

## C4 : Modélisation cinématiques des systèmes composés de chaînes de solides

### C4-5 : Modélisation cinématique des liaisons mécaniques

Émilien DURIF  
emilien.durif@gmail.com

Lycée La Martinière Monplaisir Lyon  
Classe de MPSI



# Plan

## 1 Modélisation des contacts entre solides

- Paramétrage
- Vitesse de glissement/ Roulement sans glissement
- Vitesse de roulement/Vitesse de pivotement

## 2 Modélisation des liaisons mécaniques

- Contact entre les solides
- Degrés de liberté

## 3 Modélisation des liaisons entre solides

- Liaisons normalisées
- Tableau des liaisons des liaisons cinématiques normalisées



# Plan

## 1 Modélisation des contacts entre solides

- Paramétrage
- Vitesse de glissement/ Roulement sans glissement
- Vitesse de roulement/Vitesse de pivotement

## 2 Modélisation des liaisons mécaniques

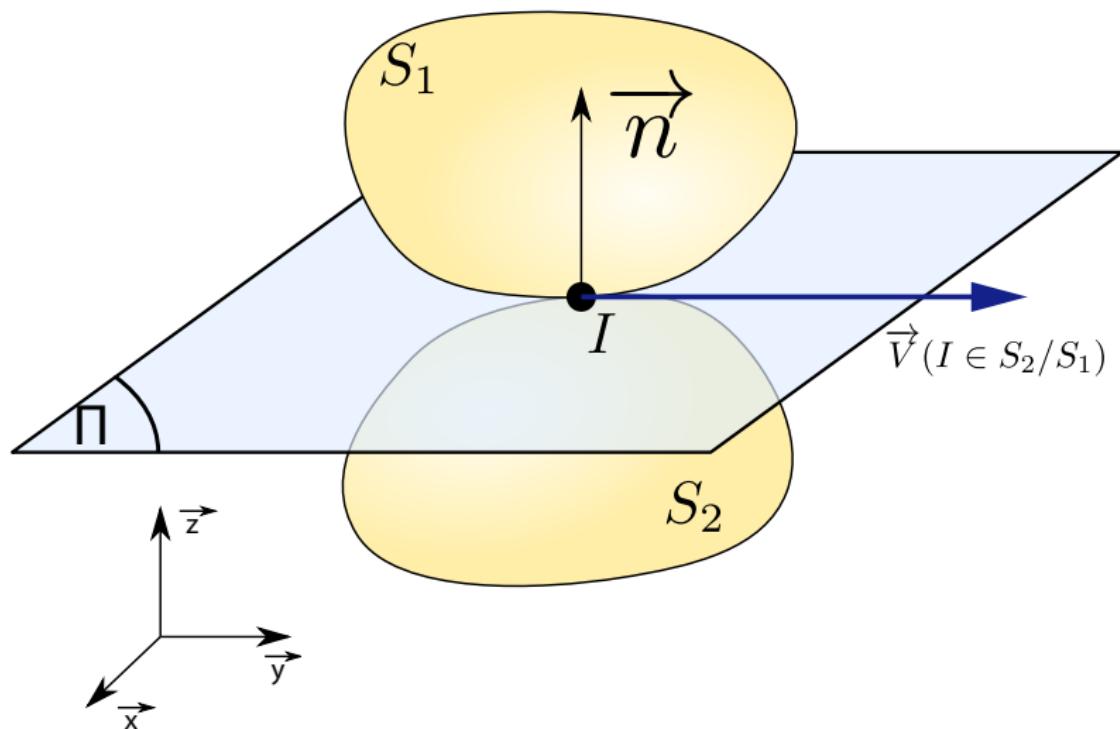
- Contact entre les solides
- Degrés de liberté

## 3 Modélisation des liaisons entre solides

- Liaisons normalisées
- Tableau des liaisons des liaisons cinématiques normalisées



## Cinématique du solide : cinématique du contact





## Cinématique du solide : cinématique du contact

### Vitesse de glissement/Roulement sans glissement

- On appelle **vitesse de glissement** au point  $I$ , de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  le vecteur vitesse du point  $I$  dans le mouvement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  :

$$\overrightarrow{V}(I \in S_2/S_1). \quad (1)$$

- On dit qu'il y a **roulement sans glissement** au point  $I$  si :

$$\overrightarrow{V}_{(I \in S_2/S_1)} = \overrightarrow{0} \quad (2)$$

Dans ce cas, on dit que  $S_2$  "*roule sans glisser*" sur  $S_1$ .

