



C4 : MODÉLISATION CINÉMATIQUES DES SYSTÈMES COMPOSÉS DE CHAINES DE SOLIDES

C4-6 - Modélisation structurelle des systèmes composés de chaînes de solides

29 Janvier 2019

Table des matières

I	Représentations graphiques de la modélisation des systèmes mécaniques	1
1	Graphe de structure (ou graphe de liaisons)	1
2	Schéma cinématique	4
II	Liaisons équivalentes	5
1	Liaisons en parallèles	5
2	Liaisons en séries	7
III	Chaînes de solides	8
1	Chaînes ouvertes, fermées, complexes	8
2	Exemples	9

Compétences

- **Modéliser :** Proposer un modèle de connaissance et de comportement :
 - Torseur cinématique ;
 - Liaisons.
- **Communiquer :** Schéma cinématique :
 - Rechercher et traiter les informations ;
 - Mettre en œuvre une communication

I. Représentations graphiques de la modélisation des systèmes mécaniques

1 Graphe de structure (ou graphe de liaisons)



Définition 1 : Classe d'équivalence

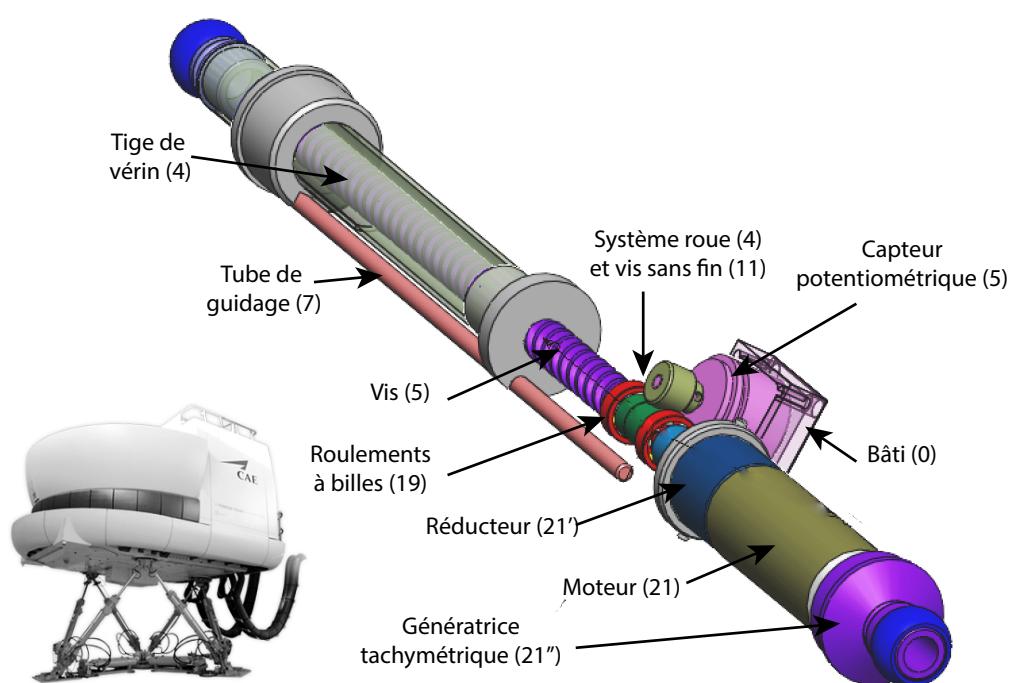
On appelle **classe d'équivalence** un ensemble de pièces liées entre elles par des liaisons encastrement.

On notera que toutes les pièces d'une même classe d'équivalence ont alors un même mouvement. L'énumération des différentes classes d'équivalence est un **étape obligatoire** pour l'étude du fonctionnement d'un mécanisme. On les nomme par un numéro.

