



C7 : ANALYSE FRÉQUENTIELLE DES SYSTÈMES ASSERVIS

C7-3 - Analyse fréquentielle des systèmes asservis : applications

5 Avril 2022

Table des matières

I Combinaison des diagrammes de Bode élémentaires	2
1 Caractérisation d'une fonction de transfert complexe	2
2 Méthodologie de tracé des fonctions de transferts complexes	2
II Application à l'exemple de la suspension d'un véhicule	2
1 Décomposition de la fonction de transfert	3
2 Construction du diagramme de Bode de $H_1(j\omega)$	3
3 Calcul et classement des pulsations de cassure	4
4 Construction du diagramme de Bode complet	5
5 Caractérisation fréquentielle paramétrée de la suspension automobile	6
6 Interprétation temporelle d'une étude fréquentielle	6
III Autres types de lieux de transfert	10
1 Diagramme de Nyquist	10
2 Diagramme de Black	10
IV Conclusion	11

Compétences

- **Analyser**
 - Identifier la structure d'un système asservi.
 - Interpréter et vérifier la cohérence des résultats obtenus expérimentalement, analytiquement ou numériquement.
- **Modéliser**
 - Établir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert.
 - Modéliser le signal d'entrée.
 - Établir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle.
 - Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.
- **Résoudre**
 - Déterminer la réponse fréquentielle.
- **Communiquer**
 - Utiliser un vocabulaire technique, des symboles et des unités adéquats.

I. Combinaison des diagrammes de Bode élémentaires

1 Caractérisation d'une fonction de transfert complexe

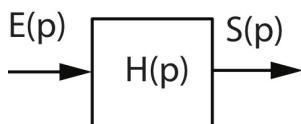


Définition 1 : Fonction de transfert complexe

On cherche à étudier dans le domaine fréquentiel un phénomène physique ou un composant. On considère alors la fonction de transfert reliant deux grandeurs physiques (d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$) qu'on pourra mettre dans la plupart des cas sous la forme :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K_S \prod_{k=1}^{n_3} (1 + \tau_k \cdot p) \cdot \prod_{l=1}^{n_4} \left(1 + \frac{2\xi_l}{\omega_{l0}} p + \frac{p^2}{\omega_{l0}^2} \right)}{p^\alpha \cdot \prod_{i=1}^{n_1} (1 + \tau_i \cdot p) \cdot \prod_{j=1}^{n_2} \left(1 + \frac{2\xi_j}{\omega_{j0}} p + \frac{p^2}{\omega_{j0}^2} \right)} \quad (1)$$

On remarque donc qu'on peut l'écrire qu'un produit de fonctions de transfert usuelles de type **intégrateur, premier ordre, et second ordre** qui résultera dans le plan de Bode à la somme de tracés élémentaires.



- K_S est le gain statique.
- α est la **classe** de la fonction transfert :
 - le nombre d'**intégrations** si $\alpha > 0$;
 - le nombre de **dérivations** si $\alpha < 0$.
- L'ordre de la fonction de transfert est donné par
 - $n = n_1 + 2 \cdot n_2 + \alpha$ si $\alpha > 0$;
 - $n = n_1 + 2 \cdot n_2$ si $\alpha < 0$;
- avec :
 - n_1 le nombre de fonction de transfert du **premier ordre**.
 - n_2 le nombre de fonction de transfert du **second ordre** à pôles complexes.

2 Méthodologie de tracé des fonctions de transferts complexes

1. Mise sous forme canonique de la fonction de transfert sous la forme donnée par l'équation 1;
2. identification de fonctions de transfert élémentaires : intégrateur, premier ordre, deuxième ordre;
3. calcul de toutes les pulsations caractéristiques (cassure ou coupure) ($\frac{1}{\tau_k}$, $\frac{1}{\tau_i}$, ω_{l0} et ω_{j0});
4. classement dans l'ordre croissant de toutes les pulsations caractéristiques;
5. construction d'un tableau permettant de caractériser les comportements asymptotiques de chaque fonction de transfert élémentaires.

