

Devoir surveillé n° 6
Version 1

Durée : 3 heures, calculatrices et documents interdits

I. Fonction argth et équation fonctionnelle.

Partie A : Étude de la fonction réciproque de la fonction th.

On notera respectivement ch, sh et th les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{et} \quad \text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

- 1) Justifier que th est une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle I de \mathbb{R} à préciser.
On note argth “ argument tangente hyperbolique ” sa réciproque.
- 2) Donner l'expression de la dérivée de th en fonction de th.
- 3) Démontrer que argth est impaire.
- 4) Démontrer que argth est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
- 5) Déterminer deux réels a et b tels que pour tout x de I , $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$.
- 6) Exprimer argth à l'aide de fonctions usuelles.

Partie B : Étude d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle (E) : $x y' + 3y = \frac{1}{1-x^2}$.

- 7) Résoudre (E) sur l'intervalle $J =]0, 1[$.

Partie C : Étude d'une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de résoudre le problème suivant :

déterminer les fonctions f définies sur \mathbb{R} , à valeurs réelles et dérivables en 0 qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}$$

- 8) Déterminer les fonctions constantes solutions du problème posé.
- 9) Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$ si f est solution.
- 10) Montrer que, si f est solution, on a $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq f(x) \leq 1$. (on pourra exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\frac{x}{2}\right)$.)
- 11) Montrer que si f est solution, $-f$ est aussi solution.

12) Montrer que th est solution du problème posé.

Dans les questions **13) à 17**), on suppose que **f est une solution du problème posé, que $f(0) = 1$ et que f n'est pas constante**.

On considère $x_0 \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) \neq f(0)$ et l'on définit la suite (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$.

13) Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

14) Établir une relation entre u_n et u_{n+1} ; en déduire que la suite (u_n) garde un signe constant, puis étudier sa monotonie suivant le signe de u_0 .

15) En utilisant les résultats des questions **13)** et **14)**, aboutir à une contradiction.

16) Que peut-on dire si l'hypothèse " $f(0) = 1$ " est remplacée par l'hypothèse " $f(0) = -1$ "?

17) Conclusion ?

Dans les questions **18) à 22**), on suppose que **f est une solution du problème posé et que $f(0) = 0$** .

18) En raisonnant par l'absurde et en considérant une suite du même type que celle des questions **13) à 17**), montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq 1 \quad \text{et} \quad f(x) \neq -1.$$

On définit alors la fonction g par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \text{argth}(f(x))$.

19) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(2x) = 2g(x)$.

20) Montrer que g est dérivable en zéro.

21) Soit $x \in \mathbb{R}^\times$; on définit la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}$.

Montrer que (v_n) est convergente et déterminer sa limite.

22) En déduire que g est linéaire.

23) Déterminer toutes les fonctions solutions du problème posé.

II. Suites et polynômes.

1) Soit $u = (u_n)_{n \geq 1}$ la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.

- a) En s'aidant des suites (u_{2n}) et (u_{2n-1}) , montrer que la suite u converge.
- b) Justifier que $\forall n \geq 1, u_n < 0$.

2) Soit un entier naturel $n \geq 2$, on introduit le polynôme

$$P_n = -1 + X + \frac{1}{2}X^2 + \cdots + \frac{1}{n}X^n = -1 + \sum_{k=1}^n \frac{X^k}{k}.$$

- a) Déterminer les racines du polynôme dérivé P'_n , en séparant, selon la parité de n , les racines réelles des racines complexes non réelles.
- b) Montrer que tout racine réelle de P_n est simple.
- 3) a) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, le polynôme P_n admet une unique racine (réelle !) dans l'intervalle $[0, +\infty[$. On note x_n cette racine : vérifier que $x_n \in [0, 1]$.
- b) Pour $n \geq 2$, déterminer le signe de $P_{n+1}(x_n)$. En déduire la monotonie de $(x_n)_{n \geq 2}$ puis sa convergence. On note ℓ la limite de $(x_n)_{n \geq 2}$.

4) On pose, pour $n \geq 2$,

$$G_n : \begin{cases} [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}; \\ x \mapsto -1 - \ln(1-x) - P_n(x). \end{cases}$$

- a) Calculer la valeur exacte de $C = x_2$ et comparer C et 1.

b) Calculer et simplifier G'_n .

c) En déduire que, pour tout $x \in [0, C]$ et pour tout $n \geq 2$, $|G'_n(x)| \leq \frac{C^n}{1-C}$.

Puis que $|G_n(x)| \leq |x| \frac{C^n}{1-C}$.

Indication : Inégalité des accroissements finis : Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$. Si $|f'|$ est bornée par K sur I , alors $\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$.

- 5) a) Justifier que, pour $n \geq 2$, $x_n \in [0, C]$.
- b) En déduire que, pour $n \geq 2$, $|1 + \ln(1-x_n)| \leq \frac{C^{n+1}}{1-C}$.
- c) Déterminer la valeur de ℓ .

— FIN —