



LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON  
SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR  
CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.  
ANNÉE 2017 - 2018

C6 : ANALYSE FRÉQUENTIELLE DES SYSTÈMES ASSERVIS

## TD 14 - Analyse fréquentielle des systèmes asservis(C6)

### Compétences

- **Modéliser :**
  - Identifier et caractériser les grandeurs physiques : caractéristiques fréquentielles
  - Systèmes linéaires continus et invariants
  - Signaux canoniques d'entrée : signaux sinusoïdaux
  - Schémas blocs, fonctions de transferts
- **Résoudre :** Procéder à la mise en oeuvre d'une démarche de résolution analytique
  - Réponse fréquentielle : systèmes du 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> ordre, intégrateur.

### 1 Étude d'une presse à injecter

#### a) Présentation

Les objets en matière plastique sont, pour la plupart, moulés par « injection ». Le procédé consiste à introduire, sous pression, la matière à l'état visqueux dans un moule fermé. Les machines utilisées sont appelées “presses à injecter” (voir la photo figure 1).



FIGURE 1 – Presse à injecter

#### Description du procédé :

La matière d'oeuvre, sous forme de granulés, est stockée dans une trémie. Elle s'écoule dans un fourreau qui fait office de “four”. Elle y est malaxée et entraînée vers l'avant par une vis sans fin (celle-ci est mise en rotation par un

moteur). Lorsqu'une quantité suffisante de matière visqueuse s'est amassée à l'avant du fourreau la vis translate pour la pousser dans le moule (la vis fait office de piston). La translation de la vis est obtenue par deux vérins hydrauliques. Les pressions mises en jeu sont de l'ordre de 1500 bars. Ce TD porte sur la mise en translation de la vis par les vérins hydrauliques asservis en position (figure 3)

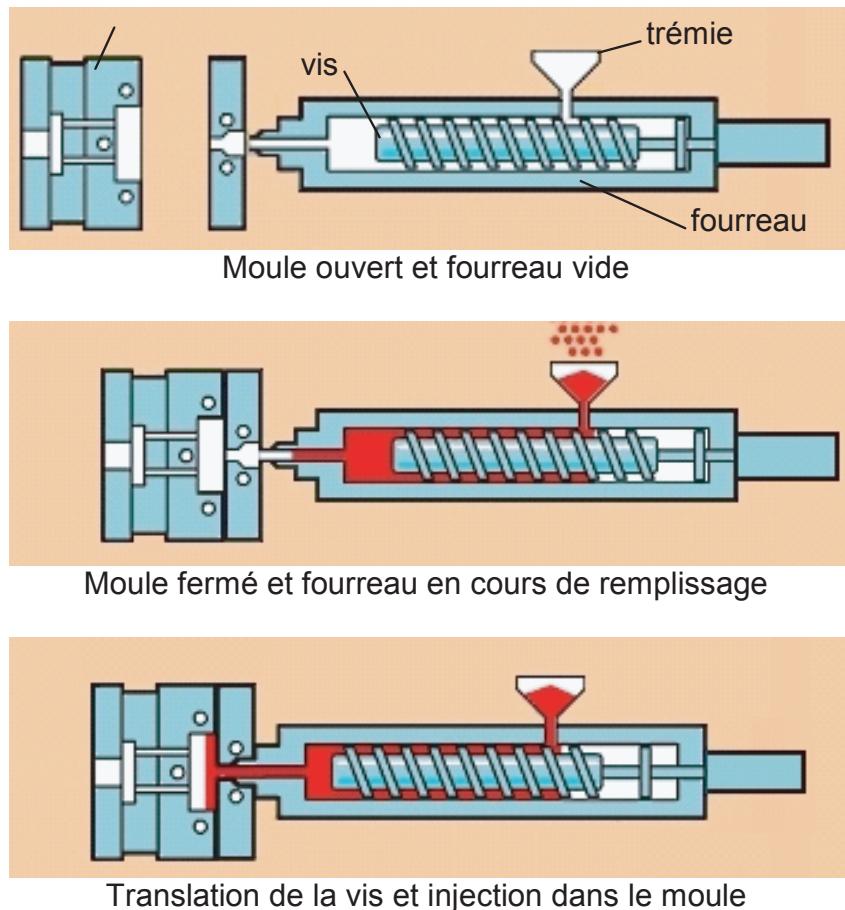


FIGURE 2 – Description du principe de fonctionnement de la presse à injecter

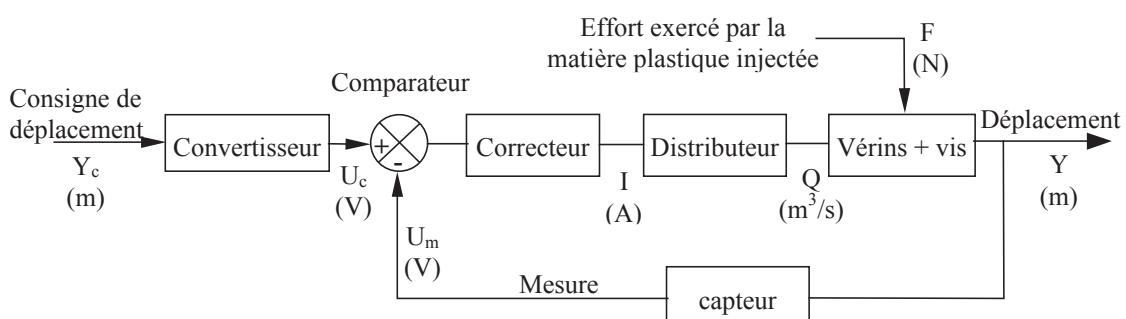


FIGURE 3 – Schéma bloc de l'asservissement de la presse à injecter

### b) Modélisation

Les deux vérins hydrauliques sont modélisés par un seul vérin équivalent (figure 4). Ce vérin est composé de deux chambres A et B séparées par un piston mobile de section S (surface en contact avec l'huile). Le déplacement de la charge liée au piston est repéré par la variable  $y(t)$ .

A l'instant  $t$  les pressions dans le vérin sont notées :

- chambre A, pression  $p_A(t)$ ,
- chambre B, pression  $p_B(t)$ .

L'ensemble mobile de masse  $M$  est soumis :

- à l'action de l'huile sur le piston :  $S(p_A(t) - p_B(t))$ ,
- à un effort résistant  $f(t)$  exercé par la matière plastique injectée,

• à du frottement visqueux qui s'oppose au déplacement en créant un effort proportionnel à la vitesse :  $k_v \frac{dy}{dt}$ .

Le débit d'alimentation  $q(t)$  servant à déplacer le piston est diminué :

- du débit de fuite  $q_f(t)$  entre les chambres A et B :  $q_f(t) = k_f(p_A(t) - p_B(t))$ ,
- du débit  $q_c(t)$  dû à la compressibilité de l'huile :  $q_c(t) = \frac{d(p_A(t) - p_B(t))}{dt}$ .