II. Application à l'exemple de la suspension d'un véhicule

Reprendons l'exemple de la suspension du véhicule Clever. Nous rappelons la fonction de transfert du véhicule.

$$H(p) = \frac{k + c p}{k + c p + m p^2} = \frac{1 + \frac{c}{k} p}{1 + \frac{c}{k} p + \frac{m}{k} p^2}$$

En remplaçant p par $j\omega$, on obtient :

$$H(j\omega) = \frac{1 + \frac{c}{k} j\omega}{1 + \frac{c}{k} j\omega + \frac{m}{k} (j\omega)^2} = \frac{1 + j\tau\omega}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega + \frac{1}{\omega_0^2} (j\omega)^2}$$



1 Décomposition de la fonction de transfert

On remarque donc que cette fonction de transfert est le produit entre une fonction de transfert du premier et du second ordre :

$$H(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)$$

Avec,

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1(j\omega) = 1 + j\tau\omega \\ H_2(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega + \frac{1}{\omega_0^2} (j\omega)^2} \end{array} \right.$$

On prendra pour valeurs numériques :

- $\tau = 0,01 \text{ s}$;
- $\xi = 0,2$;
- $\omega_0 = 28,3 \text{ rad/s}$

2 Construction du diagramme de Bode de $H_1(j\omega)$

On pose :

$$H_1(j\omega) = 1 + \tau j\omega$$

On se propose de tracer le diagramme de Bode de $H_1(j\omega)$ avec $\tau = 0,01 \text{ s}$

Expression du gain :

On a donc deux branches asymptotiques :

- Un branche horizontale jusqu'à $\omega = \frac{1}{\tau}$.
- Un branche correspondant à une droite de pente $+20 \text{ dB/décade}$ et coupant l'axe des abscisses en $\omega = \frac{1}{\tau}$.

Expression de la phase :

On a donc deux branches asymptotiques :

- Un branche horizontale correspondant à $\varphi = 0^\circ$ pour $\omega < \frac{1}{\tau}$.
- Un branche horizontale correspondant à $\varphi = 90^\circ$ pour $\omega > \frac{1}{\tau}$.

