

LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I. ET M.P.I.I.



ANNÉE 2025 - 2026

C5 : MODÉLISATION CINÉMATIQUE STRUCTURELLE DES SYSTÈMES

TD 11 - Modélisation cinématique des liaisons mécaniques (C5-1)

Compétences

- **Analyser**
 - Associer les fonctions aux constituants.
- **Modéliser**
 - Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.
- **Résoudre**
 - Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques.
 - Mener une simulation numérique.

Exercice 1 : Modélisation du Robucar

Source : e3a 2015 MP SII

1 Présentation du sujet

a) Contexte

Le système étudié dans ce sujet est un démonstrateur de véhicules intelligents dotés de la fonctionnalité "d'accrochage télémétrique" qui consiste au suivi en toute sécurité et à distance fixe entre un véhicule maître (leader) et un ou plusieurs véhicules suiveurs (esclave). Le laboratoire d'Automatique Génie Informatique et Signal (LAGIS UMR8219) situé à Polytech-Lille utilise un démonstrateur composé d'un véhicule maître et deux véhicules suiveurs dont on peut voir l'architecture sur la figure 1.

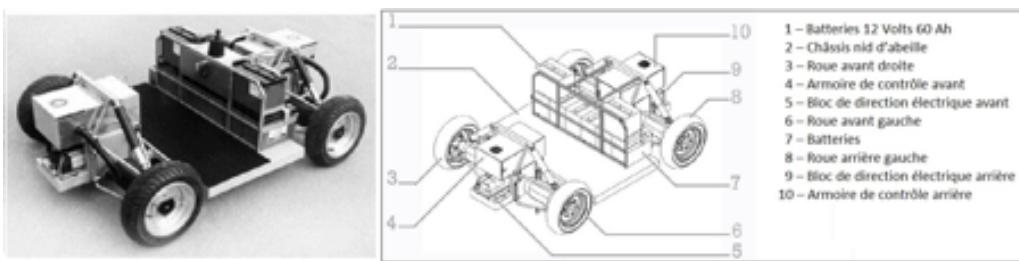


FIGURE 1 – Ensemble Châssis - Train roulant du véhicule RobuCar

b) Architecture du système

Le véhicule suiveur intelligent est un châssis à quatre roues motrices et directrices pilotables séparément (figure 1). Il y a donc deux paramètres de commande pour chaque roue (orientation (direction), vitesse de rotation (motricité)). Le schéma suivant (figure 2) présente un diagramme de bloc interne pour une roue.