- $\overrightarrow{V}_{(I \in S_2/S_1)}$  est contenu dans le plan  $\Pi$  (sinon il y aura inter-pénétration des deux solides, ou décollement du contact)
- Décomposition :

$$\overrightarrow{V}_{(I \in S_2/S_1)} = \overrightarrow{V}_{(I \in S_2/R_0)} - \overrightarrow{V}_{(I \in S_1/R_0)}$$



## Cinématique du solide : cinématique du contact

### Vitesse de glissement/Roulement sans glissement

- On appelle **vitesse de glissement** au point  $I$ , de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  le vecteur vitesse du point  $I$  dans le mouvement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  :

$$\overrightarrow{V}(I \in S_2/S_1). \quad (1)$$

- On dit qu'il y a **roulement sans glissement** au point  $I$  si :

$$\overrightarrow{V}_{(I \in S_2/S_1)} = \overrightarrow{0} \quad (2)$$

Dans ce cas, on dit que  $S_2$  “roule sans glisser” sur  $S_1$ .

- $\overrightarrow{V}_{(I \in S_2/S_1)}$  est contenu dans le plan  $\Pi$  (sinon il y aura inter-pénétration des deux solides, ou décollement du contact)
- Décomposition :

$$\overrightarrow{V}_{(I \in S_2/S_1)} = \overrightarrow{V}_{(I \in S_2/R_0)} - \overrightarrow{V}_{(I \in S_1/R_0)}$$



## Cinématique du solide : cinématique du contact

### Vitesse de glissement/Roulement sans glissement

- On appelle **vitesse de glissement** au point  $I$ , de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  le vecteur vitesse du point  $I$  dans le mouvement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  :

$$\overrightarrow{V}(I \in S_2/S_1). \quad (1)$$

- On dit qu'il y a **roulement sans glissement** au point  $I$  si :

$$\overrightarrow{V}_{(I \in S_2/S_1)} = \overrightarrow{0} \quad (2)$$

Dans ce cas, on dit que  $S_2$  “roule sans glisser” sur  $S_1$ .

- $\overrightarrow{V}_{(I \in S_2/S_1)}$  est contenu dans le plan  $\Pi$  (sinon il y aura inter-pénétration des deux solides, ou décollement du contact)
- Décomposition :

$$\overrightarrow{V}_{(I \in S_2/S_1)} = \overrightarrow{V}_{(I \in S_2/R_0)} - \overrightarrow{V}_{(I \in S_1/R_0)}$$



## Cinématique du solide : cinématique du contact

### Vitesse de glissement/Roulement sans glissement

- On appelle **vitesse de glissement** au point  $I$ , de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  le vecteur vitesse du point  $I$  dans le mouvement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  :

$$\overrightarrow{V}(I \in S_2/S_1). \quad (1)$$

- On dit qu'il y a **roulement sans glissement** au point  $I$  si :

$$\overrightarrow{V}_{(I \in S_2/S_1)} = \overrightarrow{0} \quad (2)$$

Dans ce cas, on dit que  $S_2$  “roule sans glisser” sur  $S_1$ .

- $\overrightarrow{V}_{(I \in S_2/S_1)}$  est contenu dans le plan  $\Pi$  (sinon il y aura inter-pénétration des deux solides, ou décollement du contact)
- Décomposition :**

$$\overrightarrow{V}_{(I \in S_2/S_1)} = \overrightarrow{V}_{(I \in S_2/R_0)} - \overrightarrow{V}_{(I \in S_1/R_0)}$$

