

LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I. ET M.P.I.I.



ANNÉE 2025 - 2026

C5 : MODÉLISATION CINÉMATIQUE STRUCTURELLE DES SYSTÈMES

## TD 11 - Modélisation cinématique des liaisons mécaniques (C5-1)

### Compétences

- **Analyser**
  - Associer les fonctions aux constituants.
- **Modéliser**
  - Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.
- **Résoudre**
  - Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques.
  - Mener une simulation numérique.

### Exercice 1 :

#### 1 Présentation générale

##### Objectif 1 :

L'objectif est de mettre en place un système permettant à un véhicule de suivre une ligne de manière automatique. On utilise pour cela le prototype du robot maqueen qui est capable de détecter des lignes.



##### 1.1.2 suivre une ligne courbée

Critère	Niveau	Flexibilité
Temps pour faire un tour sur place	$t_{tour}$	À déterminer
Temps pour suivre une trajectoire circulaire de rayon de courbure 10cm	$t_{tour}$	À déterminer

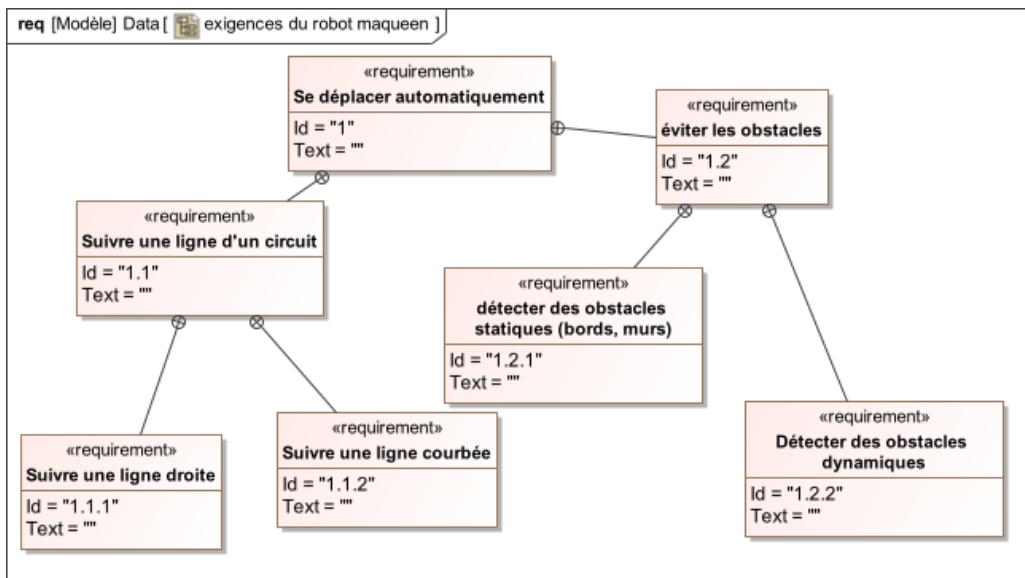
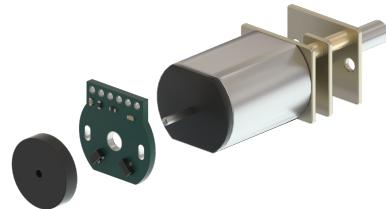


FIGURE 1 – Diagramme des exigences partiel concernant le déplacement autonome robot maqueen

## 2 Vérification de l'exigence 1.1.2 : suivre une ligne courbée

On donne les caractéristiques du moteur utilisé pour la propulsion.

Grandeur	Valeur
Vitesse maximale sans chargement	$N_{max} = 320 \text{ tr/min}$
Couple maximal	$C_{maxi} = 21,6 \cdot N \cdot cm$
Diamètre des roues utilisées	$D_r = 4,3 \text{ cm}$
Masse du robot maqueen	$m = 0,133 \text{ kg}$



### paramétrage :

On donne le schéma cinématique du problème sur la figure 2. Voici le paramétrage :

