

LYCÉE LA MARTINIÈRE MONPLAISIR LYON

SCIENCES INDUSTRIELLES POUR L'INGÉNIEUR

CLASSE PRÉPARATOIRE M.P.S.I. ET M.P.I.I.

ANNÉE 2025 - 2026



C3 : MODÉLISATION CINÉMATIQUE DES SYSTÈMES  
COMPOSÉS DE CHAINES DE SOLIDES

## TD 8 - Cinématique du solide (C3-4)

### Compétences

- **Modéliser**
  - Déterminer les caractéristiques d'un solide ou d'un ensemble de solides indéformables.
  - Modéliser la cinématique d'un ensemble de solides.
  - Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.
- **Communiquer**
  - Utiliser un vocabulaire technique, des symboles et des unités adéquats.

## Exercice 1 : Mécanisme d'ouverture de porte en accordéon

**Source :** Emilien DURIF

### 1 Présentation et paramétrage

L'étude porte sur le dimensionnement d'un système de porte "accordéon" motorisée utilisé dans un bus. Le cahier des charges est résumé sur le diagramme d'exigence ci-dessous :

La figure 2 ci-dessous représente une porte "accordéon" motorisée.

- **Le battant 1**
  - est articulé par rapport à la paroi du bus 0 en A;
  - son repère associé est :  $R_1 = (A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_{0,1})$ ;
  - son paramètre de mouvement est  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ ;
  - $\vec{BA} = a \cdot \vec{y}_1$
- **Le battant 2**
  - est articulé par rapport à la chaîne 3 en C et par rapport au battant 1 en B;
  - son repère associé est :  $R_2 = (A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_{0,2})$ ;
  - son paramètre de mouvement est  $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$ ;
  - $\vec{BC} = a \cdot \vec{y}_2$ .
- La chaîne 3 qui est mise en mouvement par un moto-réducteur 4. Le maillon C se déplace à vitesse notée  $v(t)$ .
- On considère la phase de fermeture de la porte, (à l'instant initial les points A et C sont confondus).

**Q1 : Représenter les figures planes de projection permettant de paramétrer le problème Q2 : Représenter sur la figure et la configuration ci-dessus les différents repères et les paramètres angulaires associés.**

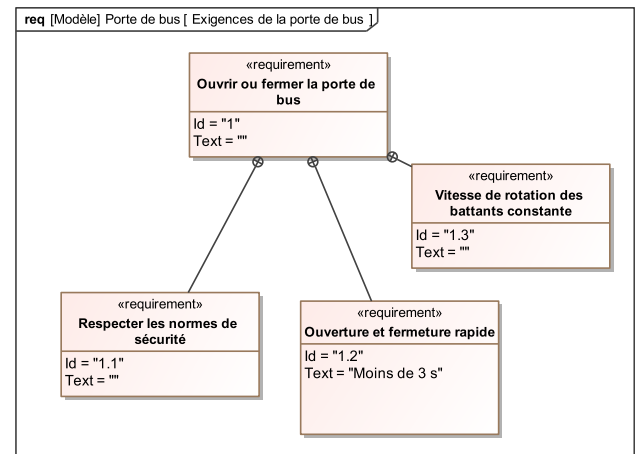


FIGURE 1 – Présentation de la problématique de l'étude.

