LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I.

ANNÉE 2021 - 2022

C4 : MODÉLISATION CINÉMATIQUE STRUCTURELLE DES SYSTÈMES COMPOSÉS

C4-1 - Modélisation des liaisons mécaniques

7 Décembre 2021

Table des matières

Compétences

- **Modéslier**
  - Proposer une modélisation des liaisons avec leurs caractéristiques géométriques.
  - Proposer un modèle cinématique à partir d'un système réel ou d'une maquette numérique.
  - Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.
- **Communiquer**
  - Lire et décoder un document technique : Schéma Cinématique

- Soient deux solides S_1 et S_2 **en contact** pendant leur mouvement dans un repère R_0 (fig.1).
- Soit I un point de la zone de contact (on notera que la zone de contact sera souvent ramenée à cet unique point I).
- Soit Π le plan tangent au contact (i.e. tangent aux deux solides au point de contact).
- Soit $\overrightarrow{n}$ la normale à ce plan.

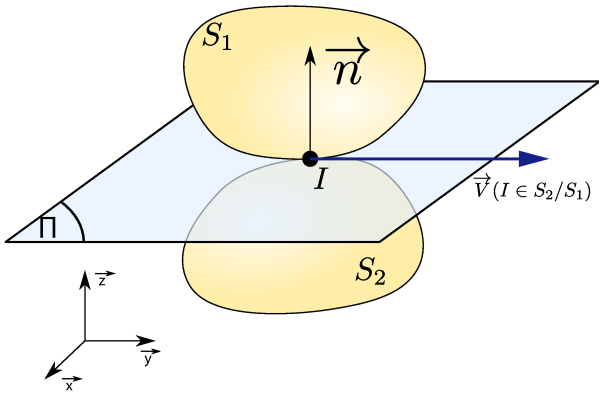


FIGURE 1 – Solides en contact, de plan tangent Π.

I. Modélisation des contacts entre solides

1 Paramétrage

2 Vitesse de glissement/ Roulement sans glissement

Définition 1 : *vitesse de glissement/roulement sans glissement*

- On appelle **vitesse de glissement** au point I, de S_2 par rapport à S_1 le vecteur vitesse du point I dans le mouvement de S_2 par rapport à S_1 (fig.1) :

$$\boxed{\overrightarrow{V}(I \in S_2/S_1).} \tag{1}$$

- On dit qu'il y a **roulement sans glissement** au point I si :

$$\boxed{\overrightarrow{V}(I \in S_2/S_1) = \overrightarrow{0}} \tag{2}$$

  Dans ce cas, on dit que S_2 "*roule sans glisser*" sur S_1.
- $\overrightarrow{V}([\in I/])S_2S_1$ est contenu dans le plan Π (sinon il y aura inter-pénétration des deux solides, ou décollement du contact)
- **Décomposition** :

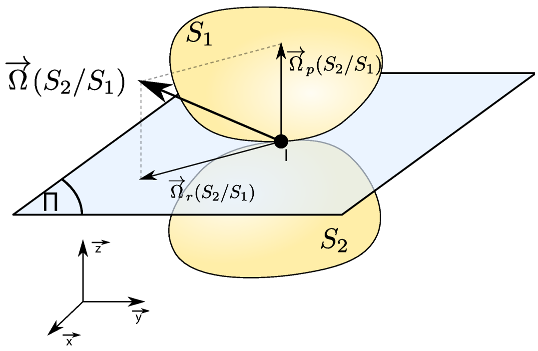
$$\overrightarrow{V}(I \in S_2/S_1) = \overrightarrow{V}(I \in S_2/R_0) - \overrightarrow{V}(I \in S_1/R_0)$$

3 Vitesse de roulement / Vitesse de pivotement

Définition 2 : ***Vitesse de roulement / Vitesse de pivotement***

Soit $\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}}$ le vecteur vitesse de rotation de S_2 par rapport à S_1. On peut décomposer $\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}}$ en la somme de deux vecteurs $\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}$:

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}} = \overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}} + \overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}} \tag{3}$$



où :

- $\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}}$ est le **vecteur vitesse de rotation de roulement** de S_2 par rapport à S_1. Il est contenu dans le plan Π.
- $\overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}$ est le **vecteur vitesse de rotation de pivotement** de S_2 par rapport à S_1. Il est normal au plan Π

