Exercices de mathématiques – MPSI
Lycée La Martinière Monplaisir
Année 2024/2025

✎ Exercices d'application directe du cours ou calculs directs. Utilisez-les pour apprendre votre cours.

🚲 Résultats ou méthodes utiles sur le long terme. À retenir, si possible.

⛰ Exercices difficiles ou peu guidés. Les plus costauds doivent les chercher.

Table des matières

Feuille d'exercice n° 01 : **Trigonométrie et nombres imaginaires**

Exercice 1 ( ) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\sin x = \dfrac{1}{2}$

2) $\tan x = \sqrt{3}$

3) $\cos x = -1$

4) $\sin(3x) = 1$

5) $\cos(4x) = -1$

6) $\sin(x)\cos(x) = \dfrac{1}{4}$

Exercice 2 ( ) Résoudre les équations suivantes :

1) $\tan(2x) = 1$

2) $\sin x + \cos x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

3) $\cos(5x) = \cos(2\pi/3 - x)$

4) $\sin(x + 3\pi/4) = \cos(x/4)$

5) $\cos(x + \pi/6)\cos(x - \pi/6) = \dfrac{1}{2}$

6) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$

Exercice 3 ( ) Résoudre l'équation $\sin(3x)\cos^3(x) + \sin^3(x)\cos(3x) = \dfrac{3}{4}$.

Exercice 4 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $\tan x \geqslant 1$

2) $\cos\left(\dfrac{x}{3}\right) \leqslant \sin\left(\dfrac{x}{3}\right)$

3) $2\sin^2 x \leqslant 1$

4) $\cos^2 x \geqslant \cos(2x)$

Exercice 5 ( ) Pour quelles valeurs de m l'équation $\sqrt{3}\cos x - \sin x = m$ admet-elle des solutions ? Les déterminer lorsque $m = \sqrt{2}$.

Exercice 6 On cherche à déterminer tous les réels t tels que $\cos t = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

1) Démontrer qu'il existe une unique solution dans l'intervalle $]0, \pi/4[$. Dans la suite, on notera cette solution t_0.

2) Calculer $\cos(2t_0)$, puis démontrer que $\cos(4t_0) = -\cos(t_0)$.

3) En déduire t_0.

4) Résoudre l'équation.

Exercice 7 Soit $x, y \in]0, \pi/2[$ tels que $\tan x = \dfrac{1}{7}$ et $\tan y = 2$.

1) En utilisant $\tan(x + 2y)$, calculer $x + 2y$.

2) Calculer $\cos(2y)$.

Exercice 8 Résoudre $\cos^4 x + \sin^4 x = \dfrac{6+\sqrt{3}}{8}$.

Exercice 9 (✎) Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

1) $\dfrac{1+2i}{3-4i}$ **3)** $\dfrac{(1+i)^3}{(1-i)^2}$ **5)** $\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{i}}$

2) $\dfrac{1}{(1+2i)^2}$ **4)** $\dfrac{1+i}{3-i}+\dfrac{1-i}{3+i}$ **6)** $(1+(1+(1+2i)^2)^{-1})$

Exercice 10 Montrer que pour tout $(a,b,c,d)\in\mathbb{Z}^4$, il existe $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$ tel que

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=m^2+n^2.$$

Exercice 11 (✎) Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

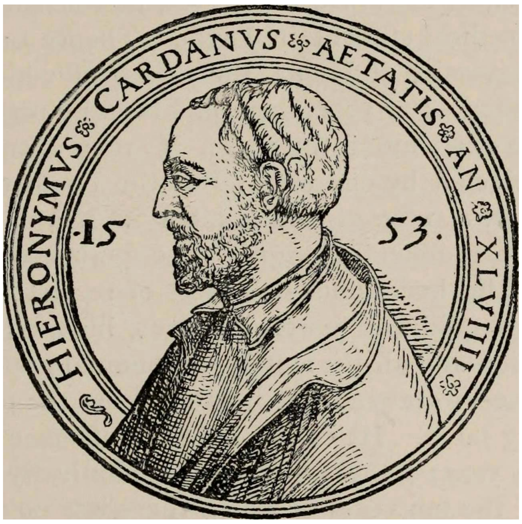
1) $\left(\sqrt{3}-i\right)^{11}$ **2)** $(-1+i)^{17}$ **3)** $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{-42}$

Exercice 12 Soit $\theta\in\mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, $z=\dfrac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta}$. Calculer $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\arg z$.

Exercice 13 Soient z_1 et z_2 deux complexes de module 1, tels que $1+z_1z_2\neq 0$. Montrer que

$$\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\in\mathbb{R}.$$

Exercice 14 Soit $a\in[0;2\pi[$ et n un entier naturel. Déterminer le module et l'argument de : $(1+ie^{ia})^n$.



Feuille d'exercice n° 02 : **Fonctions usuelles**

Exercice 1 ( ) Factoriser les expressions suivantes, puis déterminer le tableau de signes de chacune.

1) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$

2) $g(x) = x\ln(x) - x - 2\ln(x) + 2$

3) $\varphi(x) = x + 8 - \dfrac{16}{x-7}$

4) $\psi(x) = x\mathrm{e}^{x} + 3\mathrm{e}^{x} - 2x - 6$

Exercice 2 ( ) Dériver et dresser les tableaux de variations des fonctions suivantes.

1) $f : x \mapsto x^2\mathrm{e}^{x}$

2) $g : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x) - 1}$

3) $\varphi : x \mapsto \ln|x|$

4) $\psi : x \mapsto 3\ln|x-2| + 2\ln|x+3|$

Exercice 3 ( )

1) Montrer que la somme de deux applications croissantes est croissante.

2) La somme de deux applications monotones est-elle nécessairement monotone ?

3) Le produit de deux applications croissantes est-il nécessairement une application croissante ?

Exercice 4 ( ) Déterminer le domaine de définition, de $g \circ f$ dans chaque cas.

1) $f : x \mapsto 1 + \dfrac{3}{x-5}$ et $g = \sqrt{\cdot}$.

2) $f = \cos$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

3) $f : x \mapsto x + 3\ln(x)$ et $g = \exp$.

4) $f = \sin$ et $g = \ln$.

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante tandis que $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\left\{ \begin{array}{lcl} 2^{3x+2y} & = & 5 \\ 4^{2x} & = & 2^{2y+3} \end{array} \right.$.

Exercice 7 Résoudre l'équation $\ln \dfrac{x+3}{4} = \dfrac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$.

Exercice 8 ( ) Tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes.

1) $f : x \mapsto \sin(\operatorname{Arcsin} x)$

2) $g : x \mapsto \operatorname{Arcsin}(\sin x)$

Exercice 9 ( ) Simplifier les expressions suivantes.

1) $\operatorname{Arcsin}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **3)** $\operatorname{Arccos}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ **5)** $\operatorname{Arctan}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$ **7)** $\tan\left(\operatorname{Arcsin} x\right)$

2) $\operatorname{Arccos}\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right)$ **4)** $\operatorname{Arccos}\left(\cos 4\pi\right)$ **6)** $\sin\left(\operatorname{Arccos} x\right)$ **8)** $\cos\left(\operatorname{Arctan} x\right)$

Exercice 10 ( ) Démontrer les inégalités suivantes.

1) Pour tout $a \in]0,1[$, $\operatorname{Arcsin} a < \dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$.

2) Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\operatorname{Arctan} a > \dfrac{a}{1+a^2}$.

Exercice 11

1) Soit $x \in [0, \pi/8[$. Exprimer $\tan(4x)$ en fonction de $\tan(x)$.

2) En déduire la formule de Machin : $\dfrac{\pi}{4} = 4 \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{239}$.

Remarque : John Machin a pu calculer 100 décimales de π à la main en 1706 grâce à cette relation.

Exercice 12

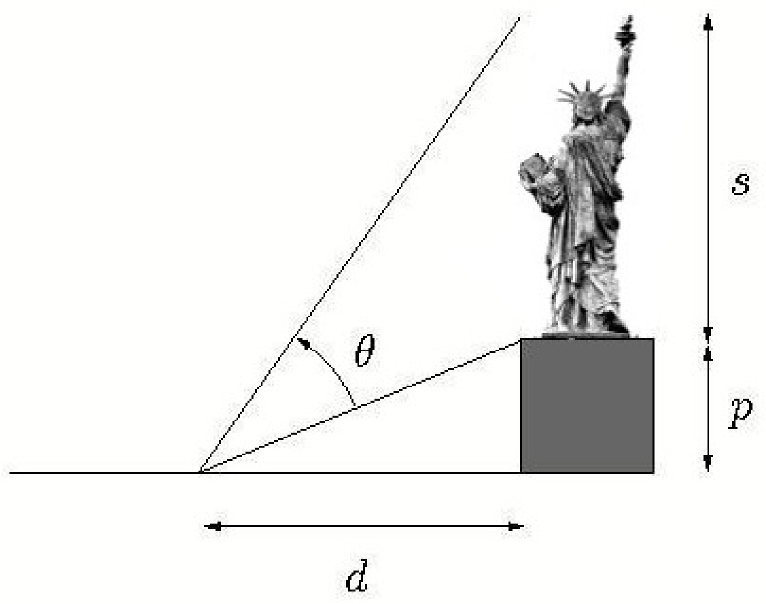


Figure 1 – La statue

Une statue de hauteur s est placée sur un piédestal de hauteur p. À quelle distance du pied de la statue un observateur (dont la taille est supposée négligeable) doit-il se placer pour la voir sous un angle maximal (*i.e.* pour avoir θ maximal, avec les notations de la figure **1**) ?

Exercice 13 ( ) Sur quelle partie de $\mathbb{R}$ est définie l'équation $\operatorname{Arccos} x = \operatorname{Arcsin}(1-x)$? La résoudre.

Exercice 14 On définit les deux fonctions f et g par $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{2x^2}\right)$ et $g : x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{x+1}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$.

1) Déterminer leurs ensembles de définition.

2) Calculer, lorsque cela est possible, leurs dérivées.

3) Que peut-on en déduire concernant $f(x)$ et $g(x)$? Donner le maximum de précisions.

4) Tracer les courbes représentatives de f et de g (sur un même schéma).

Exercice 15 (🚲) Calculer $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8}$.

Exercice 16 (⛰) Résoudre : $\operatorname{Arcsin} 2x = \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}\left(x\sqrt{2}\right)$.

Exercice 17 Soit la fonction $f : \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right) \end{array}$.

Montrer que f est bien définie et que l'on a les relations suivantes, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

1) $\operatorname{th}\left(\frac{f(x)}{2}\right) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

2) $\operatorname{th}(f(x)) = \sin(x)$

3) $\operatorname{ch}(f(x)) = \frac{1}{\cos(x)}$

4) $\operatorname{sh}(f(x)) = \tan(x)$.

Exercice 18 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre l'équation $a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x = 0$.

Feuille d'exercice n° 03 : **Sommes et calculs**

Exercice 1 Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$. Quelles sont les expressions toujours égales entre elles ?

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k} b_{n+1-k}, \quad \frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2 - \sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)^2\right)$

2) $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right), \quad \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{p=1}^{n} b_p\right), \quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}(a_k b_p), \quad \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \sum_{p=1}^{n} b_p\right), \quad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$

Exercice 2 Montrer que pour toute famille $(z_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} z_k^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} z_i z_j.$$

Quel résultat bien connu cette formule généralise-t-elle ?

Exercice 3 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+1)! - 1$.

Exercice 4

1) Soit $k \in \mathbb{N}$. Écrire $(1+k)^4 - k^4$ sous la forme d'un polynôme de degré 3 en k.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. En s'inspirant de la démonstration du cours donnant la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$, calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$ (on donnera cette valeur sous la forme la plus factorisée possible).

Exercice 5 Donner une expression simplifiée des quantités suivantes.

1) $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} i.j$ **2)** $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} i+j$ **3)** $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} i-j$ **4)** $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j)$

Même question en remplaçant $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}$ par $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n}$ puis par $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n}$.

Exercice 6 En considérant $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$, calculer les sommes $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2k+1}$, où $\lfloor\cdot\rfloor$ est la fonction « partie entière ».

Remarque : ces sommes sont souvent notées $\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}$ et $\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}$.

Exercice 7 (🚲) Écrire avec des factorielles les quantités suivantes.

1) $\displaystyle\prod_{k=n}^{m} k$ pour $n, m \in \mathbb{N}^*$ t.q. $n < m$.

2) $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} n-p+k$ pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ t.q. $p \leq n$.

3) $\displaystyle\prod_{k=1}^{p} \frac{n-p+k}{k}$ pour $n \geq 2$ et $1 \leq p \leq n-1$.

4) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8 (🚲)

1) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k i^{k-1} = \frac{i - n i^n - (n+1) i^{(n+1)}}{2}$

2) Soit $p \in \mathbb{N}$. En déduire les valeurs des deux sommes :

$$S_1(p) = 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (-1)^p (2p+1),$$
$$S_2(p) = 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + (-1)^{(p+1)} 2p.$$

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la fonction $f : x \mapsto (1+x)^n$, calculer les quantités suivantes.

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$

3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$

Exercice 10 Soit a un nombre réel. On étudie le système linéaire suivant.

$$\mathcal{S}_a : \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 3y & - & 2z & = & 5 \\ 2x & - & y & + & az & = & 1 \end{array} \right.$$

1) En fonction des valeurs du paramètre a, déterminer si le système $\mathcal{S}_a$ peut :

- **a)** n'admettre aucune solution ;
- **b)** admettre exactement une solution ;
- **c)** admettre une infinité de solutions.

2) Résoudre le système $\mathcal{S}_a$ lorsque celui-ci admet une (des) solution(s).

Exercice 11 Discuter et résoudre suivant les valeurs des réels λ, a, b, c, d le système suivant.

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} (1+\lambda)x & + & y & + & z & + & t & = & a \\ x & + & (1+\lambda)y & + & z & + & t & = & b \\ x & + & y & + & (1+\lambda)z & + & t & = & c \\ x & + & y & + & z & + & (1+\lambda)t & = & d \end{array} \right.$$

Feuille d'exercice n° 04 : **Quelques fondamentaux**

Exercice 1 Soit P, Q deux propositions. La proposition $\big(P \wedge Q \Longrightarrow (\neg P) \vee Q\big)$ est-elle nécessairement vraie ?

Exercice 2 Soit la propriété suivante : $P(z)$: «$|z-1| \leq 3 \Longrightarrow |z-5| \geq 1$».

1) Quel est l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z)$ soit vraie ? A-t-on : $\forall z \in \mathbb{C},\ P(z)$ vraie ?

2) Mêmes questions en remplaçant $|z-5| \geq 1$ par $|z-5| > 1$, puis par $|z-5| \geq 2$.

Exercice 3 (✎) Écrire la négation des assertions suivantes où P, Q, R, S sont des propositions.

1) $P \Rightarrow Q$

2) P et non Q

3) P et (Q et R)

4) P ou (Q et R)

5) (P et Q) $\Rightarrow$ ($R \Rightarrow S$)

Exercice 4 Dans chacun des cas suivants, comprendre le sens des deux phrases proposées et déterminer leur valeur de vérité :

1) $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}\ n \leqslant N$ et $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n \leqslant N$.

2) $\forall y \in \mathbb{R}_+^*\ \exists x \in \mathbb{R}\ y = \mathrm{e}^x$ et $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ y = \mathrm{e}^x$.

3) Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ y = f(x)$ et $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ y = f(x)$.

Exercice 5 (✎) Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. Quelle est la négation des propositions suivantes ?

1) $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$

2) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 1$ ou $f(x) \leqslant -1$

3) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 0$

4) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ y \leqslant f(x) \leqslant 2x + y$

5) $\forall x \in \mathbb{R},\ (\exists y \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant y) \Rightarrow x \leqslant 0$

Exercice 6 Soient les quatre assertions suivantes :

(a) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$;

(b) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$;

(c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0$;

(d) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x$.

1) Les assertions *(a)*, *(b)*, *(c)* et *(d)* sont-elles vraies ou fausses ?

2) Donner la négation de chacune.

Exercice 7 (🚲) Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. Écrire au moyen de quantificateurs les propositions suivantes :

1) f est croissante.

2) f est périodique.

3) f s'annule au plus une fois.

4) f prend au moins une fois la valeur 1.

Exercice 8 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $2|x-1| = x^2 - 2$.

Exercice 9 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(y - f(x)) = 2 - x - y.$$

Exercice 10 **En quoi le raisonnement suivant est-il faux ?**
Soit $\mathcal{P}(n)$: « n crayons de couleurs sont tous de la même couleur ».

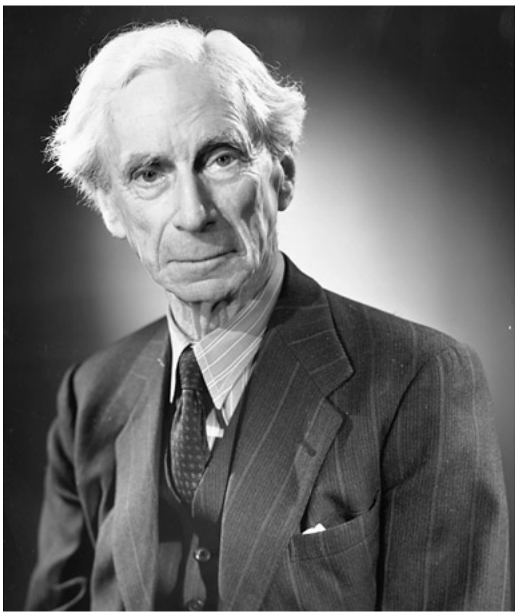
- $\mathcal{P}(1)$ est vraie car un crayon de couleur est de la même couleur que lui-même.
- Supposons $\mathcal{P}(n)$. Soit $n+1$ crayons. On en retire 1. Les n crayons restants sont de la même couleur par hypothèse de récurrence.

  Reposons ce crayon et retirons-en un autre ; les n nouveaux crayons sont à nouveau de la même couleur. Le premier crayon retiré était donc bien de la même couleur que les n autres. La proposition est donc vraie au rang $n+1$.
- On a donc démontré que tous les crayons en nombre infini dénombrable sont de la même couleur.

Exercice 11 Dans un match de rugby, une équipe peut marquer 3 points (pénalité ou drop), 5 points (essai non transformé) ou 7 points (essai transformé). Quel est l'ensemble des scores possibles ?

Exercice 12 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant : $u_0 \leqslant 1,\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leqslant 2^n$.



Feuille d'exercice n° 05 : **Nombres complexes**

Exercice 1 Résoudre pour $z \in \mathbb{C}$, $2\arg(z+i) = \arg(z) + \arg(i)\ [2\pi]$.

Exercice 2 Soit $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{7}\right)$. Calculer $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.
(*Indication* : on pourra d'abord calculer AB et $A+B$.)

Exercice 3 Déterminer les racines 4^{es} dans $\mathbb{C}$ de $-119 + 120i$

Exercice 4 Soit $(n,z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{C}$ tel que $z^n = (z+1)^n = 1$. Montrer que n est multiple de 6 et que $z^3 = 1$.

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue x : $(1+x)^{2n} = (1-x)^{2n}$. Calculer alors le produit des solutions de cette équation.

Exercice 6 Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1) Écrire $-i$ et $1+i$ sous forme trigonométrique.
2) Calculer les racines n^{es} de $-i$ et de $1+i$.
3) Résoudre $z^2 - z + 1 - i = 0$.
4) En déduire les racines de $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

Exercice 7 Soit n un entier naturel non nul, notons $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n.$$

Exercice 8 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\overline{z} = z^3$.

Exercice 9 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $z^4 + 2\lambda^2 z^2 (1+\cos\theta)\cos\theta + \lambda^4(1+\cos\theta)^2 = 0$ $(\lambda \in \mathbb{C}, \theta \in [0,\pi])$. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum\limits_{k=1}^{4} z_k^n$ où les z_k sont les racines de cette équation.