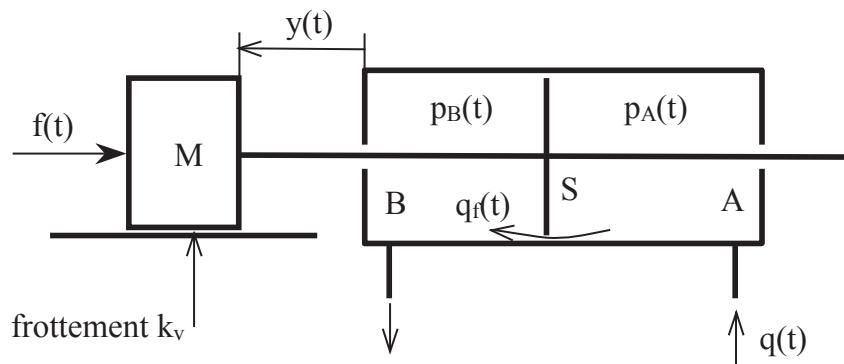
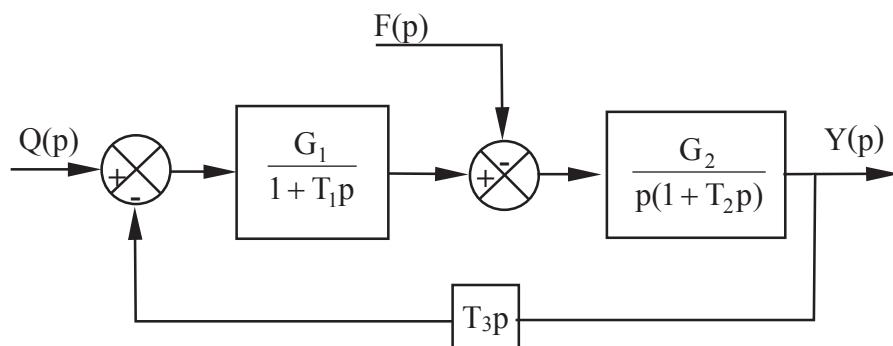


FIGURE 4 – Modélisation des vérins hydrauliques

### c) Questions

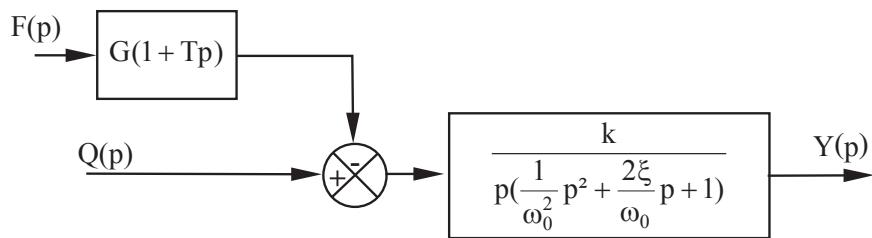
1. Donner l'équation traduisant le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'ensemble mobile.
2. Donner la relation reliant la vitesse du piston aux différents débits.
3. Montrer que l'on peut associer au vérin le schéma bloc suivant :



4. Donner les expressions de  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$ .
5. Déterminer les fonctions de transfert  $H_Q(p)$  et  $H_F(p)$  telles que :

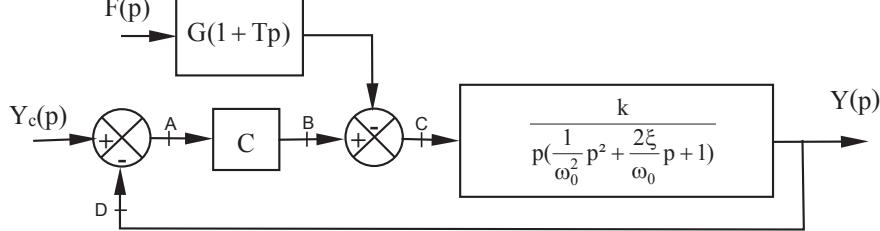
$$Y(p) = H_Q(p) Q(p) + H_F(p) F(p).$$

6. Montrez que l'on peut mettre le schéma bloc sous la forme suivante :



7. identifier  $G$ ,  $T$ ,  $k$ ,  $\omega_0$  et  $\xi$ .
8. On réalise maintenant un asservissement en position. Le schéma bloc est alors donné par la figure suivante. Ici,  $Y_c(p)$  est la consigne de déplacement et  $C$  le gain associé au capteur, à l'électronique de commande et au distributeur ( $C$  est une constante).

**Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte dans le cas où  $F(p) = 0$ .**



9. On s'intéresse dorénavant à l'étude fréquentielle de ce système en boucle ouverte. Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques pour cette modélisation avec :  $G = 3 \cdot 10^{-11}$ ,  $T = 30s$ ,  $k = 500$ ,  $\omega_0 = 200 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\xi = 1$  et  $C = 2 \cdot 10^{-3}$ . (Figures 5)
10. En utilisant le diagramme de Bode précédent donner les fonctions de transfert  $H_C(p)$  et  $H'_F(p)$  telles que :

$$Y(p) = H_C(p) (p) + H'_F(P) F(p).$$

11. Donner l'expression de l'erreur statique.
12. Quelle est la valeur de l'erreur statique lorsque l'effort résistant est nul. ?
13. Quelle est la valeur de l'erreur statique lorsque l'effort résistant est constant ?