Remarque 1 :

De manière général, ces deux vecteurs s'obtiennent par :

$$\overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}} = \tag{4}$$
$$\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}} = \tag{5}$$

II. Modélisation des liaisons mécaniques

1 Contact entre les solides

Définition 3 : ***Système mécanique***

- Un **système mécanique** est composé de plusieurs solides qui sont liés entre eux par **des liaisons mécaniques**.
- **Une liaison mécanique** résulte d'un **contact** entre deux solides.
- Dans la réalité tout contact est surfacique mais suivant les dimensions de certaines zones de contact, on peut idéaliser le contact comme étant parfois ponctuel ou linéaire.
- La **nature des surfaces** de contact va engendrer des mouvements relatifs autorisés entre les deux solides.

2 Degrés de liberté

Définition 4 : *Dégrés de liberté*

Les **mouvements relatifs** autorisés entre deux solides liés par une liaison mécanique sont **les degrés de liberté**.
Dans l'espace (3D), on considère 6 degrés de liberté élémentaires (3 translations et 3 rotations) que l'on donne par rapport à un repère $\left(O,\overrightarrow{x},\overrightarrow{y},\overrightarrow{z}\right)$.

- rotations respectivement autour de $\left(O,\overrightarrow{x}\right)$, $\left(O,\overrightarrow{y}\right)$ et $\left(O,\overrightarrow{z}\right)$: R_x, R_y et R_z,
- translations respectivement suivant $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ et $\overrightarrow{z}$: T_x, T_y et T_z.

Les degrés de liberté autorisés par une liaison dépendent des surfaces de contact entre les solides.

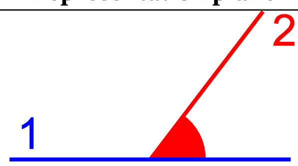
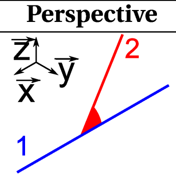
III. Modélisation des liaisons entre solides

1 Liaisons normalisées

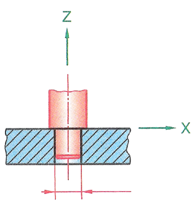
Il existe 11 liaisons usuelles et normalisées entre deux solides. Elles sont définies ci-dessous. Un tableau récapitulatif est donné dans la partie 2. Ces liaisons sont considérées comme parfaites, c'est à dire avec des contacts géométriques parfaits et sans jeu (ce qui est rarement le cas dans la réalité).
Pour la suite de la section, on considère deux solides S_1 et S_2 en liaison.

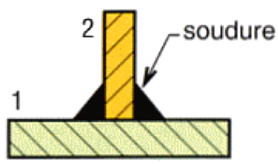
a) La liaison encastrement

Aussi appelée "liaison fixe" ou "liaison complète", cette liaison n'admet aucun degré de liberté. Elle est rarement utilisée.

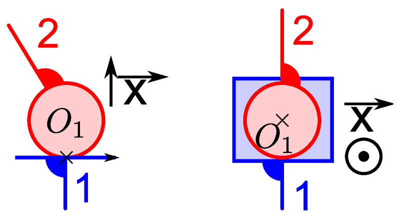
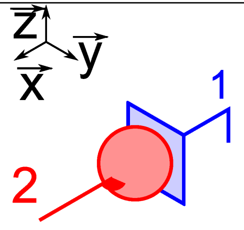
Liaison Encastrement		
Degrés de liberté	**Symbole normalisé**	
	Représentation plane	**Perspective**
0 degré de liberté : • 0 rotation • 0 translation		

Exemple 1 :



