Semaine 9 du 24 novembre 2025 (S48)

IX : Matrices.

1 Définitions élémentaires

1.1 Opérations sur les matrices

1.2 Matrices carrées

1.3 Matrices inversibles

1.4 Matrices et opérations élémentaires

1.5 Transposition et matrices symétriques

1.6 Inversion de matrices triangulaires.

2 Systèmes linéaires

2.1 Généralités

2.2 Systèmes et matrices inversibles

Questions de cours

Ces questions de cours sont à savoir traiter, et non à apprendre par cœur.
Les colleurs sont libres de demander tout ou partie d'une de ces questions de cours, mais aussi de mélanger les différentes questions ou de donner des exemples numériques différents de ceux proposés.
L'évaluation de la maîtrise du cours ne se limite pas à la question de cours : la connaissance des définitions et théorèmes du cours pourra être évaluée à tout moment de la colle.

— Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ et $B = (b_{k,\ell})_{1\leqslant k\leqslant q, 1\leqslant \ell\leqslant r}$ deux matrices de dimensions respectives $n \times p$ et $q \times r$. Sous quelle condition le produit AB existe-t-il ? Le définir le cas échéant.

Application : calculer $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

— Montrer que le produit matriciel est associatif. Est-il commutatif ? Justifier.

— Donner et démontrer la formule du binôme de Newton matricielle. On admettra que si A et B commutent, alors pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, A^p et B^q commutent.

— Donner la définition de « matrice inversible ». Toutes les matrices sont-elles inversibles ? Le produit de deux matrices inversibles A et B est-il inversible ? Si oui, quel est l'inverse du produit AB ? Justifier.

— Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 3A - 2I_2$. **En déduire** que A est inversible et préciser son inverse.

— Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Donner (sans démonstration) une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible ; préciser quel est son inverse.

— Donner la définition d'une transposée. Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, quelle est la transposée de $A + \lambda B$? de AC (la démonstration pourra être demandée) ? Montrer que si A est inversible, alors $A^\top$ est inversible et préciser son inverse.

— Donner la définition d'une matrice symétrique, d'une matrice antisymétrique. Montrer que toute matrice carrée de taille n se décompose de manière unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

— Donner la définition de matrice triangulaire supérieure. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.
Donner (sans démonstration) une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice triangulaire supérieure soit inversible.

— Définir les matrices (carrées) élémentaires. Que vaut le produit de deux matrices élémentaires ? Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que vaut le produit $ME_{i,j}$? le produit $E_{i,j}M$? On pourra justifier par un dessin du produit matriciel.

— Énoncer et démontrer le théorème de structure des solutions d'un système linéaire.

— La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Le cas échéant, déterminer son inverse.