



## C6 : Analyse temporelle des systèmes asservis C6-2 : Analyse temporelle des SLCI (2nd ordre)

Émilien DURIF

Lycée La Martinière Monplaisir Lyon  
Classe de MPSI  
15 Mars 2022



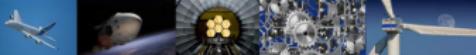
# Plan

## 1 Système du second ordre

- Définition
- Exemple du cours

## 2 Caractérisations de la réponse d'un système du second ordre

- Comportement asymptotique
- Comportement temporel
- Quantification de la réponse indicielle d'un second ordre



# Plan

## 1 Système du second ordre

- Définition
- Exemple du cours

## 2 Caractérisations de la réponse d'un système du second ordre

- Comportement asymptotique
- Comportement temporel
- Quantification de la réponse indicielle d'un second ordre



## Système du second ordre

### Système du second ordre

On appelle système du **deuxième ordre fondamental** tout système linéaire, continu et invariant régi par une équation différentielle de la forme :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K e(t). \quad (1)$$

### Propriété

La fonction de transfert de ces systèmes peut s'écrire sous la **forme canonique suivante** :

$$H(p) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + 1}. \quad (2)$$

où :

- $K$  est le **gain statique**,
- $\xi$  est le **coefficent d'amortissement**,
- $\omega_0$  est la **pulsation propre** (en  $\text{rad s}^{-1}$ ).



## Système du second ordre

### Remarque

On parle de système du second ordre *fondamental* par opposition à un système généralisé, pour lequel le membre de droite de l'équation :

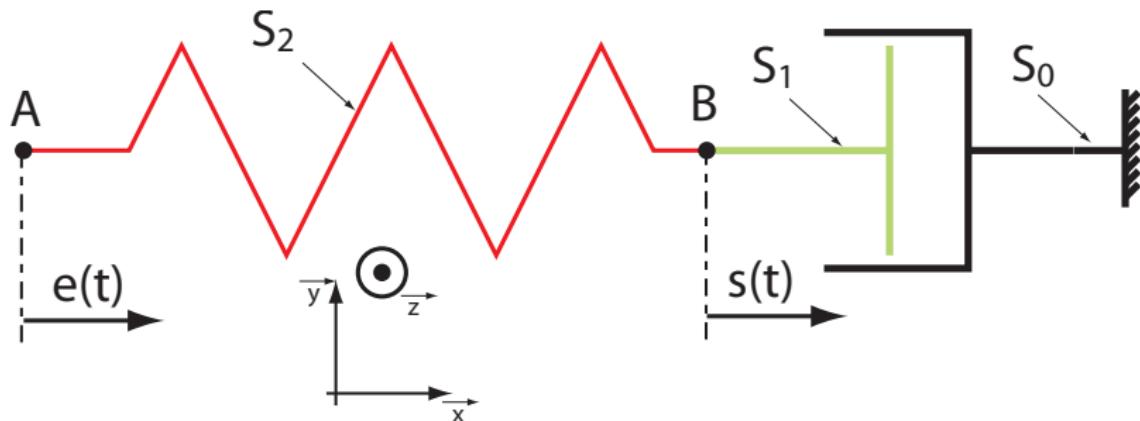
$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K (e(t) + \tau \frac{de(t)}{dt})$$

est une équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre. Dans ce cas, la fonction de transfert généralisée sera de la forme :

$$H(p) = \frac{K(1 + \tau p)}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}. \quad (3)$$

## Système du second ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur  $k$  et amortisseur de coefficient  $c$



On déplace l'extrémité A d'une longueur  $e(t)$ . Le point B répond à ce déplacement en se déplaçant d'une longueur  $s(t)$ .



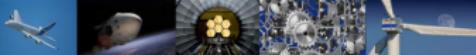
## Système du second ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur  $k$  et amortisseur de coefficient  $c$

Question : Comment le système va répondre ?

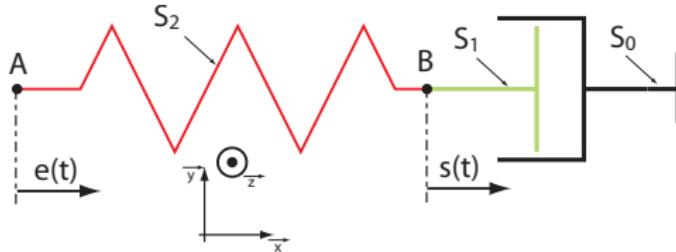
Système oscillant

Système amorti



## Système du second ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur  $k$  et amortisseur de coefficient  $c$



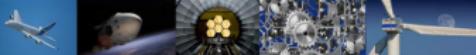
Sans négliger la masse  $m$  de la tige, le principe fondamental de la dynamique appliqué à la tige donne :

