



## C8 : Analyse des performances des systèmes asservis

### C8-1 : Stabilité des systèmes asservis

Émilien DURIF

Lycée La Martinière Monplaisir Lyon  
Classe de MPSI  
29 Avril 2025



# Plan

## 1 Intérêts et objectifs

- Introduction
- Classe et ordre d'une fonction de transfert
- Exemple du cours

## 2 Stabilité

- Définition et propriétés
- Critères de stabilité
- Marge de stabilité
- Application aux systèmes du premier et deuxième ordre



# Plan

## 1 Intérêts et objectifs

- Introduction
- Classe et ordre d'une fonction de transfert
- Exemple du cours

## 2 Stabilité

- Définition et propriétés
- Critères de stabilité
- Marge de stabilité
- Application aux systèmes du premier et deuxième ordre



## Introduction : intérêts et objectifs

### Précision et stabilité

- Ce chapitre permet d'énoncer les outils nécessaires à la caractérisation de la **stabilité** des systèmes linéaires continus et invariants asservis.
- Durant tout ce chapitre nous allons énoncer les principes de quantification de la stabilité d'un système modélisé par une fonction de transfert.



## Introduction : intérêts et objectifs

### Précision et stabilité

- Ce chapitre permet d'énoncer les outils nécessaires à la caractérisation de la **stabilité** des systèmes linéaires continus et invariants asservis.
- Durant tout ce chapitre nous allons énoncer les principes de quantification de la stabilité d'un système modélisé par une fonction de transfert.



# Plan

## 1 Intérêts et objectifs

- Introduction
- Classe et ordre d'une fonction de transfert
- Exemple du cours

## 2 Stabilité

- Définition et propriétés
- Critères de stabilité
- Marge de stabilité
- Application aux systèmes du premier et deuxième ordre



## Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

### Classe et ordre d'une fonction de transfert

Soit une fonction de transfert en boucle ouverte ( $FTBO(p)$ ) ou en boucle fermée ( $FTBF(p)$ ) donnée par la fonction  $H(p)$  :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n}. \quad (1)$$

On appelle :

- zéros de la fonction de transfert, celles qui annulent son numérateur ;
- pôles de la fonction de transfert, les valeurs de  $p$  qui annulent son dénominateur ;
- $\alpha (\geq 0)$ , sa classe (pour une  $FTBO(p)$ , il correspond directement au nombre d'intégrateurs purs dans la boucle ouverte) ;
- $n_o = n + \alpha$  l'ordre du système qui correspond au nombre de pôles du système ;
- $K$ , le gain de la fonction de transfert ;

## Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

### Classe et ordre d'une fonction de transfert

Soit une fonction de transfert en boucle ouverte ( $FTBO(p)$ ) ou en boucle fermée ( $FTBF(p)$ ) donnée par la fonction  $H(p)$  :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n}. \quad (1)$$

On appelle :

- **zéros** de la fonction de transfert, celles qui annulent son numérateur ;
- **pôles** de la fonction de transfert, les valeurs de  $p$  qui annulent son dénominateur ;
- $\alpha (\geq 0)$ , sa classe (pour une  $FTBO(p)$ , il correspond directement au nombre d'intégrateurs purs dans la boucle ouverte) ;
- $n_o = n + \alpha$  l'ordre du système qui correspond au nombre de pôles du système ;
- $K$ , le gain de la fonction de transfert ;



## Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

### Classe et ordre d'une fonction de transfert

Soit une fonction de transfert en boucle ouverte ( $FTBO(p)$ ) ou en boucle fermée ( $FTBF(p)$ ) donnée par la fonction  $H(p)$  :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n}. \quad (1)$$

On appelle :

- **zéros** de la fonction de transfert, celles qui annulent son numérateur ;
- **pôles** de la fonction de transfert, les valeurs de  $p$  qui annulent son dénominateur ;
- $\alpha (\geq 0)$ , sa classe (pour une  $FTBO(p)$ , il correspond directement au nombre d'intégrateurs purs dans la boucle ouverte) ;
- $n_o = n + \alpha$  l'ordre du système qui correspond au nombre de pôles du système ;
- $K$ , le gain de la fonction de transfert ;



## Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

### Classe et ordre d'une fonction de transfert

Soit une fonction de transfert en boucle ouverte ( $FTBO(p)$ ) ou en boucle fermée ( $FTBF(p)$ ) donnée par la fonction  $H(p)$  :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n}. \quad (1)$$

On appelle :

- **zéros** de la fonction de transfert, celles qui annulent son numérateur ;
- **pôles** de la fonction de transfert, les valeurs de  $p$  qui annulent son dénominateur ;
- $\alpha (\geq 0)$ , sa **classe** (pour une  $FTBO(p)$ , il correspond directement au nombre d'intégrateurs purs dans la boucle ouverte) ;
- $n_o = n + \alpha$  l'ordre du système qui correspond au nombre de pôles du système ;
- $K$ , le **gain** de la fonction de transfert ;

## Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

### Classe et ordre d'une fonction de transfert

Soit une fonction de transfert en boucle ouverte ( $FTBO(p)$ ) ou en boucle fermée ( $FTBF(p)$ ) donnée par la fonction  $H(p)$  :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n}. \quad (1)$$

On appelle :

- **zéros** de la fonction de transfert, celles qui annulent son numérateur ;
- **pôles** de la fonction de transfert, les valeurs de  $p$  qui annulent son dénominateur ;
- $\alpha (\geq 0)$ , sa **classe** (pour une  $FTBO(p)$ , il correspond directement au nombre d'intégrateurs purs dans la boucle ouverte) ;
- $n_o = n + \alpha$  l'ordre du système qui correspond au nombre de pôles du système ;
- $K$ , le **gain** de la fonction de transfert ;

## Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

### Classe et ordre d'une fonction de transfert

Soit une fonction de transfert en boucle ouverte ( $FTBO(p)$ ) ou en boucle fermée ( $FTBF(p)$ ) donnée par la fonction  $H(p)$  :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n}. \quad (1)$$

On appelle :

- **zéros** de la fonction de transfert, celles qui annulent son numérateur ;
- **pôles** de la fonction de transfert, les valeurs de  $p$  qui annulent son dénominateur ;
- $\alpha (\geq 0)$ , sa **classe** (pour une  $FTBO(p)$ , il correspond directement au nombre d'intégrateurs purs dans la boucle ouverte) ;
- $n_o = n + \alpha$  l'ordre du système qui correspond au nombre de pôles du système ;
- $K$ , le **gain** de la fonction de transfert ;



## Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

### Classe d'une FTBO quelconque

Ordre, gain et classe de :  $H_1(p) = \frac{8 p^3 + 2 p^2 + 3 p + 12}{9 p^5 + 4 p^3 + 6 p^2}$



$$H_1(p) = \frac{8 p^3 + 2 p^2 + 3 p + 12}{9 p^5 + 4 p^3 + 6 p^2} = \frac{12}{6 p^2} \frac{\frac{2}{3}p^3 + \frac{1}{6}p^2 + \frac{1}{4}p + 1}{\frac{3}{2}p^3 + \frac{2}{3}p + 1}$$

- a) Ordre 5
- b) Gain 12
- c) Classe 2



## Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

### Classe d'une FTBO quelconque

Ordre, gain et classe de :  $H_1(p) = \frac{8 p^3 + 2 p^2 + 3 p + 12}{9 p^5 + 4 p^3 + 6 p^2}$



$$H_1(p) = \frac{8 p^3 + 2 p^2 + 3 p + 12}{9 p^5 + 4 p^3 + 6 p^2} = \frac{12}{6 p^2} \frac{\frac{2}{3}p^3 + \frac{1}{6}p^2 + \frac{1}{4}p + 1}{\frac{3}{2}p^3 + \frac{2}{3}p + 1}$$

- Ordre : 5.
- Gain : 2.
- Classe : 2.

## Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

### Classe d'une FTBO quelconque

Ordre, gain et classe de :  $H_1(p) = \frac{8 p^3 + 2 p^2 + 3 p + 12}{9 p^5 + 4 p^3 + 6 p^2}$



$$H_1(p) = \frac{8 p^3 + 2 p^2 + 3 p + 12}{9 p^5 + 4 p^3 + 6 p^2} = \frac{12}{6 p^2} \frac{\frac{2}{3} p^3 + \frac{1}{6} p^2 + \frac{1}{4} p + 1}{\frac{3}{2} p^3 + \frac{2}{3} p + 1}$$

- Ordre : 5.
- Gain : 2.
- Classe : 2.



## Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

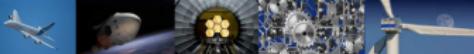
### Classe d'une FTBO quelconque

Ordre, gain et classe de :  $H_1(p) = \frac{8 p^3 + 2 p^2 + 3 p + 12}{9 p^5 + 4 p^3 + 6 p^2}$



$$H_1(p) = \frac{8 p^3 + 2 p^2 + 3 p + 12}{9 p^5 + 4 p^3 + 6 p^2} = \frac{12}{6 p^2} \frac{\frac{2}{3}p^3 + \frac{1}{6}p^2 + \frac{1}{4}p + 1}{\frac{3}{2}p^3 + \frac{2}{3}p + 1}$$

- Ordre : 5.
- Gain : 2.
- Classe : 2.



## Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

### Classe d'une FTBO quelconque

Ordre, gain et classe de :  $H_1(p) = \frac{8 p^3 + 2 p^2 + 3 p + 12}{9 p^5 + 4 p^3 + 6 p^2}$



$$H_1(p) = \frac{8 p^3 + 2 p^2 + 3 p + 12}{9 p^5 + 4 p^3 + 6 p^2} = \frac{12}{6 p^2} \frac{\frac{2}{3}p^3 + \frac{1}{6}p^2 + \frac{1}{4}p + 1}{\frac{3}{2}p^3 + \frac{2}{3}p + 1}$$

- Ordre : 5.
- Gain : 2.
- Classe : 2.



## Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

### Classe d'une FTBO quelconque

Ordre, gain et classe de :  $H_2(p) = \frac{7 p^4 + 3 p^3 + 2 p + 7}{p^3 + 2 p^2 + 6}$



$$H_2(p) = \frac{7 p^4 + 3 p^3 + 2 p + 7}{p^3 + 2 p^2 + 6} = \frac{7}{6 p^0} \frac{p^4 + \frac{3}{7} p^3 + \frac{2}{7} p + 1}{\frac{1}{6} p^3 + \frac{1}{3} p^2 + 1}$$

- Ordre 3
- Gain 7
- Classe 0



## Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

### Classe d'une FTBO quelconque

Ordre, gain et classe de :  $H_2(p) = \frac{7 p^4 + 3 p^3 + 2 p + 7}{p^3 + 2 p^2 + 6}$



$$H_2(p) = \frac{7 p^4 + 3 p^3 + 2 p + 7}{p^3 + 2 p^2 + 6} = \frac{7}{6 p^0} \frac{p^4 + \frac{3}{7} p^3 + \frac{2}{7} p + 1}{\frac{1}{6} p^3 + \frac{1}{3} p^2 + 1}$$

- Ordre : 3.
- Gain :  $\frac{7}{6}$ .
- Classe : 0.

## Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

### Classe d'une FTBO quelconque

Ordre, gain et classe de :  $H_2(p) = \frac{7 p^4 + 3 p^3 + 2 p + 7}{p^3 + 2 p^2 + 6}$



$$H_2(p) = \frac{7 p^4 + 3 p^3 + 2 p + 7}{p^3 + 2 p^2 + 6} = \frac{7}{6 p^0} \frac{p^4 + \frac{3}{7} p^3 + \frac{2}{7} p + 1}{\frac{1}{6} p^3 + \frac{1}{3} p^2 + 1}$$

- Ordre : 3.
- Gain :  $\frac{7}{6}$ .
- Classe : 0.

## Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

### Classe d'une FTBO quelconque

Ordre, gain et classe de :  $H_2(p) = \frac{7 p^4 + 3 p^3 + 2 p + 7}{p^3 + 2 p^2 + 6}$



$$H_2(p) = \frac{7 p^4 + 3 p^3 + 2 p + 7}{p^3 + 2 p^2 + 6} = \frac{7}{6 p^0} \frac{p^4 + \frac{3}{7} p^3 + \frac{2}{7} p + 1}{\frac{1}{6} p^3 + \frac{1}{3} p^2 + 1}$$

- Ordre : 3.
- Gain :  $\frac{7}{6}$ .
- Classe : 0.

## Introduction : classe et ordre d'une fonction de transfert

### Classe d'une FTBO quelconque

Ordre, gain et classe de :  $H_2(p) = \frac{7 p^4 + 3 p^3 + 2 p + 7}{p^3 + 2 p^2 + 6}$



$$H_2(p) = \frac{7 p^4 + 3 p^3 + 2 p + 7}{p^3 + 2 p^2 + 6} = \frac{7}{6 p^0} \frac{p^4 + \frac{3}{7} p^3 + \frac{2}{7} p + 1}{\frac{1}{6} p^3 + \frac{1}{3} p^2 + 1}$$

- Ordre : 3.
- Gain :  $\frac{7}{6}$ .
- Classe : 0.



