



C4 : Modélisation cinématique structurelle des systèmes

C4-1 : Modélisation des liaisons mécaniques

Émilien DURIF

Lycée La Martinière Monplaisir Lyon
Classe de MPSI
12 Décembre 2023



Plan

1 Modélisation des contacts entre solides

- Paramétrage
- Vitesse de glissement/ Roulement sans glissement
- Vitesse de roulement/Vitesse de pivotement

2 Modélisation des liaisons mécaniques

- Contact entre les solides
- Degrés de liberté

3 Modélisation des liaisons entre solides

- Liaisons normalisées
- Tableau des liaisons des liaisons cinématiques normalisées



Plan

1 Modélisation des contacts entre solides

- Paramétrage
- Vitesse de glissement/ Roulement sans glissement
- Vitesse de roulement/Vitesse de pivotement

2 Modélisation des liaisons mécaniques

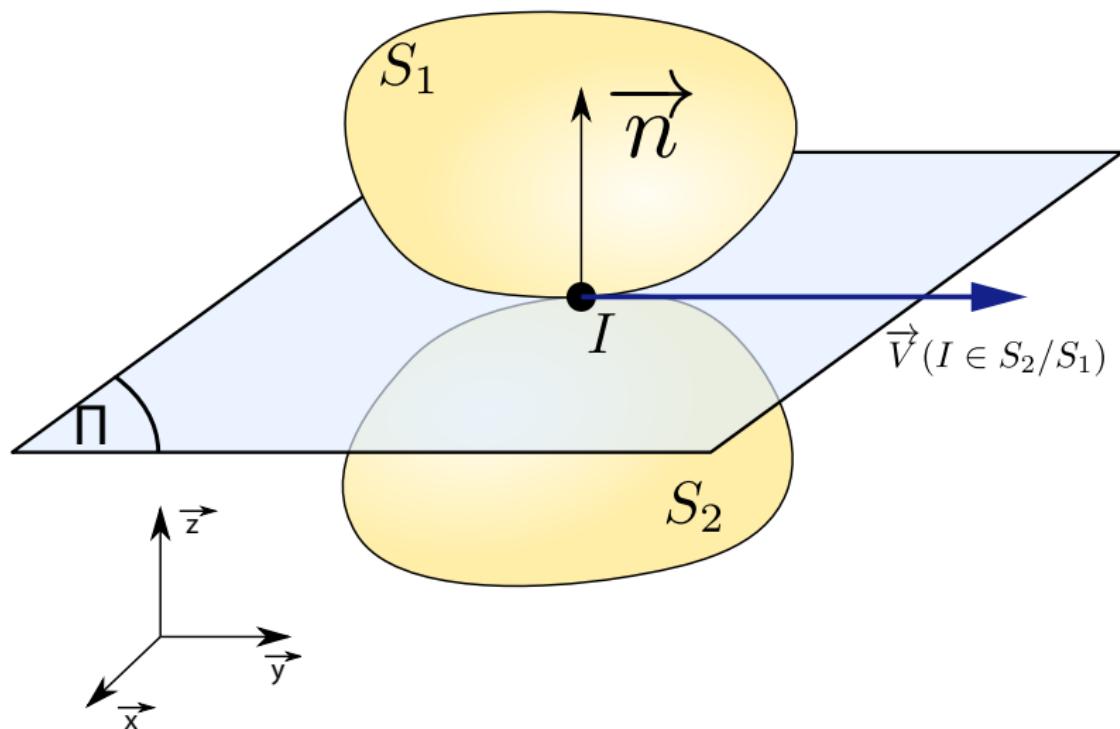
- Contact entre les solides
- Degrés de liberté

3 Modélisation des liaisons entre solides

- Liaisons normalisées
- Tableau des liaisons des liaisons cinématiques normalisées



Cinématique du solide : cinématique du contact





Cinématique du solide : cinématique du contact

Vitesse de glissement/Roulement sans glissement

- On appelle **vitesse de glissement** au point I , de S_2 par rapport à S_1 le vecteur vitesse du point I dans le mouvement de S_2 par rapport à S_1 :

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1). \quad (1)$$

- On dit qu'il y a **roulement sans glissement** au point I si :

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{0} \quad (2)$$

Dans ce cas, on dit que S_2 “roule sans glisser” sur S_1 .