- 

$$k(e(t) - s(t)) - c \cdot \frac{ds(t)}{dt} = m \frac{d^2s(t)}{dt^2}$$

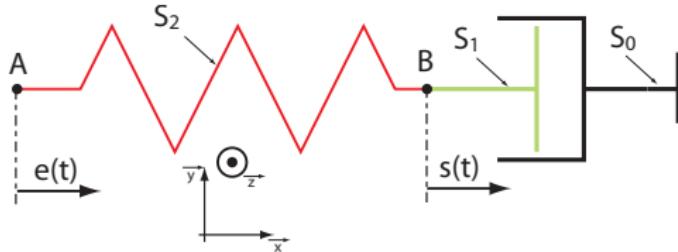
- Équation différentielle de degré 2, ce qui montre que le système est du deuxième ordre.
- Avec les conditions initiales nulles ( $s(t=0) = 0$  et  $s'(t=0) = 0$ ) :

$$m \cdot p^2 \cdot S(p) + c \cdot p \cdot S(p) + k \cdot S(p) = k \cdot E(p).$$



## Système du second ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur  $k$  et amortisseur de coefficient  $c$



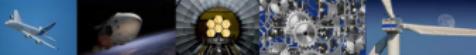
Sans négliger la masse  $m$  de la tige, le principe fondamental de la dynamique appliqué à la tige donne :

- 

$$k(e(t) - s(t)) - c \cdot \frac{ds(t)}{dt} = m \frac{d^2s(t)}{dt^2}$$

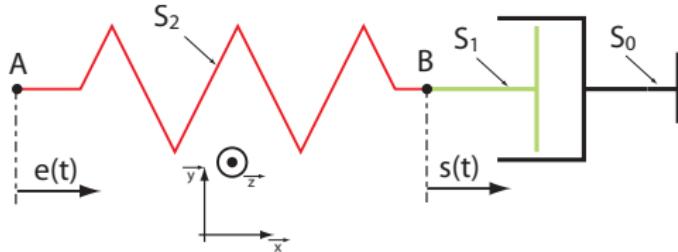
- Équation différentielle de degré 2, ce qui montre que le système est du deuxième ordre.
- Avec les conditions initiales nulles ( $s(t=0) = 0$  et  $s'(t=0) = 0$ ) :

$$m \cdot p^2 \cdot S(p) + c \cdot p \cdot S(p) + k \cdot S(p) = k \cdot E(p).$$



## Système du second ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur  $k$  et amortisseur de coefficient  $c$



Sans négliger la masse  $m$  de la tige, le principe fondamental de la dynamique appliqué à la tige donne :

- 

$$k(e(t) - s(t)) - c \cdot \frac{ds(t)}{dt} = m \frac{d^2s(t)}{dt^2}$$

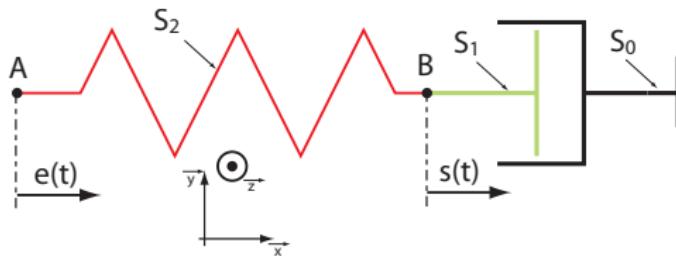
- Équation différentielle de degré 2, ce qui montre que le **système est du deuxième ordre**.
- Avec les conditions initiales nulles ( $s(t = 0) = 0$  et  $s'(t = 0) = 0$ ) :

$$m \cdot p^2 \cdot S(p) + c \cdot p \cdot S(p) + k \cdot S(p) = k \cdot E(p).$$



## Système du second ordre : exemple

Exemple : ressort de raideur  $k$  et amortisseur de coefficient  $c$



Sans négliger la masse  $m$  de la tige, le principe fondamental de la dynamique appliqué à la tige donne :

- 

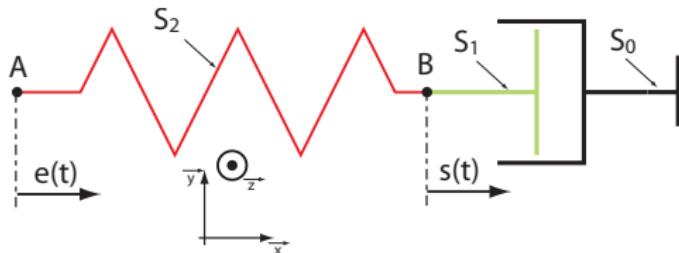
$$k(e(t) - s(t)) - c \cdot \frac{ds(t)}{dt} = m \frac{d^2s(t)}{dt^2}$$

- Équation différentielle de degré 2, ce qui montre que le **système est du deuxième ordre**.
- Avec les conditions initiales nulles ( $s(t = 0) = 0$  et  $s'(t = 0) = 0$ ) :

$$m \cdot p^2 \cdot S(p) + c \cdot p \cdot S(p) + k \cdot S(p) = k \cdot E(p).$$



## Système du second ordre : exemple



On obtient alors l'expression de la transmittance :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + 1}.$$

Avec,

- $K = 1$ ,
- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ,
- $\xi = \frac{c\omega_0}{2k}$ .