# Plan

## 1 Intérêts et objectifs

- Introduction
- Classe et ordre d'une fonction de transfert
- Exemple du cours

## 2 Stabilité

- Définition et propriétés
- Critères de stabilité
- Marge de stabilité
- Application aux systèmes du premier et deuxième ordre



## Exemple du cours

### Robot Lola

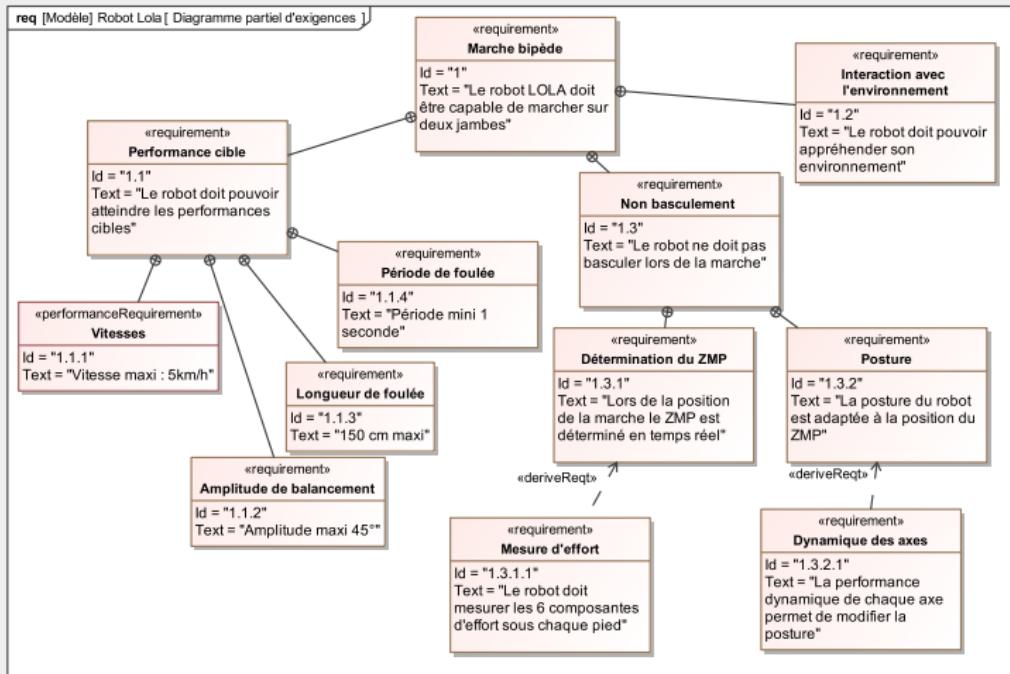
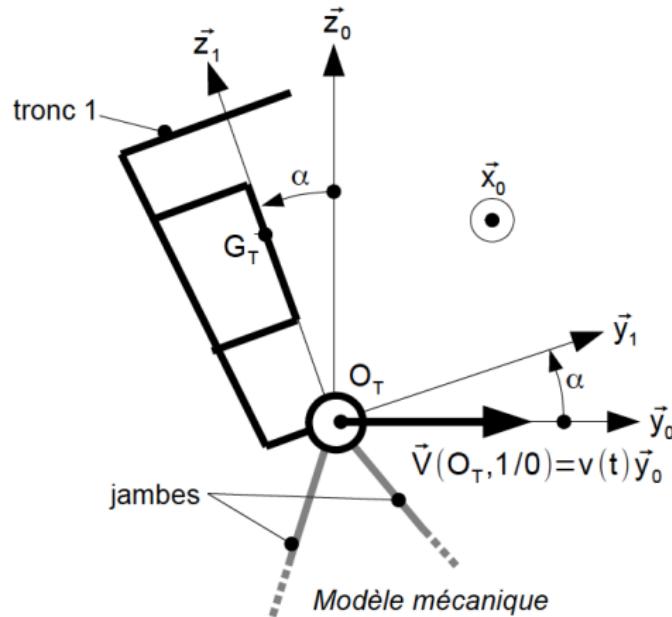
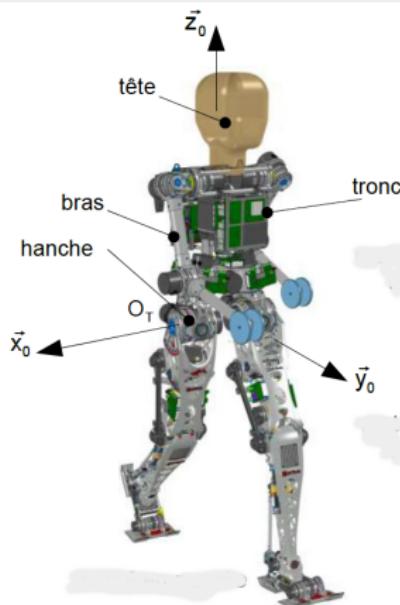


Diagramme des exigences

## Exemple du cours

## Robot Lola



## Exemple du cours

### Robot Lola

On s'intéresse ici à la mise en place d'une commande permettant d'assurer les performances dynamiques du robot Lola en terme de maintien d'une posture vertical. On note  $\alpha(t)$ , l'**angle de tangage**. Cet axe est actionné par un moteur à courant continu avec une tension d'alimentation noté  $U_c(t)$ .

#### 1.3.2.1 Performance dynamique de chaque axe permet de modifier la posture

Critère	Niveau	Flexibilité
Marge de phase	$M\varphi = 50^\circ$	Mini
Erreur Statique	$0^\circ$	$\pm 0,5^\circ$
Bandé passante à 0 dB en boucle ouverte	$\omega_{BP} = 50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$	Mini
Temps de réponse à 5%	$0,2s$	Maxi
Dépassement	$1^\circ$	Maxi



## Exemple du cours

### Robot Lola

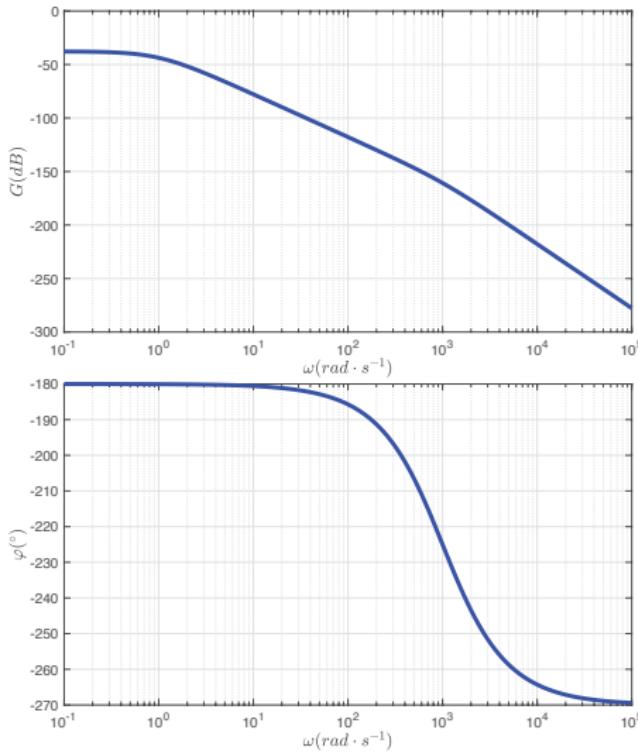
On peut montrer que la fonction de transfert du robot Lola en boucle ouverte est de la forme :

$$F(p) = \frac{\alpha(p)}{U_c(p)} = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p)(-1 + \tau_1 \cdot p)(1 + \tau_2 \cdot p)}$$

**Q 1 : Proposer un tracé asymptotique sur le diagramme de Bode de  $F(p)$**

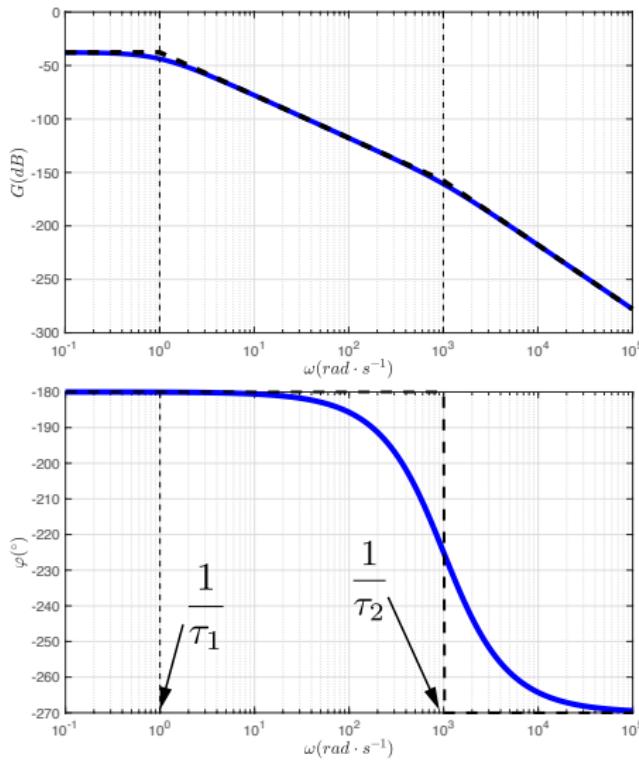


## Exemple du cours





## Exemple du cours

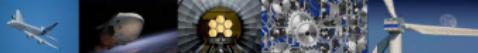




## Exemple du cours

Q 2 : En analysant les diagrammes de Bode ci-dessus, déterminer les valeurs de  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  et  $K$ .

$\omega$	$0 \rightarrow \frac{1}{\tau_1}$	$\frac{1}{\tau_1}$	$\frac{1}{\tau_1} \rightarrow \frac{1}{\tau_2}$	$\frac{1}{\tau_2}$	$\frac{1}{\tau_2} \rightarrow \infty$
Tracé asymptotique	Gain (dB/dec)	$\varphi(^{\circ})$	Gain (dB)	Gain (dB/dec)	$\varphi(^{\circ})$
$\frac{K}{-1+\tau_1 \cdot p}$					
$\frac{1}{1+\tau_1 \cdot p}$					
$\frac{1}{1+\tau_2 \cdot p}$					
$F(p)$					



## Exemple du cours

**Q 2 : En analysant les diagrammes de Bode ci-dessus, déterminer les valeurs de  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  et  $K$ .**

$\omega$	$0 \rightarrow \frac{1}{\tau_1}$		$\frac{1}{\tau_1}$	$\frac{1}{\tau_1} \rightarrow \frac{1}{\tau_2}$		$\frac{1}{\tau_2}$	$\frac{1}{\tau_2} \rightarrow \infty$	
Tracé asymptotique	Gain (dB/dec)	$\varphi(^{\circ})$	Gain (dB)	Gain (dB/dec)	$\varphi(^{\circ})$	Gain (dB)	Gain (dB/dec)	$\varphi(^{\circ})$
$\frac{K}{-1+\tau_1 \cdot p}$	0	-180	$20\log K$	-20	-90	Continuité	-20	-90
$\frac{1}{1+\tau_1 \cdot p}$	0	0	0	-20	-90	Continuité	-20	-90
$\frac{1}{1+\tau_2 \cdot p}$	0	0	0	0	0	0	-20	-90
$F(p)$	0	-180	$20\log K$	-40	-180	Continuité	-60	-270



## Exemple du cours

### Robot Lola

Q 2 : En analysant les diagrammes de Bode ci-dessus, déterminer les valeurs de  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  et  $K$ .



## Exemple du cours

### Robot Lola

**Q 2 : En analysant les diagrammes de Bode ci-dessus, déterminer les valeurs de  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  et  $K$ .**

Par identification, on trouve :

- $\tau_1 = 1 \text{ s}$ ;
- $\tau_2 = 10^{-3} \text{ s}$ ;
- $K = 10^{-\frac{37,5}{20}} = 0,013 \text{ rad} \cdot V^{-1}$ .



## Exemple du cours

### Robot Lola

Par la suite, on simplifie  $F(p)$  par  $\frac{K}{(1+\tau_1 \cdot p)(-1+\tau_1 \cdot p)}$ .

**Q 3 : Justifier ce choix de simplification.**



## Exemple du cours

### Robot Lola

Par la suite, on simplifie  $F(p)$  par  $\frac{K}{(1+\tau_1 \cdot p)(-1+\tau_1 \cdot p)}$ .

#### Q 3 : Justifier ce choix de simplification.

$\tau_2 \ll \tau_1$  donc l'effet de  $\frac{1}{1+\tau_2 \cdot p}$  est négligeable sur la réponse.

La forme simplifiée est justifiée. Sur le Bode on remarque que le modèle simplifié est satisfaisant jusqu'à  $100\text{rad/s} > 50\text{rad/s}$  (bande passante visée en BO)



# Plan

## 1 Intérêts et objectifs

- Introduction
- Classe et ordre d'une fonction de transfert
- Exemple du cours

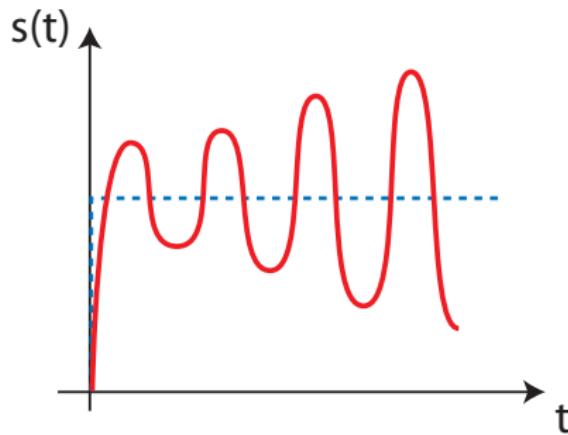
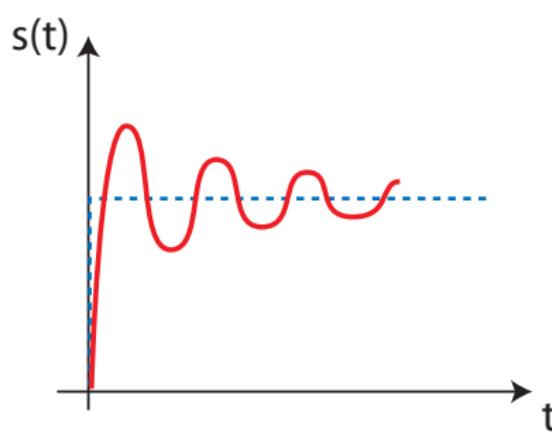
## 2 Stabilité

- Définition et propriétés
- Critères de stabilité
- Marge de stabilité
- Application aux systèmes du premier et deuxième ordre

## Stabilité

### Stabilité

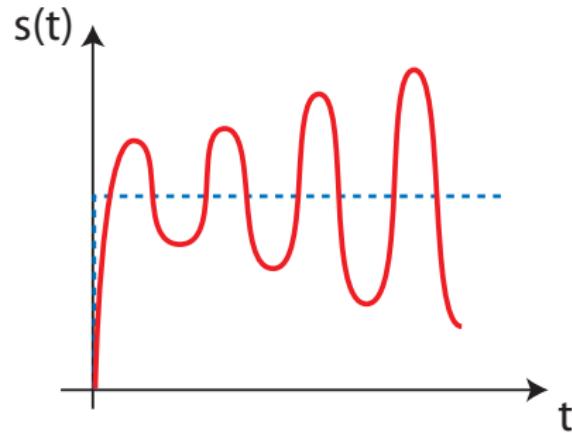
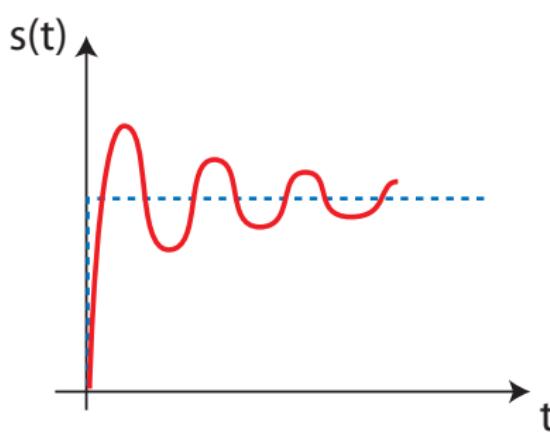
- La stabilité traduit la propriété de convergence temporelle asymptotique vers un état d'équilibre d'un système.
- Un système est dit stable au sens Entrée-Bornée-Sortie-Bornée (EBSB) si, lorsqu'on lui applique une entrée bornée, la sortie reste bornée.



## Stabilité

### Stabilité

- La stabilité traduit la propriété de convergence temporelle asymptotique vers un état d'équilibre d'un système.
- Un système est dit stable au sens **Entrée-Bornée-Sortie-Bornée (EBSB)** si, lorsqu'on lui applique une entrée bornée, la sortie reste bornée.