Définition 2 :

Le **graphe de structure** est une représentation schématique de la cinématique d'un mécanisme. Il fait apparaître :

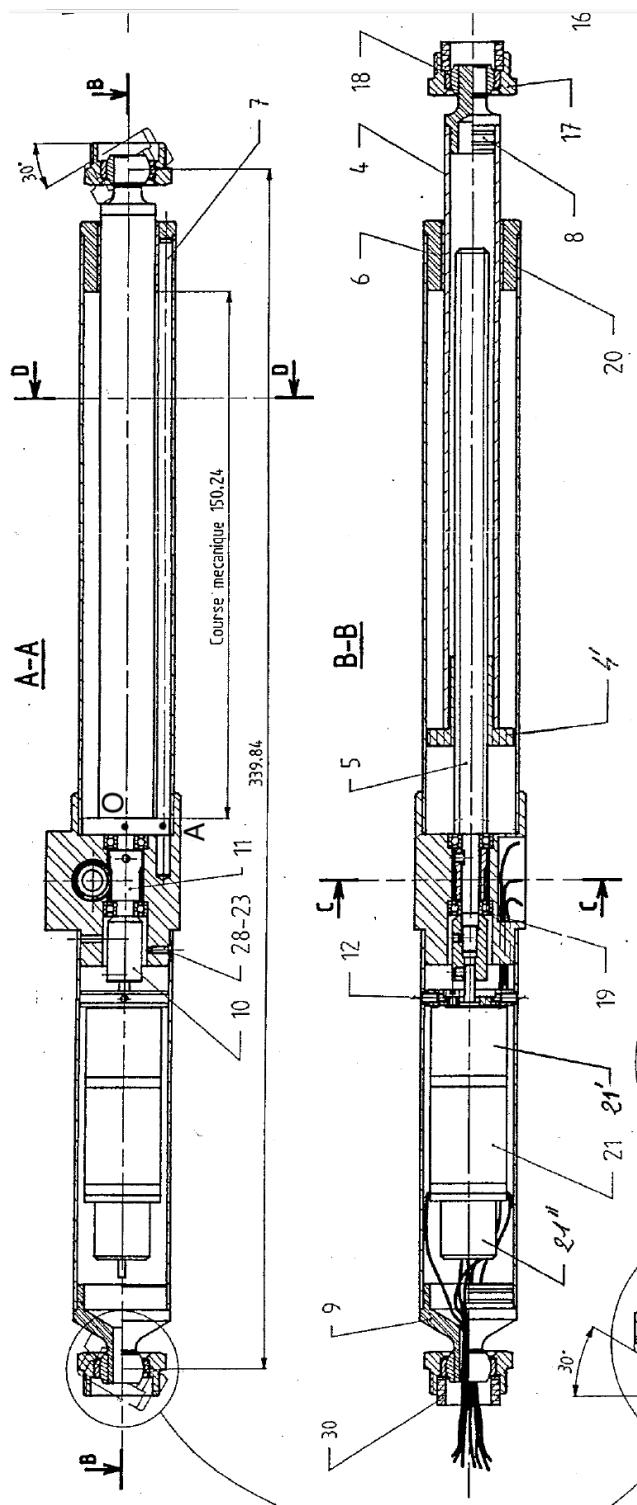
- **Les classes d'équivalence**, représentées par leur numéro, dans un petit cercle,
- **Les liaisons** entre les classes d'équivalence, représentées par des fils reliant les cercles, et renseignés par la définition (complète) de la liaison.

**Exemple 1 : Vérin de la plate-forme 6 axes**



Exemple 2 : Vérin de la plate-forme 6 axes : dessin de définition

On donne un dessin de définition du vérin.





