



LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON
SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR
CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.
ANNÉE 2017 - 2018

TD 17 - Résolution d'un problème de statique(C8-2)

Compétences

- **Analysier :**
 - définir les frontières de l'analyse
 - Apprécier la pertinence et la validité des résultats : Grandeur utilisées, unités, homogénéité, ordre de grandeur.
- **Modéliser :**
 - Identifier et caractériser les grandeurs physiques :
 - > Grandeurs d'entrée et de sortie d'un système isolé,
 - > nature et évolution des grandeurs.
- **Résoudre :**
 - > Procéder à la mise en oeuvre d'une démarche de résolution analytique : principe fondamental de la statique.

1 Étude du robot Climber

a) Présentation

Roboclimber est un robot géotechnique utilisé pour la consolidation des talus de sols naturels ou des escarpements rocheux au dessus des routes ou des zones habitées.

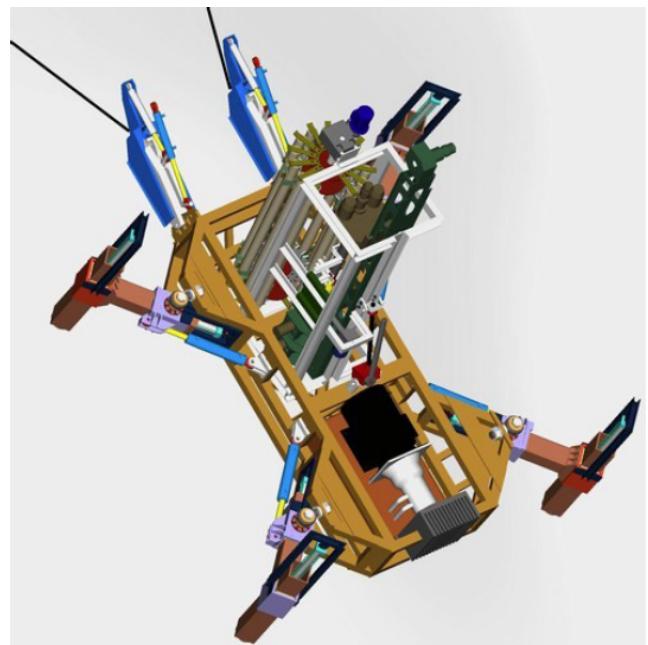
Lorsque des falaises ou talus menacent de s'effondrer sur des infrastructures, un des seuls remèdes consiste à consolider le versant en y forant des trous suivant un maillage régulier et à y enfoncer des pieux en acier qui structurent l'ensemble et le consolident.

Lorsque le site à consolider est dangereux ou difficile d'accès, le Roboclimber est utilisé car la plupart de ses actions sont automatisées, mettant ainsi à l'abri de tout risque les hommes chargés du chantier. Son utilisation réduit donc considérablement le coût d'un tel chantier.

Le diagramme d'exigence technique partiel du Roboclimber est donné en annexe sur la figure 1. Le présent sujet se propose de vérifier les critères de performance liés à certaines de ces exigences.

b) Vérification de l'exigence 1.1.3.1 : "Enfoncer les tubes de forages"

Le forage proprement dit consiste à enfoncer dans le sol ou la roche une succession de tubes en acier, vissés les uns aux autres, qui constituent le train de forage. Le premier tube utilisé se retrouve en tête de train et possède une tête perforante. L'enfoncement de l'ensemble du train est obtenu par l'action conjuguée d'un effort de poussée suivant l'axe de forage et d'un couple qui met en rotation le train de tubes. Les critères géotechniques retenus pour obtenir une plage d'utilisation optimale sont précisés dans l'extrait du cahier des charges ci-dessous :



| Exigence | Critère | Niveau |
|-------------------------------------|--|---|
| Enfoncer les tubes de forage | Force de poussée maxi | Pour une pente de 45° : $F < 10000N$ Pour une pente de 80° : $F < 3000N$ |
| | Vitesse d'avance maximale | $2m \cdot min^{-1}$ |
| | Couple appliqué sur le train de tubes | $C_{maxi} = 2500N \cdot m$ |
| | Alignement de l'axe de la foreuse avec l'axe du forage | Défaut d'alignement : $\beta < 6^\circ$ |

Problématique : Une des difficultés liées à l'utilisation d'une plateforme mobile pour réaliser le forage réside dans l'application de l'effort de poussée qui doit être obtenu sans mettre en péril l'équilibre de la plateforme. On souhaite vérifier que le robot pourra bien fournir l'effort de poussée préconisé dans le cahier des charges. On suppose le robot en équilibre dans la position de la figure 2 en annexe (vue de profil du robot sur la paroi).

Hypothèses :

- Le **problème est supposé plan**, dans le plan de la figure 2 : $(G, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$.
- Les quatre contacts pied / paroi sont réduits à **deux contacts ponctuels en A et B** (liaisons sphère-plan de normales dirigées par \vec{z}) et **supposés sans frottement**, on a $\vec{AB} = d \vec{x}$ et $\vec{BH} = -d \vec{x} + h \vec{z}$.
- Les deux câbles sont assimilés à un seul, fixé en H au robot et en K à la paroi :

$$\vec{HK} = -e \vec{x} - h \vec{z}$$

, où e, distance du robot au point d'ancrage le long de la paroi.

- On considère deux classes d'équivalence en dehors de la paroi (bâti : S_0) :
 - l'ensemble : $S_2 = \{\text{plateforme} + \text{tubes}\}$;
 - le câble (S_1) HK (de poids négligeable).
- On considère que le câble est articulé en chacune de ses extrémités (liaisons pivots d'axes (H, \vec{y}_0) et (K, \vec{y}_0)).
- On donne le vecteur \vec{u} unitaire et colinéaire à \vec{HK} .
- L'effort de poussée de la foreuse impose sur le train de tubes une réaction du sol modélisée par un glisseur en E :

$$\left\{ \mathcal{T}_{(poussée \rightarrow S_2)} \right\}_E = \begin{Bmatrix} F \vec{z} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Le point E est défini par : $\vec{BE} = -\frac{d}{3} \vec{x} - p \vec{z}$.

- Le poids de la plateforme et des tubes a pour norme $P = 28000N$. Le centre de gravité du système est le point G tel que :

$$\overrightarrow{BG} = -\frac{d}{2} \overrightarrow{x} + h \overrightarrow{z}.$$

- La pente de la paroi est définie par l'angle :

$$\alpha = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x}) = (\overrightarrow{z_0}, \overrightarrow{z})$$

Notation préconisée : on utilisera l'écriture suivante pour les torseurs des actions mécaniques transmissibles du solide i au solide j exprimé au point A :

$$\left\{ \mathcal{T}_{(i \rightarrow j)} \right\}_A = \begin{cases} X_{ij} \cdot \overrightarrow{x} + Y_{ij} \cdot \overrightarrow{y} + Z_{ij} \cdot \overrightarrow{z} \\ L_{ij} \cdot \overrightarrow{x} + M_{ij} \cdot \overrightarrow{y} + N_{ij} \cdot \overrightarrow{z} \end{cases}$$

On pourra ajouter un exposant A ou B (selon le centre de la liaison) à chaque inconnu si il existe plusieurs actions mécaniques entre deux solides i et j .

c) Questions

Q 1 : Donner l'expression du torseur d'action mécanique transmissible décrivant le contact en A de $S_0 \rightarrow S_2$ ($\{\mathcal{T}_{(S_0 \rightarrow S_2)}\}^A$). Exprimer le en A puis en H .

Q 2 : Donner l'expression du torseur d'action mécanique transmissible décrivant le contact en B de $S_0 \rightarrow S_2$ ($\{\mathcal{T}_{(S_0 \rightarrow S_2)}\}^B$). Exprimer le en B puis en H

Q 3 : Donner l'expression du torseur d'action mécanique transmissible décrivant le contact en H de $S_1 \rightarrow S_2$. Exprimer le en H dans la base $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$

Q 4 : Donner l'expression du torseur d'action mécanique transmissible décrivant le contact en K de $S_0 \rightarrow S_1$. Exprimer le en K dans la base $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$. Exprimer-le ensuite en H .

Q 5 : Donner l'expression du torseur de l'action de la pesanteur s'appliquant sur S_2 . Exprimer le en G puis en H .

Q 6 : Donner l'expression du torseur de l'action de la poussée ($\{\mathcal{T}_{(poussée \rightarrow S_2)}\}$) s'appliquant sur S_2 . Exprimer le en H .

