C4 : Modélisation des performances cinématiques des systèmes
C4-3 : Cinématique du point

Émilien DURIF
emilien.durif@gmail.com

Lycée La Martinière Monplaisir Lyon
Classe de MPSI

Plan

1. Grandeurs de base liées à la cinématique du point
2. Dérivation vectorielle
3. Composition cinématique
   - Composition des vitesses
   - Composition des accélérations
   - Composition par relation de Chasles

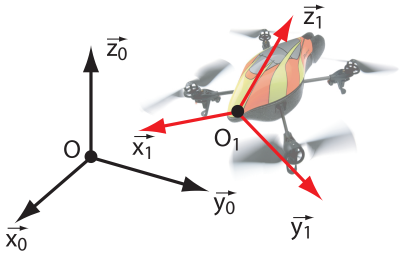
Plan

1. Grandeurs de base liées à la cinématique du point
2. Dérivation vectorielle
3. Composition cinématique
   - Composition des vitesses
   - Composition des accélérations
   - Composition par relation de Chasles

Introduction

Introduction

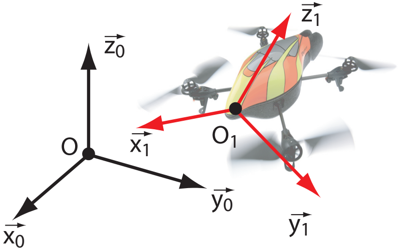
- Ce chapitre présente les bases de calculs liées à la cinématique du point. Nous pourrons alors utiliser ces notions pour étudier les mouvement relatifs de solides.
- On étudiera les mouvements par rapport à des **référentiels d'observation**. Nous pourrons exprimer les champs de vitesses dans des repères ou des bases qui pourrons être différents du référentiel d'observation. On les appellera **repère d'expression**.



Introduction

Introduction

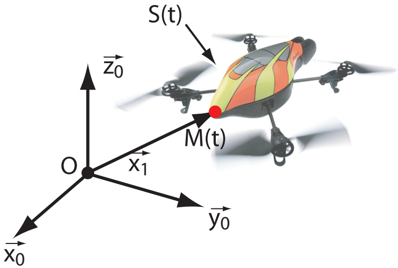
- Ce chapitre présente les bases de calculs liées à la cinématique du point. Nous pourrons alors utiliser ces notions pour étudier les mouvement relatifs de solides.
- On étudiera les mouvements par rapport à des **référentiels d'observation**. Nous pourrons exprimer les champs de vitesses dans des repères ou des bases qui pourrons être différents du référentiel d'observation. On les appellera **repère d'expression**.



Cinématique du point : vecteur position

Vecteur position

Soit un solide S en mouvement par rapport à un repère R_O $\left(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$. On repère un point M(t) d'un solide à l'aide du vecteur position $\overrightarrow{OM(t)}$.



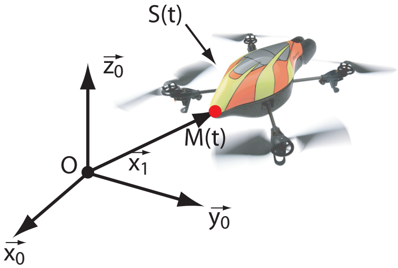
Remarque

Pour exprimer $\overrightarrow{OM(t)}$, on pourra utiliser le système de coordonnées le plus adapté (voir chapitre précédent) au problème en tenant compte de la nature du mouvement.

Cinématique du point : vecteur position

Vecteur position

Soit un solide S en mouvement par rapport à un repère R_O $\left(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$. On repère un point M(t) d'un solide à l'aide du vecteur position $\overrightarrow{OM(t)}$.



Remarque

Pour exprimer $\overrightarrow{OM(t)}$, on pourra utiliser le système de coordonnées le plus adapté (voir chapitre précédent) au problème en tenant compte de la nature du mouvement.

Cinématique du point : vecteur vitesse

Vecteur vitesse

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt}\right]_{R_0}.} \quad (1)$$

- Le vecteur vitesse a une direction tangente à la trajectoire.
- La norme du vecteur vitesse est homogène à une longueur divisée par un temps.

Attention

- Le vecteur vitesse est obtenu par dérivation vectorielle.
- La définition du repère par rapport auquel le vecteur position est dérivé est primordiale.
- Ce vecteur peut toutefois être exprimé dans n'importe quelle base.
- On préferera bien souvent représenter ce vecteur dans la base locale.

Cinématique du point : vecteur vitesse

Vecteur vitesse

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt}\right]_{R_0}.} \quad (1)$$

- Le vecteur vitesse a une direction tangente à la trajectoire.
- La norme du vecteur vitesse est homogène à une longueur divisée par un temps.

