Devoir à la maison n° 5

À rendre le 4 novembre

On se propose de déterminer par analyse-synthèse toutes les solutions ne s'annulant pas sur leur domaine de définition de l'équation différentielle non linéaire

$$y' + \frac{x}{1+x^2}y = y^2. \qquad (\spadesuit)$$

La détermination de ce domaine de définition n'est pas possible *a priori*. Il convient d'abord résoudre l'équation sur un intervalle I, puis après résolution préciser quel peut-être I, en le considérant le plus grand possible.

1) Préliminaire :

- **a)** Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = \operatorname{sh} x$, et exprimer x en fonction de y. En déduire que la fonction sh est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et donner une expression de sa fonction réciproque, qui est nommée *argument sinus hyperbolique* et notée Argsh.
- **b)** Justifier que Argsh est dérivable, et calculer Argsh$'$.

2) Analyse : Soit y une solution de ($\spadesuit$) définie sur un certain intervalle I et ne s'annulant pas sur cet intervalle. On note h la fonction $\dfrac{1}{y}$.

- **a)** Montrer que h est solution de l'équation linéaire d'ordre 1

$$h' - \frac{x}{1+x^2}\, h = -1 \qquad (\clubsuit)$$

- **b)** Résoudre l'équation homogène associée à ($\clubsuit$).
- **c)** Donner une solution particulière de ($\clubsuit$).
- **d)** En déduire une expression de h, puis de y.
- **e)** Pour une telle expression de cette fonction y, quel est le plus grand intervalle I que l'on puisse considérer ? On trouvera deux formes différentes pour cet intervalle.

3) Synthèse : Conclure, en donnant l'ensemble des solutions de ($\spadesuit$) ne s'annulant pas.

— **FIN** —