Exemple 3 : Analyse du mécanisme

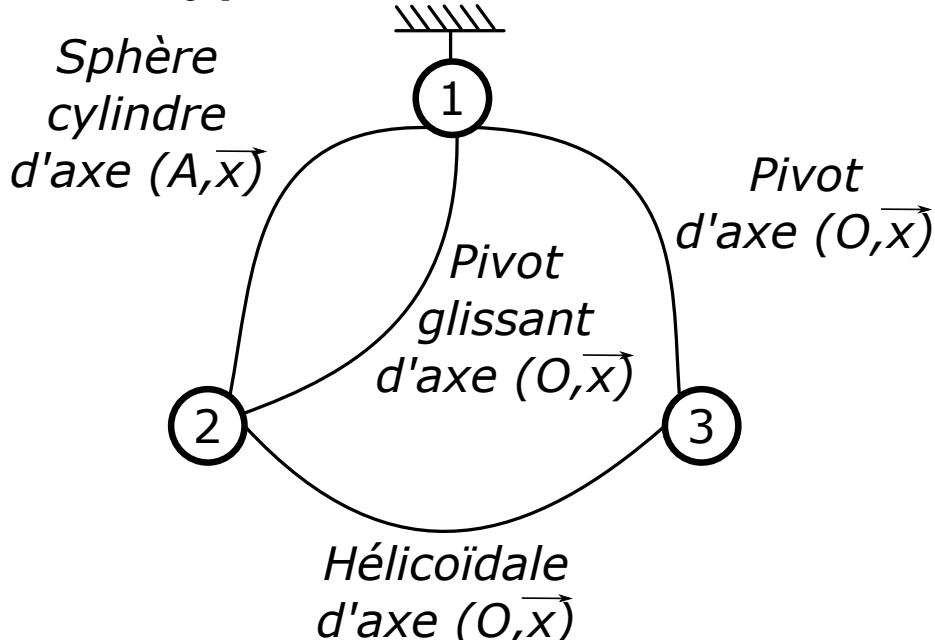
Q 1 : Définir les classes d'équivalence

carter : $\textcircled{1} = \{6; 7; 9; 20; 21; 21'; 21''$
 $12; 14; 17; 18; 19\}$

tige (écrou) : $\textcircled{2} = \{4; 4'; 8\}$

vis : $\textcircled{3} = \{5; 10; 11;\}$

Q 2 : Donner le graphe des liaisons



2 Schéma cinématique



Définition 3 : Schéma cinématique

On appelle **schéma cinématique** la représentation graphique du mécanisme, vu au travers de ses liaisons cinématiques.

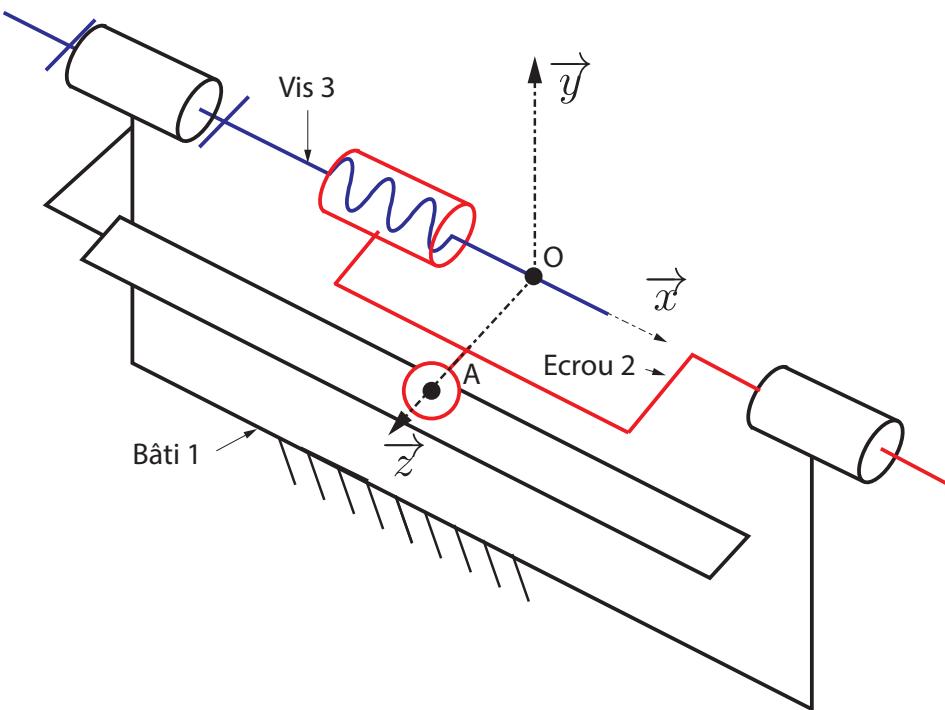
La réalisation d'un schéma cinématique doit suivre la méthodologie suivante :