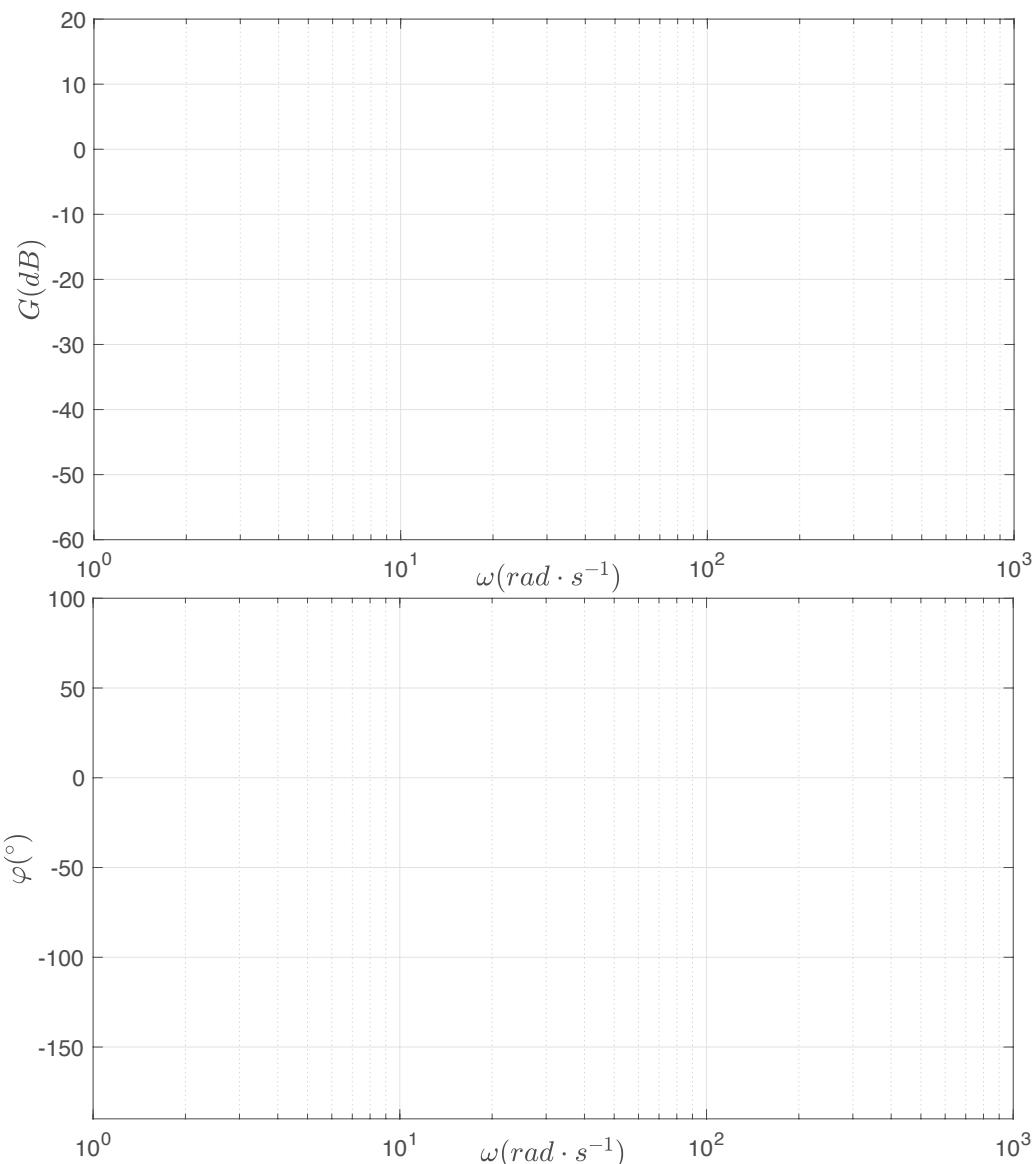


FIGURE 1 – Diagramme de Bode pour une fonction de transfert du premier ordre de $H_1(j\omega)$

3 Calcul et classement des pulsations de cassure

1. Expressions littérales des pulsations de cassure :

2. Applications numériques :

3. Classement des pulsations de cassure

4 Construction du diagramme de Bode complet

On va utiliser ici un tableau permettant de caractériser complètement le tracé asymptotique de $H(j\omega)$.

ω	$0 \rightarrow \omega_2$		ω_2	$\omega_2 \rightarrow \omega_1$		ω_1	$\omega_1 \rightarrow \infty$	
Tracé asymptotique	Gain (dB/dec)	$\varphi(^{\circ})$	Gain (dB)	Gain (dB/dec)	$\varphi(^{\circ})$	Gain (dB)	Gain (dB/dec)	$\varphi(^{\circ})$
$H_1(p)$								
$H_2(p)$								
$H(p)$								