Exercice 10

1) Calculer les racines carrées de $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
2) Calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 11

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$.
2) En déduire que $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$ est racine du polynôme $16X^4 - 20X^2 + 5$.
3) En déduire la valeur de $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$.
4) Montrer que $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Exercice 12 Calculer $\cos 5\theta$, $\cos 8\theta$, $\sin 6\theta$, $\sin 9\theta$, en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice 13 Linéariser les quantités suivantes.

1) $\cos^3(x)\sin^2(x)$. **2)** $\cos^6(x)+\sin^6(x)$.

Exercice 14 (🚲) Soient $n \in \mathbb{N}$ et a, $b \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(a+kb)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(a+kb)$.

Exercice 15 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant chacune des équations suivantes.

1) $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 1$ **2)** $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice 16 Quel est l'ensemble des nombres complexes z tels que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur ?

Exercice 17 Déterminer les points d'affixe $z \in \mathbb{C}$ vérifiant chaque situation.

1) 1, z et z^2 soient les affixes de trois points alignés.

2) z et $\dfrac{1}{z}$ soient les affixes de deux vecteurs orthogonaux.

3) 1, z et $z+i$ soient les affixes des sommets d'un triangle dont le centre du cercle circonscrit est l'origine O du repère.

4) z, $\dfrac{1}{z}$ et $z-1$ soient les affixes de trois points situés sur un même cercle de centre O.

Exercice 18 Soient A, B et C trois points, distincts deux à deux, d'affixes respectifs a, b et c. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

1) ABC est un triangle équilatéral.

2) j ou j^2 est racine du polynôme aX^2+bX+c.

3) $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca$.

4) $(b-a)^2+(c-b)^2+(a-c)^2 = 0$.

Exercice 19 (✎)

1) Caractériser géométriquement l'application $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & (2+2i)z-(7+4i) \end{array}\right.$

2) Soit r la rotation de centre le point d'affixe $1+i$ et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{4}$. Déterminer l'expression complexe de r.

3) Soient r la rotation de centre le point d'affixe 1 et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$, et s la symétrie centrale de centre le point d'affixe $i+3$. Caractériser géométriquement l'application $s \circ r$.

Feuille d'exercice n° 06 : **Équations différentielles**

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes via un changement de variable adéquat.

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}(t)}$

2) $\displaystyle\int_0^1 t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$

3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

4) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t+t(\ln t)^2}$

5) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{\ln t+1}}$

6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$

7) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$

8) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+2t}$

9) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)-\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 2 Soit $a,b\in\mathbb{R}$, soit $I(a,b)=\displaystyle\int_a^b \frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}\,\mathrm{d}x$.

1) Montrer que $I(a,b)=I(-b,-a)$

2) Soient a et b de même signe. Montrer que $I\left(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b}\right)=I(a,b)$. En déduire que $I(a,\dfrac{1}{a})=0$.

3) Soit $y\in[1,+\infty[$, montrer qu'il existe un unique $x\in\mathbb{R}_+$ tel que $y=\mathrm{ch}(x)$. On note alors $x=\mathrm{Argch}(y)$.

Remarque : on dit que x est *l'argument cosinus hyperbolique* de y.

4) Exprimer alors $\mathrm{e}^{\mathrm{Argch}(y)}$ en fonction de y

Facultatif : exprimer $\mathrm{Argch}(y)$ en fonction de y et étudier la fonction Argch.

5) Calculer $I(a,b)$ pour $a\geqslant 1$ et $b\geqslant 1$ en commençant par poser $u=x+\dfrac{1}{x}$, puis $u=\sqrt{2}\,\mathrm{ch}(t)$.

6) En déduire $I(a,b)$ lorsque a et b sont de même signe (non nul).

Exercice 3 On pose, pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, $I_{n,p}=\displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^p\mathrm{d}x$.

1) Exprimer, pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, $I_{n,p}$ en fonction de $I_{n+1,p-1}$.

2) En déduire $I_{n,p}$ pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$,

3) Calculer $I_{n,n}$ pour tout entier naturel n et en déduire la limite de la suite $(I_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4

1) a) Vérifier que la fonction $f: x\mapsto \ln\ \tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$ est définie et dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer sa dérivée.

b) Résoudre : $y'-y\tan x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ avec $y(0)=1$.

Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes.

2) $y'+y=(x^2-2x+2)\mathrm{e}^{2x}$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0)=0$.

3) $y'-2y=\mathrm{sh}\,x-2x\,\mathrm{ch}\,x$ sur $\mathbb{R}$.

4) $xy'\ln x-y=3x^2\ln^2 x$ sur $]0,1[$.

5) $y'+x^2y+x^2=0$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0)=0$.

6) $xy'-y=x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

7) $y'\sqrt{1-x^2}-y=1$ sur $]-1,1[$.

8) $y'-3y=x^2\mathrm{e}^{x}+x\mathrm{e}^{3x}$ sur $\mathbb{R}$ avec $y(0)=1$.

Exercice 5 Déterminer les fonctions $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dérivables telles que $\forall x\in[0,1]\quad f'(x)+f(x)=f(0)+f(1)$.

Exercice 6 () Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$, $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}$:

$$xy' + y = x(3x+4).$$

Exercice 7 () Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes.

1) $y'' + y' - 2y = 8\sin x$ avec $y(\pi) = 0$ et $y'(\pi) = 1$

2) $y'' + y' = 4x^2 \mathrm{e}^x$ avec $y(0) = \mathrm{e}$ et $y'(0) = 0$

3) $y'' + 4y = x^2 - x + 1$

4) $y'' + y' + 2y = (8x+1)\mathrm{e}^x$

5) $y'' - 3y' + y = \sin x + \cos x$

6) $y'' - y = \operatorname{sh} x$

Exercice 8 () On étudie les équations différentielles d'Euler, qui sont de la forme $(\mathscr{E})$: $ax^2y'' + bxy' + cy = g(x)$, où a, b et c sont des constantes et g est une fonction.

1) On suppose que l'on étudie $(\mathscr{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on pose $z(t) = y(\mathrm{e}^t)$. Montrer que y est solution de $(\mathscr{E})$ si et seulement si z est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre deux, à coefficients constants (à déterminer en fonction de a, b et c).

2) Résoudre $x^2y'' + xy' - y = 2x\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Résoudre $x^2y'' + 3xy' + y = (x+1)^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) Résoudre $x^2y'' + 3xy' + y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 () Trouver les applications de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) + f(-x) = x\mathrm{e}^x.$$

Exercice 10 Le but de cet exercice est de résoudre le système différentiel $(\mathbf{S})$ suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'' & = & x' + y' - y \\ y'' & = & x' + y' - x \end{array}\right. , \qquad \text{en } x, y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

1) Soient $x, y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $u = x + y$ et $v = x - y$. Montrer alors qu'il existe deux équations différentielles du second ordre $(\mathbf{E})$ et $(\mathbf{F})$ telles que l'on ait : (x, y) est solution de $(\mathbf{S})$ si et seulement si u est solution $(\mathbf{E})$ et v est solution de $(\mathbf{F})$.

2) Résoudre $(\mathbf{E})$.

3) Résoudre $(\mathbf{F})$.

4) En déduire les solutions de $(\mathbf{S})$.

Feuille d'exercice n° 07 : **Théorie des ensembles**

Exercice 1 (✎) Donner la liste des éléments de $\mathscr{P}\left[\mathscr{P}(\{1,2\})\right]$.

Exercice 2 (✎) Soit $E = \{x, y, z\}$ un ensemble. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses.

1) $x \in E$
2) $\{x\} \in E$
3) $\{x\} \subset E$
4) $\varnothing \in E$
5) $\varnothing \subset E$
6) $\{\varnothing\} \subset E$
7) $\{x, y\} \subset E$
8) $\{y, z\} \subset E \setminus \{x\}$

Exercice 3 Un ensemble est dit « décrit en compréhension » lorsqu'il réunit les éléments d'un ensemble vérifiant une propriété. Un ensemble est dit « décrit en extension » lorsqu'on cite ses éléments.

Par exemple, $\{\, n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k \,\}$ et $\{\, 2k \mid k \in \mathbb{Z} \,\}$ sont des descriptions respectivement en compréhension et en extension de l'ensemble des entiers pairs.

1) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble $\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$.
2) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble $\{1, 10, 100, 1000, \ldots\}$.
3) Décrire en extension l'ensemble des nombres rationnels.
4) Décrire en compréhension l'ensemble $]0, 1]$. Pensez-vous qu'il soit possible de décrire cet ensemble en extension ?
5) Décrire en compréhension et en extension l'ensemble des valeurs prises par une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
6) Décrire en compréhension l'ensemble des antécédents d'un complexe y par une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Exercice 4 (✎🚲) Montrer que si F et G sont des sous-ensembles de E :

$$(F \subset G \iff F \cup G = G), \quad (F \subset G \iff F \cap G = F) \quad \text{et} \quad (F \subset G \iff F^C \cup G = E).$$

En déduire que :

$$(F \subset G \iff F \cap G^C = \varnothing).$$

Exercice 5 (✎) Soit E un ensemble, A, B, C trois parties de E. Montrer les propriétés suivantes.

1) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$
2) $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$
3) $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

Exercice 6 Soient E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$. Résoudre dans $\mathscr{P}(E)$ les équations suivantes.

1) $X \cup A = B$
2) $X \cap A = B$
3) $X \setminus A = B$

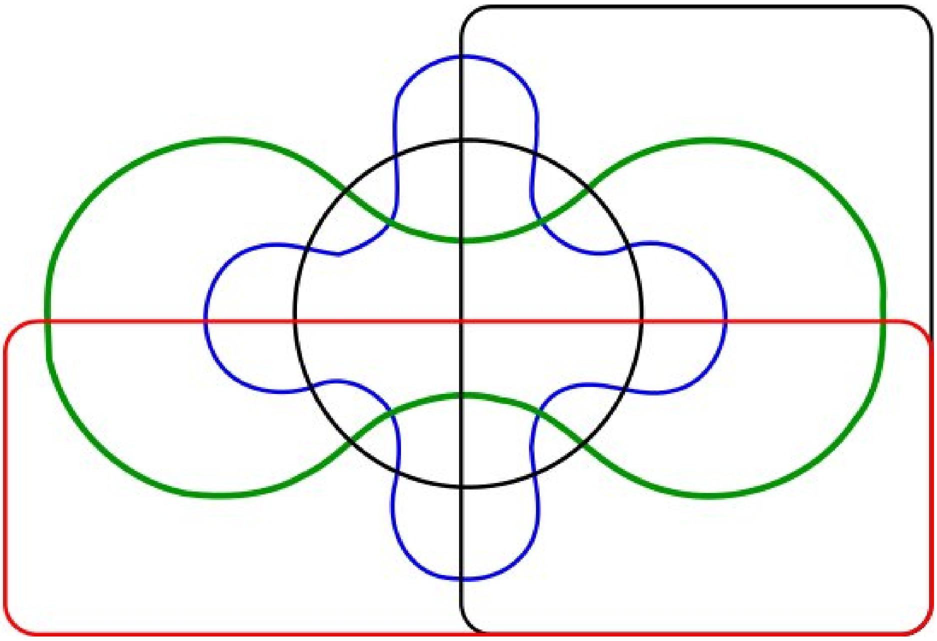
Exercice 7 Soient E et F deux ensembles. Quelle relation y a-t'il

1) entre les ensembles $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$?

2) entre les ensembles $\mathcal{P}(E \cap F)$ et $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$?

3) entre les ensembles $\mathcal{P}(E \times F)$ et $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$?

Exercice 8 (✎) Soient E, F, G trois ensembles. Montrer que $(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G$.



Feuille d'exercice n° 08 : **Notion d'application**

Exercice 1 (✎) Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ y & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si} \quad y=0 \\ y-1 & \text{si} \quad y \geq 1 \end{cases} \end{array}$.

1) Préciser l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité éventuelle de f et g.

2) Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 2 Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1-\dfrac{1}{x-1} \end{array}$.

1) f est-elle injective ? surjective ?

2) Déterminer une partie E telle que $g : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1-\dfrac{1}{x-1} \end{array}$ soit bijective et expliciter la réciproque.

Exercice 3 Soit E un ensemble.

1) Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a

$$\mathbb{1}_{(A\cap B)} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B, \tag{1}$$
$$\mathbb{1}_{(A^c)} = 1 - \mathbb{1}_A, \tag{2}$$
$$\mathbb{1}_{(A\cup B)} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B. \tag{3}$$

2) Montrer que l'application $\mathbb{1} : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \{0,1\}^E \\ A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$ est bijective.

Exercice 4 (🚲) Soit E, F, G trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Établir les implications suivantes.

1) $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective

2) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective

3) $g \circ f$ injective et f surjective $\Rightarrow$ g injective

4) $g \circ f$ surjective et g injective $\Rightarrow$ f surjective

Exercice 5 (✎ ⛰) Soient E, E', F, F' quatre ensembles, $u : E' \to E$, $v : F \to F'$ deux applications.
On définit l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} F^E & \to & {F'}^{E'} \\ f & \mapsto & v \circ f \circ u \end{array}$.

1) Vérifier que φ est bien définie.

2) Montrer que si v est injective et u surjective alors φ est injective.

3) Montrer que si v est surjective et u injective alors φ est surjective.
Remarque : cette dernière question est sensiblement plus difficile que les deux premières.

Exercice 6 Soit E un ensemble et A, B deux parties fixées de E. Soit $\varphi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{cases}$

1) Qu'est-ce que $\varphi(\varnothing)$? $\varphi(\overline{A \cup B})$?

2) À quelle condition sur A et B, φ est-elle injective ?

3) Est-ce que le couple $(\varnothing, B)$ possède un antécédent par φ ?

4) À quelle condition sur A et B, φ est-elle surjective ?

Exercice 7 Démontrer le théorème de Cantor : « Soit E un ensemble, il n'existe pas de surjection de E dans $\mathscr{P}(E)$ ».

Indication : avec φ une application de E dans $\mathscr{P}(E)$, on pourra s'intéresser à la partie

$$A = \{x \in E \mid x \notin \varphi(x)\}.$$

Exercice 8 Soit E, I deux ensemble, $f : E \to I$ une application surjective. On pose, pour tout $i \in I$, $A_i = f^{\leftarrow}(\{i\})$.

Montrer que les A_i sont non vides, deux à deux disjoints, de réunion égale à E. (On dit que les A_i forment une *partition* de E.)

Exercice 9 Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

1) **a)** Montrer que, pour toute partie A de E, $A \subset f^{\leftarrow}(f(A))$.

b) Montrer que f est injective si et seulement si, pour toute partie A de E, $f^{\leftarrow}(f(A)) = A$.

2) **a)** Montrer que, pour toute partie B de F, $f(f^{\leftarrow}(B)) \subset B$.

b) Montrer que f est surjective si et seulement si, pour toute partie B de F, $f(f^{\leftarrow}(B)) = B$.

Exercice 10 Soient E, F deux ensembles, soit $f : E \to F$. Montrer que f est injective si et seulement si :

$$\forall A, A' \in \mathscr{P}(E),\ f(A \cap A') = f(A) \cap f(A').$$

Feuille d'exercice n° 09 : **Calcul matriciel**

Exercice 1 (✎) Effectuer les produit de matrices suivants.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$

Exercice 2 (✎) Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Calculer $A^n(\theta)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 3 (✎) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique si tous les coefficients de A sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chaque ligne de A est égale à 1.

Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

Exercice 4 (✎🚲) Pour chacune de ces matrices, déterminer si elle est inversible et, le cas échéant, donner son inverse.

1) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ **2)** $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ **3)** $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 5 (🚲) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et soit $B = A - I_3$.

1) Calculer B^2, B^3, puis en déduire la valeur de B^n pour tout entier naturel n.

2) Développer $(B + I_3)^n$ par la formule du binôme et simplifier.

3) En déduire A^n pour tout entier naturel n.

4) La relation précédente est-elle aussi valable pour les entiers n négatifs ?

Exercice 6 Soit $a, b \in \mathbb{C}$.

1) Trouver les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2) De même avec $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Exercice 7 (✎) Soit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{C}$. On considère la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer M^2, M^3, M^4 et M^5.

2) Pouvez-vous calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$? Et pour tout $n \in \mathbb{Z}$?

Exercice 8 (✎) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2 et vérifier que $A^2 = A + 2I_3$, où I_3 est la matrice identité 3×3.

2) En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), MH = HM.$$

Exercice 10 Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer une matrice L_1 triangulaire inférieure et une matrice U triangulaire supérieure telles que $L_1 M = U$.
Indication : on écrira L_1 comme produit de matrices d'opérations élémentaires.

2) Déterminer une matrice L triangulaire inférieure telle que $M = LU$.

3) Résoudre les systèmes suivants :

a) $MX = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ **b)** $MX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **c)** $MX = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Feuille d'exercice n° 10 : **Relations d'ordre et d'équivalence, et ensembles de nombres usuels**

Exercice 1 Soit E un ensemble et A une partie de E. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathscr{P}(E)$ par : $X\mathcal{R}Y$ si $X \cup A = Y \cup A$.

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Décrire la classe d'équivalence de $X \in \mathscr{P}(E)$

Exercice 2 () Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire réflexive et transitive sur un ensemble E. On définit la relation $\mathcal{S}$ sur E par : $x\mathcal{S}y$ si $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x)$.

Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence et que $\mathcal{R}$ permet de définir une relation d'ordre sur les classes d'équivalences de $\mathcal{S}$.

Exercice 3 () Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné. On définit sur $\mathscr{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$ la relation $\mathcal{R}$ par : $X\mathcal{R}Y$ si $(X = Y$ ou $\forall x \in X \ \forall y \in Y \ x \leqslant y)$. Vérifier que c'est une relation d'ordre.

Exercice 4 Un ensemble E muni d'une relation d'ordre $\preccurlyeq$ est dit *bien ordonné* pour $\preccurlyeq$ si toute partie non vide admet un plus petit élément pour $\preccurlyeq$.

1) Donner un exemple d'ensemble bien ordonné et un exemple d'ensemble qui ne l'est pas.

2) Montrer que tout ensemble bien ordonné est totalement ordonné.

3) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 5

1) On définit une relation $\leqslant^0$ sur $\mathbb{R}^2$ en posant, pour tout $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$:

$$(x, y) \leqslant^0 (x', y') \quad \text{si} \quad x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y'.$$

a) Montrer que $\leqslant^0$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$.

b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Représenter graphiquement l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorants de $\{(x, y)\}$ pour $\leqslant^0$.

c) Cet ordre est-il total ?

2) On définit une relation $\leqslant^\star$ sur $\mathbb{R}^2$ en posant, pour tout $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$:

$$(x, y) \leqslant^\star (x', y') \quad \text{si} \quad x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leqslant y').$$

a) Montrer que $\leqslant^\star$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$. Cet ordre s'appelle l'ordre *lexicographique*.

b) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Représenter graphiquement l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorants de $\{(x, y)\}$ pour $\leqslant^\star$.

c) Cet ordre est-il total ?

d) L'ordre lexicographique (sur $\mathbb{R}^2$) possède-t-il la propriété de la borne supérieure ?
Indication : on pourra considérer $\mathscr{A} = \mathbb{R}_-^\star \times \mathbb{R}$.

Exercice 6 Déterminer les bornes supérieures et inférieures des parties suivantes de $\mathbb{R}$.

$$A = \left\{ \sqrt{\frac{n}{n+1}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \qquad B = \left\{ x^2 + 2x + 3 \;\middle|\; x \in [-3; 2] \right\} \qquad C = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Exercice 7 () Soit $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante d'entiers naturels. Montrer que $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *stationnaire*, *i.e.* que k_n prend toujours la même valeur à partir d'un certain rang.

Exercice 8 Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$, soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. On définit

$$A + B = \{\, x \in \mathbb{R} \mid \exists (a,b) \in A \times B,\ x = a + b \,\} = \{\, a + b \mid (a,b) \in A \times B \,\}$$

$$\text{et} \qquad \lambda A = \{\, x \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A,\ x = \lambda a \,\} = \{\, \lambda a \mid a \in A \,\}.$$

1) Si $A \subset B$, montrer que $\sup A \leqslant \sup B$.

