



C4 : MODÉLISATION CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES COMPOSÉS DE CHAINES DE SOLIDES

## C4-5 - Modélisation des liaisons mécaniques

19 Janvier 2021

---

### Table des matières

---

<b>I Modélisation des contacts entre solides</b>	<b>2</b>
1 Paramétrage . . . . .	2
2 Vitesse de glissement/ Roulement sans glissement . . . . .	2
3 Vitesse de roulement / Vitesse de pivotement . . . . .	3
<b>II Modélisation des liaisons mécaniques</b>	<b>3</b>
1 Contact entre les solides . . . . .	3
2 Degrés de liberté . . . . .	4
<b>III Modélisation des liaisons entre solides</b>	<b>4</b>
1 Liaisons normalisées . . . . .	4
a) La liaison encastrement . . . . .	4
b) La liaison sphère-plan . . . . .	5
c) La liaison pivot . . . . .	5
d) La liaison pivot-glissant . . . . .	6
e) La liaison glissière . . . . .	6
f) La liaison hélicoïdale . . . . .	7
g) La liaison sphérique . . . . .	8
h) La liaison sphérique à doigt . . . . .	8
i) La liaison plan-plan . . . . .	9
j) La liaison sphère-cylindre . . . . .	9
k) La liaison cylindre-plan . . . . .	10
2 Tableau des liaisons cinématiques normalisées . . . . .	11

### Compétences

- **Modéliser;** Proposer un modèle de connaissance et de comportement : Solide indéformable : définition; référentiel, repère; équivalence solide/référentiel; degrés de liberté; vecteur-vitesse angulaire de deux référentiels en mouvement l'un par rapport à l'autre
- **Communiquer;** Rechercher et traiter des informations : Torseur cinématique
- **Communiquer;** Mettre en oeuvre une communication : Liaisons : géométrie des contacts entre deux solides; définition du contact ponctuel entre deux solides : roulement, pivotement, glissement, condition cinématique de maintien du contact; définition d'une liaison; liaisons normalisées entre solides, caractéristiques géométriques et repères d'expression privilégiés; torseur cinématique des liaisons normalisées; torseur des actions mécaniques transmissibles dans les liaisons normalisées; associations de liaisons en série et parallèle; liaisons cinématiquement équivalentes

# I. Modélisation des contacts entre solides

## 1 Paramétrage

- Soient deux solides  $S_1$  et  $S_2$  **en contact** pendant leur mouvement dans un repère  $R_0$  (fig.1).
- Soit  $I$  un point de la zone de contact (on notera que la zone de contact sera souvent ramenée à cet unique point  $I$ ).
- Soit  $\Pi$  le plan tangent au contact (i.e. tangent aux deux solides au point de contact).
- Soit  $\vec{n}$  la normale à ce plan.

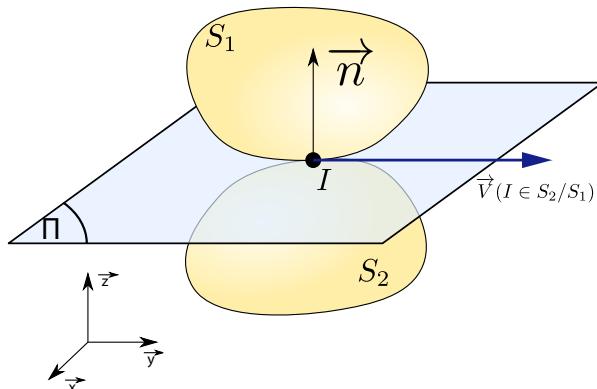


FIGURE 1 – Solides en contact, de plan tangent  $\Pi$ .

## 2 Vitesse de glissement/ Roulement sans glissement



### Définition 1 : vitesse de glissement/roulement sans glissement

- On appelle **vitesse de glissement** au point  $I$ , de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  le vecteur vitesse du point  $I$  dans le mouvement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  (fig.1) :

$$\boxed{\vec{V}(I \in S_2/S_1).} \quad (1)$$

- On dit qu'il y a **roulement sans glissement** au point  $I$  si :

$$\boxed{\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{0}} \quad (2)$$

Dans ce cas, on dit que  $S_2$  “roule sans glisser” sur  $S_1$ .