Attention

- Le vecteur vitesse est obtenu par dérivation vectorielle.
- La définition du repère par rapport auquel le vecteur position est dérivé est primordiale.
- Ce vecteur peut toutefois être exprimé dans n'importe quelle base.
- On préferera bien souvent représenter ce vecteur dans la base locale.

Cinématique du point : vecteur vitesse

Vecteur vitesse

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt}\right]_{R_0}} . \qquad (1)$$

- Le vecteur vitesse a une direction tangente à la trajectoire.
- La norme du vecteur vitesse est homogène à une longueur divisée par un temps.

Attention

- Le vecteur vitesse est obtenu par dérivation vectorielle.
- La définition du repère par rapport auquel le vecteur position est dérivé est primordiale.
- Ce vecteur peut toutefois être exprimé dans n'importe quelle base.
- On préferera bien souvent représenter ce vecteur dans la base locale.

Cinématique du point : vecteur vitesse

Vecteur vitesse

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt}\right]_{R_0}.} \tag{1}$$

- Le vecteur vitesse a une direction tangente à la trajectoire.
- La norme du vecteur vitesse est homogène à une longueur divisée par un temps.

Attention

- Le vecteur vitesse est obtenu par dérivation vectorielle.
- La définition du repère par rapport auquel le vecteur position est dérivé est primordiale.
- Ce vecteur peut toutefois être exprimé dans n'importe quelle base.
- On préfèrera bien souvent représenter ce vecteur dans la base locale.

Cinématique du point : vecteur vitesse

Vecteur vitesse

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt}\right]_{R_0}.} \qquad (1)$$

- Le vecteur vitesse a une direction tangente à la trajectoire.
- La norme du vecteur vitesse est homogène à une longueur divisée par un temps.

Attention

- Le vecteur vitesse est obtenu par dérivation vectorielle.
- La définition du repère par rapport auquel le vecteur position est dérivé est primordiale.
- Ce vecteur peut toutefois être exprimé dans n'importe quelle base.
- On préfèrera bien souvent représenter ce vecteur dans la base locale.

Cinématique du point : vecteur vitesse

Vecteur vitesse

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt}\right]_{R_0}.} \qquad (1)$$

- Le vecteur vitesse a une direction tangente à la trajectoire.
- La norme du vecteur vitesse est homogène à une longueur divisée par un temps.

Attention

- Le vecteur vitesse est obtenu par dérivation vectorielle.
- La définition du repère par rapport auquel le vecteur position est dérivé est primordiale.
- Ce vecteur peut toutefois être exprimé dans n'importe quelle base.
- On préfèrera bien souvent représenter ce vecteur dans la base locale.

Cinématique du point : vecteur vitesse

Vecteur vitesse

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt}\right]_{R_0}.} \qquad (1)$$

- Le vecteur vitesse a une direction tangente à la trajectoire.
- La norme du vecteur vitesse est homogène à une longueur divisée par un temps.

Attention

- Le vecteur vitesse est obtenu par dérivation vectorielle.
- La définition du repère par rapport auquel le vecteur position est dérivé est primordiale.
- Ce vecteur peut toutefois être exprimé dans n'importe quelle base.
- On préfèrera bien souvent représenter ce vecteur dans la base locale.

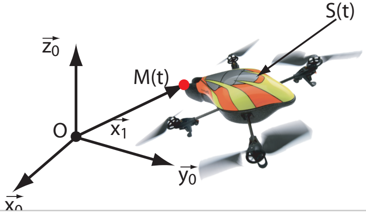
Cinématique du point : vecteur vitesse

Interprétation graphique

$$\overrightarrow{V}(M/R_0) = \lim_{\Delta t \mapsto 0} \frac{\overrightarrow{OM(t+\Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)}}{\Delta t}.$$

$$\overrightarrow{OM(t+\Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{M(t)M(t+\Delta t)}$$

On remarque que lorsque $\Delta t \mapsto 0$, $\overrightarrow{V}(M/R_0) \mapsto \overrightarrow{M(t)M(t+\Delta t)}/\Delta t$



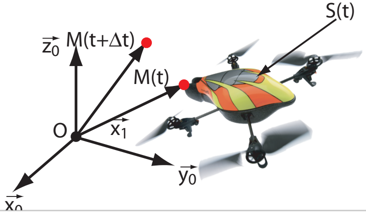
Cinématique du point : vecteur vitesse

Interprétation graphique

$$\overrightarrow{V}(M/R_0) = \lim_{\Delta t \mapsto 0} \frac{\overrightarrow{OM(t+\Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)}}{\Delta t}.$$

$$\overrightarrow{OM(t+\Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{M(t)M(t+\Delta t)}$$