## Stabilité

### Condition de stabilité avec les pôle de la FTBF

- Soit un système linéaire continu et invariant. Sa fonction de transfert en boucle fermée ( $FTBF(p)$ ) peut se mettre sous la forme suivant :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{a \prod_{i=1}^n (p - z_i)^{k_i}}{b \prod_{j=1}^m (p - d_j)^{l_j}}$$

(2)



- Les  $z_1, \dots, z_n$  sont les racines de  $N(p)$  et sont appelés les **zéros de la FTBF**.
- Les  $d_1, \dots, d_n$  sont les racines de  $D(p)$  et sont appelés les **pôles de la FTBF**.
- Un système est stable si les pôles de sa FTBF sont tous à partie réelle strictement négative.

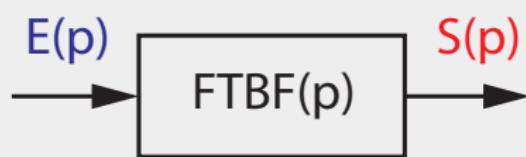
## Stabilité

### Condition de stabilité avec les pôle de la FTBF

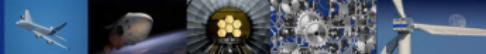
- Soit un système linéaire continu et invariant. Sa fonction de transfert en boucle fermée ( $FTBF(p)$ ) peut se mettre sous la forme suivant :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{a \prod_{i=1}^n (p - z_i)^{k_i}}{b \prod_{j=1}^m (p - d_j)^{l_j}}$$

(2)



- Les  $z_1, \dots, z_n$  sont les racines de  $N(p)$  et sont appelés les zéros de la FTBF.
- Les  $d_1, \dots, d_n$  sont les racines de  $D(p)$  et sont appelés les pôles de la FTBF.
- Un système est stable si les pôles de sa FTBF sont tous à partie réelle strictement négative.



## Stabilité

### Démonstration

- On peut classifier les pôles suivant qu'ils soient :
  - réels :  $d_i^r$  ;
  - réels multiples d'ordre  $n_i$  :  $d_i^m$  ;
  - complexes :  $d_i^c = r_i \pm j \omega_i$  ;
  - complexes multiples d'ordre  $n_i$  :  $d_i = r_i^m \pm j \omega_i^m$  ;
- On peut alors réaliser une décomposition en éléments simples en classifiant les termes suivant les quatre catégories précédentes. On obtient alors la sortie  $s(t)$  qui s'écrit comme une combinaison linéaire de quatre type de fonctions :
  - $s_1(t) = e^{d_i^r t} u(t)$ ;
  - $s_2(t) = t^{n_i-1} e^{d_i^r t} u(t)$ ;
  - $s_3(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) e^{d_i^c t} u(t)$ ;
  - $s_4(t) = B_i \cos(\omega_i^m t + \varphi_i) t^{n_i-1} e^{d_i^m t} u(t)$ ;
- Ainsi pour que la sortie reste bornée, il faut donc que les fonctions exponentielles soient décroissantes et donc que  $d_i^r$ ,  $d_i^m$ ,  $r_i$  et  $r_i^m$  soient négatifs donc que les pôles soient à partie réelle strictement négative.

## Stabilité

### Démonstration

- On peut classifier les pôles suivant qu'ils soient :
  - réels :  $d_i^r$  ;
  - réels multiples d'ordre  $n_i$  :  $d_i^m$  ;
  - complexes :  $d_i^c = r_i \pm j \omega_i$  ;
  - complexes multiples d'ordre  $n_i$  :  $d_i = r_i^m \pm j \omega_i^m$  ;
- On peut alors réaliser une décomposition en éléments simples en classifiant les termes suivant les quatre catégories précédentes. On obtient alors la sortie  $s(t)$  qui s'écrit comme une combinaison linéaire de quatre type de fonctions :
  - $s_1(t) = e^{d_i^r t} u(t)$ ;
  - $s_2(t) = t^{n_i-1} e^{d_i^m t} u(t)$ ;
  - $s_3(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) e^{d_i^c t} u(t)$ ;
  - $s_4(t) = B_i \cos(\omega_i^m t + \varphi_i) t^{n_i-1} e^{d_i^m t} u(t)$ ;
- Ainsi pour que la sortie reste bornée, il faut donc que les fonctions exponentielles soient décroissantes et donc que  $d_i^r$ ,  $d_i^m$ ,  $r_i$  et  $r_i^m$  soient négatifs donc que les pôles soient à partie réelle strictement négative.

## Stabilité

### Démonstration

- On peut classifier les pôles suivant qu'ils soient :
  - réels :  $d_i^r$  ;
  - réels multiples d'ordre  $n_i$  :  $d_i^m$  ;
  - complexes :  $d_i^c = r_i \pm j \omega_i$  ;
  - complexes multiples d'ordre  $n_i$  :  $d_i = r_i^m \pm j \omega_i^m$  ;
- On peut alors réaliser une décomposition en éléments simples en classifiant les termes suivant les quatre catégories précédentes. On obtient alors la sortie  $s(t)$  qui s'écrit comme une combinaison linéaire de quatre type de fonctions :
  - $s_1(t) = e^{d_i^r t} u(t)$ ;
  - $s_2(t) = t^{n_i-1} e^{d_i^r t} u(t)$ ;
  - $s_3(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) e^{d_i^c t} u(t)$ ;
  - $s_4(t) = B_i \cos(\omega_i^m t + \varphi_i) t^{n_i-1} e^{d_i^m t} u(t)$ ;
- Ainsi pour que la sortie reste bornée, il faut donc que les fonctions exponentielles soient décroissantes et donc que  $d_i^r$ ,  $d_i^m$ ,  $r_i$  et  $r_i^m$  soient négatifs donc que les pôles soient à partie réelle strictement négative.

## Stabilité

### Démonstration

- On peut classifier les pôles suivant qu'ils soient :
  - réels :  $d_i^r$  ;
  - réels multiples d'ordre  $n_i$  :  $d_i^m$  ;
  - complexes :  $d_i^c = r_i \pm j \omega_i$  ;
  - complexes multiples d'ordre  $n_i$  :  $d_i = r_i^m \pm j \omega_i^m$  ;
- On peut alors réaliser une décomposition en éléments simples en classifiant les termes suivant les quatre catégories précédentes. On obtient alors la sortie  $s(t)$  qui s'écrit comme une combinaison linéaire de quatre type de fonctions :
  - $s_1(t) = e^{d_i^r t} u(t)$ ;
  - $s_2(t) = t^{n_i-1} e^{d_i^r t} u(t)$ ;
  - $s_3(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) e^{d_i^c t} u(t)$ ;
  - $s_4(t) = B_i \cos(\omega_i^m t + \varphi_i) t^{n_i-1} e^{d_i^m t} u(t)$ ;
- Ainsi pour que la sortie reste bornée, il faut donc que les fonctions exponentielles soient décroissantes et donc que  $d_i^r$ ,  $d_i^m$ ,  $r_i$  et  $r_i^m$  soient négatifs donc que les pôles soient à partie réelle strictement négative.

## Stabilité

### Démonstration

- On peut classifier les pôles suivant qu'ils soient :
  - réels :  $d_i^r$  ;
  - réels multiples d'ordre  $n_i$  :  $d_i^m$  ;
  - complexes :  $d_i^c = r_i \pm j \omega_i$  ;
  - complexes multiples d'ordre  $n_i$  :  $d_i = r_i^m \pm j \omega_i^m$  ;
- On peut alors réaliser une décomposition en éléments simples en classifiant les termes suivant les quatre catégories précédentes. On obtient alors la sortie  $s(t)$  qui s'écrit comme une combinaison linéaire de quatre type de fonctions :
  - $s_1(t) = e^{d_i^r t} u(t)$ ;
  - $s_2(t) = t^{n_i-1} e^{d_i^r t} u(t)$ ;
  - $s_3(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) e^{d_i^c t} u(t)$ ;
  - $s_4(t) = B_i \cos(\omega_i^m t + \varphi_i) t^{n_i-1} e^{d_i^m t} u(t)$ ;
- Ainsi pour que la sortie reste bornée, il faut donc que les fonctions exponentielles soient décroissantes et donc que  $d_i^r$ ,  $d_i^m$ ,  $r_i$  et  $r_i^m$  soient négatifs donc que les pôles soient à partie réelle strictement négative.



## Stabilité

### Démonstration

- On peut classifier les pôles suivant qu'ils soient :
  - réels :  $d_i^r$  ;
  - réels multiples d'ordre  $n_i$  :  $d_i^m$  ;
  - complexes :  $d_i^c = r_i \pm j \omega_i$  ;
  - complexes multiples d'ordre  $n_i$  :  $d_i = r_i^m \pm j \omega_i^m$  ;
- On peut alors réaliser une décomposition en éléments simples en classifiant les termes suivant les quatre catégories précédentes. On obtient alors la sortie  $s(t)$  qui s'écrit comme une combinaison linéaire de quatre type de fonctions :
  - $s_1(t) = e^{d_i^r t} u(t)$ ;
  - $s_2(t) = t^{n_i-1} e^{d_i^m t} u(t)$ ;
  - $s_3(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) e^{r_i t} u(t)$ ;
  - $s_4(t) = B_i \cos(\omega_i^m t + \varphi_i) t^{n_i-1} e^{r_i^m t} u(t)$ ;
- Ainsi pour que la sortie reste bornée, il faut donc que les fonctions exponentielles soient décroissantes et donc que  $d_i^r$ ,  $d_i^m$ ,  $r_i$  et  $r_i^m$  soient négatifs donc que les pôles soient à partie réelle strictement négative.

## Stabilité

### Démonstration

- On peut classifier les pôles suivant qu'ils soient :
  - réels :  $d_i^r$  ;
  - réels multiples d'ordre  $n_i$  :  $d_i^m$  ;
  - complexes :  $d_i^c = r_i \pm j \omega_i$  ;
  - complexes multiples d'ordre  $n_i$  :  $d_i = r_i^m \pm j \omega_i^m$  ;
- On peut alors réaliser une décomposition en éléments simples en classifiant les termes suivant les quatre catégories précédentes. On obtient alors la sortie  $s(t)$  qui s'écrit comme une combinaison linéaire de quatre type de fonctions :
  - $s_1(t) = e^{d_i^r t} u(t)$ ;
  - $s_2(t) = t^{n_i-1} e^{d_i^m t} u(t)$ ;
  - $s_3(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) e^{r_i^m t} u(t)$ ;
  - $s_4(t) = B_i \cos(\omega_i^m t + \varphi_i) t^{n_i-1} e^{r_i^m t} u(t)$ ;
- Ainsi pour que la sortie reste bornée, il faut donc que les fonctions exponentielles soient décroissantes et donc que  $d_i^r$ ,  $d_i^m$ ,  $r_i$  et  $r_i^m$  soient négatifs donc que les pôles soient à partie réelle strictement négative.



## Stabilité

### Démonstration

- On peut classifier les pôles suivant qu'ils soient :
  - réels :  $d_i^r$  ;
  - réels multiples d'ordre  $n_i$  :  $d_i^m$  ;
  - complexes :  $d_i^c = r_i \pm j \omega_i$  ;
  - complexes multiples d'ordre  $n_i$  :  $d_i = r_i^m \pm j \omega_i^m$  ;
- On peut alors réaliser une décomposition en éléments simples en classifiant les termes suivant les quatre catégories précédentes. On obtient alors la sortie  $s(t)$  qui s'écrit comme une combinaison linéaire de quatre type de fonctions :
  - $s_1(t) = e^{d_i^r t} u(t)$ ;
  - $s_2(t) = t^{n_i-1} e^{d_i^m t} u(t)$ ;
  - $s_3(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) e^{r_i^m t} u(t)$ ;
  - $s_4(t) = B_i \cos(\omega_i^m t + \varphi_i) t^{n_i-1} e^{r_i^m t} u(t)$ ;
- Ainsi pour que la sortie reste bornée, il faut donc que les fonctions exponentielles soient décroissantes et donc que  $d_i^r$ ,  $d_i^m$ ,  $r_i$  et  $r_i^m$  soient négatifs donc que les pôles soient à partie réelle strictement négative.



## Stabilité

### Démonstration

- On peut classifier les pôles suivant qu'ils soient :
  - réels :  $d_i^r$  ;
  - réels multiples d'ordre  $n_i$  :  $d_i^m$  ;
  - complexes :  $d_i^c = r_i \pm j \omega_i$  ;
  - complexes multiples d'ordre  $n_i$  :  $d_i = r_i^m \pm j \omega_i^m$  ;
- On peut alors réaliser une décomposition en éléments simples en classifiant les termes suivant les quatre catégories précédentes. On obtient alors la sortie  $s(t)$  qui s'écrit comme une combinaison linéaire de quatre type de fonctions :
  - $s_1(t) = e^{d_i^r t} u(t)$ ;
  - $s_2(t) = t^{n_i-1} e^{d_i^m t} u(t)$ ;
  - $s_3(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) e^{r_i t} u(t)$ ;
  - $s_4(t) = B_i \cos(\omega_i^m t + \varphi_i) t^{n_i-1} e^{r_i^m t} u(t)$ ;
- Ainsi pour que la sortie reste bornée, il faut donc que les fonctions exponentielles soient décroissantes et donc que  $d_i^r$ ,  $d_i^m$ ,  $r_i$  et  $r_i^m$  soient négatifs donc que les pôles soient à partie réelle strictement négative.



## Stabilité

### Démonstration

- On peut classifier les pôles suivant qu'ils soient :
  - réels :  $d_i^r$  ;
  - réels multiples d'ordre  $n_i$  :  $d_i^m$  ;
  - complexes :  $d_i^c = r_i \pm j \omega_i$  ;
  - complexes multiples d'ordre  $n_i$  :  $d_i = r_i^m \pm j \omega_i^m$  ;
- On peut alors réaliser une décomposition en éléments simples en classifiant les termes suivant les quatre catégories précédentes. On obtient alors la sortie  $s(t)$  qui s'écrit comme une combinaison linéaire de quatre type de fonctions :
  - $s_1(t) = e^{d_i^r t} u(t)$ ;
  - $s_2(t) = t^{n_i-1} e^{d_i^m t} u(t)$ ;
  - $s_3(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) e^{r_i t} u(t)$ ;
  - $s_4(t) = B_i \cos(\omega_i^m t + \varphi_i) t^{n_i-1} e^{r_i^m t} u(t)$ ;
- Ainsi pour que la sortie reste bornée, il faut donc que les fonctions exponentielles soient décroissantes et donc que  $d_i^r$ ,  $d_i^m$ ,  $r_i$  et  $r_i^m$  soient négatifs donc que les pôles soient à partie réelle strictement négative.

