Lycée La Martinière Monplaisir Lyon
Sciences Industrielles pour l'Ingénieur
Classe préparatoire M.P.S.I.
Année 2018 - 2019

C4 : Modélisation cinématiques des systèmes composés de chaines de solides

C4-3 - Cinématique du point

11 Décembre 2018

Table des matières

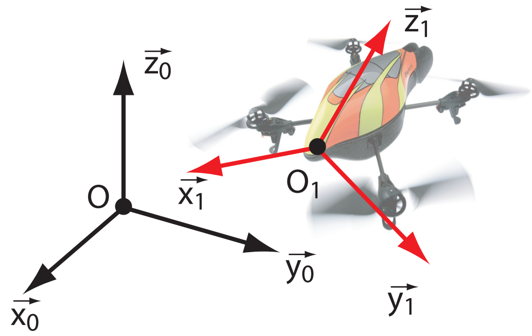
Compétences

- **Analyser :** Apprécier la pertinence et la validité des résultats :
  - unités du système international;
  - homogénéité des grandeurs.
- **Modéliser :** Proposer un modèle de connaissance et de comportement :
  - Solide indéformable;
  - référentiel, repère;
  - équivalence solide/référentiel;
  - vecteur-vitesse angulaire de deux référentiels en mouvement l'un par rapport à l'autre";
- **Résoudre :** Procéder à la mise en oeuvre d'une démarche de résolution analytique
  - dérivée temporelle d'un vecteur par rapport à un référentiel;
  - relation entre les dérivées temporelles d'un vecteur par rapport à deux référentiels distincts;
  - composition des vitesses angulaires;
  - composition des vitesses;

I. Grandeurs de base liées à la cinématique du point

1 Introduction

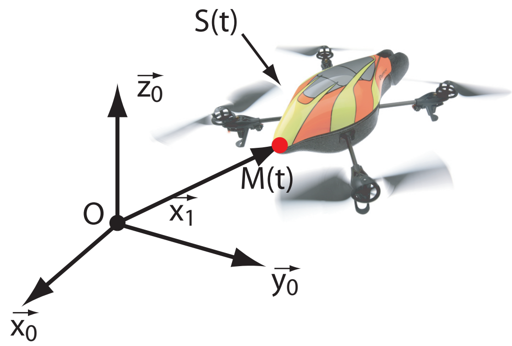
Ce chapitre présente les bases de calculs liées à la cinématique du point. Nous pourrons alors utiliser ces notions pour étudier les mouvement relatifs de solides. On étudiera les mouvements par rapport à des **référentiels d'observation**. Nous pourrons exprimer les champs de vitesses dans des repères ou des bases qui pourrons être différents du référentiel d'observation. On les appellera **repère d'expression**.



2 Vecteur position d'un point d'un solide

Définition 1 : *Vecteur position*

Soit un solide S en mouvement par rapport à un repère $R_O\left(O,\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0}\right)$. On repère un point M(t) d'un solide à l'aide du vecteur position $\overrightarrow{OM(t)}$.



Remarque 1 :

Pour exprimer $\overrightarrow{OM(t)}$, on pourra utiliser le système de coordonnées le plus adapté (voir chapitre précédent) au problème en tenant compte de la nature du mouvement.

3 Vecteur vitesse d'un point du solide

Définition 2 : *Vecteur vitesse*

Le vecteur vitesse par rapport au repère R_0 du point $M(t)$ du solide S à l'instant t est la dérivée par rapport à t par rapport au repère R_0 (pour un observateur lié au repère R_0) du vecteur position $\overrightarrow{OM(t)}$ (O doit être fixe dans R_0) :

$$\boxed{\vec{V}\left(M/R_0\right) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt}\right]_{R_0}.} \qquad (1)$$

- Le vecteur vitesse a une direction tangente à la trajectoire.
- La norme du vecteur vitesse est homogène à une longueur divisée par un temps.

Attention :

Le vecteur vitesse est obtenu par dérivation vectorielle. La définition du repère par rapport auquel le vecteur position est dérivé est primordiale. Ce vecteur peut toutefois être exprimé dans n'importe quelle base. On préfèrera bien souvent représenter ce vecteur dans la base locale.