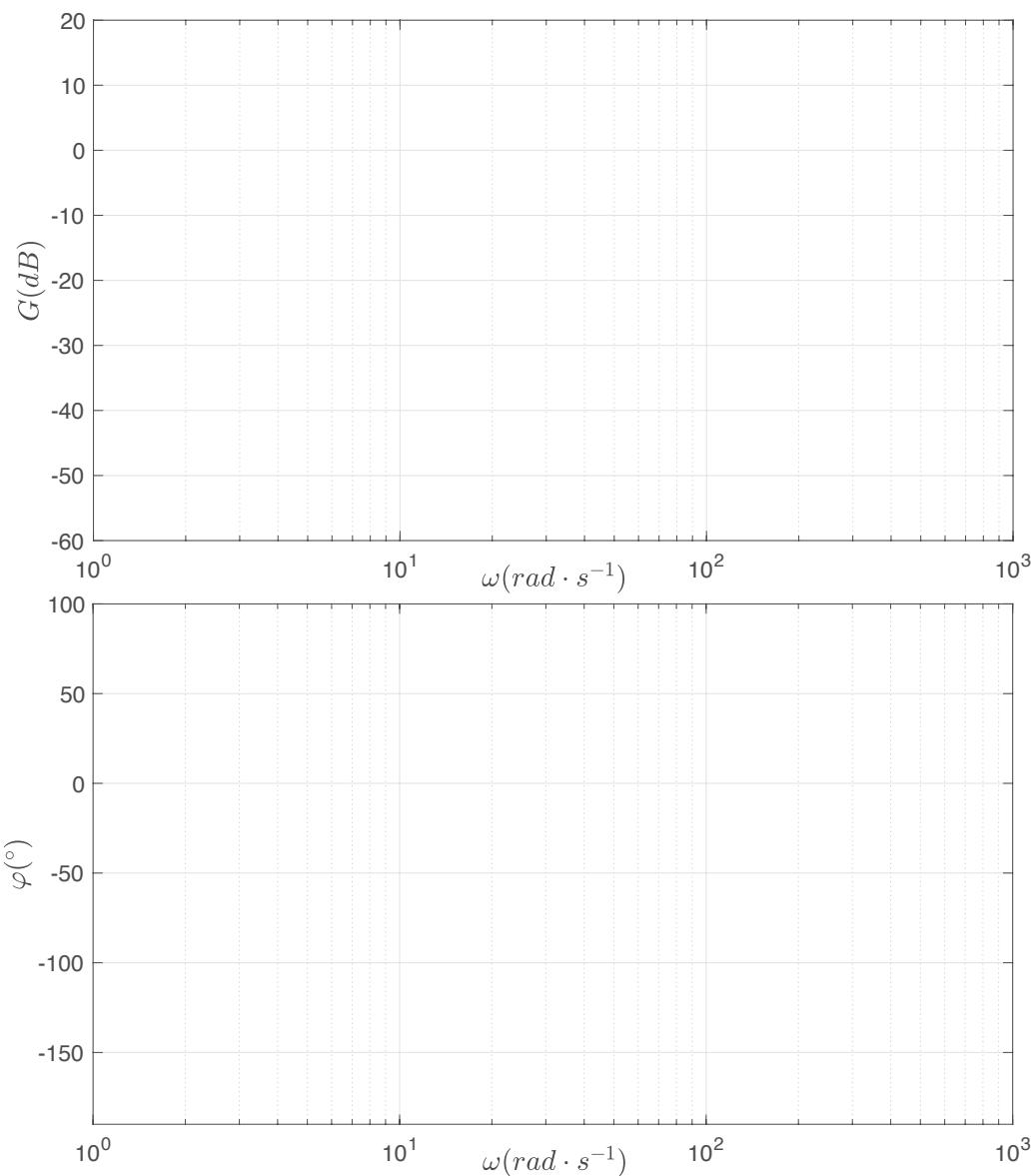


FIGURE 2 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert globale de la suspension d'un véhicule

5 Caractérisation fréquentielle paramétrée de la suspension automobile

On peut alors tracer pour différentes valeurs de ξ les différents diagrammes de Bode (figure 3 avec $\tau = 0,05\text{s}$).

- Pour des pulsations faibles ($\omega \rightarrow 0$) :
 - G_{dB} est proche de 0 c'est à dire que G est proche de 1 et donc que l'amplitude du signal de sortie est similaire à celle du signal d'entrée.
 - $\varphi \approx 0^\circ$ ainsi le retard est très faible : peu de déphasage entre l'entrée et la sortie.
- Pour des pulsations proche de la pulsation de coupure ($\omega \approx \omega_0 \approx \omega_r$) :
 - La résonance apparaît dès lors que $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$ à $\omega = \omega_r \approx \omega_0$.
 - Dans ce cas G_{dB} est grand donc G aussi et l'amplitude de sortie est fortement amplifiée par rapport à l'amplitude d'entrée.
 - Le déphasage est équivalent à -90° soit environ 1/4 de période.
- Pour des pulsations élevées ($\omega \rightarrow +\infty$) :
 - G_{dB} diminue fortement c'est à dire que G est très faible et donc que l'amplitude du signal de sortie est très amortie par rapport à celle du signal d'entrée.
 - $\varphi \approx -90^\circ$ ainsi le retard est de l'ordre d'un quart de période.

6 Interprétation temporelle d'une étude fréquentielle

On se place dans le cas de $\xi = 0,2$, $\tau = 0,05\text{s}$ et $\omega_0 = 28,3 \text{ rad/s}$. Les diagrammes de Bode sont donnés sur la figure 4.

On note bien ici l'existence d'une résonance lorsque $\omega = \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$.

On se place alors sur trois valeurs de ω pour étudier le signal temporel.

1. $\omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$,
2. $\omega = \omega_0 = 28,3 \text{ rad.s}^{-1}$,
3. $\omega = 100 \text{ rad.s}^{-1}$.

Grâce au diagramme de bode pour chacun de ces trois cas, on peut reconstituer le signal temporel de sortie avec $G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|)$ et $\varphi = \arg(H(j\omega))$.

