Devoir à la maison n° 11

À rendre le 20 janvier

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f est *uniformément continue* lorsque :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall (x, y) \in I^2,\ |x - y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \epsilon.$$

1) Expliquer, en une phrase, la différence entre la continuité et la continuité uniforme.

2) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, soit $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & ax+b \end{array}$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que si une fonction est uniformément continue sur I, alors elle est continue sur I.

4) Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ est-elle nécessairement uniformément continue sur $\mathbb{R}$?

5) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Soit $k > 0$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f est *k-lipschtzienne* sur I lorsque :

$$\forall (x, y) \in I^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k \times |x - y|$$

a) Soit $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{1+|x|} \end{array}$. Montrer que f est k-lipschtzienne sur $\mathbb{R}$, où k est une constante que l'on déterminera.

b) Soit $k > 0$. Montrer que si une fonction est k-lipschtzienne sur I, alors elle est uniformément continue sur I.

c) Si une fonction est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, existe-t-il nécessairement $k > 0$ tel que f est k-lipschtzienne sur $\mathbb{R}$?

6) Soit f une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

a) Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ |x - y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant 1.$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Soit N le plus petit entier tel que $\frac{x}{N} < \eta$. Justifier l'existence de N et exprimer N en fonction de x et η.

c) Montrer que :

$$|f(x) - f(0)| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \left| f\left(\frac{(k+1)x}{N}\right) - f\left(\frac{kx}{N}\right) \right|.$$

d) Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \leqslant ax + b.$$

— FIN —