2) Montrer que $A \cup B$ possède une borne supérieure. Que vaut $\sup(A \cup B)$?

3) Montrer que $A + B$ possède une borne supérieure. Que vaut $\sup(A + B)$?

4) Montrer que λA possède une borne supérieure. Que vaut $\sup(\lambda A)$? Et si $\lambda < 0$?

Exercice 9 Soit X et Y deux ensembles non vides et $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ majorée. Montrer

$$\sup\{\, f(x,y) \mid\ (x,y) \in X \times Y \,\} = \sup\{\, \sup\{\, f(x,y) \mid y \in Y \,\} \mid\ x \in X \,\}.$$

Exercice 10 Soient a et b deux réels. Montrer que :

1) $a \leqslant b \Rightarrow \lfloor a \rfloor \leqslant \lfloor b \rfloor$;

2) $\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leqslant \lfloor a + b \rfloor \leqslant \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1$.

Exercice 11 On veut calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$.

1) Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=i^2}^{(i+1)^2-1} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor \right) + n$.

2) Conclure.

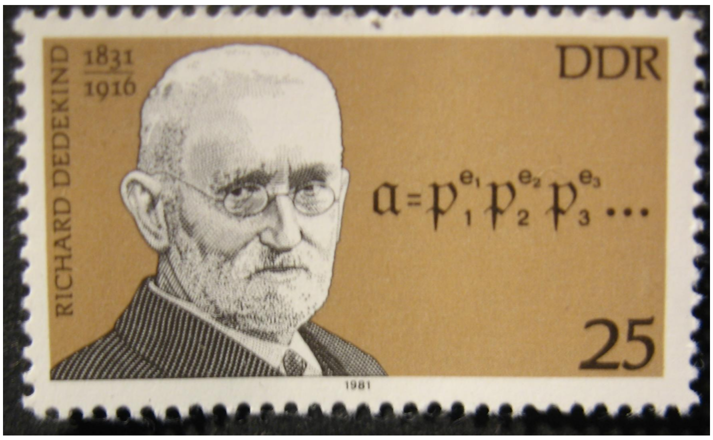
Exercice 12 On appelle *ouvert* de $\mathbb{R}$ toute partie U de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante.

« Pour tout $x \in U$, il existe un intervalle I ouvert tel que $x \in I \subset U$. »

On pourra démontrer que cette proposition est équivalente à la proposition suivante :

« Pour tout $x \in U$, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ ouvert tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset U$. »

Soit U et V deux ouverts denses de $\mathbb{R}$. Établir que $U \cap V$ est encore un ouvert dense de $\mathbb{R}$.



Feuille d'exercice n° 11 : **Arithmétique**

Exercice 1 ( ) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1) $17 \mid (7^{8n+1} + 10(-1)^n)$; **2)** $11 \mid (9^{5n+2} - 4)$; **3)** $6 \mid (10^{3n+2} - 4^{n+1})$.

Exercice 2 ( ) Quel est le reste de la division euclidienne de $1234^{4321} + 4321^{1234}$ par 7 ?

Exercice 3 Trouver le reste de la division par 13 du nombre 100^{1000}.

Exercice 4 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1) $n(n+1)(n+2)(n+3)$ est divisible par 24 ;

2) $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est divisible par 120.

Exercice 5 ( ) Déterminer le pgcd et un couple de Bézout des couples d'entiers (a, b) suivants :

1) $a = 33$ et $b = 24$ **2)** $a = 37$ et $b = 27$ **3)** $a = 270$ et $b = 105$

Exercice 6 ( ) Soient a, b et $c \in \mathbb{Z}$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$. On souhaite résoudre l'équation $ax + by = c$, notée $\star$, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

1) Montrer que $\star$ n'a pas de solution si c n'est pas un multiple de $a \wedge b$.

2) On suppose dans cette question que $a \wedge b$ divise c.

- **a)** En considérant un couple de coefficients de Bézout de (a, b), montrer que $\star$ possède une solution (x_0, y_0).
- **b)** En s'appuyant sur (x_0, y_0), résoudre complètement $\star$.

3) Résoudre les équations d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$: $2x + 5y = 13$, $14x - 24y = 6$ et $6x - 14y = 9$.

Exercice 7 Le pgcd de deux nombres est 12 ; les quotients successifs obtenus dans le calcul de ce pgcd par l'algorithme d'Euclide sont 8, 2 et 7. Trouver ces deux nombres.

Exercice 8 ( ) Résoudre les systèmes suivants, d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

1) $\begin{cases} x \wedge y &= 3 \\ x + y &= 21 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x \wedge y &= 6 \\ x \vee y &= 72 \end{cases}$

Exercice 9 ( ) Montrer que deux entiers consécutifs sont toujours premiers entre eux.

Exercice 10 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :

1) $(n^2 + n) \wedge (2n + 1) = 1$; **2)** $(3n^2 + 2n) \wedge (n + 1) = 1$.

Exercice 11 ( ) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système $S : \begin{cases} x \equiv 4 \mod 6 \\ x \equiv 7 \mod 9 \end{cases}$.

Indication : on recherchera d'abord une solution particulière.

Exercice 12 Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes, d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

1) $91x - 65y = 156$. **2)** $135x - 54y = 63$. **3)** $72x + 35y = 13$.

Exercice 13 Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $x^2 - 5y^2 = 3$.

Exercice 14 Déterminer les entiers n vérifiant $n^2 - 3n + 6 \equiv 0 \pmod 5$.

Exercice 15 Un coq coûte 5 pièces d'argent, une poule 3 pièces, et un lot de quatre poussins 1 pièce. Quelqu'un a acheté 100 volailles pour 100 pièces ; combien en a-t-il acheté de chaque sorte ?

Exercice 16

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$.

2) En déduire que, si $p, q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux, on a

$$\sum_{k=1}^{q-1} \left\lfloor k \times \frac{p}{q} \right\rfloor = \frac{(p-1)(q-1)}{2}.$$

Exercice 17 Soient a et n deux entiers supérieurs ou égaux à 2. Montrer que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier. La réciproque est-elle vraie ? Pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 2, l'entier $2^p - 1$ est appelé le p-ème nombre de Mersenne, souvent noté M_p.

Exercice 18 Soit F l'application définie sur $\mathbb{N}$ par $n \to 2^{2^n} + 1$. Si $n \in \mathbb{N}$, $F(n)$ est appelé n^{e} nombre de Fermat.

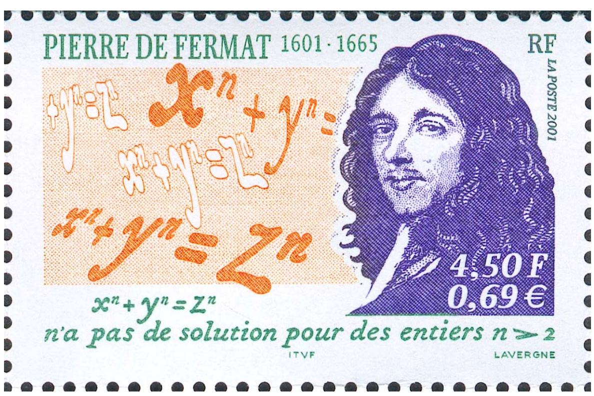
1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F(n) = \prod_{k=0}^{n-1} F(k) + 2$.

2) Montrer que, pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \neq n$, $F(m)$ et $F(n)$ sont premiers entre eux.

3) Montrer que tout entier naturel n qui n'est pas de la forme 2^m possède un diviseur impair autre que 1. En déduire que, si le nombre $2^n + 1$ est premier, alors soit c'est un nombre de Fermat, soit $n = 0$.

4) Montrer que $F(5)$ est divisible par 641.

Exercice 19 Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $\frac{1}{4}(n^3 + (n+2)^3)$ est un entier non premier.



Feuille d'exercice n° 12 : **Suites**

Exercice 1 ( ) – Méfiez-vous des faux amis –

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Parmi les affirmations suivantes, dites lesquelles sont vraies (on les démontrera alors) et lesquelles sont fausses (on donnera un contre-exemple).

1) Si (u_n) converge, alors $(u_{n+1}-u_n)$ converge vers 0.

2) Si $(u_{n+1}-u_n)$ converge vers 0, alors (u_n) converge.

3) Si (u_n) converge et pour tout n $u_n \neq 0$, alors $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers 1.

4) Si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\neq 0$ et si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers 1, alors (u_n) converge.

5) Si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\neq 0$ et si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers $1/2$, alors (u_n) converge.

6) Si (u_n) converge vers 0 et si (v_n) diverge, alors à partir d'un certain rang $|u_n|\leqslant|v_n|$.

7) Si (u_n) est une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0, alors elle est décroissante à partir d'un certain rang.

8) Si une suite positive est non majorée, elle tend vers $+\infty$.

9) (u_n) converge si et seulement si $(|u_n|)$ converge.

10) Si $(|u_n|)$ tend vers $+\infty$, alors (u_n) tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

11) Si (u_n) n'est pas majorée, elle admet une sous-suite strictement croissante qui tend vers $+\infty$.

12) Si (u_n) est monotone et admet une sous-suite convergente, alors (u_n) est convergente.

13) Si une suite d'entiers converge, elle est stationnaire.

14) Si une suite a un nombre fini de valeurs, elle converge si et seulement si elle est stationnaire.

15) Si (u_n+v_n) est convergente, (u_n) et (v_n) convergent.

16) Si (u_n) converge et (v_n) diverge, (u_n+v_n) diverge.

17) Si (u_nv_n) est convergente, (u_n) et (v_n) convergent.

18) Si (u_n) converge, $(\lfloor u_n\rfloor)$ également.

Exercice 2 Étudier la suite de terme général $u_n=\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$, a et b étant donnés dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 ( ) – Lemme de Césaro –

Soit (u_n) une suite réelle. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\dfrac{u_0+\cdots+u_{n-1}}{n}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}u_k$.

1) Montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2) Soit $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$, montrer que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

3) Donner un exemple où (v_n) converge mais (u_n) diverge.

Exercice 4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$

1) On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Montrer que

  a) si $\ell < 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$;

  b) si $\ell > 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

2) On suppose que $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Montrer que

  a) si $\ell < 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$;

  b) si $\ell > 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. Montrer que si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
Indication : utiliser le lemme de Césaro.

4) Chercher les limites des suites de termes généraux suivants.

a) $u_n = \sqrt[n]{\dbinom{2n}{n}}$ **b)** $v_n = \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ **c)** $w_n = \dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{\dfrac{(3n)!}{n!}}$

Exercice 5 **– Divergence de** $(\mathrm{e}^{in\theta})$ **–**
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\theta \not\equiv 0\ [\pi]$, les suites $(\cos(n\theta))$ et $(\sin(n\theta))$ sont toutes les deux divergentes.
Indication : On pourra montrer que si l'une converge, alors l'autre aussi, puis obtenir une contradiction.

Exercice 6 Étudier la convergence des suites de termes généraux suivants et calculer la limite, le cas échéant.

1) $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n}$

2) $b_n = \dfrac{n\sin(n)}{n^2+1}$

3) $c_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n$

4) $d_n = \left\lfloor 1 + \dfrac{(-1)^n}{n} \right\rfloor$

5) $e_n = \dfrac{n}{2}\sin\dfrac{n\pi}{2}$

6) $f_n = \sqrt[n]{3-\sin n^2}$

7) $g_n = \dfrac{n^3+2^n}{3^n}$

8) $h_n = n - \sqrt{n^2-n}$

9) $i_n = 3n\sin\left(\dfrac{4\pi}{n}\right)$

Exercice 7 Soit (u_n) une suite complexe telle que (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer que (u_n) converge.

Exercice 8 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty, \quad v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \ \text{ et } \ u_{n+1}-u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

1) Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_{n+1}-u_n| \leqslant \varepsilon$. Montrer que, pour tout $a \geqslant u_{n_0}$, il existe $n \geqslant n_0$ tel que $|u_n - a| \leqslant \varepsilon$.

2) En déduire que $\{\, u_n - v_p \mid n,p \in \mathbb{N} \,\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

3) Montrer que l'ensemble $\{\, \cos(\ln n) \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ est dense dans $[-1,1]$.

Exercice 9 On donne $u_0 \in \mathbb{R}$ et l'on pose, quand c'est possible, $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{1-u_n}$.

1) Pour quelles valeurs de u_0 définit-on ainsi une suite (u_n) ?

2) Montrer qu'alors la suite (u_n) est périodique.

Exercice 10 Étudier la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

Exercice 11 Soit $u_0 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3+2u_n}{2+u_n}$.

1) Montrer que la suite (u_n) est bien définie.

2) Résoudre l'équation $f(x) = x$ où $f : x \to \dfrac{3+2x}{2+x}$. On notera α et β ses racines, avec $\beta < \alpha$.

3) On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

4) La suite (u_n) possède-t-elle une limite ?

5) Retrouver tout ceci par les méthodes standard.

Exercice 12 Soient $(x_n), (y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n - y_n}{2}$ et $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$.

En introduisant la suite complexe de terme général $z_n = x_n + iy_n$, montrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent et déterminer leurs limites.

Exercice 13 (⛰) Étudier la suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $|z_0| \leqslant 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{z_n}{2 - z_n}$.

Exercice 14 (🚲) Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}\,,\ v_n < u_{n-1} - u_n$.

2) En déduire que la suite de terme général $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i$ converge et majorer sa limite.

Exercice 15 (🚲) **– Critère spécial des séries alternées ou critère de Leibniz –**

Soit (u_n) une suite de réels décroissante et de limite nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$. Montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et en déduire que (S_n) converge.

Exercice 16 (🚲) Soit la suite (H_n) de terme général $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ et soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = H_n - \ln(n)$ et $w_n = H_n - \ln(n+1)$.

1) Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes (leur limite commune s'appelle la constante d'Euler, notée γ).

2) En déduire la nature de la suite (H_n).

Feuille d'exercice n° 13 : **Groupes, anneaux, corps**

Exercice 1 (✎) Soient G_1 et G_2 deux groupes, dont les lois sont notées multiplicativement. On considère l'ensemble produit $G_1 \times G_2$ sur lequel on considère la loi interne $\otimes$ suivante :

$$\forall((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \in (G_1 \times G_2)^2 \quad (x_1,x_2) \otimes (y_1,y_2) = (x_1y_1, x_2y_2).$$

Montrer que $(G_1 \times G_2, \otimes)$ est un groupe. Quel est son neutre ?

Exercice 2 (✎) – Un peu de sudoku –

1) Soit $(G,*)$ un groupe, $a \in G$. Que peut-on dire de $\varphi_a : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \mapsto & a*x \end{array}$?

2) Montrer qu'il existe une seule table possible pour un groupe d'ordre 3 (c'est-à-dire à trois éléments).

3) Est-ce vrai pour 4 ?

Exercice 3 (✎) Soit $(G,\times)$ un groupe, H et K deux sous-groupes de G, $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes de G.

1) Montrer que $\bigcap\limits_{i\in I} H_i$ est un sous-groupe de G.

2) Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice 4 (🚲) Montrer que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont exactement tous les $n\mathbb{Z}$, avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 Quel est le plus petit sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ contenant 1 ? Contenant 2 ? Même question avec $(\mathbb{R}^*,\times)$.

Exercice 6 On considère A et B deux sous-groupes de $(G,\ *)$ et l'on note :

$$A*B = \{\ x \in G \mid \exists(a,b) \in A \times B,\ x = a*b\ \} = \{\ a*b \mid (a,b) \in A \times B\ \}.$$

Montrer que $A*B$ est un sous-groupe de $(G,\ *)$ si et seulement si $A*B = B*A$.

Indication : pour le sens direct, on commencera par montrer $B*A \subset A*B$.

Exercice 7 (🚲⛷) Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ non réduit à $\{\ 0\ \}$. On pose $\alpha = \inf(\mathbb{R}_+^* \cap G)$

1) Montrer que si $\alpha > 0$, alors $G = \alpha\mathbb{Z} = \{\ k\alpha \mid k \in \mathbb{Z}\ \}$.

2) Montrer que si $\alpha = 0$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour tout réel x et tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in G$ vérifiant $|x-g| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 8 Décrire tous les endomorphismes de groupes de $(\mathbb{Z},+)$. Déterminer ceux qui sont injectifs et ceux qui sont surjectifs.

Exercice 9 (✎) Soit G un groupe noté multiplicativement.
Pour $a \in G$, on note τ_a l'application de G vers G définie par $\tau_a : x \mapsto axa^{-1}$.

1) Soit $a \in G$, montrer que τ_a est un endomorphisme du groupe $(G,\times)$.

2) Vérifier que $\forall a,b \in G$, $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{ab}$

3) Soit $a \in G$, montrer que τ_a est bijective et déterminer son application réciproque.

4) En déduire que $\mathcal{T} = \{\tau_a \mid a \in G\}$ muni du produit de composition est un groupe.

Exercice 10 Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On dit que $x \in A$ est *nilpotent* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$.

1) Montrer que si x est nilpotent alors $1 - x$ est inversible.

2) Montrer que si x et y sont nilpotents et commutent, alors xy et $x + y$ sont nilpotents.

3) Un corps admet-il des éléments nilpotents non nuls ?

Exercice 11 Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Soit a un élément de A. On appelle racine carrée de a dans A, tout élément x de A tel que $x^2 = a$.

1) Montrer que si A est intègre, alors tout élément de A admet au maximum 2 racines carrées.

2) Prenons maintenant $(A, +, \times) = (\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \times)$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 1$. Montrer que f admet une infinité de racines carrées.

Exercice 12 Soit $(A, +, \times)$ un anneau, soit $a \in A$. On appelle *commutant de a* la partie

$$C(a) = \{ \, x \in A \mid ax = xa \, \} .$$

On appelle *centre de A* la partie

$$Z = \{ \, x \in A \mid \forall a \in A, \ ax = xa \, \} .$$

Montrer que $C(a)$ et Z sont deux sous-anneaux de A.

Exercice 13 Soit $(A, +, \times)$ un anneau non nul, on considère

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{Z} & \longrightarrow & A \\ n & \longmapsto & n \cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}} \end{array} \right. .$$

1) Montrer que φ est le seul morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}$ dans A.

2) Dans le cas où φ n'est pas injectif, montrer qu'il existe $c \in \mathbb{N}^*$ unique tel que $\mathrm{Ker}(\varphi) = c\mathbb{Z}$.

On se place dorénavant dans ce dernier cas, c est appelé *caractéristique* de l'anneau A, et A est supposé intègre et commutatif.

3) Montrer que c est un nombre premier.

4) Montrer que $x \mapsto x^c$ est un endomorphisme de l'anneau A.

Feuille d'exercice n° 14 : **Limite d'une fonction**

Exercice 1 (✎) Déterminer les limites des expressions suivantes, en justifiant vos calculs.