#### d) Tracé du diagramme de Bode asymptotique

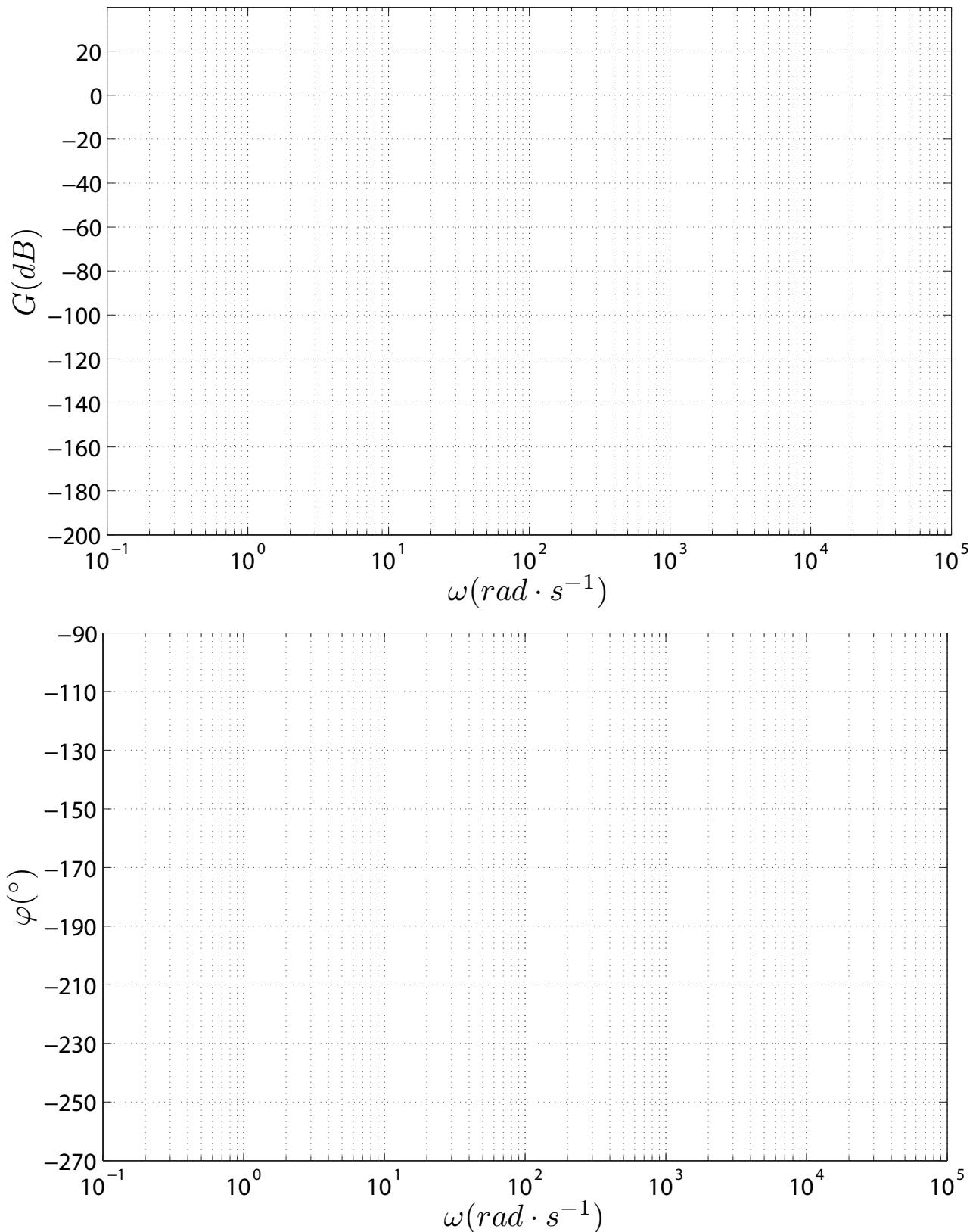


FIGURE 5 – Diagramme de Bode

## 2 Étude d'un automate d'exploration de l'hémostase par chronométrie

### a) Présentation

La société Stago est un laboratoire pharmaceutique de l'industrie du Diagnostic In Vitro (DIV) entièrement dédiée à l'exploration de l'hémostase et de la thrombose. L'hémostase est le processus physiologique qui permet d'interrompre le saignement pour éviter l'hémorragie. L'objet de cette étude, le STA Compact, est un automate de laboratoire destiné à l'analyse de l'hémostase.

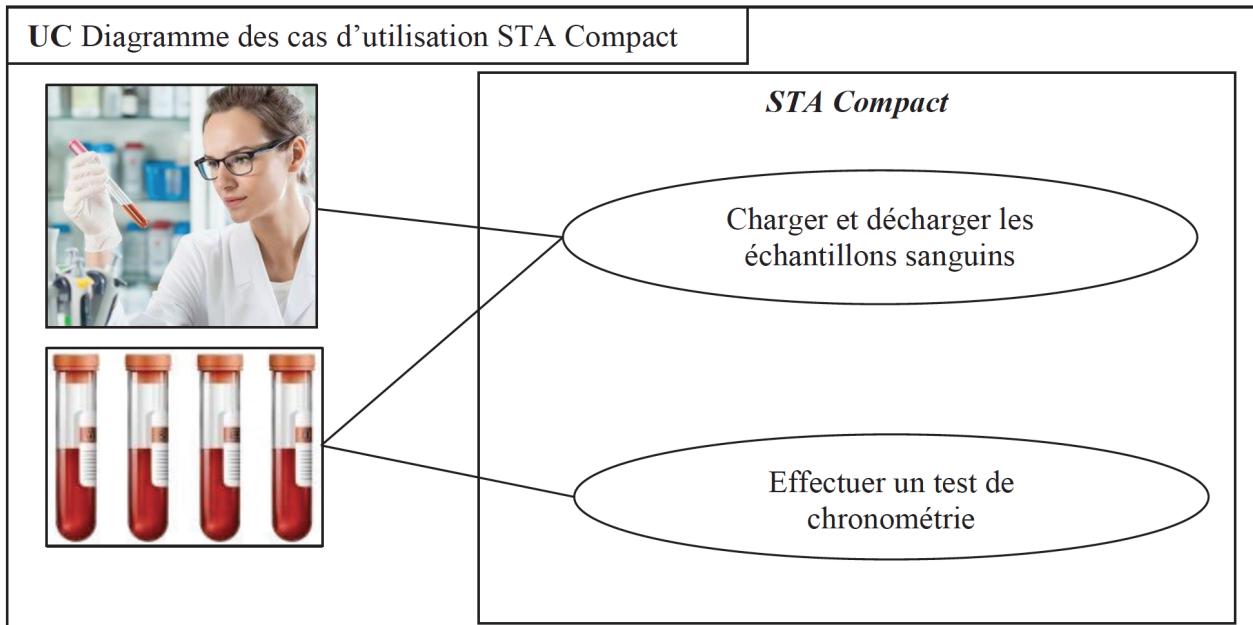


FIGURE 6 – Diagramme des cas d'utilisation du STA Compact

Le STA Compact permet de réaliser, entre autre, des tests de chronométrie afin de mesurer un temps de coagulation. Le principe du test de chronométrie est le suivant :

- une dose de réactif est mélangée à une dose de plasma sanguin précédemment étuvée dans une cuvette contenant une bille;
- l'ensemble est chauffé alors que la bille est mise en oscillation dans le mélange par un champ magnétique;
- on mesure l'amplitude de l'oscillation qui diminue sensiblement lors d'une variation de viscosité du mélange sang-réactif;
- le temps écoulé jusqu'à la diminution des oscillations donne le temps de coagulation.

### b) Étude de la mise en oscillation

Le principe de la chronométrie consiste à mesurer la variation de l'amplitude d'oscillation d'une bille placée dans la cuvette de mesure (figures 7 et 8). La bille, roulant sans glisser sur le fond cylindrique de la cuvette, est mise en mouvement par un champ magnétique variable induit par deux bobines motrices placées de part et d'autre de la tête de mesure. L'amplitude des oscillations est mesurée par deux autres bobines, l'une émettrice, l'autre réceptrice. Après amplification du signal mesuré, on obtient un signal quasi-sinusoidal, reflet de l'oscillation de la bille. A viscosité constante, on obtient un balancement pendulaire constant de la bille. Quand la viscosité augmente (phénomène de coagulation), l'amplitude d'oscillation de la bille varie. Pour chaque mesure, le champ magnétique est ajusté en fonction de la viscosité initiale du milieu et du type de test.

On se propose de modéliser le comportement de la bille pour en déduire la commande du système.

