C6 : Analyse fréquentielle des systèmes asservis
C6-2 : Introduction à l'analyse fréquentielle des systèmes linéaires continus et invariants

Émilien DURIF

Lycée La Martinière Monplaisir Lyon
Classe de MPSI

Plan

1. Lieux de transfert : diagrammes de Bode
   - Définition
2. Construction des diagrammes de Bode
   - Gain pur
   - Intégrateur
   - Premier ordre
   - Second ordre

Plan

1 Lieux de transfert : diagrammes de Bode
- Définition

2 Construction des diagrammes de Bode
- Gain pur
- Intégrateur
- Premier ordre
- Second ordre

Lieux de transfert : diagrammes de Bode

Diagramme de Bode

- Il représente $s(t) = G\ e_0\ \sin(\omega\ t + \varphi)$ (en régime permanent) en fonction de la pulsation ω pour une fonction de transfert $H(p)$. Ce diagramme est composé :
  - d'un diagramme de gain représentant le gain en décibel (G_{db}) en fonction de la pulsation ω

$$\boxed{G_{db} = 20\ log(G) = 20\ log(|H(j\omega)|);} \tag{1}$$

  - d'un diagramme de phase représentant la phase en degré (φ en $^\circ$) en fonction de la pulsation ω

$$\boxed{\varphi = arg(H(j\omega)).} \tag{2}$$

- Pour ces deux diagrammes, les abscisses (concernant ω) sont représentées en échelle logarithmique.

Remarque

Il suffit d'étudier le module et l'argument de l'expression $H(j\ \omega)$ qui est obtenu en remplaçant p par $j\ \omega$ dans $H(p)$

Lieux de transfert : diagrammes de Bode

Diagramme de Bode

- Il représente $s(t) = G\ e_0\ \sin(\omega\ t + \varphi)$ (en régime permanent) en fonction de la pulsation ω pour une fonction de transfert $H(p)$. Ce diagramme est composé :
  - d'un diagramme de gain représentant le gain en décibel (G_{db}) en fonction de la pulsation ω

$$\boxed{G_{db} = 20\ log(G) = 20\ log(|H(j\omega)|);} \tag{1}$$

  - d'un diagramme de phase représentant la phase en degré (φ en $^\circ$) en fonction de la pulsation ω

$$\boxed{\varphi = arg(H(j\omega)).} \tag{2}$$

- Pour ces deux diagrammes, les abscisses (concernant ω) sont représentées en échelle logarithmique.

Remarque

Il suffit d'étudier le module et l'argument de l'expression $H(j\ \omega)$ qui est obtenu en remplaçant p par $j\ \omega$ dans $H(p)$

Lieux de transfert : diagrammes de Bode

Diagramme de Bode

- Il représente $s(t) = G\ e_0\ \sin(\omega\ t + \varphi)$ (en régime permanent) en fonction de la pulsation ω pour une fonction de transfert $H(p)$. Ce diagramme est composé :
  - d'un diagramme de gain représentant le gain en décibel (G_{db}) en fonction de la pulsation ω

$$\boxed{G_{db} = 20\ log(G) = 20\ log(|H(j\omega)|);} \tag{1}$$

  - d'un diagramme de phase représentant la phase en degré (φ en $^\circ$) en fonction de la pulsation ω

$$\boxed{\varphi = arg(H(j\omega)).} \tag{2}$$

- Pour ces deux diagrammes, les abscisses (concernant ω) sont représentées en échelle logarithmique.

Remarque

Il suffit d'étudier le module et l'argument de l'expression $H(j\ \omega)$ qui est obtenu en remplaçant p par $j\ \omega$ dans $H(p)$

Lieux de transfert : diagrammes de Bode

Diagramme de Bode

- Il représente $s(t) = G\ e_0\ \sin(\omega\ t + \varphi)$ (en régime permanent) en fonction de la pulsation ω pour une fonction de transfert $H(p)$. Ce diagramme est composé :
  - d'un diagramme de gain représentant le gain en décibel (G_{db}) en fonction de la pulsation ω

$$\boxed{G_{db} = 20\ log(G) = 20\ log(|H(j\omega)|);} \tag{1}$$

  - d'un diagramme de phase représentant la phase en degré (φ en $^\circ$) en fonction de la pulsation ω

$$\boxed{\varphi = arg(H(j\omega)).} \tag{2}$$

- Pour ces deux diagrammes, les abscisses (concernant ω) sont représentées en échelle logarithmique.

Remarque

Il suffit d'étudier le module et l'argument de l'expression $H(j\ \omega)$ qui est obtenu en remplaçant p par $j\ \omega$ dans $H(p)$

Lieux de transfert : diagrammes de Bode

Addition des fonction de transfert élémentaire

- **Produit** de fonctions de transfert élémentaires $\Longrightarrow$ **somme** de gains et d'arguments élémentaires.
- Pour la fonction de transfert de l'exemple de la suspension moto :

$$G_{dB} = 20\ log(|H(j\ \omega)|) = 20\ log\left(|\frac{\frac{c}{k}\ j\ \omega + 1}{\frac{m}{k}\ (j\ \omega)^2 + \frac{c}{k}\ j\ \omega + 1}|\right)$$
$$= 20\ log\left(|\frac{c}{k}\ j\ \omega + 1|\right) - 20\ log\left(|\frac{m}{k}\ (j\ \omega)^2 + \frac{c}{k}\ j\ \omega + 1|\right)$$

$$\varphi = arg(H(j\ \omega) = arg\left(\frac{\frac{c}{k}\ j\ \omega + 1}{\frac{m}{k}\ (j\ \omega)^2 + \frac{c}{k}\ j\ \omega + 1}\right)$$
$$= arg\left(\frac{c}{k}\ j\ \omega + 1\right) - arg\left(\frac{m}{k}\ (j\ \omega)^2 + \frac{c}{k}\ j\ \omega + 1\right)$$

- Le gain et l'argument total sont respectivement la somme de gains élémentaires et d'arguments élémentaires de fonctions de transfert d'ordre 1 et 2.
- Nécessité d'analyser d'un point de vue fréquentiel successivement chacune des fonctions de transfert élémentaires d'ordre 1 ou 2.

Lieux de transfert : diagrammes de Bode

Addition des fonction de transfert élémentaire

- **Produit** de fonctions de transfert élémentaires $\Longrightarrow$ **somme** de gains et d'arguments élémentaires.
- Pour la fonction de transfert de l'exemple de la suspension moto :

$$G_{dB} = 20\ log(|H(j\ \omega)|) = 20\ log\left(|\frac{\frac{c}{k}\ j\ \omega + 1}{\frac{m}{k}\ (j\ \omega)^2 + \frac{c}{k}\ j\ \omega + 1}|\right)$$
$$= 20\ log\left(|\frac{c}{k}\ j\ \omega + 1|\right) - 20\ log\left(|\frac{m}{k}\ (j\ \omega)^2 + \frac{c}{k}\ j\ \omega + 1|\right)$$

$$\varphi = arg(H(j\ \omega) = arg\left(\frac{\frac{c}{k}\ j\ \omega + 1}{\frac{m}{k}\ (j\ \omega)^2 + \frac{c}{k}\ j\ \omega + 1}\right)$$
$$= arg\left(\frac{c}{k}\ j\ \omega + 1\right) - arg\left(\frac{m}{k}\ (j\ \omega)^2 + \frac{c}{k}\ j\ \omega + 1\right)$$

- Le gain et l'argument total sont respectivement la somme de gains élémentaires et d'arguments élémentaires de fonctions de transfert d'ordre 1 et 2.
- Nécessité d'analyser d'un point de vue fréquentiel successivement chacune des fonctions de transfert élémentaires d'ordre 1 ou 2.

