Devoir surveillé n°2

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Un exercice vu en TD.

1) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k i^{k-1} = \frac{i - n i^n - (n+1) i^{(n+1)}}{2}$

2) Soit $p \in \mathbb{N}$. En déduire les valeurs des deux sommes :

$$S_1(p) = 1 - 3 + 5 - 7 + \cdots + (-1)^p(2p+1),$$
$$S_2(p) = 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + (-1)^{(p+1)}2p.$$

II. Résolution d'équations.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $n = 2p+1$. Soit $a \in \mathbb{C}^*$.

Partie 1 : Résolution de l'équation $\dfrac{a+z}{a-z} = w$

Soit $w \in \mathbb{C}$. On considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$.

$$(E_1) \quad \frac{a+z}{a-z} = w$$

1) Donner, selon les valeurs de w, l'ensemble des solutions de (E_1).

2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on suppose que $w = e^{i\alpha}$ et $w \neq -1$.

a) Simplifier l'expression :

$$\frac{w-1}{w+1}$$

b) En déduire, dans ce cas, une expression des solutions de (E_1) ne faisant intervenir que a, α et la fonction tangente.

Partie 2 : Résolution de l'équation $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{2k} z^{2k} a^{n-2k}$

On considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(E_2) \quad \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{2k} z^{2k} a^{n-2k} = 0$$

3) Soit $z \in \mathbb{C}$.

a) Exprimer $(z+a)^n$ puis $(-z+a)^n$ sous forme de sommes.

b) En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{2k} z^{2k} a^{n-2k}$ faisant intervenir $(z+a)^n$ et $(-z+a)^n$.

4) Déterminer l'ensemble des solutions $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ de l'équation :

$$\left(\frac{z+a}{-z+a}\right)^n = -1.$$

5) En déduire l'ensemble des solutions de (E_2) que l'on exprimera en utilisant la fonction tangente.

Partie 3 : Résolution de l'équation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{z+a}{a-z}\right)^k = 0$

On considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{z+a}{a-z}\right)^k = 0$$

6) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Montrer que z est solution de (E_3) si et seulement si $\dfrac{z+a}{a-z}$ est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité différente de 1.

7) En déduire l'ensemble des solutions de (E_3) que l'on exprimera en utilisant la fonction tangente.

III. Argument tangente hyperbolique.

L'objectif de ce problème est d'étudier la fonction réciproque de la tangente hyperbolique : l'*argument tangente hyperbolique*, notée argth.

Dans tout le problème, on considère un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

1) Définition en tant que réciproque.

- **a)** Rappeler sans démonstration le tableau de variations de la fonction th.
- **b)** Démontrer que th admet une réciproque, que nous noterons argth, et déterminer son tableau de variations.
- **c)** Exprimer th' en fonction de th (on justifiera le résultat).
- **d)** Étudier la dérivabilité de argth et déduire de la question précédente une expression explicite de argth'.
- **e)** Étudier la position relative de la courbe de argth et de sa tangente au point d'abscisse 0.
- **f)** Tracer sur un même dessin les courbes de th, argth et la droite d'équation $y = x$.

2) Expression explicite de l'argument tangente hyperbolique.

- **a)** Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre en x l'équation $y = \mathrm{th}(x)$ et en déduire une expression explicite de $\mathrm{argth}(y)$.
- **b)** Retrouver à partir de cette expression de $\mathrm{argth}(y)$ l'expression de de $\mathrm{argth}'(y)$ obtenue à la question **1)d)**.

3) Une étude de fonction.

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{argth}\left(\dfrac{3\,\mathrm{th}(x)+1}{3+\mathrm{th}(x)}\right)$.

- **a)** Déterminer le domaine de définition de f.

b) Déterminer le domaine de dérivabilité de f ainsi qu'une expression simplifiée de $f'(x)$, lorsque c'est possible.

c) En déduire une expression simplifiée de f.

4) Une autre étude de fonction.

On considère la fonction $g : x \mapsto \operatorname{argth}\left(\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch}(x)-1}{\operatorname{ch}(x)+1}}\right)$.

a) Déterminer le domaine de définition de g.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $y = \operatorname{ch}(x)$. Montrer que $g(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$.

c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{|x|}{2}$.

5) Un calcul de somme.

a) Montrer que si $x, y \in \mathbb{R}$, alors

$$\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th}(x) + \operatorname{th}(y)}{1+\operatorname{th}(x)\operatorname{th}(y)}.$$

b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\operatorname{argth}\left(\frac{1}{k^2+3k+1}\right) = \operatorname{argth}\left(\frac{1}{k+1}\right) - \operatorname{argth}\left(\frac{1}{k+2}\right)$$

c) En déduire l'existence et la valeur de la limite de la suite de terme général :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{argth}\left(\frac{1}{k^2+3k+1}\right) = \operatorname{argth}\left(\frac{1}{1^2+3\times 1+1}\right) + \cdots + \operatorname{argth}\left(\frac{1}{n^2+3n+1}\right).$$

— FIN —