Q 7 : Dessiner le graph de structure permettant de référencer les liaisons ainsi que les actions mécaniques extérieures du problème.

Q 8 : Isoler le câble S_1 et faire le bilan des actions mécaniques.

Q 9 : Traduire l'équilibre du câble S_1 en écrivant le principe fondamental de la statique en H . En déduire des relations entre les inconnues de liaisons en H et K .

Q 10 : Isoler l'ensemble $S_2 = \{\text{plateforme} + \text{tubes}\}$ et faire le bilan des actions mécaniques extérieures en énonçant les torseurs d'actions mécaniques extérieures à S_2 .

Q 11 : Traduire l'équilibre de l'ensemble S_2 au point H en écrivant le Théorème en Moment Statique selon (H, \overrightarrow{y}) .

Q 12 : Traduire ce qu'il se passe en cas de perte de contact en B sur le torseur d'action mécanique ($\{\mathcal{T}_{(S_0 \rightarrow S_2)}\}^B$). En déduire la condition littérale sur F pour qu'il n'y ait pas décollement du pied en B .

Q 13 : Faire l'application numérique.

Q 14 : Cette valeur est-elle compatible avec le cahier des charges ? Un forage sur une paroi verticale est-il possible avec le robotclimber ?

Q 15 : Écrire le théorème en résultante appliqué à S_2 . En déduire deux équations scalaires (en projection selon \overrightarrow{x} et \overrightarrow{z}).

Q 16 : La tension du câble S_1 peut être définie par $T = \overrightarrow{R_{(poussée \rightarrow S_2)}} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{R_{(poussée \rightarrow S_2)}} \cdot \frac{\overrightarrow{HK}}{\|\overrightarrow{HK}\|}$. Déduire des résultats précédents l'expression de T en fonction de P , α , e et h .

d) Annexes

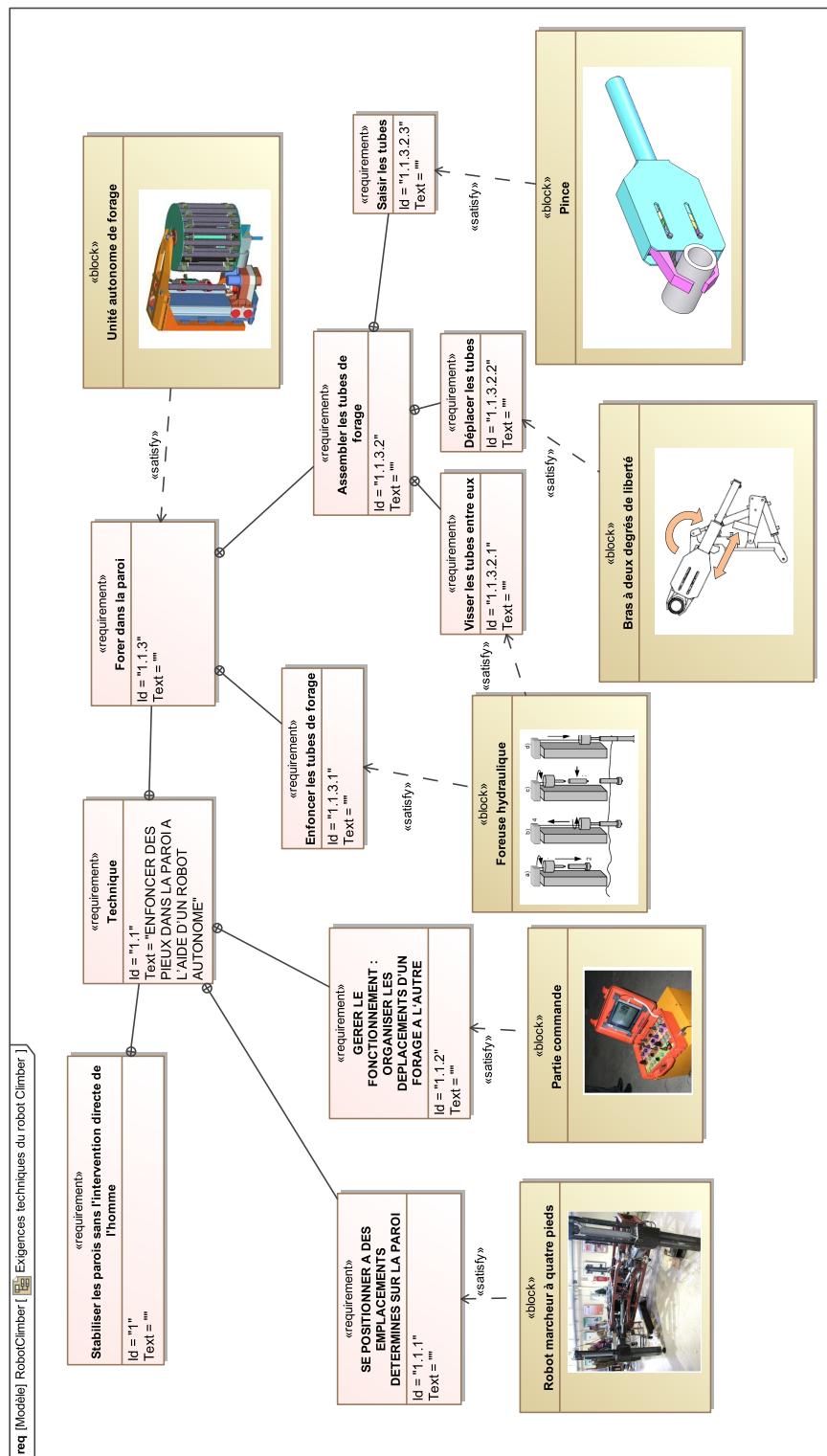


FIGURE 1 – Diagramme des exigences partiel du "Robotclimber"