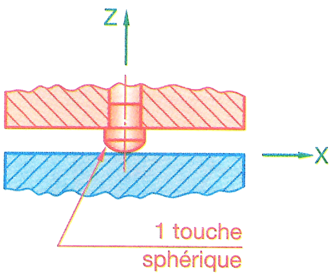


b) La liaison sphère-plan

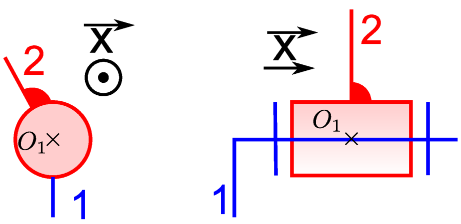
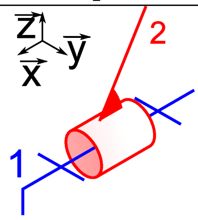
Liaison sphère-plan de centre O_1, de normale $\overrightarrow{x}$		
Degrés de liberté	**Symbole normalisé**	
	Représentation plane	**Perspective**
5 degrés de liberté : • 3 rotations : R_x, R_y, R_z • 2 translations : T_y, T_z		

Historiquement appelée "*liaison ponctuelle*", elle constitue **une liaison élémentaire : toute autre liaison peut être considérée comme une combinaison de liaisons sphère-plan.**

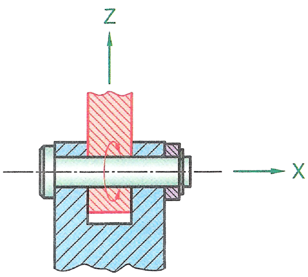
Exemple 2 :

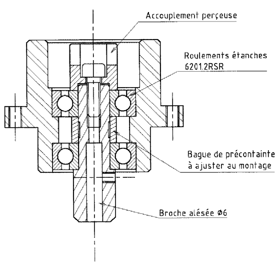


c) La liaison pivot

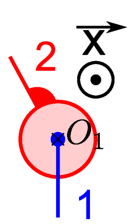
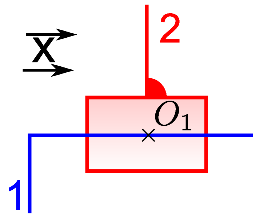
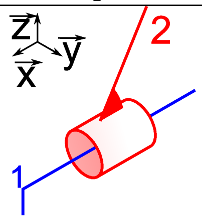
Liaison pivot d'axe $(O_1, \overrightarrow{x})$		
Degrés de liberté	**Symbole normalisé**	
	Représentation plane	**Perspective**
1 degré de liberté : • 1 rotation : R_x • 0 translation		

Exemple 3 :

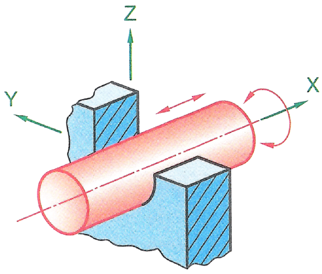




d) La liaison pivot-glissant

Liaison pivot-glissant d'axe $\left(O_1, \overrightarrow{x}\right)$			
Degrés de liberté	**Symbole normalisé**		
	Représentation plane		**Perspective**
2 degrés de liberté : • 1 rotation : R_x • 1 translation : T_x			

Exemple 4 :



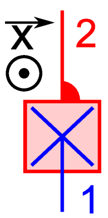
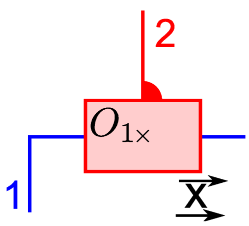
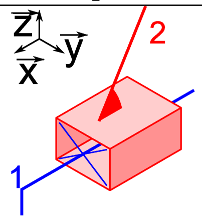
Attention :

Un arbre de diamètre D dans un alésage de longueur L pourra être modélisé avec une **liaison pivot-glissant si le guidage est long** (c'est à dire si L est suffisamment grand par rapport à D). Généralement, on considère que c'est le cas si :

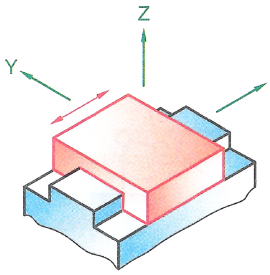
$$\frac{L}{D} \geq 1,5$$

Dans le cas contraire, elle sera assimilée à une **liaison sphère-cylindre**.