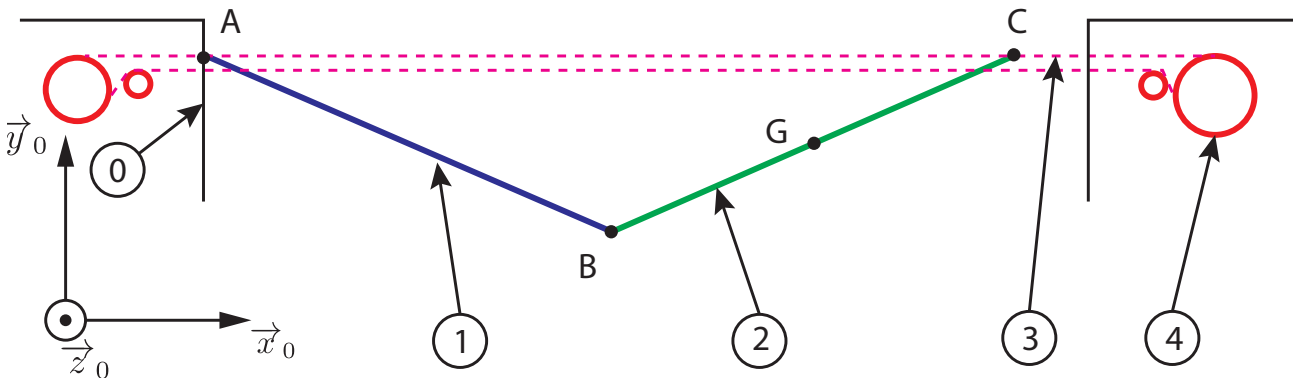


FIGURE 2 – Système d'ouverture de porte en accordéon

## 2 Résolution : détermination de la relation entrée-sortie du problème.

**Q3 : Quelle est la nature du mouvement du maillon de chaîne 3 par rapport à la paroi du bus 0 ?**

**Q4 : Caractériser ce mouvement par son torseur cinématique en fonction de  $v : \{\mathcal{V}_{(3/0)}\}$  au point C puis au point B.**

**Q5 : Quelle est la nature du mouvement du battant 1 par rapport à la paroi du bus 0 ?**

**Q6 : Donner l'expression du torseur cinématique  $\{\mathcal{V}_{(1/0)}\}$  au point A.**

**Q7 : Déduire le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}_{(1/0)}\}$  au point B.**

**Q8 : Calculer  $\vec{V}(B \in 1/0)$  par la mécanique du point (dérivation vectorielle).**

**Q9 : Déterminer le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}_{(2/1)}\}$  au point B en fonction de  $\dot{\beta}$  et  $\dot{\theta}$ .**

**Q10 : Déterminer le torseur cinématique  $\{\mathcal{V}_{(2/3)}\}$  au point C puis au point B en fonction de  $a$  et  $\dot{\beta}$ .**

**Q11 : Traduire la relation de Chasles au Point B :  $\{\mathcal{V}_{(1/0)}\} = \{\mathcal{V}_{(1/2)}\} + \{\mathcal{V}_{(2/3)}\} + \{\mathcal{V}_{(3/0)}\}$ .**

**Q12 : En projetant la relation en vitesse issue de la question précédente en déduire deux équations scalaires.**

**Q13 : A l'aide des conditions initiales lorsque la porte est ouverte ( $\beta = \theta = 0$ ) et en intégrant par rapport au temps une des deux équations précédentes, en déduire une relation entre  $\beta$  et  $\theta \forall t$  et l'expression de  $v(t)$  en fonction de**

$\theta$ .

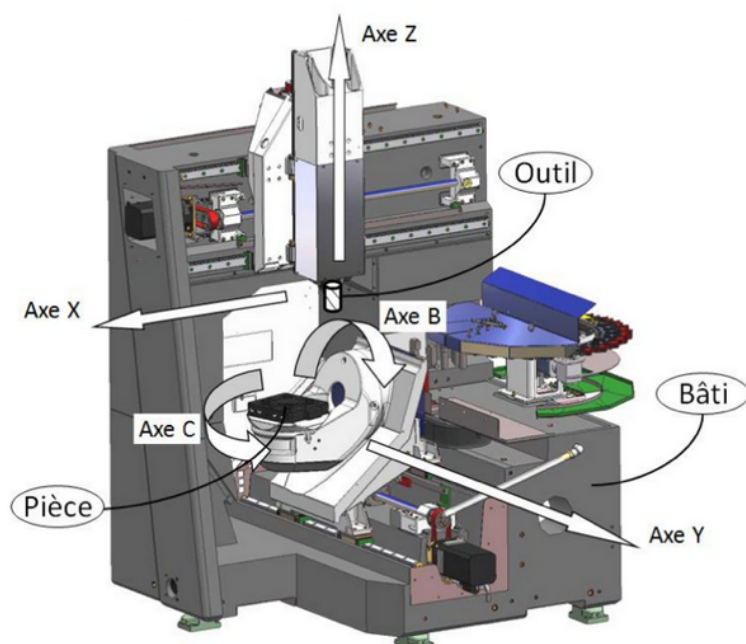
**Q14 : Déterminer numériquement l'expression de  $v(t)$  pour respecter le cahier des charges (On prendra  $a = 1m$ ).**