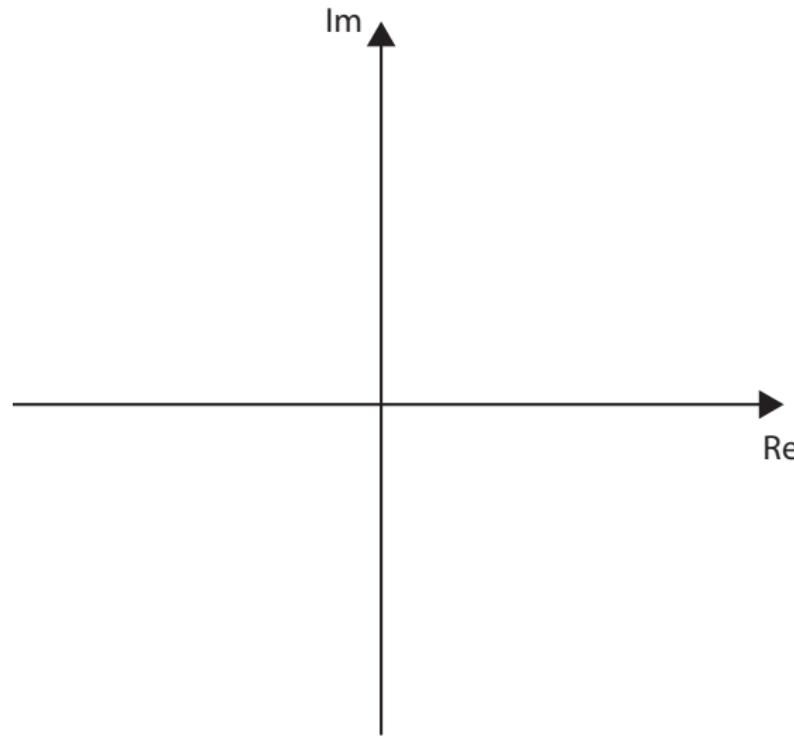
## Stabilité

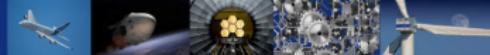
### Démonstration

- On peut classifier les pôles suivant qu'ils soient :
  - réels :  $d_i^r$  ;
  - réels multiples d'ordre  $n_i$  :  $d_i^m$  ;
  - complexes :  $d_i^c = r_i \pm j \omega_i$  ;
  - complexes multiples d'ordre  $n_i$  :  $d_i = r_i^m \pm j \omega_i^m$  ;
- On peut alors réaliser une décomposition en éléments simples en classifiant les termes suivant les quatre catégories précédentes. On obtient alors la sortie  $s(t)$  qui s'écrit comme une combinaison linéaire de quatre type de fonctions :
  - $s_1(t) = e^{d_i^r t} u(t)$ ;
  - $s_2(t) = t^{n_i-1} e^{d_i^m t} u(t)$ ;
  - $s_3(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) e^{r_i t} u(t)$ ;
  - $s_4(t) = B_i \cos(\omega_i^m t + \varphi_i) t^{n_i-1} e^{r_i^m t} u(t)$ ;
- Ainsi pour que la sortie reste bornée, il faut donc que les fonctions exponentielles soient décroissantes et donc que  $d_i^r$ ,  $d_i^m$ ,  $r_i$  et  $r_i^m$  soient négatifs donc que **les pôles soient à partie réelle strictement négative.**