1. Tracer **les axes** et placer **les points caractéristiques** du système,
2. Prévoir **une couleur par classe d'équivalence** dans la mesure du possible,
3. Tracer les liaisons aux points concernés **et selon les bons axes**,
4. Relier les éléments de liaisons par des traits (si possible parallèlement aux axes)
5. Repérer le bâti ou le carter par le symbole de *masse* :
6. Repérer les classes d'équivalence par **leur numéro**.



Exemple 4 : Vérin de la plate-forme 6 axes

Q 3 : Réaliser le schéma cinématique en 3D du vérin de la plate-forme



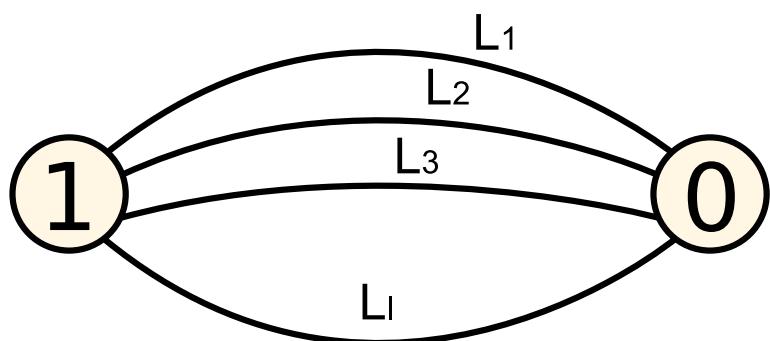
II. Liaisons équivalentes

1 Liaisons en parallèles



Définition 4 : Liaisons en parallèles

Des liaisons sont en **parallèles** lorsqu'elles relient deux mêmes solides.



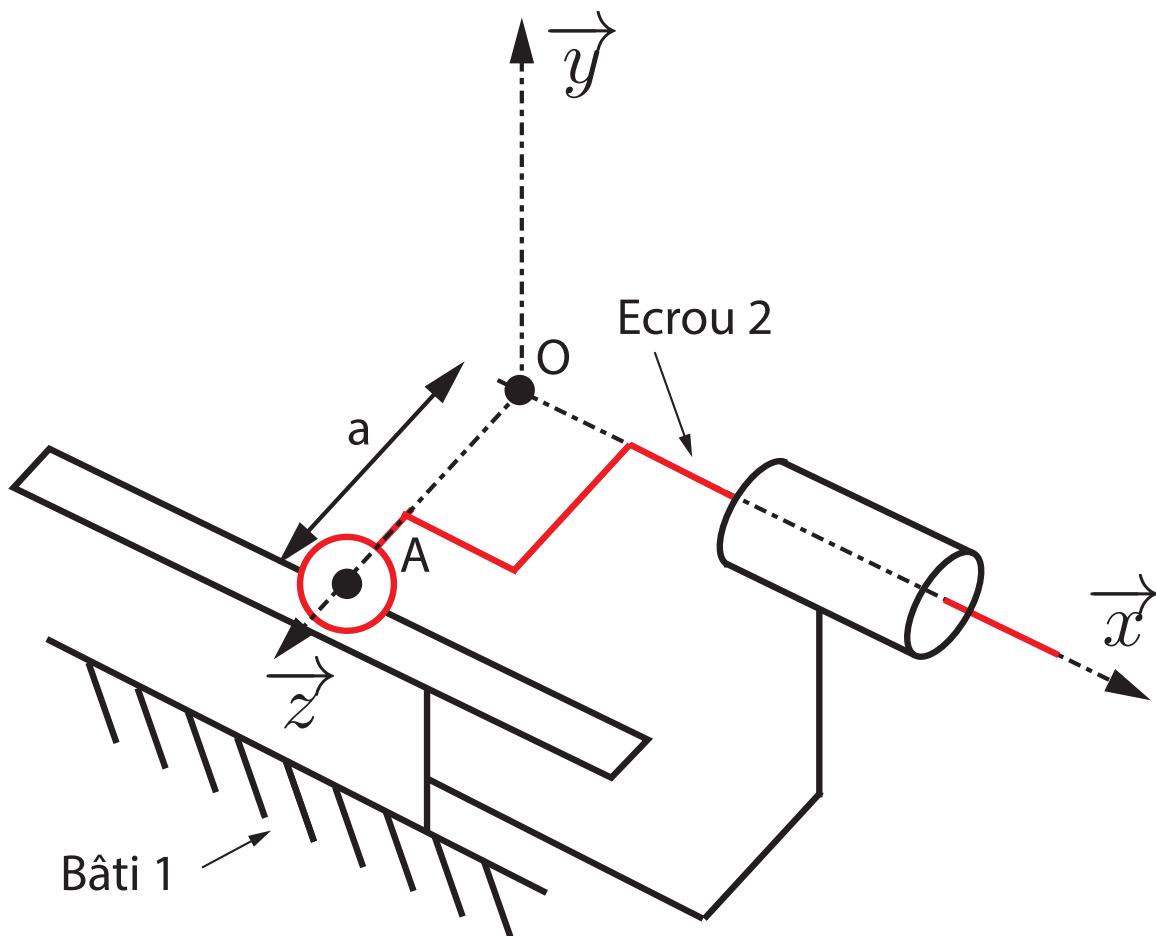
On peut alors écrire l'égalité des torseurs cinématique :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_1/S_0)}^{\text{équivalent}} \right\} = \left\{ \mathcal{V}_{(S_1/S_0)}^{L_1} \right\} = \left\{ \mathcal{V}_{(S_1/S_0)}^{L_2} \right\} = \dots = \left\{ \mathcal{V}_{(S_1/S_0)}^{L_l} \right\} \quad (1)$$