- $\vec{V}(I \in S_2/S_1)$ est contenu dans le plan Π (sinon il y aura inter-pénétration des deux solides, ou décollement du contact)
- Décomposition :

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{V}(I \in S_2/R_0) - \vec{V}(I \in S_1/R_0)$$



Cinématique du solide : cinématique du contact

Vitesse de glissement/Roulement sans glissement

- On appelle **vitesse de glissement** au point I , de S_2 par rapport à S_1 le vecteur vitesse du point I dans le mouvement de S_2 par rapport à S_1 :

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1). \quad (1)$$

- On dit qu'il y a **roulement sans glissement** au point I si :

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{0} \quad (2)$$

Dans ce cas, on dit que S_2 “roule sans glisser” sur S_1 .

- $\vec{V}(I \in S_2/S_1)$ est contenu dans le plan Π (sinon il y aura inter-pénétration des deux solides, ou décollement du contact)
- Décomposition :

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{V}(I \in S_2/R_0) - \vec{V}(I \in S_1/R_0)$$



Cinématique du solide : cinématique du contact

Vitesse de glissement/Roulement sans glissement

- On appelle **vitesse de glissement** au point I , de S_2 par rapport à S_1 le vecteur vitesse du point I dans le mouvement de S_2 par rapport à S_1 :

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1). \quad (1)$$

- On dit qu'il y a **roulement sans glissement** au point I si :

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{0} \quad (2)$$

Dans ce cas, on dit que S_2 "roule sans glisser" sur S_1 .

- $\vec{V}(I \in S_2/S_1)$ est contenu dans le plan Π (sinon il y aura inter-pénétration des deux solides, ou décollement du contact)
- Décomposition :

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{V}(I \in S_2/R_0) - \vec{V}(I \in S_1/R_0)$$



Cinématique du solide : cinématique du contact

Vitesse de glissement/Roulement sans glissement

- On appelle **vitesse de glissement** au point I , de S_2 par rapport à S_1 le vecteur vitesse du point I dans le mouvement de S_2 par rapport à S_1 :

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1). \quad (1)$$

- On dit qu'il y a **roulement sans glissement** au point I si :

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{0} \quad (2)$$

Dans ce cas, on dit que S_2 "roule sans glisser" sur S_1 .

- $\vec{V}(I \in S_2/S_1)$ est contenu dans le plan Π (sinon il y aura inter-pénétration des deux solides, ou décollement du contact)
- Décomposition :**

$$\vec{V}(I \in S_2/S_1) = \vec{V}(I \in S_2/R_0) - \vec{V}(I \in S_1/R_0)$$

Cinématique du solide : cinématique du contact

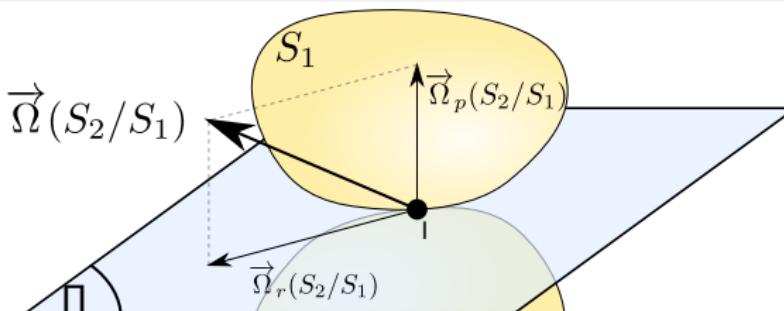
Vitesse de roulement / Vitesse de pivotement

On peut décomposer $\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}}$ en la somme de deux vecteurs $\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}$:

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}} = \overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}} + \overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}} \quad (3)$$

où :

- $\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}}$ est le vecteur vitesse de rotation de roulement de S_2 par rapport à S_1 . Il est contenu dans le plan Π .
- $\overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}$ est le vecteur vitesse de rotation de pivotement de S_2 par rapport à S_1 . Il est normal au plan Π .



