selective Compliance Assembly Robot Arm*) ; c'est un système mécanique poly-articulé avec trois axes parallèles et une architecture en série (Figure 10). Il présente plusieurs avantages, notamment sa précision, sa rapidité, et sa très grande rigidité verticale.

L'ensemble est constitué de trois pièces assimilées à des solides indéformables :

- le bras 1, de masse  $m_1$ , auquel on associe un repère  $(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  ;
- le bras 2, de masse  $m_2$ , auquel on associe un repère  $(O_2, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$  ;
- la tige 3 au bout de laquelle se situe la pince et éventuellement l'objet saisi. La masse  $m_3$  de ce sous-ensemble est supposée ponctuelle au point  $P$  correspondant à la position de la pince.

Dans cette étude, le châssis de ROBOVOLC constitue le bâti 0 auquel on associe un repère (fixe)  $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . On suppose par la suite que le sol est plan et horizontal ; la direction  $\vec{z}_0 = \vec{z}_1 = \vec{z}_2$  correspond donc à la verticale. On suppose également que le référentiel lié au bâti est galiléen.

Le positionnement horizontal de la pince dans le plan  $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$  est obtenu par deux rotations indépendantes :

- celle du bras 1 en liaison pivot d'axe  $(O_1, \vec{z}_0)$  par rapport au bâti 0, on note  $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$  l'angle correspondant ;
- celle du bras 2 en liaison pivot d'axe  $(O_2, \vec{z}_0)$  par rapport au bras 1, on note  $\theta_2 = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  l'angle correspondant.

Le positionnement vertical de la pince est quant à lui obtenu par une liaison glissière de direction  $\vec{z}_0$  entre la tige 3 et le bras 2. Toutes les liaisons sont supposées parfaites.

On note :  $\vec{O_0O_1} = d_1 \vec{z}_0$ ,  $\vec{O_1O_2} = l_1 \vec{x}_1 + d_2 \vec{z}_0$ ,  $\vec{O_2P} = l_2 \vec{x}_2 - \lambda_3 \vec{z}_0$

Les 3 degrés de liberté du bras sont donc  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\lambda_3$ . Le débattement permis pour les deux liaisons pivot est  $\pm 150^\circ$  (limitation par des butées).

Un schéma cinématique du système est proposé sur la Figure 10.

On donne de plus :  $d_1 = 500 \text{ mm}$ ,  $d_2 = 30 \text{ mm}$ ,  $l_1 = 500 \text{ mm}$ ,  $l_2 = 500 \text{ mm}$ ,  $m_1 = 2 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 2 \text{ kg}$ ,  $m_3 = 6 \text{ kg}$  (incluant un objet saisi de masse 2,5 kg).