Lieux de transfert : diagrammes de Bode

Addition des fonction de transfert élémentaire

- **Produit** de fonctions de transfert élémentaires $\Longrightarrow$ **somme** de gains et d'arguments élémentaires.
- Pour la fonction de transfert de l'exemple de la suspension moto :

$$G_{dB} = 20\ log(|H(j\ \omega)|) = 20\ log\left(|\frac{\frac{c}{k}\ j\ \omega + 1}{\frac{m}{k}\ (j\ \omega)^2 + \frac{c}{k}\ j\ \omega + 1}|\right)$$
$$= 20\ log\left(|\frac{c}{k}\ j\ \omega + 1|\right) - 20\ log\left(|\frac{m}{k}\ (j\ \omega)^2 + \frac{c}{k}\ j\ \omega + 1|\right)$$

$$\varphi = arg(H(j\ \omega) = arg\left(\frac{\frac{c}{k}\ j\ \omega + 1}{\frac{m}{k}\ (j\ \omega)^2 + \frac{c}{k}\ j\ \omega + 1}\right)$$
$$= arg\left(\frac{c}{k}\ j\ \omega + 1\right) - arg\left(\frac{m}{k}\ (j\ \omega)^2 + \frac{c}{k}\ j\ \omega + 1\right)$$

- Le gain et l'argument total sont respectivement la somme de gains élémentaires et d'arguments élémentaires de fonctions de transfert d'ordre 1 et 2.
- Nécessité d'analyser d'un point de vue fréquentiel successivement chacune des fonctions de transfert élémentaires d'ordre 1 ou 2.

Lieux de transfert : diagrammes de Bode

Addition des fonction de transfert élémentaire

- **Produit** de fonctions de transfert élémentaires $\Longrightarrow$ **somme** de gains et d'arguments élémentaires.
- Pour la fonction de transfert de l'exemple de la suspension moto :

$$G_{dB} = 20\ log(|H(j\ \omega)|) = 20\ log\left(|\frac{\frac{c}{k}\ j\ \omega + 1}{\frac{m}{k}\ (j\ \omega)^2 + \frac{c}{k}\ j\ \omega + 1}|\right)$$
$$= 20\ log\left(|\frac{c}{k}\ j\ \omega + 1|\right) - 20\ log\left(|\frac{m}{k}\ (j\ \omega)^2 + \frac{c}{k}\ j\ \omega + 1|\right)$$

$$\varphi = arg(H(j\ \omega) = arg\left(\frac{\frac{c}{k}\ j\ \omega + 1}{\frac{m}{k}\ (j\ \omega)^2 + \frac{c}{k}\ j\ \omega + 1}\right)$$
$$= arg\left(\frac{c}{k}\ j\ \omega + 1\right) - arg\left(\frac{m}{k}\ (j\ \omega)^2 + \frac{c}{k}\ j\ \omega + 1\right)$$

- Le gain et l'argument total sont respectivement la somme de gains élémentaires et d'arguments élémentaires de fonctions de transfert d'ordre 1 et 2.
- Nécessité d'analyser d'un point de vue fréquentiel successivement chacune des fonctions de transfert élémentaires d'ordre 1 ou 2.

Plan

1 Lieux de transfert : diagrammes de Bode
- Définition

2 Construction des diagrammes de Bode
- Gain pur
- Intégrateur
- Premier ordre
- Second ordre

Construction des diagrammes de Bode : gain pur

- Fonction de transfert :

$$\boxed{H(p) = K.} \tag{3}$$

- Ainsi :
  - $G_{dB} = 20\ log(|H(j\ \omega)|)$
  - $\varphi = arg(H(j\ \omega)) = a$

Construction des diagrammes de Bode : gain pur

- Fonction de transfert :

$$\boxed{H(j\,\omega) = K.}$$

- Ainsi :
  - $G_{dB} = 20\,log(|H(j\,\omega)|) = 20\,log(K)$,
  - $\varphi = arg(H(j\,\omega)) = arg(K) = 0$.

Construction des diagrammes de Bode : gain pur

- Fonction de transfert :

$$\boxed{H(j\,\omega) = K.}$$

- Ainsi :
  - $G_{dB} = 20\ log(|H(j\,\omega)|) = 20\ log(K)$,
  - $\varphi = arg(H(j\,\omega)) = arg(K) = 0.$

Construction des diagrammes de Bode : gain pur

- Fonction de transfert :

$$\boxed{H(j\,\omega) = K.}$$

- Ainsi :
  - $G_{dB} = 20\ log(|H(j\,\omega)|) = 20\ log(K)$,
  - $\varphi = arg(H(j\,\omega)) = arg(K) = 0.$

Construction des diagrammes de Bode : gain pur

- Fonction de transfert :

$$\boxed{H(j\,\omega) = K.}$$

- Ainsi :
  - $G_{dB} = 20\ log(|H(j\,\omega)|) = 20\ log(K)$,
  - $\varphi = arg(H(j\,\omega)) = arg(K) = 0$.

Construction des diagrammes de Bode : gain pur

- Fonction de transfert :

$$\boxed{H(j\,\omega) = K.}$$

- Ainsi :
  - $G_{dB} = 20\ log(|H(j\,\omega)|) = 20\ log(K)$,
  - $\varphi = arg(H(j\,\omega)) = arg(K) = 0$.

Construction des diagrammes de Bode : gain pur

Fonction de transfert : $\boxed{H(j\,\omega) = K.}$

Plan

1 Lieux de transfert : diagrammes de Bode
- Définition

2 Construction des diagrammes de Bode
- Gain pur
- Intégrateur
- Premier ordre
- Second ordre

Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

- **Fonction de transfert :**

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{p}.} \tag{4}$$

Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

- **Fonction de transfert :**

$$\boxed{H(j\,\omega) = \frac{K}{j\,\omega}.}$$

Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

- **Fonction de transfert :**

Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

- $G_{dB} = 20\ log(|H(j\ \omega)|) = 20\ log(K) - 20\ log(\omega)$: droit affine :
  - pour coefficient directeur $-20\ dB$ **par décade**,
  - et qui coupe l'axe des abscisse en $\omega = K$.

Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

- $G_{dB} = 20\ log(|H(j\ \omega)|) = 20\ log(K) - 20\ log(\omega)$: droit affine :
  - pour coefficient directeur $-20\ dB$ **par décade**,
  - et qui coupe l'axe des abscisse en $\omega = K$.

Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

- $G_{dB} = 20\ log(|H(j\ \omega)|) = 20\ log(K) - 20\ log(\omega)$: droit affine :
  - pour coefficient directeur $-20\ dB$ **par décade**,
  - et qui coupe l'axe des abscisse en $\omega = K$.

Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

- $G_{dB} = 20\ log(|H(j\ \omega)|) = 20\ log(K) - 20\ log(\omega)$: droit affine :
  - pour coefficient directeur $-20\ dB$ **par décade**,
  - et qui coupe l'axe des abscisse en $\omega = K$.

Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

- $G_{dB} = 20\ log(|H(j\ \omega)|) = 20\ log(K) - 20\ log(\omega)$: droit affine :
  - pour coefficient directeur $-20\ dB$ **par décade**,
  - et qui coupe l'axe des abscisse en $\omega = K$.

Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

- $G_{dB} = 20\ log(|H(j\ \omega)|) = 20\ log(K) - 20\ log(\omega)$: droit affine :
  - pour coefficient directeur $-20\ dB$ **par décade**,
  - et qui coupe l'axe des abscisse en $\omega = K$.

Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

- $\varphi = arg(H(j\,\omega)) = arg(K) - arg(j\,\omega) = -90°$: droite horizontale passant par $\varphi = -90°$.

Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

- $\varphi = arg(H(j\,\omega)) = arg(K) - arg(j\,\omega) = -90°$: droite horizontale passant par $\varphi = -90°$.

Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

- $\varphi = arg(H(j\,\omega)) = arg(K) - arg(j\,\omega) = -90°$: droite horizontale passant par $\varphi = -90°$.

Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

Fonction de transfert :

$$H(j\,\omega) = \frac{K}{j\,\omega}.$$

Plan

1 Lieux de transfert : diagrammes de Bode
- Définition

2 Construction des diagrammes de Bode
- Gain pur
- Intégrateur
- Premier ordre
- Second ordre

Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- Fonction de transfert :

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1+\tau p}.} \qquad (5)$$

- Diagramme asymptotique : branches approximées de G_{dB} et φ lorsque :
  1. $\omega \longrightarrow 0$,
  2. $\omega \longrightarrow +\infty$.

Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- Fonction de transfert :

$$\boxed{H(j\,\omega) = \frac{K}{1 + \tau\, j\, \omega}.}$$

- Diagramme asymptotique : branches approximées de G_{dB} et φ lorsque :
  1. $\omega \longrightarrow 0$,
  2. $\omega \longrightarrow +\infty$.

Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- Fonction de transfert :

$$\boxed{H(j\,\omega) = \frac{K}{1 + \tau\, j\, \omega}.}$$

- Diagramme asymptotique : branches approximées de G_{dB} et φ lorsque :
  1. $\omega \longrightarrow 0$,
  2. $\omega \longrightarrow +\infty$.

Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- Fonction de transfert :

$$\boxed{H(j\,\omega) = \frac{K}{1 + \tau\, j\, \omega}.}$$

- Diagramme asymptotique : branches approximées de G_{dB} et φ lorsque :
  1. $\omega \longrightarrow 0$,
  2. $\omega \longrightarrow +\infty$.

Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- Fonction de transfert :

$$\boxed{H(j\,\omega) = \frac{K}{1 + \tau\, j\, \omega}.}$$

- Diagramme asymptotique : branches approximées de G_{dB} et φ lorsque :
  1. $\omega \longrightarrow 0$,
  2. $\omega \longrightarrow +\infty$.

Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- **Calcul du gain de $H(j\,\omega)$:**

$$G_{dB} = 20\ log\left(\left|\frac{K}{1+\tau\ j\ \omega}\right|\right) = 20\ log\left(\frac{K}{\sqrt{1+(\tau\ \omega)^2}}\right)$$
$$= 20\ log(K) - 20\ log\left(\sqrt{1+(\tau\ \omega)^2}\right).$$

- **Tracé du diagramme asymptotique en gain** :
  1. $\omega \longrightarrow 0$:

$$20\ log(K) - 20\ log\left(\sqrt{1+(\tau\ \omega)^2}\right) \underset{\omega\to 0}{\sim} 20\ log(K)$$

Droite horizontale situé à $20\ log(K)$

  2. $\omega \longrightarrow +\infty$:

$$20\ log(K) - 20\ log\left(\sqrt{1+(\tau\ \omega)^2}\right)$$
$$\underset{\omega\to+\infty}{\sim} 20\ log(K) - 20\ log\left(\left[\tau\ \omega)^2\right]^{1/2}\right) = 20\ log(K) - 2\ \frac{20}{2} log\ (\tau\ \omega)$$
$$= 20\ log(K) - 20\ log\ (\tau\ \omega) = 20\ log(K) + 20\ log\left(\frac{1}{\tau}\right) - 20\ log(\omega)$$

Droite de pente -20 passant par le point $\left(\frac{1}{\tau}, 20\ log(K)\right)$

Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- **Calcul du gain de $H(j\,\omega)$:**

$$G_{dB} = 20\ log\left(|\frac{K}{1+\tau\,j\,\omega}|\right) = 20\ log\left(\frac{K}{\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}}\right)$$
$$= 20\ log(K) - 20\ log\left(\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}\right).$$

- **Tracé du diagramme asymptotique en gain :**
  1. $\omega \longrightarrow 0$:

$$20\ log(K) - 20\ log\left(\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}\right) \underset{\omega\to 0}{\sim} 20\ log(K)$$

Droite horizontale situé à $20\ log(K)$

  2. $\omega \longrightarrow +\infty$:

$$20\ log(K) - 20\ log\left(\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}\right)$$
$$\underset{\omega\to+\infty}{\sim} 20\ log(K) - 20\ log\left(\left[\tau\,\omega)^2\right]^{1/2}\right) = 20\ log(K) - 2\,\frac{20}{2}log\,(\tau\,\omega)$$
$$= 20\ log(K) - 20\ log\,(\tau\,\omega) = 20\ log(K) + 20\ log\left(\frac{1}{\tau}\right) - 20\ log(\omega)$$

Droite de pente -20 passant par le point $\left(\frac{1}{\tau}, 20\ log(K)\right)$

Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- **Calcul du gain de $H(j\,\omega)$:**

$$G_{dB} = 20\ log\left(\left|\frac{K}{1+\tau\,j\,\omega}\right|\right) = 20\ log\left(\frac{K}{\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}}\right)$$
$$= 20\ log(K) - 20\ log\left(\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}\right).$$

- **Tracé du diagramme asymptotique en gain** :

1. $\omega \longrightarrow 0$:

$$20\ log(K) - 20\ log\left(\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}\right) \underset{\omega\to 0}{\sim} 20\ log(K)$$

Droite horizontale situé à $20\ log(K)$

2. $\omega \longrightarrow +\infty$:

$$20\ log(K) - 20\ log\left(\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}\right)$$
$$\underset{\omega\to+\infty}{\sim} 20\ log(K) - 20\ log\left(\left[\tau\,\omega)^2\right]^{1/2}\right) = 20\ log(K) - 2\,\frac{20}{2}\,log\,(\tau\,\omega)$$
$$= 20\ log(K) - 20\ log\,(\tau\,\omega) = 20\ log(K) + 20\ log\left(\frac{1}{\tau}\right) - 20\ log(\omega)$$

- Sur le tracé semi-logarithmique, droite affine de coefficient directeur -20 *dB* par décade
- et qui coupe la droite horizontale ($20\ log(K)$) en $\omega = \frac{1}{\tau}$.

Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- **Calcul du gain de $H(j\,\omega)$:**

$$G_{dB} = 20\ log\left(|\frac{K}{1+\tau\,j\,\omega}|\right) = 20\ log\left(\frac{K}{\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}}\right)$$
$$= 20\ log(K) - 20\ log\left(\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}\right).$$

- **Tracé du diagramme asymptotique en gain** :

1. $\omega \longrightarrow 0$:

$$20\ log(K) - 20\ log\left(\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}\right) \underset{\omega\to 0}{\sim} 20\ log(K)$$

Droite horizontale situé à $20\ log(K)$

2. $\omega \longrightarrow +\infty$:

$$20\ log(K) - 20\ log\left(\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}\right)$$
$$\underset{\omega\to+\infty}{\sim} 20\ log(K) - 20\ log\left(\left[\tau\,\omega)^2\right]^{1/2}\right) = 20\ log(K) - 2\,\frac{20}{2}\,log\,(\tau\,\omega)$$
$$= 20\ log(K) - 20\ log\,(\tau\,\omega) = 20\ log(K) + 20\ log\left(\frac{1}{\tau}\right) - 20\ log(\omega)$$

- Sur le tracé semi-logarithmique, droite affine de coefficient directeur -20 *dB* par décade
- et qui coupe la droite horizontale ($20\ log(K)$) en $\omega = \frac{1}{\tau}$.

Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- **Calcul du gain de $H(j\,\omega)$:**

$$G_{dB} = 20\ log\left(|\frac{K}{1+\tau\,j\,\omega}|\right) = 20\ log\left(\frac{K}{\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}}\right)$$
$$= 20\ log(K) - 20\ log\left(\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}\right).$$

- **Tracé du diagramme asymptotique en gain** :

1. $\omega \longrightarrow 0$:

$$20\ log(K) - 20\ log\left(\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}\right) \underset{\omega\to 0}{\sim} 20\ log(K)$$

Droite horizontale situé à $20\ log(K)$

2. $\omega \longrightarrow +\infty$:

$$20\ log(K) - 20\ log\left(\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}\right)$$
$$\underset{\omega\to+\infty}{\sim} 20\ log(K) - 20\ log\left(\left[\tau\,\omega)^2\right]^{1/2}\right) = 20\ log(K) - 2\,\frac{20}{2}\,log\,(\tau\,\omega)$$
$$= 20\ log(K) - 20\ log\,(\tau\,\omega) = 20\ log(K) + 20\ log\left(\frac{1}{\tau}\right) - 20\ log(\omega)$$

- Sur le tracé semi-logarithmique, droite affine de coefficient directeur $-20\ dB$ **par décade**
- et qui coupe la droite horizontale $(20\ log(K))$ en $\omega = \frac{1}{\tau}$.

Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- **Calcul du gain de $H(j\,\omega)$:**

$$G_{dB} = 20\ log\left(|\frac{K}{1+\tau\,j\,\omega}|\right) = 20\ log\left(\frac{K}{\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}}\right)$$
$$= 20\ log(K) - 20\ log\left(\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}\right).$$

- **Tracé du diagramme asymptotique en gain** :

1. $\omega \longrightarrow 0$:

$$20\ log(K) - 20\ log\left(\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}\right) \underset{\omega\to 0}{\sim} 20\ log(K)$$

Droite horizontale situé à $20\ log(K)$

2. $\omega \longrightarrow +\infty$:

$$20\ log(K) - 20\ log\left(\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}\right)$$
$$\underset{\omega\to+\infty}{\sim} 20\ log(K) - 20\ log\left(\left[\tau\,\omega)^2\right]^{1/2}\right) = 20\ log(K) - 2\,\frac{20}{2}\,log\,(\tau\,\omega)$$
$$= 20\ log(K) - 20\ log\,(\tau\,\omega) = 20\ log(K) + 20\ log\left(\frac{1}{\tau}\right) - 20\ log(\omega)$$

- Sur le tracé semi-logarithmique, droite affine de coefficient directeur $-20\ dB$ **par décade**
- et qui coupe la droite horizontale $(20\ log(K))$ en $\omega = \frac{1}{\tau}$.

Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- **Calcul du gain de $H(j\,\omega)$:**

$$G_{dB} = 20\ log\left(|\frac{K}{1+\tau\,j\,\omega}|\right) = 20\ log\left(\frac{K}{\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}}\right)$$
$$= 20\ log(K) - 20\ log\left(\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}\right).$$

- **Tracé du diagramme asymptotique en gain** :

1. $\omega \longrightarrow 0$:

$$20\ log(K) - 20\ log\left(\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}\right) \underset{\omega\to 0}{\sim} 20\ log(K)$$

Droite horizontale situé à $20\ log(K)$

2. $\omega \longrightarrow +\infty$:

$$20\ log(K) - 20\ log\left(\sqrt{1+(\tau\,\omega)^2}\right)$$
$$\underset{\omega\to+\infty}{\sim} 20\ log(K) - 20\ log\left(\left[\tau\,\omega)^2\right]^{1/2}\right) = 20\ log(K) - 2\,\frac{20}{2}\,log\,(\tau\,\omega)$$
$$= 20\ log(K) - 20\ log\,(\tau\,\omega) = 20\ log(K) + 20\ log\left(\frac{1}{\tau}\right) - 20\ log(\omega)$$

- Sur le tracé semi-logarithmique, droite affine de coefficient directeur $-20\ dB$ **par décade**
- et qui coupe la droite horizontale $(20\ log(K))$ en $\omega = \frac{1}{\tau}$.

Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

Pulsation de coupure

La pulsation de coupure ω_c se définit comme la valeur de ω telle que :

$$\boxed{|H(j\,\omega_c)| = \frac{|H(j\,\omega)|_0}{\sqrt{2}}.} \tag{6}$$

où $|H(j\,\omega)|_0$ est le module de la fonction de transfert $H(j\,\omega)$ lorsque ω tend vers 0.
On trouve que le gain de coupure :

$$\boxed{G_{dB}(\omega_c) = 20\ log(K) - 20log(\sqrt{2}) \simeq 20\ log(K) - 3dB} \tag{7}$$

Pour un premier ordre, $\omega_c = \frac{1}{\tau}$.

Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

Lieux de transfert : diagrammes de Bode

- **Calcul de la phase de $H(j\,\omega)$:**

$$\varphi = arg(\frac{K}{1+\tau\,j\,\omega}) = arg(K) - arg(1+\tau\,j\,\omega)$$
$$= 0 - arctan\,(\tau\,\omega)$$
$$= -arctan\,(\tau\,\omega)$$

- **Tracé du diagramme asymptotique en phase :**
  1. $\omega \longrightarrow 0$:

$$\varphi = arg(K) - arg(1+\tau\,j\,\omega) \underset{\omega\to 0}{\longrightarrow} 0$$

  2. $\omega \longrightarrow +\infty$:

$$\varphi = arg(K) - arg(1+\tau\,j\,\omega) \underset{\omega\to+\infty}{\simeq} -arg(\tau\,j\,\omega) \underset{\omega\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{\pi}{2}$$

Lieux de transfert : diagrammes de Bode

- **Calcul de la phase de $H(j\,\omega)$:**

$$\varphi = arg(\frac{K}{1+\tau\,j\,\omega}) = arg(K) - arg(1+\tau\,j\,\omega)$$
$$= 0 - arctan\,(\tau\,\omega)$$
$$= -arctan\,(\tau\,\omega)$$

- **Tracé du diagramme asymptotique en phase :**
  1. $\omega \longrightarrow 0$:

$$\varphi = arg(K) - arg(1+\tau\,j\,\omega) \underset{\omega\to 0}{\longrightarrow} 0$$

  2. $\omega \longrightarrow +\infty$:

$$\varphi = arg(K) - arg(1+\tau\,j\,\omega) \underset{\omega\to+\infty}{\sim} -arg(\tau\,j\,\omega) \underset{\omega\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{\pi}{2}$$

Lieux de transfert : diagrammes de Bode

- **Calcul de la phase de $H(j\,\omega)$:**

$$\varphi = arg(\frac{K}{1+\tau\,j\,\omega}) = arg(K) - arg(1+\tau\,j\,\omega)$$
$$= 0 - arctan\,(\tau\,\omega)$$
$$= -arctan\,(\tau\,\omega)$$

- **Tracé du diagramme asymptotique en phase :**
  1. $\omega \longrightarrow 0$:

$$\varphi = arg(K) - arg(1+\tau\,j\,\omega) \underset{\omega\to 0}{\longrightarrow} 0$$