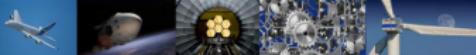
# Plan

## 1 Système du second ordre

- Définition
- Exemple du cours

## 2 Caractérisations de la réponse d'un système du second ordre

- Comportement asymptotique
- Comportement temporel
- Quantification de la réponse indicielle d'un second ordre



## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Transformée de Laplace d'un échelon :

$$E(p) = \frac{e_0}{p}$$



$$\begin{aligned} S(p) &= H(p) E(p) \quad E(p) = \frac{K e_0}{p \left( \frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + 1 \right)} \\ &= \frac{K e_0 \omega_0^2}{p \left( p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2 \right)} \end{aligned}$$



## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- Comportement asymptotique :

Au voisinage de  $+\infty$  :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \dots$$

Au voisinage de 0 :

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \dots$$



## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- Comportement asymptotique :

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} p S(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K e_0 \omega_0^2 p}{p (p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2)} \\ &= K e_0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{ds(t)}{dt} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} s(t) &= \lim_{p \rightarrow +\infty} p S(p) \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{K e_0 \omega_0^2 p}{p (p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2)} \\ &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{ds(t)}{dt} &= \lim_{p \rightarrow +\infty} p \left[ \frac{K e_0 \omega_0^2 p}{p (p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2)} \right] \\ &= 0\end{aligned}$$



## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- Comportement asymptotique :

### Propriétés

La réponse d'un système du deuxième ordre sollicité par un échelon possède :

- une **asymptote horizontale** d'équation  $s(t) = k e_0$  au voisinage de  $+\infty$ ,
- une **tangente horizontale** au voisinage de 0.



## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Pour calculer  $s(t)$ , il faut décomposer  $S(p)$  en éléments simples. Cette opération débute par le calcul **des pôles** de la fonction de transfert.

### pôles de la fonction de transfert

On appelle **pôles de la fonction de transfert** les "zéros" du dénominateur (c'est à dire les racines).

$$S(p) = \frac{K e_0 \omega_0^2}{p(p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2)}.$$

Ici  $p = 0$  est déjà une racine évidente, reste à trouver  $p_1$  et  $p_2$  les racines de  $p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2$  :

$$S(p) = \frac{K e_0 \omega_0^2}{p(p - p_1)(p - p_2)}$$



## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Recherche des racines de  $p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2$  :

Discriminant :  $\Delta = (2\xi\omega_0)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1)$  3 cas possibles :

- ① cas où  $\xi > 1 \rightarrow \Delta > 0$  : 2 pôles réels;
- ② cas où  $\xi = 1 \rightarrow \Delta = 0$  : 1 pôle réel double ;
- ③ cas où  $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$  : 2 pôles complexes.



## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Recherche des racines de  $p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2$  :

- ➊ cas où  $\xi > 1 \rightarrow \Delta > 0$  : 2 pôles réels ;



$$\begin{cases} p_1 = \omega_0 \left( -\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \\ p_2 = \omega_0 \left( -\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \end{cases}$$

- avec  $p_1, p_2 = \omega_0^2$ .

$$S(p) = \frac{K e_0 \omega_0^2}{p(p-p_1)(p-p_2)} = K e_0 \omega_0^2 \left( \frac{A}{p} + \frac{B}{(p-p_1)} + \frac{C}{(p-p_2)} \right)$$

- Il reste à identifier  $A, B$  et  $C$  :

- En multipliant par  $p$  et faisant  $p = 0$ , on obtient :

$$A = 1/\omega_0^2$$

- En multipliant par  $p - p_1$  et faisant  $p = p_1$ , on obtient :

$$B = \frac{1}{p_1(p_1 - p_2)}$$

- En multipliant par  $p - p_2$  et faisant  $p = p_2$ , on obtient :

$$C = \frac{1}{p_2(p_2 - p_1)}$$



## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Recherche des racines de  $p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2$  :

- ➊ cas où  $\xi > 1 \rightarrow \Delta > 0$  : 2 pôles réels ;

•

$$\begin{cases} p_1 = \omega_0 \left( -\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \\ p_2 = \omega_0 \left( -\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \end{cases}$$

- avec  $p_1, p_2 = \omega_0^2$ .

