Devoir à la maison n° 4

À rendre le 7 octobre

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \qquad ; \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \qquad ; \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} k a_k a_{n-k}$$

1) Calculer a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 ainsi que S_0, S_1, S_2, S_3, S_4. Que remarque-t-on ?

2) **a)** Montrer que

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} (n-k) a_{n-k} a_k$$

b) En déduire que $2T_n = nS_n$.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+2)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$$

4) Déduire des questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+1} + S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$$

puis que

$$\frac{n+3}{2} S_{n+1} = a_{n+1} + 2(n+1)S_n$$

5) En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = a_{n+1}$.

6) Montrer que a_n est un entier naturel pour tout $n \in \mathbb{N}$.

— FIN —