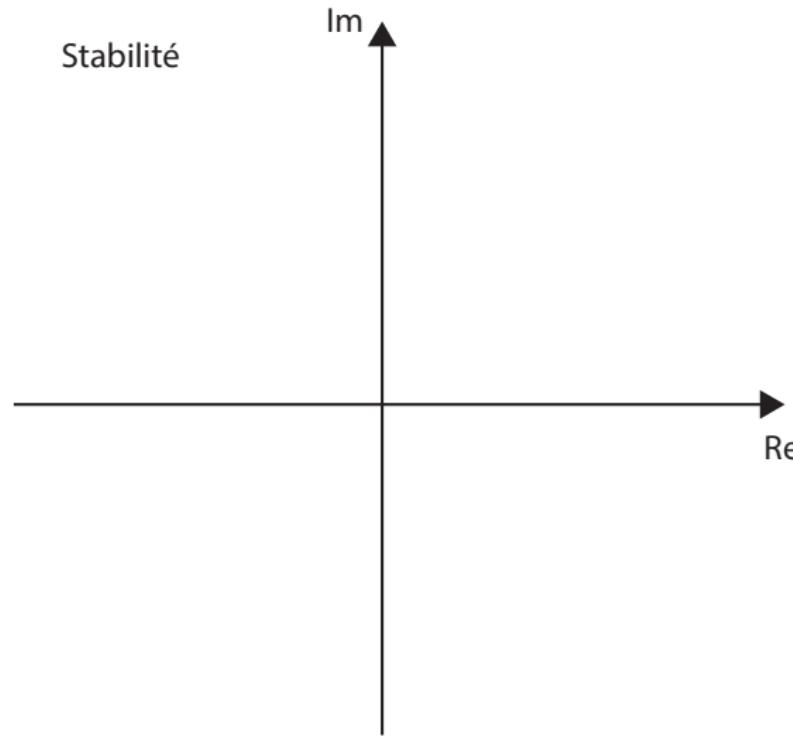


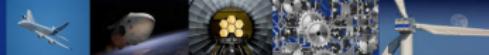
## Stabilité



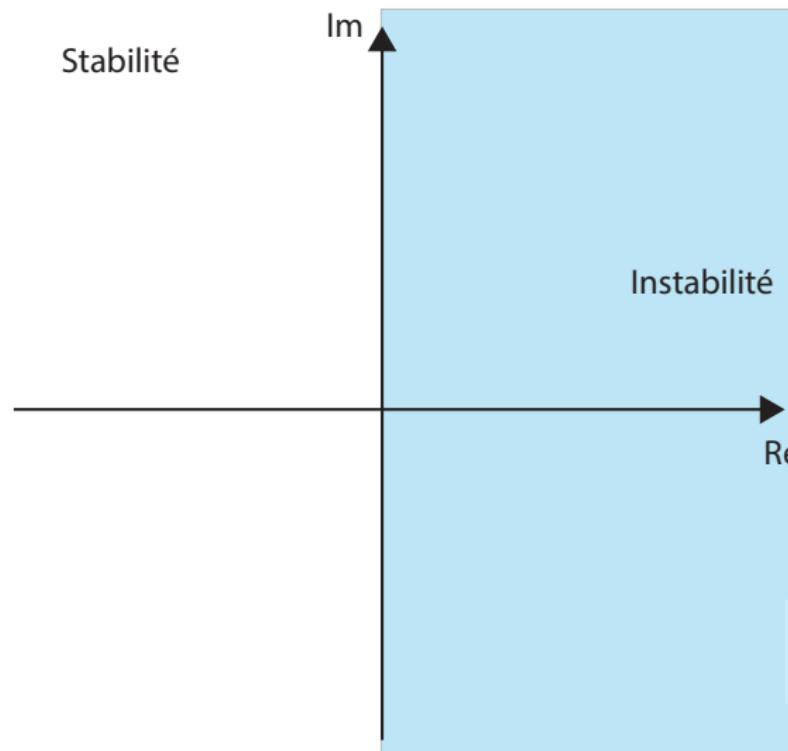


## Stabilité



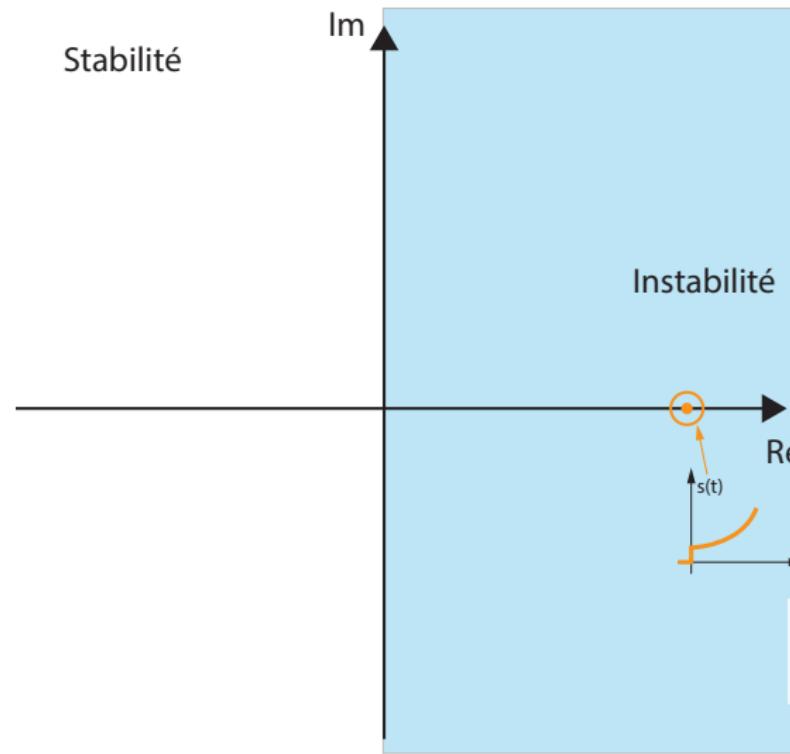


## Stabilité



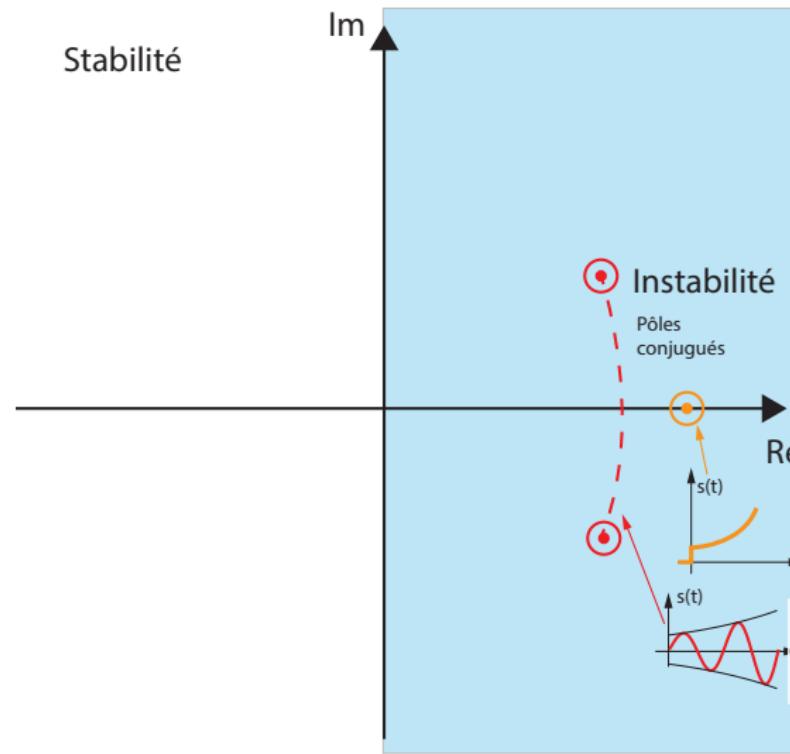


## Stabilité



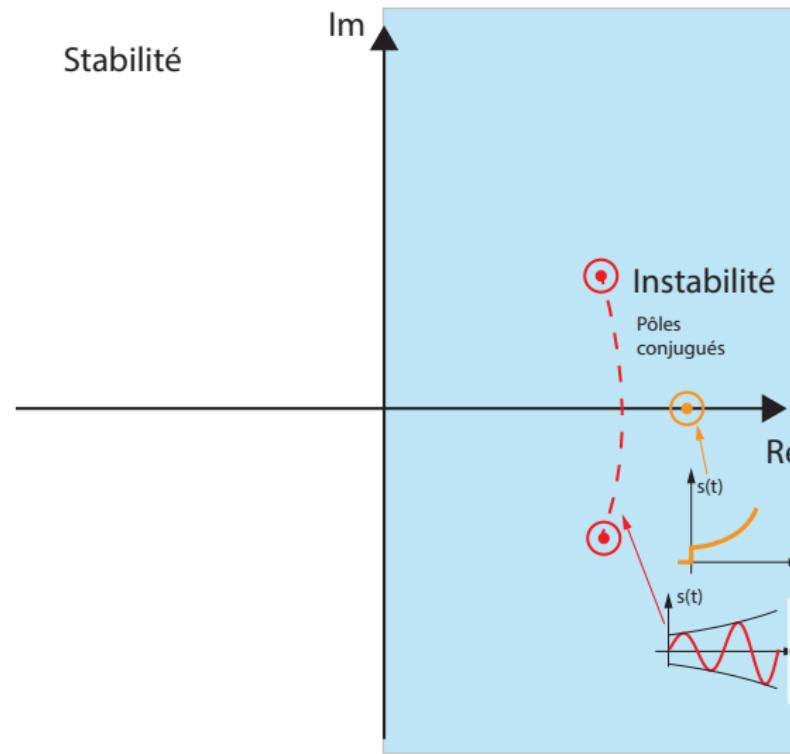


## Stabilité



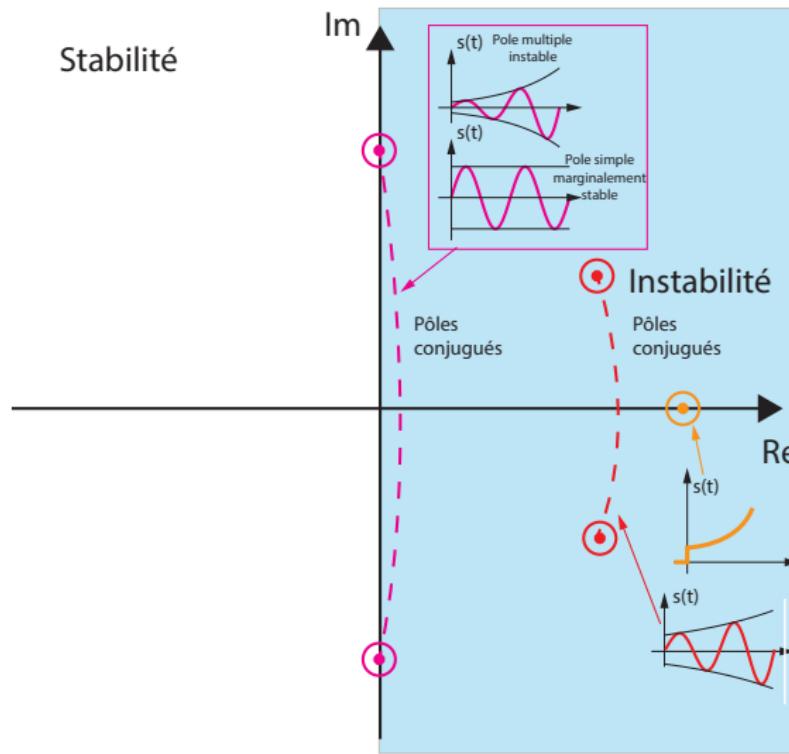


## Stabilité



## Stabilité

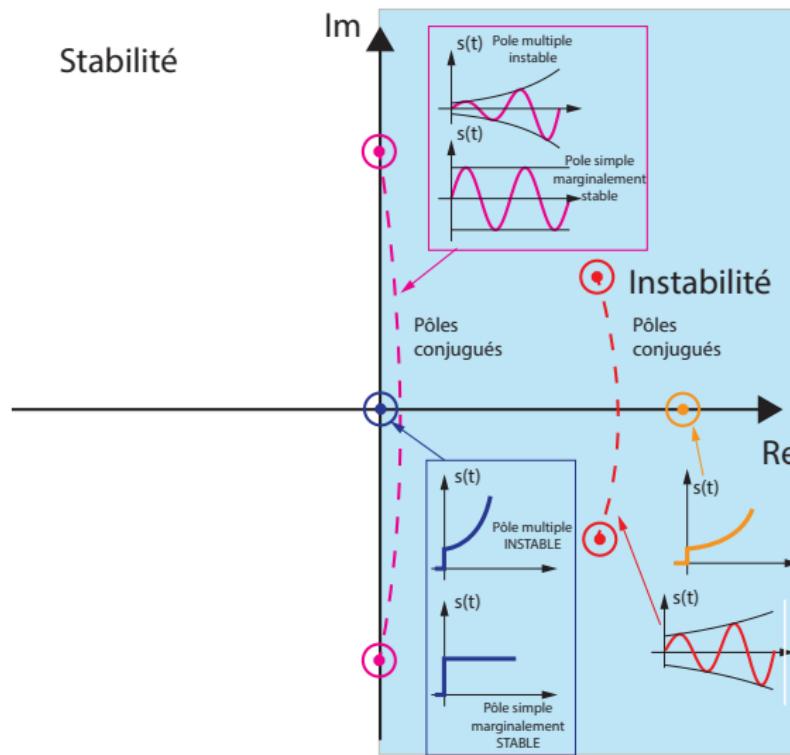
Stabilité





## Stabilité

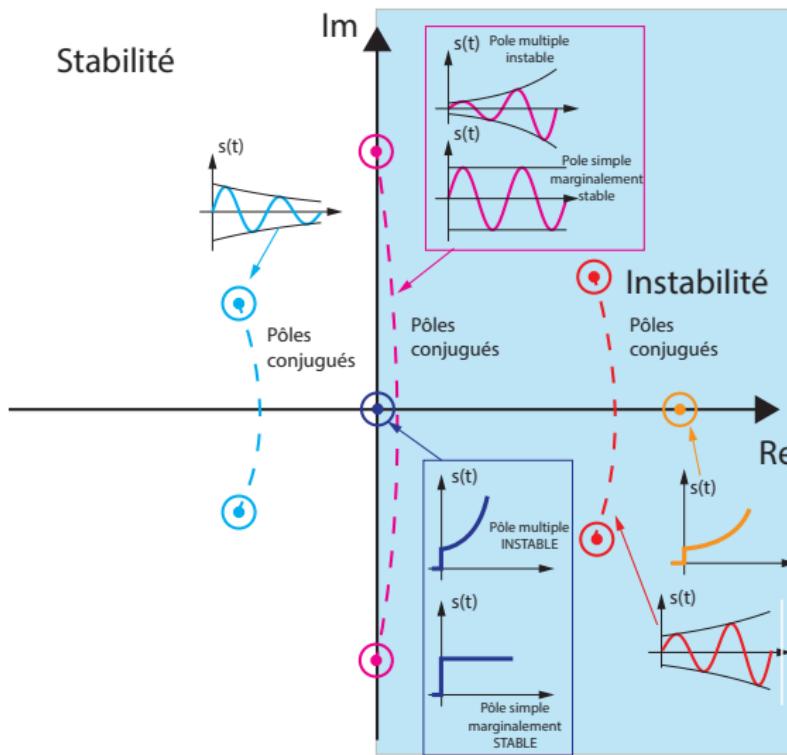
Stabilité





## Stabilité

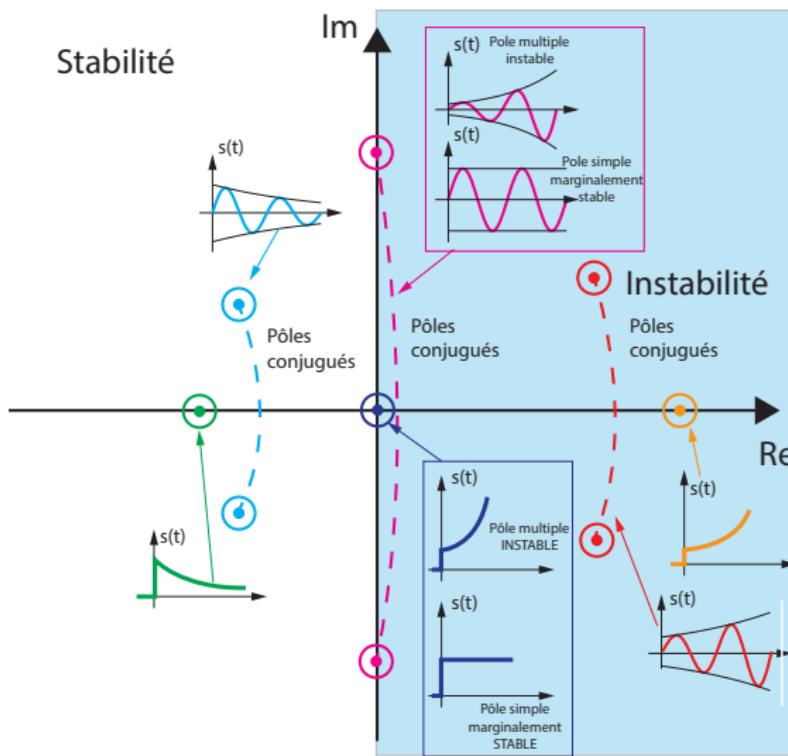
### Stabilité

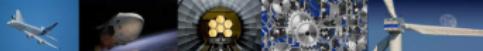




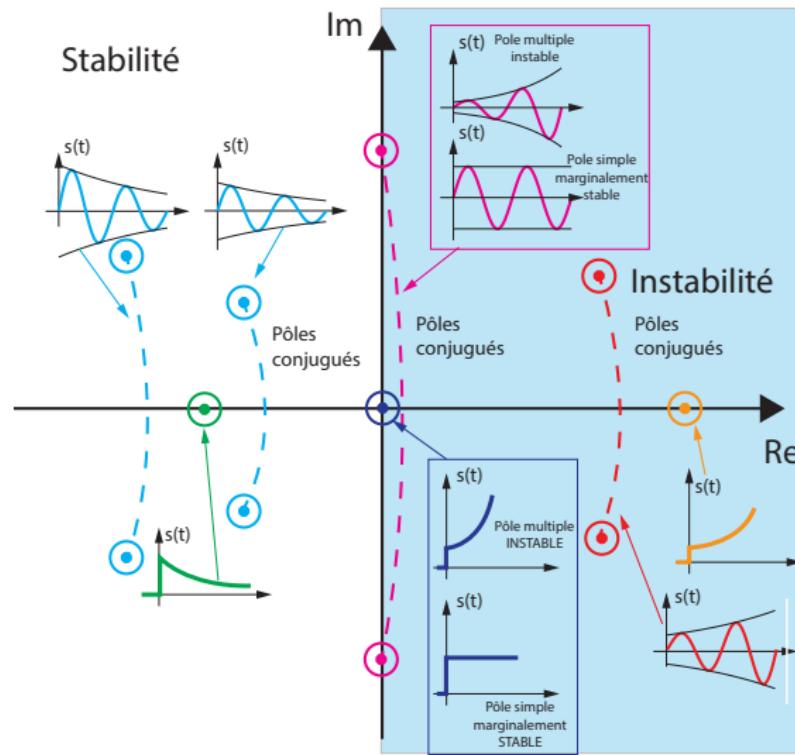
## Stabilité

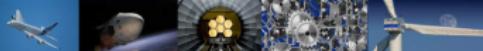
### Stabilité





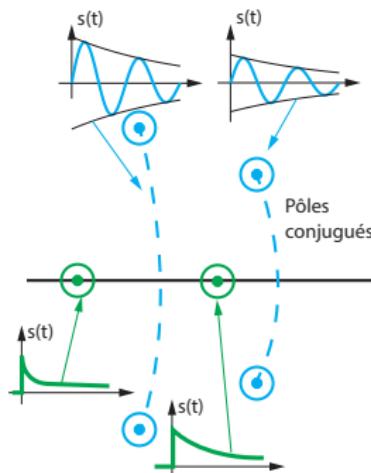
## Stabilité





## Stabilité

### Stabilité



Im

Pôles conjugués

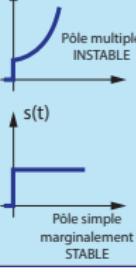
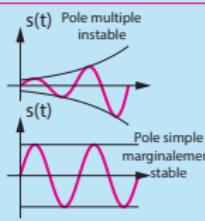
Pôles conjugués

Pôles conjugués

Pôles conjugués

Pôles conjugués

Pôles conjugués



### Instabilité

Pôles conjugués

Re

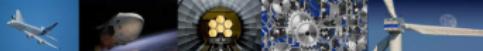
Re

Re

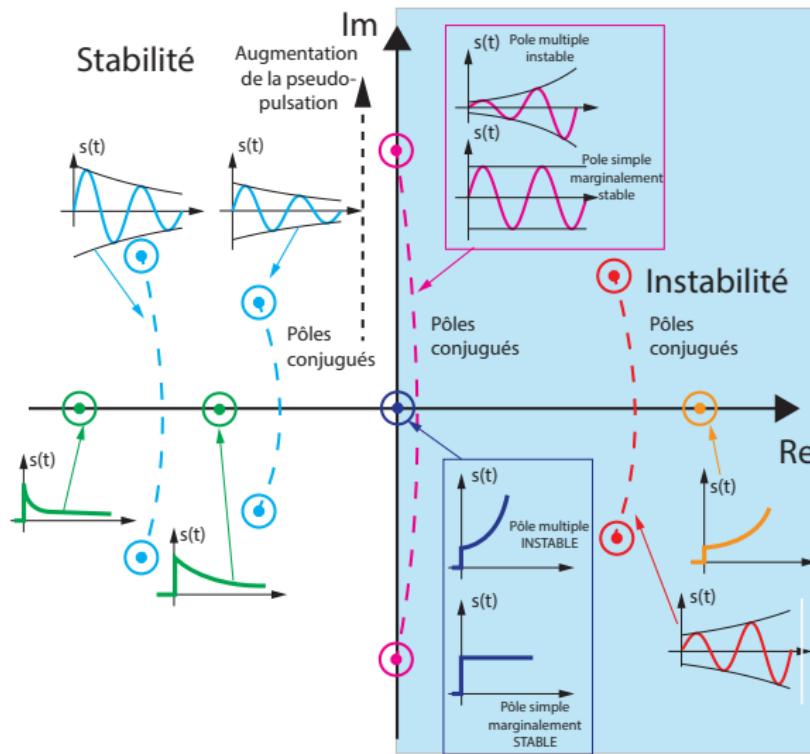
Re

Re

Re

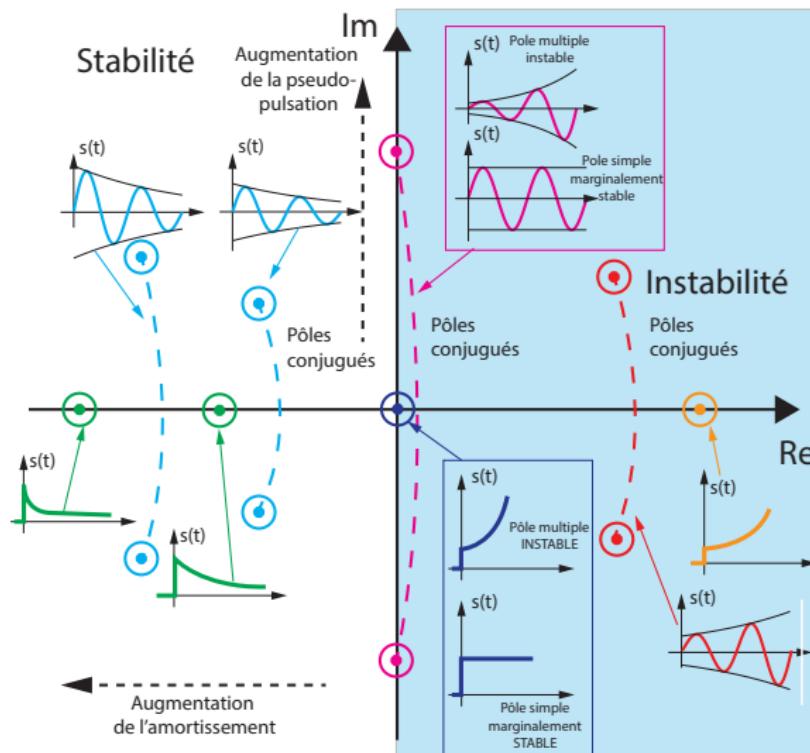


## Stabilité





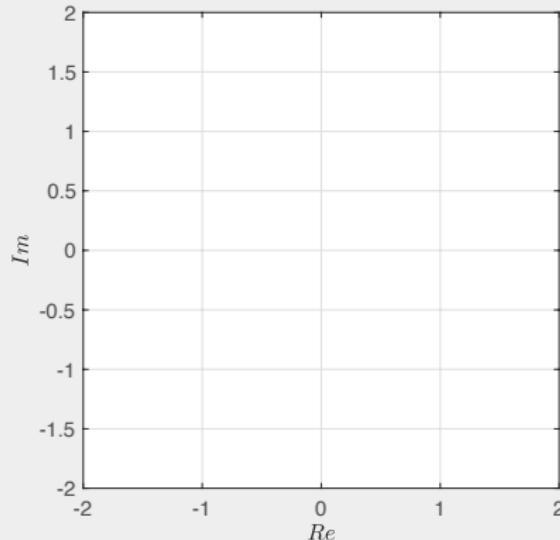
## Stabilité



## Stabilité

### Robot Lola

Q 4 : Représenter les pôles de  $F(p)$  dans le plan complexe.

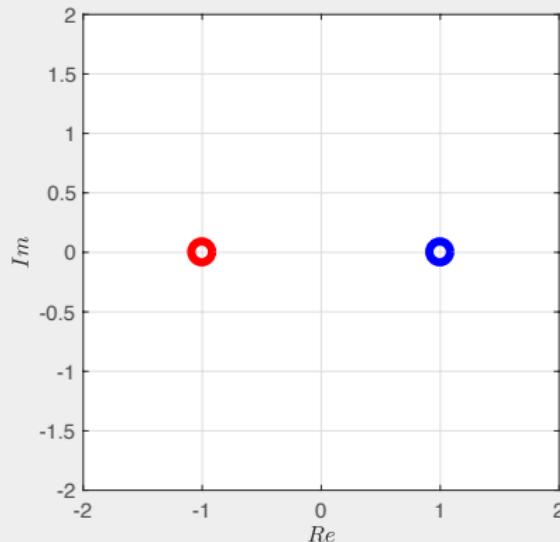


Q 5 : Que pouvons-nous dire sur la stabilité en boucle ouverte du système.

## Stabilité

### Robot Lola

Q 4 : Représenter les pôles de  $F(p)$  dans le plan complexe.