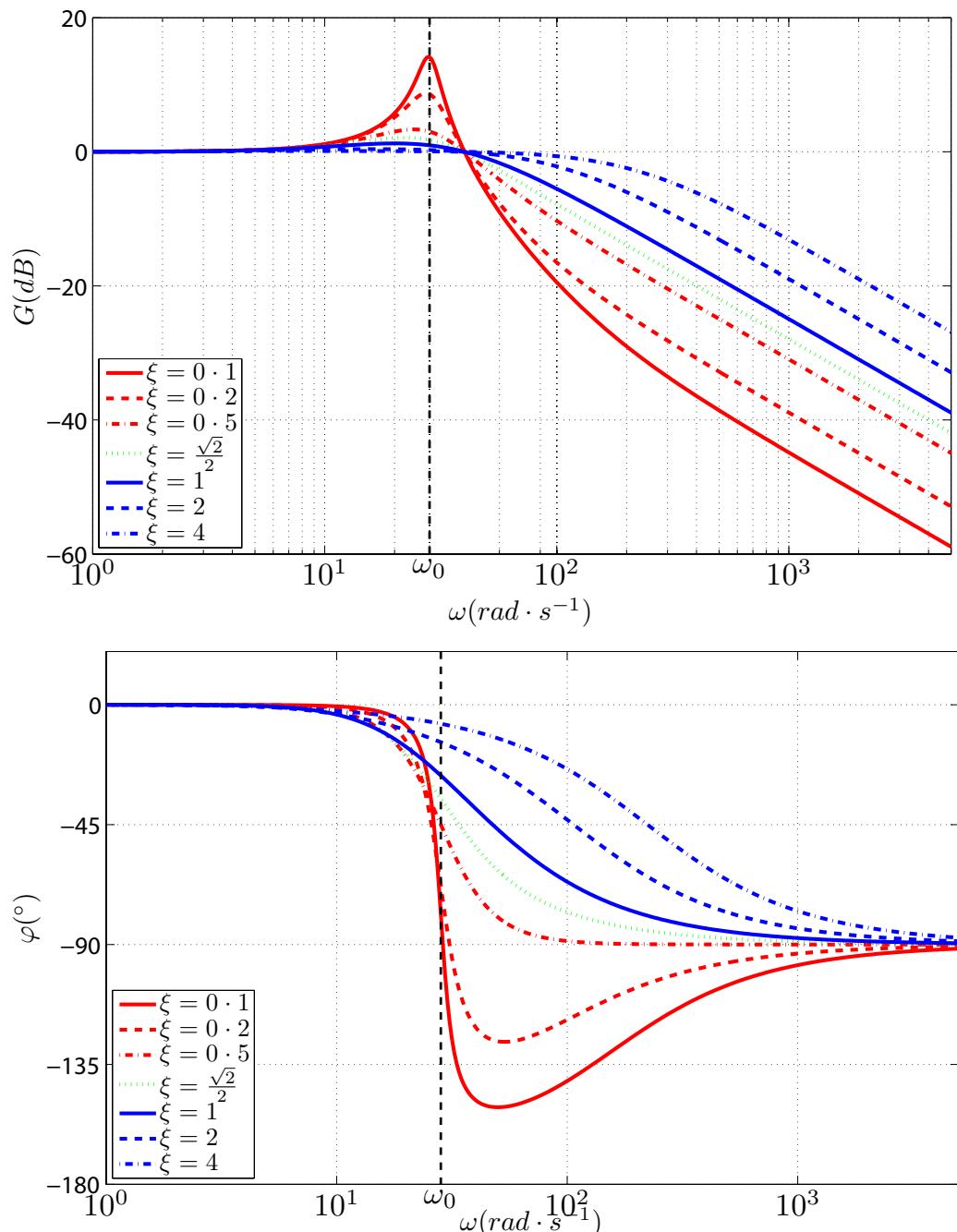


FIGURE 3 – Diagramme de Bode de la suspension d'un véhicule pour différentes valeurs de ξ