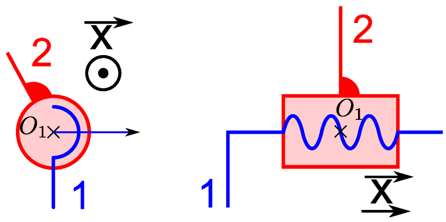
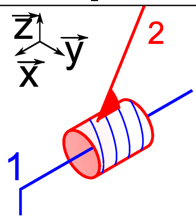
e) La liaison glissière

Liaison glissière d'axe $\overrightarrow{x}$			
Degrés de liberté	**Symbole normalisé**		
	Représentation plane		**Perspective**
1 degré de liberté : • 0 rotation : • 1 translation T_x			

Exemple 5 :



f) La liaison hélicoïdale

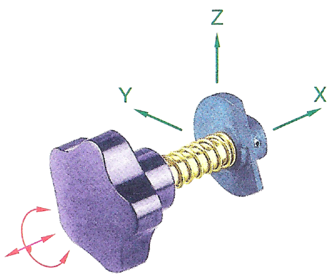
Liaison hélicoïdale d'axe $(O_1, \vec{x})$		
Exemple de désignation	**Symbole normalisé**	
	Représentation plane	**Perspective**
1 rotation R_x + 1 translation T_x couplée		

Un seul degré de liberté est considéré. Le mouvement de rotation R_x et celui de translation T_x sont couplés et ne constituent ainsi qu'un seul mouvement indépendant.

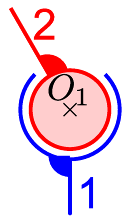
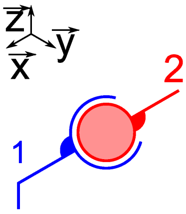
Définition 5 : ***pas de la liaison hélicoïdal***

On appelle **le pas de la liaison hélicoïdal** le rapport entre la translation et la rotation : $p = 2\,\pi\,\frac{T_x}{R_x}$

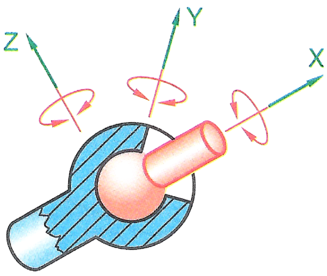
Exemple 6 :



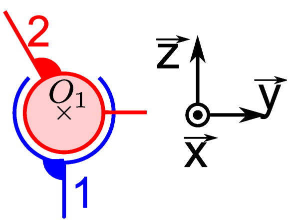
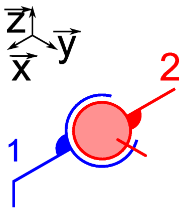
g) La liaison sphérique

Liaison sphérique de centre O_1		
Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
3 degrés de liberté : • 3 rotations : R_x, R_y, R_z • 0 translation		

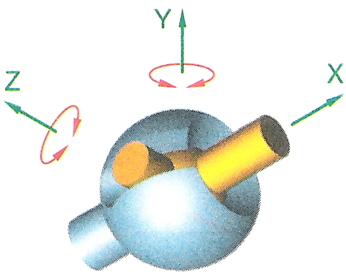
Exemple 7 :

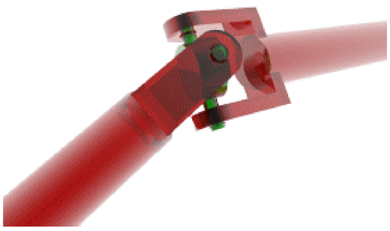



h) La liaison sphérique à doigt

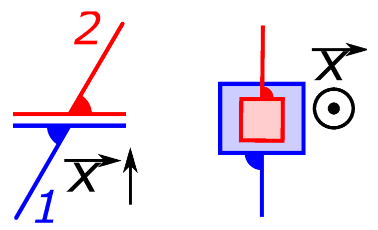
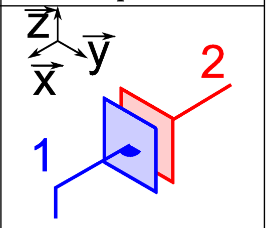
Liaison sphérique à doigt de centre O_1 et d'axe bloqué $\vec{z}$		
Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
2 degrés de liberté : • 2 rotations : R_x, R_y • 0 translation		

Exemple 8 :