1) $\dfrac{x+2}{x^2 \ln x}$ lorsque $x \to 0^+$

2) $2x \ln(x+\sqrt{x})$ lorsque $x \to 0^+$

3) $\dfrac{x^3-2x^2+3}{x \ln x}$ lorsque $x \to +\infty$

4) $\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}+1}}{x+2}$ lorsque $x \to +\infty$

5) $\dfrac{\ln(3x+1)}{2x}$ lorsque $x \to 0$

6) $\dfrac{x^x-1}{\ln(x+1)}$ lorsque $x \to 0^+$

7) $\dfrac{2}{x+1} \ln\Big(\dfrac{x^3+4}{1-x^2}\Big)$ lorsque $x \to -\infty$

8) $(x^2-1)\ln(7x^3+4x^2+3)$ lorsque $x \to (-1)^+$

9) $(x-2)^2 \ln(x^3-8)$ lorsque $x \to 2^+$

10) $\dfrac{x(x^x-1)}{\ln(x+1)}$ lorsque $x \to 0^+$

11) $(x \ln x - x \ln(x+2))$ lorsque $x \to +\infty$

12) $\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{x^2}}{x^2-x}$ lorsque $x \to +\infty$

13) $(1+x)^{\ln x}$ lorsque $x \to 0^+$

14) $\Big(\dfrac{x+1}{x-3}\Big)^x$ lorsque $x \to +\infty$

15) $\Big(\dfrac{x^3+5}{x^2+2}\Big)^{\frac{x+1}{x^2+1}}$ lorsque $x \to +\infty$

16) $\Big(\dfrac{\mathrm{e}^{x}+1}{x+2}\Big)^{\frac{1}{x+1}}$ lorsque $x \to +\infty$

17) $(\ln(1+x))^{\frac{1}{\ln x}}$ lorsque $x \to 0^+$

18) $\dfrac{x^{(x^{x-1})}}{x^{(x^x)}}$ lorsque $x \to +\infty$

19) $\dfrac{(x+1)^x}{x^{x+1}}$ lorsque $x \to +\infty$

20) $\dfrac{x\sqrt{\ln(x^2+1)}}{1+\mathrm{e}^{x-3}}$ lorsque $x \to +\infty$

Exercice 2 Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, étudier la limite en 0 des applications suivantes.

1) $f : x \mapsto \dfrac{x}{a}\left\lfloor \dfrac{b}{x} \right\rfloor$

2) $g : x \mapsto \dfrac{a}{x}\left\lfloor \dfrac{x}{b} \right\rfloor$

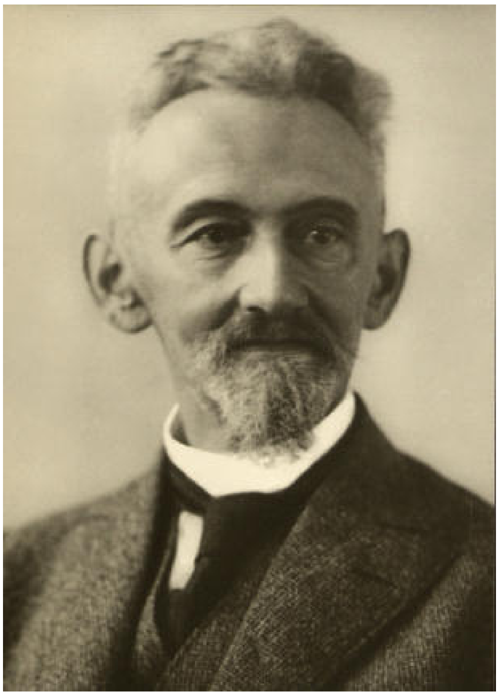
Exercice 3 (✎) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ croissante, telle que $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, où (u_n) est la suite de terme général n. Montrer que $f \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$.

Exercice 4 Montrer, en revenant à la définition de la limite, que $\dfrac{x^2+\sin x}{(x+1)^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

Exercice 5 (✎) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto x^\alpha \ln\left(1+\dfrac{1}{x^\beta}\right)$.

Exercice 6 (✎) Montrer qu'une fonction périodique, non constante, n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice 7 Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que f a une limite finie en $+\infty$, g est périodique et $f + g$ est croissante. Montrer que g est constante.



Feuille d'exercice n° 15 : **Continuité**

Exercice 1 Etudier la continuité des fonctions suivantes.

1) $f : x \mapsto x + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ **2)** $g : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$

Exercice 2 (🚲) Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer s'il est possible de la prolonger par continuité et comment.

1) $f : x \mapsto \sin(x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ **2)** $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)$ **3)** $h : x \mapsto \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$

Exercice 3 – Inverse généralisé d'une fonction –

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application croissante. On définit, pour tout réel x, $F(x) = \sup\{\, y \in \mathbb{R} \mid f(y) \leqslant x \,\}$.

1) Donner l'ensemble de définition de F.

2) On prend pour cette question $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = x^2$, et $f|_{\mathbb{R}_-} = 0$. Déterminer F.

3) On prend pour cette question $f : x \mapsto \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leqslant -1 \\ -2 & \text{si } |x| < 1 \\ 2x-4 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Déterminer F, étudier sa continuité, continuité à droite, à gauche.
Que peut-on dire de $f \circ F$ et de $F \circ f$?

4) Que peut-on dire si f est bijective ?

Exercice 4 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ 1/x & \text{si } x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

2) **a)** En revenant à la définition de continuité, montrer que f est continue en 1 et en -1.

b) Soient $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Donner, en la justifiant, la valeur des quantités suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

i) $f\left(a + \dfrac{1}{n}\right)$ **ii)** $f\left(a + \dfrac{\sqrt{2}}{n}\right)$ **iii)** $f\left(b + \dfrac{1}{n}\right)$ **iv)** $f\left(\dfrac{\lfloor 10^n b \rfloor}{10^n}\right)$

c) Que dire de la continuité de f en $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$?

3) À quoi ressemblerait la courbe représentative de f, vue par un myope ?

Exercice 5 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in I, f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 6 Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$, soit f,g définies et continues sur $[a;b]$ telles que

$$\forall x\in[a;b],\ 0<g(x)<f(x).$$

Montrer que

$$\exists\lambda\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall x\in[a;b],\ (1+\lambda)g(x)<f(x).$$

Exercice 7 Trouver toutes les fonctions vérifiant $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes.

1) La fonction f est continue en 0 et $\forall x\in\mathbb{R},\ f(2x)=f(x)\cos x$.

2) La fonction f est continue et $\forall x\in\mathbb{R},\ f(2x+1)=f(x)$

Exercice 8 Montrer qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue, périodique et non constante possède une plus petite période (strictement positive).

Exercice 9 **– Fonctions contractantes –**

Soit $a,b\in\mathbb{R}$ avec $a<b$. Soit $f:[a,b]\to[a,b]$ telle que, pour tout $x,x'\in[a,b]$ avec $x\neq x'$, on a :

$$|f(x)-f(x')|<|x-x'|.$$

1) Montrer que f est continue sur $[a,b]$.

2) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution dans $[a,b]$.

Exercice 10

Soit P un polynôme de degré impair et à coefficients réels. Montrer que P possède une racine réelle.

Exercice 11 Soit $a,b\in\mathbb{R}$, avec $a<b$. Soit $f,\ g\in\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$. On suppose que

$$\forall x\in[a,b],\ \exists x'\in[a,b],\ f(x)=g(x').$$

On veut montrer que

$$\exists c\in[a,b],\ f(c)=g(c).$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que, pour tout $x\in[a,b]$, $f(x)\neq g(x)$.

1) Montrer qu'alors $f-g$ est de signe constant et ne s'annule pas.

2) On supppose que $f-g>0$.

- **a)** Montrer que f et g possèdent chacune un maximum sur $[a,b]$. On les notera M_f et M_g.
- **b)** Montrer que $M_g\geqslant M_f$ et conclure.

3) Retrouver le résultat si $f-g<0$.

Exercice 12 Soit $a,b\in\mathbb{R}$ avec $a<b$, soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)=f(b)$.

1) Montrer que la fonction $g:t\mapsto f\left(t+\dfrac{b-a}{2}\right)-f(t)$ s'annule en au moins un point de $\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$.

2) Application : une personne parcourt 4 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

Exercice 13 **– TVI à l'infini –**

Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ continue, ayant une limite $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$. Montrer que f prend toute valeur comprise entre $f(0)$ et ℓ (ℓ exclu).

Exercice 14 Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit f et g deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $[a, b]$, telles que

$$\forall x \in [a, b],\ f \circ g(x) = g \circ f(x)\ .$$

On pose $E = \{\, x \in [a, b] \mid f(x) = x \,\}$.

1) Montrer que E a une borne inférieure et une borne supérieure. On notera $\alpha = \inf E$ et $\beta = \sup E$.

2) Montrer qu'il existe une suite (α_n) d'éléments de E telle que $\alpha_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$. On montrerait de même qu'il existe une suite (β_n) d'éléments de E telle que $\beta_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \beta$.

3) Montrer que α et β sont dans E.

4) Montrer que $g(\alpha)$ et $g(\beta)$ sont dans E.

5) Établir que $\exists x_0 \in [a, b],\ f(x_0) = g(x_0)$ (on pourra considérer la fonction $h = g - f$).

Feuille d'exercice n° 16 : **Polynômes**

Exercice 1 Résoudre les équations suivantes.

1) $Q^2 = XP^2$, d'inconnues $P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

2) $P \circ P = P$, d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice 2 Résoudre en $P \in \mathbb{C}[X]$ l'équation $P \circ (X^2) = (X^2+1)P(X)$.

Exercice 3 Soient $a, b \in \mathbb{K}$, avec $a \neq b$, soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Exprimer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$, en fonction de $P(a)$ et $P(b)$.

Exercice 4 Dans $\mathbb{C}[X]$, effectuer les divisions euclidiennes suivantes.

1) $X^2 - 3iX - 5(1+i)$ par $X - 1 + i$

2) $4X^3 + X^2$ par $X + 1 + i$

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur n pour que $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + X^n + 1$.

Exercice 6 Décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^6 + 1$ en produit de facteurs irréductibles.

Exercice 7 Trouver le(s) polynôme(s) A de degré 4 tel(s) que : $X^2 + 1 | A$ et $X^3 + 1 | A - 1$.

Exercice 8 Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ vérifie $P(X^2) = P(X)P(X+1)$ ses racines sont parmi $0, 1, -j, -j^2$. En déduire tous les polynômes solution de cette équation.

Exercice 9 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe $S, T \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P = S^2 + T^2$. *Indications :*

1) Montrer que les racines réelles de P sont de multiplicité paire.

2) Pour $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, écrire $(X-\alpha)(X-\bar{\alpha})$ comme somme de deux carrés de polynômes.

Exercice 10 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $X^n + X + 1$ par le polynôme $(X-1)^2$.

Exercice 11 Résoudre les équations suivantes.

1) $(P')^2 = 4P$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.

2) $(X^2+1)P'' - 6P = 0$ d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice 12 Résoudre le système $\left\{\begin{array}{lcl} a^2+b^2+c^2 & = & 14 \\ a+b+c & = & 2 \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} & = & \dfrac{5}{6} \end{array}\right.$.

Exercice 13 Déterminer le PGCD de chacun des couples de polynômes suivants.

1) $X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$ et $X^4 + 2X^3 + X + 2$

2) $X^4 + X^3 - 3X^2 - 4X - 1$ et $X^3 + X^2 - X - 1$

3) $X^5 + 5X^4 + 9X^3 + 7X^2 + 5X + 3$ et $X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$

Exercice 14 () Calculer un couple de Bézout pour chacun des couples de polynômes suivants.

1) $X^5 - X^4 + 2X^3 - X^2 + X - 2$ et $X^4 - 2X^3 - X + 2$

2) $X^4 + 2X^3 - X - 2$ et $X^5 + X^4 - 3X^3 + X^2 + 4X - 4$

Exercice 15 () Soient P, Q deux polynômes premiers entre eux.

1) Montrer qu'alors P^n et Q^m sont premiers entre eux, où n, m sont deux entiers positifs.

2) Montrer de même que $P + Q$ et PQ sont premiers entre eux.

Exercice 16 Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, non constant. Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que quel que soit l'entier naturel q, $P^b - 1$ divise $P^{bq} - 1$.

2) En déduire que le reste de la division de $P^a - 1$ par $P^b - 1$ est $P^r - 1$ où r est le reste de la division dans $\mathbb{N}$ de a par b.

3) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le pgcd de $P^a - 1$ et $P^b - 1$.

4) Retrouver ce résultat en utilisant le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

5) Application : trouver le pgcd de $X^{5400} - 1$ et $X^{1920} - 1$, et déterminer $\mathbb{U}_{5400} \cap \mathbb{U}_{1920}$.

Exercice 17 Les polynômes complexes $P = X^{2025} + X + 1$ et $Q = X^5 + X + 1$ sont-ils premiers entre eux ?

Exercice 18 () Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer qu'il existe deux polynômes U, V, vérifiant $(1 - X)^n U + X^n V = 1 \quad (\star)$.

2) Déterminer deux polynômes U_1, V_1 de degré strictement inférieur à n, satisfaisant $(\star)$.
Indication : On pourra utiliser la formule du binôme de Newton.

3) En déduire tous les polynômes U, V vérifiant $(\star)$.

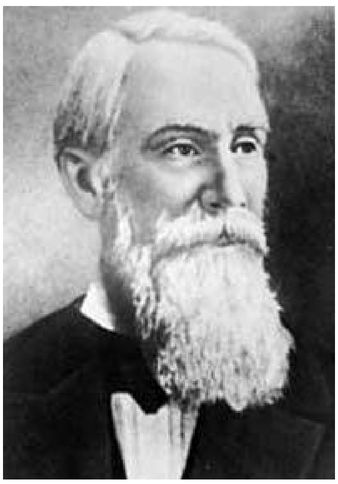
4) Montrer que U_1 et V_1 sont les seuls polynômes de degré strictement inférieur à n satisfaisant $(\star)$.

5) Déterminer les coefficients de U_1 et de V_1.

Exercice 19

1) Déterminer les polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, premiers entre eux et à coefficients entiers, tels que $P^2 + Q^2 = (X^2 + 1)^2$.

2) En déduire que l'équation $x^2 + y^2 = z^2$ a une infinité de solutions (non proportionnelles) dans $\mathbb{Z}$.



Feuille d'exercice n° 17 : **Dérivation**

Exercice 1 – **Limite double** –

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0, soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable en 0 et $f'(0) = \ell$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall (h,k) \in]0,\delta[^2, \qquad \left| \frac{f(h) - f(-k)}{h+k} - \ell \right| \leq \varepsilon.$$

Exercice 2 Soit f l'application : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$.

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la fonction dérivée d'ordre n des fonctions suivantes.

1) $f : x \mapsto \sin x$ **2)** $g : x \mapsto \sin^2 x$ **3)** $h : x \mapsto \sin^3 x + \cos^3 x$

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée n^{e} de chacune des fonctions suivantes.

1) $f : x \mapsto x^2 \mathrm{e}^x$ **2)** $g : x \mapsto x^2(1+x)^n$ **3)** $h : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}$ **4)** $\varphi : x \mapsto x^{n-1} \ln x$

Exercice 5 Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \; f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 6 Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que par tout point $(x_0, 0)$ avec $x_0 \in \mathbb{R} \backslash [a,b]$, il passe au moins une tangente à la courbe représentative de f.

Exercice 7 Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ sinon}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 8 – **Rolle à l'infini** –

Soit $a \in \mathbb{R}$, f une fonction continue et dérivable sur l'intervalle $[a, +\infty[$, vérifiant $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} f(a)$.

Montrer qu'il existe un élément c dans $]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 9 Soit $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a) > 0$ et $f'(b) > 0$.

Montrer qu'il existe $c_1, c_2, c_3 \in]a,b[$ tels que $c_1 < c_2 < c_3$ et $f'(c_1) = f(c_2) = f'(c_3) = 0$.

Exercice 10 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples, de degré supérieur ou égal à 2.

1) Montrer que P' est aussi scindé à racines simples réelles.

2) Montrer que le polynôme $P^2 + 1$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

Exercice 11 **– Polynômes de Legendre –**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f : t \mapsto (t^2 - 1)^n$.

1) Montrer que : $\forall\, k \in \{0, \dots, n-1\},\ f^{(k)}(1) = f^{(k)}(-1) = 0$.

2) Calculer $f^{(n)}(1)$ et $f^{(n)}(-1)$.

3) Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins n fois dans l'intervalle $]-1, 1[$.

Exercice 12 Étant donné α dans $]0, 1[$, montrer que pour tout entier naturel n non nul

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leqslant (n+1)^\alpha - n^\alpha \leqslant \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire la limite de la suite de terme général $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^\alpha}$.

Exercice 13 **– Distance à la corde –**

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$.

1) On suppose que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $c \in\,]a, b[$. Montrer qu'il existe $d \in\,]a, b[$ tel que :

$$f(c) = -\frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$

Indication : considérer $g : t \mapsto f(t) + \lambda(t-a)(b-t)$ où λ est choisi de sorte que $g(c) = 0$.

2) On traite maintenant le cas général. Soit $c \in\,]a, b[$, montrer qu'il existe $d \in\,]a, b[$ tel que :

$$f(c) = \frac{b-c}{b-a} f(a) + \frac{c-a}{b-a} f(b) - \frac{(c-a)(b-c)}{2} f''(d).$$

Exercice 14 Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$.

Exercice 15

1) Montrer que si une fonction f est lipschitzienne sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, alors, $|f|$ l'est aussi.

2) Montrer que la réciproque est fausse.

3) Montrer que la somme de deux fonctions lipschitziennes sur I est lipschitzienne sur I.

Exercice 16 La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est-elle lipschitzienne sur $]0, +\infty[$? sur $[1, +\infty[$?

Exercice 17 On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par : $u_0 \in [-1, +\infty[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

1) Montrer que cette suite ne possède qu'une seule limite finie éventuelle α que l'on calculera.

2) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}} |u_n - \alpha|$. En déduire la convergence de la suite (u_n).

Exercice 18 On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n} + \ln(u_n)$.

1) Montrer que l'équation $x = \dfrac{2}{x} + \ln(x)$ possède une unique solution réelle L.

2) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$ puis, que pour tout $n \geqslant 0$, $|u_n - L| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{9}\right)^n$. Conclure.

Exercice 19 (✎) Soit $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que pour

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geqslant ab.$$

Exercice 20 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

1) Montrer que si f est convexe et majorée, alors f est constante.

2) Est-ce toujours le cas si f est définie sur $[A, +\infty[$, où $A \in \mathbb{R}$?

3) Montrer que si f est deux fois dérivable, bornée et non constante, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $f''(a)f''(b) < 0$.

Exercice 21 (⛰) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

1) Montrer par récurrence que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et k entier compris entre 0 et 2^n, on a : $f\left(\dfrac{k}{2^n}x + \left(1 - \dfrac{k}{2^n}\right)y\right) \leqslant \dfrac{k}{2^n}f(x) + \left(1 - \dfrac{k}{2^n}\right)f(y)$.

2) Montrer que tout réel est limite d'une suite de rationnels de la forme $\dfrac{q}{2^n}$, $q \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, et en déduire que f est convexe.

Feuille d'exercice n° 18 : **Fractions rationnelles**

Exercice 1 Donner une CNS sur $f \in \mathbb{C}(X)$ pour qu'il existe $g \in \mathbb{C}(X)$ tel que $f = g'$.

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{X^n - 1}$ est

$$\frac{1}{X^n-1} = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega}{X - \omega}.$$

Exercice 3 ( ) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et $p \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. On pose pour $k \in \{0, 1, \dots n-1\}$, $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$. Mettre sous forme irréductible $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^p}{X - \omega_k}$.

Exercice 4 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme scindé à racines simples notées $x_1, \dots, x_n$.

1) Former la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P''}{P}$.

2) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0$.

Exercice 5 ( ) Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes.

1) $\dfrac{X^3 - 3X^2 + X - 4}{X - 1}$

2) $\dfrac{X}{X^2 - 4}$

3) $\dfrac{(3-2i)X - 5 + 3i}{X^2 + iX + 2}$

4) $\dfrac{X}{(X+i)^2}$

5) $\dfrac{X^5 + X + 1}{X^4 - 1}$

6) $\dfrac{X^5 + X^4 + 1}{(X-1)^3(X+1)^2}$

7) $\dfrac{X^5 + X + 1}{X^6 - 1}$

8) $\dfrac{X}{(X^2+1)(X^2+4)}$

9) $\dfrac{X^7 + 3}{(X^2 + X + 2)^3}$

Indication : pour la dernière fraction, on pourra procéder par divisions euclidiennes successives.

Exercice 6 ( ) Calculer une primitive pour chacune des fonctions rationnelles suivantes.

