Devoir surveillé n°5

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Entiers de Gauss.

On définit l'ensemble des *entiers de Gauss* : $\mathbb{Z}[i] = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z} \}$.
Pour $a, b \in \mathbb{Z}$, on définit $N(a + ib) = a^2 + b^2$.

1) Montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un anneau commutatif.

On rappelle qu'un élément $z \in \mathbb{Z}[i]$ est inversible s'il existe $y \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $zy = 1$.

2) **a)** Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{Z}[i]$, $N(xy) = N(x)N(y)$.

b) En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{Z}[i]$, z est inversible si et seulement si $N(z) = 1$.

c) Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$?

On rappelle aussi que, si $x, y \in \mathbb{Z}[i]$, alors x divise y (ou est un diviseur de y) s'il existe $z \in \mathbb{Z}[i]$ vérifiant $y = zx$. On appelle *élément irréductible* de $\mathbb{Z}[i]$ tout élément non inversible de $\mathbb{Z}[i]$ qui ne peut s'écrire comme produit de deux éléments non inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.

3) **a)** Soit $z \in \mathbb{Z}[i]$, supposons que $N(z)$ est un nombre premier. Montrer que z est irréductible.

b) La réciproque est elle vraie ?

c) Soit p un nombre premier. Montrer que p est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si p ne s'écrit pas comme la somme de carrés de deux entiers.

d) Déterminer l'ensemble des diviseurs de $1 - 3i$.

4) Division euclidienne sur $\mathbb{Z}[i]$.

a) Montrer que tout nombre réel est à distance au plus $\dfrac{1}{2}$ d'un entier.

En déduire que si $z \in \mathbb{C}$, on peut trouver $q \in \mathbb{Z}[i]$ vérifiant $|z - q| < 1$.

b) En déduire que, pour tout $a, b \in \mathbb{Z}[i]$, avec $b \neq 0$, il existe $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ vérifiant $a = bq + r$ ainsi que $N(r) < N(b)$.

Indication : On pourra considérer $\dfrac{a}{b}$.

c) Y a-t-il unicité de cette écriture ?

II. Suites récurrentes.

Le but de l'exercice est l'étude des suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ définies par $0 < x_0 < y_0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = x_n^{\frac{2}{3}}\, y_n^{\frac{1}{3}} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = x_n^{\frac{1}{3}}\, y_n^{\frac{2}{3}}.$$

1) **a)** Montrer par récurrence que : $\forall n \geqslant 0$, $x_n > 0$ et $y_n > 0$.

On peut donc définir les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par : $\forall n \geqslant 0$, $u_n = \ln(x_n)$ et $v_n = \ln(y_n)$.

b) Prouver que : $\forall n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}v_n$ et $v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n$.

2) Dans cette question on considère la suite $(w_n)_n$ définie par : $\forall n \geqslant 0$, $w_n = v_n - u_n$.

a) Prouver que $w_0 = \ln\left(\frac{y_0}{x_0}\right)$.

b) Montrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
c) En déduire l'expression de $(w_n)_n$ puis calculer sa limite.

3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$.

4) Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes.

5) **a)** Démontrer que $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ convergent et ont la même limite ℓ.
b) Prouver que $\ell > 0$.
c) En étudiant la suite produit $(x_n\, y_n)_n$, déterminer ℓ en fonction de x_0 et y_0.

III. Une suite implicite.

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction

$$\varphi_n : x \mapsto nx^{n+1} - (n+1)x^n.$$

On considère aussi la fonction

$$\psi : x \mapsto (x-1)\mathrm{e}^{\,x}.$$

1) Question préliminaire. Montrer que pour tout $\lambda > 0$:

$$\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{\,\lambda}.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, dresser le tableau des variations de φ_n sur $\mathbb{R}_+$.

3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\varphi_n(x) = 1$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}_+$.

On note dorénavant x_n l'unique réel positif vérifiant $\varphi_n(x) = 1$: on vient donc de construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + \dfrac{1}{n} \leqslant x_n \leqslant 1 + \dfrac{2}{n}$.

5) Que peut-on en déduire sur la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

6) Montrer que l'équation $\psi(x) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, que l'on notera dorénavant α.

7) Justifier que $1 < \alpha < 2$.

8) Montrer que, pour tout $\lambda > 0$, $\varphi_n\left(1 + \dfrac{\lambda}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \psi(\lambda)$.

9) Soit $\varepsilon \in]0, \alpha - 1[$.
a) Comparer $\psi(\alpha - \varepsilon)$, $\psi(\alpha)$ et $\psi(\alpha + \varepsilon)$.
b) Justifier qu'il existe un rang n_0 à partir duquel on ait

$$\varphi_n\left(1 + \frac{\alpha - \varepsilon}{n}\right) < 1 < \varphi_n\left(1 + \frac{\alpha + \varepsilon}{n}\right).$$

c) Justifier qu'à partir d'un certain rang,

$$1 + \frac{\alpha - \varepsilon}{n} < x_n < 1 + \frac{\alpha + \varepsilon}{n}.$$

10) Que peut-on donc dire sur la suite de terme général $n(x_n - 1)$?

— **FIN** —