Cinématique du solide : cinématique du contact

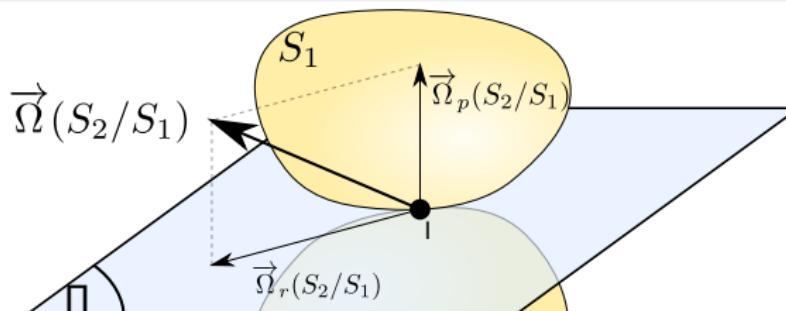
Vitesse de roulement / Vitesse de pivotement

On peut décomposer $\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}}$ en la somme de deux vecteurs $\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}$:

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}} = \overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}} + \overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}} \quad (3)$$

où :

- $\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}}$ est le **vecteur vitesse de rotation de roulement** de S_2 par rapport à S_1 . Il est contenu dans le plan Π .
- $\overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}$ est le **vecteur vitesse de rotation de pivotement** de S_2 par rapport à S_1 . Il est normal au plan Π .



Cinématique du solide : cinématique du contact

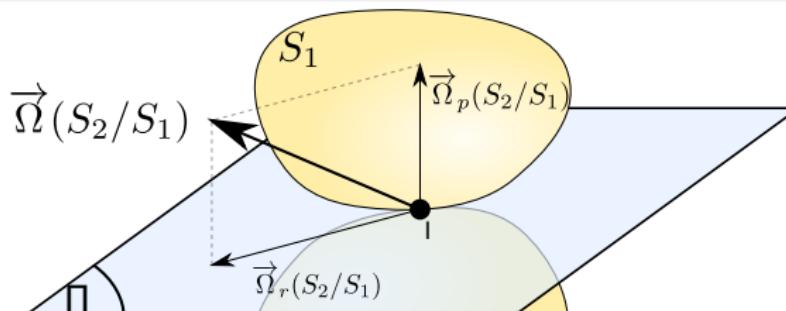
Vitesse de roulement / Vitesse de pivotement

On peut décomposer $\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}}$ en la somme de deux vecteurs $\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}$:

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}} = \overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}} + \overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}} \quad (3)$$

où :

- $\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}}$ est le **vecteur vitesse de rotation de roulement** de S_2 par rapport à S_1 . Il est contenu dans le plan Π .
- $\overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}$ est le **vecteur vitesse de rotation de pivotement** de S_2 par rapport à S_1 . Il est normal au plan Π