$$S(p) = \frac{K e_0 \omega_0^2}{p(p-p_1)(p-p_2)} = K e_0 \omega_0^2 \left( \frac{A}{p} + \frac{B}{(p-p_1)} + \frac{C}{(p-p_2)} \right)$$

- Il reste à identifier  $A, B$  et  $C$  :

- En multipliant par  $p$  et faisant  $p = 0$ , on obtient :

$$A = 1/\omega_0^2$$

- En multipliant par  $p - p_1$  et faisant  $p = p_1$ , on obtient :

$$B = \frac{1}{p_1(p_1 - p_2)}$$

- En multipliant par  $p - p_2$  et faisant  $p = p_2$ , on obtient :

$$C = \frac{1}{p_2(p_2 - p_1)}$$



## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Recherche des racines de  $p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2$  :

- ① cas où  $\xi > 1 \rightarrow \Delta > 0$  : 2 pôles réels ;



$$\begin{cases} p_1 = \omega_0 \left( -\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \\ p_2 = \omega_0 \left( -\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \end{cases}$$

- avec  $p_1, p_2 = \omega_0^2$ .

$$S(p) = \frac{K e_0 \omega_0^2}{p(p-p_1)(p-p_2)} = K e_0 \omega_0^2 \left( \frac{A}{p} + \frac{B}{(p-p_1)} + \frac{C}{(p-p_2)} \right)$$

- Il reste à identifier  $A, B$  et  $C$  :

- En multipliant par  $p$  et faisant  $p = 0$ , on obtient :

$$A = 1/\omega_0^2$$

- En multipliant par  $p - p_1$  et faisant  $p = p_1$ , on obtient :

$$B = \frac{1}{p_1(p_1 - p_2)}$$

- En multipliant par  $p - p_2$  et faisant  $p = p_2$ , on obtient :

$$C = \frac{1}{p_2(p_2 - p_1)}$$



## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

Recherche des racines de  $p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2$  :

- ① cas où  $\xi > 1 \rightarrow \Delta > 0$  : 2 pôles réels ;

- 

$$\begin{cases} p_1 = \omega_0 \left( -\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \\ p_2 = \omega_0 \left( -\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \end{cases}$$

- avec  $p_1, p_2 = \omega_0^2$ .

$$S(p) = \frac{K e_0 \omega_0^2}{p(p-p_1)(p-p_2)} = K e_0 \omega_0^2 \left( \frac{A}{p} + \frac{B}{(p-p_1)} + \frac{C}{(p-p_2)} \right)$$

- Il reste à identifier  $A, B$  et  $C$  :

- En multipliant par  $p$  et faisant  $p = 0$ , on obtient :

$$A = 1/\omega_0^2$$

- En multipliant par  $p - p_1$  et faisant  $p = p_1$ , on obtient :

$$B = \frac{1}{p_1(p_1 - p_2)}$$

- En multipliant par  $p - p_2$  et faisant  $p = p_2$ , on obtient :

$$C = \frac{1}{p_2(p_2 - p_1)}$$



## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- ➊ cas où  $\xi > 1 \rightarrow \Delta > 0$  : 2 pôles réels ;

$$S(p) = K e_0 \omega_0^2 \left( \frac{1}{\omega_0^2 p} + \frac{1}{p_1 (p_1 - p_2) (p - p_1)} + \frac{1}{p_2 (p_2 - p_1) (p - p_2)} \right)$$

On rappelle que  $\frac{1}{p+a}$  est la transformée de Laplace de  $e^{-at} u(t)$ . Après résolution, on trouve :

$$s(t) = K e_0 \left[ 1 - \frac{1}{p_2 - p_1} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) \right] u(t).$$

### Définition

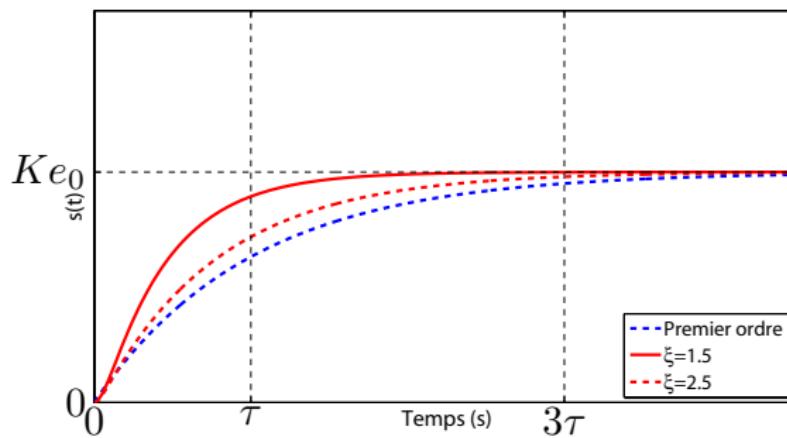
Il s'agit d'un régime apériodique.



## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- ① cas où  $\xi > 1 \rightarrow \Delta > 0$  : 2 pôles réels : régime apériodique

$$s(t) = K e_0 \left[ 1 - \frac{1}{p_2 - p_1} (p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t}) \right] u(t). \quad (4)$$





## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- cas où  $\xi > 1 \rightarrow \Delta > 0$  : 2 pôles réels : **régime apériodique**



## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- ② cas où  $\xi = 1 \rightarrow \Delta = 0$  : 1 pôle réel double

- Racines doubles :

$$r_1 = r_2 = r = -\omega_0$$

- La décomposition en éléments simple est alors :

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{K e_0 \omega_0^2}{p(p-r)^2} \\ &= \frac{A}{p} + \frac{B}{(p-r)} + \frac{C}{(p-r)^2} \end{aligned}$$

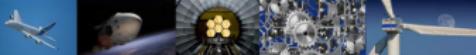
- On trouve au final :

$$s(t) = K e_0 [1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}] u(t)$$

### Definition

On parle alors de régime apériodique critique.





## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- ② cas où  $\xi = 1 \rightarrow \Delta = 0$  : 1 pôle réel double

- Racines doubles :

$$r_1 = r_2 = r = -\omega_0$$

- La décomposition en éléments simple est alors :

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{K e_0 \omega_0^2}{p(p-r)^2} \\ &= \frac{A}{p} + \frac{B}{(p-r)} + \frac{C}{(p-r)^2} \end{aligned}$$

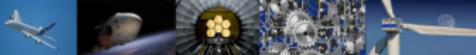
- On trouve au final :

$$s(t) = K e_0 [1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}] u(t)$$

### Definition

On parle alors de régime apériodique critique.





## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- ② cas où  $\xi = 1 \rightarrow \Delta = 0$  : 1 pôle réel double

- Racines doubles :

$$r_1 = r_2 = r = -\omega_0$$

- La décomposition en éléments simple est alors :

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{K e_0 \omega_0^2}{p(p-r)^2} \\ &= \frac{A}{p} + \frac{B}{(p-r)} + \frac{C}{(p-r)^2} \end{aligned}$$

- On trouve au final :

$$s(t) = K e_0 [1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}] u(t)$$

### Definition

On parle alors de régime apériodique critique.





## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- ② cas où  $\xi = 1 \rightarrow \Delta = 0$  : 1 pôle réel double

- Racines doubles :

$$r_1 = r_2 = r = -\omega_0$$

- La décomposition en éléments simple est alors :

$$\begin{aligned} S(p) &= \frac{K e_0 \omega_0^2}{p(p-r)^2} \\ &= \frac{A}{p} + \frac{B}{(p-r)} + \frac{C}{(p-r)^2} \end{aligned}$$

- On trouve au final :

$$s(t) = K e_0 [1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}] u(t)$$

### Definition

On parle alors de régime apériodique critique.



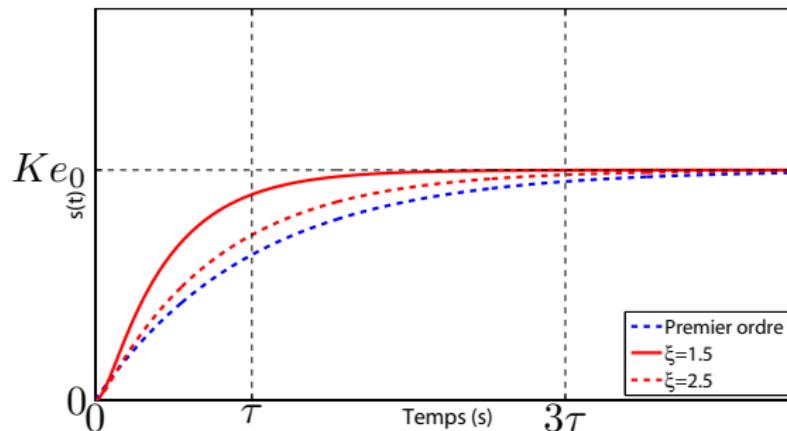


## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- ❷ cas où  $\xi = 1 \rightarrow \Delta = 0$  : 1 pôle réel double : **Régime critique**

On trouve au final :

$$s(t) = K e_0 [1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}] u(t). \quad (5)$$