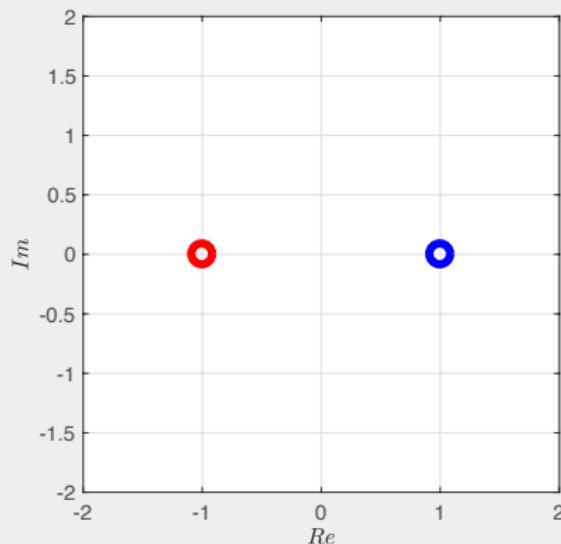


Q 5 : Que pouvons-nous dire sur la stabilité en boucle ouverte du système.

## Stabilité

### Robot Lola

Q 4 : Représenter les pôles de  $F(p)$  dans le plan complexe.



Q 5 : Que pouvons-nous dire sur la stabilité en boucle ouverte du système.

Il existe un pôle à partie réelle positive donc le système n'est pas stable en boucle ouverte.

## Instabilité après bouclage

Un système peut être intrinsèquement stable (en Boucle ouverte) mais le fait de l'asservir peut le rendre instable.

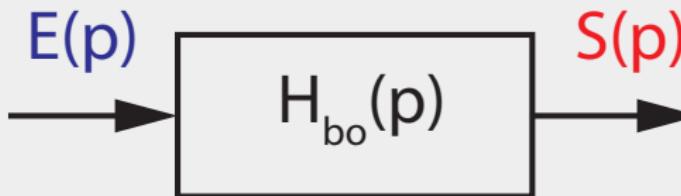
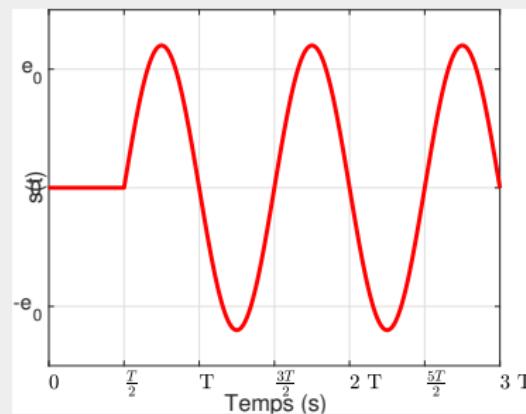
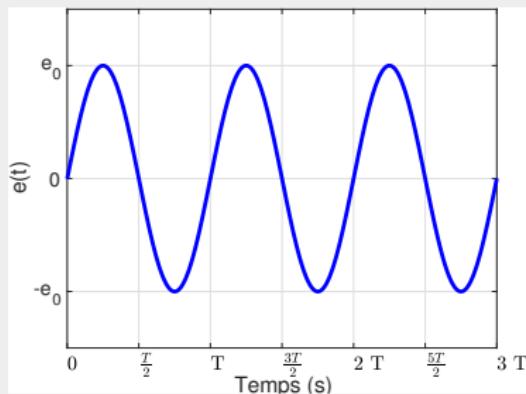
### Propriété : instabilité d'un système après bouclage

Soit un système en boucle ouverte :

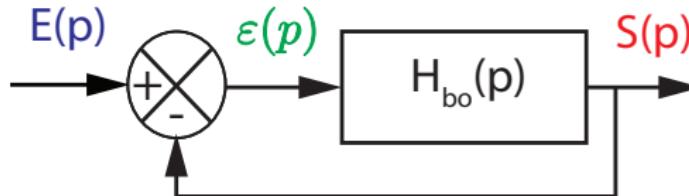
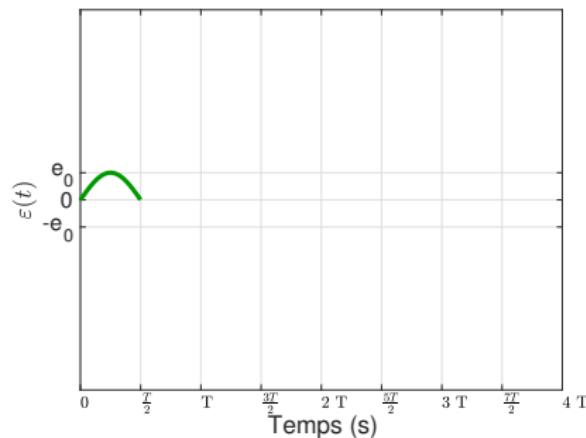
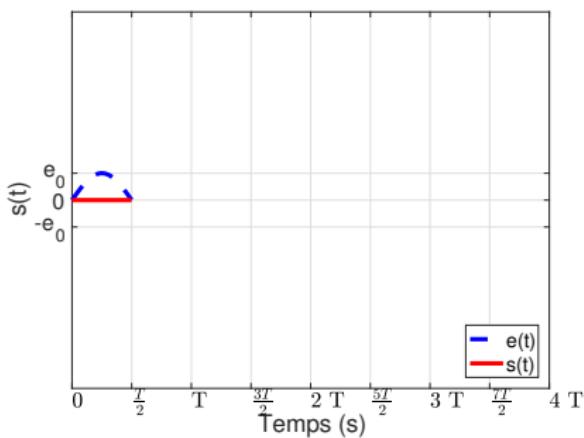
- sollicité par une entrée sinusoïdale de période  $T$  et d'amplitude  $e_0$  ;
- de fonction de transfert  $H_{bo}(p)$  ;
- avec un gain  $K_{bo}(T) > 1$  ;
- dans une configuration avec un déphasage d'une demi période ( $\varphi(T) = -180^\circ$ ).

## Instabilité après bouclage

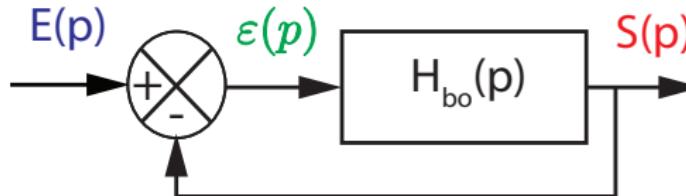
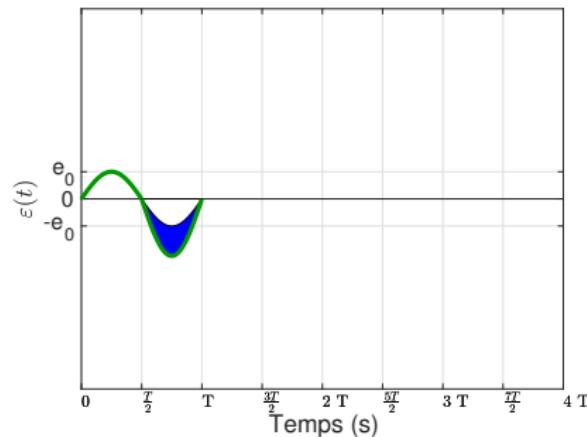
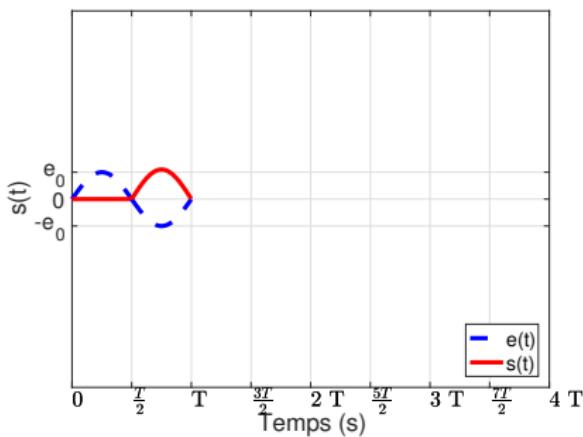
Propriété : instabilité d'un système après bouclage



## Instabilité après bouclage

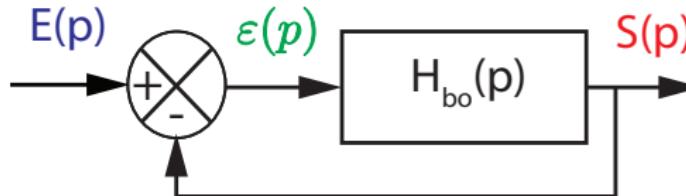
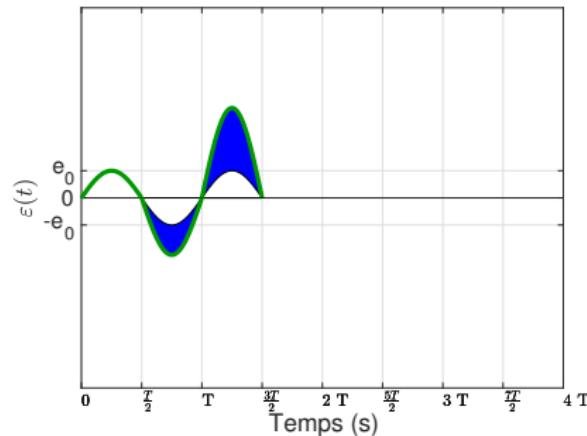
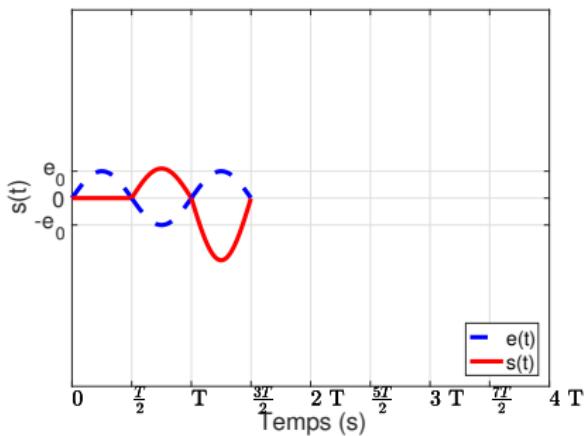


## Instabilité après bouclage



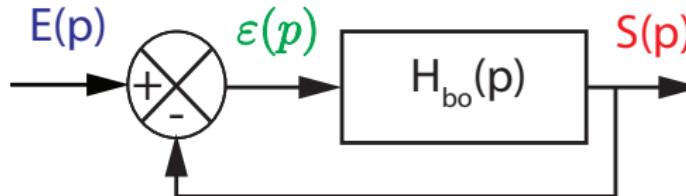
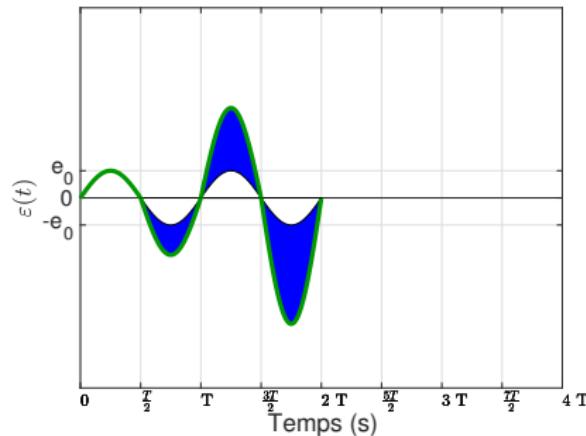
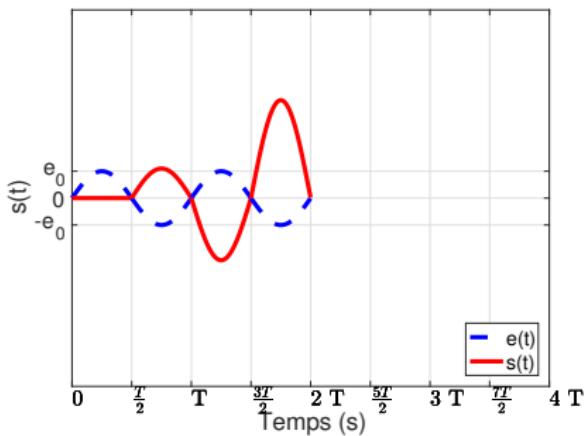


## Instabilité après bouclage



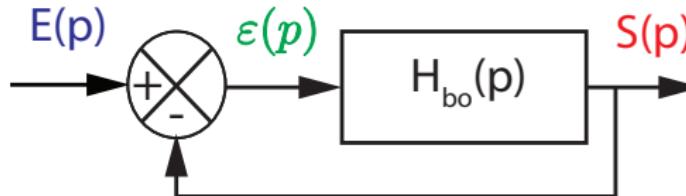
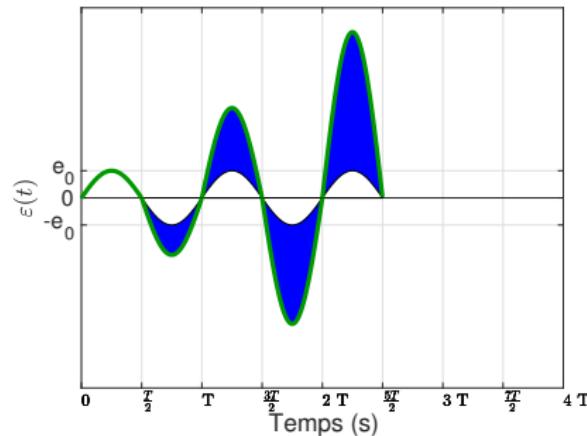
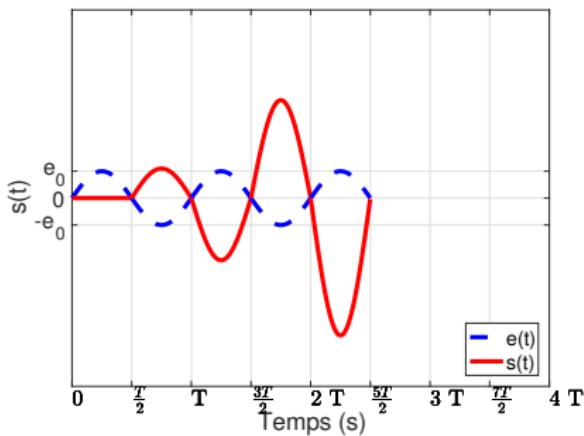


## Instabilité après bouclage



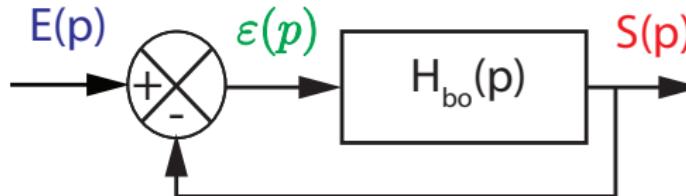
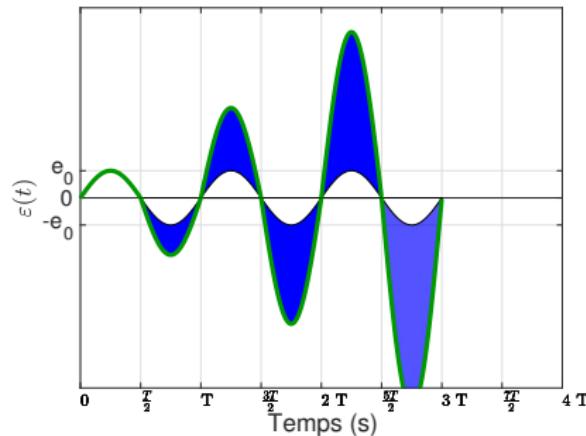
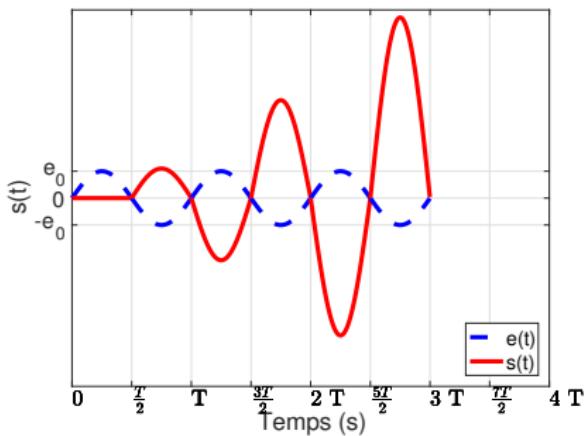


