Devoir à la maison n° 7

À rendre le 25 novembre

I. Un exercice sur les matrices triangulaires supérieures

Soit $\mathcal{E}$, l'ensemble des matrices de la forme $M(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Autrement dit : $\mathcal{E} = \{M(a,b) | (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.
On note I_3 la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1) **a)** L'ensemble $\mathcal{E}$ est-il stable par addition ?

b) Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ est stable par le produit matriciel. Justifier que I_3 appartient à $\mathcal{E}$ et que toutes les matrices de $\mathcal{E}$ commutent entre elles.

c) Si une matrice $M(a,b)$ appartient à $\mathcal{E}$, est-elle inversible ? Si oui, déterminer son inverse et montrer que son inverse est aussi dans $\mathcal{E}$.

2) Pour toute application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit, pour tout réel x, les matrices $\widehat{M}(x)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \widehat{M}(x) = M(x, f(x))$$

On cherche les fonctions f solutions du problème suivant :

« f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\widehat{M}(x)\widehat{M}(y) = \widehat{M}(x+y)$ » (*)

a) Montrer que, si f est une solution du problème (*), alors f vérifie une équation fonctionnelle de la forme

« pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = \alpha f(x) + \beta f(y) + \varphi(x,y)$»

où α, β sont des constantes à déterminer, ainsi que $\varphi(x,y)$, une quantité qui dépend (simplement) de x et y.

b) Montrer que, si f est une solution du problème (*), alors
— $f(0) = 0$
— $\widehat{M}(0) = I_3$
— pour tout réel x, $\widehat{M}(x)$ est inversible et $\widehat{M}^{-1}(x) = \widehat{M}(-x)$.

c) Montrer que, si f est une solution du problème (*), alors sa dérivée f' est une fonction affine.

d) Déterminer exactement toutes les solutions du problème (*).

3) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & a & \frac{a^2}{2} \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de P^n.

Cette expression est-elle encore valable avec $n = -1$?

— FIN —