Exemple 5 : Liaisons en parallèle entre l'écrou et le bâti du vérin de la plate-forme six-axes

L'exemple suivant donne la modélisation de deux liaisons en parallèles correspondant à l'assemblage entre l'écrou et la bâti du vérin de la plate-forme 6 axes.



Q 4 : Donner le torseur cinématique de la liaison sphère-plan au point A

$$\{\mathcal{V}_{(2/1)}^A\} = \begin{Bmatrix} p_{21}^A & u_{21}^A \\ q_{21}^A & 0 \\ r_{21}^A & w_{21}^A \end{Bmatrix}_R$$

Q 5 : Donner le torseur cinématique de la liaison pivot-glissant en O puis en A

$$\{\mathcal{V}_{(2/1)}^O\} = \begin{Bmatrix} p_{21}^O & u_{21}^O \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R = \begin{Bmatrix} p_{21}^O & u_{21}^O \\ 0 & -ap_{21}^O \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$$

Car,

$$\begin{aligned} \vec{V}(A \in 2/1) &= \vec{V}(O \in 2/1) + \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{(2/1)}} = u_{21}^O \vec{x} - a \cdot \vec{z} \wedge p_{21}^O \vec{x} \\ &= u_{21}^O \vec{x} - a p_{21}^O \vec{y} \end{aligned}$$



Exemple 5 : Liaisons en parallèle entre l'écrou et le bâti du vérin de la plate-forme six-axes

Q 6 : Traduire l'égalité des torseurs et déduire la liaison équivalente

Égalité de la résultante cinématique :

$$\begin{cases} p_{21}^A = p_{21}^O \\ q_{21}^A = 0 \\ q_{21}^A = 0 \end{cases}$$

Égalité des vitesses :

$$\begin{cases} u_{21}^A = u_{21}^O \\ 0 = -a p_{21}^O \\ 0 = w_{21}^A \end{cases}$$

Ainsi, $p_{21}^O = p_{21}^A = q_{21}^A = r_{21}^A = w_{21}^A = 0$.