  2. $\omega \longrightarrow +\infty$:

$$\varphi = arg(K) - arg(1+\tau\,j\,\omega) \underset{\omega\to+\infty}{\sim} -arg(\tau\,j\,\omega) \underset{\omega\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{\pi}{2}$$

Lieux de transfert : diagrammes de Bode

- **Calcul de la phase de $H(j\,\omega)$:**

$$\varphi = arg(\frac{K}{1+\tau\,j\,\omega}) = arg(K) - arg(1+\tau\,j\,\omega)$$
$$= 0 - arctan\,(\tau\,\omega)$$
$$= -arctan\,(\tau\,\omega)$$

- **Tracé du diagramme asymptotique en phase :**
  1. $\omega \longrightarrow 0$:

$$\varphi = arg(K) - arg(1+\tau\,j\,\omega) \underset{\omega\to 0}{\longrightarrow} 0$$

  2. $\omega \longrightarrow +\infty$:

$$\varphi = arg(K) - arg(1+\tau\,j\,\omega) \underset{\omega\to+\infty}{\sim} -arg(\tau\,j\,\omega) \underset{\omega\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{\pi}{2}$$

Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

Plan

1 Lieux de transfert : diagrammes de Bode
- Définition

2 Construction des diagrammes de Bode
- Gain pur
- Intégrateur
- Premier ordre
- Second ordre

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Fonction de transfert d'un système du second ordre

- $$\boxed{H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}} \tag{8}$$
- Ainsi, en remplaçant p par $j\,\omega$, on obtient :

$$H(j\,\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\,\omega + \frac{(j\,\omega)^2}{\omega_0^2}}.$$

- Le dénominateur peut alors s'écrire de différentes manières selon si :
  1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta > 0$: 2 pôles réels.
  2. $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Fonction de transfert d'un système du second ordre

- $$\boxed{H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}} \tag{8}$$
- Ainsi, en remplaçant p par $j\,\omega$, on obtient :

$$H(j\,\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\,\omega + \frac{(j\,\omega)^2}{\omega_0^2}}.$$

- Le dénominateur peut alors s'écrire de différentes manières selon si :
  1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta > 0$: 2 pôles réels.
  2. $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Fonction de transfert d'un système du second ordre

- $$\boxed{H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}} \tag{8}$$
- Ainsi, en remplaçant p par $j\,\omega$, on obtient :

$$H(j\,\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\,\omega + \frac{(j\,\omega)^2}{\omega_0^2}}.$$

- Le dénominateur peut alors s'écrire de différentes manières selon si :
  1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta > 0$: 2 pôles réels.
  2. $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Fonction de transfert d'un système du second ordre

- $$\boxed{H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}} \tag{8}$$
- Ainsi, en remplaçant p par $j\,\omega$, on obtient :

$$H(j\,\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\,\omega + \frac{(j\,\omega)^2}{\omega_0^2}}.$$

- Le dénominateur peut alors s'écrire de différentes manières selon si :
  1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta > 0$: 2 pôles réels.
  2. $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Fonction de transfert d'un système du second ordre

- $$\boxed{H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}} \tag{8}$$
- Ainsi, en remplaçant p par $j\,\omega$, on obtient :

$$H(j\,\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\,\omega + \frac{(j\,\omega)^2}{\omega_0^2}}.$$

- Le dénominateur peut alors s'écrire de différentes manières selon si :
  1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta > 0$: 2 pôles réels.
  2. $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta > 0$: 2 pôles réels.
   - Les deux pôles sont réels
   - Calcul de Δ

$$\Delta = \frac{4\xi^2 - 4}{\omega_0^2}$$

   - Les racines s'écrivent donc :

$$p_{1/2} = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_0} \pm \frac{2}{\omega_0}\sqrt{\xi^2 - 1}}{\frac{2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$$

   - La factorisation du dénominateur donne :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0}\, p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}(p - p_1)\,(p - p_2).$$

   - On pose alors :

$$\begin{cases} T_1 & = -\frac{1}{p_1} \\ T_2 & = -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

   - On a alors :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0}\, p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}\left(p + \frac{1}{T_1}\right)\left(p + \frac{1}{T_2}\right).$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta > 0$: 2 pôles réels.
   - Les deux pôles sont réels
   - Calcul de Δ

$$\Delta = \frac{4\xi^2 - 4}{\omega_0^2}$$

   - Les racines s'écrivent donc :

$$p_{1/2} = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_0} \pm \frac{2}{\omega_0}\sqrt{\xi^2 - 1}}{\frac{2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$$

   - La factorisation du dénominateur donne :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0}\, p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}(p - p_1)\,(p - p_2).$$

   - On pose alors :

$$\begin{cases} T_1 & = -\frac{1}{p_1} \\ T_2 & = -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

   - On a alors :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0}\, p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}\left(p + \frac{1}{T_1}\right)\left(p + \frac{1}{T_2}\right).$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta > 0$: 2 pôles réels.
   - Les deux pôles sont réels
   - Calcul de Δ

$$\Delta = \frac{4\xi^2 - 4}{\omega_0^2}$$

   - Les racines s'écrivent donc :

$$p_{1/2} = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_0} \pm \frac{2}{\omega_0}\sqrt{\xi^2 - 1}}{\frac{2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$$

   - La factorisation du dénominateur donne :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0}\, p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}(p - p_1)\,(p - p_2).$$

   - On pose alors :

$$\begin{cases} T_1 & = -\frac{1}{p_1} \\ T_2 & = -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

   - On a alors :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0}\, p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}\left(p + \frac{1}{T_1}\right)\left(p + \frac{1}{T_2}\right).$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta > 0$: 2 pôles réels.
   - Les deux pôles sont réels
   - Calcul de Δ

$$\Delta = \frac{4\xi^2 - 4}{\omega_0^2}$$

   - Les racines s'écrivent donc :

$$p_{1/2} = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_0} \pm \frac{2}{\omega_0}\sqrt{\xi^2 - 1}}{\frac{2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$$

   - La factorisation du dénominateur donne :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0}\, p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}(p - p_1)\,(p - p_2).$$

   - On pose alors :

$$\begin{cases} T_1 & = -\frac{1}{p_1} \\ T_2 & = -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

   - On a alors :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0}\, p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}\left(p + \frac{1}{T_1}\right)\left(p + \frac{1}{T_2}\right).$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta > 0$: 2 pôles réels.
   - Les deux pôles sont réels
   - Calcul de Δ

$$\Delta = \frac{4\xi^2 - 4}{\omega_0^2}$$

   - Les racines s'écrivent donc :

$$p_{1/2} = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_0} \pm \frac{2}{\omega_0}\sqrt{\xi^2 - 1}}{\frac{2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$$

   - La factorisation du dénominateur donne :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0}\, p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}(p - p_1)\,(p - p_2).$$

   - On pose alors :

$$\begin{cases} T_1 & = -\frac{1}{p_1} \\ T_2 & = -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

   - On a alors :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0}\, p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}\left(p + \frac{1}{T_1}\right)\left(p + \frac{1}{T_2}\right).$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta > 0$: 2 pôles réels.
   - Les deux pôles sont réels
   - Calcul de Δ

$$\Delta = \frac{4\xi^2 - 4}{\omega_0^2}$$

   - Les racines s'écrivent donc :

$$p_{1/2} = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_0} \pm \frac{2}{\omega_0}\sqrt{\xi^2 - 1}}{\frac{2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$$