## Exercice 2 : Etude cinématique d'un centre d'usinage grande vitesse 5 axes

**Source :** Michel Ghidossi

### 1 Présentation des exigences

L'usinage est une opération de transformation d'un produit par enlèvement de matière. Cette opération est à la base de la fabrication de produits dans les industries mécaniques. On appelle le moyen de production associé à une opération d'usinage une machine outil ou un centre d'usinage. La génération d'une surface par enlèvement de matière est obtenue grâce à un outil muni d'au moins une arête coupante. Les différentes formes de pièces sont obtenues par des translations et des rotations de l'outil par rapport à la pièce.



Centre d'usinage 5 axes



Pièce complexe obtenue par usinage

FIGURE 3

La figure ci-dessus est un exemple de machine possédant 3 translations (X, Y et Z) et deux rotations (B et C). Une telle machine est appelée machine 5 axes (un axe est un ensemble qui gère un des mouvements élémentaire, translation ou rotation). Sur cette machine, 2 axes sont utilisés pour mettre en mouvement l'outil par rapport au bâti (ce sont les translations Y et Z) et 3 axes sont utilisés pour mettre en mouvement la pièce par rapport au bâti (ce sont la translation X et les deux rotations B et C).

	Variable	Course
Axe X	$x(t)$	800 mm
Axe Y	$y(t)$	600 mm
Axe Z	$z(t)$	500 mm

	Variable	Course
Axe B	$\theta_1(t)$	$30^\circ / -110^\circ$
Axe C	$\theta_0(t)$	$360^\circ$

L'objectif de cette étude est de déterminer les conditions cinématiques à imposer pour respecter le critère de qualité d'usinage du cahier des charges. La chaîne cinématique pour déplacer l'outil par rapport au bâti.

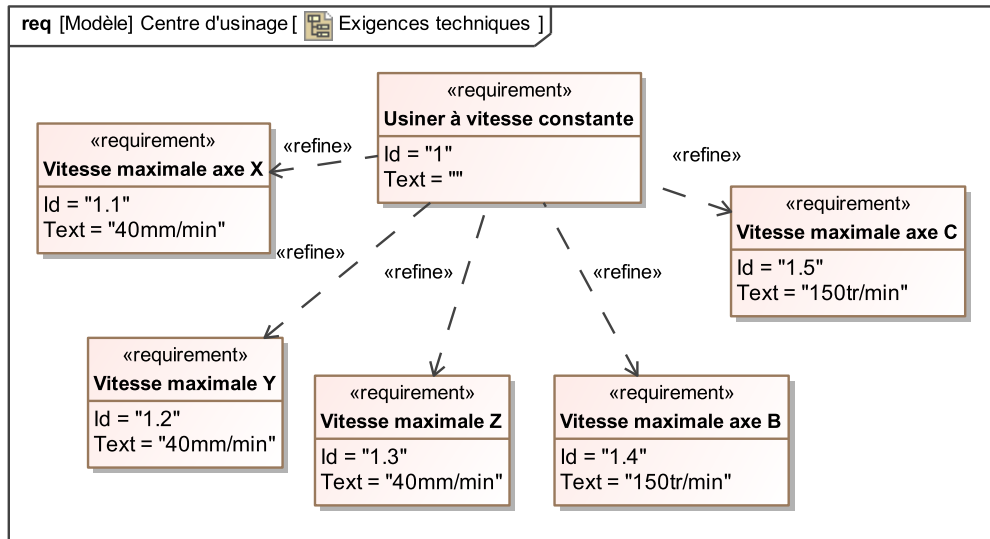
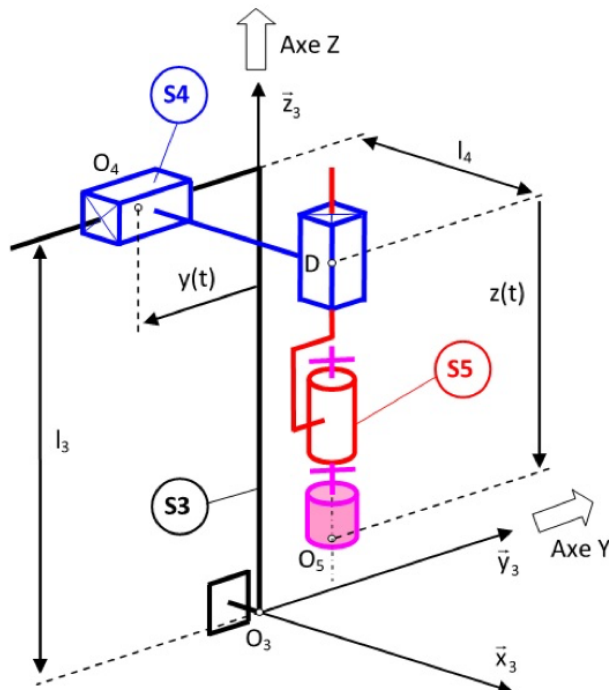