- Le châssis ( $S_0$ ) de repère  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  est supposé galiléen.
- Le châssis ( $S_3$ ) de repère  $(C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_{0,3})$  est animé d'un mouvement de rotation d'axe  $(O, \vec{z}_{0,3})$  par rapport au bâti ( $S_0$ )  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . On définit l'angle  $\theta_{30}(t)$  tel que  $\theta_{30}(t) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3) = (\vec{x}_0, \vec{z}_3)$ . On définit aussi le rayon de courbure  $\rho$  comme  $\rho = \overrightarrow{OC} \cdot \vec{y}_3$ .
- La roue ( $S_1$ ) de repère  $(B', \vec{x}_1, \vec{y}_{3,1}, \vec{z}_1)$  est en liaison pivot d'axe  $(B', \vec{y}_{1,3})$  par rapport au châssis ( $S_3$ ). On définit l'angle  $\theta_{13}(t)$  tel que  $\theta_{13}(t) = (\vec{x}_3, \vec{x}_1) = (\vec{z}_3, \vec{z}_1)$ . La roue ( $S_1$ ) est également en liaison ponctuelle de normale  $(B, \vec{z}_0)$  avec le sol  $S_0$  avec roulement sans glissement en B. On définit le rayon de la roue  $R$  comme  $\overrightarrow{B'B} = -R \cdot \vec{z}_{0,3}$ .
- La roue ( $S_2$ ) de repère  $(A', \vec{x}_2, \vec{y}_{3,2}, \vec{z}_2)$  est en liaison pivot d'axe  $(A', \vec{y}_{1,2})$  par rapport au châssis ( $S_3$ ). On définit l'angle  $\theta_{23}(t)$  tel que  $\theta_{23}(t) = (\vec{x}_3, \vec{x}_2) = (\vec{z}_3, \vec{z}_2)$ . La roue ( $S_2$ ) est également en liaison ponctuelle de normale  $(A, \vec{z}_0)$  avec le sol  $S_0$  avec roulement sans glissement en A. On définit le rayon de la roue  $R$  comme  $\overrightarrow{A'A} = -R \cdot \vec{z}_{0,3}$ .
- On définit la distance  $L$ , comme  $\overrightarrow{BA} = L \cdot \vec{y}_3 = \overrightarrow{B'A'}$
- $S_4$  est la rotule qui est liaison rotule en D avec  $S_3$  et en liaison sphère plan avec le sol  $S_0$  de normale  $(D, \vec{z}_{0,3})$ .

