

## Devoir à la maison n° 13

À rendre le 24 février

On note  $E$  l'ensemble des fonctions  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  bijectives, dérivables et vérifiant

$$f' = f^{-1}. \quad (\star)$$

Dans tout le problème, on considère  $f \in E$ .

- 1) Déterminer un élément de  $E$  de la forme  $x \mapsto cx^p$ , où  $c$  et  $p$  sont des réels.
- 2) Montrer que  $f$  et  $f^{-1}$  sont infiniment dérivable.
- 3) Quelle est la limite de  $f$  en 0 ? Et pour  $f'$  ?
- 4) Quelle est la limite de  $f$  en  $+\infty$  ? Et pour  $f'$  ?
- 5) Montrer que  $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$ .
- 6) Montrer de même que  $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .
- 7) En déduire que  $f$  admet au moins un point fixe sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- 8) Montrer que ce point fixe est unique.
- 9) Justifier que  $f$  est convexe. En déduire le signe de  $f - \text{Id}$ .
- 10) Soit  $g \in E$  distincte de  $f$ . On souhaite montrer que  $g$  admet le même point fixe que  $f$ .  
Dans la suite, on prolonge  $f$  et  $g$  par continuité en 0, et on note  $a$  le point fixe de  $f$  et  $b$  celui de  $g$ .  
On raisonne par l'absurde, en supposant que  $a < b$ .
  - a) Montrer que  $\mathcal{E} = \{x \in [0, a[ \mid g(x) \geq f(x)\}$  admet une borne supérieure  $c$ , puis que  $g(c) = f(c)$ .
  - b) Montrer que pour tout  $t \in ]c, a[$ ,  $f^{-1}(t) < g^{-1}(t)$ .
  - c) Conclure, et déterminer le point fixe commun des éléments de  $E$ .

— FIN —