## Instabilité après bouclage



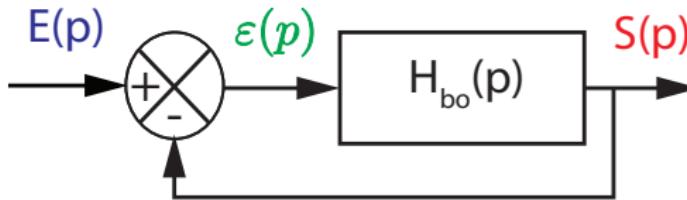
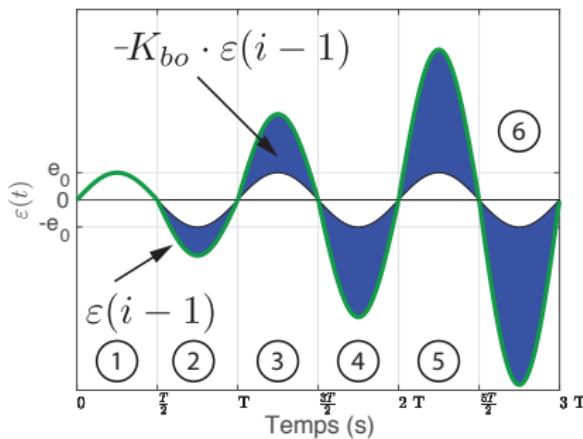
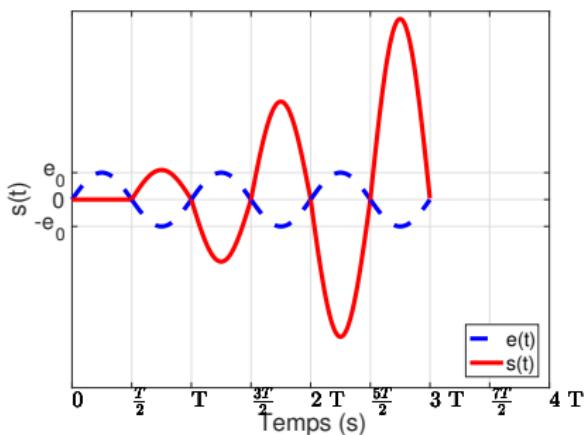


## Instabilité après bouclage





## Instabilité après bouclage





# Plan

## 1 Intérêts et objectifs

- Introduction
- Classe et ordre d'une fonction de transfert
- Exemple du cours

## 2 Stabilité

- Définition et propriétés
- Critères de stabilité
- Marge de stabilité
- Application aux systèmes du premier et deuxième ordre



## Stabilité : critère de stabilité algébrique

Soit un système linéaire, continu et invariant quelconque avec pour fonction de transfert :

$$FTBF(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Avec  $D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0$

### Condition nécessaire de stabilité

Pour qu'un système soit stable au sens "EBSB", il est nécessaire que les coefficients  $a_0, \dots, a_n$  du polynôme du dénominateur de sa **fonction de transfert en boucle fermée** soient tous strictement positifs



## Stabilité : critère de stabilité algébrique

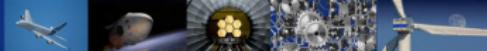
Soit un système linéaire, continu et invariant quelconque avec pour fonction de transfert :

$$FTBF(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

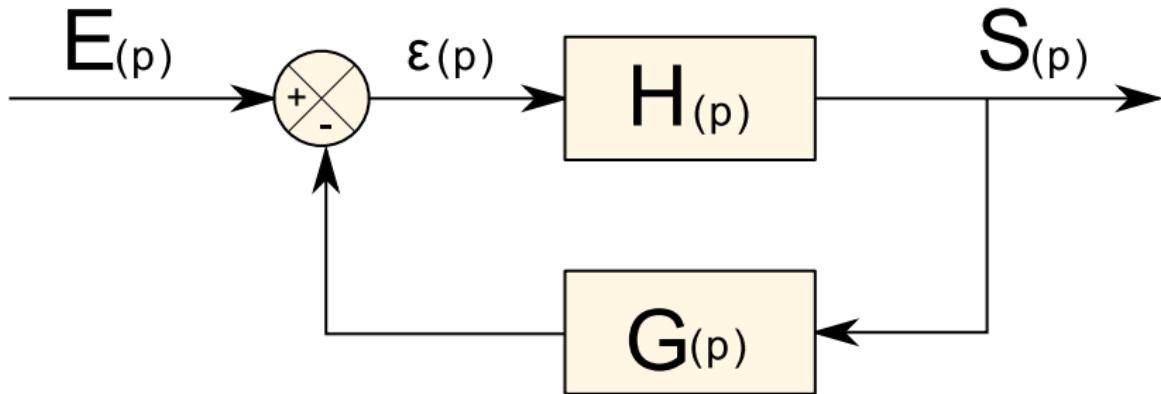
Avec  $D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0$

### Condition nécessaire de stabilité

Pour qu'un système soit stable au sens "EBSB", il est nécessaire que les coefficients  $a_0, \dots, a_n$  du polynôme du dénominateur de sa **fonction de transfert en boucle fermée** soient tous strictement positifs



## Stabilité : critères graphiques



$$FTBF(p) = \frac{H(p)}{1 + FTBO(p)}.$$

Ainsi chercher une condition sur les pôles de la  $FTBF(p)$  revient à chercher des conditions sur les zéros de  $1 + FTBO(p)$  appelé **polynôme caractéristique**.

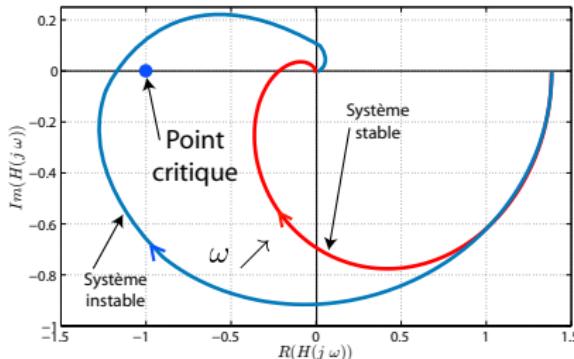
On appelle alors le **point critique**, le point qui dans le plan complexe a pour affixe  $-1$  (module 1, argument  $-180^\circ$ ).



## Stabilité : critères graphiques

### Critère du revers

Un système est stable en boucle fermée si en parcourant le lieu de Nyquist de la FTBO(p), dans le sens des  $\omega$  croissants, on laisse le point critique  $-1$  sur la gauche.



### Remarque

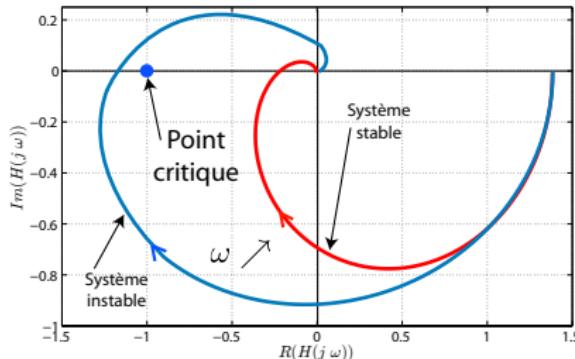
- Ce critère vaut uniquement si la FTBO(p) ne possède pas de pôle à partie réelle strictement positive.
- Si un système a son diagramme de Nyquist qui passe par le point  $-1$ , alors cela signifie que la fonction  $1 + \text{FTBO}(p)$  possède un pôle imaginaire pour réponse indiciale oscillatoire.



## Stabilité : critères graphiques

### Critère du revers

Un système est stable en boucle fermée si en parcourant le lieu de Nyquist de la FTBO(p), dans le sens des  $\omega$  croissants, on laisse le point critique  $-1$  sur la gauche.



### Remarque

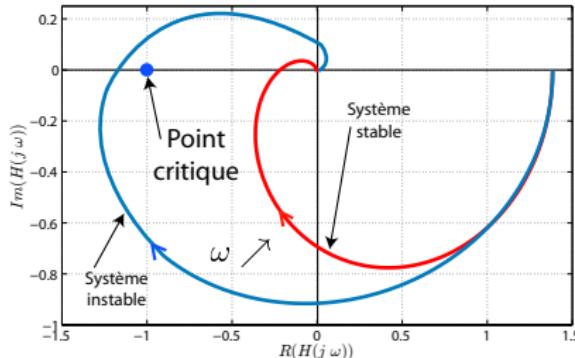
- Ce critère valable uniquement si la FTBO(p) ne possède pas de pôle à partie réelle strictement positive.
- Si un système a son diagramme de Nyquist qui passe par le point  $-1$ , alors cela signifie que la fonction  $1 + \text{FTBO}(p)$  possède un pôle imaginaire pur : réponse indicielle est oscillatoire.



## Stabilité : critères graphiques

### Critère du revers

Un système est stable en boucle fermée si en parcourant le lieu de Nyquist de la FTBO(p), dans le sens des  $\omega$  croissants, on laisse le point critique  $-1$  sur la gauche.



### Remarque

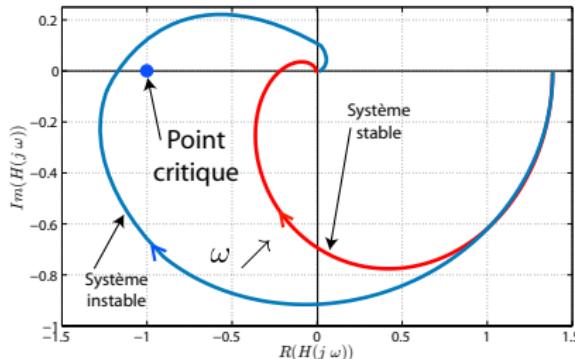
- Ce critère valable uniquement si la **FTBO(p)** ne possède pas de pôle à partie réelle strictement positive.
- Si un système a son diagramme de Nyquist qui passe par le point  $-1$ , alors cela signifie que la fonction  $1 + \text{FTBO}(p)$  possède un pôle imaginaire pur : réponse indicielle est oscillatoire.



## Stabilité : critères graphiques

### Critère du revers

Un système est stable en boucle fermée si en parcourant le lieu de Nyquist de la FTBO( $p$ ), dans le sens des  $\omega$  croissants, on laisse le point critique  $-1$  sur la gauche.



### Remarque

- Ce critère valable uniquement si la FTBO( $p$ ) ne possède pas de pôle à partie réelle strictement positive.
- Si un système a son diagramme de Nyquist qui passe par le point  $-1$ , alors cela signifie que la fonction  $1 + FTBO(p)$  possède un pôle imaginaire pur : réponse indicielle est oscillatoire.



## Critères de stabilité : diagramme de Bode

- Le point critique d'affixe  $-1$  s'écrit  $e^{-i\pi}$ . Dans le diagramme de Bode en gain ce point correspond à un gain nul car  $G_{dB} = 20 \log(1) = 0$ . Ainsi pour laisser le point critique  $-1$  "à gauche" sur le diagramme de Nyquist et donc avoir un système stable, il faut :
  - avoir, pour la pulsation  $\omega = \omega_{\varphi 180}$  correspondant à  $\arg(FTBO(j\omega)) = -180^\circ$ , un gain inférieur à  $0dB$  ( $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega_{\varphi 180})|) < 0dB$ ), ou bien
  - avoir, pour la pulsation  $\omega = \omega_{c0}$  correspondant à un gain nul ( $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega)|) = 0$ ), un argument supérieur à  $-180^\circ$  ( $\arg(FTBO(j\omega_{c0})) > -180^\circ$ ).

### Remarque

Dans le cas de l'égalité des deux conditions précédentes :

- $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega_{\varphi 180})|) = 0dB$
- $\arg(FTBO(j\omega_{c0})) = -180^\circ$ ; la fonction  $1 + FTBO(s)$  possède un pôle imaginaire pur. Cela se traduit par un gain infini pour une pulsation donnée sur le diagramme de Bode. Le système est donc instable. La réponse indicielle est oscillatoire.



## Critères de stabilité : diagramme de Bode

- Le point critique d'affixe  $-1$  s'écrit  $e^{-i\pi}$ . Dans le diagramme de Bode en gain ce point correspond à un gain nul car  $G_{dB} = 20 \log(1) = 0$ . Ainsi pour laisser le point critique  $-1$  "à gauche" sur le diagramme de Nyquist et donc avoir un système stable, il faut :
  - avoir, pour la pulsation  $\omega = \omega_{\varphi 180}$  correspondant à  $\arg(FTBO(j\omega)) = -180^\circ$ , un gain inférieur à  $0dB$  ( $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega_{\varphi 180})|) < 0dB$ ), ou bien
  - avoir, pour la pulsation  $\omega = \omega_{c0}$  correspondant à un gain nul ( $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega)|) = 0$ ), un argument supérieur à  $-180^\circ$  ( $\arg(FTBO(j\omega_{c0})) > -180^\circ$ ).

### Remarque

Dans le cas de l'égalité des deux conditions précédentes :

- $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega_{\varphi 180})|) = 0dB$
- $\arg(FTBO(j\omega_{c0})) = -180^\circ$ ; la fonction  $1 + FTBO(s)$  possède un pôle imaginaire pur. Cela se traduit par un gain infini pour une pulsation donnée sur le diagramme de Bode. Le système est donc instable. La réponse indicielle est oscillatoire.



## Critères de stabilité : diagramme de Bode

- Le point critique d'affixe  $-1$  s'écrit  $e^{-i\pi}$ . Dans le diagramme de Bode en gain ce point correspond à un gain nul car  $G_{dB} = 20 \log(1) = 0$ . Ainsi pour laisser le point critique  $-1$  "à gauche" sur le diagramme de Nyquist et donc avoir un système stable, il faut :
  - avoir, pour la pulsation  $\omega = \omega_{\varphi 180}$  correspondant à  $\arg(FTBO(j\omega)) = -180^\circ$ , un gain inférieur à  $0dB$  ( $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega_{\varphi 180})|) < 0dB$ ), ou bien
  - avoir, pour la pulsation  $\omega = \omega_{c0}$  correspondant à un gain nul ( $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega)|) = 0$ ), un argument supérieur à  $-180^\circ$  ( $\arg(FTBO(j\omega_{c0})) > -180^\circ$ ).