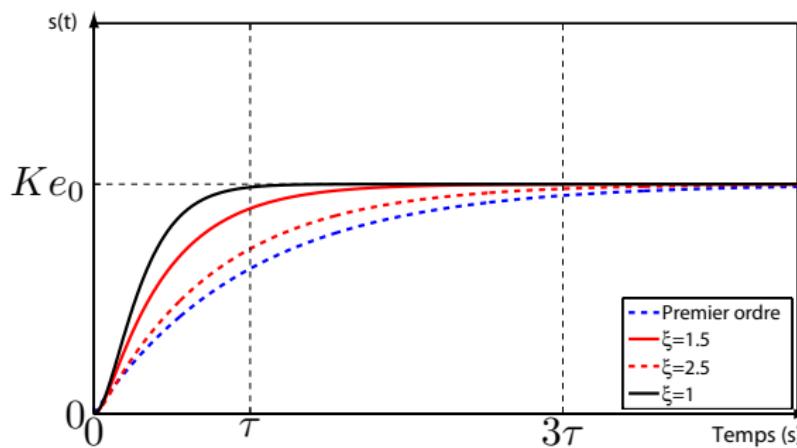


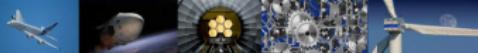
## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- ❷ cas où  $\xi = 1 \rightarrow \Delta = 0$  : 1 pôle réel double : **Régime critique**

On trouve au final :

$$s(t) = K e_0 [1 - (1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}] u(t). \quad (5)$$





## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- ② cas où  $\xi = 1 \rightarrow \Delta = 0$  : 1 pôle réel double : **Régime critique**



## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- ③ cas où  $\xi = < 1 \rightarrow \Delta < 0$  : 2 pôles complexes :

La décomposition en éléments simple est alors :

$$S(p) = \frac{K e_0 \omega_0}{p(p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

La résolution et le retour dans le domaine temporel donne alors :

### Réponse temporelle

$$s(t) = K e_0 \left[ 1 - e^{-\xi\omega_0 t} \left( \cos(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t) \right) \right] u(t). \quad (6)$$



## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- ③ cas où  $\xi = < 1 \rightarrow \Delta < 0$  : 2 pôles complexes :

La décomposition en éléments simple est alors :

$$S(p) = \frac{K e_0 \omega_0}{p(p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

La résolution et le retour dans le domaine temporel donne alors :

### Réponse temporelle

En posant  $\xi = \cos(\phi)$  et  $\sqrt{1 - \xi^2} = \sin(\phi)$ , le résultat peut se simplifier sous la forme :

$$s(t) = K e_0 \left[ 1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t + \phi) \right] u(t). \quad (7)$$

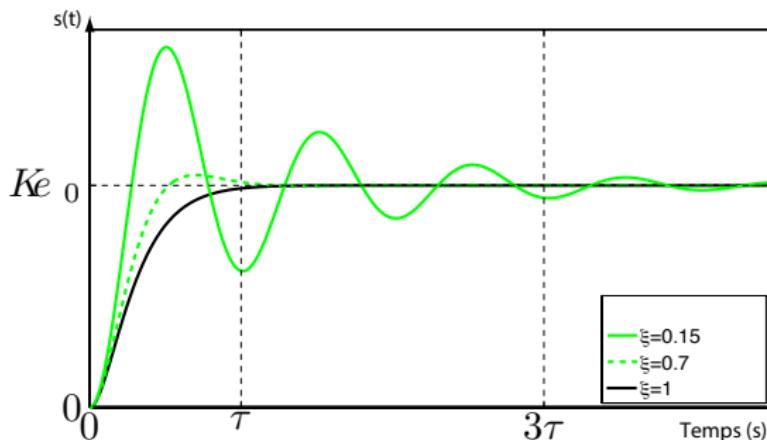


## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

cas où  $\xi = \sqrt{1 - \Delta} < 1$  : 2 pôles complexes : Régime oscillatoire amorti ou

pseudo-périodique

$$s(t) = K e_0 \left[ 1 - \frac{e^{-\xi \omega_0 t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t + \phi) \right] u(t).$$



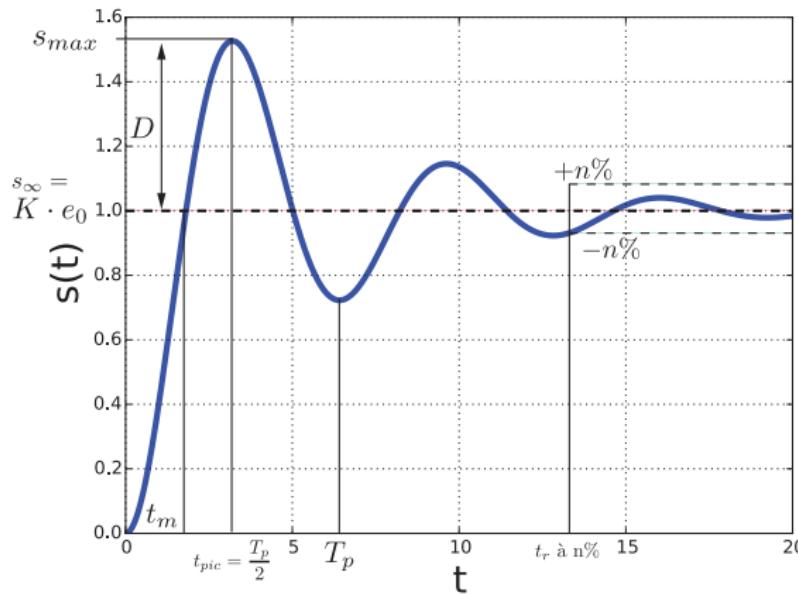


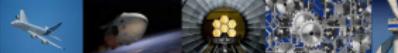
## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