## Cinématique du solide : cinématique du contact

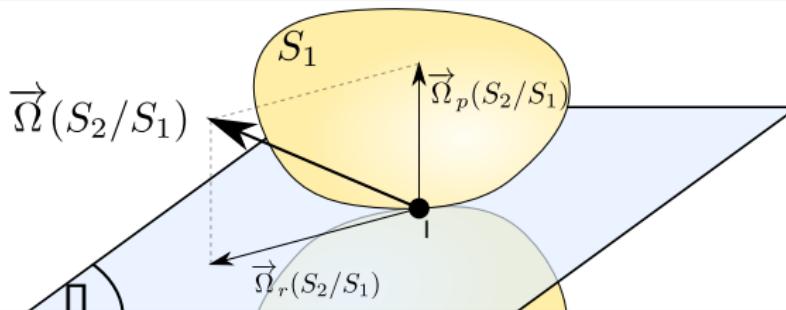
### Vitesse de roulement / Vitesse de pivotement

On peut décomposer  $\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}}$  en la somme de deux vecteurs  $\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}}$  et  $\overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}$  :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}} = \overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}} + \overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}} \quad (3)$$

où :

- $\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}}$  est le vecteur vitesse de rotation de roulement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$ . Il est contenu dans le plan  $\Pi$ .
- $\overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}$  est le vecteur vitesse de rotation de pivotement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$ . Il est normal au plan  $\Pi$ .



## Cinématique du solide : cinématique du contact

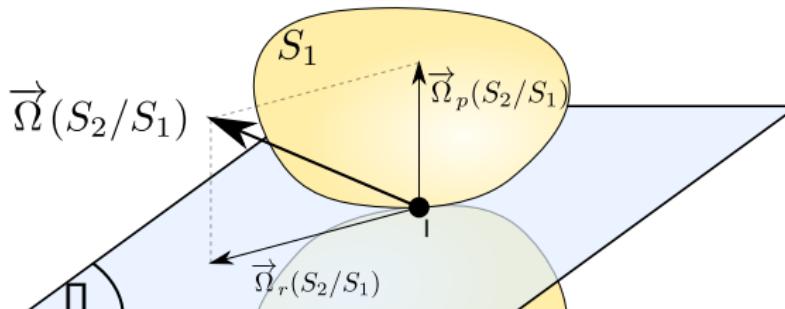
### Vitesse de roulement / Vitesse de pivotement

On peut décomposer  $\overrightarrow{\Omega}_{(S_2/S_1)}$  en la somme de deux vecteurs  $\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}}$  et  $\overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}$  :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}_{(S_2/S_1)} = \overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}} + \overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}} \quad (3)$$

où :

- $\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}}$  est le **vecteur vitesse de rotation de roulement** de  $S_2$  par rapport à  $S_1$ . Il est contenu dans le plan  $\Pi$ .
- $\overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}$  est le **vecteur vitesse de rotation de pivotement** de  $S_2$  par rapport à  $S_1$ . Il est normal au plan  $\Pi$ .



## Cinématique du solide : cinématique du contact

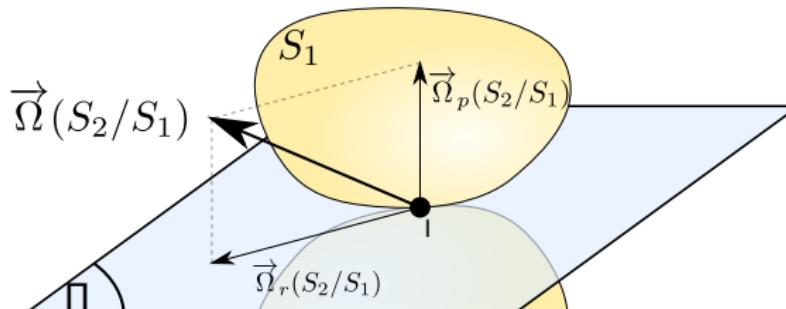
### Vitesse de roulement / Vitesse de pivotement

On peut décomposer  $\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}}$  en la somme de deux vecteurs  $\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}}$  et  $\overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}$  :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}} = \overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}} + \overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}} \quad (3)$$

où :