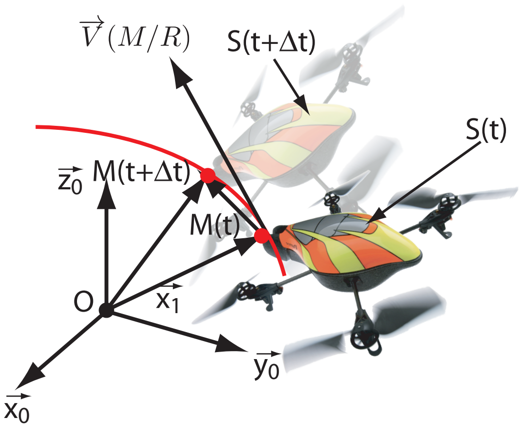
Remarque 2 : ***Interprétation graphique***

En reprenant la définition de la dérivée d'un vecteur, on écrit :

$$\overrightarrow{V}(M/R_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM(t+\Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)}}{\Delta t}.$$

où Δt représente un petit accroissement de la variable t. Or,

$$\overrightarrow{OM(t+\Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{M(t)M(t+\Delta t)}$$



La figure ci-contre est l'interprétation graphique de cette dernière équation. On remarque que lorsque $\Delta t \mapsto 0$, $\overrightarrow{V}(M/R_0) \mapsto \overrightarrow{M(t)M(t+\Delta t)}/\Delta t$

4 Vecteur accélération d'un point d'un solide

Définition 3 : ***Vecteur accélération***

Le vecteur accélération par rapport au repère R_0 du point $M(t)$ du solide S à l'instant t est la dérivée par rapport à t par rapport au repère R_0 (pour un observateur lié au repère R_0) du vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(M/R_0)$ ou la dérivée seconde par rapport à t par rapport au repère R_0 (pour un observateur lié au repère R_0) du vecteur position $\overrightarrow{OM(t)}$:

$$\boxed{\overrightarrow{a}(M/R_0) = \left[\frac{d\overrightarrow{V(M/R_0)}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d^2\overrightarrow{OM(t)}}{dt^2}\right]_{R_0}.} \tag{2}$$

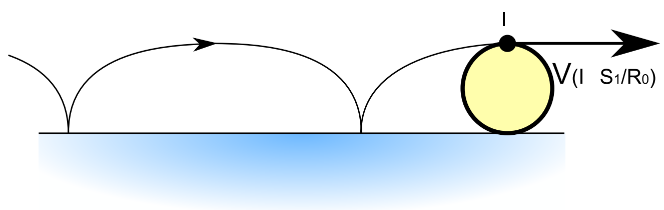
La norme du vecteur accélération est homogène à une longueur divisée par un temps au carré.

5 Trajectoire

Définition 4 : ***Trajectoire***

On définit la trajectoire (Δ) du point M dans le repère R_0 par l'ensemble des points I de R par lequel passe M au cours du temps.

$$(\Delta) = \{M_{(t)}, \forall t\}$$



Épicycloïde : trajectoire d'une roue qui roule sans glisser sur un plan.

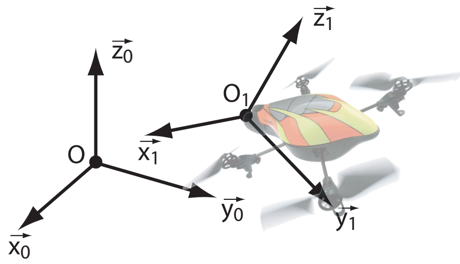
6 Vecteur de rotation instantané

Définition 5 : ***Vecteur de rotation instantané***

Soit le repère R_1 attaché à S, le **vecteur de rotation instantané** du repère R_1 par rapport à R_0(ou de S/R_0) mesure la vitesse angulaire de changement d'orientation du repère R_1 par rapport à R_0. On le note :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0).} \quad (3)$$

Sa norme est homogène à un angle divisé par une unité de temps donc à l'inverse d'un temps (une mesure d'angle est sans dimension).

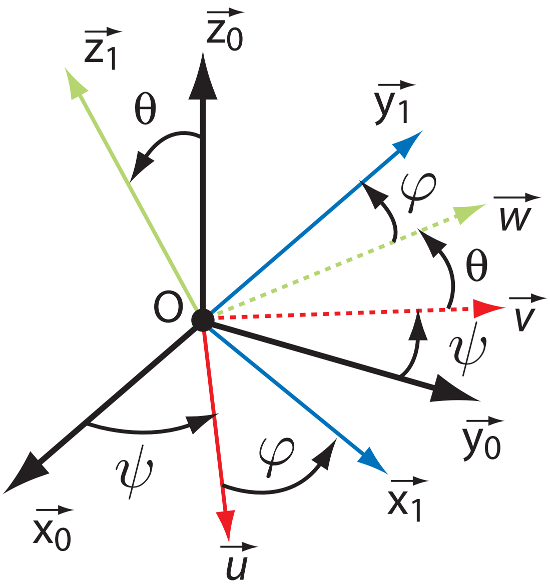


Propriété 1 :

Contrairement au vecteur vitesse, **le vecteur de rotation instantané est le même pour tous les points d'un même solide**. Il ne dépend pas du point considéré.

Exemple 1 :

Vecteur de rotation instantané de $R_1\left(O_1,\vec{x_1},\vec{y_1},\vec{z_1}\right)$ par rapport à $R_0\left(O_1,\vec{x_0},\vec{y_0},\vec{z_0}\right)$ en fonction des angles d'Euler.