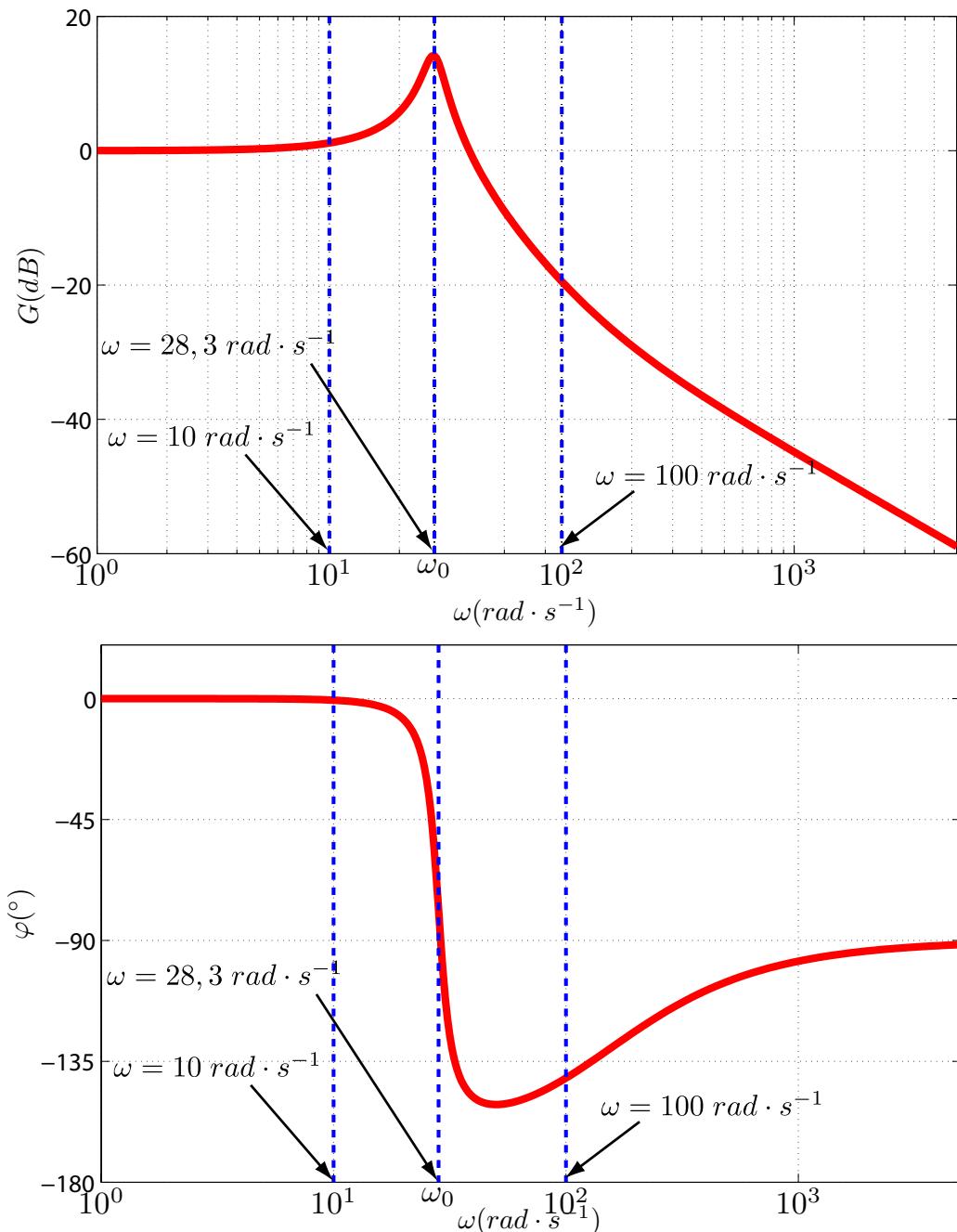


FIGURE 4 – Diagramme de Bode de la suspension d'un véhicule