**Q1 : Représenter les figures planes de projection permettant de paramétrier le problème**

**Q2 : Donner l'expression du torseur cinématique  $\{\mathcal{V}_{(3/0)}\}$  au point O puis en A.**

**Q3 : Donner l'expression du torseur cinématique  $\{\mathcal{V}_{(2/3)}\}$  au point A' puis en A.**

**Q4 : En exploitant la condition de roulement sans glissement en A, donner l'expression du torseur cinématique**

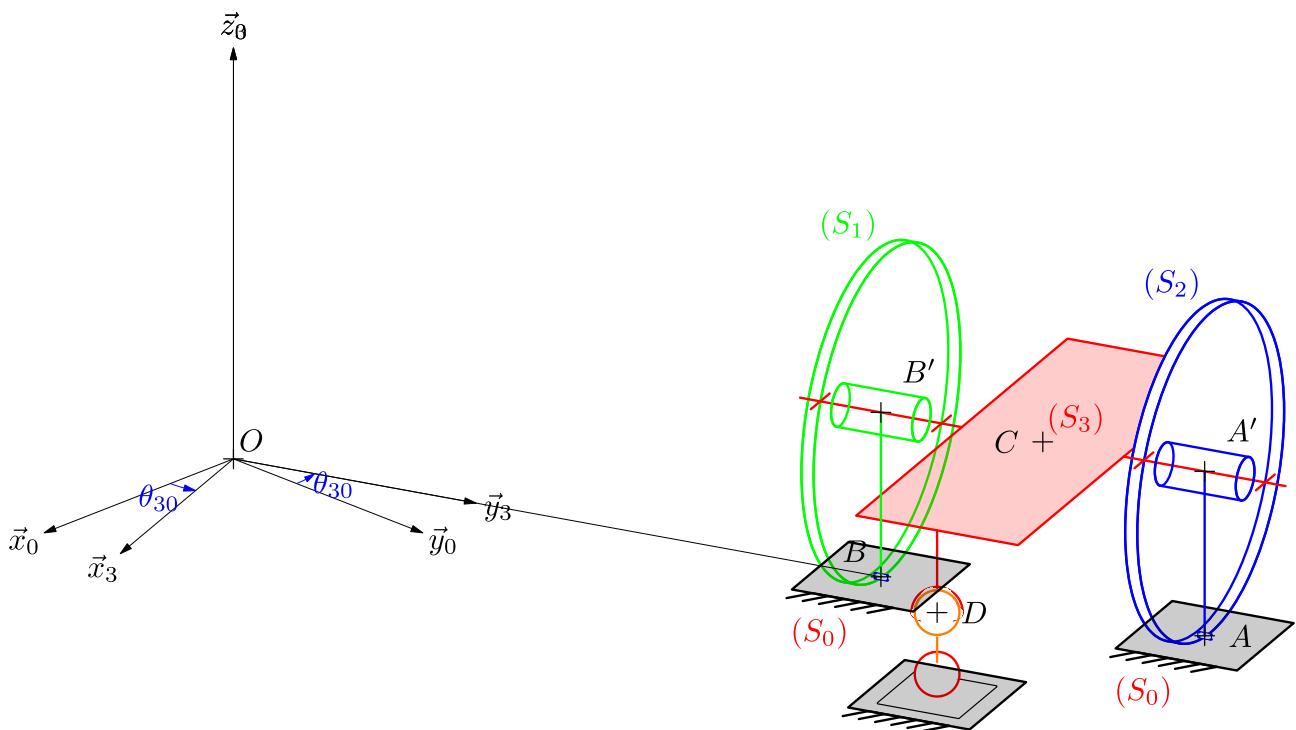


FIGURE 2

$\{\mathcal{V}_{(2/0)}\}$  au point  $A$  sans expliciter  $\overrightarrow{\Omega_{(2/0)}}$ .

**Q5 :** Traduire la relation de Chasles au Point  $A$ :  $\{\mathcal{V}_{(3/0)}\} = \{\mathcal{V}_{(3/2)}\} + \{\mathcal{V}_{(2/0)}\}$ .

**Q6 :** En déduire une relation entre  $\dot{\theta}_{30}(t)$ ,  $\dot{\theta}_{23}(t)$ ,  $\rho$ ,  $L$  et  $R$ .

**Q7 :** Donner l'expression du torseur cinématique  $\{\mathcal{V}_{(1/3)}\}$  au point  $B'$  puis en  $B$ .

**Q8 :** En exploitant la condition de roulement sans glissement en  $B$ , donner l'expression du torseur cinématique  $\{\mathcal{V}_{(1/0)}\}$  au point  $B$  sans expliciter  $\overrightarrow{\Omega_{(1/0)}}$ .

**Q9 :** Donner l'expression du torseur cinématique  $\{\mathcal{V}_{(3/0)}\}$  en  $B$ .

**Q10 :** Traduire la relation de Chasles au Point  $B$ :  $\{\mathcal{V}_{(3/0)}\} = \{\mathcal{V}_{(3/1)}\} + \{\mathcal{V}_{(1/0)}\}$ .

**Q11 :** En déduire une relation entre  $\dot{\theta}_{30}(t)$ ,  $\dot{\theta}_{13}(t)$ ,  $\rho$ ,  $L$  et  $R$ .

**Q12 :** En déduire la vitesse de rotation  $\dot{\theta}_{30}(t)$  maximale du châssis par rapport au sol en tournant sur place ou en suivant le circuit de rayon 10cm.

### 3 Programmation du robot

Pour programmer le robot on peut utiliser l'environnement makecode en ligne sur le site [makecode.microbit.org](https://makecode.microbit.org).

1. On peut programmer par bloc;
2. ou en python.
3. On peut afficher les données qui viennent de la fonction `print`.
4. On peut aller chercher des fonctions dans la bibliothèque.
5. Si la carte est branchée au PC on peut télécharger la carte sur le pc et lire les données



Sur le lien <https://makecode.microbit.org/S00943-06283-58626-29342> vous trouverez un fichier initial à utiliser et à tester avec la procédure donnée plus haut.