cas où  $\xi = \sqrt{1 - \frac{\Delta}{\omega_0^2}} < 1 \rightarrow \Delta < 0$  : 2 pôles complexes : Régime oscillatoire amorti ou

pseudo-périodique

$$s(t) = K e_0 \left[ 1 - \frac{e^{-\xi \omega_0 t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \left( \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t + \phi \right) \right] u(t).$$



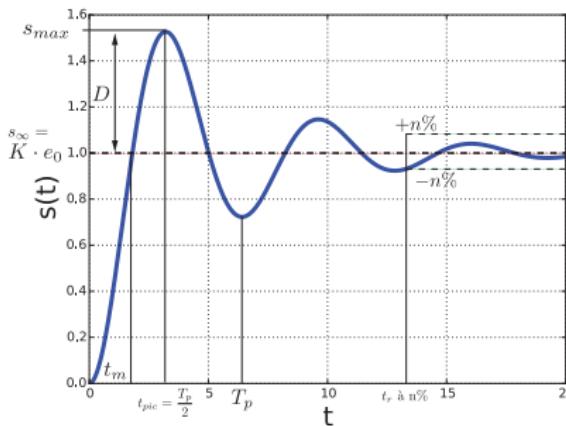


## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

cas où  $\xi = \sqrt{1 - \Delta^2} < 1$  : 2 pôles complexes : Régime oscillatoire amorti ou

pseudo-périodique

$$s(t) = K e_0 \left[ 1 - \frac{e^{-\xi \omega_0 t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \left( \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t + \phi \right) \right] u(t).$$



Pseudo-pulsation	$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$
Pseudo-période	$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$
Temps de pic	$t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$

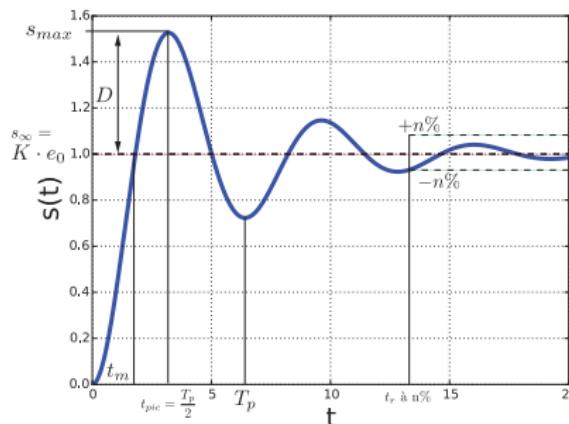


## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

cas où  $\xi = \sqrt{1 - \Delta^2} < 1$  : 2 pôles complexes : Régime oscillatoire amorti ou

pseudo-périodique

$$s(t) = K e_0 \left[ 1 - \frac{e^{-\xi \omega_0 t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \left( \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t + \phi \right) \right] u(t).$$



Dépassement relatif	$Dr = \frac{s_{max} - s_\infty}{s_\infty} = \exp \left( \frac{-\xi \pi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \right)$
Temps de montée	$t_m = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}} (\pi - \text{Arccos}(\xi))$
Temps de réponse à 5% pour $\xi = 0,7$	$t_{r5\%} \cong \frac{3}{\omega_0 \xi}$

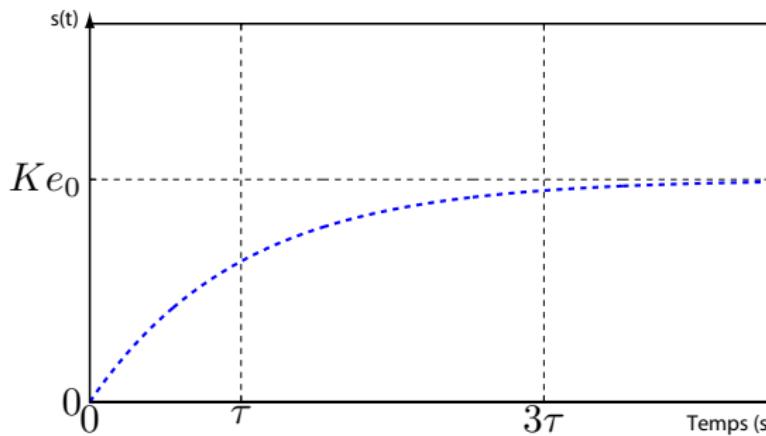


## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- ③ cas où  $\xi = < 1 \rightarrow \Delta < 0$  : 2 pôles complexes : **Régime oscillatoire amorti ou pseudo-périodique**