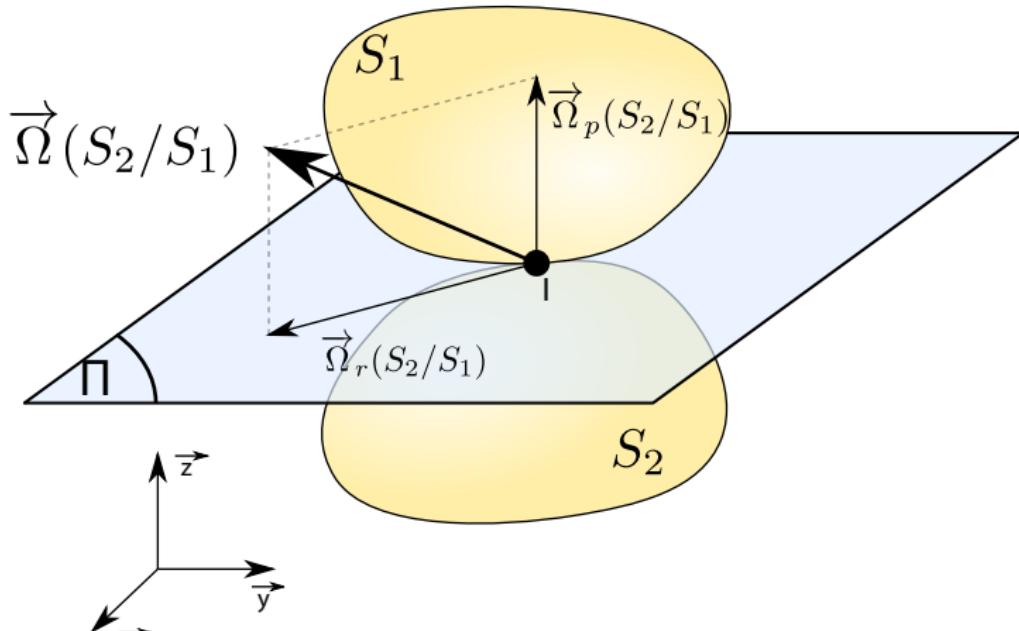
- $\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}}$  est le **vecteur vitesse de rotation de roulement** de  $S_2$  par rapport à  $S_1$ . Il est contenu dans le plan  $\Pi$ .
- $\overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}}$  est le **vecteur vitesse de rotation de pivotement** de  $S_2$  par rapport à  $S_1$ . Il est normal au plan  $\Pi$

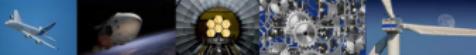


## Cinématique du solide : cinématique du contact

$$\overrightarrow{\Omega_{P(S_2/S_1)}} = \left( \overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}} \cdot \overrightarrow{n} \right) \overrightarrow{n} \quad (4)$$

$$\overrightarrow{\Omega_{r(S_2/S_1)}} = \overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}} - \overrightarrow{\Omega_{p(S_2/S_1)}} \quad (5)$$





# Plan

## 1 Modélisation des contacts entre solides

- Paramétrage
- Vitesse de glissement/ Roulement sans glissement
- Vitesse de roulement/Vitesse de pivotement

## 2 Modélisation des liaisons mécaniques

- Contact entre les solides
- Degrés de liberté

## 3 Modélisation des liaisons entre solides

- Liaisons normalisées
- Tableau des liaisons des liaisons cinématiques normalisées



## Modélisation des liaisons entre solides

### Définition

- Un **système mécanique** est composé de plusieurs solides qui sont liés entre eux par **des liaisons mécaniques**.
- Une **liaison mécanique** résulte d'un **contact** entre deux solides.
- Dans la réalité tout contact est surfacique mais suivant les dimensions de certaines zones de contact, on peut idéaliser le contact comme étant parfois ponctuel ou linéaire.
- La **nature des surfaces** de contact va engendrer des mouvements relatifs autorisés entre les deux solides.

## Modélisation des liaisons entre solides

### Degré de liberté

Les mouvements relatifs autorisés entre deux solides liés par une liaison mécanique sont les **degrés de liberté**. Dans l'espace (3D), on considère 6 degrés de liberté élémentaires (3 translations et 3 rotations) que l'on donne par rapport à un repère  $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ .

- rotations respectivement autour de  $(O, \vec{x})$ ,  $(O, \vec{y})$  et  $(O, \vec{z})$  :  $R_x$ ,  $R_y$  et  $R_z$ ,
- translations respectivement suivant  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  :  $T_x$ ,  $T_y$  et  $T_z$ .

Les degrés de liberté autorisés par une liaison dépendent des surfaces de contact entre les solides.





