Semaine 6 du 3 novembre 2025 (S45)

VI : Calculs d'intégrales et équations différentielles.

1. Résultats d'analyse

Aucune notion d'analyse (limite, continuité, dérivabilité *etc.*) n'a été étudiée en profondeur, aucune définition formelle n'a été donnée.

1.1. Continuité et dérivabilité d'une fonction à valeurs complexes.

1.2. Primitives.

1.3. Intégration de fonctions complexes.

Le théorème fondamental du calcul différentiel n'a pas été démontré.

1.4. Méthodes de calcul.

1.4a. Intégration par parties.

1.4b. Changement de variables.

1.5. Primitives de fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

Aucune formule générale n'a été présentée et n'est à savoir. Aucune méthodologie de décomposition en éléments simples n'a été présentée.

Les équations différentielles ne sont pas au programme de colles cette semaine.

Questions de cours

Ces questions de cours sont à savoir traiter, et non à apprendre par cœur.
Les colleurs sont libres de demander tout ou partie d'une de ces questions de cours, mais aussi de mélanger les différentes questions ou de donner des exemples numériques différents de ceux proposés.
L'évaluation de la maîtrise du cours ne se limite pas à la question de cours : la connaissance des définitions et théorèmes du cours pourra être évaluée à tout moment de la colle.

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, soit φ une fonction dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$. Montrer que l'application $x \mapsto e^{\varphi(x)}$ est dérivable sur I et déterminer sa dérivée.
- Donner la définition d'une primitive. Énoncer le théorème fondamental de l'analyse. Donner les primitives usuelles ainsi que leur domaine de validité.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. On désigne par $\mathbb{K}$: $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

  Soit $f : I \to \mathbb{K}$. Rappeler la définition de « f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I », « f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I », « f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I ».

  Est-ce que toute fonction dérivable sur I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ?
- Donner l'ensemble des primitives de la fonction inverse, sur l'ensemble de définition usuel de cette dernière.
- Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\cos(x)$.

— Énoncer et démontrer la formule d'intégration par parties (on fera attention à bien préciser toutes les hypothèses).

— Calculer $\displaystyle\int_0^1 (\alpha^2 - \alpha)\mathrm{e}^{\,\alpha}\,\mathrm{d}\alpha$.

— Énoncer et démontrer la formule de changement de variable (on fera attention à bien préciser toutes les hypothèses).

— Calculer $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}\mathrm{d}t$ en utilisant le changement de variable $x = \sqrt{t}$.

— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paire (resp. impaire). Que peut-on dire sur $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$? Le démontrer.

— Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2x^2+2x-4}$.

— Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2x^2+3x+3}$.

— Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+4}$.