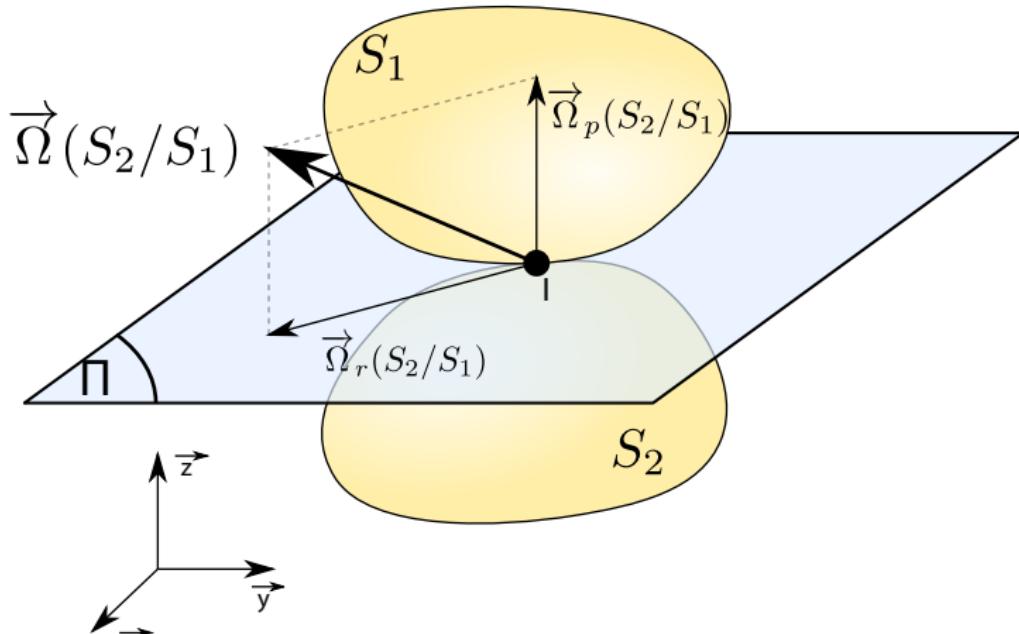




Cinématique du solide : cinématique du contact

$$\overrightarrow{\Omega}_{p(S_2/S_1)} = \left(\overrightarrow{\Omega}_{(S_2/S_1)} \cdot \vec{n} \right) \vec{n} \quad (4)$$

$$\overrightarrow{\Omega}_{r(S_2/S_1)} = \overrightarrow{\Omega}_{(S_2/S_1)} - \overrightarrow{\Omega}_{p(S_2/S_1)} \quad (5)$$





Plan

1 Modélisation des contacts entre solides

- Paramétrage
- Vitesse de glissement/ Roulement sans glissement
- Vitesse de roulement/Vitesse de pivotement

2 Modélisation des liaisons mécaniques

- Contact entre les solides
- Degrés de liberté

3 Modélisation des liaisons entre solides

- Liaisons normalisées
- Tableau des liaisons des liaisons cinématiques normalisées



Modélisation des liaisons entre solides

Définition

- Un **système mécanique** est composé de plusieurs solides qui sont liés entre eux par **des liaisons mécaniques**.
- Une **liaison mécanique** résulte d'un **contact** entre deux solides.
- Dans la réalité tout contact est surfacique mais suivant les dimensions de certaines zones de contact, on peut idéaliser le contact comme étant parfois ponctuel ou linéaire.
- La **nature des surfaces** de contact va engendrer des mouvements relatifs autorisés entre les deux solides.

Modélisation des liaisons entre solides

Degré de liberté

Les mouvements relatifs autorisés entre deux solides liés par une liaison mécanique sont les **degrés de liberté**. Dans l'espace (3D), on considère 6 degrés de liberté élémentaires (3 translations et 3 rotations) que l'on donne par rapport à un repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

- rotations respectivement autour de (O, \vec{x}) , (O, \vec{y}) et (O, \vec{z}) : R_x , R_y et R_z ,
- translations respectivement suivant \vec{x} , \vec{y} et \vec{z} : T_x , T_y et T_z .

Les degrés de liberté autorisés par une liaison dépendent des surfaces de contact entre les solides.