### Remarque

Dans le cas de l'égalité des deux conditions précédentes :

- $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega_{\varphi 180})|) = 0dB$
- $\arg(FTBO(j\omega_{c0})) = -180^\circ$ , la fonction  $1 + FTBO(s)$  possède un pôle imaginaire pur. Cela se traduit par un gain infini pour une pulsation donnée sur le diagramme de Bode. Le système est donc instable. La réponse indicielle est oscillatoire.



## Critères de stabilité : diagramme de Bode

- Le point critique d'affixe  $-1$  s'écrit  $e^{-i\pi}$ . Dans le diagramme de Bode en gain ce point correspond à un gain nul car  $G_{dB} = 20 \log(1) = 0$ . Ainsi pour laisser le point critique  $-1$  "à gauche" sur le diagramme de Nyquist et donc avoir un système stable, il faut :
  - avoir, pour la pulsation  $\omega = \omega_{\varphi 180}$  correspondant à  $\arg(FTBO(j\omega)) = -180^\circ$ , un gain inférieur à  $0dB$  ( $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega_{\varphi 180})|) < 0dB$ ), ou bien
  - avoir, pour la pulsation  $\omega = \omega_{c0}$  correspondant à un gain nul ( $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega)|) = 0$ ), un argument supérieur à  $-180^\circ$  ( $\arg(FTBO(j\omega_{c0})) > -180^\circ$ ).

### Remarque

Dans le cas de l'égalité des deux conditions précédentes :

- $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega_{\varphi 180})|) = 0dB$
- $\arg(FTBO(j\omega_{c0})) = -180^\circ$ ; la fonction  $1 + FTBO(p)$  possède un pôle imaginaire pur. Cela se traduit par un gain infini pour une pulsation donnée sur le diagramme de Bode. Le système est donc instable. La réponse indicielle est oscillatoire.



## Critères de stabilité : diagramme de Bode

- Le point critique d'affixe  $-1$  s'écrit  $e^{-i\pi}$ . Dans le diagramme de Bode en gain ce point correspond à un gain nul car  $G_{dB} = 20 \log(1) = 0$ . Ainsi pour laisser le point critique  $-1$  "à gauche" sur le diagramme de Nyquist et donc avoir un système stable, il faut :
  - avoir, pour la pulsation  $\omega = \omega_{\varphi 180}$  correspondant à  $\arg(FTBO(j\omega)) = -180^\circ$ , un gain inférieur à  $0dB$  ( $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega_{\varphi 180})|) < 0dB$ ), ou bien
  - avoir, pour la pulsation  $\omega = \omega_{c0}$  correspondant à un gain nul ( $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega)|) = 0$ ), un argument supérieur à  $-180^\circ$  ( $\arg(FTBO(j\omega_{c0})) > -180^\circ$ ).

### Remarque

Dans le cas de l'égalité des deux conditions précédentes :

- $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega_{\varphi 180})|) = 0dB$
- $\arg(FTBO(j\omega_{c0})) = -180^\circ$ ; la fonction  $1 + FTBO(p)$  possède un pôle imaginaire pur. Cela se traduit par un gain infini pour une pulsation donnée sur le diagramme de Bode. Le système est donc instable. La réponse indicielle est oscillatoire.

## Critères de stabilité : diagramme de Bode

- Le point critique d'affixe  $-1$  s'écrit  $e^{-i\pi}$ . Dans le diagramme de Bode en gain ce point correspond à un gain nul car  $G_{dB} = 20 \log(1) = 0$ . Ainsi pour laisser le point critique  $-1$  "à gauche" sur le diagramme de Nyquist et donc avoir un système stable, il faut :
  - avoir, pour la pulsation  $\omega = \omega_{\varphi 180}$  correspondant à  $\arg(FTBO(j\omega)) = -180^\circ$ , un gain inférieur à  $0dB$  ( $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega_{\varphi 180})|) < 0dB$ ), ou bien
  - avoir, pour la pulsation  $\omega = \omega_{c0}$  correspondant à un gain nul ( $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega)|) = 0$ ), un argument supérieur à  $-180^\circ$  ( $\arg(FTBO(j\omega_{c0})) > -180^\circ$ ).

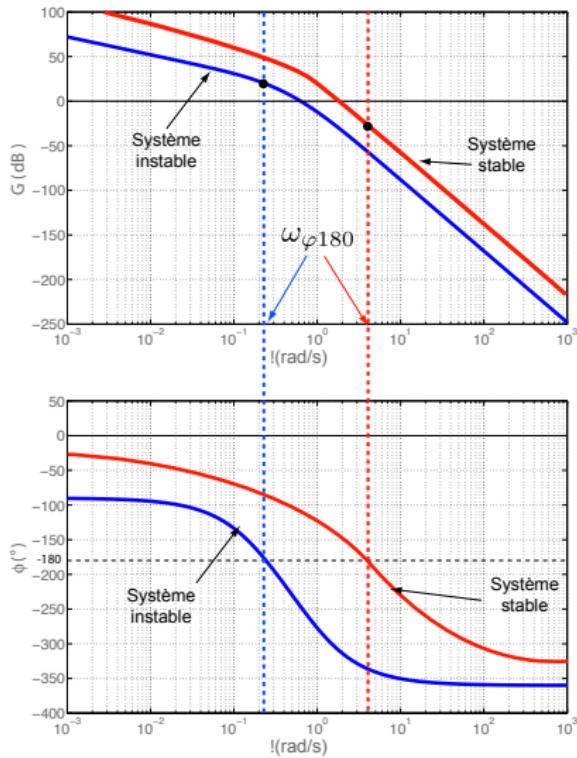
### Remarque

Dans le cas de l'égalité des deux conditions précédentes :

- $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega_{\varphi 180})|) = 0dB$
- $\arg(FTBO(j\omega_{c0})) = -180^\circ$ ; la fonction  $1 + FTBO(p)$  possède **un pôle imaginaire pur**. Cela se traduit par un **gain infini pour une pulsation donnée** sur le diagramme de Bode. Le système est donc instable. La **réponse indicielle est oscillatoire**.

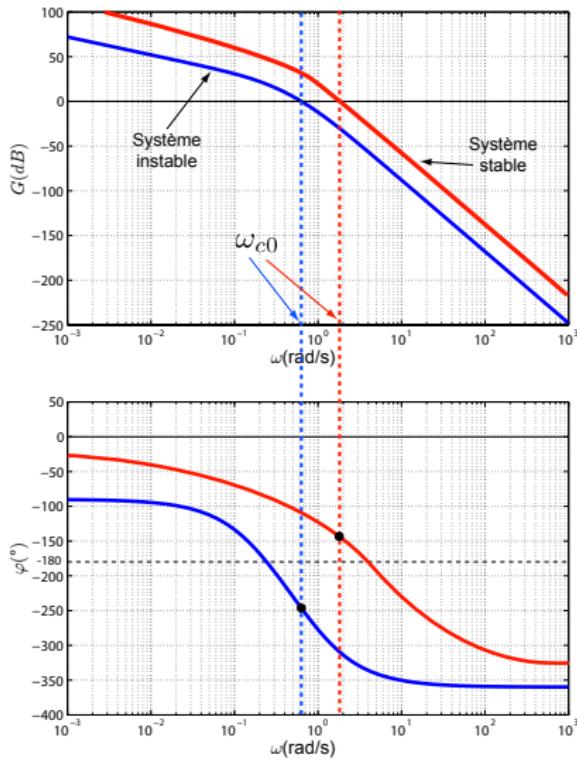


## Critères de stabilité : diagramme de Bode





## Critères de stabilité : diagramme de Bode





## Critères de stabilité graphique

### Robot Lola

**Q 6 : Expliquer pourquoi le critère du revers ne peut pas être appliqué pour étudier la stabilité en boucle fermée.**



## Critères de stabilité graphique

### Robot Lola

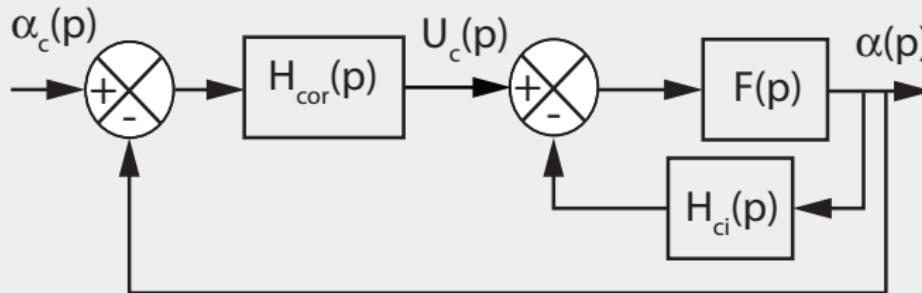
**Q 6 : Expliquer pourquoi le critère du revers ne peut pas être appliqué pour étudier la stabilité en boucle fermée.**

La fonction de transfert en BO a un pôle à partie réelle positive. Le système est donc instable en BO. Le critère du Revers stipule que le système en BO ne doit pas comporter de pôle à partie réelle strictement positive pour qu'il ait un sens. Ce critère n'est donc pas adapté pour vérifier la stabilité du système en BF.

## Critères de stabilité graphique

### Robot Lola

Afin de résoudre ce problème, il est décidé d'asservir la chaîne directe en position et en vitesse. Pour cela, la centrale inertie permet de mesurer l'angle de tangage  $\alpha(t)$  ainsi que la vitesse angulaire  $\frac{d\alpha(t)}{dt}$ . L'asservissement ainsi réalisé est présenté sous la forme du schéma-bloc ci-dessous.  $U_c(p)$  est la tension de commande en sortie du correcteur. La fonction de transfert de la centrale inertie sera prise égale à  $H_{ci}(p) = K_1 \cdot (p + 1)$ .





## Critères de stabilité graphique

### Robot Lola

**Q 7 :** Déterminer deux conditions sur  $K_1$  pour que la fonction de transfert en boucle ouverte non-corrigée  $F_{BO}(p) = \frac{\alpha(p)}{U_c(p)}$  soit stable. En déduire la valeur minimale de  $K_1$

## Critères de stabilité graphique

### Robot Lola

**Q 7 : Déterminer deux conditions sur  $K_1$  pour que la fonction de transfert en boucle ouverte non-corrigée  $F_{BO}(p) = \frac{\alpha(p)}{U_c(p)}$  soit stable. En déduire la valeur minimale de  $K_1$**

$$\begin{aligned} F_{BO}(p) &= \frac{\alpha(p)}{U_c(p)} = \frac{F(p)}{1 + F(p)H_{ci}(p)} = \frac{\frac{K}{(1+\tau_1 \cdot p)(-1+\tau_1 \cdot p)}}{1 + \frac{K \cdot K_1 \cdot (p+1)}{(1+\tau_1 \cdot p)(-1+\tau_1 \cdot p)}} \\ &= \frac{K}{K \cdot K_1 \cdot (p+1) + (1 + \tau_1 \cdot p)(-1 + \tau_1 \cdot p)} = \frac{K}{K \cdot K_1 - 1 + K \cdot K_1 \cdot p + \tau_1^2 \cdot p^2} \end{aligned}$$



## Critères de stabilité graphique

### Robot Lola

Q 7 : Déterminer deux conditions sur  $K_1$  pour que la fonction de transfert en boucle ouverte non-corrigée  $F_{BO}(p) = \frac{\alpha(p)}{U_c(p)}$  soit stable. En déduire la valeur minimale de  $K_1$



## Critères de stabilité graphique

### Robot Lola

**Q 7 :** Déterminer deux conditions sur  $K_1$  pour que la fonction de transfert en boucle ouverte non-corrigée  $F_{BO}(p) = \frac{\alpha(p)}{U_c(p)}$  soit stable. En déduire la valeur minimale de  $K_1$

Pour vérifier la condition nécessaire de stabilité, à savoir que tous les coefficients du dénominateur soit du même signe, sachant que  $K > 0$  :

**Il faut donc :**  $K_1 > \frac{1}{K}$ .



# Plan

## 1 Intérêts et objectifs

- Introduction
- Classe et ordre d'une fonction de transfert
- Exemple du cours

## 2 Stabilité

- Définition et propriétés
- Critères de stabilité
- Marge de stabilité
- Application aux systèmes du premier et deuxième ordre



## Critères de stabilité : diagramme de Bode

### Marge de gain

La marge de gain ( $\Delta G$  ou  $MG_{dB}$ ) se définit par :

$$\boxed{\Delta G = -20 \log (|FTBO(j \omega_{\varphi 180})|).} \quad (3)$$

avec  $\omega_{\varphi 180}$ , la pulsation correspondant à  $\arg(FTBO(j \omega)) = -180^\circ$ .

### Marge de phase

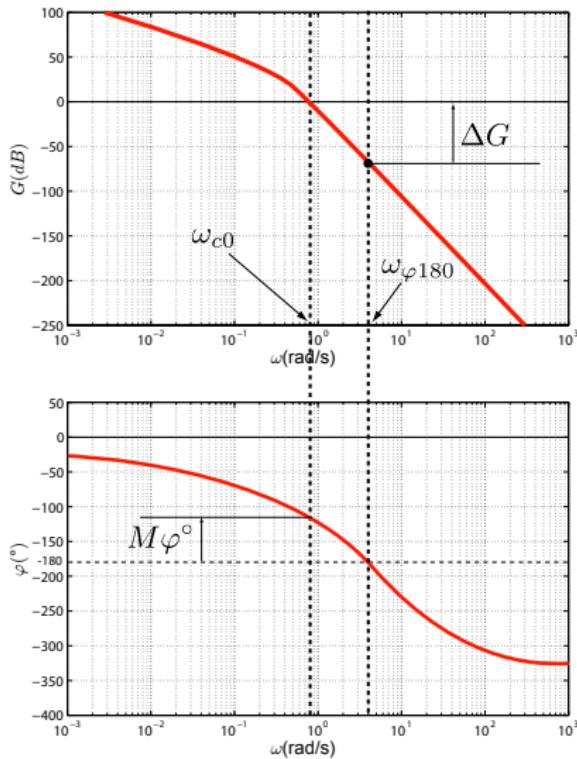
La marge de phase ( $M\varphi^\circ$ ) se définit par :

$$\boxed{M\varphi^\circ = 180 + \arg(FTBO(j \omega_{c0}))}. \quad (4)$$

avec  $\omega_{c0}$ , la pulsation correspondant à  $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j \omega)|) = 0$  ou  $|FTBO(j \omega_{c0})| = 1$ .



## Interprétation dans le plan de Bode





# Plan

## 1 Intérêts et objectifs

- Introduction
- Classe et ordre d'une fonction de transfert
- Exemple du cours

## 2 Stabilité

- Définition et propriétés
- Critères de stabilité
- Marge de stabilité
- Application aux systèmes du premier et deuxième ordre

# Stabilité : application aux systèmes du premier et deuxième ordre

## Stabilité des systèmes du premier et deuxième ordre

Ces systèmes sont inconditionnellement stables.

(5)