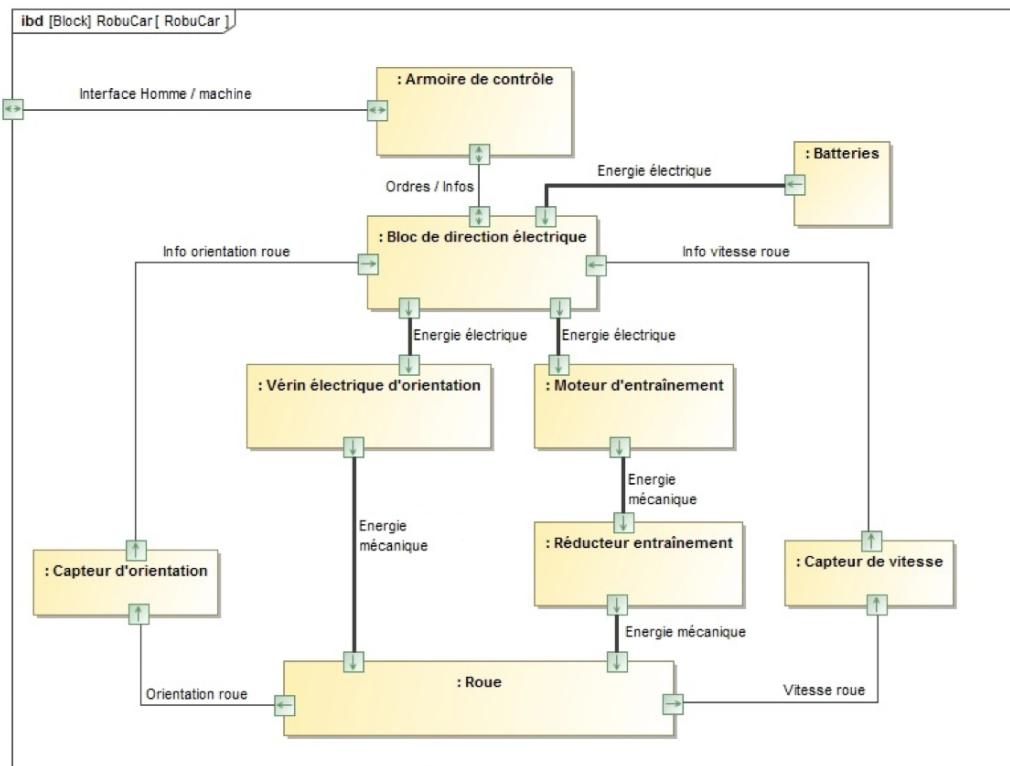


FIGURE 2 – Diagramme de bloc interne pour une roue du véhicule RobuCar

c) Étude du suivi de trajectoire / Modélisation du virage

On considère que les virages sont effectués en pilotant de façon conjuguée les orientations des trains avant et arrière conformément au modèle de la figure 4. De cette façon à la valeur près des paramètres a et b , le pilotage du train arrière (roues 3 et 4) est une image du pilotage du train avant (roues 1 et 2).

- Le pilotage conjugué des directions avant et arrière conduit à l'identification d'un point M de l'axe longitudinal du châssis défini par rapport à C , centre de la trajectoire circulaire à l'instant t par : $\vec{CM} \cdot \vec{X} = 0$ avec $\vec{CM} = -\rho \cdot \vec{Y}$.
- On définit les bases suivantes :
 - $B_0 = (\vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0)$ liée au sol,
 - $B_S = (\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}_0)$ liée au châssis du véhicule,

- $B_i = (\vec{X}_i, \vec{Y}_i, \vec{Z}_0)$ liée à l'axe de la roue i .
- Le point O_i : point du plan médian de la roue i appartenant à l'axe de rotation (cf figure 3).
- Le mouvement du véhicule (châssis S) par rapport au sol (S_0) est un mouvement de rotation autour du point C .
- On note que le taux de changement d'orientation du châssis par rapport au repère fixe lié au sol, dû à la trajectoire circulaire autour de C est : $\vec{\Omega}(S/R_0) = \dot{\psi} \cdot \vec{Z}_0$.
- On note V la vitesse du point M : $\vec{V}(M \in S/R_0) = V \cdot \vec{X} = \rho \cdot \dot{\psi} \vec{X}$ avec V constant.
- Chaque roue i est en mouvement de rotation par rapport au châssis (S) selon l'axe (O_i, \vec{Y}_i) .
- On note $\vec{\Omega}(Roue_i/S) = \dot{\theta}_i \cdot \vec{Y}_i$ vitesse de rotation de la roue i par rapport au châssis du véhicule (selon à l'axe de la roue i).
- R : la valeur du rayon des roues.
- il y a **roulement sans glissement** entre chaque roue i et le sol en J_i .
- l'inclinaison de chaque axe de roue par rapport au châssis selon l'axe vertical (O_i, \vec{Z}_0) est donné par l'angle δ_i avec $\delta_i = (\vec{X}, \vec{X}_1) = (\vec{Y}, \vec{Y}_1)$.

Objectif 1 :

L'objectif de cette étude est de donner la relation entre le rayon de courbure du virage emprunté par le véhicule ρ et les paramètre d'inclinaison des axes des roues δ_1 et δ_2 ainsi que les vitesses de rotation des roues à imposer ($\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$).