1) $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{1 - t^2}$

2) $\displaystyle\int^x \frac{t}{t^4 + 16}\,\mathrm{d}t$

3) $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t^3 - 7t + 6}$

4) $\displaystyle\int^x \frac{4t^2}{t^4 - 1}\,\mathrm{d}t$

5) $\displaystyle\int^x \frac{t^3 + 2t + 1}{t^3 - 3t + 2}\,\mathrm{d}t$

6) $\displaystyle\int^x \frac{-2t^2 + 6t + 7}{t^4 + 5t^2 + 4}\,\mathrm{d}t$

Exercice 7

1) Montrer, que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que

$$X^n + \frac{1}{X^n} = P_n\left(X + \frac{1}{X}\right).$$

On factorisera P_n dans $\mathbb{C}[X]$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, décomposer $\dfrac{1}{P_n}$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 8 *Définition* : le barycentre des points $z_1, \ldots, z_m$ affectés des poids $p_1, \ldots, p_m$, si $\sum_{i=1}^{m} p_i \neq 0$, est le point

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{m} p_i} \sum_{i=1}^{m} p_i z_i.$$

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Décomposer $\dfrac{P'}{P}$ en éléments simples.

2) En déduire que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P c'est-à-dire que toute racine de P' s'écrit comme barycentre à poids positifs des racines de P.

Feuille d'exercice n° 19 : **Espaces vectoriels**

Exercice 1 ( ) Dire si les objets suivants sont des espaces vectoriels.

1) L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et vérifiant $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

2) L'ensemble des fonctions réelles impaires, définies sur $\mathbb{R}$.

3) L'ensemble des fonctions f définies sur $[a, b]$, continues et vérifiant $f(a) = 7f(b) + \displaystyle\int_a^b t^3 f(t)\,\mathrm{d}t$.

4) L'ensemble des fonctions f de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant $f'' + \omega^2 f = 0$.

5) L'ensemble des primitives de la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^{\,x}$ sur $\mathbb{R}$.

6) L'ensemble des nombres complexes d'argument $\pi/4 + k\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

7) L'ensemble des points (x, y) de $\mathbb{R}^2$, vérifiant $\sin(x + y) = 0$.

8) L'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ orthogonaux au vecteur $(-1, 3, -2)$.

Exercice 2 ( ) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On pose $F = E^2$. Pour tout couple $((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ d'éléments de F, on pose $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, et tout $(x, y) \in F$, on note $\lambda \cdot (x, y) = (ax - by, bx + ay)$, où $a = \operatorname{Re}\lambda$ et $b = \operatorname{Im}\lambda$.

Montrer que $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (appelé le complexifié du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E).

Exercice 3 ( )

1) Soit les vecteurs $v_1 = (1 - i, i)$, $v_2 = (2, -1 + i)$ et $v_3 = (1 + i, i)$. Le vecteur v_1 est-il combinaison linéaire de v_2 et v_3 dans $\mathbb{C}^2$, considéré comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel ? comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?

2) Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $x \mapsto \sin(3x)$ est-elle combinaison linéaire des deux fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \sin(2x)$? Généraliser.

Exercice 4 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que $F \cup G = F + G \Leftrightarrow F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 5 ( ) Soit

$$F = \left\{ f \in \mathscr{C}([-1, 1], \mathbb{C}) \mid \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$

$$\text{et } G = \{ f \in \mathscr{C}([-1, 1], \mathbb{C}) \mid f \text{ constante} \}.$$

Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{C}([-1, 1], \mathbb{C})$.

Exercice 6 ( ) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère F d'équation $x - 2y + z + t = 0$, G d'équation $2x - y + 3t = 0$ et

$$H = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

F et G sont-ils des sous-espaces vectoriels supplémentaires ? Même question pour F et H, puis pour G et H.

Exercice 7 ( ) Soit $F = \{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) + f(1) = 0 \}$.

1) Montrer que F est un espace vectoriel.

2) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 8 Soient F, G, F', G' des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, tels que $F \cap G = F' \cap G'$.

Montrer que $(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F$.

Exercice 9 Soit $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$ deux sous-espaces affines **disjoints** d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On note V et W leurs directions respectives. Soit $a \in \mathscr{V}$ et $b \in \mathscr{W}$. On pose $U = V + W$, $\mathscr{V}' = a + U$ et $\mathscr{W}' = b + U$. Montrer que $\mathscr{V}'$ et $\mathscr{W}'$ sont deux sous-espaces affines disjoints, de même direction et contenant respectivement $\mathscr{V}$ et $\mathscr{W}$.

Feuille d'exercice n° 20 : **Analyse asymptotique**

Exercice 1 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Parmi les affirmations suivantes, dites lesquelles sont vraies (on les démontrera alors) et lesquelles sont fausses (on donnera un contre-exemple).

1) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $v_n = O(u_n)$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $v_n = O(u_n)$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et $v_n = O(u_n)$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

4) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $v_n = o(u_n)$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $v_n \sim u_n$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

6) Si $v_n \sim u_n$, alors $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

7) Si $v_n \sim u_n$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

8) Si $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $v_n \sim u_n$.

Exercice 2 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles de limite $+\infty$ telles que $u_n = o(v_n)$. Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $+\infty$ telle que $u_n = o(w_n)$ et $w_n = o(v_n)$.

Exercice 3 Donner un exemple de suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n = O(v_n)$ mais qu'on n'ait ni $u_n = o(v_n)$, ni $v_n = O(u_n)$.

Exercice 4 **– Encadrement et équivalents –**

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites ne s'annulant pas. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et que $u_n \sim w_n$. Que peut-on dire de (v_n) ?

Exercice 5 Trouver un équivalent simple des suites de termes généraux suivants.

1) $\ln\cos\dfrac{\pi}{n} + \tan \operatorname{sh}\dfrac{1}{n}$

2) $\ln\cos\dfrac{\pi}{n} + \mathrm{e}^{\tan(\pi/n^2)} - 1$

3) $3 + \mathrm{e}^{1/n} - \dfrac{6}{n}$

4) $\sqrt{1+\mathrm{e}^{-n}} - \cos \mathrm{e}^{-n}$

5) $\sqrt{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$

6) $\ln(n+1) - \ln(n+2)$

7) $\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+5} - \dfrac{4}{n^2}$

8) $(n + \ln n)\mathrm{e}^{-n+1}$

9) $\mathrm{e}^{\sin\frac{\pi}{n}} - \sin\left(\sin\dfrac{\pi}{2n}\right)$

10) $\ln\dfrac{1+\operatorname{ch}\frac{1}{n}}{2}$

11) $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-n}}} - \mathrm{e}$

Exercice 6 Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \underset{n\to+\infty}{\sim} n\,!$

Exercice 7 Déterminer un équivalent de la suite de terme général $u_n = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 8 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $u_{n+1} = \ln(n + u_n)$.

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ possède une limite et la déterminer.

2) **a)** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\ln x \leqslant x$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $u_n \leqslant \ln(2n)$.

c) Montrer que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

d) Montrer que : $u_n - \ln n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.

Exercice 9

1) Montrer que l'équation $\ln x + x = k$ admet une unique solution x_k, quel que soit $k \in \mathbb{N}$. On définit ainsi une suite réelle $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

2) Montrer que l'on peut écrire : $x_k = ak + b\ln k + c\dfrac{\ln k}{k} + o\left(\dfrac{\ln k}{k}\right)$, où a, b et c sont des constantes que l'on déterminera.

Exercice 10 Soit f et g deux fonctions définies au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$. À quelle condition sur f et g a-t-on $\mathrm{e}^f \underset{a}{\sim} \mathrm{e}^g$?

Exercice 11 Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On suppose que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, et que ces fonctions admettent une limite commune notée $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

1) On suppose dans cette question que f et g sont à valeurs strictement positives.

- **a)** Montrer que si, $\ell \neq 1$, alors $\ln(f(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(g(x))$.
- **b)** Que pouvez-vous dire lorsque $\ell = 1$?

2) Parmi les équivalents suivants, lesquels sont systématiquement vrais ? (on pourra discuter selon les valeurs de ℓ).

- **a)** $\mathrm{Arctan}(f(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{Arctan}(g(x))$
- **b)** $\sin(f(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sin(g(x))$

Exercice 12 Soit f, g, f_1 et g_1 des fonctions définies au voisinage d'un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que si $f \underset{a}{\sim} f_1$ et $g \underset{a}{\sim} g_1$ avec $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$, alors $f + g \underset{a}{\sim} g_1$

Exercice 13 Étudier en $+\infty$ et $-\infty$ la fonction $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^3+1} + \sqrt{x^2+x+1}$.

Exercice 14 Soit $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a \neq b$. Déterminer les limites des expressions suivantes.

1) $\dfrac{\sin(x\ln(1+x^2))}{x\tan x}$, lorsque $x \to 0$

2) $\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)}$, lorsque $x \to 0$

3) $(\ln(\mathrm{e}+x))^{\frac{1}{x}}$, lorsque $x \to 0$

4) $(\ln(1+\mathrm{e}^{-x}))^{\frac{1}{x}}$, lorsque $x \to +\infty$

5) $\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$, lorsque $x \to +\infty$

6) $\dfrac{\tan(ax)-\sin(ax)}{\tan(bx)-\sin(bx)}$, lorsque $x \to 0$

7) $\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\tan(x+\frac{\pi}{4})$, lorsque $x \to \dfrac{\pi}{4}$

8) $\dfrac{\cos(x)-\sin(x)}{(4x-\pi)\tan(x)}$, lorsque $x \to \dfrac{\pi}{4}$

9) $x^{\frac{1}{1+2\ln(x)}}$, lorsque $x \to 0$

10) $(2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$, lorsque $x \to \dfrac{1}{2}$

11) $\dfrac{(\sin(x))^{\sin(x)}-1}{(\tan(x))^{\tan(x)}-1}$, lorsque $x \to 0^+$

Déterminer les équivalents des expressions suivantes.

12) $\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2}$, en $+\infty$

13) $\dfrac{\tan(x - x\cos(x))}{\sin(x)+\cos(x)-1}$, en 0

14) $(\tan(2x)+\tan(x+\frac{\pi}{4}))\,(\cos(x+\frac{\pi}{4}))^2$, en $\dfrac{\pi}{4}$

15) $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sin(\frac{1}{x})}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$, en $+\infty$

Exercice 15 ( ) Déterminer l'existence et la valeur des limites des expressions suivantes.

1) $\dfrac{x^x - 1}{\ln x}$, lorsque $x \to 1$

2) $\left(\dfrac{x^2}{\ln(\cos x)} + \dfrac{2}{x^2}\sin^2 x\right)$, lorsque $x \to 0$

3) $\dfrac{\ln(\sin^2 x)}{\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)^2}$, lorsque $x \to \dfrac{\pi}{4}$

4) $\dfrac{\ln(\sin^2 x)}{\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)^2}$, lorsque $x \to \dfrac{\pi}{2}$

5) $\sin\dfrac{1}{x}\tan\left(\dfrac{2\pi x}{4x+3}\right)$, lorsque $x \to +\infty$

6) $\ln x \tan(\ln(1+x))$, lorsque $x \to 0^+$

7) $(\ln x)^{\tan\frac{\pi x}{2\mathrm{e}}}$, lorsque $x \to \mathrm{e}$

Exercice 16

1) À quels ordres $x \mapsto \sqrt{x}$ admet-elle un développement limité en 0 ?

2) À quels ordres $x \mapsto x^2 + x^{\frac{13}{3}}$ admet-elle un développement limité en 0 ?

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. $x \mapsto |x|^n$ admet-elle un développement limité d'ordre n en 0 ?

Exercice 17 ( ) Donner le développement limité en 0 des fonctions suivantes.

1) $x \mapsto \tan(x)$ (à l'ordre 5).

2) $x \mapsto \ln(\cos(x))$ (à l'ordre 6).

3) $x \mapsto \sin(\tan(x))$ (à l'ordre 5).

4) $x \mapsto (\ln(1+x))^2$ (à l'ordre 4).

5) $x \mapsto \exp(\sin(x))$ (à l'ordre 3).

6) $x \mapsto \sin^6(x)$ (à l'ordre 9.)

Exercice 18 ( ) Former le développement asymptotique en $+\infty$ de l'expression considérée, à la précision demandée.

1) $\sqrt{x+1}$ à la précision $\dfrac{1}{x^{3/2}}$

2) $x\ln(x+1) - (x+1)\ln x$ à la précision $\dfrac{1}{x^2}$

3) $\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^x$ à la précision $\dfrac{1}{x^2}$

4) $\operatorname{Arctan} x$ à la précision $\dfrac{1}{x^3}$

Exercice 19 ( ) Faire un développement limité ou asymptotique en a à l'ordre n des expressions suivantes.

1) $\dfrac{\arctan x - x}{\sin x - x}$, pour $n = 2$ et $a = 0$

2) $\ln(\sin x)$, pour $n = 3$ et $a = \frac{\pi}{4}$

3) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$, pour $n = 3$ et $a = 0$

4) $x(\sqrt{x^2 + \sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2})$, pour $n = 2$ et $a = +\infty$

Exercice 20

1) Démontrer que tan et tan′ admettent un développement limité en 0 à tout ordre. Expliquer comment obtenir le développement limité de tan à partir de celui de tan′.

2) En exploitant la relation $\tan' = 1 + \tan^2$, donner le développement limité de tan en 0 à l'ordre 7.

Exercice 21 ( )

1) Donner le développement limité de $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ en 0 à l'ordre 4.

2) Sur le même modèle, donner un développement limité de $x \mapsto \displaystyle\int_x^{\frac{1}{x}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ en 1 à l'ordre 3.

Exercice 22 (✎) Calculer les développements asymptotiques suivants.

1) $\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2}$, en $+\infty$ à 2 termes **2)** $\ln\left(\sqrt{1+x}\right)$, en $+\infty$ à 2 termes

Exercice 23 (✎) Déterminer les DL des expressions suivantes, à l'ordre 4 et en 0.

1) $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+x}}$ **3)** $\dfrac{\ln(1+x)}{\cos x}$ **5)** $\dfrac{\sin(x/2)}{\mathrm{e}^{2x}}$

2) $\dfrac{\sqrt{1+x}}{\cos x}$ **4)** $\dfrac{1+\cos x}{2+\sin x}$ **6)** $\dfrac{\ln(1+x)}{2-\cos x}$

Effectuer les DL des expressions suivantes, à l'ordre 4.

7) $\dfrac{\sin(2x-\pi/4)}{\cos x}$, en π **8)** $\dfrac{\mathrm{e}^{x-1}}{\ln x}$, en 1

Effectuer le DL de l'expression suivante.

9) $\dfrac{\cos(x-1)}{\ln(1+x)}$, à l'ordre 2 et en 1.

Exercice 24 Calculer les limites des expressions suivantes, lorsqu'elles existent.

1) $(\tan x)^{\tan 2x}$ en $\dfrac{\pi}{4}$

2) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}$ en 0

3) $\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$ en 0

4) $\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}$ en 1

5) $\dfrac{1}{\sin^4 x}\left(\sin\dfrac{x}{1-x}-\dfrac{\sin x}{1-\sin x}\right)$ en 0

6) $\dfrac{(1+x)^{\frac{\ln x}{x}}-x}{x(x^x-1)}$ en 0

Exercice 25 (✎) Soit $f : x \mapsto (\cos x)^{\frac{1}{x}}$, définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$.
Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et étudier la dérivabilité du prolongement de f.

Exercice 26 (✎) Soient u, v, f définies par :

$$u : x \mapsto (x^3-2x^2+1)^{\frac{1}{3}}, \quad v : x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}, \quad f : x \mapsto u(x)-v(x).$$

1) Donner l'équation d'une droite asymptote au graphe de f en $-\infty$ et positionner f par rapport à cette asymptote.

2) Même étude en $+\infty$.

Exercice 27 (✎) Soit $g : x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{(\sin x)^3}-\dfrac{1}{x^2}$.

1) Donner le domaine de définition de g.

2) Montrer qu'elle se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable.

3) Déterminer la tangente en 0 au graphe de cette fonction et la position de ce graphe par rapport à celle-ci.

Exercice 28 (✎) Étudier la position du graphe de l'application $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ par rapport à sa tangente en 0 et 1.

Exercice 29 Étudier les branches infinies des fonctions suivantes.

1) $f : x \mapsto x^2 \operatorname{Arctan}(1+x^2)$ **2)** $g : x \mapsto x\sqrt{\dfrac{x-1}{3x+1}}$

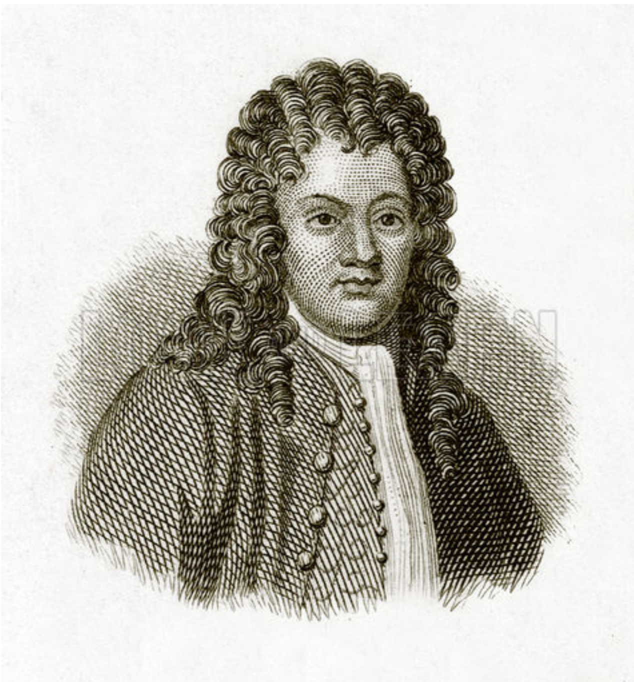
Exercice 30 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la limite en 0 de

$$h \mapsto \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

Exercice 31 Soient a et b deux réels distincts et $F(X) = \dfrac{1}{(X-a)^n(X-b)^n}$. En utilisant la formule de Taylor en a pour $f : x \mapsto (x-a)^n F(x)$, décomposer F sur $\mathbb{R}$.

Exercice 32 Donner les natures des séries de terme général (u_n) suivantes (*i.e.* de $\left(\sum_{n=1}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$).

1) $u_n = \operatorname{th}\dfrac{1}{n} + \ln\dfrac{n^2-n}{n^2+1}$ **2)** $u_n = \dfrac{n^n}{n!\mathrm{e}^n}$ **3)** $u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$



Feuille d'exercice n° 21 : **Familles de vecteurs et espaces de dimension finie**

Exercice 1 ( ) Dans $\mathbb{R}^4$, comparer (*i.e.* dire s'ils sont égaux ou si l'un est inclus dans l'autre) les sous-espaces F et G suivants :

$$\begin{aligned} F &= \operatorname{Vect}\{(1,0,1,1),(-1,-2,3,-1),(-5,-3,1,-5)\} \ ; \\ G &= \operatorname{Vect}\{(-1,-1,1,-1),(4,1,2,4)\}. \end{aligned}$$

Exercice 2 ( ) Dans $\mathbb{R}^4$ on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1,x_2,x_3,x_4) vérifiant $x_1+x_2+x_3+x_4=0$. L'ensemble E est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Le cas échéant, en donner une famille génératrice.

Exercice 3 ( ) Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les familles de vecteurs suivantes.

1) $v_1=(1,1,1,1)$, $v_2=(0,1,2,-1)$, $v_3=(1,0,-2,3)$, $v_4=(2,1,0,-1)$, $v_5=(4,3,2,1)$.

2) $v_1=(1,2,3,4)$, $v_2=(0,1,2,-1)$, $v_3=(3,4,5,16)$.

3) $v_1=(1,2,3,4)$, $v_2=(0,1,2,-1)$, $v_3=(2,1,0,11)$, $v_4=(3,4,5,14)$.