pour $\xi = 0,2$

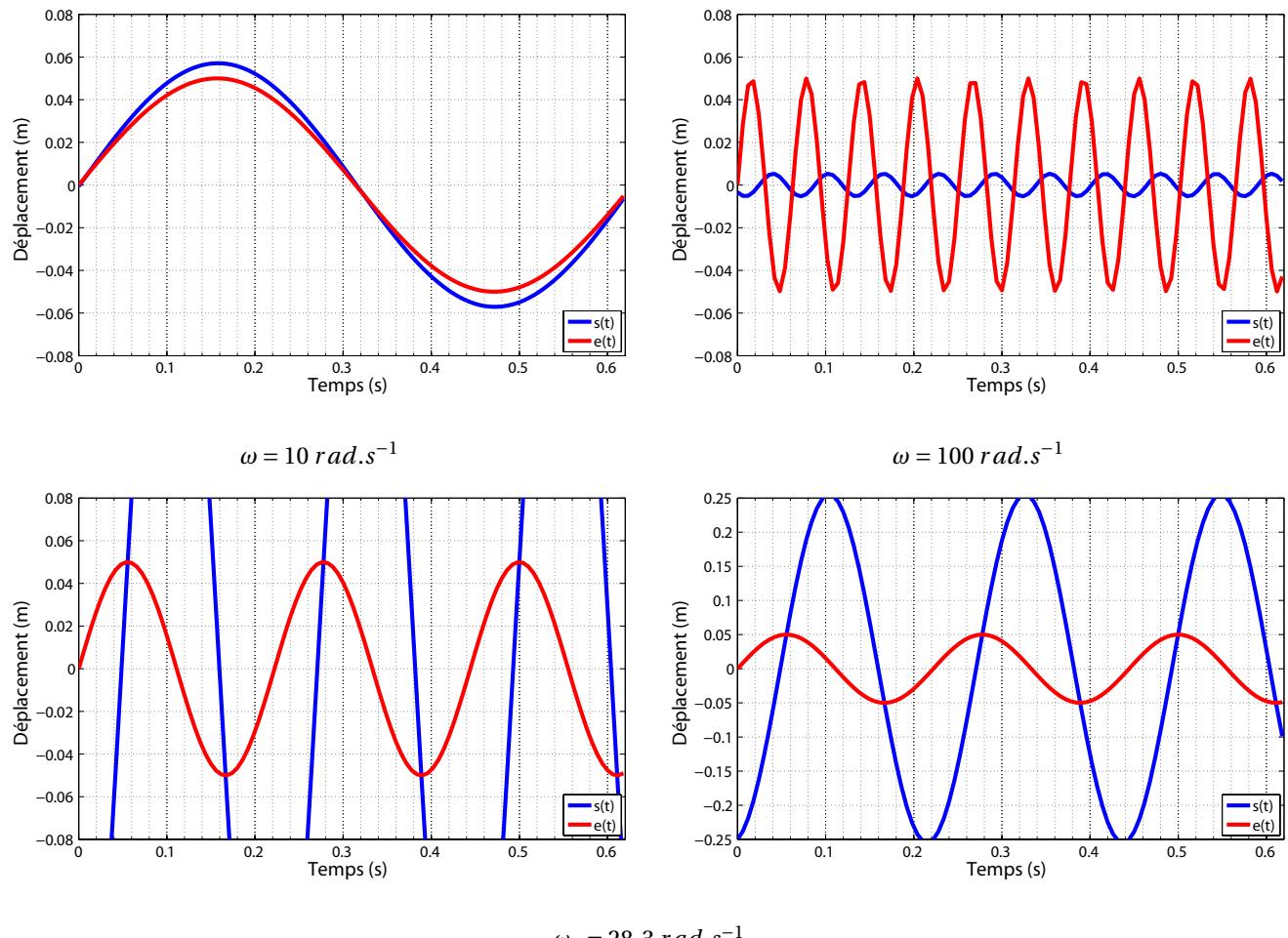
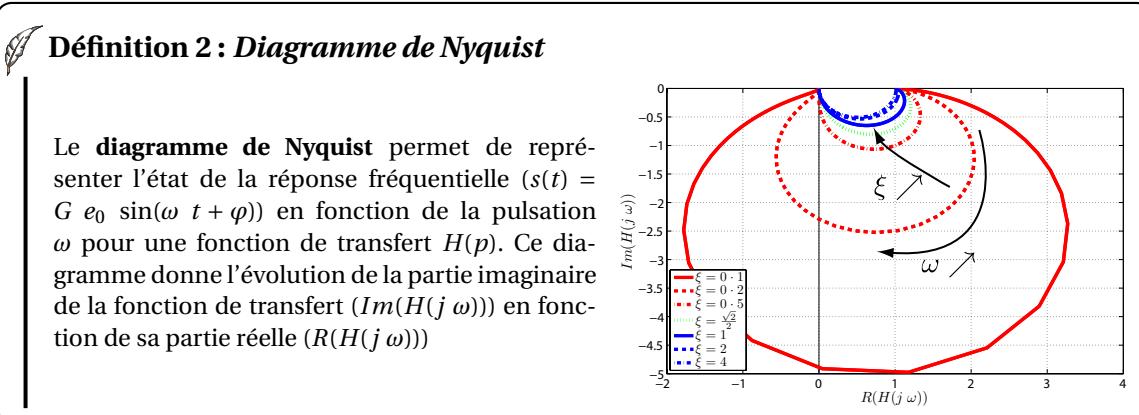