Plan

1 Modélisation des contacts entre solides

- Paramétrage
- Vitesse de glissement/ Roulement sans glissement
- Vitesse de roulement/Vitesse de pivotement

2 Modélisation des liaisons mécaniques

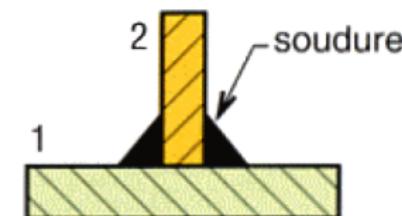
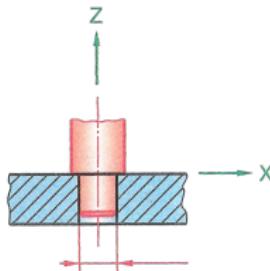
- Contact entre les solides
- Degrés de liberté

3 Modélisation des liaisons entre solides

- Liaisons normalisées
- Tableau des liaisons des liaisons cinématiques normalisées

Modélisation des liaisons entre solides : liaisons normalisées

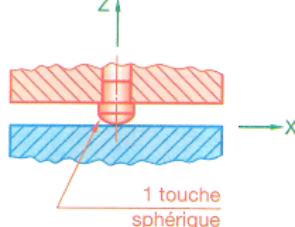
Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
Liaison Encastrement		
0 degré de liberté		
<ul style="list-style-type: none"> • 0 rotation • 0 translation 		





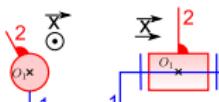
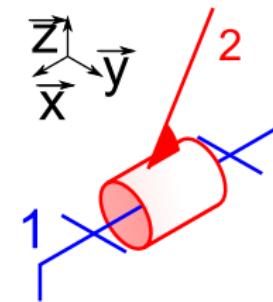
Modélisation des liaisons entre solides : liaisons normalisées

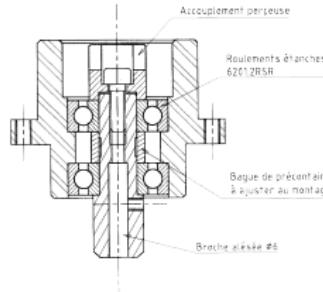
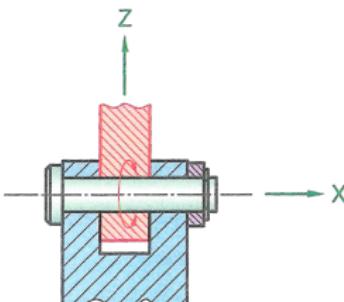
Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
Liaison sphère-plan de centre O_1 , de normale \vec{x}		
5 degrés de liberté		
<ul style="list-style-type: none">• 3 rotations : R_x, R_y, R_z• 2 translations : T_y, T_z		



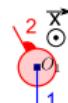
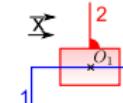
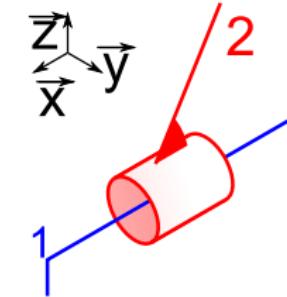


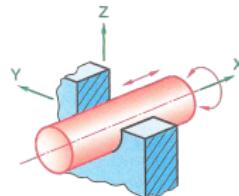
Modélisation des liaisons entre solides : liaisons normalisées

Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
Liaison pivot d'axe (O_1, \vec{x})		
1 degré de liberté		
<ul style="list-style-type: none">• 1 rotation : R_x• 0 translation		



Modélisation des liaisons entre solides : liaisons normalisées

Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
Liaison pivot-glissant d'axe (O_1, \vec{x})	 	
2 degrés de liberté		
<ul style="list-style-type: none"> • 1 rotation : R_x • 1 translation : T_x 		





Modélisation des liaisons entre solides : liaisons normalisées

Attention

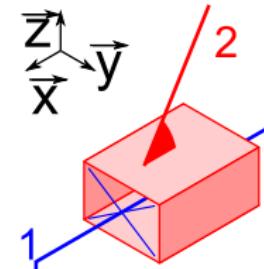
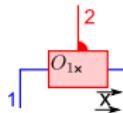
Un arbre de diamètre D dans un alésage de longueur L pourra être modélisé avec une **liaison pivot-glissant si le guidage est long** (c'est à dire si L est suffisamment grand par rapport à D). Généralement, on considère que c'est le cas si :

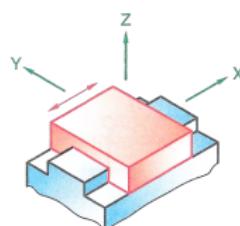
$$\frac{L}{D} \geq 1,5$$

Dans le cas contraire, elle sera assimilée à une liaison **sphère-cylindre**.