On remarque que lorsque $\Delta t \mapsto 0$, $\overrightarrow{V}(M/R_0) \mapsto \overrightarrow{M(t)M(t+\Delta t)}/\Delta t$



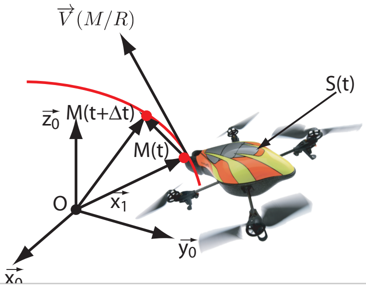
Cinématique du point : vecteur vitesse

Interprétation graphique

$$\vec{V}(M/R_0) = \lim_{\Delta t \mapsto 0} \frac{\overrightarrow{OM(t+\Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)}}{\Delta t}.$$

$$\overrightarrow{OM(t+\Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{M(t)M(t+\Delta t)}$$

On remarque que lorsque $\Delta t \mapsto 0$, $\vec{V}(M/R_0) \mapsto \overrightarrow{M(t)M(t+\Delta t)}/\Delta t$



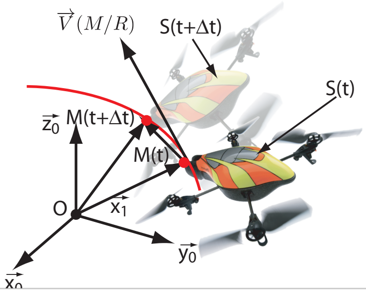
Cinématique du point : vecteur vitesse

Interprétation graphique

$$\overrightarrow{V}(M/R_0) = \lim_{\Delta t \mapsto 0} \frac{\overrightarrow{OM(t+\Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)}}{\Delta t}.$$

$$\overrightarrow{OM(t+\Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{M(t)M(t+\Delta t)}$$

On remarque que lorsque $\Delta t \mapsto 0$, $\overrightarrow{V}(M/R_0) \mapsto \overrightarrow{M(t)M(t+\Delta t)}/\Delta t$



Cinématique du point : vecteur accélération

Vecteur accélération

$$\boxed{\overrightarrow{a}(M/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{V(M/R_0)}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d^2\overrightarrow{OM(t)}}{dt^2}\right]_{R_0}.} \quad (2)$$

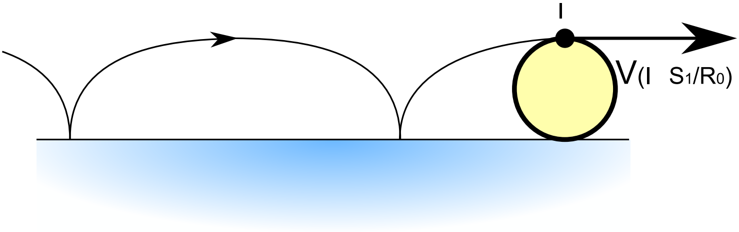
La norme du vecteur accélération est homogène à une longueur divisée par un temps au carré.

Cinématique du point : Trajectoire

Trajectoire

On définit la trajectoire (Δ) du point M dans le repère R_0 par l'ensemble des points I de R par lequel passe M au cours du temps.

$$(\Delta) = \left\{M_{(t)}, \forall t\right\}$$



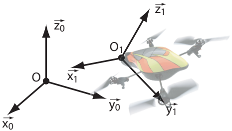
Cinématique du point : vecteur de rotation instantané

Vecteur de rotation instantané

Soit le repère R_1 attaché à S, le **vecteur de rotation instantané** du repère R_1 par rapport à R_0(ou de S/R_0) mesure la vitesse angulaire de changement d'orientation du repère R_1 par rapport à R_0. On le note

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0).} \quad (3)$$

Sa norme est homogène à un angle divisé par une unité de temps donc à l'inverse d'un temps (une mesure d'angle est sans dimension).



Propriété

Contrairement au vecteur vitesse, **le vecteur de rotation instantané est le même pour tous les points d'un même solide**. Il ne dépend pas du point considéré.

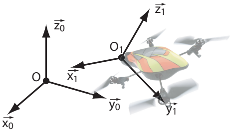
Cinématique du point : vecteur de rotation instantané

Vecteur de rotation instantané

Soit le repère R_1 attaché à S, le **vecteur de rotation instantané** du repère R_1 par rapport à R_0(ou de S/R_0) mesure la vitesse angulaire de changement d'orientation du repère R_1 par rapport à R_0. On le note

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0).} \tag{3}$$

Sa norme est homogène à un angle divisé par une unité de temps donc à l'inverse d'un temps (une mesure d'angle est sans dimension).

