VI : Calculs d'intégrales et équations différentielles.

1. Résultats d'analyse

Aucune notion d'analyse (limite, continuité, dérivabilité *etc.*) n'a été étudiée en profondeur, aucune définition formelle n'a été donnée.

1.1. Continuité et dérivabilité d'une fonction à valeurs complexes.

1.2. Primitives.

1.3. Intégration de fonctions complexes.

Le théorème fondamental du calcul différentiel n'a pas été démontré.

1.4. Méthodes de calcul.

1.4a. Intégration par parties.

1.4b. Changement de variables.

1.5. Primitives de fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

Aucune formule générale n'a été présentée et n'est à savoir. Aucune méthodologie de décomposition en éléments simples n'a été présentée.

2. Généralités sur les équations différentielles linéaires.

2.1. Cadre.

2.2. Structure de l'ensemble des solutions.

3. Équations linéaires du premier ordre.

3.1. Résolution de l'équation homogène.

3.2. Résolution d'une équation avec second membre.

3.3. Résolution pratique.

3.3a. Schéma de résolution (à connaître !).

4. Équations différentielles du second ordre à coefficients constants.

4.1. Résolution d'une équation homogène.

4.2. Résolution d'une équation avec second membre.

4.3. Seconds membres particuliers

Questions de cours

Ces questions de cours sont à savoir traiter, et non à apprendre par cœur.
Les colleurs sont libres de demander tout ou partie d'une de ces questions de cours, mais aussi de mélanger les différentes questions ou de donner des exemples numériques différents de ceux proposés.
L'évaluation de la maîtrise du cours ne se limite pas à la question de cours : la connaissance des définitions et théorèmes du cours pourra être évaluée à tout moment de la colle.

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, soit φ une fonction dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$. Montrer que l'application $x \mapsto e^{\varphi(x)}$ est dérivable sur I et déterminer sa dérivée.
- Donner la définition d'une primitive. Énoncer le théorème fondamental de l'analyse. Donner les primitives usuelles ainsi que leur domaine de validité.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. On désigne par $\mathbb{K}$: $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
  Soit $f : I \to \mathbb{K}$. Rappeler la définition de « f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I », « f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I », « f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I ».
  Est-ce que toute fonction dérivable sur I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ?
- Donner l'ensemble des primitives de la fonction inverse, sur l'ensemble de définition usuel de cette dernière.
- Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\cos(x)$.
- Énoncer et démontrer la formule d'intégration par parties (on fera attention à bien préciser toutes les hypothèses).
- Calculer $\displaystyle\int_0^1 (\alpha^2 - \alpha)\mathrm{e}^{\alpha}\,\mathrm{d}\alpha$.
- Énoncer et démontrer la formule de changement de variable (on fera attention à bien préciser toutes les hypothèses).
- Calculer $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}\mathrm{d}t$ en utilisant le changement de variable $x = \sqrt{t}$.
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire (resp. impaire). Que peut-on dire sur $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$? Le démontrer.
- Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2x^2+2x-4}$.
- Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2x^2+3x+3}$.
- Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+4}$.
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.
  Énoncer et démontrer le théorème de résolution de $y' + ay = 0$ où $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$.
  Résoudre l'équation $y' - \dfrac{1}{1+x^2}y = 0$ d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Énoncer le principe de superposition pour une équation différentielle linéaire du premier ordre.
  Résoudre l'équation différentielle $y' + 2y = 6x^2 + 2x + \mathrm{e}^{-2x}$.
- Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $y' - \dfrac{2x}{1+x^2}y = \dfrac{x}{1+x^2}$. Déterminer la seule solution de cette équation vérifiant $y(0) = 0$.
- Déterminer une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'(x) - 2xy(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{1+x^2}$, en utilisant la méthode de la variation de la constante.
- Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$. Donner sans démonstration l'ensemble des solutions complexes de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$.
- Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y = 0$, d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Donner les solutions réelles de l'équation différentielle $y''+y'+y = 0$.
- Résoudre l'équation $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{x}$.
- Résoudre l'équation $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$.
- Résoudre l'équation $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{x}$.
- Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 2\cos x$.