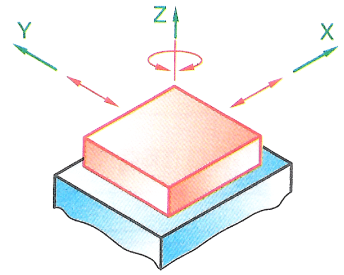



i) La liaison plan-plan

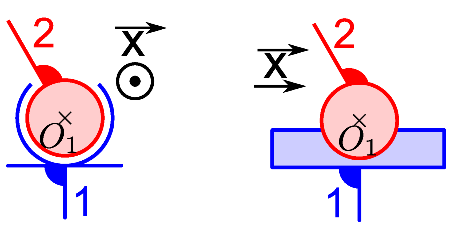
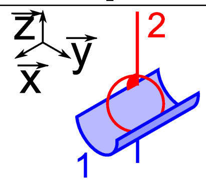
Liaison plan-plan de normale $\overrightarrow{x}$		
Exemple de désignation	**Symbole normalisé**	
	Représentation plane	**Perspective**
3 degrés de liberté : • 1 rotation : R_x • 2 translations : T_y, T_z		

Historiquement, cette liaison s'appelait "*liaison appui-plan*". Cette dénomination est parfois encore utilisée.

Exemple 9 :

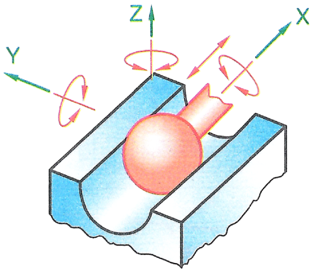


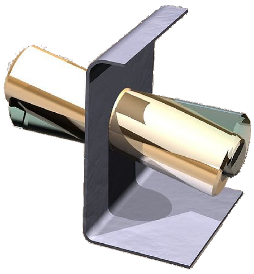
j) La liaison sphère-cylindre

Liaison sphère-cylindre d'axe $(O_1, \overrightarrow{x})$		
Exemple de désignation	**Symbole normalisé**	
	Représentation plane	**Perspective**
4 degrés de liberté : • 3 rotations : R_x, R_y, R_z • 1 translation : T_x		

Cette liaison était autrefois appelée "*linéaire annulaire*"

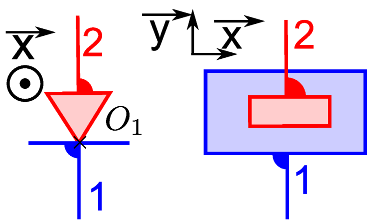
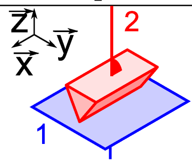
Exemple 10 :



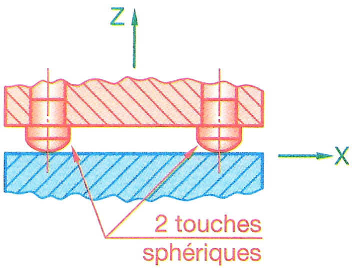


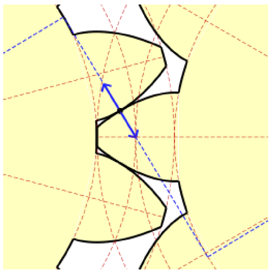
k) La liaison cylindre-plan

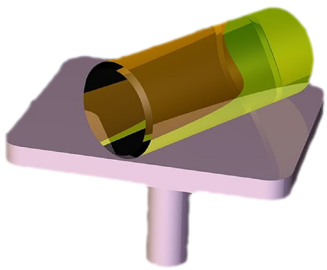
Cette liaison était autrefois appelée "*linéaire-rectiligne*". Malgré son nom, elle se représente par un liaison de forme prismatique. Certains la représentent toutefois par un cylindre posé sur un plan.