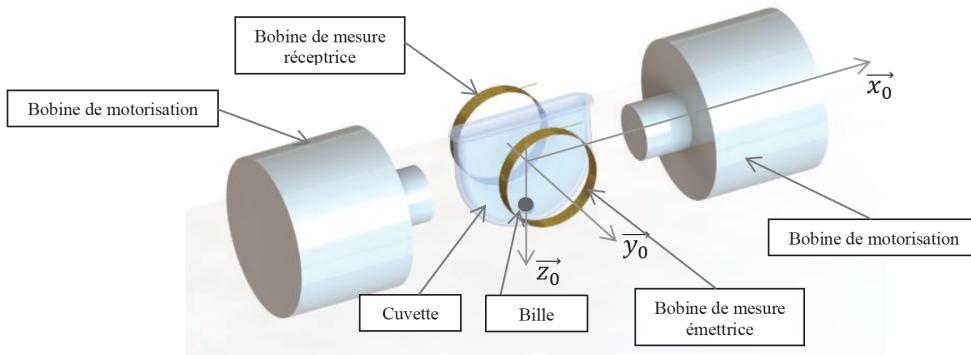


FIGURE 7 – Ensemble cuvette + bille avec bobines motrices et bobines de mesure

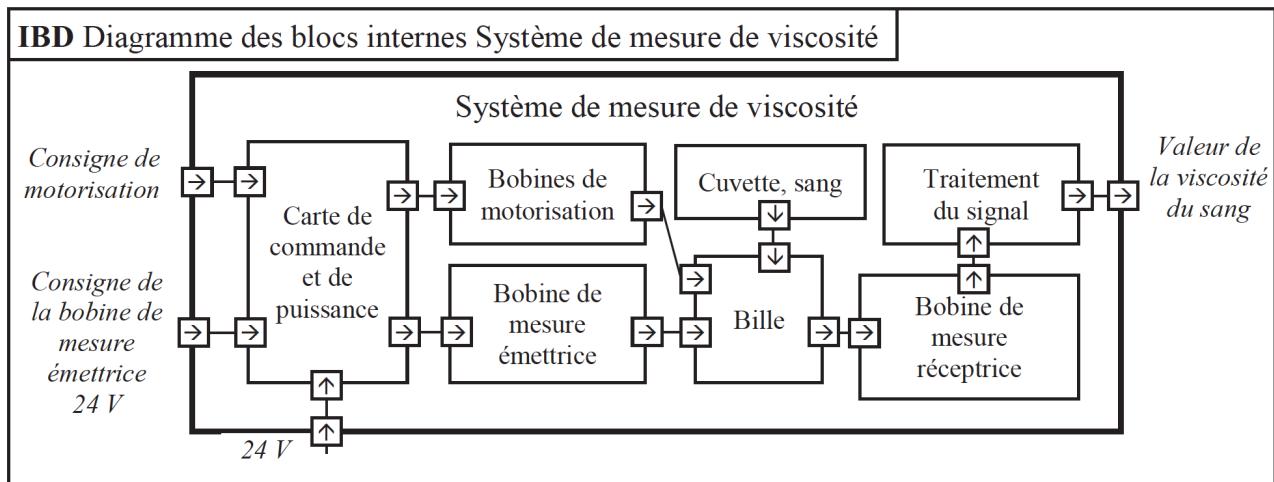
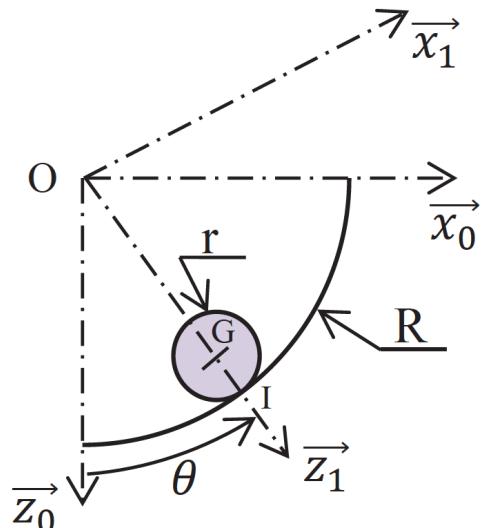


FIGURE 8 – Diagramme de bloc interne du système de mesure

- la bille de masse  $m$ , de centre de masse  $G$ , de rayon  $r$ , roule sans glisser sur un rail circulaire de rayon  $R$  dans le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$ ;
- $I$  est le point de contact entre la bille et le rail circulaire;
- la position de la bille sur le rail est repérée par :  $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ .



Les équation de la dynamique donne l'équation de mouvement de la bille suivante :

$$\frac{7}{5}m(R-r)\ddot{\theta}(t) + f_v(R-r)\dot{\theta}(t) + mg \sin\theta(t) = F(t) \cos\theta(t)$$

Avec :

- $f_v$ , le coefficient de frottement visqueux qui est donné par  $f_v = 6\pi \cdot r \cdot \eta$  où  $\eta$  est la viscosité du sang qui varie lors de la coagulation;
- $g$  est l'accélération de la pesanteur;
- $F(t)$  est l'effort de motorisation tel que :  $F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega_m t)$ ;

**Q 1 : En supposant  $\theta$  petit, linéariser l'équation du mouvement puis en déduire la fonction de transfert  $H(p) = \frac{\theta(p)}{F(p)}$**

**Q 2 : Mettre  $H(p)$  sous la forme canonique d'un système du second ordre dont on donnera les expressions du gain statique  $K_s$ , de la pulsation propre non amortie  $\omega_0$  et du coefficient d'amortissement  $\xi$  en fonction de  $f_v$ ,  $R$ ,  $r$ ,  $m$  et  $g$ .**

**Q 3 : On prendra les valeurs numériques suivantes pour cette question :  $\omega_0 = 21,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ;  $K_s = 25 \text{ N}^{-1}$ ;  $\xi = 4 \cdot f_v$ . Tracer, sur le document réponse (figure 9), le diagramme asymptotique de Bode en gain, ainsi que l'allure du diagramme réel pour les valeurs suivantes du coefficient de frottement visqueux  $f_v$ :  $f_v = 0,005$ ;  $f_v = 0,05$ ;  $f_v = 0,2$ . On pourra alors calculer s'il y a existence les coefficients de surtensions et les pulsations de résonance.**

**Q 4 : La sollicitation des bobines est sinusoïdale :  $F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega_m t)$ . Préciser, en justifiant votre réponse, la valeur à laquelle il faut régler la pulsation  $\omega_m$  pour pouvoir observer, au mieux, l'évolution du coefficient de frottement  $f_v$ .**

**Q 5 : Exprimer, pour un système du second ordre, en fonction de  $\xi$ , le rapport des amplitudes de sortie à  $\omega \rightarrow 0$  et  $\omega = \omega_0$  pour une même amplitude du signal d'entrée.**

**Q 6 : Les figures 9 a, b, c, d représentent, avec  $f_v$  constant, l'évolution de la position de la bille  $\theta(^{\circ})$  en fonction du temps  $t(s)$  pour différentes valeurs de pulsation  $\omega_m$ . A partir de ces courbes et des résultats précédents, déterminer la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi$ .**

**Q 7 : Exprimer alors le coefficient de viscosité  $\eta$  du sang correspondant en fonction de  $r$ .**

**Q 8 : A partir de ces analyses, en justifiant votre réponse, donner l'allure de la courbe  $\theta$  en fonction de  $t$  obtenue à la pulsation  $\omega_0$  lorsque la viscosité du sang varie au fur et à mesure de la coagulation (si l'on suppose que  $f_v$  augmente avec la coagulation).**