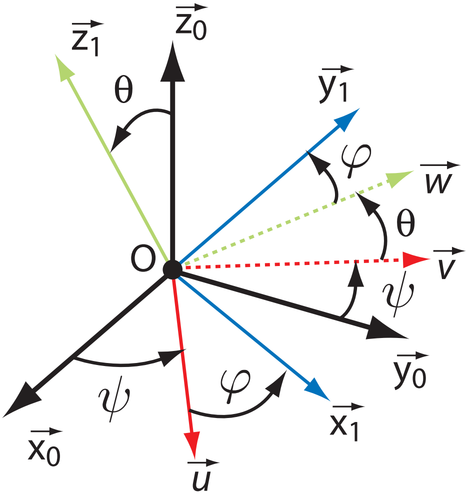


Propriété

Contrairement au vecteur vitesse, **le vecteur de rotation instantané est le même pour tous les points d'un même solide**. Il ne dépend pas du point considéré.

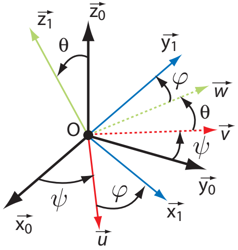
Cinématique du point : vecteur de rotation instantané

Exemple : angles d'Euler :



Cinématique du point : vecteur de rotation instantané

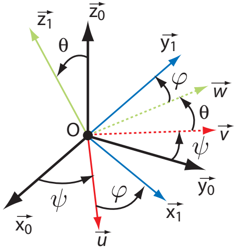
Exemple : angles d'Euler :



$$\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\psi}\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}\overrightarrow{u} + \dot{\varphi}\overrightarrow{z_1}$$

Cinématique du point : vecteur de rotation instantané

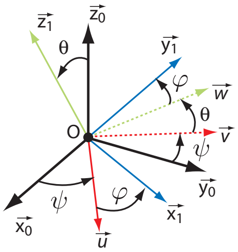
Exemple : angles d'Euler :



$$\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\psi}\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}\overrightarrow{u} + \dot{\varphi}\overrightarrow{z_1}$$
$$= \dot{\psi}\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}\left(\cos(\psi)\overrightarrow{x_0} + \sin(\psi)\overrightarrow{y_0}\right) + \dot{\varphi}\left(\cos(\theta)\overrightarrow{z_0} - \sin(\theta)\overrightarrow{v}\right)$$

Cinématique du point : vecteur de rotation instantané

Exemple : angles d'Euler :



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) &= \dot{\psi}\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}\,\overrightarrow{u} + \dot{\varphi}\overrightarrow{z_1} \\
&= \dot{\psi}\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}\left(\cos(\psi)\,\overrightarrow{x_0} + \sin(\psi)\,\overrightarrow{y_0}\right) + \dot{\varphi}\left(\cos(\theta)\,\overrightarrow{z_0} - \sin(\theta)\,\overrightarrow{v}\right) \\
&= \dot{\psi}\overrightarrow{z_0} + \dot{\theta}\left(\cos(\psi)\,\overrightarrow{x_0} + \sin(\psi)\,\overrightarrow{y_0}\right) + \dot{\varphi}\left(\cos(\theta)\,\overrightarrow{z_0} - \sin(\theta)\left(\cos(\psi)\,\overrightarrow{y_0} - \sin(\psi)\,\overrightarrow{x_0}\right)\right) \\
&= \begin{bmatrix} \dot{\varphi}\sin(\theta)\sin(\psi) + \dot{\theta}\cos(\psi) \\ -\dot{\varphi}\sin(\theta)\cos(\psi) + \dot{\theta}\sin(\psi) \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos(\theta) \end{bmatrix}_{R_0}
\end{aligned}
$$

Plan

1. Grandeurs de base liées à la cinématique du point
2. Dérivation vectorielle
3. Composition cinématique
   - Composition des vitesses
   - Composition des accélérations
   - Composition par relation de Chasles

Cinématique du point : Dérivation vectorielle

Vecteur exprimé dans la base de dérivation

- $$\left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\left(x(t)\cdot\overrightarrow{x_0} + y(t)\cdot\overrightarrow{y_0} + z(t)\cdot\overrightarrow{z_0}\right)}{dt}\right]_{R_0}$$

- $$\left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt}\right]_{R_0} = \frac{dx(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{x_0} + \frac{dy(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{y_0} + \frac{dz(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{z_0}$$
$$+x(t)\cdot\left[\frac{d\overrightarrow{x_0}}{dt}\right]_{R_0} + y(t)\cdot\left[\frac{d\overrightarrow{y_0}}{dt}\right]_{R_0} + z(t)\cdot\left[\frac{d\overrightarrow{z_0}}{dt}\right]_{R_0}.$$