- $\vec{V}([ \in I / ])_{S_2 S_1}$  est contenu dans le plan  $\Pi$  (sinon il y aura inter-pénétration des deux solides, ou décollement du contact)
- Décomposition :**

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{V}(I \in S_2/R_0) - \vec{V}(I \in S_1/R_0)$$

### 3 Vitesse de roulement / Vitesse de pivotement

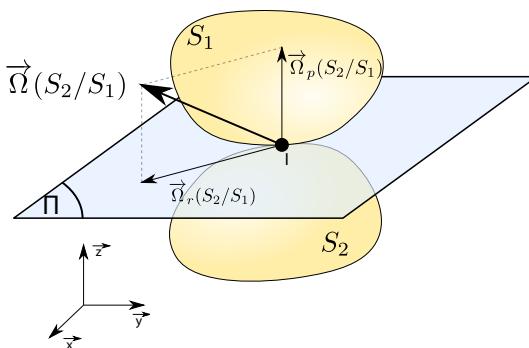
#### Définition 2 : Vitesse de roulement / Vitesse de pivotement

Soit  $\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}}$  le vecteur vitesse de rotation de  $S_2$  par rapport à  $S_1$ . On peut décomposer  $\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}}$  en la somme de deux vecteurs  $\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}}$  et  $\overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}$  :

$$\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}} = \overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}} + \overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}} \quad (3)$$

où :

- $\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}}$  est le **vecteur vitesse de rotation de roulement** de  $S_2$  par rapport à  $S_1$ . Il est contenu dans le plan  $\Pi$ .
- $\overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}$  est le **vecteur vitesse de rotation de pivotement** de  $S_2$  par rapport à  $S_1$ . Il est normal au plan  $\Pi$



#### Remarque 1 :

De manière général, ces deux vecteurs s'obtiennent par :

$$\overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}} = \dots \quad (4)$$

$$\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}} = \dots \quad (5)$$

## II. Modélisation des liaisons mécaniques

### 1 Contact entre les solides

#### Définition 3 : Système mécanique

- Un **système mécanique** est composé de plusieurs solides qui sont liés entre eux par **des liaisons mécaniques**.
- Une **liaison mécanique** résulte d'un **contact** entre deux solides.
- Dans la réalité tout contact est surfacique mais suivant les dimensions de certaines zones de contact, on peut idéaliser le contact comme étant parfois ponctuel ou linéaire.
- La **nature des surfaces** de contact va engendrer des mouvements relatifs autorisés entre les deux solides.

## 2 Degrés de liberté

### Définition 4 : Degrés de liberté

Les mouvements relatifs autorisés entre deux solides liés par une liaison mécanique sont les **degrés de liberté**.

Dans l'espace (3D), on considère 6 degrés de liberté élémentaires (3 translations et 3 rotations) que l'on donne par rapport à un repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

- rotations respectivement autour de  $(O, \vec{x})$ ,  $(O, \vec{y})$  et  $(O, \vec{z})$  :  $R_x$ ,  $R_y$  et  $R_z$ ,
- translations respectivement suivant  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  :  $T_x$ ,  $T_y$  et  $T_z$ .

Les degrés de liberté autorisés par une liaison dépendent des surfaces de contact entre les solides.



## III. Modélisation des liaisons entre solides

### 1 Liaisons normalisées

Il existe 11 liaisons usuelles et normalisées entre deux solides. Elles sont définies ci-dessous. Un tableau récapitulatif est donné dans la partie 2. Ces liaisons sont considérées comme parfaites, c'est à dire avec des contacts géométriques parfaits et sans jeu (ce qui est rarement le cas dans la réalité).

Pour la suite de la section, on considère deux solides  $S_1$  et  $S_2$  en liaison.

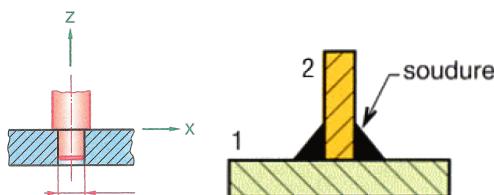
#### a) La liaison encastrement

Aussi appelée "liaison fixe" ou "liaison complète", cette liaison n'admet aucun degré de liberté. Elle est rarement utilisée.