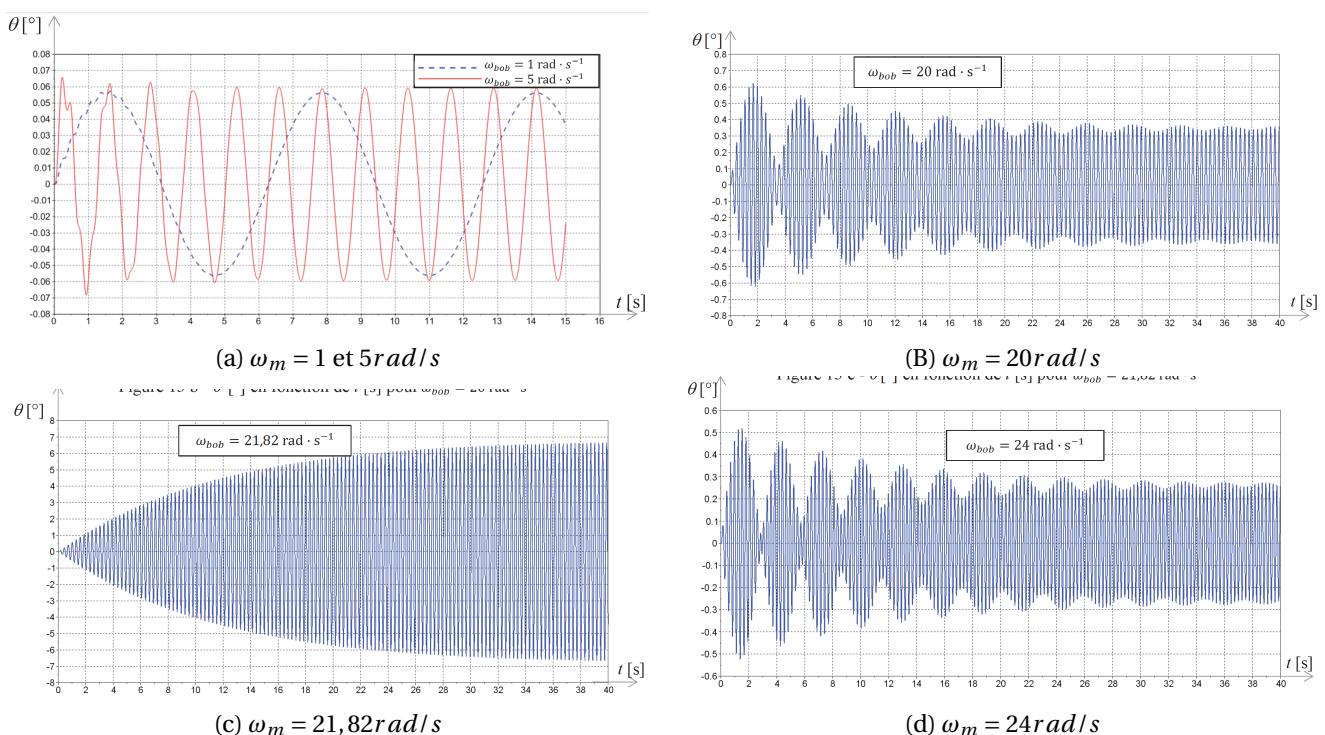
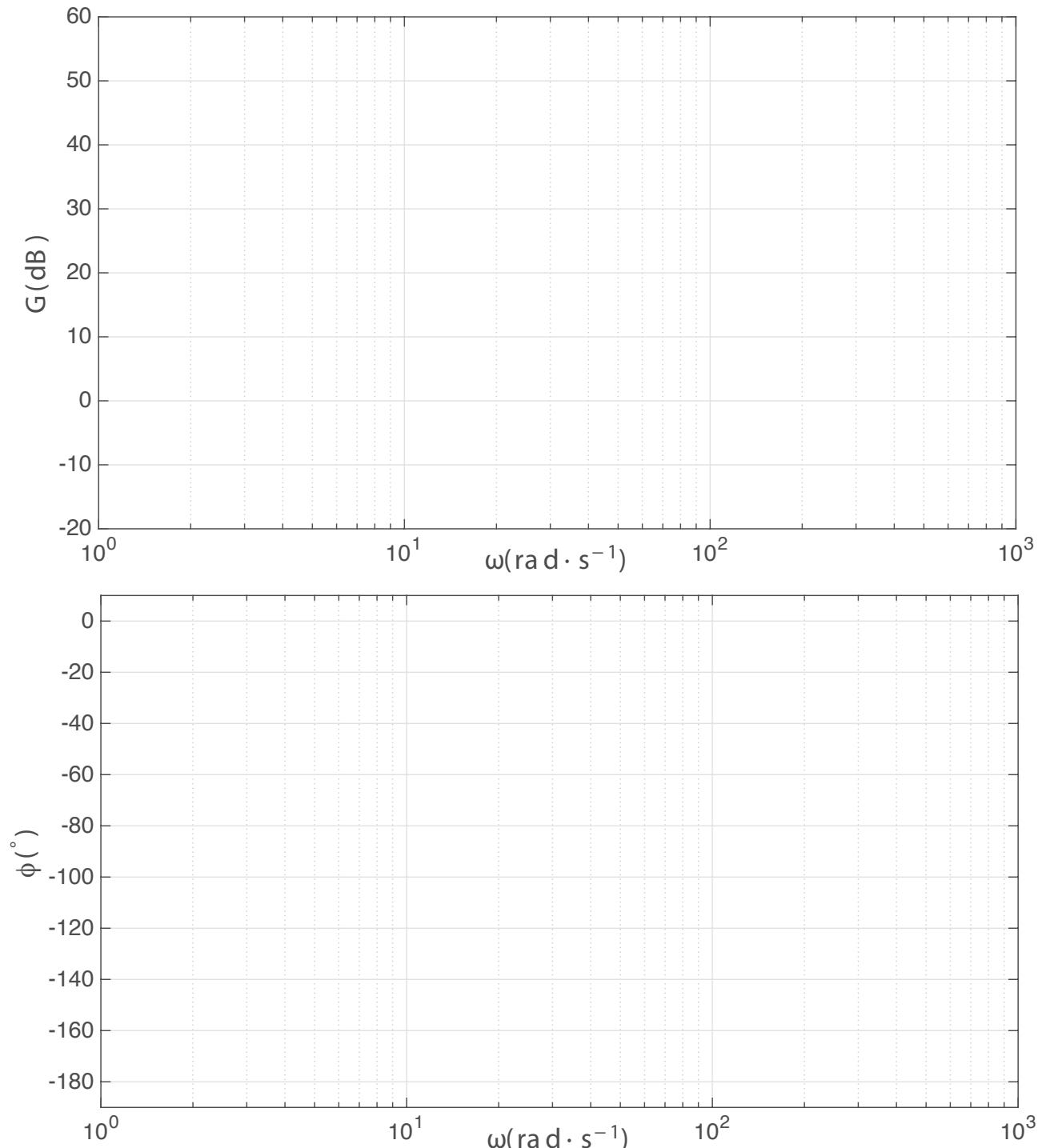


FIGURE 9 –  $\theta(^{\circ})$  en fonction de  $t(s)$

FIGURE 10 – Document réponse : diagramme de Bode pour  $H(p)$

c) Tracé du diagramme de Bode asymptotique

## Corrigé

---

### 1 Corrigé : étude d'une presse à injecter

**Q 1 : Donner l'équation traduisant le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'ensemble mobile et la traduire dans le domaine de Laplace.**

Le théorème de la résultante dynamique appliquée à la tige du vérin selon  $\vec{y}$  par rapport au référentiel  $R$  supposé galiléen donne :

$$\vec{a}(G \in verin/R) \cdot \vec{y} = \sum \vec{R}(ext \rightarrow verin) \cdot \vec{y}$$

On obtient alors :

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = S(p_A(t) - p_B(t)) - f(t) - k_v \frac{dy(t)}{dt}$$

Dans le domaine de Laplace, obtient :

$$M \cdot p^2 \cdot Y(p) = S(p_A(p) - p_B(p)) - F(p) - k_v \cdot p \cdot Y(p) \quad (1)$$

**Q 2 : Donner l'équation de conservation du débit simplifiée dans le domaine de Laplace.**

$$Q_r(p) = Q(p) - Q_c(p) - Q_f(p) = Q(p) - k_f(p_A(p) - p_B(p)) - k_c \cdot p(p_A(p) - p_B(p)).$$

**Q 3 : Donner la relation reliant la vitesse du piston aux différents débits. La traduire dans le domaine de Laplace**  
De plus

$$S \cdot p \cdot Y(p) = Q_r(p)$$

On a finalement :

$$S \cdot p \cdot Y(p) = Q(p) - (p_A(p) - p_B(p))(k_f + k_c \cdot p) \quad (2)$$

**Q 4 : Montrer que l'on peut associer au vérin le schéma bloc suivant.**

L'équation 1 traduit le deuxième bloc et se met sous la forme :