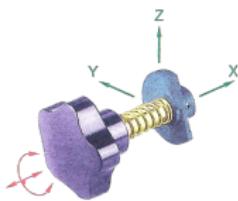
Modélisation des liaisons entre solides : liaisons normalisées

Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
Liaison glissière d'axe \vec{x}		
1 degré de liberté		
<ul style="list-style-type: none">• 0 rotation :• 1 translation : T_x		



Modélisation des liaisons entre solides : liaisons normalisées

Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
Liaison hélicoïdale d'axe (O_1, \vec{x})		
1 degré de liberté		
• 1 rotation R_x + 1 translation T_x couplée		



Modélisation des liaisons entre solides : liaisons normalisées

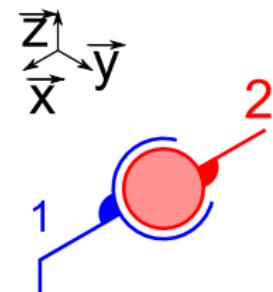
Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
Liaison hélicoïdale d'axe (O_1, \vec{x})		
1 degré de liberté		
• 1 rotation R_x + 1 translation T_x couplée		

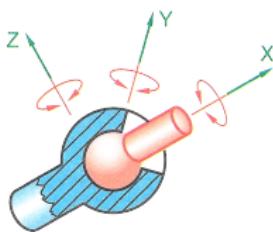
Definition

On appelle le **pas de la liaison hélicoïdal** le rapport entre la translation et la rotation :
 $p = 2 \pi \frac{T_x}{R_x}$

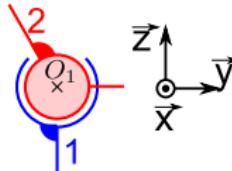
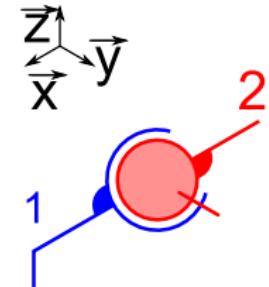


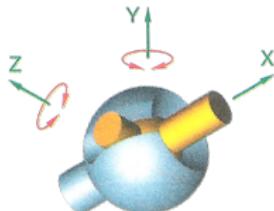
Modélisation des liaisons entre solides : liaisons normalisées

Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
Liaison sphérique de centre O_1		
3 degrés de liberté		
<ul style="list-style-type: none">• 3 rotations : R_x, R_y, R_z• 0 translation		



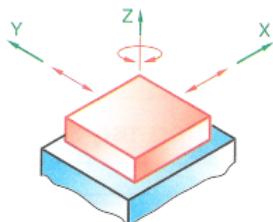
Modélisation des liaisons entre solides : liaisons normalisées

Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
Liaison sphérique à doigt de centre O_1 et d'axe bloqué \vec{z}		
2 degrés de liberté		
<ul style="list-style-type: none"> • 2 rotations : R_x, R_y • 0 translation 		

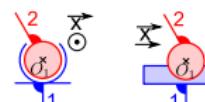
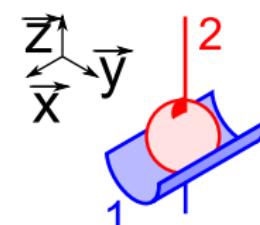