   - La factorisation du dénominateur donne :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0}\, p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}(p - p_1)\,(p - p_2).$$

   - On pose alors :

$$\begin{cases} T_1 & = -\frac{1}{p_1} \\ T_2 & = -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

   - On a alors :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0}\, p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}\left(p + \frac{1}{T_1}\right)\left(p + \frac{1}{T_2}\right).$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta > 0$: 2 pôles réels.
   - Les deux pôles sont réels
   - Calcul de Δ

$$\Delta = \frac{4\xi^2 - 4}{\omega_0^2}$$

   - Les racines s'écrivent donc :

$$p_{1/2} = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_0} \pm \frac{2}{\omega_0}\sqrt{\xi^2 - 1}}{\frac{2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$$

   - La factorisation du dénominateur donne :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0}\, p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}(p - p_1)\,(p - p_2).$$

   - On pose alors :

$$\begin{cases} T_1 & = -\frac{1}{p_1} \\ T_2 & = -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

   - On a alors :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0}\, p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}\left(p + \frac{1}{T_1}\right)\,\left(p + \frac{1}{T_2}\right).$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.
   - On a alors :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0}\, p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}\left(p + \frac{1}{T_1}\right)\,\left(p + \frac{1}{T_2}\right).$$

   - qui s'écrit également,

$$\frac{1}{\omega_0^2}\left(p + \frac{1}{T_1}\right)\,\left(p + \frac{1}{T_2}\right) = \frac{1}{T_1\ T_2\ \omega_0^2}\,(T_1\ p + 1)\ (T_2\ p + 1)\,.$$

   - On remarque que :

$$p_1 \cdot p_2 = \omega_0^2 = \frac{1}{T_1\ T_2}.$$

   - Donc,

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0}\, p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = (T_1\ p + 1)\ (T_2\ p + 1)\,.$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.
   - On a alors :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0}\, p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}\left(p + \frac{1}{T_1}\right)\,\left(p + \frac{1}{T_2}\right).$$

   - qui s'écrit également,

$$\frac{1}{\omega_0^2}\left(p + \frac{1}{T_1}\right)\,\left(p + \frac{1}{T_2}\right) = \frac{1}{T_1\ T_2\ \omega_0^2}\,(T_1\ p + 1)\ (T_2\ p + 1)\,.$$

   - On remarque que :

$$p_1 \cdot p_2 = \omega_0^2 = \frac{1}{T_1\ T_2}.$$

   - Donc,

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0}\, p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = (T_1\ p + 1)\ (T_2\ p + 1)\,.$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.
   - On a alors :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0}\, p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}\left(p + \frac{1}{T_1}\right)\,\left(p + \frac{1}{T_2}\right).$$

   - qui s'écrit également,

$$\frac{1}{\omega_0^2}\left(p + \frac{1}{T_1}\right)\,\left(p + \frac{1}{T_2}\right) = \frac{1}{T_1\ T_2\ \omega_0^2}\,(T_1\ p + 1)\ (T_2\ p + 1)\,.$$

   - On remarque que :

$$p_1 \cdot p_2 = \omega_0^2 = \frac{1}{T_1\ T_2}.$$

   - Donc,

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0}\, p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = (T_1\ p + 1)\ (T_2\ p + 1)\,.$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.
   - On a alors :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0}\, p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}\left(p + \frac{1}{T_1}\right)\,\left(p + \frac{1}{T_2}\right).$$

   - qui s'écrit également,

$$\frac{1}{\omega_0^2}\left(p + \frac{1}{T_1}\right)\,\left(p + \frac{1}{T_2}\right) = \frac{1}{T_1\ T_2\ \omega_0^2}\,(T_1\ p + 1)\ (T_2\ p + 1)\,.$$

   - On remarque que :

$$p_1 \cdot p_2 = \omega_0^2 = \frac{1}{T_1\ T_2}.$$

   - Donc,

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0}\, p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = (T_1\ p + 1)\ (T_2\ p + 1)\,.$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.
   - Les deux pôles réels sont donc :

$$\begin{cases} p_1 & = \omega_0 \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \\ p_2 & = \omega_0 \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \end{cases}$$

$$H(j\ \omega) = \frac{K}{(1 + j\ T_1\ \omega)(1 + j\ T_2\ \omega)}$$

   - avec :

$$\begin{cases} T_1 & = -\frac{1}{p_1} \\ T_2 & = -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

   - On peut alors calculer le gain :

$$G_{dB} = 20\ log(K) - 20\ log(|1 + j\ T_1\ \omega|) - 20\ log(|1 + j\ T_2\ \omega|)$$

$$G_{dB} = 20\ log(K) - 20\ log(\sqrt{1 + (T_1\ \omega)^2}) - 20\ log(\sqrt{1 + (T_2\ \omega)^2})$$

   - **Somme d'un gain pur et de deux gains du premier ordre.**

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.
   - Les deux pôles réels sont donc :

$$\begin{cases} p_1 & = \omega_0 \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \\ p_2 & = \omega_0 \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \end{cases}$$

$$H(j\ \omega) = \frac{K}{(1 + j\ T_1\ \omega)(1 + j\ T_2\ \omega)}$$

   - avec :

$$\begin{cases} T_1 & = -\frac{1}{p_1} \\ T_2 & = -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

   - On peut alors calculer le gain :

$$G_{dB} = 20\ log(K) - 20\ log(|1 + j\ T_1\ \omega|) - 20\ log(|1 + j\ T_2\ \omega|)$$

$$G_{dB} = 20\ log(K) - 20\ log(\sqrt{1 + (T_1\ \omega)^2}) - 20\ log(\sqrt{1 + (T_2\ \omega)^2})$$

   - **Somme d'un gain pur et de deux gains du premier ordre.**

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.
   - Les deux pôles réels sont donc :

$$\begin{cases} p_1 & = \omega_0 \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \\ p_2 & = \omega_0 \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \end{cases}$$

$$H(j\ \omega) = \frac{K}{(1 + j\ T_1\ \omega)(1 + j\ T_2\ \omega)}$$

   - avec :

$$\begin{cases} T_1 & = -\frac{1}{p_1} \\ T_2 & = -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

   - On peut alors calculer le gain :

$$G_{dB} = 20\ log(K) - 20\ log(|1 + j\ T_1\ \omega|) - 20\ log(|1 + j\ T_2\ \omega|)$$

$$G_{dB} = 20\ log(K) - 20\ log(\sqrt{1 + (T_1\ \omega)^2}) - 20\ log(\sqrt{1 + (T_2\ \omega)^2})$$

   - **Somme d'un gain pur et de deux gains du premier ordre.**

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.
   - Les deux pôles réels sont donc :

$$\begin{cases} p_1 & = \omega_0 \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \\ p_2 & = \omega_0 \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \end{cases}$$

$$H(j\ \omega) = \frac{K}{(1 + j\ T_1\ \omega)(1 + j\ T_2\ \omega)}$$

   - avec :

$$\begin{cases} T_1 & = -\frac{1}{p_1} \\ T_2 & = -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

   - On peut alors calculer le gain :

$$G_{dB} = 20\ log(K) - 20\ log(|1 + j\ T_1\ \omega|) - 20\ log(|1 + j\ T_2\ \omega|)$$

$$G_{dB} = 20\ log(K) - 20\ log(\sqrt{1 + (T_1\ \omega)^2}) - 20\ log(\sqrt{1 + (T_2\ \omega)^2})$$