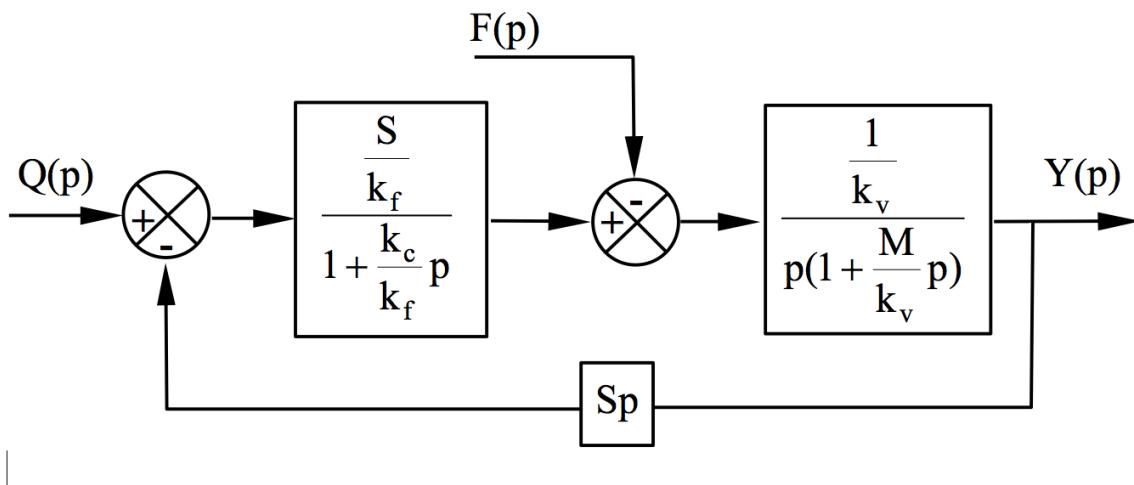
$$Y(p)(M \cdot p^2 + k_v \cdot p) = S(p_A(p) - p_B(p)) - F(p)$$

Donc :

$$Y(p) = \frac{1}{M \cdot p^2 + k_v \cdot p} [S(p_A(p) - p_B(p)) - F(p)] = \frac{\frac{1}{k_v}}{p \left( \frac{M}{k_v} \cdot p + 1 \right)} [S(p_A(p) - p_B(p)) - F(p)]$$

L'équation 2 peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} S(p_A(p) - p_B(p))(k_f + k_c \cdot p) &= S \cdot Q(p) - S^2 \cdot p \cdot Y(p) \\ \Leftrightarrow S(p_A(p) - p_B(p)) &= \frac{S}{k_f + k_c \cdot p} (Q(p) - S \cdot p \cdot Y(p)) = \frac{\frac{S}{k_f}}{1 + \frac{k_c}{k_f} \cdot p} (Q(p) - S \cdot p \cdot Y(p)) \end{aligned}$$



**Q 5 : Donner les expressions de  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$ .**  
On trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1 = \frac{S}{k_f} \\ T_1 = \frac{k_c}{k_f} \\ G_2 = \frac{1}{k_v} \\ T_2 = \frac{M}{k_v} \\ T_3 = S \end{array} \right.$$

**Q 6 : Déterminer les fonctions de transfert  $H_Q(p)$  et  $H_F(p)$  telles que :**

$$Y(p) = H_Q(p) Q(p) + H_F(p) F(p).$$

- On obtient  $H_Q(p)$  en faisant  $F(p) = 0$ ;

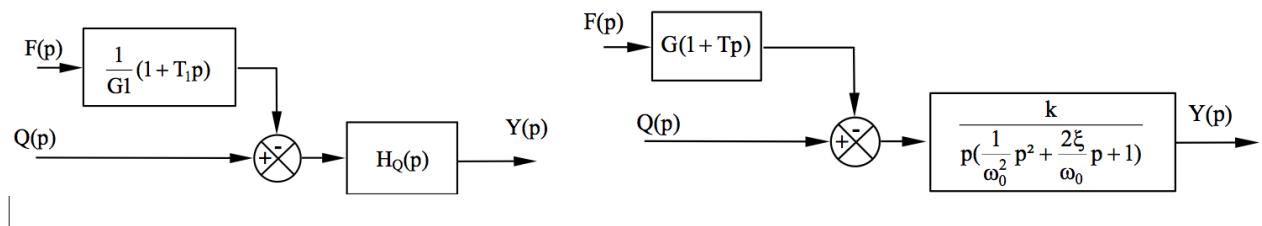
$$H_Q(p) = \frac{G_1 G_2}{p(1 + T_1 \cdot p)(1 + T_2 \cdot p) + G_1 G_2 T_3 \cdot p}$$

- On obtient  $H_F(p)$  en faisant  $Q(p) = 0$ ;

$$H_F(p) = -\frac{G_2(1 + T_1 \cdot p)}{p(1 + T_1 \cdot p)(1 + T_2 \cdot p) + G_1 G_2 T_3 \cdot p}$$

**Q 7 : Montrez que l'on peut mettre le schéma bloc sous la forme suivante**

Le système étant linéaire :  $Y(p) = H_Q(p) \cdot Q(p) + H_F(p) \cdot F(p)$ , d'où la forme demandée :



**Q 8 : Identifier  $G$ ,  $T$ ,  $k$ ,  $\omega_0$  et  $\xi$ .**

On trouve immédiatement :  $G = \frac{1}{G_1}$  et  $T = T_1$  ;  
Mettons,  $H_Q(p)$  sous forme canonique :

$$H_Q(p) = \frac{G_1 G_2}{p(1 + G_1 G_2 T_3 + (T_1 + T_2)p + T_1 T_2 p^2)} = \frac{\frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 T_3}}{1 + \frac{T_1 + T_2}{1 + G_1 G_2 T_3} p + \frac{T_1 T_2}{1 + G_1 G_2 T_3} p^2}$$

Ainsi

$$k = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 T_3}$$

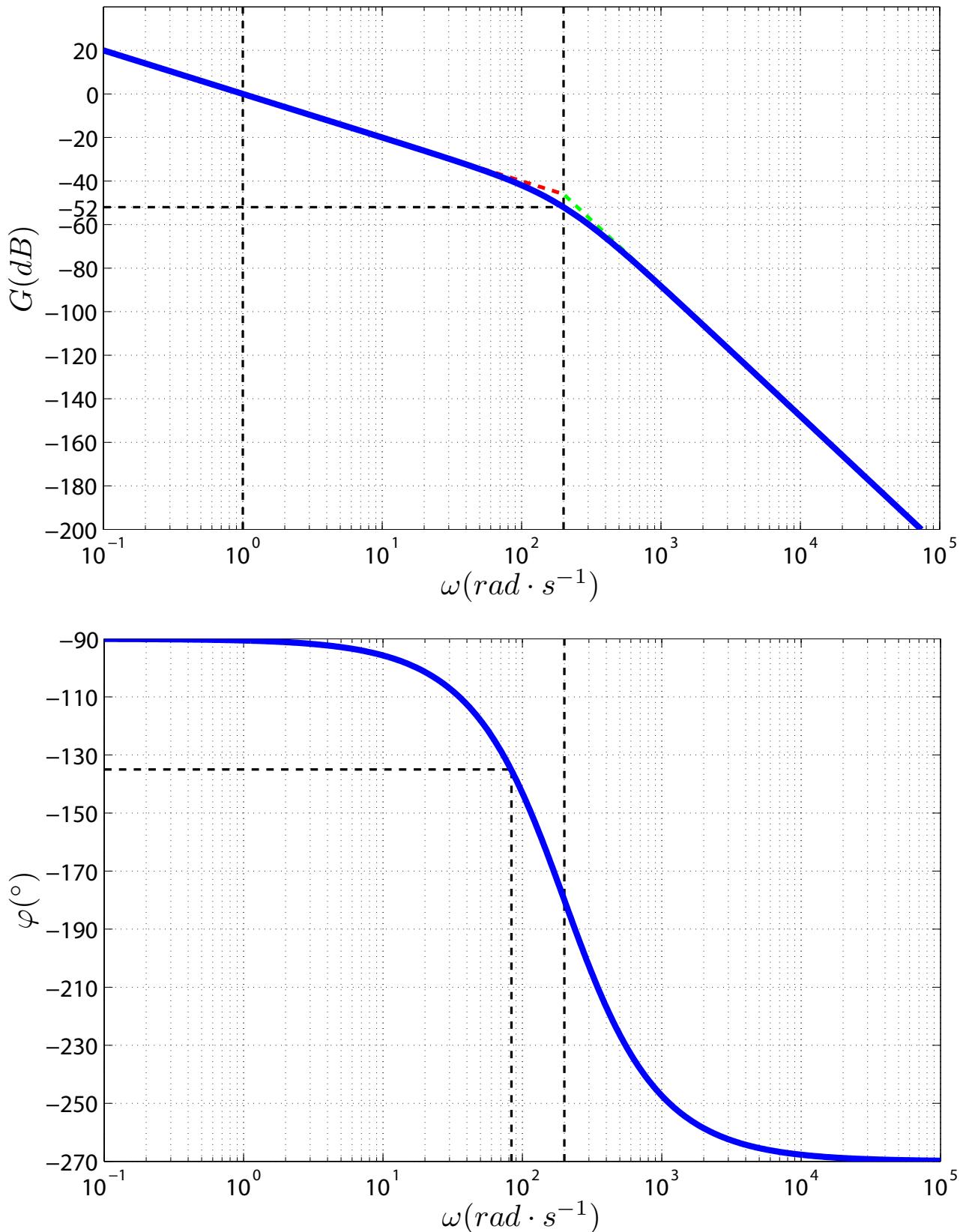
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1 + G_1 G_2 T_3}{T_1 T_2}}$$

