Devoir surveillé n°3

Barème

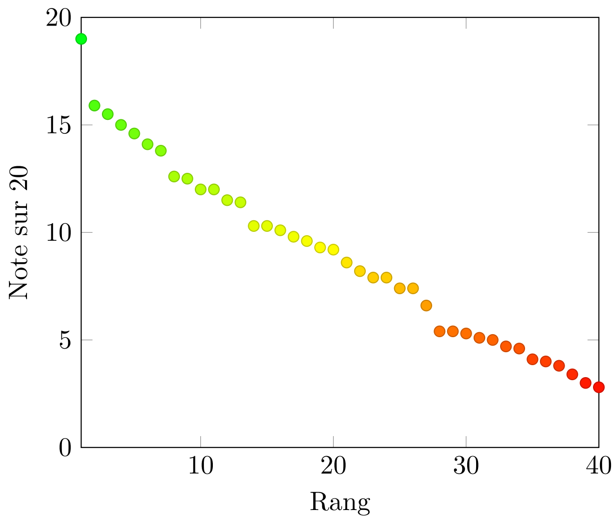
Calculs : 16 questions sur 2 points, total sur 32 , ramené sur 5 points
Problème : 27 questions sur 4 points, total sur 108, ramené sur 15 points

Soit $\varphi : x \mapsto \dfrac{1}{10}\lfloor 10x \rfloor$, c le nombre de points obtenus sur la fiche de calculs et p le nombre de points obtenus sur les exercices, la note sur 20 est le réel $n = \min\left\{\varphi\left(\dfrac{5c}{32}+\dfrac{15p}{\alpha}\right), 20\right\}$ avec $\alpha = 75$

Statistiques

	Calculs	Problème	*Précision*
Minimum	4	6	*17%*
Q1	12	17	*36%*
Médiane	19	30	*52%*
Q3	22	43	*63%*
Maximum	26	77	*81%*
Moyenne	16.7	31.8	*49.1%*

Répartition des notes



Remarques générales

— Il faut numéroter vos copies (et même éventuellement les pages de vos copies, puisque c'est ce qui est demandé aux concours), et indiquer systématiquement la question exacte à laquelle vous répondez.
— Encore des résultats non encadrés... J'ai encore une fois limité le nombre de points perdus, mais je ne le ferai plus à partir du prochain devoir.
— Il faut définir et quantifier **toutes** les variables que vous utilisez. Cela vous permettra par ailleurs d'éviter des erreurs : si vous n'oubliez pas d'écrire qu'une certaine égalité est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, cela réduit la probabilité que vous l'utilisiez pour un réel x quelconque...
— La confusion entre réel et fonction est encore présente dans de trop nombreuses copies. J'ai par ailleurs lu de nombreuses fois des phrases du type « ~~pour tout $x \in \mathbb{R}$~~, y est croissante », ce qui est incorrect.
— Lorsqu'on utilise un théorème du cours ou le résultat d'une question précédente, il faut en vérifier explicitement toutes les hypothèses.

Exercice 1

— Il s'agissait d'un exercice classique, la première question avait été traitée en cours puis en TD.
— Reprenez le corrigé. Vous remarquerez que nous n'utilisons les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ à aucun moment. Cela n'a rien d'étonnant : nous suivons tout simplement les consignes données dans le document « bien rédiger » et utilisons les méthodes de démonstration sur l'injectivité et la surjectivité vue en classe. Faites-en de même.

— Par exemple, la proposition $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$ ne dépend ni d'un x, ni d'un y. Il n'est donc pas possible de les utiliser par la suite !
On écrira donc « Soit $y \in F$, f est surjective donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ », ce qui permet d'utiliser x et y ensuite.
— Aucune de ces questions ne nécessite un raisonnement par l'absurde.