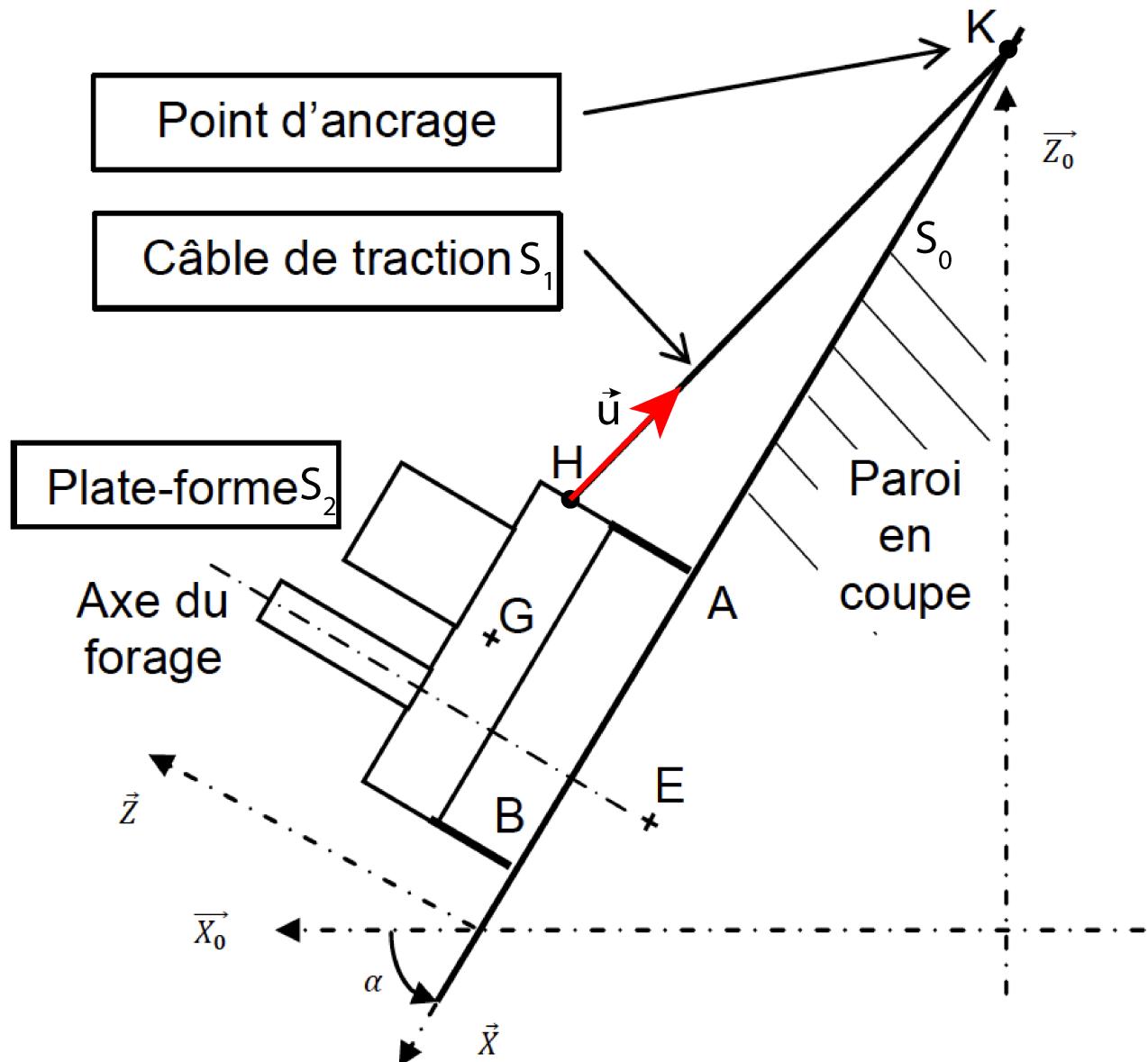


FIGURE 2 – Paramétrage et vue de profil du robot sur la paroi

2 Étude du frein d'une éolienne

a) Présentation du système

On se propose dans ce problème de réaliser l'étude statique d'une éolienne. Cette étude va permettre de vérifier l'exigence de capacité de freinage de l'éolienne. Cette étude pourra aussi permettre, dans un autre cadre de dimensionner les organes de liaison et de freinage nécessaires pour transmettre les efforts calculés. On considère donc une phase particulière de fonctionnement, lorsque l'éolienne est bloquée par un frein.

La figure 3 présente l'architecture du mécanisme : en fonctionnement non bloqué, le vent pousse les pales en rotation. Les pales et son rotor 1 sont en liaison pivot par rapport au carter 0 (cette pivot est réalisée par une rotule en A et une linéaire annulaire en B).

Un engrenage conique transmet le mouvement de l'arbre 1 à l'arbre 2. Le contact en I entre 1 et 2 sera modélisé par une liaison ponctuelle de centre I de normale :

$$\vec{u} = \cos\alpha \cdot \vec{y} + \sin\alpha (\cos\delta \cdot \vec{x} + \sin\delta \cdot \vec{y})$$

(les angles α et δ sont des données qui dépendent de la géométrie des dentures de l'engrenage).

La figure 4 donne le modèle normalisé de la liaison). L'arbre 2 est en liaison pivot d'axe (C, \vec{z}) par rapport au bâti. Un second engrenage transmet le mouvement à une génératrice de courant 3 (la génératrice 3 n'intervient pas ici car le système est étudié à l'arrêt).

Un frein constitué des pièces 4 et 5 permet de bloquer l'éolienne (voir figure 6). Nous considérerons dans cette étude que l'éolienne est bloquée et donc que le frein est serré.

L'action du vent sur une pale est modélisée par une répartition linéaire uniforme de forces. On supposera que les pales sont bloquées en position verticale. On peut alors écrire l'action du vent sur un tronçon dz (voir figure 5) en des points M et M' respectivement des pales supérieures et inférieures sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{dF}(air \rightarrow 1) = -(C_x \cdot \vec{x} - C_y \cdot \vec{y}) \cdot V \cdot dz \\ \vec{dF}'(air \rightarrow 1) = -(C_x \cdot \vec{x} + C_y \cdot \vec{y}) \cdot V \cdot dz \end{cases}$$

Avec V la vitesse du vent et les coefficients aérodynamiques $C_x = C_y = 0,1 N.s/m^2$.

Données du problème :

- $AB = L = 500mm$;
- $BO = l = 30mm$;
- $\vec{AI} = \frac{L}{2} \cdot \vec{x} - \frac{D_1}{2} \cdot \vec{z}$;
- Diamètre primitif de l'engrenage conique de l'arbre 1 : $D_1 = 200mm$;
- Diamètre primitif de l'engrenage conique de l'arbre 2 : $D_2 = 50mm$;
- $JC = h = 100mm$;
- $\vec{JI} \cdot \vec{z} = H = 150mm$;
- $\vec{JD} = r \cdot \vec{x}$ avec $r = 150mm$;
- l'épaisseur $DE = e$ est supposée très petite (donc négligeable) devant le rayon r ;
- longueur d'une pâle : $\lambda = 3m$;
- l'action de la pesanteur est négligée devant l'intensité des efforts mis en jeu.



Objectif 1 : Problématique

On se propose de vérifier que le système de freinage est adapté pour maintenir les pâles à l'arrêt.

Le graphe de structure ci-dessous synthétise les différents isolements effectués dans la suite du sujet. Chaque partie pourra être traitée séparément.

Notation préconisée : on utilisera l'écriture suivante pour les torseurs des actions mécaniques transmissibles du solide i au solide j exprimé au point A :

$$\{\mathcal{T}_{(i \rightarrow j)}\}_A = \left\{ \begin{array}{l} X_{ij} \cdot \vec{x} + Y_{ij} \cdot \vec{y} + Z_{ij} \cdot \vec{z} \\ L_{ij} \cdot \vec{x} + M_{ij} \cdot \vec{y} + N_{ij} \cdot \vec{z} \end{array} \right\}$$

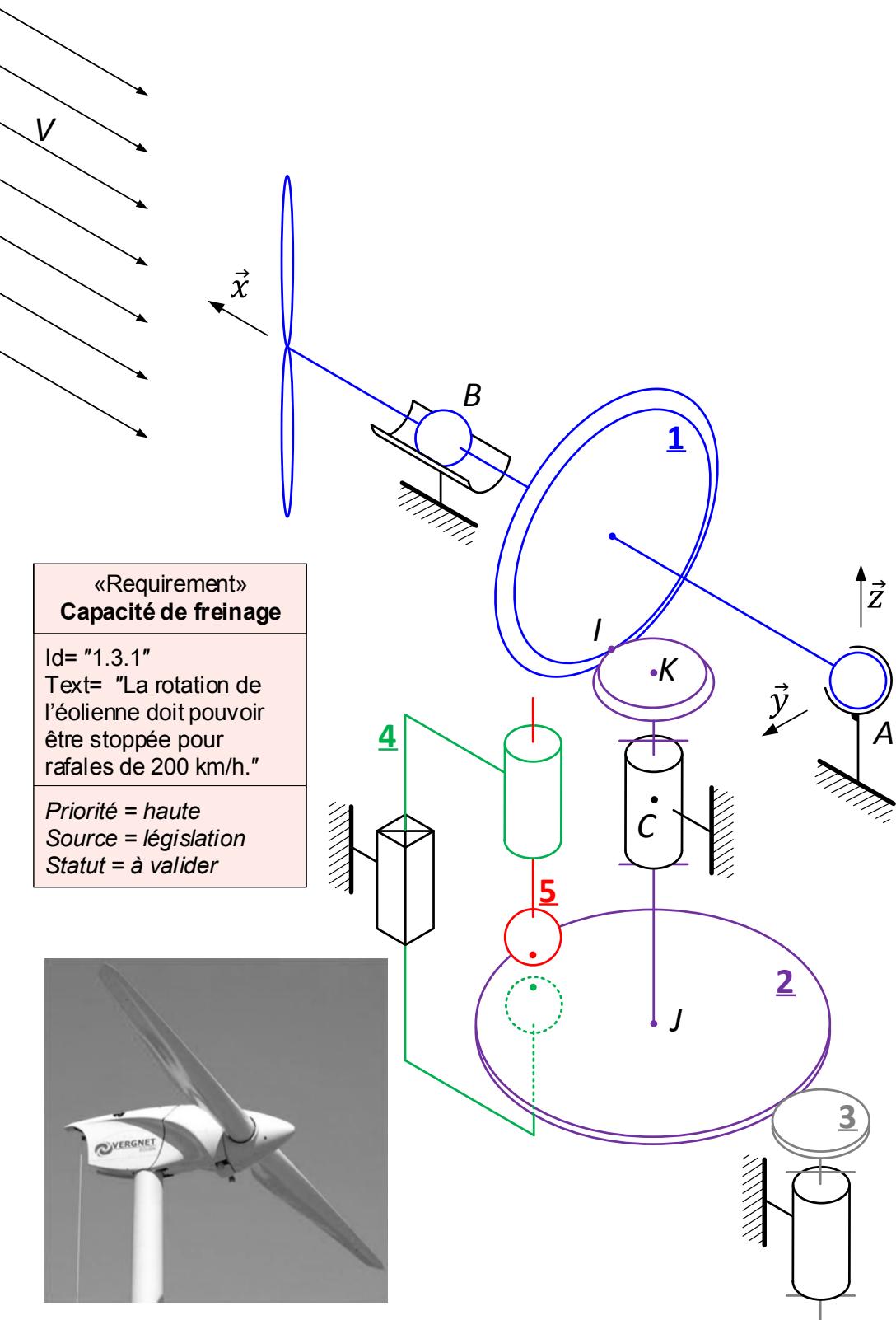


FIGURE 3 – Schéma cinématique du système

b) Action mécanique sur les pâles**Q 1 : Calculer le torseur des actions mécaniques de l'air sur la pale supérieure en O.****Q 2 : Donner par analogie le torseur des actions mécaniques de l'air sur la pale inférieure en O et montrer que**