FIGURE 4 – Diagramme partiel des exigences du centre d'usinage

## 2 Modélisation de la chaîne cinématique associée à l'outil



- On associe à  $S_3$  (Supposé galiléen), le repère :

$$R_3 = (O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$$

- $S_4$  est en mouvement de translation de direction  $\vec{y}_4 = \vec{y}_3$  par rapport à  $S_3$ . On associe à  $S_4$ , le repère :

$$R_4 = (O_4, \vec{x}_4 = \vec{x}_3, \vec{y}_4 = \vec{y}_3, \vec{z}_4 = \vec{z}_3)$$

- $S_5$  est en mouvement de translation de direction  $\vec{z}_5 = \vec{z}_3$  par rapport à  $S_3$ . On associe à  $S_5$ , le repère :

$$R_5 = (O_5, \vec{x}_5 = \vec{x}_3, \vec{y}_5 = \vec{y}_3, \vec{z}_5 = \vec{z}_3)$$

- On pose :

- $\vec{O_3O_4} = y(t) \cdot \vec{y}_3 + l_3 \cdot \vec{z}_3$ ;
- $\vec{O_4D} = l_4 \cdot \vec{x}_4$ ;
- $\vec{DO_5} = z(t) \cdot \vec{z}_5$ ;
- $l_3$  et  $l_4$  sont des constantes.

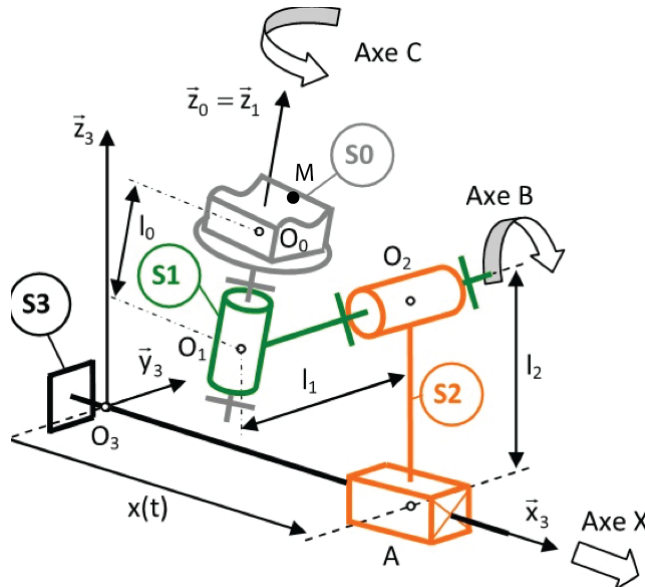
Q15 : Exprimer  $\vec{O_3O_5}$  dans la base associée au repère  $R_3$ .