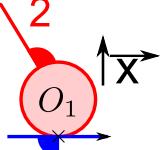
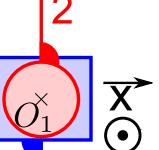
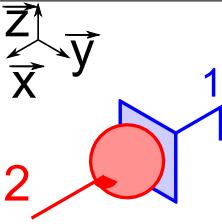
Liaison Encastrement		
Degrés de liberté	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
0 degré de liberté : • 0 rotation • 0 translation		



#### Exemple 1 :



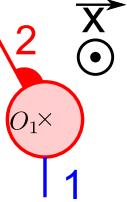
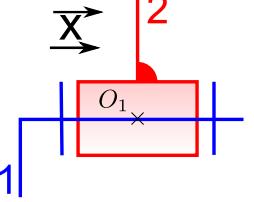
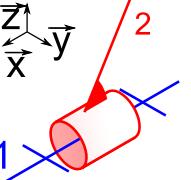
### b) La liaison sphère-plan

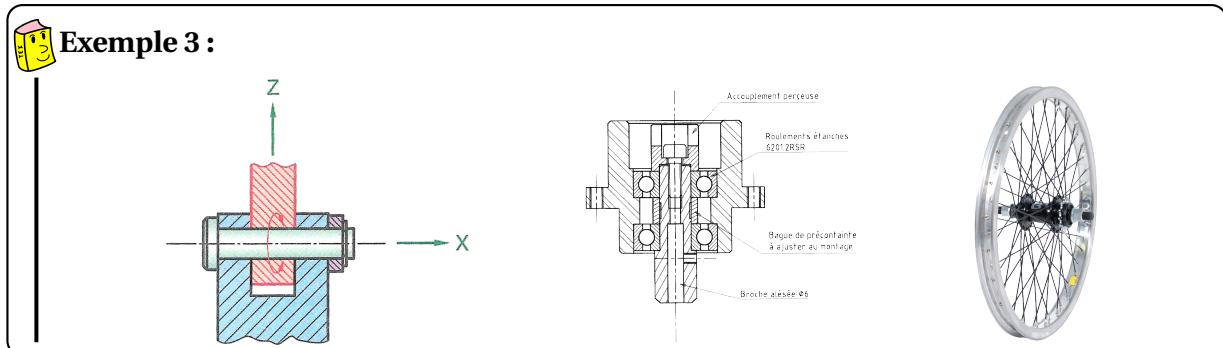
Liaison sphère-plan de centre $O_1$ , de normale $\vec{x}$		
Degrés de liberté	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
5 degrés de liberté : <ul style="list-style-type: none"> <li>• 3 rotations : <math>R_x, R_y, R_z</math></li> <li>• 2 translations : <math>T_y, T_z</math></li> </ul>	 	

Historiquement appelée “liaison ponctuelle”, elle constitue une **liaison élémentaire** : toute autre liaison peut être considérée comme une combinaison de liaisons sphère-plan.



### c) La liaison pivot

Liaison pivot d'axe ( $O_1, \vec{x}$ )		
Degrés de liberté	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
1 degré de liberté : <ul style="list-style-type: none"> <li>• 1 rotation : <math>R_x</math></li> <li>• 0 translation</li> </ul>	 	

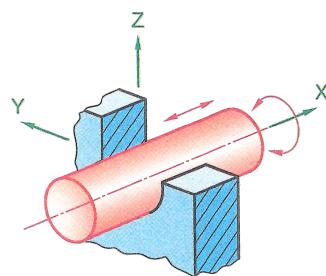


#### d) La liaison pivot-glissant

Degrés de liberté	Liaison pivot-glissant d'axe $(O_1, \vec{x})$	
	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
2 degrés de liberté : <ul style="list-style-type: none"> <li>• 1 rotation : <math>R_x</math></li> <li>• 1 translation : <math>T_x</math></li> </ul>		



#### Exemple 4 :



#### Attention :

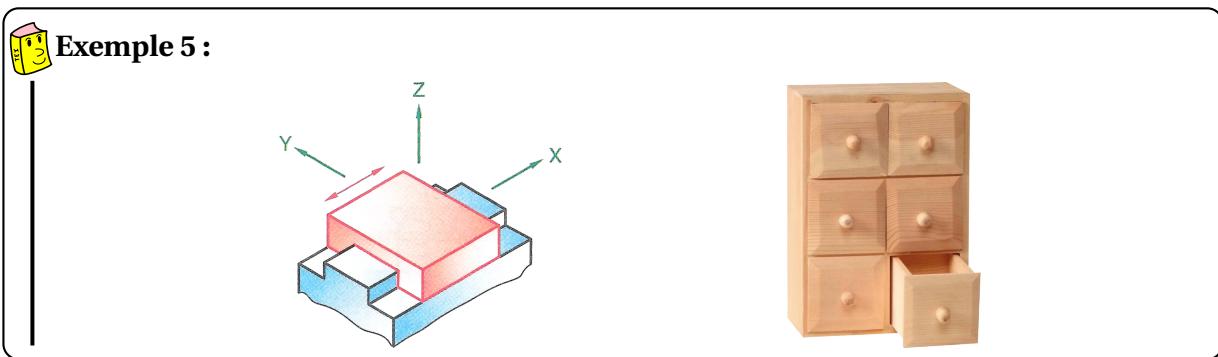
Un arbre de diamètre  $D$  dans un alésage de longueur  $L$  pourra être modélisé avec une **liaison pivot-glissant si le guidage est long** (c'est à dire si  $L$  est suffisamment grand par rapport à  $D$ ). Généralement, on considère que c'est le cas si :