**Q13 : Programmer le robot pour vérifier ces performances.**

## Exercice 2 : Modélisation d'une souris mécanique

**Source :** Raphael Allais

### 1 présentation et paramétrage

On se propose d'étudier le fonctionnement d'une souris mécanique associée à un ordinateur (figure 3).

L'ensemble des paramétrage indiqués ci-dessous font référence à la figure 4.

- Le plan de travail (0) est lié au repère  $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .
- Le cadre lié à la souris porte le numéro (1). On lui lie un repère  $R_1 = (C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ .
- En fonctionnement normal, la bille (2) de rayon  $R$  **roule sans glisser** sur le plan (0). On note  $I$  le point de contact avec le sol (0).
- Le galet (3), de rayon  $a$  est en liaison pivot d'axe  $(L, \vec{y}_1)$ , avec le cadre (1).
- Le galet (4), de rayon  $a$  est en liaison pivot d'axe  $(M, \vec{x}_1)$ , avec le cadre (1).

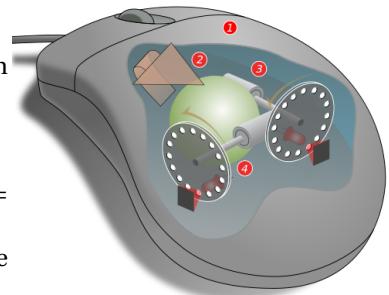


FIGURE 3 – Dessin du mécanisme d'une souris de micro-ordinateur.

Les deux galets (3) et (4) commandent chacun un capteur de position angulaire (codeur incrémental). En fonctionnement normal, ils **roulent sans glisser** sur la bille (2), respectivement aux points  $J$  et  $K$ .

On notera :

- $\vec{\Omega}_{(3/1)} = \omega_{31} \vec{y}_1$  le vecteur vitesse de rotation (inconnu) de (3) par rapport à (1).
- $\vec{\Omega}_{(4/1)} = \omega_{41} \vec{x}_1$  le vecteur vitesse de rotation (inconnu) de (4) par rapport à (1).

La souris (1) est animée d'un mouvement plan par rapport à (0).

#### 💡-Objectif:

| Le but de cet exercice est de trouver les valeurs de  $\omega_{31}$  et  $\omega_{41}$  en fonction du déplacement de la souris.

La condition de contact en  $I$  impose que :  $\overrightarrow{OC} \cdot \vec{z}_0 = R$ .

La position de la souris (1) par rapport à (0) est alors donnée par :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= x \vec{x}_1 + y \vec{y}_1 + R \vec{z}_1 \\ \theta &= (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) \\ \text{avec } \vec{z}_0 &= v_z \mathbf{i}\end{aligned}$$