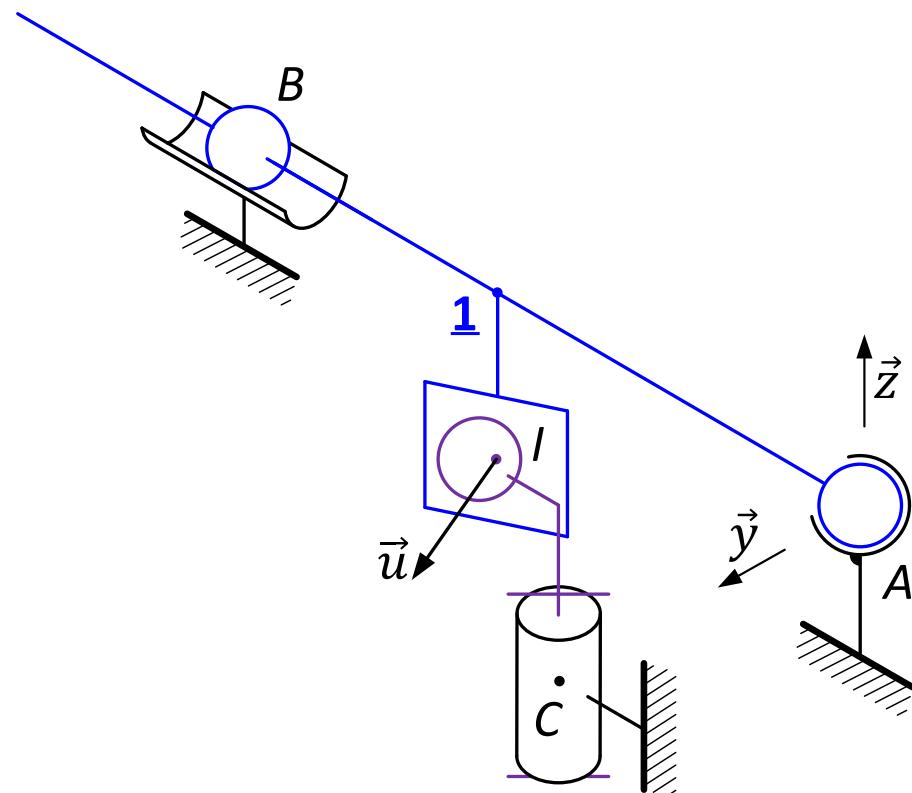
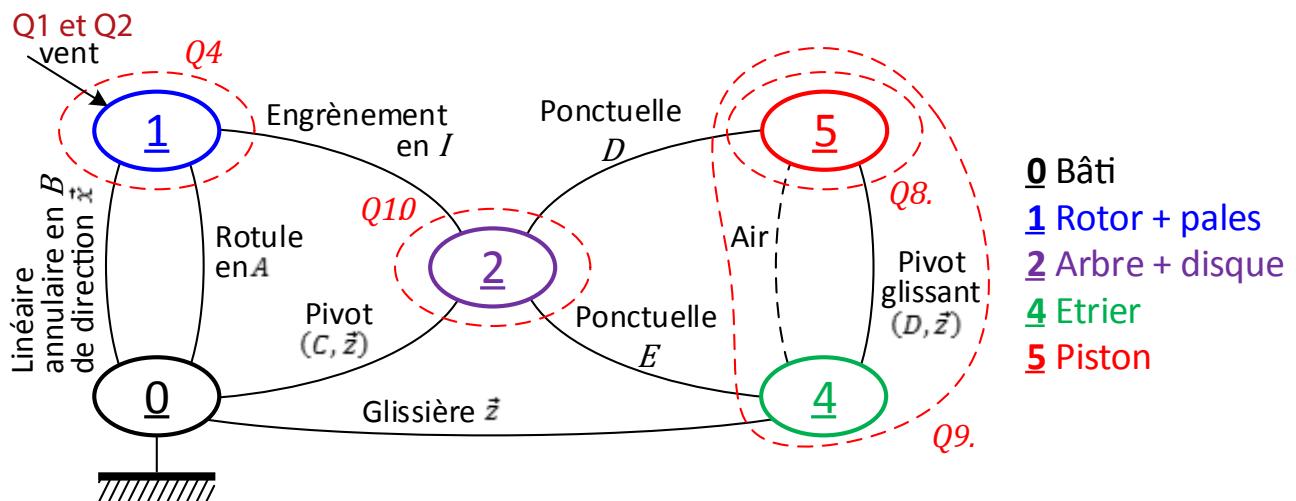


FIGURE 4 – Modélisation du contact entre dents de l'engrenage.



le torseur global de l'air sur les deux pales peut se mettre sous la forme ci-dessous.

$$\left\{ \mathcal{T}_{(air \rightarrow 2p)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} R \cdot \vec{x} \\ C \cdot \vec{x} \end{array} \right\}$$

On précisera les expressions littérales de R et C. On gardera ce torseur sous cette forme pour la suite.

c) Effort transmis par l'engrenage conique

On pose l'effort transmis par l'engrenage 2 sur l'engrenage 1 en I sous la forme ($\vec{F}(2 \rightarrow 1) = F_I \cdot \vec{u}$).

Q 3 : Donner la forme du torseur des actions mécaniques de 2 → 1 en I ainsi que les torseurs des actions mécaniques des liaisons en A et B du bâti 0 sur l'arbre 1.

Q 4 : En écrivant le PFS au point A appliqué à l'arbre 1, déterminer le système d'équations permettant de calculer les efforts dans les liaisons rotule et linéaire annulaire (sphère-cylindre) ainsi que l'effort F_I transmis par l'engrenage en fonction de C , R et des dimensions et angles donnés. On ne résoudra pas ce système entièrement mais on montrera qu'il y a suffisamment d'équations pour le nombre d'inconnues.

Q 5 : Déterminer l'effort F_I en fonction des dimensions et angles donnés.

d) Étude du frein

On suppose une égalité entre coefficient de frottement et coefficient d'adhérence. Les composantes de pivotement/roulement sont nulles.

Q 6 : Donner la forme des actions mécaniques transmissibles par les liaisons ponctuelles avec frottement en D et E. Préciser la condition sur le coefficient de frottement f et les composantes des efforts pour qu'il n'y ait pas glissement. (On supposera que la composante tangentielle de frottement est parallèle à \vec{y}).

Q 7 : Calculer l'effort F de l'air sous pression sur le piston en fonction du diamètre $d = 50\text{mm}$ du piston et de la pression $p = 6\text{bar}$ de l'air

Q 8 : Isoler le piston 5 et appliquer l'équation de résultante du PFS sur \vec{z} pour calculer la composante normale de l'effort en D de 5 sur 2

Q 9 : Isoler l'étrier et le piston {4 + 5} et appliquer l'équation de résultante du PFS sur \vec{z} pour calculer composante normale de l'effort en E de 4 sur 2.

e) Isolement de 2 et conclusion.

Q 10 : Isoler l'arbre 2 et appliquer l'équation de moment du PFS sur l'axe (C , \vec{z}). En déduire les actions tangentielles en D et E en fonction de F_I (On supposera que les actions tangentielles en D et E sont égales et parallèles à \vec{y}).

Q 11 : Calculer la vitesse limite du vent V_{\lim} nécessaire pour faire déraper le frein (On prendra le coefficient de frottement $f = 0,1$). Conclure.

