Semaine 5 du 13 octobre 2025 (S42)

V : Nombres complexes.

1. L'inégalité triangulaire

2. Propriétés supplémentaires de l'exponentielle complexe et des arguments

3. Groupe $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

4. Équations du second degré

4.1. Calcul des racines carrées d'un complexe sous forme algébrique

4.2. Résolution des équations du second degré

5. Racines énièmes.

6. Techniques de calcul

6.1. Formules trigonométriques

6.2. Technique de l'angle moitié

6.3. Linéarisation

7. L'exponentielle complexe

8. Nombres complexes et géométrie plane

8.1. Colinéarité et orthogonalité

8.1a. Interprétation géométrique du rapport

8.2. Transformations usuelles

8.3. Similitudes et isométries

Le programme stipule que « l'étude générale des similitudes est hors programme ». Notamment, la classification des similitudes est hors programme.

Seule est au programme l'interprétation géométrique de la transformation $z \mapsto az + b$: les étudiants doivent savoir retrouver le rapport, l'angle et le centre de cette transformation.

Questions de cours

Ces questions de cours sont à savoir traiter, et non à apprendre par cœur.
Les colleurs sont libres de demander tout ou partie d'une de ces questions de cours, mais aussi de mélanger les différentes questions ou de donner des exemples numériques différents de ceux proposés.
L'évaluation de la maîtrise du cours ne se limite pas à la question de cours : la connaissance des définitions et théorèmes du cours pourra être évaluée à tout moment de la colle.

— Montrer que pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $|z+z'| \leqslant |z| + |z'|$. Dans quels cas y a-t-il égalité ?
— Énoncer les deux inégalités du théorème de l'inégalité triangulaire, et montrer qu'une des deux se déduit de l'autre.
— Énoncer et démontrer les formules d'Euler.
— Énoncer et démontrer la formule de Moivre.
— Trouver toutes les racines carrées de $5-12i$.
— Quelles sont les racines de az^2+bz+c, avec $a,b,c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, et que valent leur produit et leur somme ? Le démontrer.
— Déterminer les couples $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tels qua $ab = 2$ et $a+b = i$.
— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la définition de « racine n^{e} de l'unité » et déterminer l'ensemble des racines n^{es} de l'unité.
— Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, montrer que la somme des racines n^{e} de l'unité est nulle.
— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}^*$, que l'on écrit sous forme trigonométrique : $z = \rho \mathrm{e}^{i\theta}$. En utilisant les racines n^{es} de l'unité, déterminer l'ensemble des racines n^{es} de z.
— Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(4kx)$.
— Rappeler la définition de e^{z} où $z \in \mathbb{C}$.
Soit $t \in \mathbb{C}^*$, que l'on écrit sous forme trigonométrique $t = \varphi e^{i\theta}$.
Résoudre $\mathrm{e}^{z} = t$, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
— Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur d'affixe u, soit Ω un point du plan, d'affixe ω, soit $\theta \in \mathbb{R}$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Donner l'expression complexe de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, de la rotation de centre Ω et d'angle de mesure θ, de l'homothétie de centre Ω et de rapport λ, de la similitude directe de centre Ω, de rapport λ et d'angle de mesure θ, de la symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses, par rapport à l'axe des ordonnées.
— Soit A, B, C trois points distincts du plan, d'affixes respectives a, b, c. Donner une condition nécessaire et suffisante d'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, portant sur a, b, c.
Pour $a = 1$, $b = 2+i$ et $c = -1+2i$, est-ce que $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$?
— Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, soit $b \in \mathbb{C}$. Montrer que la similitude directe $z \mapsto az+b$ s'écrit comme la composée d'une homothétie par une rotation.
— Donner les éléments caractéristiques de l'application $z \mapsto (1+i)z+2$.