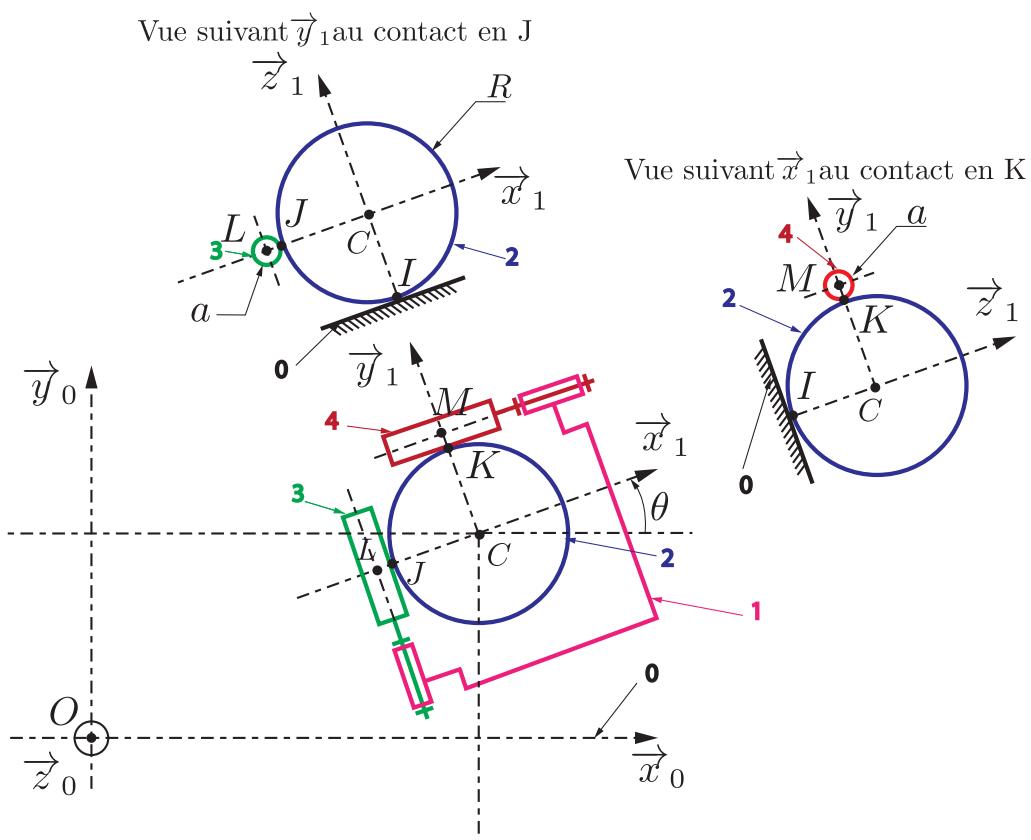


FIGURE 4 – Schéma cinématique mécanique d'une souris de micro-ordinateur.

On note le torseur cinématique de la bille (2) par rapport au cadre (1) par :

$$\{\mathcal{V}_{(2/1)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{(2/1)}} = p \vec{x}_1 + q \vec{y}_1 + r \vec{z}_1 \\ \vec{V}(C \in 2/1) = \vec{0} \end{array} \right\}$$

(Pour l'instant,  $p$ ,  $q$  et  $r$  ne sont pas connus.)

Supposons que l'on bouge la souris (i.e. le cadre (1)) par rapport à (0) par le mouvement plan suivant suivant :

$$\{\mathcal{V}_{(1/0)}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{(1/0)}} = \dot{\theta} \vec{z}_0 \\ \vec{V}(C \in 1/0) = \dot{x} \vec{x}_1 + \dot{y} \vec{y}_1 \end{array} \right\}$$

## 2 Modélisation cinématique

**Modélisation globale de la bille et de la souris** Q14 : En analysant les torseurs cinématiques donnés précédemment, proposer une liaison permettant de modéliser les mouvements de 1/0 et de 2/0

**Roulement sans glissement de la bille** Q15 : Expliciter la condition de roulement sans glissement au point  $I$ .

Q16 : Par composition des vitesses, en déduire la relation liant les paramètres du mouvement de la bille (issus de  $\{\mathcal{V}_{(2/1)}\}$ ) à ceux du mouvement de la souris (issu de  $\{\mathcal{V}_{(1/0)}\}$ ).

Q17 : En déduire les composantes  $p$  et  $q$  du vecteur vitesse de rotation  $\overrightarrow{\Omega_{(2/1)}}$ , en fonction du mouvement de la souris.

**Roulement du galet (3)** Q18 : Expliciter la condition de roulement sans glissement au point  $J$ .

Q19 : En déduire le vecteur vitesse de rotation  $\overrightarrow{\Omega_{(3/1)}}$ .

Q20 : En déduire également la valeur de la composante  $r$  de  $\overrightarrow{\Omega_{(2/1)}}$ .

**Roulement du galet (4)** Q21 : Expliciter la condition de roulement sans glissement au point  $K$ .

Q22 : En déduire le vecteur vitesse de rotation  $\overrightarrow{\Omega_{(4/1)}}$ .

**Mouvement global** Q23 : Exprimez alors les éléments de réduction des torseurs  $\{\mathcal{V}_{(2/1)}\}$ ,  $\{\mathcal{V}_{(3/1)}\}$  et  $\{\mathcal{V}_{(4/1)}\}$ , respectivement aux points  $C$ ,  $L$  et  $M$ , en fonction des composantes de  $\{\mathcal{V}_{(1/0)}\}$ .

Q24 : De quels types sont ces torseurs ?