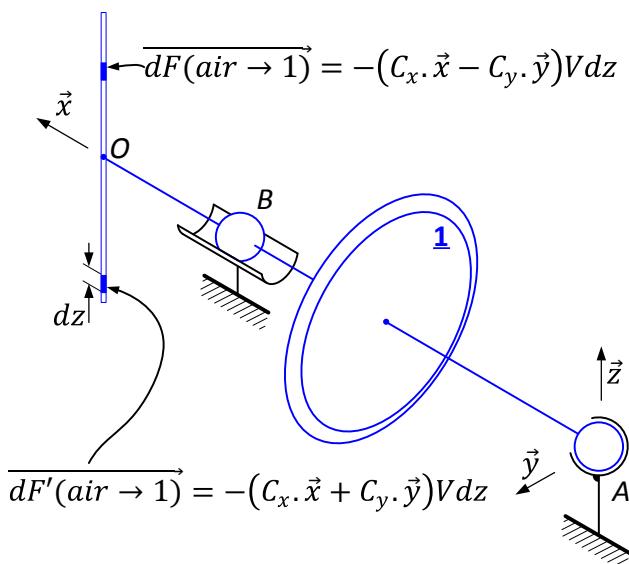


FIGURE 5 – Actions mécaniques de l'air sur les pales

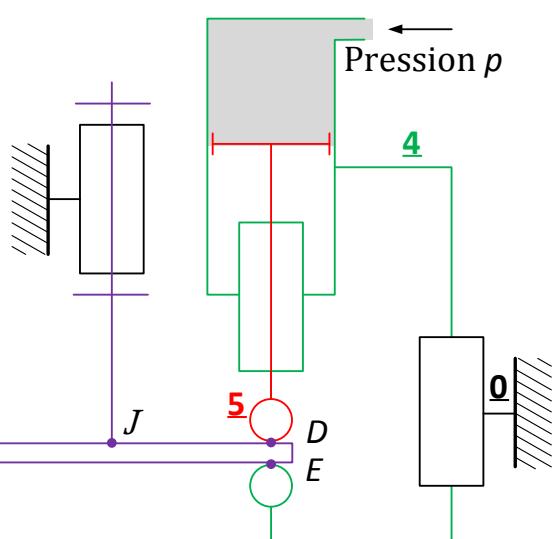


FIGURE 6 – Système de freinage

Corrige

3 Corrigé : Robot Climber

Q 1 : Donner l'expression du torseur d'action mécanique transmissible décrivant le contact en A de $S_0 \rightarrow S_2$ ($\{\mathcal{T}_{(S_0 \rightarrow S_2)}\}^A$). Exprimer le en A puis en H .

$$\{\mathcal{T}_{(S_0 \rightarrow S_2)}\}^A = \begin{Bmatrix} Z_{02}^A \vec{z} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

On utilise la formule de Varignon pour déplacer le torseur en H .

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{H(S_0 \rightarrow S_2)}}^A = \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(S_0 \rightarrow S_2)}}^A + \overrightarrow{HA} \wedge \overrightarrow{R_{(S_0 \rightarrow S_2)}}^A = \vec{0} - h \cdot \vec{z} \wedge Z_{02}^A \vec{z} = \vec{0}$$

Ainsi :

$$\{\mathcal{T}_{(S_0 \rightarrow S_2)}\}^H = \begin{Bmatrix} Z_{02}^A \vec{z} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Q 2 : Donner l'expression du torseur d'action mécanique transmissible décrivant le contact en B de $S_0 \rightarrow S_2$ ($\{\mathcal{T}_{(S_0 \rightarrow S_2)}\}^B$). Exprimer le en B puis en H

$$\{\mathcal{T}_{(S_0 \rightarrow S_2)}\}^B = \begin{Bmatrix} Z_{02}^B \vec{z} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

On utilise la formule de Varignon pour déplacer le torseur en H .

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{H(S_0 \rightarrow S_2)}}^B = \overrightarrow{\mathcal{M}_{B(S_0 \rightarrow S_2)}}^B + \overrightarrow{HB} \wedge \overrightarrow{R_{(S_0 \rightarrow S_2)}}^B = \vec{0} + (d \cdot \vec{x} - h \cdot \vec{z}) \wedge Z_{02}^B \vec{z} = -d \cdot Z_{02}^B \vec{y}$$

Ainsi :

$$\{\mathcal{T}_{(S_0 \rightarrow S_2)}\}^H = \begin{Bmatrix} Z_{02}^B \vec{z} \\ -d \cdot Z_{02}^B \vec{y} \end{Bmatrix}$$

Q 3 : Donner l'expression du torseur d'action mécanique transmissible décrivant le contact en H de $S_1 \rightarrow S_2$. Exprimer le en H dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\{\mathcal{T}_{(S_1 \rightarrow S_2)}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} \vec{x} + Z_{12} \vec{z} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Q 4 : Donner l'expression du torseur d'action mécanique transmissible décrivant le contact en K de $S_0 \rightarrow S_1$. Exprimer le en K dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Exprimer-le ensuite en H .

$$\{\mathcal{T}_{(S_0 \rightarrow S_1)}\} = \begin{Bmatrix} X_{01} \vec{x} + Z_{01} \vec{z} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

On utilise la formule de Varignon pour déplacer le torseur en H .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{M}_{H(S_0 \rightarrow S_1)}} &= \overrightarrow{\mathcal{M}_{K(S_0 \rightarrow S_1)}} + \overrightarrow{HK} \wedge \overrightarrow{R_{(S_0 \rightarrow S_1)}} = \vec{0} + (-e \cdot \vec{x} - h \cdot \vec{z}) \wedge (X_{01} \vec{x} + Z_{01} \vec{z}) \\ &= (e \cdot Z_{01} - h \cdot X_{01}) \cdot \vec{y} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\{\mathcal{T}_{(S_0 \rightarrow S_1)}\} = \begin{Bmatrix} X_{01} \vec{x} + Z_{01} \vec{z} \\ (e \cdot Z_{01} - h \cdot X_{01}) \cdot \vec{y} \end{Bmatrix}$$

Q 5 : Donner l'expression du torseur de l'action de la pesanteur s'appliquant sur S_2 . Exprimer le en G puis en H .

$$\left\{ \mathcal{T}_{(pesanteur \rightarrow S_2)} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} -P \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

On utilise la formule de Varignon pour déplacer le torseur en H .

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{H(pesanteur \rightarrow S_2)}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{G(pesanteur \rightarrow S_2)}} + \overrightarrow{HG} \wedge \overrightarrow{R_{(pesanteur \rightarrow S_2)}} = \vec{0} + \frac{d}{2} \cdot \vec{x} \wedge (-P \vec{z}_0) = \frac{d}{2} \cdot \cos \alpha P \vec{y}$$

Ainsi :

$$\left\{ \mathcal{T}_{(pesanteur \rightarrow S_2)} \right\}_H = \left\{ \begin{array}{c} -P \vec{z}_0 \\ \frac{d}{2} \cdot \cos \alpha P \vec{y} \end{array} \right\}$$

Q 6 : Donner l'expression du torseur de l'action de la poussée ($\left\{ \mathcal{T}_{(poussée \rightarrow S_2)} \right\}$) s'appliquant sur S_2 . Exprimer le en H .

L'énoncé donne :

$$\left\{ \mathcal{T}_{(poussée \rightarrow S_2)} \right\}_E = \left\{ \begin{array}{c} F \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