$$\frac{L}{D} \geq 1,5$$

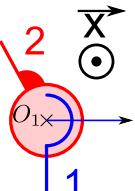
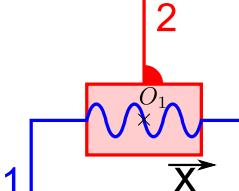
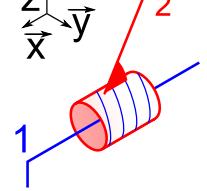
Dans le cas contraire, elle sera assimilée à une **liaison sphère-cylindre**.

#### e) La liaison glissière

Degrés de liberté	Liaison glissière d'axe $\vec{x}$	
	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
1 degré de liberté : <ul style="list-style-type: none"> <li>• 0 rotation :</li> <li>• 1 translation <math>T_x</math></li> </ul>		



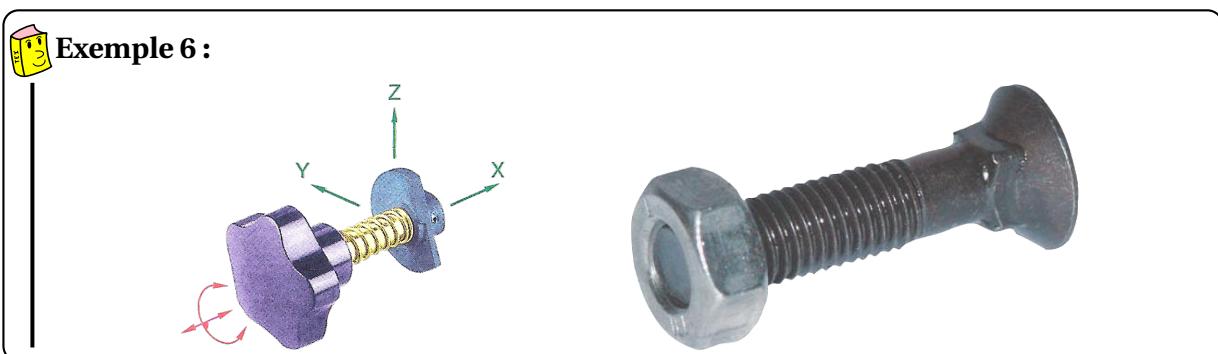
#### f) La liaison hélicoïdale

Exemple de désignation	Liaison hélicoïdale d'axe ( $O_1, \vec{x}$ )	
	Symbole normalisé	Perspective
1 rotation $R_x$ + 1 translation $T_x$ couplée	 	

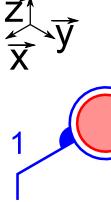
Un seul degré de liberté est considéré. Le mouvement de rotation  $R_x$  et celui de translation  $T_x$  sont couplés et ne constituent ainsi qu'un seul mouvement indépendant.

#### Définition 5 : pas de la liaison hélicoïdal

On appelle le **pas de la liaison hélicoïdal** le rapport entre la translation et la rotation :  $p = 2\pi \frac{T_x}{R_x}$

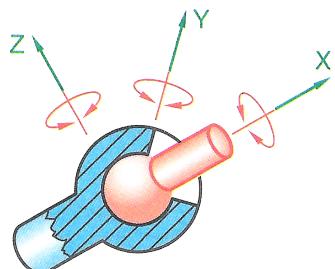


### g) La liaison sphérique

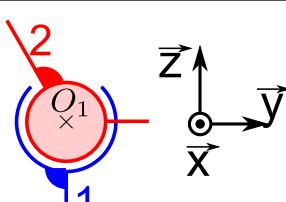
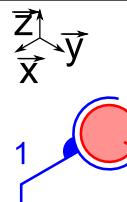
Liaison sphérique de centre $O_1$		
Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
3 degrés de liberté : <ul style="list-style-type: none"> <li>• 3 rotations : <math>R_x, R_y, R_z</math></li> <li>• 0 translation</li> </ul>		