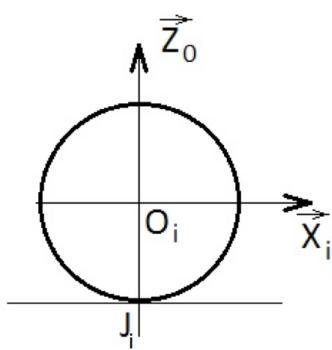


FIGURE 3 – Modélisation du contact roue/sol dans le plan médian de la roue

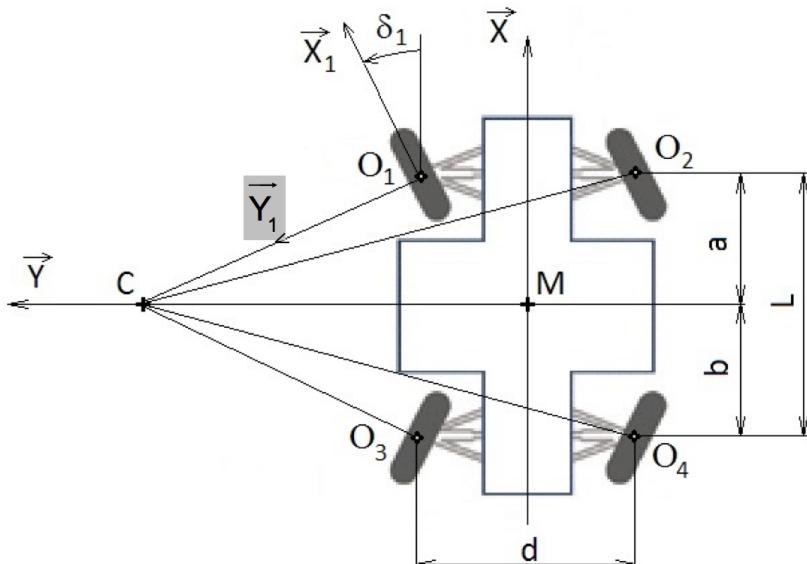


FIGURE 4 – Véhicule en virage vue du dessus

Q1 : En utilisant la propriété du mouvement du châssis S par rapport au sol (S_0) donner la vitesse $\vec{V}(C \in S/\text{sol})$. En déduire l'expression du torseur $\{\mathcal{V}(S/S_0)\}$ décrivant le mouvement de S/sol en C .

Q2 : Donner l'expression vectorielle dans la base B_S de $\vec{V}(O_1 \in S/\text{Sol})$ et $\vec{V}(O_2 \in S/\text{Sol})$ en fonction de ρ , a , d et $\dot{\psi}$ en utilisant le formule de changement de point.

Q3 : En utilisant la propriété du mouvement de chaque roue i par rapport au châssis (S) donner l'expression du torseur $\{\mathcal{V}(Roue_i/S)\}$ décrivant le mouvement de $Roue_i/S$ en O_i .

Q4 : Traduire les conditions de roulement sans glissement entre chaque roue i et le sol J_i .

Q5 : Par composition de mouvement donner l'expression du vecteur de rotation instantané traduisant le mouvement de la roue i par rapport au sol S_0 : $\vec{\Omega}(roue_i/S_0)$. En déduire l'expression du torseur $\{\mathcal{V}(Roue_i/S_0)\}$ décrivant le mouvement de $Roue_i/S_0$ en J_i .

Q6 : Donner l'expression vectorielle dans la base B_i de $\vec{V}(O_1 \in Roue_1/\text{Sol})$ et

$\vec{V}(O_2 \in Roue_2/Sol)$ en fonction de R et $\dot{\theta}_i$.

Q7 : En remarquant que $\vec{V}(O_1 \in Roue_1/Chassis) = \vec{0}$, établir deux relations scalaires après projection dans la base B_S .

Q8 : Faire de même pour la roue 2.

Q9 : En déduire les expressions de $\tan(\delta_1)$ et de $\tan(\delta_2)$ en fonction de ρ , a et d . Effectuer l'application numérique. $a = 0,65m$; $d = 1,2m$; $\rho = 5m$.

