Devoir à la maison n° 10

À rendre le 6 janvier

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles. Pour $u \in E$, et $n \in \mathbb{N}$, on notera $u(n)$ au lieu de u_n le terme d'indice n de la suite u.
Pour $u, v \in E$, on appelle *somme des suites u et v* la suite $u + v \in E$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u+v)(n) = u(n) + v(n).$$

On sait que la loi de composition interne $+$ sur E ainsi définie munit E d'une structure de groupe commutatif, d'élément nul égal à la suite constante nulle, notée 0.
Pour $u, v \in E$, on appelle *convolée de la suite u par la suite v*, la suite $u \star v \in E$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u \star v)(n) = \sum_{k=0}^{n} u(k)v(n-k).$$

La loi $\star$, nommée loi de *convolution*, est une loi de composition sur E.

1) **a)** Montrer que $\star$ est commutative et associative.
b) On note ε la suite réelle définie par $\varepsilon(0) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon(n) = 0$.
Établir que ε est l'élément neutre pour $\star$.
c) Montrer que $\star$ est distributive sur $+$.
d) Que dire de la structure $(E, +, \star)$? Dans toute la suite, on considère E muni de cette structure.

2) **a)** Soit $\rho \in \mathbb{R}$ et u la suite réelle définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $u(n) = \rho^n$.
Montrer que l'élément u est inversible et déterminer son inverse.
b) On note $F = \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.
Montrer que F est un sous-anneau de $(E, +, \star)$.
c) Soit $f : E \to E$ définie par : si $u \in E$, la suite $f(u) \in E$ est donnée par $\forall n \in \mathbb{N}$, $[f(u)](n) = (-1)^n u(n)$.
Montrer que f est un automorphisme de l'anneau $(E, +, \star)$, vérifiant $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.
(On dit que f est un *automorphisme involutif* de l'anneau $(E, +, \star)$.)

3) On se propose maintenant de déterminer les éléments inversibles de l'anneau $(E, +, \star)$.
a) Soit u un élément inversible de l'anneau $(E, +, \star)$. Montrer que $u(0) \neq 0$.
b) Inversement soit $u \in E$, tel que $u(0) \neq 0$. Montrer que u est inversible.

4) On se propose maintenant de justifier l'intégrité de l'anneau $(E, +, \star)$.
Soit $u, v \in E$ tels que $u \neq 0$ et $v \neq 0$.
On pose $p = \min \{n \in \mathbb{N} \mid u(n) \neq 0\}$ et $q = \min \{n \in \mathbb{N} \mid v(n) \neq 0\}$.
a) Justifier l'existence de p et q.
b) Montrer que $(u \star v)(p+q) \neq 0$.
c) Conclure.

— **FIN** —