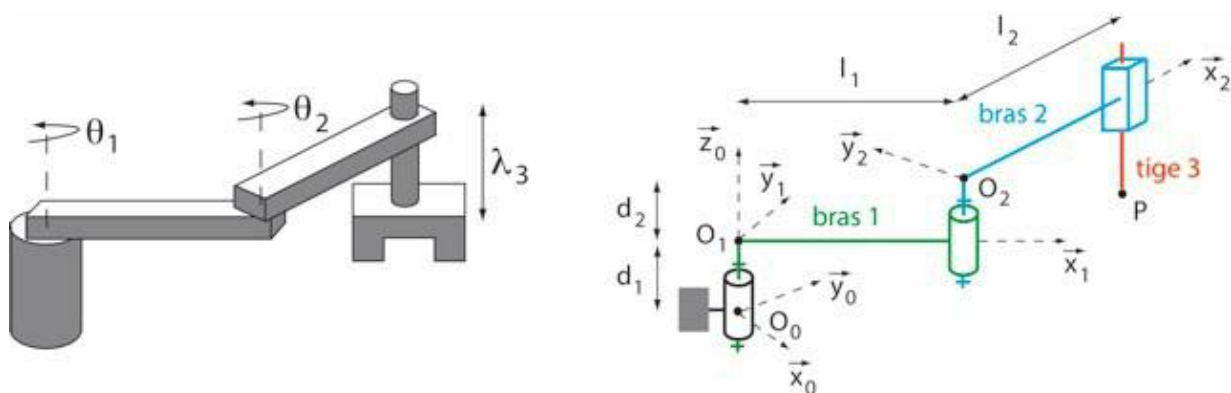


FIGURE 10 – schématisation et paramétrage du système SCARA

Dans un **modèle cinématique direct**, les données d'entrée sont les valeurs des angles de rotation  $\theta_1$  et  $\theta_2$  (appelés



variables articulaires) et de la position verticale  $\lambda_3$  de la pince. On cherche alors la configuration du système à partir de ces variables.

**Q20 :** En représentant sur le document réponse la base du cylindre, montrer que le volume accessible par le point  $P$  (enveloppe de travail) est un cylindre à base non-circulaire.

**Q21 :** Donner l'expression des coordonnées  $(x_p, y_p, z_p)$  et de la vitesse  $\vec{V}(P \in 3/0)$  du point  $P$  dans le repère fixe  $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  en fonction des variables  $\theta_1, \theta_2$  et  $\lambda_3$  et des dimensions constantes du problème.

**Q22 :** Montrer que la vitesse maximale  $V_{max}$  (en norme) que peut atteindre le point  $P$  dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$  est obtenue pour  $\theta_2 = 0^\circ$ . Exprimer  $V_{max}$  en fonction de la vitesse de rotation maximale  $\omega_{max}$  des moteurs et des dimensions constantes.

Dans un **modèle cinématique inverse**, les données d'entrée sont la position  $(x_p, y_p, z_p)$  et la vitesse  $(V_p^x, V_p^y, V_p^z)$  de la pince située en  $P$  dans le repère fixe  $(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . On cherche alors les lois à appliquer au niveau des liaisons (variables  $\theta_1, \theta_2$  et  $\lambda_3$ ) pour obtenir ces données.

**Q23 :** Donner l'expression de  $\lambda_3$  et  $\dot{\lambda}_3$  en fonction de  $z_p, V_p^z$  et des dimensions constantes.

**Q24 :** Pour une même position  $(x_p, y_p, z_p)$  du point  $P$ , montrer schématiquement qu'il y a deux configurations possibles des angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Par un raisonnement graphique, donner sur le document réponse la configuration complémentaire de celle dessinée correspondant à  $\theta_1 = 90^\circ$  et  $\theta_2 = -60^\circ$ .

**Q25 :** Montrer que quelle que soit la configuration, la valeur de l'angle  $\theta_2$  est entièrement déterminée par  $x_p^2 + y_p^2$ , et donner l'expression de  $\theta_2$  en fonction de  $x_p^2 + y_p^2$  et des dimensions constantes.