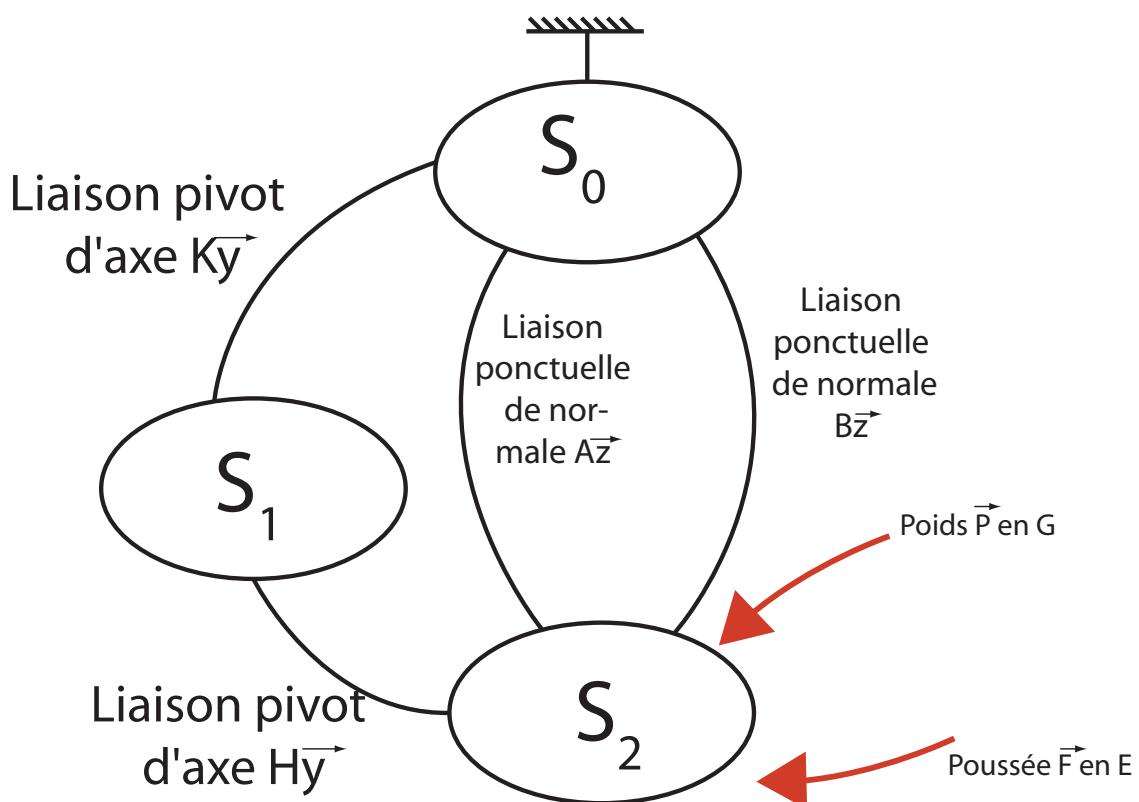
On utilise la formule de Varignon pour déplacer le torseur en H .

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{H(poussée \rightarrow S_2)}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{E(pesanteur \rightarrow S_2)}} + \overrightarrow{HE} \wedge \overrightarrow{R_{(poussée \rightarrow S_2)}} = \vec{0} + \left(\frac{2}{3} d \cdot \vec{x} - (h+p) \cdot \vec{z} \right) \wedge (F \vec{z}) = -\frac{2}{3} d \cdot F \vec{y}$$

Ainsi :

$$\left\{ \mathcal{T}_{(poussée \rightarrow S_2)} \right\}_H = \left\{ \begin{array}{c} F \vec{z} \\ -\frac{2}{3} d \cdot F \vec{y} \end{array} \right\}$$

Q 7 : Dessiner le graph de structure permettant de référencer les liaisons ainsi que les actions mécaniques extérieures du problème.



Q 8 : Isoler le câble S_1 et faire le bilan des actions mécaniques.

- Le poids est négligé.
- Action en H :

$$\{\mathcal{T}_{(S_2 \rightarrow S_1)}\} = -\{\mathcal{T}_{(S_1 \rightarrow S_2)}\} = \begin{Bmatrix} -X_{12} \vec{x} - Z_{12} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

- Action en K :

$$\{\mathcal{T}_{(S_0 \rightarrow S_1)}\} = \begin{Bmatrix} X_{01} \vec{x} + Z_{01} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{01} \vec{x} + Z_{01} \vec{z} \\ (e \cdot Z_{01} - h \cdot X_{01}) \cdot \vec{y} \end{Bmatrix}$$

Q 9 : Traduire l'équilibre du câble S_1 en écrivant le principe fondamental de la statique en H . En déduire des relations entre les inconnues de liaison en H et K .

$$(S_1) \text{ à l'équilibre} \quad \Rightarrow \quad \sum \left\{ \mathcal{T}_{(\bar{S}_1 \rightarrow S_1)} \right\} = \{0\}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_{(S_0 \rightarrow S_1)}\} + \{\mathcal{T}_{(S_2 \rightarrow S_1)}\} &= \{0\} \\ \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} X_{01} \vec{x} + Z_{01} \vec{z} \\ (e \cdot Z_{01} - h \cdot X_{01}) \cdot \vec{y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -X_{12} \vec{x} - Z_{12} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} &= \{0\} \end{aligned}$$

On obtient ainsi le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} X_{01} - X_{12} = 0 \\ Z_{01} - Z_{12} = 0 \\ e \cdot Z_{01} - h \cdot X_{01} = 0 \end{cases}$$

Q 10 : Isoler l'ensemble $S_2 = \{\text{plateforme + tubes}\}$ et faire le bilan des actions mécaniques extérieures en énonçant les torseurs d'actions mécaniques extérieures à S_2 .

- Contact ponctuel en A :

$$\{\mathcal{T}_{(S_0 \rightarrow S_2)}\}^A = \begin{Bmatrix} Z_{02}^A \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Z_{02}^A \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

- Contact ponctuel en B :

$$\{\mathcal{T}_{(S_0 \rightarrow S_2)}\}^B = \begin{Bmatrix} Z_{02}^B \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Z_{02}^B \vec{z} \\ -d \cdot Z_{02}^B \vec{y} \end{Bmatrix}$$

- Action mécanique de poussée en E :

$$\{\mathcal{T}_{(poussée \rightarrow S_2)}\}_E = \begin{Bmatrix} F \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \vec{z} \\ -\frac{2}{3}d \cdot F \vec{y} \end{Bmatrix}$$

- Action du poids en G :

$$\{\mathcal{T}_{(poids \rightarrow S_2)}\}_G = \begin{Bmatrix} -P \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \vec{z}_0 \\ \frac{d}{2} \cdot \cos \alpha P \vec{y} \end{Bmatrix}$$

- Action du câble en H :

$$\{\mathcal{T}_{(S_1 \rightarrow S_2)}\}_H = \begin{Bmatrix} X_{12} \vec{x} + Z_{12} \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Q 11 : Traduire l'équilibre de l'ensemble S_2 au point H en écrivant le Théorème en Moment Statique selon (H, \vec{y}) .

L'équation en moment donne :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{H(\bar{S}_2 \rightarrow S_2)}} = \vec{0}$$

$$\left(\overrightarrow{\mathcal{M}_{H(poussée \rightarrow S_2)}} + \overrightarrow{\mathcal{M}_{H(S_1 \rightarrow S_2)}} + \overrightarrow{\mathcal{M}_{H(S_0 \rightarrow S_2)}^A} + \overrightarrow{\mathcal{M}_{H(S_0 \rightarrow S_2)}^B} + \overrightarrow{\mathcal{M}_{H(poids \rightarrow S_2)}} \right) \cdot \vec{y} = 0.$$

Ce qui nous donne finalement :

$$-\frac{2}{3}d \cdot F + 0 + 0 - d \cdot Z_{02}^B + \frac{d}{2} \cdot \cos \alpha P = 0$$

Q 12 : Traduire ce qu'il se passe en cas de perte de contact en B sur le torseur d'action mécanique ($\{\mathcal{T}_{(S_0 \rightarrow S_2)}\}^B$).

En déduire la condition littérale sur F pour qu'il n'y ait pas décollement du pied en B.

L'ensemble reste en équilibre tant que l'effort normal en B (Z_{02}^B) reste positif ou à la limite nul :

$$Z_{02}^B \geq 0 \implies F \leq \frac{3}{4}P \cos \alpha.$$

Q 13 : Faire l'application numérique.

- Dans le cas où la paroi est de pente 45° , $F \leq 14850N$ permet d'assurer la stabilité du robot.
- Dans le cas où la paroi est de pente 80° , $F \leq 3650N$ permet d'assurer la stabilité du robot. et est supérieure à la valeur minimale exigée par le cahier des charges; 3000 N.

Q 14 : Cette valeur est-elle compatible avec le cahier des charges ? Un forage sur une paroi verticale est-il possible avec le robotclimber ?

- $F \leq 14850N$ est supérieure à la valeur minimale exigée par le cahier des charges : $10000N$.
- $F \leq 3650N$ est supérieure à la valeur minimale exigée par le cahier des charges : $3000N$.

L'effort de forage doit être compensé par la composante perpendiculaire à la paroi du poids du robot, composante nulle dans le cas d'une paroi verticale : le forage est alors impossible.