Ces vecteurs forment-ils :

1) Une famille libre ? Si c'est le cas, la compléter pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$. Si non donner des relations de dépendance entre eux et extraire de cette famille une base du sous-espace vectoriel engendré par celle-ci.

2) Une famille génératrice ? Si c'est le cas, en extraire au moins une base de l'espace. Si non, donner la dimension du sous-espace qu'ils engendrent.

Exercice 4 ( ) Soit dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1=(1,1,0)$, $v_2=(4,1,4)$ et $v_3=(2,-1,4)$.

1) Montrer que v_1 et v_2 ne sont pas colinéaires. Faire de même avec v_1 et v_3, puis avec v_2 et v_3.

2) La famille (v_1,v_2,v_3) est-elle libre ?

Exercice 5 Soit A et B deux parties d'un espace vectoriel E. Comparer $\operatorname{Vect}(A\cap B)$ et $\operatorname{Vect} A\cap \operatorname{Vect} B$.

Exercice 6 Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout entier $k\in\mathbb{N}$, on pose $f_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^k$.

1) Montrer que la famille $(f_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2) Est-ce toujours le cas pour la famille $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$?

Exercice 7 ( ) Définir par leurs équations cartésiennes dans la base canonique les sous-espaces vectoriels :

1) F engendré par : $\{(3,1,2);(2,1,3)\}$ dans $\mathbb{R}^3$;

2) G engendré par : $(1,2,3)$ dans $\mathbb{R}^3$;

3) H engendré par $\{(1,2,3,0);(4,-1,2,0);(2,1,-3,0)\}$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 8 ( ) Soit $n\in\mathbb{N}$, soit $a\in\mathbb{R}$.

1) Montrer que la famille $((X-a)^i)_{0\leqslant i\leqslant n}$, est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

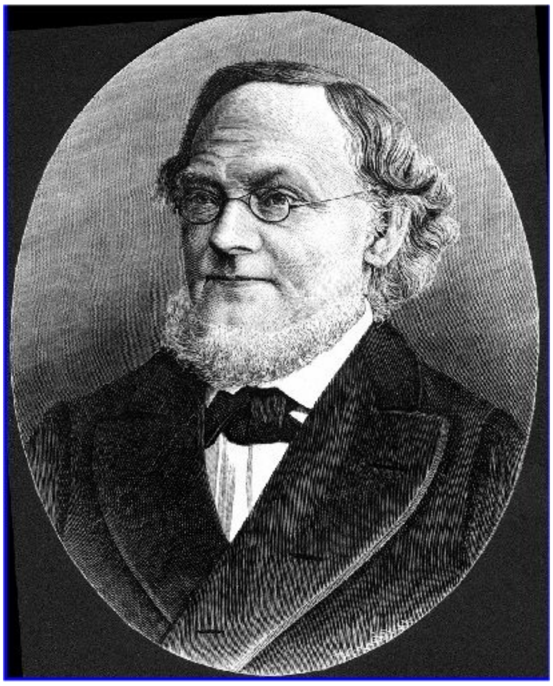
2) Donner les coordonnées de $P\in\mathbb{R}_n[X]$ dans cette base.

Exercice 9 (✎) Dans $\mathbb{R}_3[X]$, soit $P = X^3 + 2X - 1$ et $Q = 2X - 1$. Déterminer une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ dont P et Q sont éléments.

Exercice 10 (✎) Soit $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, -1), \mathbf{v}_2 = (2, 1, 0, 1), \mathbf{v}_3 = (1, -1, 1, -1), \mathbf{v}_4 = (7, 2, 0, -1)$ et $\mathbf{v}_5 = (-2, 1, 0, 5)$.

1) Donner une base du sous-espace vectoriel (de $\mathbb{R}^4$) $F = \mathrm{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5)$.

2) Déterminer un supplémentaire G de F dans $\mathbb{R}^4$.



Feuille d'exercice n° 22 : **Intégration**

Exercice 1 Montrer que la composée de deux fonctions uniformément continues est uniformément continue.

Exercice 2 Montrer que $x \mapsto \ln x$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 3 Montrer que $\sqrt{\cdot}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue telle que $f(n) \underset{\substack{n \to +\infty \\ n \in \mathbb{N}}}{\longrightarrow} +\infty$.

Montrer que $f(x) \underset{\substack{x \to +\infty \\ x \in \mathbb{R}}}{\longrightarrow} +\infty$.

Exercice 5 Soit $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. Soit $f, g \in \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$, avec g positive ou nulle.
Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que : $\displaystyle\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$.

Exercice 6 Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.
Montrer qu'il existe $a \in]0,1[$ telle que $f(a) = a$.

Exercice 7 Soit f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall k \in \{0, ..., n\}$, $\displaystyle\int_0^1 f(u) u^k \,\mathrm{d}u = 0$.
Montrer que f admet au moins $n+1$ zéros distincts dans $]0,1[$.

Exercice 8 Soit $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. Montrer que

$$\left(\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \right) \Leftrightarrow [(f \text{ est positive}) \text{ ou } (f \text{ est négative})].$$

Exercice 9

1) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{2} \leqslant \sqrt{1 + x^n} \leqslant \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$ sur $\left[1; 1 + \frac{1}{n}\right]$.

2) Étudier la convergence de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_1^{1+1/n} \sqrt{1 + x^n}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 10 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue strictement croissante telle que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Étudier la limite de la suite de terme général $\displaystyle\int_0^1 f^n(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 11 Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ (avec $a < b$), soit f continue et positive de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer

$$\left(\int_a^b f^n(t)\,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sup \{ f(t) \mid t \in [a,b] \}$$

Indication : commencer par traiter le cas où f est constante.

Exercice 12 Déterminer les limites des expression suivantes lorsque $x \to +\infty$, sans pour autant calculer les intégrales correspondantes.

1) $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t}\,\mathrm{d}t$ **2)** $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ **3)** $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{1/t}}{t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 13 Calculer les intégrales suivantes.

1) $\displaystyle\int_0^1 (\mathrm{e}^{\,x} + \frac{x^2}{2} - \ln(1+x))\,\mathrm{d}x$ **3)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-2}{(2x-3)^2}\,\mathrm{d}x$ **5)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3}{(1+x^4)^2}\,\mathrm{d}x$

2) $\displaystyle\int_0^1 x(x+2-\mathrm{e}\,)\mathrm{e}^{\,x}\,\mathrm{d}x$ **4)** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^4 x \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ **6)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$

Exercice 14 Calculer les intégrales et primitives suivantes.

1) $\displaystyle\int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{e}^{\,\mathrm{Arcsin}\,t}\,\mathrm{d}t$ **4)** $\displaystyle\int^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t+1}\sqrt{t+3}}$ **7)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+t^2}}$

2) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$ **5)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$ **8)** $\displaystyle\int_1^t \sqrt{\frac{1-\sqrt{t}}{t}}\,\mathrm{d}t$

3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$ **6)** $\displaystyle\int_1^5 \frac{\sqrt{t-1}}{t}\,\mathrm{d}t$ **9)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2 \sin t\,\mathrm{d}t$

Exercice 15 (✎) Déterminer les primitives suivantes.

1) $\displaystyle\int^x t\ln t\,\mathrm{d}t$ **3)** $\displaystyle\int^x (t^2-t+1)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ **5)** $\displaystyle\int^x (t+1)\mathrm{ch}t\,\mathrm{d}t$

2) $\displaystyle\int^x t\,\mathrm{Arctan}\,t\,\mathrm{d}t$ **4)** $\displaystyle\int^x (t-1)\sin t\,\mathrm{d}t$ **6)** $\displaystyle\int^x t\sin^3 t\,\mathrm{d}t$

Exercice 16 On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

1) Après avoir majoré $\dfrac{x^n}{1+x^n}$ pour $x \in [0,1]$ par une fonction simple, montrer que la suite (I_n) converge vers 0.

2) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3) À l'aide d'une intégration par parties, donner un équivalent de I_n.

Exercice 17 Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.

1) Calculer I_0 et I_1.

2) Établir une relation liant I_n et I_{n+1}.

3) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < I_n < \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$

4) Déterminer la limite puis un équivalent de I_n.

5) Soit $a \in \mathbb{R}$, soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)u_n$.
On suppose que $a \neq I_0$, montrer, en étudiant $D_n = |u_n - I_n|$, que $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 18 ( ) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Justifier que les fonctions suivantes sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer leurs dérivées.

1) $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_{2x}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$ **2)** $\chi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x x\,f(t)\,\mathrm{d}t$ **3)** $\psi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t+x)\,\mathrm{d}t$

Exercice 19 ( ) On définit la fonction F de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F(x) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{|\sin(tx)|}{t}\,\mathrm{d}t$.

1) Justifier proprement la définition de F.

2) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer sa dérivée.

3) Nous étudions à présent le comportement asymptotique de F.

a) Montrer que $\forall x > 1,\ F(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor -1}\left(\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t\right) + \int_{\pi\lfloor x\rfloor}^{\pi x}\frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$.

b) On rappelle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$. En déduire que $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{\pi}\ln x$.

Exercice 20 ( ) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\sin t)^x\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que f est décroissante.

2) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $(x+1)f(x+1) = xf(x-1)$.

3) Soit $\varphi(x) = xf(x)f(x-1)$. Montrer que φ est périodique de période 1.

4) Calculer $\varphi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{N}^*$

5) En déduire que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$, puis que $\forall x \in [1, +\infty[,\ \varphi(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 21 Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, avec $a < b$. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$.

1) Montrer que si $f(0) = 0$ alors $\displaystyle\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.

2) Montrer que, dans le cas général, $\displaystyle\int_{ax}^{bx}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0^+]{} f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$

Exercice 22 ( ) En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$, déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Exercice 23 ( ) Déterminer les primitives suivantes.

1) $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{it+1}$ **2)** $\displaystyle\int^x \mathrm{e}^t\cos t\,\mathrm{d}t$ **3)** $\displaystyle\int^x t\mathrm{e}^t\sin t\,\mathrm{d}t$

Exercice 24 Soit $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, notons $a = \mathrm{Re}(\lambda)$ et $b = \mathrm{Im}(\lambda)$. Établir

$$\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t-\lambda} = \ln|x-\lambda| + i\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x-a}{b}\right).$$

Exercice 25 ( ) Calculer la limite de la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{8k^3+n^3}.$$

Exercice 26 (✎) Calculer la limite de la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}.$$

Exercice 27 Donner un équivalent de la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right).$$

Exercice 28 Calculer la limite puis un équivalent de la suite de terme général

$$P_n = \prod_{k=n+1}^{2n} k^{\frac{1}{k}}.$$

Exercice 29 Calculer la limite de la suite de terme général

$$P_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{p=1}^{n} (n+p)}.$$

Exercice 30 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n^\alpha}.$$

Rappel : c'est la suite $\left(\sum_{n=1}^{N} u_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$.

Feuille d'exercice n° 23 : **Dénombrement**

Exercice 1 Soit 1000 points du plan distincts. Le but est de montrer l'existence d'une droite ne passant par aucun de ces points et qui les partage en deux groupes de 500 points. On considère un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Dans toute la suite, on note $\mathscr{D}_{m,p}$ la droite d'équation $y = mx + p$ dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On note également $\mathscr{M}$ l'ensemble formé par les 1000 points.

1) **a)** Montrer que l'ensemble des nombres réels m tels qu'il existe $p \in \mathbb{R}$ tel que l'ensemble $\mathscr{D}_{m,p} \cap \mathscr{M}$ contienne au moins deux points est un ensemble fini.

b) Quel est le plus petit cardinal possible de l'ensemble précédent ? Quel est son plus grand cardinal possible ? Donner deux situations où ces cardinaux sont atteints.

Indication : En utilisant le fait que pour tout polynôme non nul P à coefficients rationnels, on a $P(\mathrm{e}) \neq 0$, on pourra utiliser les points de la courbe $y = \mathrm{e}^x$.

2) Établir l'existence d'un nombre $m_0 \in \mathbb{R}$ tel que l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, $p \mapsto \mathrm{Card}(\mathscr{D}_{m_0,p} \cap \mathscr{M})$ prenne ses valeurs dans $\{0, 1\}$.

3) Conclure.

Exercice 2 On appellera « mot » toute suite finie de lettres, qu'elle ait un sens ou non. On rappelle que la lettre « y » est une voyelle. Combien de mots de 5 lettres peut-on former avec les 26 lettres de l'alphabet latin, dans lesquels toute consonne est suivie d'une voyelle et toute voyelle d'une consonne ?

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \dots, A_n$ des ensembles finis. Démontrer la *formule du crible*, ou *formule de Poincaré* :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}\, A_i - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} \mathrm{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) \\
&\quad + \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n} \mathrm{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) \\
&\quad + \quad \dots \\
&\quad + (-1)^{n+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_n \leqslant n} \mathrm{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n} \mathrm{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \subset [\![1,n]\!],\ \mathrm{Card}(I) = k} \mathrm{Card}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right).
\end{aligned}$$

Exercice 4 Soit E un ensemble fini et $\sigma \in S_E$. En considérant l'application $\varphi : \mathbb{Z} \to S_E$, $k \mapsto \sigma^k$, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^n = \mathrm{Id}$.

Exercice 5 Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. Combien existe-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, p]\!]$?

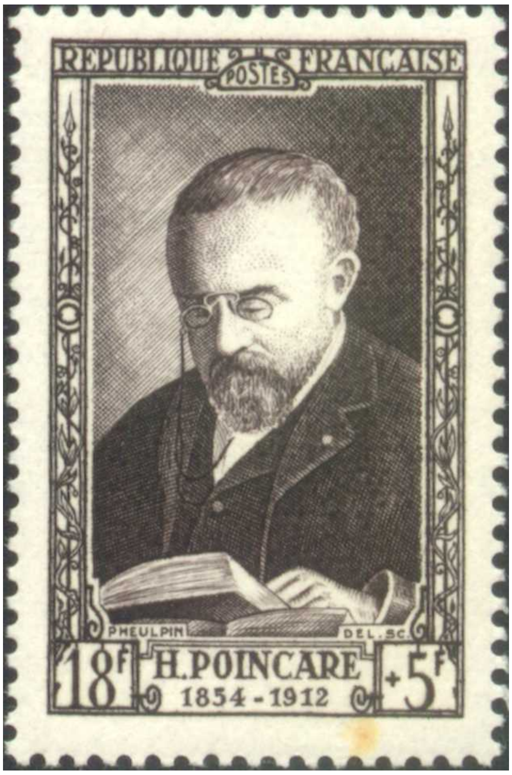
Exercice 6 Montrer que tout anneau fini, commutatif et intègre est un corps.

Exercice 7 On trace dans un plan $n \in \mathbb{N}^*$ droites en position générale (*i.e.* deux d'entre elles ne sont jamais parallèles ni trois d'entre elles concourantes). Combien forme-t-on ainsi de triangles ?

Exercice 8 (✎) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit E un ensemble à n éléments.

1) Soit $p \in [\![0, n]\!]$, soit X une partie à p éléments de E. Combien y a-t-il de parties Y de E disjointes de X ?

2) Combien y a-t-il de couples (X, Y) formés de parties disjointes de E ?



Feuille d'exercice n° 24 : **Applications linéaires**

Exercice 1 ( ) Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires.

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x^2$

2) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 4x - 3$

3) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x^2}$

4) $\varphi : \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto f(3/4)$

5) $\chi : \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto -\displaystyle\int_{1/2}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$

6) $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \sin(3x+5y)$

7) $\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto xy$

8) $\rho : \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ f \mapsto \left(x \mapsto \mathrm{e}^{-x} \displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t\right)$

Exercice 2 ( ) Calculer le noyau et l'image de f :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x + 2y \\ -x - 4y + 2z \\ 2x + 5y - z \end{pmatrix} \end{array}.$$

Exercice 3 Pour chaque propriété suivante, donner un exemple d'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ la vérifiant.

1) $\mathrm{Ker}(f)$ est inclus strictement dans $\mathrm{Im}(f)$.

2) $\mathrm{Im}(f)$ est inclus strictement dans $\mathrm{Ker}(f)$.

3) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

4) $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont supplémentaires.

Exercice 4 ( ) Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f^2$ et $\mathrm{Im}\, f^2 \subset \mathrm{Im}\, f$.

2) Montrer que $\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0_E\} \iff \mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f$.

3) Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f \iff \mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Im}\, f$.

Exercice 5 ( )

1) Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Établir l'équivalence

$$g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E,G)} \iff \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g.$$

2) Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, vérifiant $f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

- **a)** Montrer que $(f - \mathrm{Id}_E) \circ (f + 2\mathrm{Id}_E) = (f + 2\mathrm{Id}_E) \circ (f - \mathrm{Id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
- **b)** En déduire que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(f + 2\mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$.
- **c)** Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id}_E)$.

Exercice 6 ( ) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. On suppose que

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K}, f(x) = \lambda x.$$

Montrer que

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(x) = \lambda x.$$

Exercice 7 ( )

1) Montrer que l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & (P(0), P') \end{array}$ est un isomorphisme.

2) En déduire que $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Exercice 8 ( ) Soient E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Soit f une application linéaire de E dans lui-même.

1) Montrer que, si $F \subset f(F)$ alors $f(F) = F$.

2) Montrer que, si f est injective et $f(F) \subset F$ alors $f(F) = F$.

Exercice 9 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes.

1) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ **2)** $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$ **3)** $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$

Exercice 10 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$ tel que $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g = \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Ker}(g)$. Montrer que ces sommes sont directes.

Exercice 11 ( ) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies et $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$.

1) Montrer que $\operatorname{rg}(u + v) \leqslant \operatorname{rg}(u) + \operatorname{rg}(v)$.

2) En déduire que $|\operatorname{rg}(u) - \operatorname{rg}(v)| \leqslant \operatorname{rg}(u + v)$.

Exercice 12 – Suite exacte d'applications linéaires –

Soient $E_0, E_1, ..., E_n$ $n+1$ espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$, de dimensions respectives $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$. On suppose qu'il existe n applications linéaires $f_0, f_1, ..., f_{n-1}$ telles que :

$$\forall k \in \{0, ..., n-1\}, f_k \in \mathscr{L}(E_k, E_{k+1}).$$

et de plus :

— f_0 est injective ;
— $\forall j \in \{1, ..., n-1\}, \operatorname{Im} f_{j-1} = \operatorname{Ker}(f_j)$;
— f_{n-1} est surjective.

Montrer que

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \alpha_j = 0.$$

Exercice 13 Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $f : P \mapsto P + P' + P''$.

1) Montrer que f est injective. En déduire que f est bijective.

2) On appelle φ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $\varphi : P \mapsto P + P' + P''$. Montrer que φ est surjective puis bijective.

Exercice 14 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension égale à n. Montrer que

$$n \text{ est pair} \Leftrightarrow \exists f \in \mathscr{L}(E) \quad \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} f.$$

Exercice 15 Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

1) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un endomorphisme u tel que $\operatorname{Ker}(u) = F$ et $\operatorname{Im}(u) = G$.

2) Construire un tel endomorphisme u avec $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \}$ dans $\mathbb{R}^3$ et $G = \{ \lambda(2, -1, -1) \mid \lambda \in \mathbb{R} \}$.

Exercice 16 (🚲) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$, soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{rg}(f^n) = \mathrm{rg}(f^{n+1})$.

Exercice 17 (✎) Soient $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $H = \{ P \in \mathbb{K}_n[X] \mid P(\alpha) = 0 \}$. Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{K}_n[X]$ et en déterminer une base.

Exercice 18 (✎) Montrer que les formes linéaires sur $\mathbb{K}^3$ $\varphi : (x, y, z) \mapsto x + 2y + 3z$ et $\psi : (x, y, z) \mapsto x - 2y + 3z$ sont linéairement indépendantes.

Exercice 19 Quelle est la nature de l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -5x & + & 2y & & \\ -12x & + & 5y & & \\ -4x & + & 2y & - & z \end{pmatrix} \end{array}$?

Déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 20 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $p, q \in \mathscr{L}(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre les deux assertions suivantes :

1) $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$;

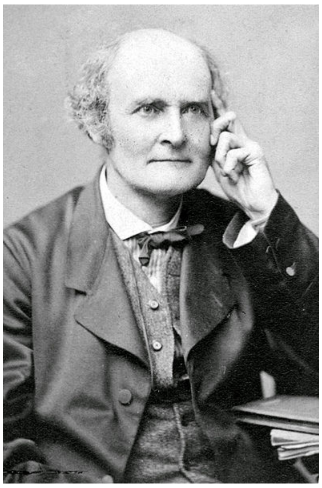
2) p et q sont deux projecteurs de même noyau.

Exercice 21 (✎) On pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$ et $G = \mathrm{Vect}(1, 1, 0)$.

1) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer une expression explicite de la projection de $\mathbb{R}^3$ sur F parallèlement à G.

Exercice 22 Soit p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que $p - q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = q$.



Feuille d'exercice n° 25 : **Probabilités**

Exercice 1 ( ) Combien de fois faut-il lancer un dé (équilibré, à six faces) pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir un six ?

Exercice 2 ( ) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Peut-on trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe une probabilité P sur $[\![1, 2n]\!]$ vérifiant :

$$\forall k \in [\![1, 2n]\!], \quad P(\{k\}) = ak + b \qquad \text{et} \qquad P([\![1, n]\!]) = \frac{1}{4} \text{ ?}$$

Exercice 3 ( ) Soit $p \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n coffres, numérotés de 1 à n. Avec probabilité p, on place un trésor dans un coffre (choisi « au hasard »). Sinon, aucun trésor n'est placé.

1) Soit $1 \leqslant i \leqslant n$. Quelle est la probabilité que le i^{e} coffre contienne un trésor ?

2) On a ouvert les $n - 1$ premiers coffres, sans trouver de trésor. Quelle est la probabilité que le dernier coffre contienne un trésor ?

Exercice 4 ( ) Dans un sac de dés (à six faces), il y a une proportion de $p \in [0, 1]$ dés pipés. Chaque dé pipé donne une probabilité de $\frac{1}{2}$ d'obtenir un six.

On pioche un dé, on le lance, et l'on obtient un six : quelle est la probabilité d'avoir tiré un dé pipé ?

Exercice 5 On se donne $N \in \mathbb{N}^*$. Deux joueurs lancent tour à tour un dé. Le premier qui tire un six a gagné. On s'arrête au bout de N tours.

1) Quelle est la probabilité de gagner pour chacun des joueurs ?

2) Quelle est la probabilité que personne ne gagne ?

3) Ces probabilités admettent-elles des limites quand N tend vers $+\infty$ et, le cas échéant, lesquelles ?

Exercice 6 ( ) On met une boule blanche dans une urne. On répète alors les opérations suivantes : on lance un dé.

— Si le résultat est différent de 6, on ajoute une boule rouge dans l'urne, puis on recommence.
— Si le résultat est 6, on tire une boule dans l'urne et on s'arrête.

1) Quelle est la probabilité de s'arrêter au bout de N lancers au plus ?

2) Quelle est la probabilité de s'arrêter au bout de N lancers au plus et qu'à la fin, on tire une boule blanche dans l'urne ?

3) Quelles sont les limites de ces probabilités quand N tend vers $+\infty$? Comment interpréter cela intuitivement (la justification sera donnée en spé) ?

Indication : Montrer que $\displaystyle\int_0^{5/6} \frac{q^n}{1-q} \, \mathrm{d}q \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Exercice 7 ( ) Au poker, on distribue à chaque joueur une main de 5 cartes prises dans un jeu de 52 cartes. Dans un jeu de 52 cartes, il y a quatre couleurs (pique, trèfle, carreau, cœur), 13 cartes dans chaque couleur, ordonnées du 2 au 10 puis valet, dame, roi, as. Une quinte flush est une main contenant 5 cartes consécutives de même couleur, avec la règle suivante : (As, 2, 3, 4, 5) et (10, Valet, Dame, Roi, As) sont toutes des quintes.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir une quinte flush (sans tricher) ?

2) Vous jouez au poker avec Pat Poker (tricheur célèbre dans les épisodes de Lucky Luke, probabilité qu'il triche $0,9$, probabilité qu'il réussisse son coup et sorte une quinte flush s'il triche : $0,9$). Il abat une quinte flush au premier coup. Quelle est la probabilité qu'il ait triché ?

Exercice 8 ( ) On étudie la descendance d'une fleur. Cette fleur a deux descendantes avec la probabilité $p \in]0;1[$, ou aucune avec la probabilité $q = 1 - p$. Les descendantes de la première fleur ont des descendantes de façons mutuellement indépendantes et dans les mêmes conditions que la première fleur. Pour tout entier naturel n, on note u_n la probabilité qu'il n'y ait plus de descendance à la génération $n + 1$.

1) Calculer u_0 .

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = pu_n^2 + 1 - p$.

3) Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Quelle est sa limite ? Conclure ?

Exercice 9 En 1761, Thomas Bayes, théologien protestant, quitte pour toujours cette vallée de larmes. Il arrive aux portes du Paradis et, comme il n'y a plus beaucoup de places et que Bayes a parfois eu des opinions assez peu orthodoxes en manière de théologie, Saint Pierre lui propose le test suivant. Bayes est placé devant trois portes identiques, dont deux mènent à l'enfer et une au paradis, et il est sommé de choisir. N'ayant aucune information a priori, Bayes choisit une des portes au hasard.

1) Avant qu'il ait le temps de l'ouvrir, Saint Pierre — qui est bon — lui dit : « Attends, je te donne encore un renseignement... » ; et il lui ouvre une des deux autres portes (menant bien entendu à l'enfer). Que doit faire Bayes ? Garder sa porte, ou changer d'avis et prendre l'autre porte non ouverte ?

2) Reprendre l'exercice dans le cas où Saint Pierre a passé la soirée précédente à faire la fête, il ne sait plus du tout où mènent les portes, en ouvre une au hasard et se rend compte qu'elle mêne à l'enfer.

3) En fait, en arrivant devant Saint Pierre, Bayes remarque qu'il a un pied de bouc : Saint Pierre a tellement fait la fête qu'il n'est plus en mesure de s'occuper des entrées et Satan en a profité pour le remplacer (en se déguisant). Vous imaginez assez vite ce que fait Satan : lorsqu'un candidat a choisi une porte, il le laisse prendre la porte choisie si elle conduit vers l'enfer ou bien de lui montrer une porte conduisant vers l'enfer et de lui proposer de changer s'il a choisi la porte menant vers le paradis. Bayes choisit une porte, Satan lui propose de changer. Que faire ?

4) En fait, Satan est bien plus pervers que cela : si le candidat choisit une porte conduisant vers l'enfer, il lui propose quand même de changer avec la probabilité p_1 et si le candidat choisit la porte conduisant vers le paradis, il lui propose de changer avec la probabilité p_2. Bayes choisit une porte, Satan lui propose de changer. Que faire ?

Exercice 10 (🚲) Dans une classe, les élèves décident de s'offrir des cadeaux à Noël. Pour cela, on met dans un chapeau les noms des n élèves de la classe, chacun des n élèves tire à son tour un nom et doit faire un cadeau à celui dont il a tiré le nom.

La question est la probabilité que quelqu'un tire son propre nom (ce qui est problématique). Calculer cette probabilité à 10^{-15} près sans calculatrice.

Indications :

1) Remarquer que le processus mis en place consiste à tirer au hasard une permutation de l'ensemble des élèves (qu'on pourra identifier à $[\![1, n]\!]$) et que toutes les permutations sont tirées de façon équiprobable.

2) On note S_n l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$. On note B le sous-ensemble de S_n constitué des permutations σ qui conviennent, c'est-à-dire telle que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\sigma(k) \neq k$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k l'ensemble des permutations σ fixant k :

$$A_k = \{ \sigma \in S_n \mid \sigma(k) = k \}$$

Exprimer B à partir des A_k pour $k \in [\![1, n]\!]$.

3) En utilisant la formule de Poincaré (du crible), exprimer la probabilité cherchée.

4) La calculer en utilisant le fait qu'il y a une quarantaine d'élèves dans la classe et que $\frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0.367\,879\,441\,171\,442\,322$.

Exercice 11 (✎) On considère un ivrogne marchant le long d'un trottoir. À chaque seconde, il avance avec probabilité un demi d'un pas, et recule d'un pas avec la même probabilité. On supposera que tous les pas sont de la même longueur. On se donne un repère le long du trottoir, gradué en pas. On note X_n la position de l'ivrogne au bout de $n \in \mathbb{N}$ secondes.

Donner la loi de X_n , son espérance et sa variance.

Exercice 12 (🚲)

1) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Exprimer $P(X = k)$ en fonction de $P(X \leqslant k)$ et $P(X \leqslant k - 1)$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, n]\!]$. Exprimer $\mathrm{E}[X]$ en fonction des $P(X \leqslant k)$, pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

On dispose de $N \in \mathbb{N}^*$ urnes avec, dans chacune d'elles, des jetons numérotés de 1 à n. On tire, au hasard, un jeton dans chaque urne, et on note X le numéro du plus grand jeton tiré.

3) Déterminer la loi de X.

4) Montrer que : $\mathrm{E}[X] = n - \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{j}{n}\right)^N$.

5) Calculer la limite de $\dfrac{\mathrm{E}[X]}{n}$ quand $n \to \infty$. En déduire un équivalent de $\mathrm{E}[X]$ quand $n \to \infty$.

6) Calculer la limite de $\mathrm{E}[X]$ quand $N \to \infty$. Commenter.

Exercice 13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans une urne, on place n jetons, numérotés de 1 à n. On pioche un jeton dans cette urne. Si on a pioché le jeton n° i, on lance ensuite i dés (à six faces, équilibrés). On note X le nombre de 1 obtenus dans ces lancers de dés.

Modéliser ceci, puis déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.

Exercice 14 Soit r un entier naturel non nul. On dispose d'un sac contenant r jetons numérotés de 1 à r dans lequel on peut effectuer une succession de tirages avec remise en notant, à chaque fois, le numéro obtenu.

Pour tout entier naturel n non nul, on note T_n le nombre de numéros distincts obtenus au cours des n premiers tirages. Soit n un entier naturel non nul.

1) **a)** Quelles sont les valeurs prises par T_n ?

b) Calculer les probabilités $P(T_n = 1), P(T_n = n)$ et $P(T_n = 2)$.

2) Soit (k, n) un couple d'entiers naturels non nuls tels que $1 \leq k \leq r$. Déterminer une relation entre $P(T_{n+1} = k), P(T_n = k)$ et $P(T_n = k-1)$.

3) Pour tout entier naturel n non nul, on considère le polynôme $Q_n(X)$ défini par :

$$Q_n(X) = \sum_{k=1}^{r} P(T_n = k) X^k$$

a) Montrer, pour tout entier naturel n non nul : $Q_{n+1}(X) = \dfrac{1}{r}(X - X^2)Q_n'(X) + XQ_n(X)$

b) Pour tout entier naturel n non nul, en reliant $E(T_n)$ à $Q_n(X)$, exprimer $E(T_{n+1})$ en fonction de $E(T_n)$, r et n. Déterminer ensuite $E(T_n)$ en fonction de r et n.

c) Calculer la limite de $\dfrac{E(T_r)}{r}$ quand $r \to \infty$.

Exercice 15 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit au hasard un nombre X dans $[\![1, n]\!]$. On choisit ensuite un nombre Y au hasard dans $[\![1, X]\!]$.

1) Déterminer la loi conjointe de X et Y.

2) En déduire la loi (marginale) de Y.

Exercice 16 Soit $p \in [0, 1]$, $m, n \in \mathbb{N}^*$. Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace probabilisé (Ω, P). On suppose que X suit la loi binomiale de paramètres (n, p) et Y suit la loi binomiale de paramètres (m, p).

Quelle est la loi de $X + Y$?

Indication : on pourra démontrer et utiliser la formule de Vandermonde $\displaystyle\sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x}\binom{m}{z-x} = \binom{n+m}{z}$.

Exercice 17 Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles i.i.d, d'espérance m et de variance σ^2. On définit

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

1) Déterminer l'espérance et la variance de μ_n.

2) Soit $\alpha \in]0, 1[$. Proposer un intervalle aléatoire I_X construit sur $X = (X_1, \ldots, X_n)$ pour lequel $P(m \in I_X) \geqslant 1 - \alpha$.

3) Dans le cas où $X_1, \ldots, X_n$ suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$, proposer un tel intervalle I_X ne dépendant pas de p.

Exercice 18 On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi, à valeurs dans $\{-1, 1\}$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p = P(X_n = 1)$ avec $p \in]0; 1[$.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$. On pourra poser $Y_0 = 1$.

1) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'espérance et la variance de Y_n.

2) **a)** Déterminer la loi de Y_2 et de Y_3.

b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = P(Y_n = 1)$.
Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
En déduire une expression de p_n en fonction de p et de n.

3) **a)** Existe-t-il un réel p pour lequel, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes ?

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Existe-t-il un réel p pour lequel Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes ?

4) Calculer, pour n et $m \in \mathbb{N}^*$, la covariance de Y_n et Y_{n+m}

Feuille d'exercice n° 26 : **Matrices et applications linéaires**

Exercice 1 ( ) Soit h l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par rapport à deux bases $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathscr{C} = (f_1, f_2)$ par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1) On prend dans $\mathbb{R}^3$ la nouvelle base $\mathscr{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ définie par :

$$e_1' = e_2 + e_3, \quad e_2' = e_3 + e_1, \quad e_3' = e_1 + e_2.$$

Quelle est la nouvelle matrice A_1 de h ?

2) On choisit pour base de $\mathbb{R}^2$ la nouvelle base $\mathscr{C}' = (f_1', f_2')$ définie par :

$$f_1' = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad f_2' = \frac{1}{2}(f_1 - f_2),$$

en conservant la base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la nouvelle matrice A_2 de h ?

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \quad AXB = 0.$$

Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

Exercice 3 ( ) Soit φ une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même telle que $\varphi \neq 0$ et $\varphi^2 = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(x) \neq 0$. Montrer que $\{x, \varphi(x)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice de φ dans cette base.

Exercice 4 ( ) Soit A une matrice carrée d'ordre 2, et soit φ l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui même, envoyant M sur AM. Montrer que φ est linéaire et déterminer sa matrice sur la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 5 ( ) Soit E un espace vectoriel de dimension finie, notée n.

1) Soit φ un projecteur de E, peut-on trouver une base dans laquelle la matrice de φ est particulièrement simple ?

2) Même question pour une symétrie.

Exercice 6 ( ) Soit φ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $P \mapsto (X^2 + 2)P'' + (X + 1)P' + P$.

1) Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

3) Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi - 5\mathrm{Id})$. Calculer $\varphi(1)$ et $\varphi(X + 1)$.

4) En déduire une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de φ est diagonale.

Exercice 7 ( )

1) On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

2) Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer le rang de f, ainsi qu'une base de son noyau et de son image. Donner une équation de l'image.

Exercice 8 ( ) Soit $M = \begin{pmatrix} -35 & -7 & -22 \\ -6 & 0 & -4 \\ 57 & 11 & 36 \end{pmatrix}$.

1) En interprétant M comme étant la matrice d'un endomorphisme d'un espace vectoriel E, montrer qu'il existe une base (I, J, K) telle que cet endomorphisme a dans cette base pour matrice une matrice diagonale avec 1 , 2 , -2 sur la diagonale.

2) Calculer alors M^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

3) Exprimer en fonction de n les termes u_n , v_n , w_n où u_n , v_n , w_n sont les termes généraux de 3 suites vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} u_{n+1} & = & -35u_n & - & 7v_n & - & 22w_n \\ v_{n+1} & = & -6u_n & & & - & 4w_n \\ w_{n+1} & = & 57u_n & + & 11v_n & + & 36w_n \end{array} \right. , \qquad \text{avec } u_0 = v_0 = w_0 = 1.$$

Exercice 9 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Un endomorphisme φ de E est représenté canoniquement par la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & c \\ 1 & -2 & d \\ a & b & f \end{pmatrix}$. Déterminer les réels a, b, c, d, f de façon que l'endomorphisme φ vérifie les deux conditions suivantes :

1) $\operatorname{Ker} \varphi$ est engendré par le vecteur $u = e_1 + 2e_2 + 3e_3$;

2) $\operatorname{Im} \varphi$ est engendré par les deux vecteurs $v = e_2 - 3e_3$ et $w = 3e_1 - 5e_3$.

Exercice 10 ( ) Calculer, s'il existe, l'inverse de chacune des matrices suivantes. Donner le rang de chacune des matrices non inversibles.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 13 & 2 & 1 & 9 \\ 7 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 1 & \bar{z} & \bar{z}^2 \\ z & 1 & \bar{z} \\ z^2 & z & 1 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_n \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ a_1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à coefficients diagonaux dominants, c'est-à-dire telle que :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

Exercice 12 (✎) Montrer que la famille $(X^3+2X+1, X^3-2X^2+2, X^3-2X^2+1, X^3+X)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ au moyen d'une technique matricielle.

Exercice 13 (✎) Soit a et b deux réels, et A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\mathrm{rg}(A) \geqslant 2$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $\mathrm{rg}(A) = 2$?

Exercice 14 Déterminer les matrices $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ telles que $M^2 = 0$.

Exercice 15 Calculer les noyaux des matrices suivantes.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ \lambda & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ **2)** $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ -4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ **3)** $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Exercice 16 Déterminer l'inverse des matrices suivantes (si cet inverse existe) :

$$\diamondsuit = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \heartsuit = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \spadesuit = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & . & . & a^n \\ 0 & 1 & a & a^2 & . & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & a & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & a \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \clubsuit = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & . & . & n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & . & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17 Discuter, selon le paramètre réel m, la dimension des ensembles des solutions des systèmes suivants.

1) $(\mathscr{S}) : \begin{cases} x+my+z & = & 0 \\ mx+y+mz & = & 0 \end{cases}$ **2)** $(\mathscr{T}) : \begin{cases} x+y+mz & = & 0 \\ x+my+z & = & 0 \\ mx+y+z & = & 0 \end{cases}$

Exercice 18 Soit $M = \begin{pmatrix} -10 & 6 & 14 \\ 1 & -1 & -1 \\ -8 & 5 & 11 \end{pmatrix}$.

Montrer que M est semblable à une matrice particulièrement simple, que l'on déterminera.

Exercice 19 Résoudre l'équation $X^2 + X = A$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Indication : on commencera par étudier complétement A.

Exercice 20 Trouver toutes les formes linéaires f sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\ f(AB) = f(BA).$$

Indication : pour deux matrices élémentaires $E_{i,j}$ et $E_{k,\ell}$, calculer le produit $E_{i,j}E_{k,\ell}$.

Exercice 21 (🚲) On considère une suite de variables aléatoires (T_n) à valeurs dans $\{x, y, z\}$, définie par le graphe de transition suivant. Par exemple, l'arête du bas signifie que $\forall n \in \mathbb{N},\ P\left(T_{n+1} = x | T_n = z\right) = \dfrac{3}{10}$.