- Or les vecteurs unitaires $\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{z_0}$ sont fixes dans le repère $R_0\left(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ donc par rapport au temps. On obtient alors :

- $$\boxed{\left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt}\right]_{R} = \frac{dx(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{x_0} + \frac{dy(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{y_0} + \frac{dz(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{z_0}.} \quad (4)$$

Cinématique du point : Dérivation vectorielle

Vecteur exprimé dans la base de dérivation

- $$\left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\left(x(t)\cdot\overrightarrow{x_0} + y(t)\cdot\overrightarrow{y_0} + z(t)\cdot\overrightarrow{z_0}\right)}{dt}\right]_{R_0}$$

- $$\left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt}\right]_{R_0} = \frac{dx(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{x_0} + \frac{dy(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{y_0} + \frac{dz(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{z_0}$$
$$+x(t)\cdot\left[\frac{d\overrightarrow{x_0}}{dt}\right]_{R_0} + y(t)\cdot\left[\frac{d\overrightarrow{y_0}}{dt}\right]_{R_0} + z(t)\cdot\left[\frac{d\overrightarrow{z_0}}{dt}\right]_{R_0}.$$

- Or les vecteurs unitaires $\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{z_0}$ sont fixes dans le repère $R_0\left(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ donc par rapport au temps. On obtient alors :

- $$\boxed{\left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt}\right]_{R} = \frac{dx(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{x_0} + \frac{dy(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{y_0} + \frac{dz(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{z_0}.} \quad (4)$$

Cinématique du point : Dérivation vectorielle

Vecteur exprimé dans la base de dérivation

- $$\left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\left(x(t)\cdot\overrightarrow{x_0} + y(t)\cdot\overrightarrow{y_0} + z(t)\cdot\overrightarrow{z_0}\right)}{dt}\right]_{R_0}$$
- $$\left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt}\right]_{R_0} = \frac{dx(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{x_0} + \frac{dy(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{y_0} + \frac{dz(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{z_0}$$
$$+x(t)\cdot\left[\frac{d\overrightarrow{x_0}}{dt}\right]_{R_0} + y(t)\cdot\left[\frac{d\overrightarrow{y_0}}{dt}\right]_{R_0} + z(t)\cdot\left[\frac{d\overrightarrow{z_0}}{dt}\right]_{R_0}.$$
- Or les vecteurs unitaires $\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{z_0}$ sont fixes dans le repère $R_0\left(O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}\right)$ donc par rapport au temps. On obtient alors :
- $$\boxed{\left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt}\right]_{R} = \frac{dx(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{x_0} + \frac{dy(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{y_0} + \frac{dz(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{z_0}.} \quad (4)$$

Cinématique du point : Dérivation vectorielle

Vecteur exprimé dans la base de dérivation

- $$\left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\left(x(t)\cdot\overrightarrow{x_0}+y(t)\cdot\overrightarrow{y_0}+z(t)\cdot\overrightarrow{z_0}\right)}{dt}\right]_{R_0}$$

- $$\left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt}\right]_{R_0} = \frac{dx(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{x_0}+\frac{dy(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{y_0}+\frac{dz(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{z_0}$$
$$+x(t)\cdot\left[\frac{d\overrightarrow{x_0}}{dt}\right]_{R_0}+y(t)\cdot\left[\frac{d\overrightarrow{y_0}}{dt}\right]_{R_0}+z(t)\cdot\left[\frac{d\overrightarrow{z_0}}{dt}\right]_{R_0}.$$

- Or les vecteurs unitaires $\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{y_0}$ et $\overrightarrow{z_0}$ sont fixes dans le repère $R_0\left(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ donc par rapport au temps. On obtient alors :

- $$\boxed{\left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt}\right]_{R} = \frac{dx(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{x_0}+\frac{dy(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{y_0}+\frac{dz(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{z_0}.} \quad (4)$$

Cinématique du point : dérivation vectorielle

Vecteur exprimé dans une autre base

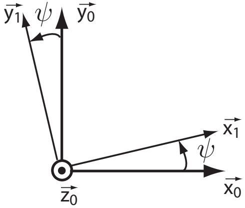
dérivation vectorielle

$$\boxed{\left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{U(t)},} \quad (5)$$

où $\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0)$ est le vecteur de rotation instantané du repère R_1 par rapport au repère R_0.