## 4 Annexes

### a) Modélisation SysML

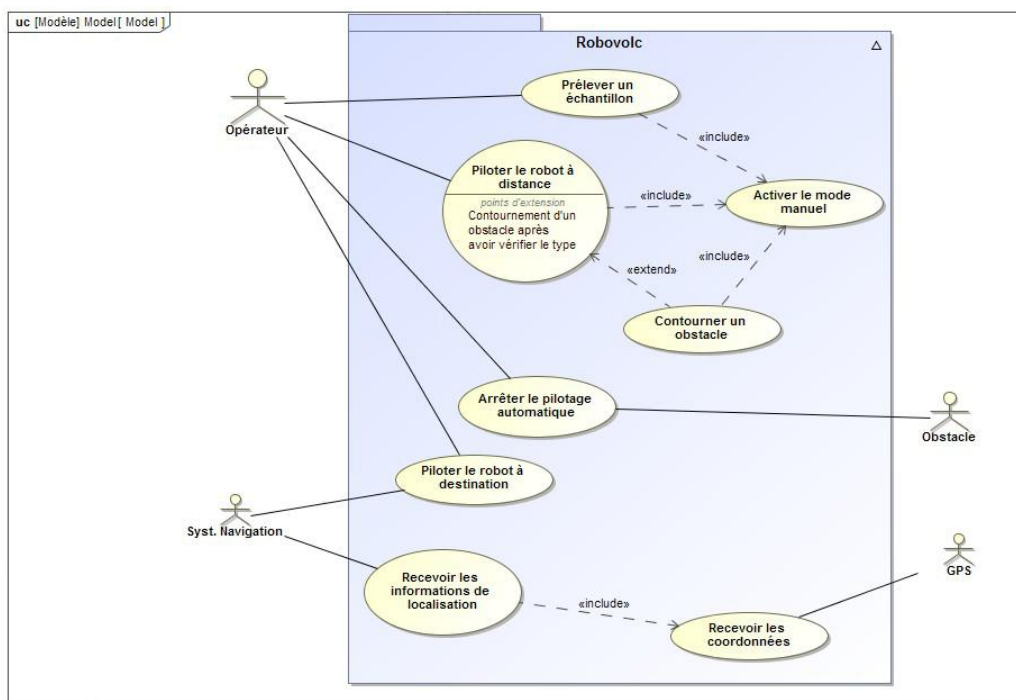


FIGURE 11 – Diagramme des cas d'utilisation

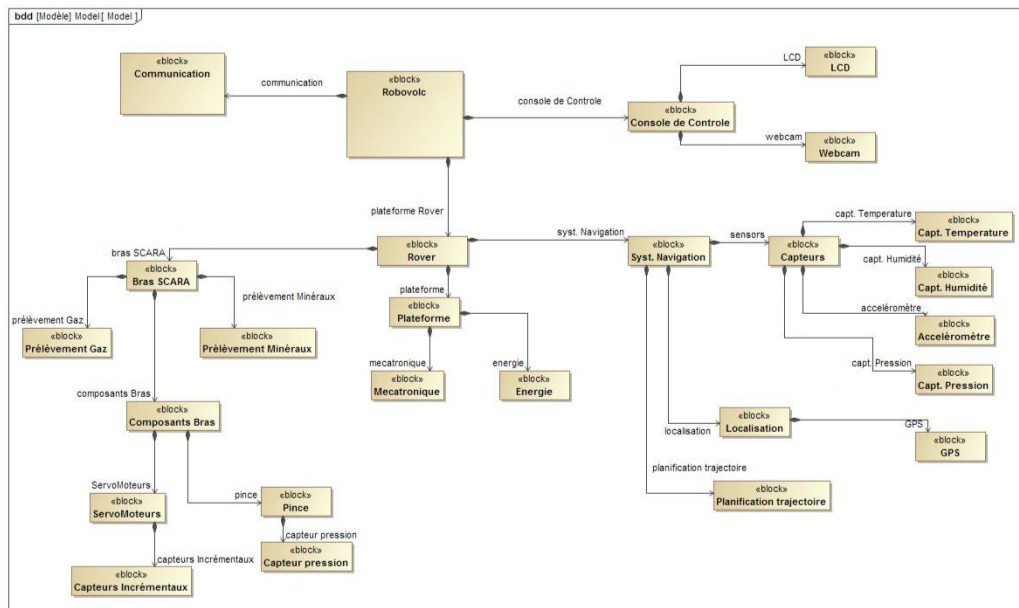


FIGURE 12 – Diagramme de définition de blocs

## Exercice 3 : Application directe des liaisons équivalentes

**Source :** Emilien DURIF

### 1 Liaison équivalente avec 2 liaisons sphère cylindre

On considère un système composé de deux solides 2 et 1 représenté par le schéma cinématique ci-contre. On pose  $\overrightarrow{AB} = a \cdot \vec{y}$ .

**Q26 : Tracer le graphe des liaisons.**

**Q27 : Donner l'expression des torseurs cinématiques pour les liaisons LA et LB.**

**Q28 : Déterminer la liaison équivalente entre 2 et 1.**