$$\xi = \frac{\omega_0}{2} \frac{T_1 + T_2}{1 + G_1 G_2 T_3} = \sqrt{\frac{1 + G_1 G_2 T_3}{2 T_1 T_2}} \frac{T_1 + T_2}{1 + G_1 G_2 T_3} = \frac{T_1 + T_2}{\sqrt{2 T_1 T_2 (1 + G_1 G_2 T_3)}}$$

**Q 9 : Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte dans le cas où  $F(p) = 0$ .**

$$H_{BO}(p) = \frac{k C}{p \left( 1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}$$

**Q 10 : On s'intéresse dorénavant à l'étude fréquentielle de ce système en boucle ouverte. Tracer les diagrammes de Bode asymptotiques pour cette modélisation avec :  $G = 3 \cdot 10^{-11}$ ,  $T = 30s$ ,  $k = 500$ ,  $\omega_0 = 200 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\xi = 1$  et  $C = 2 \cdot 10^{-3}$ . (Figures 5)**



## 2 Étude d'un automate d'exploration de l'hémostase par chronométrie : corrigé

**Q 1 :** En supposant  $\theta$  petit, linéariser l'équation du mouvement puis en déduire la fonction de transfert  $H(p) =$

$$\frac{\theta(p)}{F(p)}$$

En linéarisant au premier ordre l'équation de mouvement devient :

$$\frac{7}{5}m(R-r)\ddot{\theta}(t) + f_v(R-r)\dot{\theta}(t) + mg\cdot\theta(t) = F(t)$$

En supposant les conditions initiales nulles, on obtient dans le domaine de Laplace :

$$\frac{7}{5}m(R-r)\cdot p^2 \cdot \theta(p) + f_v(R-r)p \cdot \theta(p) + mg \cdot \theta(p) = F(p)$$

$$F(p) = \theta(p) \left[ \frac{7}{5}m(R-r)\cdot p^2 + f_v(R-r)p + m \cdot g \right]$$

On obtient donc :

$$H(p) = \frac{\theta(p)}{F(p)} = \frac{1}{\frac{7}{5}m(R-r)\cdot p^2 + f_v(R-r)p + m \cdot g}$$

**Q 2 : Mettre  $H(p)$  sous la forme canonique d'un système du second ordre dont on donnera les expressions du gain statique  $K_s$ , de la pulsation propre non amortie  $\omega_0$  et du coefficient d'amortissement  $\xi$  en fonction de  $f_v$ ,  $R$ ,  $r$ ,  $m$  et  $g$ .**

$$H(p) = \frac{\frac{1}{m \cdot g}}{1 + \frac{f_v(R-r)}{m \cdot g}p + \frac{7(R-r)}{5 \cdot g}p^2} = \frac{K_s}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Par identification, on obtient :

$$K_s = \frac{1}{m \cdot g},$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}$$

$$\frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{f_v(R-r)}{mg}$$

$$\xi = \frac{f_v}{2mg} \sqrt{\frac{5g(R-r)}{7}}$$

**Q 3 : On prendra les valeurs numériques suivantes pour cette question :  $\omega_0 = 21,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ;  $K_s = 25 \text{ N}^{-1}$ ;  $\xi = 4 \cdot f_v$ . Tracer, sur le document réponse, le diagramme asymptotique de Bode en gain, ainsi que l'allure du diagramme réel pour les valeurs suivantes du coefficient de frottement visqueux  $f_v$  :  $f_v = 0,005$ ;  $f_v = 0,05$ ;  $f_v = 0,2$ . On pourra alors calculer s'il y a existence les coefficients de surtensions et les pulsations de résonance.**

- **Tracé asymptotique en gain :** Il y a deux branches asymptotiques :
  - La première pour  $\omega \rightarrow 0$  est une droite horizontale passant pas  $20 \log(K_s) = 27,96 \text{ dB}$ .
  - La deuxième pour  $\omega \rightarrow \infty$  est une droite oblique de  $-40 \text{ dB/decade}$  dont la pulsation de cassure correspond à  $\omega_0 = 21,8 \text{ rad/s}$ .
- **Tracé asymptotique en phase :** Il y a deux branches asymptotiques :
  - La première pour  $\omega \rightarrow 0$  est une droite horizontale passant pas  $0^\circ$ .
  - La deuxième pour  $\omega \rightarrow \infty$  est une droite horizontale passant pas  $-180^\circ$ .
- **Tracé réel :** Il y a existence de résonance seulement si  $\xi < \sqrt{2}/2$ , donc seulement deux cas ici :
  - $f_v = 0,005$  d'où  $\xi = 0,02$ . On trouve :
    - > la pulsation de résonance :  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} = 21.79 \text{ rad/s}$
    - > le gain de surtension :  $Q = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$  et donc en dB :  $Q_{dB} = 20 \log(Q) = 27,96 \text{ dB}$
  - $f_v = 0,05$  d'où  $\xi = 0,2$ . On trouve :
    - > la pulsation de résonance :  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} = 21.79 \text{ rad/s}$
    - > le gain de surtension :  $Q = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$  et donc en dB :  $Q_{dB} = 20 \log(Q) = 8,13 \text{ dB}$

Le tracé du diagramme de Bode est donné par la figure ??

**Q 4 : La sollicitation des bobines est sinusoïdale :**  $F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega_m t)$ . Préciser, en justifiant votre réponse, la valeur à laquelle il faut régler la pulsation  $\omega_m$  pour pouvoir observer, au mieux, l'évolution du coefficient de frottement  $f_v$ .

Il faut régler  $\omega_m$  sur  $\omega_0$ . La valeur de  $\omega_0$  ne dépend pas de la valeur du coefficient de frottement contrairement à  $\omega_r$ .