Cinématique du point : dérivation vectorielle

Cas particulier de la rotation de R_1 par rapport à R_0 autour d'un seul axe fixe $\overrightarrow{z_0}$

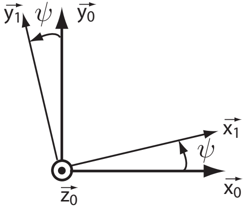


$$\left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right]_{R_0} = \ldots$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt}\right]_{R_0} = \ldots$$

Cinématique du point : dérivation vectorielle

Cas particulier de la rotation de R_1 par rapport à R_0 autour d'un seul axe fixe $\overrightarrow{z_0}$

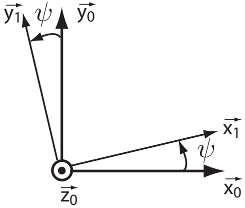


$$\left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{x_1}$$
$$= \overrightarrow{0} + \dot{\psi}\,\overrightarrow{z_{0,1}} \wedge \overrightarrow{x_1} = \dot{\psi}\overrightarrow{y_1}$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt}\right]_{R_0} = \ldots$$

Cinématique du point : dérivation vectorielle

Cas particulier de la rotation de R_1 par rapport à R_0 autour d'un seul axe fixe $\overrightarrow{z_0}$

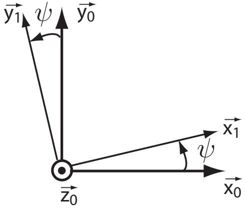


$$\left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{x_1}$$
$$= \overrightarrow{0} + \dot{\psi}\ \overrightarrow{z_{0,1}} \wedge \overrightarrow{x_1} = \dot{\psi}\overrightarrow{y_1}$$

$$\left[\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{y_1}$$
$$= \overrightarrow{0} + \dot{\psi}\ \overrightarrow{z_{0,1}} \wedge \overrightarrow{y_1} = -\dot{\psi}\overrightarrow{x_1}.$$

Cinématique du point : dérivation vectorielle

Cas particulier de la rotation de R_1 par rapport à R_0 autour d'un seul axe fixe $\overrightarrow{z_0}$



$$\left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right]_{R_0} = \dot{\psi}\overrightarrow{y_1} \qquad \left[\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt}\right]_{R_0} = -\dot{\psi}\overrightarrow{x_1}$$

Remarque

On remarque que la dérivée d'un vecteur tournant autour d'un axe fixe par rapport au repère de dérivation, a pour norme, la vitesse angulaire et est dirigée par le vecteur directement orthogonal au vecteur initial.

Plan

1. Grandeurs de base liées à la cinématique du point
2. Dérivation vectorielle
3. Composition cinématique
   - Composition des vitesses
   - Composition des accélérations
   - Composition par relation de Chasles

Cinématique du point : composition des vitesses

- $$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$$
- On calcule alors la vitesse de M par rapport au repère R_0 à l'aide de la dérivée vectorielle du vecteur position :

$$\overrightarrow{V}(M/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right]_{R_0} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_0}.$$

- Or,

$$\left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}.$$

- On obtient alors

$$\overrightarrow{V}(M/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right]_{R_0} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}.$$

$$= \overrightarrow{V_e}(M, R_1/R_0) + \overrightarrow{V_r}(M/R_1).$$

Cinématique du point : composition des vitesses

- $$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$$
- On calcule alors la vitesse de M par rapport au repère R_0 à l'aide de la dérivée vectorielle du vecteur position :

$$\overrightarrow{V}(M/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right]_{R_0} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_0}.$$

- Or,

$$\left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}.$$

- On obtient alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V}(M/R_0) &= \left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right]_{R_0} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}.\\ &= \overrightarrow{V_e}(M, R_1/R_0) + \overrightarrow{V_r}(M/R_1).\end{aligned}$$

Cinématique du point : composition des vitesses

- $$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$$
- On calcule alors la vitesse de M par rapport au repère R_0 à l'aide de la dérivée vectorielle du vecteur position :

$$\overrightarrow{V}(M/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right]_{R_0} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_0}.$$

- Or,

$$\left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}.$$

- On obtient alors

$$\overrightarrow{V}(M/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right]_{R_0} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}.$$

$$= \overrightarrow{V_e}(M, R_1/R_0) + \overrightarrow{V_r}(M/R_1).$$

Cinématique du point : composition des vitesses

- $$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$$
- On calcule alors la vitesse de M par rapport au repère R_0 à l'aide de la dérivée vectorielle du vecteur position :

$$\overrightarrow{V}(M/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right]_{R_0} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_0}.$$

- Or,

$$\left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}.$$

- On obtient alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V}(M/R_0) &= \left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right]_{R_0} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}.\\ &= \overrightarrow{V_e}(M, R_1/R_0) + \overrightarrow{V_r}(M/R_1).\end{aligned}$$