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) &= \dot{\psi}\vec{z_0}+\dot{\theta}\vec{u}+\dot{\varphi}\vec{z_1}\\
&= \dot{\psi}\vec{z_0}+\dot{\theta}\left(\cos\left(\psi\right)\vec{x_0}+\sin\left(\psi\right)\vec{y_0}\right)+\dot{\varphi}\left(\cos\left(\theta\right)\vec{z_0}-\sin\left(\theta\right)\vec{v}\right)\\
&= \dot{\psi}\vec{z_0}+\dot{\theta}\left(\cos\left(\psi\right)\vec{x_0}+\sin\left(\psi\right)\vec{y_0}\right)+\dot{\varphi}\left(\cos\left(\theta\right)\vec{z_0}-\sin\left(\theta\right)\left(\cos\left(\psi\right)\vec{y_0}-\sin\left(\psi\right)\vec{x_0}\right)\right)\\
&= \begin{bmatrix} \dot{\varphi}\sin\left(\theta\right)\sin\left(\psi\right)+\dot{\theta}\cos\left(\psi\right)\\ -\dot{\varphi}\sin\left(\theta\right)\cos\left(\psi\right)+\dot{\theta}\sin\left(\psi\right)\\ \dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\left(\theta\right)\end{bmatrix}_{R_0}
\end{aligned}$$

II. Dérivation vectorielle

1 Vecteur exprimé dans la base de dérivation

La dérivation vectorielle consiste à dériver les coordonnées mais également les vecteurs unitaires d'une décomposition vectorielle.

On dérive le vecteur $\overrightarrow{U(t)}$ qui est exprimé dans la base de dérivation $R_0\left(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ par rapport au temps :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\left(x(t)\cdot\overrightarrow{x_0}+y(t)\cdot\overrightarrow{y_0}+z(t)\cdot\overrightarrow{z_0}\right)}{dt}\right]_{R_0}$$
$$= \frac{dx(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{x_0}+\frac{dy(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{y_0}+\frac{dz(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{z_0}+x(t)\cdot\left[\frac{d\overrightarrow{x_0}}{dt}\right]_{R_0}+y(t)\cdot\left[\frac{d\overrightarrow{y_0}}{dt}\right]_{R_0}+z(t)\cdot\left[\frac{d\overrightarrow{z_0}}{dt}\right]_{R_0}.$$

Or les vecteurs unitaires $\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{y_0}$ et$\overrightarrow{z_0}$ sont fixes dans le repère $R_0\left(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ donc par rapport au temps. On obtient alors :

$$\boxed{\left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt}\right]_{R} = \frac{dx(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{x_0}+\frac{dy(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{y_0}+\frac{dz(t)}{dt}\cdot\overrightarrow{z_0}.} \quad (4)$$

2 Vecteur exprimé dans une autre base

Dans le cas où le vecteur $\overrightarrow{U}$ est exprimé dans un autre repère (par exemple $R_1\left(O_1,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}\right)$) et que l'on souhaite dériver ce vecteur par rapport au repère $R_0\left(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$.

Définition 6 : ***Formule de dérivation vectorielle***

La formule de dérivation vectorielle s'écrit :

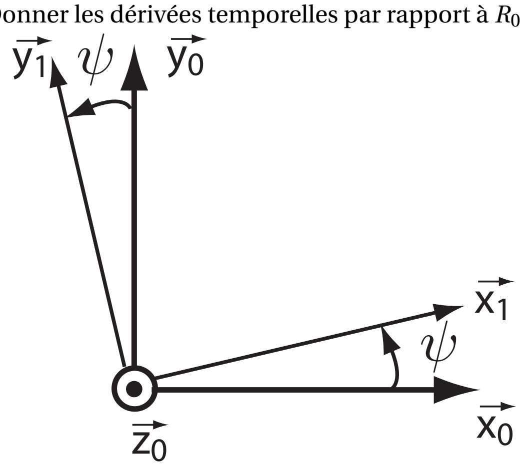
$$\boxed{\left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt}\right]_{R_1}+\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\overrightarrow{U(t)},} \quad (5)$$

où $\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0)$ est le vecteur de rotation instantané du repère R_1 par rapport au repère R_0.

Exemple 2 :

Cas particulier de la rotation de R_1 par rapport à R_0 autour d'un seul axe fixe $\overrightarrow{z_0}$ par rapport R_0 avec pour paramètre de rotation ψ.