**Exemple 7 :**

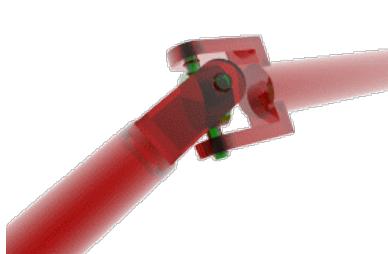
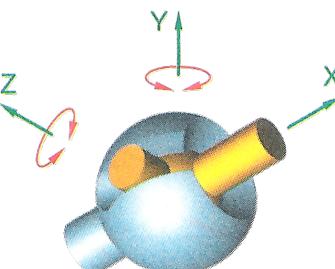


### h) La liaison sphérique à doigt

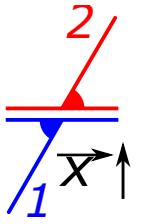
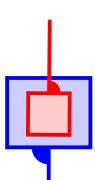
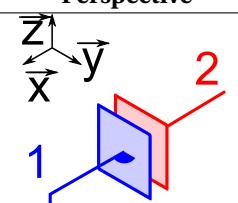
Liaison sphérique à doigt de centre $O_1$ et d'axe bloqué $\vec{z}$		
Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
2 degrés de liberté : <ul style="list-style-type: none"> <li>• 2 rotations : <math>R_x, R_y</math></li> <li>• 0 translation</li> </ul>		



**Exemple 8 :**



### i) La liaison plan-plan

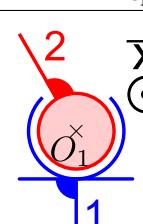
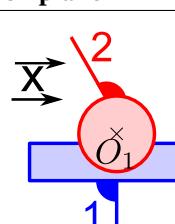
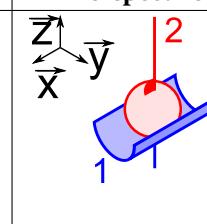
Liaison plan-plan de normale $\vec{x}$		
Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
3 degrés de liberté : <ul style="list-style-type: none"> <li>• 1 rotation : <math>R_x</math></li> <li>• 2 translations : <math>T_y, T_z</math></li> </ul>	 	

Historiquement, cette liaison s'appelait “liaison appui-plan”. Cette dénomination est parfois encore utilisée.

 **Exemple 9 :**



### j) La liaison sphère-cylindre

Liaison sphère-cylindre d'axe ( $O_1, \vec{x}$ )		
Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
4 degrés de liberté : <ul style="list-style-type: none"> <li>• 3 rotations : <math>R_x, R_y, R_z</math></li> <li>• 1 translation : <math>T_x</math></li> </ul>	 	

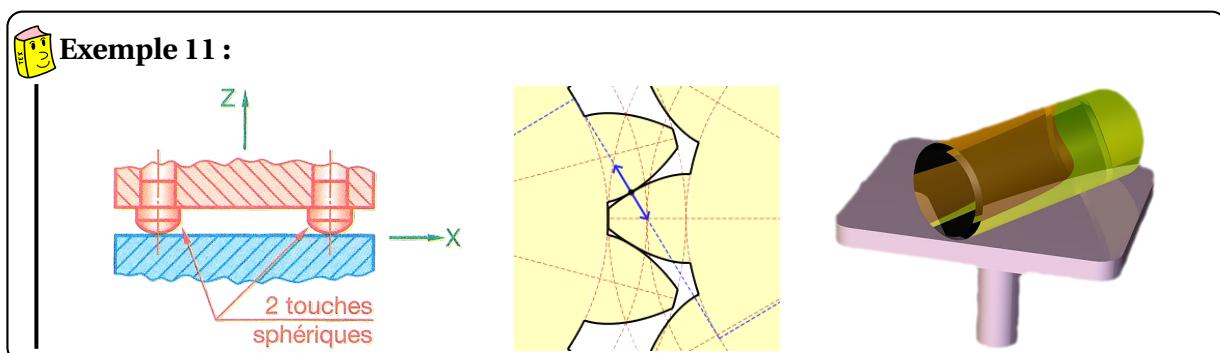
Cette liaison était autrefois appelée “linéaire annulaire”



### k) La liaison cylindre-plan

Cette liaison était autrefois appelée “*linéaire-rectiligne*”. Malgré son nom, elle se représente par un liaison de forme prismatique. Certains la représentent toutefois par un cylindre posé sur un plan.

Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
4 degrés de liberté : <ul style="list-style-type: none"> <li>• 2 rotations : <math>R_x, R_z</math></li> <li>• 2 translations : <math>T_x, T_y</math></li> </ul>		



## 2 Tableau des liaisons cinématiques normalisées



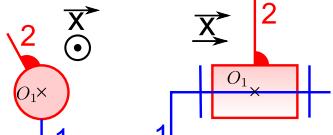
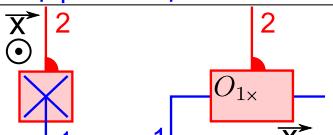
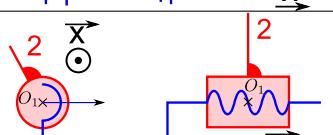
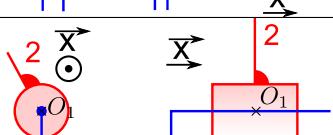
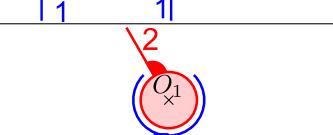
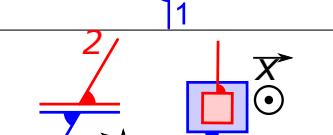
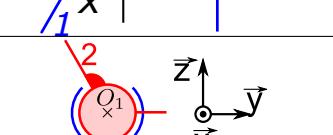
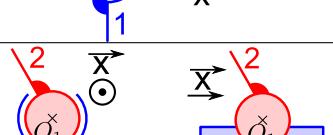
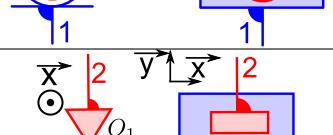
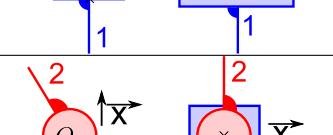
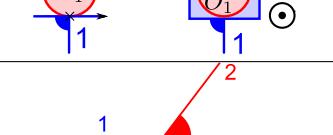
### Définition 6 : Torseur cinématique du mouvement relatif entre deux solides

On caractérise le mouvement relatif du solide  $S_2$  par rapport au solide  $S_1$  par le torseur cinématique qu'on exprimera en un point  $P$  :

$$\left\{ \psi_{(S_2/S_1)} \right\}_{O_1} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}} \\ \vec{V}(O_1 \in S_2/S_1) \end{array} \right\}_{O_1} = \left\{ \begin{array}{cc} p_{21} & u_{21} \\ q_{21} & v_{21} \\ r_{21} & w_{21} \end{array} \right\}_R = \left\{ \begin{array}{c} p_{21} \cdot \vec{x}_1 + q_{21} \cdot \vec{y}_1 + r_{21} \vec{z}_1 \\ u_{21} \cdot \vec{x}_1 + v_{21} \cdot \vec{y}_1 + w_{21} \vec{z}_1 \end{array} \right\}$$

(6)

- $R(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) = R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , le repère lié à  $S_1$
- $p_{21}, q_{21}$  et  $r_{21}$  sont les composantes du vecteur rotation instantané  $\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}}$  dans le repère  $R$ .
- $u_{21}, v_{21}$  et  $w_{21}$  sont les composantes du vecteur vitesse  $\vec{V}(O_1 \in S_2/S_1)$  dans le repère  $R$ .

Nom	Représentation	Torseur cinématique
<b>Liaisons pivot</b> d'axe ( $\Delta$ ) = $(O_1, \vec{x})$		
<b>Liaisons glissière</b> de direction $\vec{x}$		
<b>Liaisons hélicoïdale</b> d'axe ( $\Delta$ ) = $(O_1, \vec{x})$ et de pas $p$		
<b>Liaison pivot glissant</b> d'axe ( $\Delta$ ) = $(O_1, \vec{x})$		
<b>Liaison sphérique</b> de centre $O_1$		
<b>Liaison plane</b> de normale $\vec{x}$		
<b>Liaison sphérique à doigt</b> de centre $O_1$ , d'axe bloqué $\vec{z}$		
<b>Liaison sphère-cylindre</b> d'axe $(O_1, \vec{x})$		
<b>Liaison cylindre-plan</b> de normale $\vec{z}$ et d'axe $(O_1, \vec{x})$ et de plan normal $\Pi = (O_1, \vec{z}, \vec{x})$		
<b>Liaison sphère-plan</b> de normale ( $\Delta$ ) = $(O_1, \vec{x})$		
<b>Liaison encastrement</b>		

Avec  $R(O_1, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , le repère associé au solide 1.