Cinématique du point : composition des vitesses

- Où $\overrightarrow{V_e}(M/R_0)$ se définit comme la vitesse d'entrainement de M par rapport à R_0 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_e}(M/R_0) = \overrightarrow{V}(M \in R_1/R_0) &= \left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right]_{R_0} + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M} \\ &= \overrightarrow{V}(O_1/R_0) + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M} \\ &= \overrightarrow{V}(M \in R_1/R_0)\end{aligned}$$

- De plus $\overrightarrow{V_r}(M/R_1)$ se définit comme la vitesse relative de M par rapport au repère R_1 :

$$\overrightarrow{V_r}(M/R_1) = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_1}.$$

Cinématique du point : composition des vitesses

- Où $\overrightarrow{V_e}(M/R_0)$ se définit comme la vitesse d'entrainement de M par rapport à R_0 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_e}(M/R_0) = \overrightarrow{V}(M \in R_1/R_0) &= \left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right]_{R_0} + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M} \\ &= \overrightarrow{V}(O_1/R_0) + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M} \\ &= \overrightarrow{V}(M \in R_1/R_0)\end{aligned}$$

- De plus $\overrightarrow{V_r}(M/R_1)$ se définit comme la vitesse relative de M par rapport au repère R_1 :

$$\overrightarrow{V_r}(M/R_1) = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_1}.$$

Cinématique du point : composition des vitesses

- Où $\overrightarrow{V_e}(M/R_0)$ se définit comme la vitesse d'entrainement de M par rapport à R_0 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_e}(M/R_0) = \overrightarrow{V}(M \in R_1/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right]_{R_0} + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M} \\ = \overrightarrow{V}(O_1/R_0) + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M} \\ = \overrightarrow{V}(M \in R_1/R_0)\end{aligned}$$

- De plus $\overrightarrow{V_r}(M/R_1)$ se définit comme la vitesse relative de M par rapport au repère R_1 :

$$\overrightarrow{V_r}(M/R_1) = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_1}.$$

Cinématique du point : composition des vitesses

Composition des vitesses

La formule de composition des vitesses s'écrit alors :

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/R_0) = \overrightarrow{V_r}(M/R_1) + \overrightarrow{V_e}(M, R_1/R_0) = \overrightarrow{V}(M/R_1) + \overrightarrow{V}(M \in R_1/R_0).} \quad (6)$$

Avec

Cinématique du point : composition des vitesses

Composition des vitesses

La formule de composition des vitesses s'écrit alors :

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/R_0) = \overrightarrow{V_r}(M/R_1) + \overrightarrow{V_e}(M, R_1/R_0) = \overrightarrow{V}(M/R_1) + \overrightarrow{V}(M \in R_1/R_0).} \quad (6)$$

Avec

- $$\overrightarrow{V_e}(M, R_1/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right]_{R_0} + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}$$
$$= \overrightarrow{V}(O_1/R_0) + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{V}(M, R_1/R_0)$$

- $$\overrightarrow{V_r}(M/R_1) = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_1}.$$

Cinématique du point : composition des vitesses

Composition des vitesses

La formule de composition des vitesses s'écrit alors :

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/R_0) = \overrightarrow{V_r}(M/R_1) + \overrightarrow{V_e}(M, R_1/R_0) = \overrightarrow{V}(M/R_1) + \overrightarrow{V}(M \in R_1/R_0).} \qquad (6)$$

Avec

- $$\overrightarrow{V_e}(M, R_1/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right]_{R_0} + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}$$
$$= \overrightarrow{V}(O_1/R_0) + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{V}(M, R_1/R_0)$$

- $$\overrightarrow{V_r}(M/R_1) = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_1}.$$

Cinématique du point : composition des vitesses

Composition des vitesses

La formule de composition des vitesses s'écrit alors :

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/R_0) = \overrightarrow{V_r}(M/R_1) + \overrightarrow{V_e}(M, R_1/R_0) = \overrightarrow{V}(M/R_1) + \overrightarrow{V}(M \in R_1/R_0).} \qquad (6)$$

Avec

Interprétation de la vitesse d'entrainement

La vitesse d'entrainement $\overrightarrow{V}(M \in R_1/R_0)$ s'interprète comme la vitesse du point M appartenant à R_1 par rapport à R_0. C'est à dire comme si M était fixe dans R_1.