# Plan

## 1 Modélisation des contacts entre solides

- Paramétrage
- Vitesse de glissement/ Roulement sans glissement
- Vitesse de roulement/Vitesse de pivotement

## 2 Modélisation des liaisons mécaniques

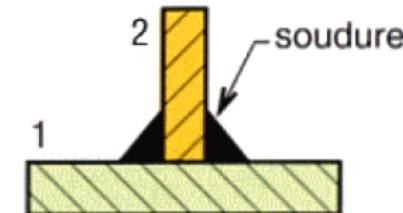
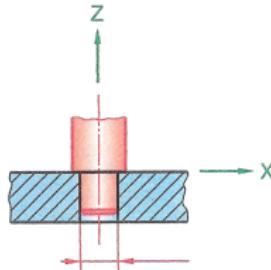
- Contact entre les solides
- Degrés de liberté

## 3 Modélisation des liaisons entre solides

- Liaisons normalisées
- Tableau des liaisons des liaisons cinématiques normalisées

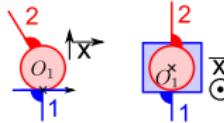
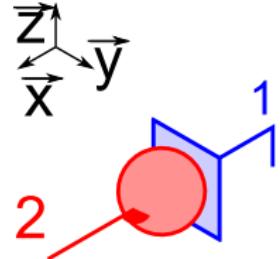
## Modélisation des liaisons entre solides : liaisons normalisées

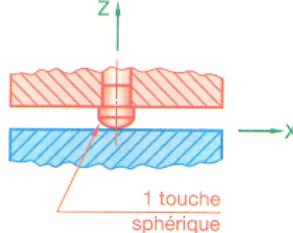
Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
Liaison Encastrement		
0 degré de liberté		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• 0 rotation</li> <li>• 0 translation</li> </ul>		





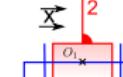
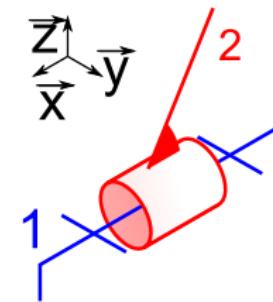
## Modélisation des liaisons entre solides : liaisons normalisées

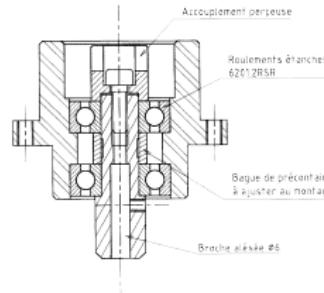
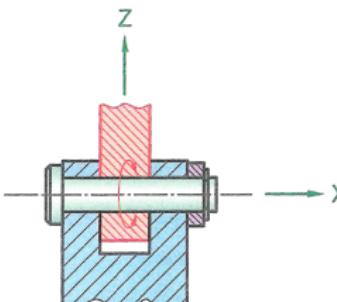
Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
Liaison sphère-plan de centre $O_1$ , de normale $\vec{x}$		
5 degrés de liberté		
<ul style="list-style-type: none"><li>• 3 rotations : <math>R_x, R_y, R_z</math></li><li>• 2 translations : <math>T_y, T_z</math></li></ul>		



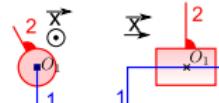
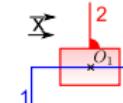
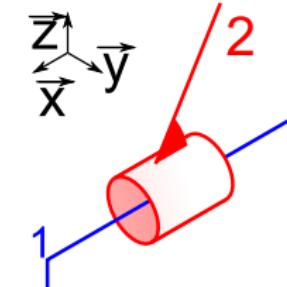


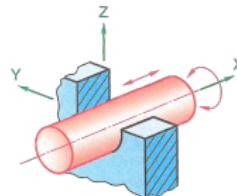
## Modélisation des liaisons entre solides : liaisons normalisées

Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
Liaison pivot d'axe ( $O_1, \vec{x}$ )	 	
1 degré de liberté		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• 1 rotation : <math>R_x</math></li> <li>• 0 translation</li> </ul>		