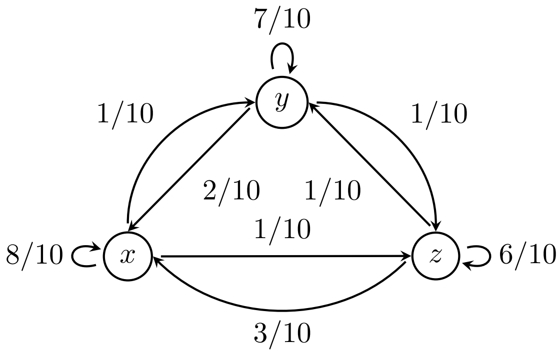


Figure 2 – Graphe de transition pour la suite (T_n).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

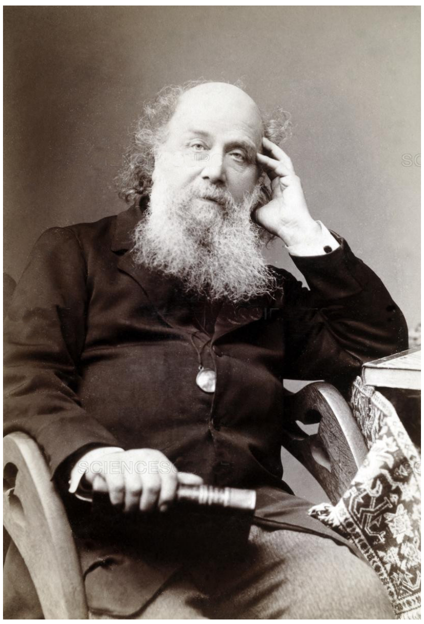
$$x_n = P(T_n = x), \quad y_n = P(T_n = y), \quad z_n = P(T_n = z) \quad \text{et} \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}.$$

1) Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

2) On note φ l'endomorphisme canoniquement associé à A. Déterminer les droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par φ. En déduire une base relativement à laquelle la matrice de φ est diagonale.

3) La suite (X_n) converge-t-elle ? Que peut-on dire de sa limite ?

4) Déterminer l'expression de X_n en fonction de n.



Feuille d'exercice n° 27 : **Déterminants**

Exercice 1 (✎) On pose $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Écrire $\sigma\theta$ et σ^{-1} sous forme de produits de cycles de supports disjoints et déterminer les signatures de ces permutations.

Exercice 2 (✎) Soit $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 6 & 4 & 2 & 1 & 7 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Décomposer s en produit de cycles à supports disjoints, puis en produit de transpositions. Donner la signature de s.

Exercice 3 (✎) Écrire la permutation $\tau = (1,2)(2,4,6,5)(1,3,7)(2,5,4)(3,5,6,1)(2,5)(1,4,6)$ sous forme d'un produit de cycles de supports disjoints. Quelle est la signature de τ ?

Exercice 4 (✎) Calculer la signature des permutations suivantes.

1) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 6 & 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ **2)** $g = (1,3,4)(2,4,3,1)(2,3)$ **3)** $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

Exercice 5

1) Montrer que les transpositions $(1 \quad i)$ (pour $i \in [\![2, n]\!]$) engendrent le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.
2) Montrer que les transpositions $(i \quad i+1)$ (pour $i \in [\![1, n-1]\!]$) engendrent le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.
3) Montrer que les cycles de longueur 3 engendrent $\mathfrak{A}_n$.
4) Montrer que les cycles de la forme $(1\ i\ j)$ avec $i, j \in [\![2, n]\!]$, $i \neq j$, engendrent $\mathfrak{A}_n$.
5) Montrer que les cycles de la forme $(1\ 2\ j)$ avec $j \in [\![3, n]\!]$, engendrent $\mathfrak{A}_n$.

Exercice 6 (✎) Dans chacun des cas ci-dessous, dire si l'application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ considérée est multilinéaire.

1) $\varphi : \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) \longmapsto x_1 + y_2 + z_3$
2) $\chi : \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) \longmapsto x_1y_3 + y_2z_1 + z_3x_2$
3) $\psi : \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) \longmapsto x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2$
4) $\omega : \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) \longmapsto x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 + z_1z_2z_3$
5) $\alpha : \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) \longmapsto x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_3$
6) $\beta : \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) \longmapsto (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)(z_1 + z_3)$
7) $\gamma : \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) \longmapsto (x_1 + 2x_2)(z_1 + z_3)$

Exercice 7 (✎) Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ anti-symétrique. Calculer $\det(A)$. Ce résultat vaut-il encore pour $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$?

Généraliser ceci.

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $B = P^{-1}AP$. Montrer qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $B = Q^{-1}AQ$.

Indice : avec $P = R + iS$, tel que $R, S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pourra montrer que $RB = AR$, $SB = AS$ et en déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(R + tS)B = A(R + tS)$.

Exercice 9 (🚲) **– Déterminant circulant –**
Soit $(a,b,c)\in(\mathbb{K})^3$. On note $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$, et l'on considère les deux matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}\qquad\text{et } V=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j&j^2\\1&j^2&j\end{pmatrix}.$$

Calculer le produit AV, puis $\det(V)$ et $\det(AV)$, et en déduire $\det(A)$.

Exercice 10 Pour quelles valeurs de $k\in\mathbb{K}$ les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

1) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&2\\-1&1&k\end{pmatrix}$ **2)** $B=\begin{pmatrix}1&k&0\\2&-1&k\\3&0&1\end{pmatrix}$

Exercice 11 (✎) Calculer les déterminants suivants.

1) $\alpha=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}$ **2)** $\beta=\begin{vmatrix}-1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{vmatrix}$ **3)** $\gamma=\begin{vmatrix}1&2&5&4\\0&6&4&8\\0&3&4&1\\0&6&8&0\end{vmatrix}$

Exercice 12 Montrer que : $\begin{vmatrix}1&x&x^2&x^3\\1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&4&9&16\end{vmatrix}$ est divisible par $(x-1)^3$.

Exercice 13 On note a, b, c [...] des réels. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix}a&x&y&z\\b&x&y&z\\c&x'&y'&z'\\d&x'&y'&z'\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1+a&b&a&b\\b&1+a&b&a\\a&b&1+a&b\\b&a&b&1+a\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}a&a&a^2&b+c+d\\a&b&b^2&c+d+a\\a&c&c^2&d+a+b\\a&d&d^2&a+b+c\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&0&3&0&0\\0&1&0&3&0\\a&0&a&0&3\\b&a&0&a&0\\0&b&0&0&a\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}a+b+c&b&b&b\\c&a+b+c&b&b\\c&c&a+b+c&b\\c&c&c&a+b+c\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}p&1&&0\\1&p&\ddots&\\&\ddots&\ddots&1\\0&&1&p\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&1&\dots&1\\-1&0&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&1\\-1&\dots&-1&0\end{pmatrix}.$$

Exercice 14 (⛰) Calculer les déterminants suivants, d'ordre $n\in\mathbb{N}^*$.

1) $A_n=\begin{vmatrix}1+x^2&x&&&0\\x&1+x^2&x&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&x&1+x^2&x\\0&&&x&1+x^2\end{vmatrix}$ **2)** $B_n=\begin{vmatrix}a_1+b_1&a_1&\dots&\dots&a_1\\a_2&a_2+b_2&a_2&\dots&a_2\\a_3&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&\ddots\\a_n&\dots&\dots&a_n&a_n+b_n\end{vmatrix}$

Exercice 15 Soit $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$. Calculer les déterminants des matrices suivantes.

1) $\Big(\sin(a_i+a_j)\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ **2)** $\Big(\cos\left((i-1)a_j\right)\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$

Exercice 16 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0, n]\!]$. On définit la matrice $A_{n,p}$ de $\mathscr{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ par :

$$A_{n,p} = \begin{pmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{p} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} & \dots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & \binom{n+p}{1} & \binom{n+p}{2} & \dots & \binom{n+p}{p} \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det A_{n,p}$.

Exercice 17 (✎🚲) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (notée $\mathscr{C}$) est $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) On appelle valeur propre de f tout scalaire λ pour lequel $f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ n'est pas injective. Déterminer toutes les valeurs propres de f en calculant un déterminant. On notera λ_1, λ_2 et λ_3 ces valeurs propres, avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

2) Si λ est une valeur propre de f, on appelle sous-espace propre de f associé à λ le noyau de $f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$. Déterminer les trois sous-espaces propres de f. On appellera E_i le sous-espace propre associé à λ_i, et on le notera $E_i = \mathrm{Vect}(v_i)$, pour un vecteur v_i à déterminer.

3) Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$. De quelle forme est-elle ?

Feuille d'exercice n° 28 : **Séries numériques**

Exercice 1 Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle décroissante de limite nulle. On suppose que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général $v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - nu_n$ est bornée. On veut montrer que la série $\sum u_n$ converge.

1) Montrer que (v_n) est croissante, puis convergente. On note ℓ sa limite.

2) Exprimer $u_k - u_{k+1}$ en fonction de v_k et v_{k+1}.

3) En sommant l'égalité précédente de n à $+\infty$, montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}(\ell - v_n)$.

4) En déduire que $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et enfin que la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 2 Soit (u_n) une suite réelle, décroissante, à termes positifs et telle que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

1) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p > N$, on a $(p-N)u_p \leqslant \varepsilon$.

2) En déduire que $u_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 3 On considère deux séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$, à termes positifs.

1) Démontrer que si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors la série de terme général $\sqrt{u_n v_n}$ converge aussi.

2) On suppose maintenant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{1+n^2 u_n}$.

- **a)** Exprimer $\sqrt{u_n v_n}$ en fonction de v_n et de n.
- **b)** En déduire que $\sum v_n$ et $\sum u_n$ ne peuvent pas converger toutes les deux.

Exercice 4 (🚲) Comment choisir deux réels a et b tels que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge, avec $u_n = \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$? Dans le cas de convergence, donner la valeur de la somme.

Exercice 5 (🚲) On étudie la suite (u_n) définie par : $u_0 \in]0, \pi/2[$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1) Montrer que (u_n) est une suite à termes positifs, et qu'elle est convergente.

2) Déterminer la limite de (u_n).

3)
- **a)** Donner un DL à l'ordre 3 de u_{n+1} en fonction de u_n, quand n tend vers $+\infty$. En déduire un équivalent de u_n^3 en fonction de $(u_n - u_{n+1})$.
- **b)** Déterminer la nature de la série de terme général u_n^3.

4) Déterminer la nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

5)
- **a)** Donner un équivalent de $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ en fonction de u_n, quand n tend vers $+\infty$.
- **b)** En déduire la nature des séries de termes généraux u_n^2 et u_n.

Exercice 6 Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \begin{cases} 1/n \text{ si } n \text{ est un carré} \\ 1\big/n^2 \text{ sinon} \end{cases}$.

Exercice 7 Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants.

1) $u_n = \dfrac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} 2n}$

2) $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

3) $w_n = \mathrm{e} - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

4) $\alpha_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

5) $\beta_n = \dfrac{1}{n \cos^2 n}$

6) $\gamma_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

7) $a_n = \dfrac{2^n n}{n!}$

8) $b_n = \left(\dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}\right)^n$

9) $c_n = \dfrac{3n^3+2n-1}{(n+1)(n^2+n+1)}$

Exercice 8 Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, après avoir montré son existence.

Exercice 9 Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!}$.

Exercice 10 Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$, après avoir montré son existence.

Exercice 11 **– Transformation d'Abel –**

Soit (a_n) une suite positive décroissante de limite nulle et (S_n) une suite bornée.

1) Montrer que la série $\sum (a_n - a_{n+1}) S_n$ est convergente.

2) En déduire que la série $\sum a_{n+1}(S_{n+1} - S_n)$ est convergente.

3) Établir que, pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Z}$, la série $\displaystyle\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ est convergente.

Exercice 12 Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{(\ln 2)^2 + \cdots + (\ln n)^2}$.

Exercice 13 Soit $\alpha > 1$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}$ et $R_N = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Étudier, selon α, la nature de la série $\displaystyle\sum_{N \geqslant 1} \frac{R_N}{S_N}$.

Exercice 14 Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, telle que $f(0) = 0$ et $|f'(0)| < 1$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n,\ u_{n+1} = f(u_n)$. Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $|u_0| < \alpha$, la série de terme général u_n converge absolument.

Exercice 15 Déterminer les natures des séries suivantes.

1) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^{42}}$

2) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{(-1)^n n^2 + 3n}{\mathrm{e}^n}$

3) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin(n)}{\operatorname{sh}(n)}$

Exercice 16 (🚲) Déterminer les natures des séries suivantes.

1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$

2) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$

3) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1-2!+\cdots+(-1)^{n-1}n!}{(n+1)!}$

4) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-\ln(n))^n}{n^{\ln(n)}}$.

Exercice 17 (✎) Calculer $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{2^i 3^j}$.

Exercice 18 Soit $q \in]-1,1[$.

1) Montrer que la famille $(q^{k\ell})_{k,\ell\in\mathbb{N}^*}$ est sommable.

2) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{q^k}{1-q^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)q^n$, où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.

Exercice 19 (🚲) En considérant l'exponentielle complexe comme définie par sa série, montrer que pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, alors $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^{z}\mathrm{e}^{z'}$.

Feuille d'exercice n° 29 : **Espaces euclidiens**

Exercice 1 ( ) Sur $\mathbb{R}_3[X]$, on considère les formes bilinéaires suivantes. Dire lesquelles sont des produits scalaires.

1) $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$

2) $\chi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(P'(t)Q(t) + P(t)Q'(t)\right)\mathrm{d}t$

3) $\psi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t + P(0)Q(0).$

Exercice 2 ( ) À deux polynômes $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$, on associe

$$\langle P,Q\rangle = (a_0 + a_1)b_0 + (a_0 + 3a_1)b_1 + 3a_2b_2.$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Exercice 3 ( ) Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $v_1, \dots, v_n \in E$.

Montrer l'inégalité : $\displaystyle\left\|\sum_{i=1}^{n} v_i\right\|^2 \leqslant n\sum_{i=1}^{n} \|v_i\|^2.$

Exercice 4 ( ) Soit $a < b$ deux réels.

1) Soient f et g deux applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Étudier le cas d'égalité.

2) Soit f une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Étudier le cas d'égalité.

Exercice 5 ( ) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que, sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, l'application $(A,B) \to \operatorname{tr}(A^\top B)$ est un produit scalaire.

2) Soit N la norme associée à ce produit scalaire (on l'appelle *norme de Frobenius*), montrer que :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

3) Montrer que :

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), |\operatorname{tr}(A)| \leqslant \sqrt{n}N(A).$$

Exercice 6 Soit E un espace euclidien, et $(e_1, ..., e_n)$ des vecteurs unitaires vérifiant : $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (x|e_i)^2$.

1) Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une famille orthogonale.

2) Montrer que $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormale.

Remarque : on ne suppose pas que la dimension de l'espace est n.

Exercice 7 (✎) $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Vérifier que les vecteurs $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (1, 0, 2)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt.

Exercice 8

1) Montrer qu'un parallélogramme est un rectangle si et seulement si ses diagonales sont de même longueur.

2) Montrer qu'un parallélogramme est un losange si et seulement si ses diagonales sont orthogonales.

Exercice 9 (✎) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer les égalités suivantes.

1) $F \subset G \Rightarrow G^\perp \subset F^\perp$ **2)** $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ **3)** $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

Exercice 10 (🚲)

On munit $\mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R})$ du produit scalaire usuel : $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Déterminer $F^\perp$, avec $F = \{f \in \mathscr{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. Que peut-on en conclure ?

Indication : si $f \in F^\perp$, on pourra s'intéresser à la fonction $t \mapsto tf(t)$.

Exercice 11 (🚲) On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire : $(P, Q) \to \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. Existe t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall P \in \mathbb{R}[X], (P|A) = P(0)$?

Exercice 12 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur. Montrer que p est orthogonal (c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}(p)$) si et seulement si : $\forall x \in E : \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Indication : pour montrer une des implications, avec $k \in \mathrm{Ker}\, p$ et $i \in \mathrm{Im}\, p$, on pourra considérer le vecteur $i + \lambda k$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 13 Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2. Soit x et $y \in E$. Montrer les propriétés suivantes.

1) Si $\|x\| = \|y\|$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y = s(x)$ où s est la symétrie orthogonale par rapport à H.

2) Si $\langle x, y \rangle = \|y\|^2$, alors il existe un hyperplan H de E tel que $y = p(x)$ où p est la projection orthogonale sur H.

3) Les hyperplans trouvés précédemment sont-ils uniques ?

Exercice 14 Déterminer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (\mathrm{e}^{\,x} - (ax+b))^2 dx$.

Exercice 15 (🚲) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. À tout couple (P,Q) de E, on associe $\langle P, Q\rangle = \int_0^\pi P(\cos t)Q(\cos t)dt$.
On appelle k^{e} polynôme de Tchebychev le polynôme défini par :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ P_k(\cos\theta) = \cos(k\theta).$$

1) Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ définit un produit scalaire sur E.

2) Montrer que les polynômes de Tchebychev $P_0, \ldots, P_n$ constituent une base orthogonale de E.

Bonus : si cela n'est pas clair, montrez l'existence et l'unicité de ces polynômes, déterminer le degré et le coefficient dominant de chacun.

Exercice 16 Soit E un espace euclidien, f et g deux endomorphismes de E qui commutent. On suppose que les matrices de f et de g dans une base orthonormée sont respectivement symétriques et antisymétriques.

Montrer que $\forall u \in E,\ \langle f(u), g(u)\rangle = 0$, puis que $\forall u \in E,\ \|(f-g)(u)\| = \|(f+g)(u)\|$.

Exercice 17 (✎) Soit $E = \mathbb{R}^3$, muni de sa structure euclidienne usuelle, soit $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les matrices dans la base $\mathscr{C}$ des transformations suivantes.

1) La symétrie et la projection orthogonale par rapport au plan d'équation $x - 2y + 3z = 0$.

2) La symétrie et la projection orthogonale par rapport à la droite engendrée par le vecteur $e_1 - 4e_3$.

Feuille d'exercice n° 30 : **Fonctions de deux variables**

Exercice 1 ( ) Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = |x|^y$, avec la convention $0^0 = 1$. En quels points la fonction f est-elle continue ?

Exercice 3 ( ) Étudier l'existence et, le cas échéant, calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

1) $f(x,y) = 2xy^3 - 3y$ **2)** $g(x,y) = \max(|x|,|y|)$ **3)** $h(x,y) = \sqrt{1+x^2y^2}$

Exercice 4 On définit sur $\mathbb{R}^2$ la fonction f par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad x = y = 0 \end{cases}.$$

La fonction f est-elle continue ? De classe $\mathscr{C}^1$?

Exercice 5 ( ) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Déterminer les dérivées (évenuellement partielles) des fonctions suivantes.

1) $g : x \mapsto f(x,x)$ **2)** $h : (x,y) \mapsto f(y, f(x,x))$

Exercice 6 – Fonctions positivement homogènes –
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction f est dite *positivement homogène de degré* α si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y).$$

1) Donner un exemple de fonction positivement homogène (avec son degré), et un exemple de fonction non homogène.

2) Montrer que si f est positivement homogène de degré α, alors ses dérivées partielles sont positivement homogènes de degré $\alpha - 1$.

3) Montrer que f est positivement homogène de degré α si et seulement si f vérifie la relation d'Euler :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y).$$

Indication : étudier $\varphi : t \mapsto f(tx,ty)$.

Exercice 7 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles suivantes, en utilisant le changement de variables $u = x + y$ et $v = x - y$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lambda.$$

Exercice 8 **– Coordonnées polaires –**
On définit $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{ (x,0) \mid x \in \mathbb{R}_- \}$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, on définit sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi[$ la fonction

$$g : (r,\theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

1) Représenter D et montrer que D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2) Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^1$.

3) Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f, et réciproquement.

4) *Exemple* : dériver $u \mapsto \|u\|$ en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires.

5) *Application* : résoudre sur D les équations aux dérivées partielles suivantes, en utilisant les coordonnées polaires.

a) $x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ **b)** $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$.

Exercice 9 Étudier les extremums globaux des fonctions suivantes.

1) $f : (x,y) \mapsto x^3 + y^3$, sur $\mathbb{R}^2$.

2) $g : u \mapsto \|u\|^2 + \sin(\|u\|^2)$, sur $]-1,1[^2$.

3) $h : (x,y) \mapsto x^2 + 3y^2 - 2x - 10y + 2xy + 6$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10 On note

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 < x < y < 1 \right\},$$
$$\overline{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1 \right\}.$$

On admet que D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

1) Représenter D et $\overline{D}$.

2) Étudier sur $\overline{D}$ les extremums de la fonction

$$f : (x,y) \mapsto x^3 + 5y^3 + 3x^2y + 3xy^2 - 3y^2.$$