Cinématique du point : composition des accélérations

Composition des accélérations

La formule de **composition des accélérations** s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{a}(M/R_0) = \overrightarrow{a}(M/R_1) + \overrightarrow{a}(M, R_1/R_0) + 2\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{V}(M/R_1)} \qquad (7)$$

L'accélération **absolue** $\overrightarrow{a}(M/R_0)$ se décompose ainsi en :

- une accélération **relative** : $\overrightarrow{a}(M/R_1)$,
- une accélération **d'entrainement** : $\overrightarrow{a}(M, R_1/R_0) = \left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0)\right)\right]_{R_0} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)$,
- une accélération **complémentaire ou de Coriolis** : $2\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{V}(M/R_1)$.

Cinématique du point : composition des accélérations

Composition des accélérations

La formule de **composition des accélérations** s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{a}(M/R_0) = \overrightarrow{a}(M/R_1) + \overrightarrow{a}(M,R_1/R_0) + 2\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{V}(M/R_1)} \qquad (7)$$

L'accélération **absolue** $\overrightarrow{a}(M/R_0)$ se décompose ainsi en :

- une accélération **relative** : $\overrightarrow{a}(M/R_1)$,
- une accélération **d'entraînement** : $\overrightarrow{a}(M,R_1/R_0) = \left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0)\right)\right]_{R_0} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)$,
- une accélération **complémentaire ou de Coriolis** : $2\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{V}(M/R_1)$.

Cinématique du point : composition des accélérations

Composition des accélérations

La formule de **composition des accélérations** s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{a}(M/R_0) = \overrightarrow{a}(M/R_1) + \overrightarrow{a}(M,R_1/R_0) + 2\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{V}(M/R_1)} \tag{7}$$

L'accélération **absolue** $\overrightarrow{a}(M/R_0)$ se décompose ainsi en :

- une accélération **relative** : $\overrightarrow{a}(M/R_1)$,
- une accélération **d'entrainement** : $\overrightarrow{a}(M,R_1/R_0) = \left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0)\right)\right]_{R_0} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)$,
- une accélération **complémentaire ou de Coriolis** : $2\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{V}(M/R_1)$.

Cinématique du point : composition des accélérations

Composition des accélérations

La formule de **composition des accélérations** s'écrit :

$$\boxed{\vec{a}(M/R_0) = \vec{a}(M/R_1) + \vec{a}(M, R_1/R_0) + 2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1)} \qquad (7)$$

L'accélération **absolue** $\vec{a}(M/R_0)$ se décompose ainsi en :

- une accélération **relative** : $\vec{a}(M/R_1)$,
- une accélération **d'entrainement** : $\vec{a}(M, R_1/R_0) = \left[\frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}(R_1/R_0)\right)\right]_{R_0} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \left(\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)$,
- une accélération **complémentaire ou de Coriolis** : $2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1)$.

Composition par relation de Chasles

Composition par relation de Chasles

Les champs cinématiques associés à la cinématique des solides sont décomposables à l'aide d'une "relation de Chasles" :

- Les vecteurs rotation instantanés :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}(S_n/S_0) = \overrightarrow{\Omega}(S_n/S_{n-1}) + \overrightarrow{\Omega}(S_{n-1}/S_{n-2}) \cdots \overrightarrow{\Omega}(1/0)} \quad (8)$$

- les vecteurs vitesses d'entrainement en un même point A :

$$\boxed{\overrightarrow{V}(A \in S_n/S_0) = \overrightarrow{V}(A \in S_n/S_{n-1}) + \overrightarrow{V}(A \in S_{n-1}/S_{n-2}) \cdots \overrightarrow{V}(A \in 1/0)} \quad (9)$$

Remarque : notion de torseur

On verra dans le chapitre suivant que ces deux grandeurs seront modélisable dans un même outil : **Le Torseur Cinématique**.

Composition par relation de Chasles

Composition par relation de Chasles

Les champs cinématiques associés à la cinématique des solides sont décomposables à l'aide d'une "relation de Chasles" :

- Les vecteurs rotation instantanés :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}(S_n/S_0) = \overrightarrow{\Omega}(S_n/S_{n-1}) + \overrightarrow{\Omega}(S_{n-1}/S_{n-2}) \cdots \overrightarrow{\Omega}(1/0)} \quad (8)$$

- les vecteurs vitesses d'entrainement en un même point A :

$$\boxed{\overrightarrow{V}(A \in S_n/S_0) = \overrightarrow{V}(A \in S_n/S_{n-1}) + \overrightarrow{V}(A \in S_{n-1}/S_{n-2}) \cdots \overrightarrow{V}(A \in 1/0)} \quad (9)$$

Remarque : notion de torseur

On verra dans le chapitre suivant que ces deux grandeurs seront modélisable dans un même outil : **Le Torseur Cinématique**.