## Modélisation des liaisons entre solides : liaisons normalisées

Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
Liaison pivot-glissant d'axe ( $O_1, \vec{x}$ )	 	
2 degrés de liberté		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• 1 rotation : <math>R_x</math></li> <li>• 1 translation : <math>T_x</math></li> </ul>		





## Modélisation des liaisons entre solides : liaisons normalisées

### Attention

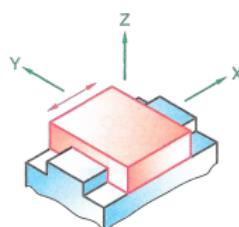
Un arbre de diamètre  $D$  dans un alésage de longueur  $L$  pourra être modélisé avec une **liaison pivot-glissant si le guidage est long** (c'est à dire si  $L$  est suffisamment grand par rapport à  $D$ ). Généralement, on considère que c'est le cas si :

$$\frac{L}{D} \geq 1,5$$

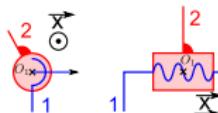
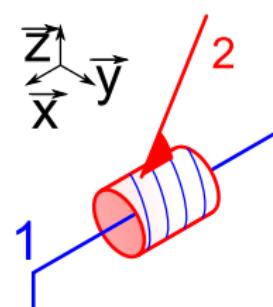
Dans le cas contraire, elle sera assimilée à une liaison **sphère-cylindre**.

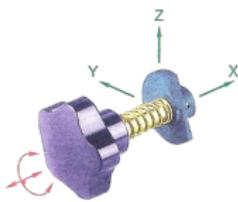
## Modélisation des liaisons entre solides : liaisons normalisées

Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
Liaison glissière d'axe $\vec{x}$		
1 degré de liberté		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• 0 rotation :</li> <li>• 1 translation : <math>T_x</math></li> </ul>		



## Modélisation des liaisons entre solides : liaisons normalisées

Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
Liaison hélicoïdale d'axe ( $O_1, \vec{x}$ )		
1 degré de liberté		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• 1 rotation <math>R_x</math> + 1 translation <math>T_x</math> couplée</li> </ul>		



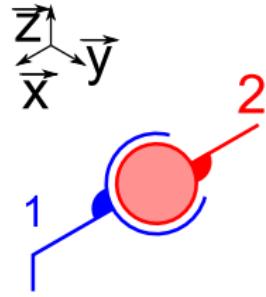
## Modélisation des liaisons entre solides : liaisons normalisées

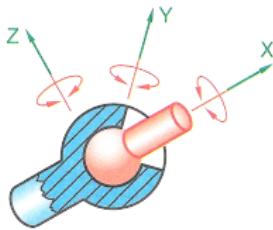
Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
Liaison hélicoïdale d'axe ( $O_1, \vec{x}$ )		
1 degré de liberté		
• 1 rotation $R_x$ + 1 translation $T_x$ couplée		

### Definition

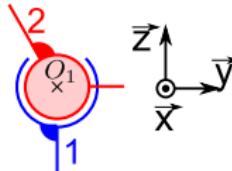
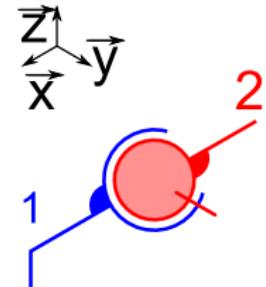
On appelle le **pas de la liaison hélicoïdal** le rapport entre la translation et la rotation :  
 $p = 2 \pi \frac{T_x}{R_x}$

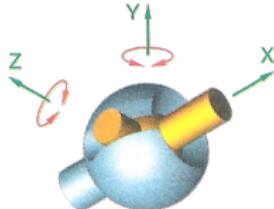
## Modélisation des liaisons entre solides : liaisons normalisées

Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
Liaison sphérique de centre $O_1$		
3 degrés de liberté		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• 3 rotations : <math>R_x, R_y, R_z</math></li> <li>• 0 translation</li> </ul>		



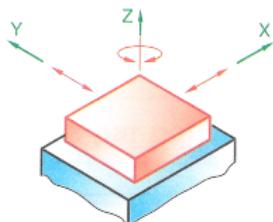
## Modélisation des liaisons entre solides : liaisons normalisées

Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
Liaison sphérique à doigt de centre $O_1$ et d'axe bloqué $\vec{z}$		
2 degrés de liberté		
<ul style="list-style-type: none"><li>• 2 rotations : <math>R_x, R_y</math></li><li>• 0 translation</li></ul>		



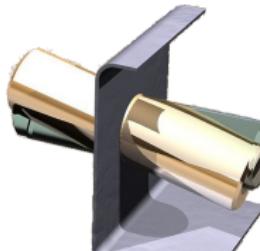
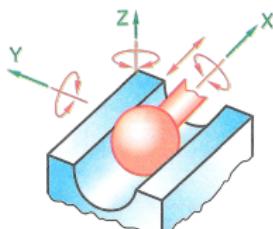
## Modélisation des liaisons entre solides : liaisons normalisées

Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
Liaison plan-plan de normale $\vec{x}$		
3 degrés de liberté		
<ul style="list-style-type: none"><li>• 1 rotation : <math>R_x</math></li><li>• 2 translations : <math>T_y, T_z</math></li></ul>		



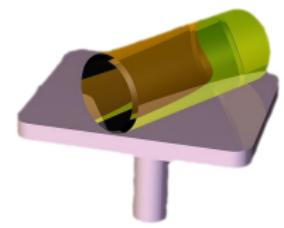
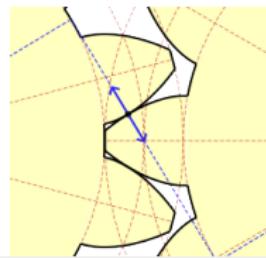
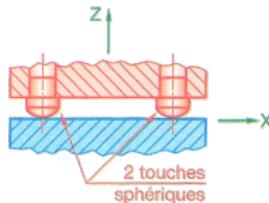
## Modélisation des liaisons entre solides : liaisons normalisées

Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
Liaison sphère-cylindre d'axe ( $O_1, \vec{x}$ )		
4 degrés de liberté		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• 3 rotations : <math>R_x, R_y, R_z</math></li> <li>• 1 translation : <math>T_x</math></li> </ul>		



## Modélisation des liaisons entre solides : liaisons normalisées

Exemple de désignation	Symbole normalisé	
	Représentation plane	Perspective
Liaison cylindre sur plan d'axe $(O_1, \vec{x})$ , de normale $\vec{z}$		
4 degrés de liberté		
<ul style="list-style-type: none"> <li>• 2 rotations : <math>R_x, R_z</math></li> <li>• 2 translations : <math>T_x, T_y</math></li> </ul>		





## Modélisation des liaisons entre solides : liaisons normalisées

### Torseur cinématique du mouvement relatif entre deux solides

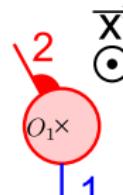
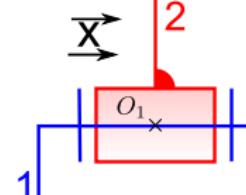
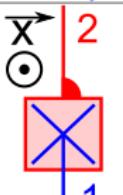
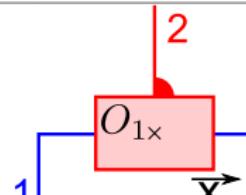
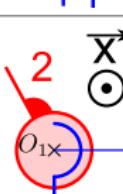
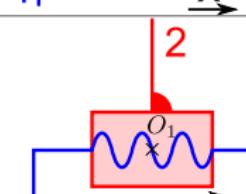
On caractérise le mouvement relatif du solide  $S_2$  par rapport au solide  $S_1$  par le torseur cinématique qu'on exprimera en un point  $P$  :

$$\left\{ \mathcal{V}_{(S_2/S_1)} \right\} = \underset{O_1}{\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}} \\ \overrightarrow{V_{(O_1 \in S_2/S_1)}} \end{array} \right\}} = \underset{O_1}{\left\{ \begin{array}{cc} p_{21} & u_{21} \\ q_{21} & v_{21} \\ r_{21} & w_{21} \end{array} \right\}}_R \quad (6)$$

- $R(O_1, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1}) = R_1(O_1, \vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$ , le repère lié à  $S_1$
- $p_{21}$ ,  $q_{21}$  et  $r_{21}$  sont les composantes du vecteur rotation instantané  $\overrightarrow{\Omega_{(S_2/S_1)}}$  dans le repère  $R$ .
- $u_{21}$ ,  $v_{21}$  et  $w_{21}$  sont les composantes du vecteur vitesse  $\overrightarrow{V_{(O_1 \in S_2/S_1)}}$  dans le repère  $R$ .