Q 15 : Écrire le théorème en résultante appliquée à S_2 . En déduire deux équations scalaires (en projection selon \vec{x} et \vec{z}).

$$\overrightarrow{R_{(\bar{S}_2 \rightarrow S_2)}} = \vec{0}$$

On obtient :

$$\begin{cases} Z_{02}^A + Z_{02}^B + Z_{12} + F - P \cdot \cos \alpha = 0 \\ X_{12} + P \cdot \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

Q 16 : La tension du câble S_1 peut être définie par $T = \overrightarrow{R_{(S_1 \rightarrow S_2)}} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{R_{(S_1 \rightarrow S_2)}} \cdot \frac{\vec{HK}}{\|\vec{HK}\|}$. Déduire des résultats précédents l'expression de T en fonction de P, α , e et h.

$$\begin{aligned} T &= \overrightarrow{R_{(poussée \rightarrow S_2)}} \cdot \vec{u} = (X_{12} \vec{x} + Z_{12} \vec{z}) \cdot \frac{-e \cdot \vec{x} - h \cdot \vec{z}}{\sqrt{e^2 + h^2}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{e^2 + h^2}} (e \cdot X_{12} + h \cdot Z_{12}) \end{aligned}$$

or,

$Z_{12} = \frac{h}{e} X_{12}$ d'après le PFS appliqué à S_1 .

On obtient donc :

$$T = \frac{-X_{12}}{\sqrt{e^2 + h^2}} \left(e + \frac{h^2}{e} \right) = P \cdot \sin \alpha \frac{\sqrt{e^2 + h^2}}{e}$$

4 Corrigé : étude du frein d'une éolienne

Q 1 : Calculer le torseur des actions mécaniques de l'air sur la pale supérieure en O.

$$\left\{ \mathcal{T}_{(air \rightarrow ps)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R_{(air \rightarrow ps)}} = \int_{M \in ps} \overrightarrow{dF}(air \rightarrow ps) \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{O(sol \rightarrow pied)}} = \int_{M \in ps} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{dF}(air \rightarrow ps) \end{array} \right\}$$

On peut alors calculer la résultante :

$$\overrightarrow{R_{(air \rightarrow ps)}} = \int_{z=0}^{\lambda} - (C_x \cdot \vec{x} - C_y \cdot \vec{y}) \cdot V \cdot dz = -\lambda \cdot V \cdot (C_x \cdot \vec{x} - C_y \cdot \vec{y})$$

On calcule également le moment :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{M}_{O(air \rightarrow ps)}} &= \int_{z=0}^{\lambda} z \cdot \vec{z} \wedge - (C_x \cdot \vec{x} - C_y \cdot \vec{y}) \cdot V \cdot dz = \int_{z=0}^{\lambda} V \cdot z \cdot dz (-C_x \cdot \vec{y} - C_y \cdot \vec{x}) \\ &= -\frac{V\lambda^2}{2} (C_x \cdot \vec{y} + C_y \cdot \vec{x}) \end{aligned}$$

On trouve alors :

$$\left\{ \mathcal{T}_{(air \rightarrow ps)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -\lambda \cdot V \cdot (C_x \cdot \vec{x} - C_y \cdot \vec{y}) \\ -\frac{V\lambda^2}{2} (C_x \cdot \vec{y} + C_y \cdot \vec{x}) \end{array} \right\}$$

Q 2 : Donner par analogie le torseur des actions mécaniques de l'air sur la pale inférieure en O et montrer que le torseur global de l'air sur les deux pales peut se mettre sous la forme ci-dessous.

$$\left\{ \mathcal{T}_{(air \rightarrow 2p)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} R \cdot \vec{x} \\ C \cdot \vec{x} \end{array} \right\}$$

On précisera les expressions littérales de R et C. On gardera ce torseur sous cette forme pour la suite.
Par analogie, on trouve

$$\left\{ \mathcal{T}_{(air \rightarrow pi)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -\lambda \cdot V \cdot (C_x \cdot \vec{x} + C_y \cdot \vec{y}) \\ -\frac{V\lambda^2}{2} (C_x \cdot \vec{y} - C_y \cdot \vec{x}) \end{array} \right\}$$

Ainsi,

$$\left\{ \mathcal{T}_{(air \rightarrow 2p)} \right\} = \left\{ \mathcal{T}_{(air \rightarrow ps)} \right\} + \left\{ \mathcal{T}_{(air \rightarrow pi)} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} R \cdot \vec{x} = -2V\lambda \cdot C_x \cdot \vec{x} \\ C \cdot \vec{x} = -V\lambda^2 \cdot C_y \cdot \vec{x} \end{array} \right\}$$

Q 3 : Donner la forme du torseur des actions mécaniques de 2 → 1 en I ainsi que les torseurs des actions mécaniques des liaisons en A et B du bâti 0 sur l'arbre 1.

$$\begin{aligned} \left\{ \mathcal{T}_{(2 \rightarrow 1)} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} F_I \cdot \vec{u} \\ 0 \end{array} \right\} \\ \left\{ \mathcal{T}_{(r0 \rightarrow 1)} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} X_{r01} \cdot \vec{x} + Y_{r01} \cdot \vec{y} + Z_{r01} \cdot \vec{z} \\ 0 \end{array} \right\} \\ \left\{ \mathcal{T}_{(la0 \rightarrow 1)} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} Y_{la01} \cdot \vec{y} + Z_{la01} \cdot \vec{z} \\ 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Q 4 : En écrivant le PFS au point A appliqué à l'arbre 1, déterminer le système d'équations permettant de calculer les efforts dans les liaisons rotule et linéaire annulaire (sphère-cylindre) ainsi que l'effort F_I transmis par l'engrenage en fonction de C , R et des dimensions et angles donnés. On ne résoudra pas ce système entièrement mais on montrera qu'il y a suffisamment d'équations pour le nombre d'inconnues.

On applique le PFS au solide isolé 1 :

$$\left\{ \mathcal{T}_{(2 \rightarrow 1)} \right\} + \left\{ \mathcal{T}_{(la0 \rightarrow 1)} \right\} + \left\{ \mathcal{T}_{(r0 \rightarrow 1)} \right\} + \left\{ \mathcal{T}_{(air \rightarrow 2p)} \right\} = \{O\}$$

Effectuons les différents changements de points pour se placer en A :

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{\mathcal{M}_{A(2 \rightarrow 1)}} = \vec{A} \vec{I} \wedge \vec{F}_I \cdot \vec{u} \\
& = \left(\frac{L}{2} \cdot \vec{x} - \frac{D_1}{2} \cdot \vec{z} \right) \wedge [\cos \alpha \cdot \vec{y} + \sin \alpha (\cos \delta \cdot \vec{x} + \sin \delta \cdot \vec{y})] F_I \\
& = \frac{D_1 F_I}{2} (\cos \alpha + \sin \delta \sin \alpha) \cdot \vec{x} - \frac{D_1 F_I}{2} \sin \alpha \cos \delta \cdot \vec{y} + \frac{L F_I}{2} (\cos \alpha + \sin \delta \sin \alpha) \cdot \vec{z} \\
\{ \mathcal{T}_{(2 \rightarrow 1)} \} &= \left\{ \begin{array}{l} F_I \sin \alpha \cos \delta \cdot \vec{x} + F_I (\cos \alpha + \sin \alpha \sin \delta) \cdot \vec{y} \\ \frac{F_I D_1}{2} (\cos \alpha + \sin \delta \sin \alpha) \cdot \vec{x} - \frac{F_I D_1}{2} \sin \alpha \cos \delta \cdot \vec{y} + \frac{F_I L}{2} (\cos \alpha + \sin \delta \sin \alpha) \cdot \vec{z} \end{array} \right\} \\
\overrightarrow{\mathcal{M}_{A(la0 \rightarrow 1)}} &= \vec{AB} \wedge (Y_{la01} \cdot \vec{y} + Z_{la01} \cdot \vec{z}) \\
&= L \cdot \vec{x} \wedge (Y_{la01} \cdot \vec{y} + Z_{la01} \cdot \vec{z}) \\
&= L (Y_{la01} \cdot \vec{z} - Z_{la01} \cdot \vec{y}) \\
\overrightarrow{\mathcal{M}_{A(air \rightarrow 2p)}} &= \overrightarrow{\mathcal{M}_{O(air \rightarrow 2p)}} \text{ car la droite } OA \text{ est l'axe central du torseur :} \\
\{ \mathcal{T}_{(air \rightarrow 2p)} \} &= \left\{ \begin{array}{l} R \cdot \vec{x} \\ C \cdot \vec{x} \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Ainsi le PFS en projection sur la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ donne le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_I \sin \alpha \cos \delta + 0 + X_{r01} + R = 0 \\ F_I (\cos \alpha + \sin \alpha \sin \delta) + Y_{la01} + Y_{r01} + 0 = 0 \\ 0 + Z_{la01} + Z_{r01} + 0 = 0 \\ \frac{D_1}{2} (\cos \alpha + \sin \delta \sin \alpha) F_I + 0 + 0 + C = 0 \\ -\frac{D_1}{2} \sin \alpha \cos \delta F_I - L Z_{la01} + 0 + 0 = 0 \\ \frac{L}{2} (\cos \alpha + \sin \delta \sin \alpha) F_I + L Y_{la01} + 0 + 0 = 0 \end{array} \right.$$

Inconnues : $X_{la01}, Y_{la01}, Z_{la01}, Y_{r01}, Z_{r01}, F_I$
Equations linéairement indépendantes : 6
 \Rightarrow Resolution possible

Q 5 : Déterminer l'effort F_I en fonction des dimensions et angles donnés.