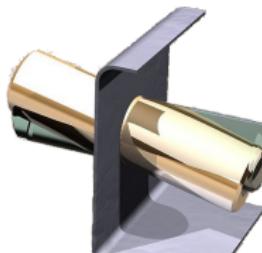
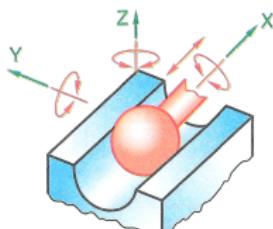
Modélisation des liaisons entre solides : liaisons normalisées

Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
Liaison plan-plan de normale \vec{x}		
3 degrés de liberté		
<ul style="list-style-type: none">• 1 rotation : R_x• 2 translations : T_y, T_z		



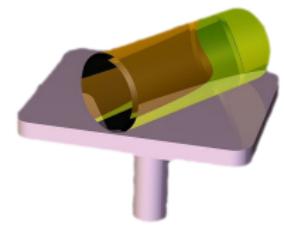
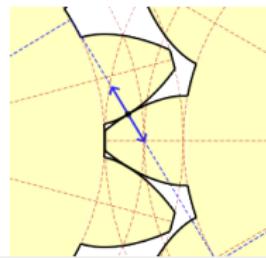
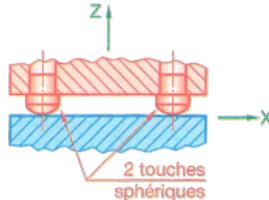
Modélisation des liaisons entre solides : liaisons normalisées

Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
Liaison sphère-cylindre d'axe (O_1, \vec{x})		
4 degrés de liberté		
<ul style="list-style-type: none"> • 3 rotations : R_x, R_y, R_z • 1 translation : T_x 		



Modélisation des liaisons entre solides : liaisons normalisées

Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
Liaison cylindre sur plan d'axe (O_1, \vec{x}) , de normale \vec{z}		
4 degrés de liberté		
<ul style="list-style-type: none"> • 2 rotations : R_x, R_z • 2 translations : T_x, T_y 		





Modélisation des liaisons entre solides : liaisons normalisées

Torseur cinématique du mouvement relatif entre deux solides

On caractérise le mouvement relatif du solide S_2 par rapport au solide S_1 par le torseur cinématique qu'on exprimera en un point P :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_2/S_1)} \right\} = \underset{o_1}{\left\{ \overrightarrow{\vec{V}}(O_1 \in S_2/S_1) \right\}} = \underset{o_1}{\left\{ \begin{array}{cc} p_{21} & u_{21} \\ q_{21} & v_{21} \\ r_{21} & w_{21} \end{array} \right\}}_R \quad (6)$$

- $R(O_1, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1}) = R_1(O_1, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$, le repère lié à S_1
- p_{21} , q_{21} et r_{21} sont les composantes du vecteur rotation instantané $\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}}$ dans le repère R .
- u_{21} , v_{21} et w_{21} sont les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}(O_1 \in S_2/S_1)$ dans le repère R .



Tableau des liaisons cinématiques normalisées

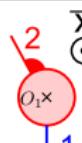
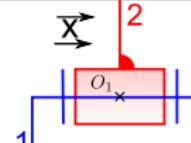
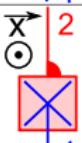
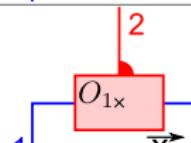
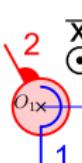
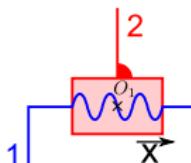
Nom	Représentation	Torseur cinématique
Liaisons pivot d'axe (Δ) = (O_1, v_x)	 	$\begin{cases} \mathcal{V}_{(2/1)} \\ p_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{cases} = (\vec{x}, -, -)$ $\forall P \in (\Delta)$
Liaisons glissière de direction v_x	 	$\begin{cases} \mathcal{V}_{(2/1)} \\ 0 & u_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{cases} = (\vec{x}, -, -)$ $\forall P$
Liaisons hélicoïdale d'axe (Δ) = (O_1, v_x) et de pas p	 	$\begin{cases} \mathcal{V}_{(2/1)} \\ p_{21} & u_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{cases} = (\vec{x}, -, -)$ $\forall P \in (\Delta)$ $u_{21} = +\frac{p}{2\pi} p_{21}$



