XI – Entiers relatifs et arithmétique de $\mathbb{Z}$.

1 Divisibilité.

1.1 Définition.

1.2 Division euclidienne.

2 PGCD, PPCM.

2.1 PGCD de deux entiers.

2.2 PGCD d'une famille finie d'entiers.

2.3 Nombres premiers entre eux.

2.4 PPCM.

3 Nombres premiers.

Questions de cours

Ces questions de cours sont à savoir traiter, et non à apprendre par cœur.
Les colleurs sont libres de demander tout ou partie d'une de ces questions de cours, mais aussi de mélanger les différentes questions ou de donner des exemples numériques différents de ceux proposés.
L'évaluation de la maîtrise du cours ne se limite pas à la question de cours : la connaissance des définitions et théorèmes du cours pourra être évaluée à tout moment de la colle.

- $|$ est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$? sur $\mathbb{Z}$? Le démontrer.
- Soit $(a,b,c,u,v) \in \mathbb{Z}^5$. Démontrer que si $a|b$ et $a|c$, alors $a|(bu+cv)$.
- Soient $a,b,n \in \mathbb{Z}$ tels que $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$. Que peut-on dire de $a+c$ et ac ? Le démontrer.
- Énoncer et démontrer le théorème de division euclidienne.
- Effectuer l'algorithme d'Euclide et trouver le PGCD de 1515 et de 987. Donner une relation de Bézout pour 1515 et 987.
- Énoncer le théorème de Bézout (les deux parties), puis montrer la seconde partie à partir de la première.
- Énoncer et démontrer le lemme de Gauss.
- Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $n\mathbb{Z}$ l'ensemble des multiples de n et $\mathscr{D}(n)$ l'ensemble des diviseurs de n.
  Soit $a,b \in \mathbb{Z}$ avec $(a,b) \neq (0,0)$. Exprimer $\mathscr{D}(a) \cap \mathscr{D}(b)$ ainsi que $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ en fonction de $a \wedge b$.
- Montrer que si a est premier avec b_1 et b_2 alors a est premier avec $b_1 b_2$.
- Soit $r \in \mathbb{Q}$, montrer qu'il existe un unique couple $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{p}{q}$ et $p \wedge q = 1$.
- Soient $a_1, \ldots, a_{p+1}$ $p+1$ entiers. Montrer que $a_1 \wedge \ldots \wedge a_p \wedge a_{p+1} = (a_1 \wedge \ldots \wedge a_p) \wedge a_{p+1}$.
- Soit $a,b \in \mathbb{Z}^*$. Que peut-on dire d'un multiple commun à a et b ? Quelle relation simple existe-t-il entre le PGCD et le PPCM de a et de b ?
- Calculer $12456 \vee 1424$.
- Énoncer le petit théorème de Fermat. Déterminer le reste de la division euclidienne de 42^{835720} par 37.
- Soit a un entier naturel non nul,donner la définition de la valuation p-adique de a pour p entier premier. Pour a et b deux entiers naturels non nuls, donner une condition nécessaire et suffisante sur les valuations p-adiques de a et b pour que a divise b.
- Donner une expression du PGCD et du PPCM de deux entiers à partir de leurs décompositions en produits de facteurs premiers (on pourra utiliser les valuations p-adiques).
  Appliquer cela à 756 et 600.