Q10 : Étant donné les valeurs de δ_1 et δ_2 , on adopte la simplification suivante : $\cos \delta_i \approx 1$ et $\sin \delta_i \approx 0$. En déduire les expressions simplifiées de $\dot{\theta}_1$ et de $\dot{\theta}_2$.

Exercice 2 : Modélisation d'une souris mécanique

Source : Raphael Allais

1 présentation et paramétrage

On se propose d'étudier le fonctionnement d'une souris mécanique associée à un ordinateur (figure 5).

L'ensemble des paramétrage indiqués ci-dessous font référence à la figure 6.

- Le plan de travail (0) est lié au repère $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- Le cadre lié à la souris porte le numéro (1). On lui lie un repère $R_1 = (C, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.
- En fonctionnement normal, la bille (2) de rayon R roule sans glisser sur le plan (0). On note I le point de contact avec le sol (0).
- Le galet (3), de rayon a est en liaison pivot d'axe (L, \vec{y}_1) , avec le cadre (1).
- Le galet (4), de rayon a est en liaison pivot d'axe (M, \vec{x}_1) , avec le cadre (1).

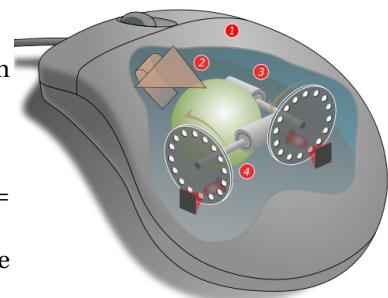


FIGURE 5 – Dessin du mécanisme d'une souris de micro-ordinateur.

Les deux galets (3) et (4) commandent chacun un capteur de position angulaire (codeur incrémental). En fonctionnement normal, ils roulement sans glisser sur la bille (2), respectivement aux points J et K .

On notera :

- $\overrightarrow{\Omega_{(3/1)}} = \omega_{31} \vec{y}_1$ le vecteur vitesse de rotation (inconnu) de (3) par rapport à (1).
- $\overrightarrow{\Omega_{(4/1)}} = \omega_{41} \vec{x}_1$ le vecteur vitesse de rotation (inconnu) de (4) par rapport à (1).

La souris (1) est animée d'un mouvement plan par rapport à (0).

💡 Objectif :

Le but de cet exercice est de trouver les valeurs de ω_{31} et ω_{41} en fonction du déplacement de la souris.

La condition de contact en I impose que : $\overrightarrow{OC} \cdot \vec{z}_0 = R$.

La position de la souris (1) par rapport à (0) est alors donnée par :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= x \vec{x}_1 + y \vec{y}_1 + R \vec{z}_1 \\ \theta &= (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) \\ \text{avec } \vec{z}_0 &= v_z \vec{1}\end{aligned}$$

On note le torseur cinématique de la bille (2) par rapport au cadre (1) par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{(2/1)}} = p \vec{x}_1 + q \vec{y}_1 + r \vec{z}_1 \\ \overrightarrow{V(C \in 2/1)} = \vec{0} \end{array} \right\}_C$$

