

## Devoir à la maison n° 12

À rendre le 27 janvier

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit le polynôme

$$S_n = 1 + \frac{X}{1!} + \cdots + \frac{X^n}{n!} = \sum_{i=0}^n \frac{X^i}{i!}.$$

L'objectif de ce problème est de montrer que, si  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2, alors les racines complexes du polynôme  $S_n$  ont un module strictement inférieur à  $n$ .

- 1) Soit  $p$  un entier naturel non nul. Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  des nombres complexes de module inférieur ou égal à 1. Soit  $\theta_1, \dots, \theta_p \in \mathbb{R}_+^*$ . On suppose que

$$\left| \sum_{i=1}^p \theta_i \alpha_i \right| = \sum_{i=1}^p \theta_i.$$

- a) Démontrer que  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  sont des nombres complexes de module exactement 1.  
b) On suppose dans cette question seulement  $p = 2$  et  $\alpha_1 = 1$ . Soit  $t$  un nombre réel tel que  $\alpha_2 = e^{it}$ . En développant  $|\theta_1 + \theta_2 e^{it}|^2$ , justifier que  $\alpha_2 = 1$ .  
c) Dans le cas général, démontrer que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p$ .
- 2) Soit  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$  de degré  $n \geq 2$ . On note  $a_0, \dots, a_n$  ses coefficients :

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

On suppose que  $a_0 = a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-1} > a_n > 0$ .

- a) Justifier que ni 0, ni 1, ne sont des racines de  $P$ .  
b) Déterminer les coefficients du polynôme  $(X - 1) \times P$ .  
c) Démontrer que les racines complexes de  $P$  ont un module strictement supérieur à 1.

*Indication : on pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question 1)c)*

- 3) Soit  $Q$  dans  $\mathbb{R}[X]$  de degré  $n \geq 2$ . Soient  $a_0, \dots, a_n$  ses coefficients :

$$Q = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

On suppose que  $0 < a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-2} < a_{n-1} = a_n$ . Justifier que les racines complexes de  $Q$  ont un module strictement inférieur à 1.

- 4) Conclure.

*Indication : on pourra considérer le polynôme  $T_n = S_n \circ (nX)$ .*

— FIN —