   - **Somme d'un gain pur et de deux gains du premier ordre.**

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.
   - Les deux pôles réels sont donc :

$$\begin{cases} p_1 & = \omega_0 \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \\ p_2 & = \omega_0 \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \end{cases}$$

$$H(j\ \omega) = \frac{K}{(1 + j\ T_1\ \omega)(1 + j\ T_2\ \omega)}$$

   - avec :

$$\begin{cases} T_1 & = -\frac{1}{p_1} \\ T_2 & = -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

   - On peut alors calculer le gain :

$$G_{dB} = 20\ log(K) - 20\ log(|1 + j\ T_1\ \omega|) - 20\ log(|1 + j\ T_2\ \omega|)$$

$$G_{dB} = 20\ log(K) - 20\ log(\sqrt{1 + (T_1\ \omega)^2}) - 20\ log(\sqrt{1 + (T_2\ \omega)^2})$$

   - **Somme d'un gain pur et de deux gains du premier ordre.**

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.
   - Les deux pôles réels sont donc :

$$\begin{cases} p_1 & = \omega_0 \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \\ p_2 & = \omega_0 \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \end{cases}$$

$$H(j\ \omega) = \frac{K}{(1 + j\ T_1\ \omega)(1 + j\ T_2\ \omega)}$$

   - avec :

$$\begin{cases} T_1 & = -\frac{1}{p_1} \\ T_2 & = -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

   - On peut alors calculer le gain :

$$G_{dB} = 20\ log(K) - 20\ log(|1 + j\ T_1\ \omega|) - 20\ log(|1 + j\ T_2\ \omega|)$$

$$G_{dB} = 20\ log(K) - 20\ log(\sqrt{1 + (T_1\ \omega)^2}) - 20\ log(\sqrt{1 + (T_2\ \omega)^2})$$

   - **Somme d'un gain pur et de deux gains du premier ordre.**

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

$$G_{dB} = 20\ log(K) - 20\ log(\sqrt{1 + (T_1\ \omega)^2}) - 20\ log(\sqrt{1 + (T_2\ \omega)^2})$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

$$G_{dB} = 20\ log(K) - 20\ log(\sqrt{1 + (T_1\ \omega)^2}) - 20\ log(\sqrt{1 + (T_2\ \omega)^2})$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

$$G_{dB} = 20\ log(K) - 20\ log(\sqrt{1 + (T_1\ \omega)^2}) - 20\ log(\sqrt{1 + (T_2\ \omega)^2})$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

$$G_{dB} = 20\ log(K) - 20\ log(\sqrt{1 + (T_1\ \omega)^2}) - 20\ log(\sqrt{1 + (T_2\ \omega)^2})$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

$$G_{dB} = 20\ log(K) - 20\ log(\sqrt{1 + (T_1\ \omega)^2}) - 20\ log(\sqrt{1 + (T_2\ \omega)^2})$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

$$G_{dB} = 20\ log(K) - 20\ log(\sqrt{1 + (T_1\ \omega)^2}) - 20\ log(\sqrt{1 + (T_2\ \omega)^2})$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

$$\varphi = -arg\,(1 + j\ T_1\ \omega) - arg\,(1 + j\ T_2\ \omega)$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

$$\varphi = -arg\,(1 + j\ T_1\ \omega) - arg\,(1 + j\ T_2\ \omega)$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

$$\varphi = -arg\,(1 + j\ T_1\ \omega) - arg\,(1 + j\ T_2\ \omega)$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

$$\varphi = -arg\,(1 + j\ T_1\ \omega) - arg\,(1 + j\ T_2\ \omega)$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

$$\varphi = -arg\,(1 + j\ T_1\ \omega) - arg\,(1 + j\ T_2\ \omega)$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

1. $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

$$\varphi = -arg\,(1 + j\ T_1\ \omega) - arg\,(1 + j\ T_2\ \omega)$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

2. • Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.
   - $$|H(j\,\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\,\omega\right)^2}}.$$
   - Diagramme asymptotique de G_{dB} et φ lorsque :
     1. $\omega \longrightarrow 0$,
     2. $\omega \longrightarrow +\infty$.

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

2. • Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.
   - $$|H(j\,\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\,\omega\right)^2}}.$$
   - Diagramme asymptotique de G_{dB} et φ lorsque :
     1. $\omega \longrightarrow 0$,
     2. $\omega \longrightarrow +\infty$.

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

2. • Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.
   - $$|H(j\,\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\,\omega\right)^2}}.$$
   - Diagramme asymptotique de G_{dB} et φ lorsque :
     1. $\omega \longrightarrow 0$,
     2. $\omega \longrightarrow +\infty$.

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

2. • Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.
   - $$|H(j\,\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\,\omega\right)^2}}.$$
   - Diagramme asymptotique de G_{dB} et φ lorsque :
     1. $\omega \longrightarrow 0$,
     2. $\omega \longrightarrow +\infty$.

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

2. • Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.
   - $$|H(j\,\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\,\omega\right)^2}}.$$
   - Diagramme asymptotique de G_{dB} et φ lorsque :
     1. $\omega \longrightarrow 0$,
     2. $\omega \longrightarrow +\infty$.

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

2. • Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.
   1. $\omega \longrightarrow 0$:

$$G_{dB} = 20\ log(K) - 20\ log\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\ \omega\right)^2} \underset{\omega\rightarrow 0}{\sim} 20\ log(K)$$

   Droite horizontale située à $20\ log(K)$

   2. $\omega \longrightarrow +\infty$:

$$G_{dB} = 20\ log(K) - 20\ log(\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\ \omega\right)^2} \underset{\omega\rightarrow +\infty}{\sim} 20\ log(K) - 40\ log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

   • Équation du gain asymptotique $\tilde{G}_{dB}$ en $+\infty$ est donnée par :

$$\tilde{G}_{dB} = 20\ log(K) + 40\ log(\omega_0) - 40\ log(\omega)$$

   Sur le tracé semi-logarithmique, ceci correspond à une droite affine avec :
   - pour coefficient directeur $-40\ dB$ par décade,
   - et qui coupe la branche asymptotique $\omega \rightarrow 0$ en $\omega = \omega_0$.

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

2. • Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.
   1. $\omega \longrightarrow 0$:

$$G_{dB} = 20\ log(K) - 20\ log\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\ \omega\right)^2} \underset{\omega\rightarrow 0}{\sim} 20\ log(K)$$

   Droite horizontale située à $20\ log(K)$

   2. $\omega \longrightarrow +\infty$:

$$G_{dB} = 20\ log(K) - 20\ log(\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\ \omega\right)^2} \underset{\omega\rightarrow +\infty}{\sim} 20\ log(K) - 40\ log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

   • Équation du gain asymptotique $\tilde{G}_{dB}$ en $+\infty$ est donnée par :

$$\tilde{G}_{dB} = 20\ log(K) + 40\ log(\omega_0) - 40\ log(\omega)$$

   Sur le tracé semi-logarithmique, ceci correspond à une droite affine avec :
   - pour coefficient directeur $-40\ dB$ par décade,
   - et qui coupe la branche asymptotique $\omega \rightarrow 0$ en $\omega = \omega_0$.