On obtient alors le torseur cinématique équivalent :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}^A\} = \begin{Bmatrix} 0 & u_{21}^A = u_{21}^O \\ 0 & 0 \\ A & 0 \end{Bmatrix}_R$$

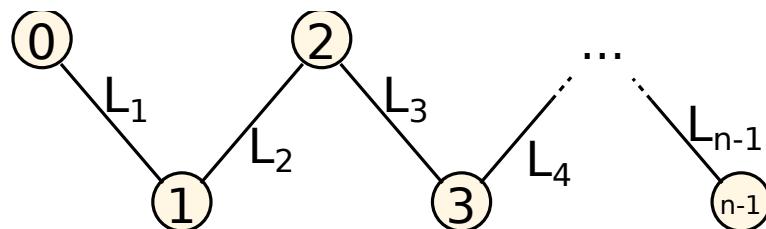
Ce torseur équivalent correspond au torseur cinématique d'une **liaison glissière de direction \vec{x}** .

2 Liaisons en séries



Définition 5 : Liaisons en séries

Des liaisons sont en **séries** lorsqu'elles relient des solides successifs.

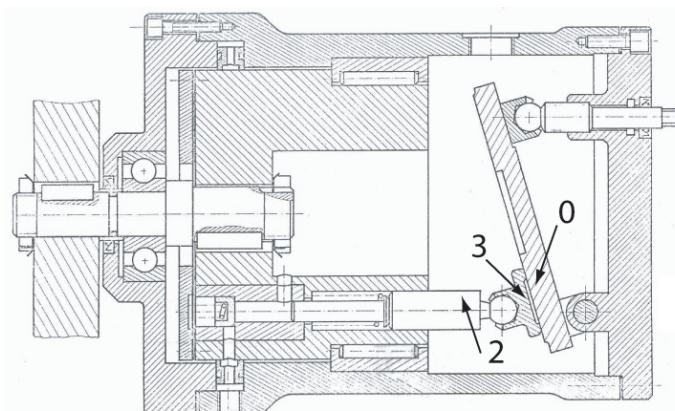


On utilise alors la fermeture cinématique (composition de tous les torseurs cinématiques sur la chaîne) :

$$\{\mathcal{V}_{(n-1/0)}\} = \{\mathcal{V}_{(n-1/n-2)}\} + \{\mathcal{V}_{(n-2/n-3)}\} + \dots + \{\mathcal{V}_{(1/0)}\} \quad (2)$$



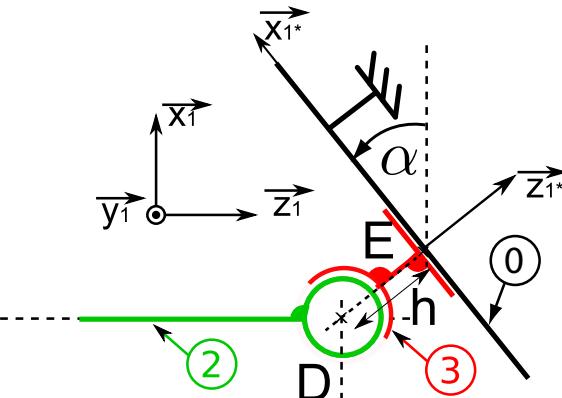
Exemple 6 : Piston d'une pompe à pistons axiaux





Exemple 7 : Deux liaisons en série

L'exemple suivant donne la modélisation de deux liaisons en série correspondant au montage du piston d'une pompe à pistons axiaux.