Liaison cylindre sur plan d'axe $(O_1, \vec{x})$, de normale $\vec{z}$		
Exemple de désignation	**Symbole normalisé**	
	Représentation plane	**Perspective**
4 degrés de liberté : • 2 rotations : R_x, R_z • 2 translations : T_x, T_y		

Exemple 11 :







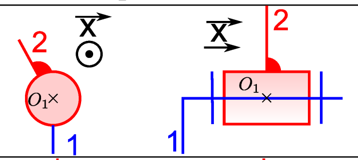
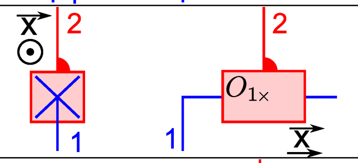
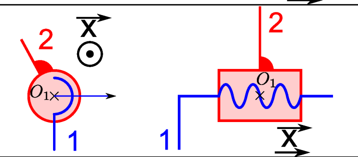
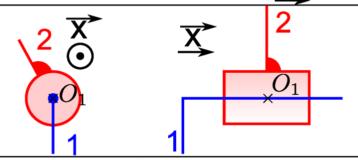
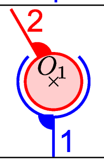
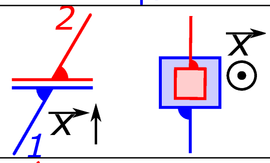
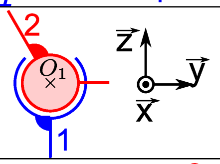
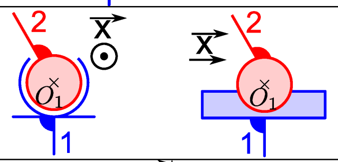
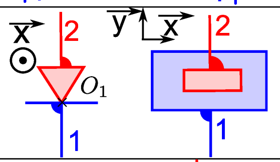
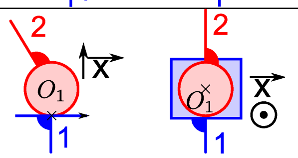
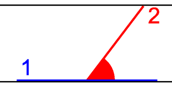
2 Tableau des liaisons cinématiques normalisées

Définition 6 : *Torseur cinématique du mouvement relatif entre deux solides*

On caractérise le mouvement relatif du solide S_2 par rapport au solide S_1 par le torseur cinématique qu'on exprimera en un point P :

$$\boxed{\left\{\mathscr{V}_{(S_2/S_1)}\right\} = {}_{O_1}\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}}\\ \overrightarrow{V}(O_1\in S_2/S_1)\end{array}\right\} = {}_{O_1}\left\{\begin{array}{cc}p_{21} & u_{21}\\ q_{21} & v_{21}\\ r_{21} & w_{21}\end{array}\right\}_R = {}_{O_1}\left\{\begin{array}{c}p_{21}\cdot\overrightarrow{x}_1+q_{21}\cdot\overrightarrow{y}_1+r_{21}\overrightarrow{z}_1\\ u_{21}\cdot\overrightarrow{x}_1+v_{21}\cdot\overrightarrow{y}_1+w_{21}\overrightarrow{z}_1\end{array}\right\}} \tag{6}$$

- $R\left(O_1,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}\right)=R_1\left(O_1,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}\right)$, le repère lié à S_1
- p_{21}, q_{21} et r_{21} sont les composantes du vecteur rotation instantané $\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}}$ dans le repère R.
- u_{21}, v_{21} et w_{21} sont les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(O_1\in S_2/S_1)$ dans le repère R.

Nom	Représentation	Torseur cinématique
Liaisons pivot d'axe $(\Delta) = \left(O_1, \overrightarrow{x}\right)$		
Liaisons glissière de direction $\overrightarrow{x}$		
Liaisons hélicoïdale d'axe $(\Delta) = \left(O_1, \overrightarrow{x}\right)$ et de pas p		
Liaison pivot glissant d'axe $(\Delta) = \left(O_1, \overrightarrow{x}\right)$		
Liaison sphérique de centre O_1		
Liaison plane de normale $\overrightarrow{x}$		
Liaison sphérique à doigt de centre O_1, d'axe bloqué $\overrightarrow{z}$		
Liaison sphère-cylindre d'axe $\left(O_1, \overrightarrow{x}\right)$		
Liaison cylindre-plan de normale $\overrightarrow{z}$ et d'axe $\left(O_1, \overrightarrow{x}\right)$ et de plan normal $\Pi = \left(O_1, \overrightarrow{z}, \overrightarrow{x}\right)$		
Liaison sphère-plan de normale $(\Delta) = \left(O_1, \overrightarrow{x}\right)$		
Liaison encastrement		

Avec $R\left(O_1, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$, le repère associé au solide 1.