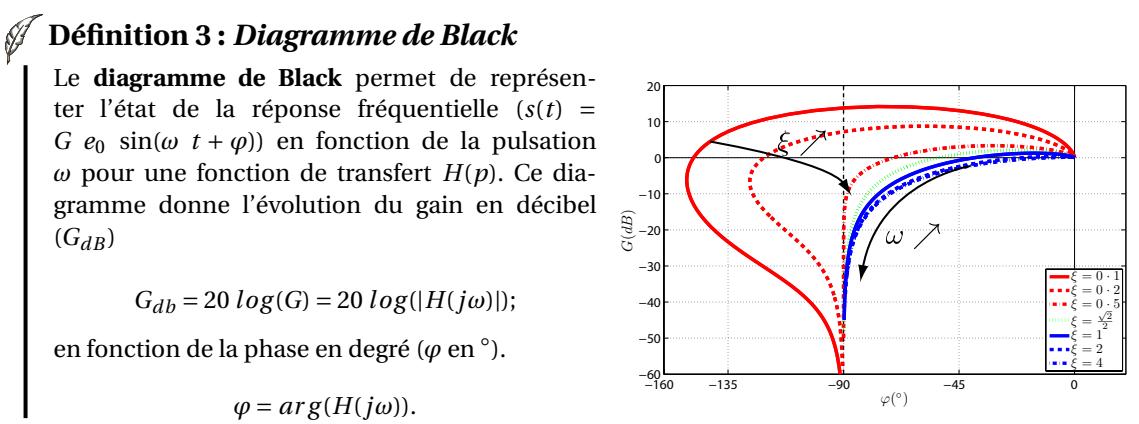
FIGURE 5 – Réponse temporelle de la suspension du Clever avec $\xi = 0,2$

III. Autres types de lieux de transfert

1 Diagramme de Nyquist



2 Diagramme de Black



Remarque 1 :
Ces deux derniers diagrammes (Nyquist et Black) sont utilisés habituellement sous la forme d'abaques pour caractériser la **stabilité** des systèmes asservis.

IV. Conclusion

Conclusion : Analyse fréquentielle

L'analyse fréquentielle présente des outils très puissant pour caractériser la réponse d'un système vis-à-vis d'une consigne harmonique. Ce chapitre a mis en exergue dans un premier temps la nécessité d'étudier :

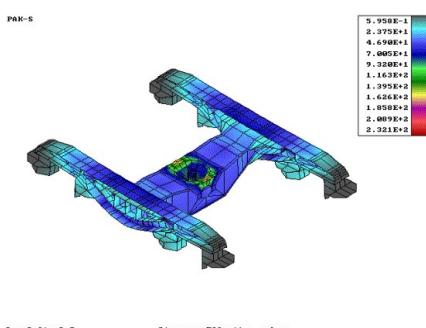
- le gain ($G_d B = 20 \log(|H(j\omega)|)$),
- la phase ($\varphi = \arg(H(j\omega))$),

en fonction de la pulsation ω . On peut alors facilement reconstituer temporellement l'évolution de la sortie puisque celle-ci est simplement de type harmonique en régime permanent.

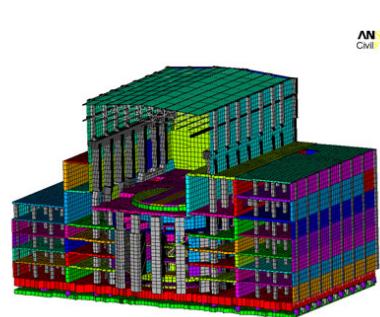
Ce type de procédé est très répandu dans plusieurs domaines de l'ingénierie :

- **analyse modale** pour la conception de système mécanique,
- conception de bâtiments résistant à des **ondes sismiques**.

Néanmoins dans ces domaines bien souvent, les comportements des systèmes sont **complexes ou non-linéaires**. On utilisera alors des **moyens numériques** pour caractériser complètement leur comportement fréquentiel.



Analyse modale d'un bogie de TGV



Analyse modale pour le dimensionnement para-sismique d'un bâtiment



Effondrement du pont de Tacoma (1940)