Appliquons cette méthode pour obtenir le torseur cinématique du mouvement de 2/0

- Composition du torseur cinématique :

$$\{\mathcal{V}_{(2/0)}\} = \{\mathcal{V}_{(2/3)}\} + \{\mathcal{V}_{(3/0)}\}$$

- Liaison rotule de point D :

$$\{\mathcal{V}_{(S_2/S_3)}\}_D = \begin{Bmatrix} p_{23} & 0 \\ q_{23} & 0 \\ r_{23} & 0 \end{Bmatrix}_{R_1} = \begin{Bmatrix} p*_{23} & 0 \\ q*_{23} & 0 \\ r*_{23} & 0 \end{Bmatrix}_{R_{1*}} = \begin{Bmatrix} p*_{23} & h \cdot q*_{23} \\ q*_{23} & -h \cdot p*_{23} \\ r*_{23} & 0 \end{Bmatrix}_{R_{1*}}$$

Car,

$$\overrightarrow{V_{(E \in S_2/S_3)}} = \overrightarrow{V_{(D \in S_2/S_3)}} + \overrightarrow{ED} \wedge \overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_3)}} = \vec{0} - h \vec{z}_1^* \wedge (p*_{23} \vec{x}_1^* + q*_{23} \vec{y}_1^* + r*_{23} \vec{z}_1^*)$$

- Liaison plane de normale \vec{z}_1^* :

$$\{\mathcal{V}_{(S_3/S_0)}\}_E = \begin{Bmatrix} 0 & u_{30} \\ 0 & v_{30} \\ r_{30} & 0 \end{Bmatrix}_{R_{1*}}$$

- Finalement on obtient le torseur cinématique équivalent :

$$\boxed{\{\mathcal{V}_{(2/0)}\}_E = \begin{Bmatrix} p*_{23} & u_{30} + h \cdot q*_{23} \\ q*_{23} & v_{30} - h \cdot p*_{23} \\ r*_{23} + r_{30} & 0 \end{Bmatrix}_{R_{1*}}}$$

Ce qui correspond à une liaison de type ponctuelle de centre E et de normale \vec{z}_1^* .

III. Chaînes de solides

1 Chaînes ouvertes, fermées, complexes



Définition 6 : Systèmes et chaînes de solide

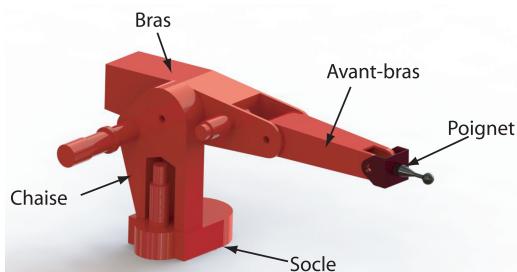
Un système et composé de chaînes de solides : solides liés par des liaisons mécaniques. On peut rencontrer différentes architectures de chaînes de solides :

- Chaîne ouverte** : Une chaîne de solides $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ est ouverte si les solides des extrêmes sont différents.
- Chaîne fermée** : Une chaîne de solides $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ est fermée si le solide initial est le même que le solide final.
- Chaîne complexe** : Une chaîne de solides $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ est complexe si elle comporte plusieurs chaînes ouvertes ou fermées.

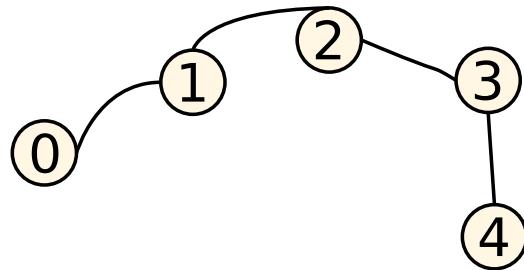
2 Exemples



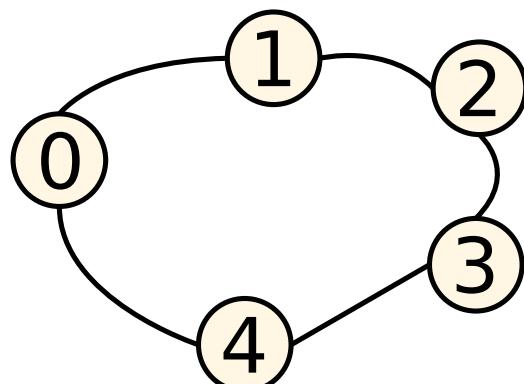
Exemple 8 :



chaîne ouverte : Robot Ericc



chaîne fermée : Robot Maxpid



chaîne complexe : Robot hexapod