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

2. • Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.
   1. $\omega \longrightarrow 0$:

$$G_{dB} = 20\ log(K) - 20\ log\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\ \omega\right)^2} \underset{\omega\rightarrow 0}{\sim} 20\ log(K)$$

   Droite horizontale située à $20\ log(K)$
   2. $\omega \longrightarrow +\infty$:

$$G_{dB} = 20\ log(K) - 20\ log(\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\ \omega\right)^2} \underset{\omega\rightarrow +\infty}{\sim} 20\ log(K) - 40\ log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

   • Équation du gain asymptotique $\tilde{G}_{dB}$ en $+\infty$ est donnée par :

$$\tilde{G}_{dB} = 20\ log(K) + 40\ log(\omega_0) - 40\ log(\omega)$$

   Sur le tracé semi-logarithmique, ceci correspond à une droite affine avec :
   - pour coefficient directeur $-40\ dB$ **par décade**,
   - et qui coupe la branche asymptotique $\omega \rightarrow 0$ en $\omega = \omega_0$.

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

2. • Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.
   1. $\omega \longrightarrow 0$:

$$G_{dB} = 20\ log(K) - 20\ log\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\ \omega\right)^2} \underset{\omega\rightarrow 0}{\sim} 20\ log(K)$$

   Droite horizontale située à $20\ log(K)$

   2. $\omega \longrightarrow +\infty$:

$$G_{dB} = 20\ log(K) - 20\ log(\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\ \omega\right)^2} \underset{\omega\rightarrow +\infty}{\sim} 20\ log(K) - 40\ log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

- Équation du gain asymptotique $\tilde{G}_{dB}$ en $+\infty$ est donnée par :

$$\tilde{G}_{dB} = 20\ log(K) + 40\ log(\omega_0) - 40\ log(\omega)$$

Sur le tracé semi-logarithmique, ceci correspond à une droite affine avec :
- pour coefficient directeur $-40\ dB$ **par décade**,
- et qui coupe la branche asymptotique $\omega \rightarrow 0$ en $\omega = \omega_0$.

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

2. • Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.
   1. $\omega \longrightarrow 0$:

$$G_{dB} = 20\ log(K) - 20\ log\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\ \omega\right)^2} \underset{\omega\rightarrow 0}{\sim} 20\ log(K)$$

   Droite horizontale située à $20\ log(K)$

   2. $\omega \longrightarrow +\infty$:

$$G_{dB} = 20\ log(K) - 20\ log(\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\ \omega\right)^2} \underset{\omega\rightarrow +\infty}{\sim} 20\ log(K) - 40\ log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

- Équation du gain asymptotique $\tilde{G}_{dB}$ en $+\infty$ est donnée par :

$$\tilde{G}_{dB} = 20\ log(K) + 40\ log(\omega_0) - 40\ log(\omega)$$

Sur le tracé semi-logarithmique, ceci correspond à une droite affine avec :
- pour coefficient directeur $-40\ dB$ **par décade**,
- et qui coupe la branche asymptotique $\omega \rightarrow 0$ en $\omega = \omega_0$.

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

2. • Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$, 2 pôles complexes : : tracé du diagramme asymptotique en phase

$$\varphi = arg(K) - arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\,\frac{2\xi\,\omega}{\omega_0}\right)$$

1. $\omega \longrightarrow 0$:

$$\varphi \underset{\omega \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

ce qui correspond à une droite horizontale situé à 0°

2. $\omega \longrightarrow +\infty$:

$$\varphi \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} -arg\left(-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right).$$

• Ce qui correspond à l'opposé de l'argument d'un réel pur à partie réelle négative, donc :

$$\varphi \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} -\pi = -180^\circ.$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

2. • Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$, 2 pôles complexes : : tracé du diagramme asymptotique en phase

$$\varphi = arg(K) - arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\,\frac{2\xi\,\omega}{\omega_0}\right)$$

1. $\omega \longrightarrow 0$:

$$\varphi \underset{\omega \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

ce qui correspond à une droite horizontale situé à 0°

2. $\omega \longrightarrow +\infty$:

$$\varphi \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} -arg\left(-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right).$$

- Ce qui correspond à l'opposé de l'argument d'un réel pur à partie réelle négative, donc :

$$\varphi \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} -\pi = -180^\circ.$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

2. • Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$, 2 pôles complexes : : tracé du diagramme asymptotique en phase

$$\varphi = arg(K) - arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\,\frac{2\xi\,\omega}{\omega_0}\right)$$

1. $\omega \longrightarrow 0$:

$$\varphi \underset{\omega \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

ce qui correspond à une droite horizontale situé à 0°

2. $\omega \longrightarrow +\infty$:

$$\varphi \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} -arg\left(-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right).$$

- Ce qui correspond à l'opposé de l'argument d'un réel pur à partie réelle négative, donc :

$$\varphi \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} -\pi = -180^\circ.$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

2. • Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$, 2 pôles complexes : tracé du diagramme asymptotique en phase

$$\varphi = arg(K) - arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\,\frac{2\xi\,\omega}{\omega_0}\right)$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

2. • Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$, 2 pôles complexes : tracé du diagramme asymptotique en phase

$$\varphi = arg(K) - arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\,\frac{2\xi\,\omega}{\omega_0}\right)$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

2. • Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$, 2 pôles complexes : tracé du diagramme asymptotique en phase

$$\varphi = arg(K) - arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\,\frac{2\xi\,\omega}{\omega_0}\right)$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Pulsation de résonance

La pulsation de résonance est définie comme la pulsation correspondant au maximum du gain.

$$\boxed{\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}} \tag{9}$$

Ainsi la résonance existe uniquement si $\xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Facteur de résonance

On appelle le **facteur de résonance ou coefficient de surtension** la grandeur Q définie par :

$$\boxed{Q = \frac{|H(j\,\omega)|_{max}}{\lim\limits_{\omega \to 0} |H(j\,\omega)|} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}.} \tag{10}$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Pulsation de résonance

La pulsation de résonance est définie comme la pulsation correspondant au maximum du gain.

$$\boxed{\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}} \tag{9}$$

Ainsi la résonance existe uniquement si $\xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Facteur de résonance

On appelle le **facteur de résonance ou coefficient de surtension** la grandeur Q définie par :

$$\boxed{Q = \frac{|H(j\,\omega)|_{max}}{\lim\limits_{\omega \to 0} |H(j\,\omega)|} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}.} \tag{10}$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Démonstration du facteur de résonance $|H(j\,\omega)|_{max}$ est obtenu lorsque $\omega = \omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$.

- On obtient alors,

$$|H(j\,\omega)|_{max} = \frac{K}{\sqrt{\left(1-(1-2\xi^2)\,\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\,\omega_0\sqrt{1-2\xi^2}\right)^2}}$$

$$= \frac{K}{\sqrt{(1-1+2\xi^2)^2 + \left(2\xi\sqrt{1-2\xi^2}\right)^2}} = \frac{K}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2\,(1-2\xi^2)}} = \frac{K}{2\,\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

- De plus on peut calculer $\lim\limits_{\omega\to 0} |H(j\,\omega)|$

$$\lim_{\omega\to 0} |H(j\,\omega)| = K.$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Démonstration du facteur de résonance $|H(j\,\omega)|_{max}$ est obtenu lorsque $\omega = \omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$.

- On obtient alors,

$$|H(j\,\omega)|_{max} = \frac{K}{\sqrt{\left(1-(1-2\xi^2)\,\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\,\omega_0\sqrt{1-2\xi^2}\right)^2}}$$

$$= \frac{K}{\sqrt{(1-1+2\xi^2)^2 + \left(2\xi\sqrt{1-2\xi^2}\right)^2}} = \frac{K}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2\,(1-2\xi^2)}} = \frac{K}{2\,\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

- De plus on peut calculer $\lim\limits_{\omega\to 0} |H(j\,\omega)|$

$$\lim_{\omega\to 0} |H(j\,\omega)| = K.$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Construction des diagrammes de Bode : second ordre