On utilise l'équation

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{A(\bar{1} \rightarrow 1)}} \cdot \vec{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_I = -\frac{2C}{D_1} \frac{1}{\cos \alpha + \sin \delta \sin \alpha}$$

Q 6 : Donner la forme des actions mécaniques transmissibles par les liaisons ponctuelles avec frottement en D et E. Préciser la condition sur le coefficient de frottement f et les composantes des efforts pour qu'il n'y ait pas glissement. (On supposera que la composante tangentielle de frottement est parallèle à \vec{y}).

$$\{ \mathcal{T}_{(5 \rightarrow 2)} \} = \left\{ \begin{array}{l} Y_{52} \cdot \vec{y} + Z_{52} \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad \{ \mathcal{T}_{(4 \rightarrow 2)} \} = \left\{ \begin{array}{l} Y_{42} \cdot \vec{y} + Z_{42} \cdot \vec{z} \\ L \vec{0} \end{array} \right\}$$

Pour qu'il n'y ait pas glissement il faut : $|Y_{52}| < f \cdot |Z_{52}|$ et $|Y_{42}| < |f \cdot |Z_{42}|$

Q 7 : Calculer l'effort F de l'air sous pression sur le piston en fonction du diamètre $d = 50mm$ du piston et de la pression $p = 6bar$ de l'air

Pression homogène appliquée sur un disque : $F = p \cdot S$ d'où

$$F = \pi \cdot p \frac{d^2}{4} = 1,18 \cdot 10^3 N$$

Q 8 : Isoler le piston 5 et appliquer l'équation de résultante du PFS sur \vec{z} pour calculer la composante normale de l'effort en D de 5 sur 2

Bilan des actions mécaniques :

$$\{ \mathcal{T}_{(air \rightarrow 5)} \} = \left\{ \begin{array}{l} -F \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad \{ \mathcal{T}_{(4 \rightarrow 5)} \} = \left\{ \begin{array}{l} X_{45} \cdot \vec{x} + Y_{45} \cdot \vec{y} \\ L_{45} \cdot \vec{x} + M_{45} \cdot \vec{y} \end{array} \right\} \quad \{ \mathcal{T}_{(2 \rightarrow 5)} \} = \left\{ \begin{array}{l} -Y_{52} \cdot \vec{y} - Z_{52} \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

Théorème de la résultante statique appliqué au vérin 5 :

$$\vec{R}(air \rightarrow 5) + \vec{R}(4 \rightarrow 5) + \vec{R}(2 \rightarrow 5) = \vec{0}$$

En projection sur \vec{z} , il vient : $-F - Z_{52} = 0$
d'où :

$$\boxed{Z_{52} = -F}$$

Q 9 : Isoler l'étrier et le piston {4 + 5} et appliquer l'équation de résultante du PFS sur \vec{z} pour calculer composante normale de l'effort en E de 4 sur 2.

Bilan des actions mécaniques :

$$\begin{aligned}\{\mathcal{T}_{(2 \rightarrow 5)}\}_E &= \left\{ \begin{array}{l} Y_{52} \cdot \vec{y} - Z_{52} \cdot \vec{z} \\ 0 \end{array} \right\} \\ \{\mathcal{T}_{(2 \rightarrow 4)}\}_E &= \left\{ \begin{array}{l} -Y_{42} \cdot \vec{y} - Z_{42} \cdot \vec{z} \\ 0 \end{array} \right\} \quad \{\mathcal{T}_{(0 \rightarrow 4)}\}_E = \left\{ \begin{array}{l} X_{04} \cdot \vec{x} + Y_{04} \cdot \vec{y} \\ L_{04} \cdot \vec{x} + M_{04} \cdot \vec{y} + N_{04} \cdot \vec{z} \end{array} \right\}\end{aligned}$$

Théorème de la résultante statique appliquée à {4 + 5} en projection sur \vec{z} : $-Z_{52} - Z_{42} = 0 \Rightarrow Z_{42} = F$

Q 10 : Isoler l'arbre 2 et appliquer l'équation de moment du PFS sur l'axe (C, \vec{z}). En déduire les actions tangentielles en D et E en fonction de F_I (On supposera que les actions tangentielles en D et E sont égales et parallèles à \vec{y}).

Bilan des actions mécaniques (4 torseurs à écrire en C). On ne souhaite que les composantes en \vec{z} des moments :

- $\overline{M_C(4 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}} = [\overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{R(4 \rightarrow 2)}] \cdot \vec{z} = [(\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JD}) \wedge (Y_{42} \cdot \vec{y} + Z_{42} \cdot \vec{z})] \cdot \vec{z} = r Y_{42}$
 - $\overline{M_C(5 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}} = [\overrightarrow{CE} \wedge \overrightarrow{R(5 \rightarrow 2)}] \cdot \vec{z} = [(\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{JE}) \wedge (Y_{52} \cdot \vec{y} + Z_{52} \cdot \vec{z})] = r Y_{52}$
 - $\overline{M_C(1 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}} = [\overrightarrow{CI} \wedge \overrightarrow{R(1 \rightarrow 2)}] \cdot \vec{z} = [(\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KI}) \wedge [-F_I \sin \alpha \cos \delta \cdot \vec{x} - F_I (\cos \alpha + \sin \alpha \sin \delta) \cdot \vec{y}]] \cdot \vec{z}$
- $$\Rightarrow \overline{M_C(1 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}} = -F_I \frac{D_1}{2} (\cos \alpha + \sin \alpha \sin \delta)$$

- $\overline{M_C(0 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}} = 0$ car pivot d'axe (C, \vec{z})

On applique le théorème du moment statique au solide isolé 2 projeté sur \vec{z} .

$$\overline{M_C(4 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}} + \overline{M_C(5 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}} + \overline{M_C(1 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}} + \overline{M_C(1 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}} = 0$$

$$\Rightarrow r Y_{42} + r Y_{52} - F_I \frac{D_2}{2} (\cos \alpha + \sin \alpha \sin \delta) = 0 \quad \text{avec } Y_{42} = Y_{52}$$

$$\Rightarrow Y_{42} = \frac{D_2}{4r} (\cos \alpha + \sin \alpha \sin \delta) F_I$$

Q 11 : Calculer la vitesse limite du vent V_{\lim} nécessaire pour faire déraper le frein (On prendra le coefficient de frottement $f = 0,1$). Conclure.

On se place à la limite du glissement : $|Y_{42}| = f |Z_{42}|$ avec $Y_{42} > 0 \Rightarrow Y_{42} = f F$

$$\text{Or : } \begin{cases} Y_{42} = \frac{D_2}{4r} (\cos \alpha + \sin \alpha \sin \delta) F_I \\ F_I = -\frac{2C}{D_1} \frac{1}{\cos \alpha + \sin \delta \sin \alpha} \\ C = -V_{\lim} \lambda^2 C_Y \\ F = \pi p \frac{d^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} f \pi p \frac{d^2}{4} &= -\frac{D_2}{4r} \frac{2C}{D_1} = \frac{D_2}{D_1} \frac{1}{2r} V_{\lim} \lambda^2 C_Y \\ \Rightarrow V_{\lim} &= \frac{f \pi p d^2 r}{2 \lambda^2 C_Y} \frac{D_1}{D_2} \end{aligned}$$

$$\text{AN : } V_{\lim} = 157 \frac{m}{s} = 565 \text{ km/h}$$

Le système de freinage est bien conçu pour bloquer le système, le vent ne pouvant pas atteindre cette vitesse limite même dans des conditions météorologiques extrêmes. L'exigence est validée.