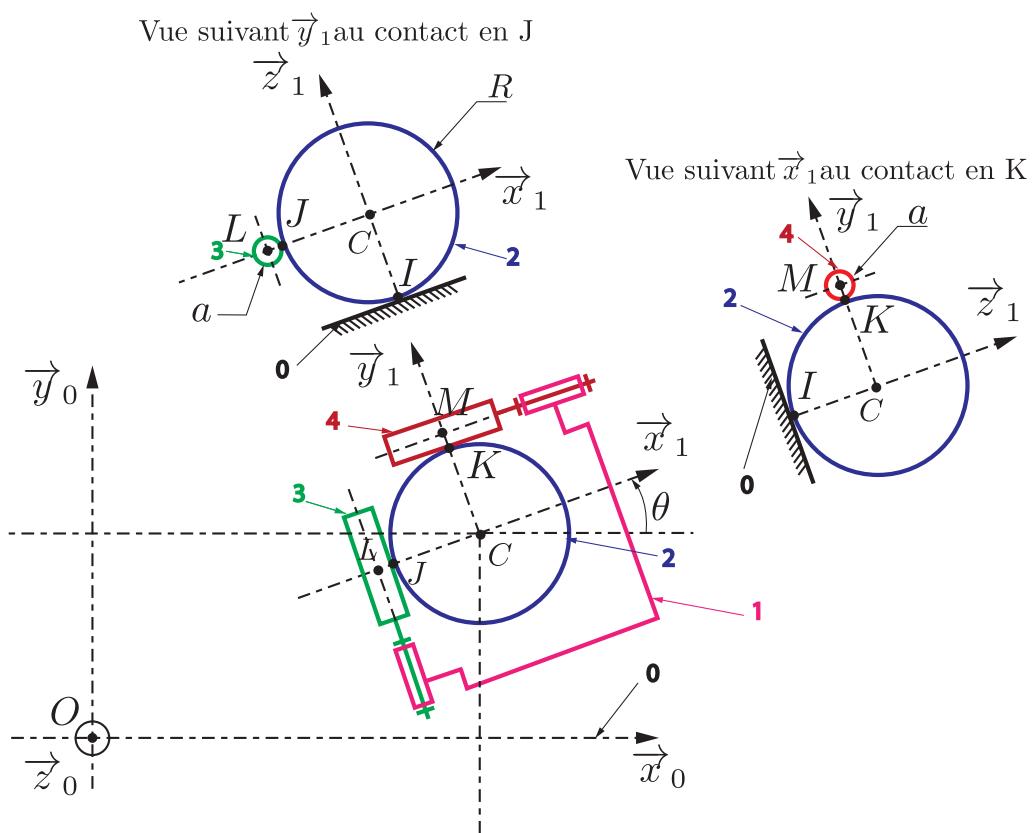


FIGURE 6 – Schéma cinématique mécanique d'une souris de micro-ordinateur.

(Pour l'instant, p , q et r ne sont pas connus.)

Supposons que l'on bouge la souris (i.e. le cadre (1)) par rapport à (0) par le mouvement plan suivant :

$$\{\mathcal{V}_{(1/0)}\} = \underset{C}{\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\Omega_{(1/0)}} = \dot{\theta} \vec{z}_0 \\ \vec{V}(C \in 1/0) = \dot{x} \vec{x}_1 + \dot{y} \vec{y}_1 \end{array} \right\}}$$

2 Modélisation cinématique

Modélisation globale de la bille et de la souris Q11 : En analysant les torseurs cinématiques donnés précédemment, proposer une liaison permettant de modéliser les mouvements de 1/0 et de 2/0

Roulement sans glissement de la bille Q12 : Expliciter la condition de roulement sans glissement au point I .

Q13 : Par composition des vitesses, en déduire la relation liant les paramètres du mouvement de la bille (issus de $\{\mathcal{V}_{(2/1)}\}$) à ceux du mouvement de la souris (issu de $\{\mathcal{V}_{(1/0)}\}$).

Q14 : En déduire les composantes p et q du vecteur vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega_{(2/1)}}$, en fonction du mouvement de la souris.

Roulement du galet (3) Q15 : Expliciter la condition de roulement sans glissement au point J .

Q16 : En déduire le vecteur vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega_{(3/1)}}$.

Q17 : En déduire également la valeur de la composante r de $\overrightarrow{\Omega_{(2/1)}}$.

Roulement du galet (4) Q18 : Expliciter la condition de roulement sans glissement au point K .

Q19 : En déduire le vecteur vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega_{(4/1)}}$.

Mouvement global Q20 : Exprimez alors les éléments de réduction des torseurs $\{\mathcal{V}_{(2/1)}\}$, $\{\mathcal{V}_{(3/1)}\}$ et $\{\mathcal{V}_{(4/1)}\}$, respectivement aux points C , L et M , en fonction des composantes de $\{\mathcal{V}_{(1/0)}\}$.

Q21 : De quels types sont ces torseurs ?