**Q 5 : Exprimer, pour un système du second ordre, en fonction de  $\xi$ , le rapport des amplitudes de sortie à  $\omega \rightarrow 0$  et  $\omega = \omega_0$  pour une même amplitude du signal d'entrée.**

Pour un système du second ordre :

$$|H(j\omega)| = \frac{K_s}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{4\xi^2\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

- Pour  $\omega \rightarrow 0$  :

$$\frac{S_0}{E_0} = K_s$$

- Pour  $\omega = \omega_0$  :

$$\frac{S_0}{E_0} \xrightarrow{\omega \rightarrow \omega_0} = \frac{K_s}{2\xi}$$

**Q 6 : Les figures 9 a, b, c, d représentent, avec  $f_v$  constant, l'évolution de la position de la bille  $\theta(^{\circ})$  en fonction du temps  $t(s)$  pour différentes valeurs de pulsation  $\omega_m$ . A partir de ces courbes et des résultats précédents, déterminer la valeur du coefficient d'amortissement  $\xi$ .**

On note  $\theta_a(\omega)$  l'amplitude de la sortie  $\theta(t)$  en régime permanent.

Grâce au diagramme de Bode on sait que :

$$|H(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0} = K_S = \frac{\theta_a(\omega = 0)}{F_0}$$

D'où,

$$F_0 = \frac{\theta_a(\omega = 0)}{K_S}$$

De plus,

$$|H(j\omega)|_{\omega = \omega_0} = \frac{K_S}{2\xi} = \frac{\theta_a(\omega = \omega_0)}{F_0}$$

D'où,

$$\xi = \frac{K_S F_0}{2\theta_a(\omega = \omega_0)} = \frac{\theta_a(\omega \rightarrow 0)}{2\theta_a(\omega = \omega_0)} = \frac{0,06}{2 \times 6,75} = 4,44 \cdot 10^{-3}$$

**Q 7 : Exprimer alors le coefficient de viscosité  $\eta$  du sang correspondant en fonction de  $r$ .**

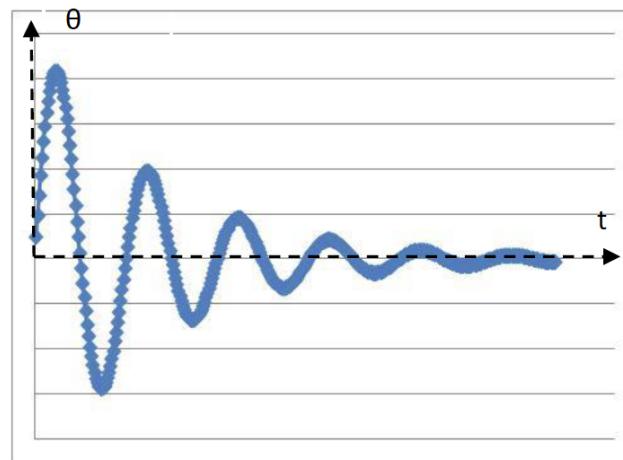
D'après l'énoncé le coefficient de frottement visqueux vaut  $f_v = 6 \cdot \pi \cdot r \cdot \eta$  et  $\xi = 4 \cdot f_v$ .

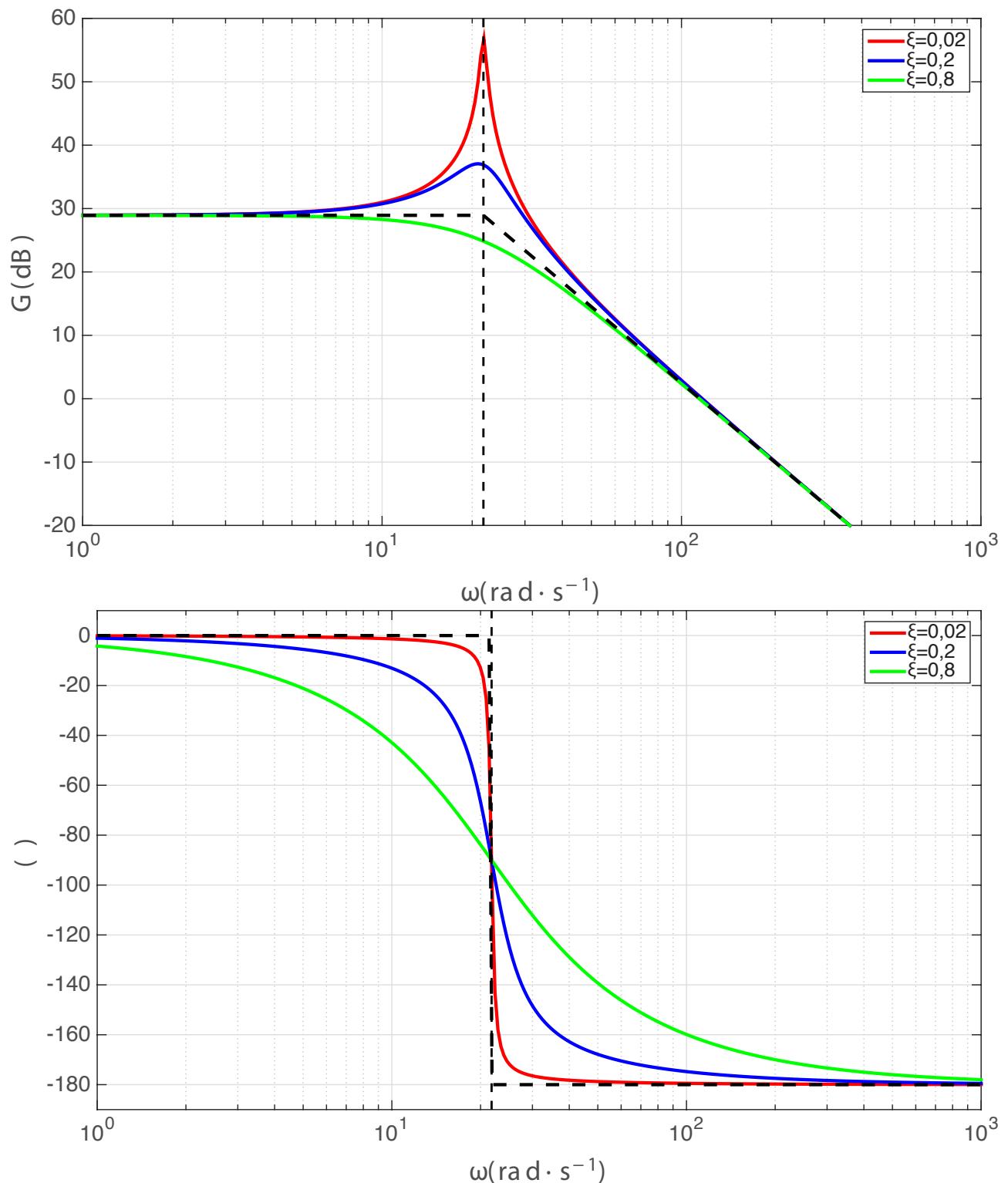
On en déduit :

$$\eta = \frac{f_v}{6\pi \cdot r} = \frac{\xi}{24\pi \cdot r}$$

**Q 8 : A partir de ces analyses, en justifiant votre réponse, donner l'allure de la courbe  $\theta$  en fonction de  $t$  obtenue à la pulsation  $\omega_0$  lorsque la viscosité du sang varie au fur et à mesure de la coagulation (si l'on suppose que  $f_v$  augmente avec la coagulation).**

Lorsque la coagulation augmente, le coefficient de frottement augmente, le coefficient d'amortissement  $\xi$  augmente aussi, les oscillations de la bille vont donc être de plus en plus faibles.



FIGURE 11 – Document réponse : diagramme de Bode pour  $H(p)$