Donner les dérivées temporelles par rapport à R_0 de $\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{y_1}$:



- $\left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right]_{R_0}$:
$$\left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{x_1}}{dt}\right]_{R_1}+\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\overrightarrow{x_1}$$
$$= \overrightarrow{0}+\dot{\psi}\,\overrightarrow{z_{0,1}}\wedge\overrightarrow{x_1}=\dot{\psi}\overrightarrow{y_1}$$
- $\left[\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt}\right]_{R_0}$:
$$\left[\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{y_1}}{dt}\right]_{R_1}+\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\overrightarrow{y_1}$$
$$= \overrightarrow{0}+\dot{\psi}\,\overrightarrow{z_{0,1}}\wedge\overrightarrow{y_1}=-\dot{\psi}\overrightarrow{x_1}$$

Remarque 3 :
On remarque que la dérivée d'un vecteur tournant autour d'un axe fixe par rapport au repère de dérivation, a pour norme, la vitesse angulaire et est dirigée par le vecteur directement orthogonal au vecteur initial.

III. Composition cinématique

1 Composition des vitesses

Soit un point M repéré par deux repères $R_0\left(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0}\right)$ et $R_1\left(O_1,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_1}\right)$. Les centres O et O_1 des repères R_0 et R_1 sont respectivement fixes par rapport à R_0 et R_1. On décompose ainsi le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ en passant par O_1 :

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1M}$$

On calcule alors la vitesse de M par rapport au repère R_0 à l'aide de la dérivée vectorielle du vecteur position :

$$\overrightarrow{V}(M/R_0)=\left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_{R_0}=\left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right]_{R_0}+\left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_0}.$$

Or,

$$\left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_0}=\left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_1}+\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\overrightarrow{O_1M}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V}(M/R_0)&=\left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right]_{R_0}+\left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_1}+\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\overrightarrow{O_1M}.\\&=\overrightarrow{V_e}(M,R_1/R_0)+\overrightarrow{V_r}(M/R_1).\end{aligned}$$

Où $\overrightarrow{V_e}(M/R_0)$ se définit comme la vitesse d'entrainement de M par rapport à R_0 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_e}(M,R_1/R_0)=\overrightarrow{V}(M\in R_1/R_0)&=\left[\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right]_{R_0}+\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\overrightarrow{O_1M}\\&=\overrightarrow{V}(O_1/R_0)+\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\overrightarrow{O_1M}=\overrightarrow{V}(M\in R_1/R_0)\end{aligned}$$

De plus $\overrightarrow{V_r}(M/R_1)$ se définit comme la vitesse relative de M par rapport au repère R_1 :

$$\overrightarrow{V_r}(M/R_1)=\left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_1}.$$

Définition 7 : *Composition des vitesses*
La formule de composition des vitesses s'écrit alors :

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/R_0)=\overrightarrow{V_r}(M/R_1)+\overrightarrow{V_e}(M,R_1/R_0)=\overrightarrow{V}(M/R_1)+\overrightarrow{V}(M\in R_1/R_0).}\qquad(6)$$

Remarque 4 : *Interprétation de la vitesse d'entrainement*
La vitesse d'entrainement $\overrightarrow{V}(M\in R_1/R_0)$ s'interprète comme la vitesse du point M appartenant à R_1 par rapport à R_0. C'est à dire comme si M était fixe dans R_1.

2 Composition des accélérations

Définition 8 : ***Composition des accélérations***

La formule de **composition des accélérations** s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{a}(M/R_0) = \overrightarrow{a}(M/R_1) + \overrightarrow{a}(M, R_1/R_0) + 2\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{V}(M/R_1)} \qquad (7)$$

L'accélération **absolue** $\overrightarrow{a}(M/R_0)$ se décompose ainsi en :

- une accélération **relative** : $\overrightarrow{a}(M/R_1)$,
- une accélération **d'entrainement** : $\overrightarrow{a}(M, R_1/R_0) = \left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0)\right)\right]_{R_0} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \left(\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)$,
- une accélération **complémentaire ou de Coriolis** : $2\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{V}(M/R_1)$.

3 Composition par relation de Chasles

Définition 9 : ***Composition par relation de Chasles***

Les champs cinématiques associés à la cinématique des solides sont décomposables à l'aide d'une "relation de Chasles" :

- Les vecteurs rotation instantanés :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}(S_n/S_0) = \overrightarrow{\Omega}(S_n/S_{n-1}) + \overrightarrow{\Omega}(S_{n-1}/S_{n-2}) \cdots \overrightarrow{\Omega}(1/0)} \qquad (8)$$

- les vecteurs vitesses d'entrainement en un même point A :

$$\boxed{\overrightarrow{V}(A \in S_n/S_0) = \overrightarrow{V}(A \in S_n/S_{n-1}) + \overrightarrow{V}(A \in S_{n-1}/S_{n-2}) \cdots \overrightarrow{V}(A \in 1/0)} \qquad (9)$$

Remarque 5 : ***Notion de torseur***

On verra dans le chapitre suivant que ces deux grandeurs seront modélisables dans un même outil : **Le Torseur Cinématique**.