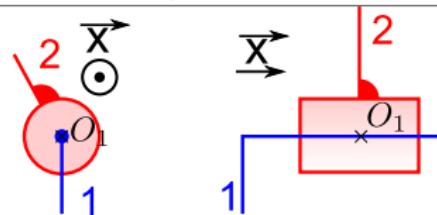
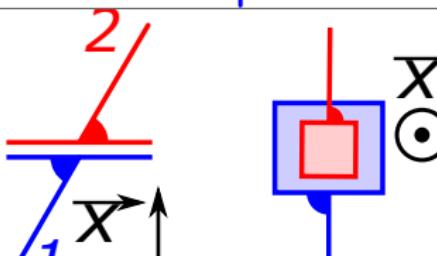


## Tableau des liaisons cinématiques normalisées

Nom	Représentation	Torseur cinématique
Liaisons pivot d'axe ( $\Delta$ ) = $(O_1, \vec{x})$	 	$\left\{ \gamma_{(2/1)} \right\} = \begin{cases} p_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{cases}_R$ $\forall P \in (\Delta)$
Liaisons glissière de direction $\vec{x}$	 	$\left\{ \gamma_{(2/1)} \right\} = \begin{cases} 0 & u_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{cases}_R$ $\forall P \in (\Delta)$
Liaisons hélicoïdale d'axe ( $\Delta$ ) = $(O_1, \vec{x})$ et de pas $p$	 	$\left\{ \gamma_{(2/1)} \right\} = \begin{cases} p_{21} & u_{21} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{cases}_R$ $\forall P \in (\Delta)$ $u_{21} = +\frac{p}{2\pi} p_{21}$



## Tableau des liaisons cinématiques normalisées

Nom	Représentation	Torseur cinématique
Liaison pivot glissant d'axe $(\Delta) = (O_1, \vec{x})$		$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{(2/1)} \\ p_{21} \quad u_{21} \\ 0 \quad 0 \\ 0 \quad 0 \end{array} \right\}_R$ $P \in (\Delta)$
Liaison sphérique de centre $O_1$		$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{(2/1)} \\ p_{21} \quad 0 \\ q_{21} \quad 0 \\ r_{21} \quad 0 \end{array} \right\}_R$ $O_1$
Liaison plane de normale $\vec{x}$		$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{(2/1)} \\ p_{21} \quad 0 \\ 0 \quad v_{21} \\ 0 \quad w_{21} \end{array} \right\}_R$ $\forall P$



## Tableau des liaisons cinématiques normalisées

Nom	Représentation	Torseur cinématique
Liaison sphérique à doigt de centre $O_1$ , d'axe bloqué $\vec{z}$		$O_1 \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_{(2/1)} \\ p_{21} \quad 0 \\ q_{21} \quad 0 \\ 0 \quad 0 \end{array} \right\}_R$
Liaison sphère-cylindre d'axe $(O_1, \vec{x})$		$O_1 \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_{(2/1)} \\ p_{21} \quad u_{21} \\ q_{21} \quad 0 \\ r_{21} \quad 0 \end{array} \right\}_R$
Cylindre-plan de normale $\vec{z}$ d'axe $(O_1, \vec{x})$ et de plan normal $\Pi = (O_1, \vec{z}, \vec{x})$		$\forall P \in \Pi \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_{(2/1)} \\ p_{21} \quad u_{21} \\ 0 \quad v_{21} \\ r_{21} \quad 0 \end{array} \right\}_R$

## Tableau des liaisons cinématiques normalisées

Nom	Représentation	Torseur cinématique
Liaison sphère-plan de normale $(\Delta) = (O_1, \vec{x})$		$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_{(2/1)} \\ \hline p_{21} & 0 \\ q_{21} & v_{21} \\ r_{21} & w_{21} \end{array} \right\}_R$ $\forall P \in (\Delta)$
Liaison encastrement		$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{V}_{(2/1)} \\ \hline 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_R$