Exercice 2

— **Question 1a.** On pouvait raisonner par récurrence forte ou utiliser des arguments sur la décomposition en produit de facteurs premiers. Toutes les autres tentatives de preuve étaient très incomplètes, voire complètement erronées.
— **Question 1b.** Si un produit de deux réels vaut 1, on ne peut pas affirmer que chacun des réels vaut 1. Par exemple, $4 \times \dfrac{3}{4} = 1$ mais $4 \neq 1$.
— **Question 2b.** Un antécédent de p par une application dépend (quasi certainement) de p. Une réponse du type « Un antécédent de p est $\cancel{2K}$ » est très probablement incorrecte.
— **Question 2c.** Il ne fallait pas se contenter de proposer une application $\tilde{f}$. Il fallait bien évidemment aussi démontrer (soigneusement) que la fonction $\tilde{f}$ proposée vérifiait $f \circ \tilde{f} = \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$ et $\tilde{f} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$. Attention : $\tilde{f} \circ f(n) = \cancel{\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}}$ est incorrect : à gauche du signe égal se trouve un entier, alors que le membre de droite est une application.
— **Questions 3a. et 3b.** Il suffisait d'utiliser les résultats de la question 1. Evitez de traiter à nouveau la même question : si votre raisonnement initial était correct, vous perdez du temps ; sinon, vous perdez des points.
— **Question 4.** Rarement bien traité. Lisez attentivement l'énoncé : on ne vous demande pas de rédiger une récurrence, vous devez traiter uniquement l'hérédité. Par ailleurs, l'application φ_{p+1} n'est pas la composée de g et de φ_p : c'est la composée de g et de la fonction $\psi_p : (n_1, \ldots, n_p, n_{p+1}) \mapsto (\varphi_p(n_1, \ldots, n_p), n_{p+1})$, dont il aurait fallu prouver la bijectivité si vous vouliez raisonner en termes de composée.

Exercice 3

— Prenez le temps de comprendre l'énoncé. Dans la partie A, on s'intéresse aux solutions strictement positives dans la question 2, puis strictement négatives dans la question 3, puis aux autres dans la question 4.
— **Question 1a.** I pouvait contenir des réels négatifs, il n'était donc pas possible d'affirmer qu'une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur I était $x \mapsto \ln x$. Par ailleurs, il n'y a a priori aucune raison qu'une telle équation différentielle admette une solution polynomiale.
— **Question 2.** Les solutions positives de (E) sont positives... Traiter le cas des fonctions y telle que y est strictement négative est pour le moins surprenant.
— **Question 4a.** Ici, y n'est pas strictement positive. Pourquoi donc y a-t-il autant de copies où y est de la forme déterminée dans la question 2 ?
— **Question 4c.** Attention à bien introduire les variables. Y a-t-il un objet qui s'appelle K (ou C, ou λ) dans l'énoncé ? Non... On écrira donc « y est solution de (E_+) sur $]0, \alpha[$ donc **il existe** K tel que **pour tout** $x \in]0, \alpha[$, $y(x) = \dfrac{K}{x} + \dfrac{x^2}{3}$. »
— **Question 4d.** La limite de y en 0, si elle existe, est unique, et ne dépend pas d'un réel x. Vous ne pouvez pas répondre en donnant deux limites différentes sans soupçonner une erreur.
— **Question 5.** Très peu de copies où la dérivabilité de y_α en α est traitée correctement. Retravaillez la définition de la dérivabilité, et reprenez le corrigé.
— **Question 7b.** L'expression de $y(x)$ trouvée dans la question précédente est valable uniquement pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Elle ne peut donc pas servir à démontrer que z est solution de (E) sur $\mathbb{R}$... !

Répartition des points

Version 1

	Question	Non traité	Non encadré	0	1	2	3	4
ex1	1	3	2	9	0	2	1	23
	2	4	1	9	1	3	4	18
	3	7	0	13	0	1	7	12
	4	13	0	15	0	1	3	8
	5	27	0	5	1	0	2	5
ex2	1a	7	0	1	21	4	4	3
	1b	14	0	14	5	4	2	1
	2a	3	0	1	0	4	0	32
	2b	4	1	3	3	9	4	16
	2c	14	0	8	7	3	2	6
	2d	16	5	0	0	0	0	19
	3a	14	0	5	3	1	3	14
	3b	18	0	8	1	2	3	8
	4	31	0	6	1	0	1	1
ex3	1a	0	1	2	1	14	14	8
	1b	0	0	1	7	8	15	9
	2	6	0	13	16	3	1	1
	3	18	0	11	2	4	1	4
	4a	16	0	16	0	1	3	4
	4b	20	0	8	8	2	1	1
	4c	31	0	5	0	0	1	3
	4d	22	0	2	0	6	1	9
	5	25	0	10	4	0	1	0
	6	32	0	4	2	2	0	0
	7a	36	0	4	0	0	0	0
	7b	33	0	7	0	0	0	0
	8	37	0	3	0	0	0	0