Q16 : Définir et caractériser le lieu géométrique du point  $O_5$  (extrémité de l'outil) dans son mouvement par rapport au repère  $R_3$ , lorsque l'on commande les axes Y et Z.

Q17 : Donner l'expression de  $\vec{V}(O_5 \in 5/3)$  en utilisant la dérivation vectorielle.

Q18 : A l'aide du diagramme des exigences (figure 4), calculer la valeur maximale de la norme du vecteur vitesse  $\|\vec{V}(O_5 \in 5/3)\|_{max}$ .

### 3 Chaîne cinématique pour déplacer la pièce par rapport au bâti.



- Le repère  $R_3$  est toujours considéré comme galiléen.
- $S_2$  est en mouvement de translation de direction  $\vec{x}_2 = \vec{x}_3$  par rapport à  $S_3$ . On associe à  $S_2$ , le repère :

$$R_2 = (O_2, \vec{x}_2 = \vec{x}_3, \vec{y}_2 = \vec{y}_3, \vec{z}_2 = \vec{z}_3)$$

- $S_1$  est en mouvement de rotation autour de l'axe  $(O_2, \vec{y}_1 = \vec{y}_2)$  par rapport à  $S_2$  (paramètre angulaire de mouvement  $\theta_1 = (\vec{z}_2, \vec{z}_1)$ ). On associe à  $S_1$ , le repère :

$$R_1 = (O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1 = \vec{y}_2, \vec{z}_1)$$

- $S_0$  est en mouvement de rotation autour de l'axe  $(O_1, \vec{z}_0 = \vec{z}_1)$  par rapport à  $S_1$  (paramètre angulaire de mouvement  $\theta_0 = (\vec{x}_1, \vec{x}_0)$ ). On associe à  $S_0$ , le repère :

$$R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0 = \vec{z}_1)$$

- On pose :
  - $\vec{O_3A} = x_A(t) \cdot \vec{x}_3$ ;
  - $\vec{AO_2} = l_2 \cdot \vec{z}_3$ ;
  - $\vec{O_2O_1} = -l_1 \cdot \vec{y}_3$ ;
  - $\vec{O_1O_0} = l_0 \cdot \vec{z}_1$ ;
  - $l_2, l_1$  et  $l_0$  sont des constantes.
  - La surface usinée est définie comme un ensemble de points M de coordonnées  $(x_M, y_M, z_M)$  dans le repère  $R_0$ .

**Q19 :** Donner les figures planes de projection traduisant les deux rotations de  $S_0/S_1$  et de  $S_1/S_2$ .

**Q20 :** Exprimer  $\vec{\Omega}(2/3)$

**Q21 :** Exprimer  $\vec{\Omega}(1/2)$

**Q22 :** Exprimer  $\vec{\Omega}(0/1)$

**Q23 :** En déduire  $\vec{\Omega}(1/3)$  et  $\vec{\Omega}(0/3)$

**Q24 :** Calculer  $\left[ \frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_{R_3}$ .

**Q25 :** Caractériser le lieu géométrique du point  $O_0$  dans son mouvement par rapport au repère  $R_3$  lorsque l'on commande les axes X, B et C.

**Q26 :** Exprimer le vecteur position  $\vec{O_3O_0}$ .

**Q27 :** Calculer  $\vec{V}(O_0 \in 0/3)$  par dérivation vectorielle.

**Q28 :** Déterminer la valeur maximale de la norme de cette vitesse si  $l_0 = 0,1m$  et  $\dot{x}_A = 0$ .

**Q29 :** Exprimer le torseur cinématique  $\left\{ \mathcal{V}_{(0/3)} \right\}$  en  $O_0$ .

**Q30 :** Exprimer le torseur cinématique  $\left\{ \mathcal{V}_{(0/3)} \right\}$  en M.