Tableau des liaisons cinématiques normalisées

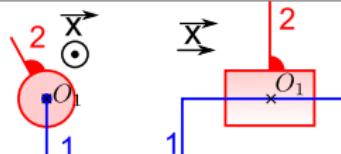
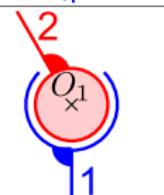
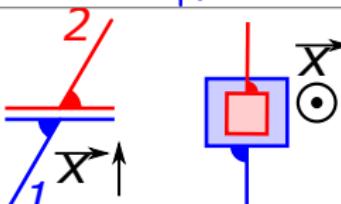
Nom	Représentation	Torseur cinématique
Liaison pivot glissant d'axe (Δ) = (O_1, v_x)		$P \in (\Delta) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_{(2/1)} \\ p_{21} \quad u_{21} \\ 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \end{array} \right\} (\vec{x}, -, -)$
Liaison sphérique de centre O_1		$o_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_{(2/1)} \\ p_{21} \quad 0 \\ q_{21} \quad 0 \\ r_{21} \quad 0 \end{array} \right\} (-, -, -)$
Liaison plane de normale v_x		$\forall P \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_{(2/1)} \\ p_{21} \quad 0 \\ 0 \quad v_{21} \\ 0 \quad w_{21} \end{array} \right\} (\vec{x}, -, -)$



Tableau des liaisons cinématiques normalisées

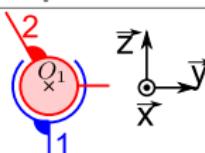
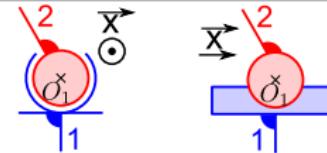
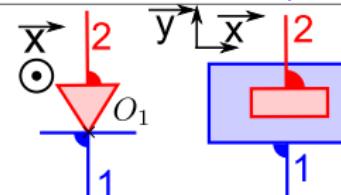
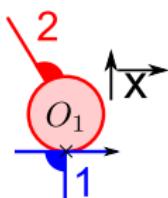
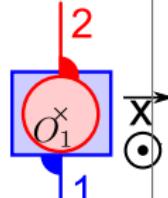
Nom	Représentation	Torseur cinématique
Liaison sphérique à doigt de centre O_1 , d'axe bloqué v_z		$o_1 \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_{(2/1)} \\ p_{21} \quad 0 \\ q_{21} \quad 0 \\ 0 \quad 0 \end{array} \right\}_R$
Liaison sphère-cylindre d'axe (O_1, v_x)		$o_1 \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_{(2/1)} \\ p_{21} \quad u_{21} \\ q_{21} \quad 0 \\ r_{21} \quad 0 \end{array} \right\}_{(\vec{x}, -, -)}$
Cylindre-plan de normale v_z d'axe (O_1, v_x) et de plan normal $\Pi = (O_1, \vec{z}, \vec{x})$		$\forall P \in \Pi \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_{(2/1)} \\ p_{21} \quad u_{21} \\ 0 \quad v_{21} \\ r_{21} \quad 0 \end{array} \right\}_R$



Tableau des liaisons cinématiques normalisées

Nom	Représentation	Torseur cinématique
Liaison sphère-plan de normale $(\Delta) = (O_1, v_x)$	 	$\forall P \in (\Delta) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_{(2/1)} \\ p_{21} \quad 0 \\ q_{21} \quad v_{21} \\ r_{21} \quad w_{21} \end{array} \right\} (\vec{x}, -, -)$
Liaison encastrement		$\forall P \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_{(2/1)} \\ 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \end{array} \right\} (-, -, -)$