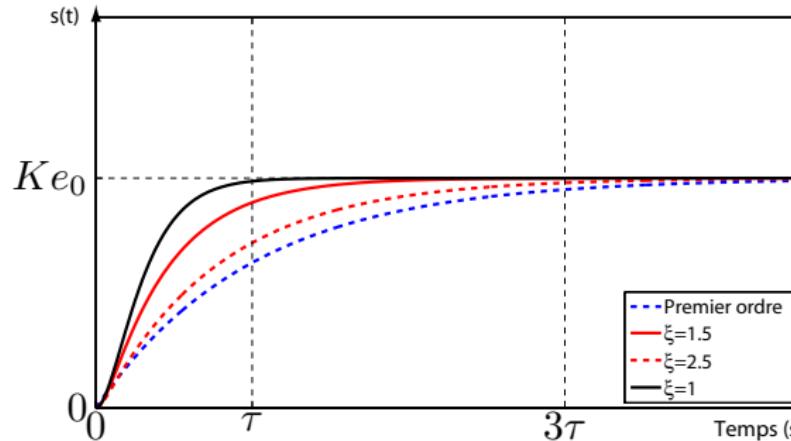
## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- Le paramètre  $\xi$  contribue à l'amortissement du système mais également la diminution de la rapidité.
- Le paramètre  $\omega_0$  augmente la rapidité du système mais contribue à augmenter l'instabilité car il diminue la période d'oscillation du régime pseudo-harmonique.
- Lorsque  $\xi$  augmente, le comportement du système se rapproche de celui d'un premier ordre.



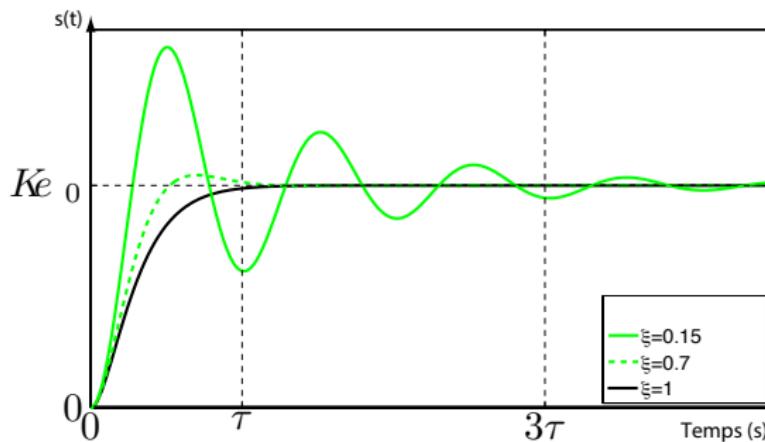
## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- Le paramètre  $\xi$  contribue à l'amortissement du système mais également la diminution de la rapidité.
- Le paramètre  $\omega_0$  augmente la rapidité du système mais contribue à augmenter l'instabilité car il diminue la période d'oscillation du régime pseudo-harmonique.
- Lorsque  $\xi$  augmente, le comportement du système se rapproche de celui d'un premier ordre.



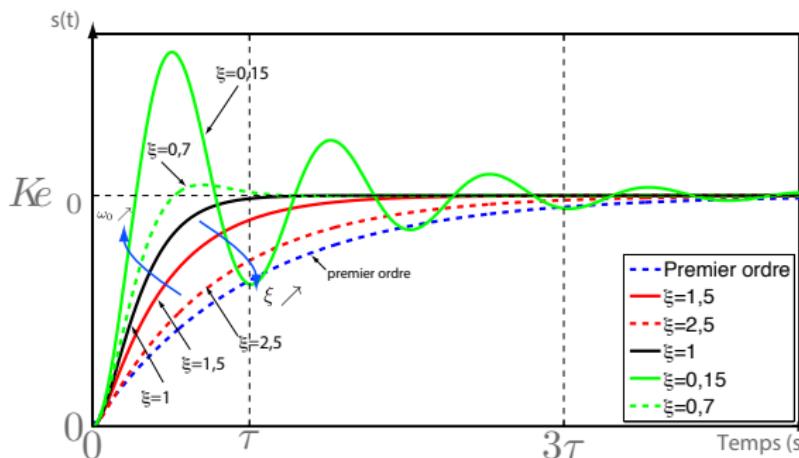
## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- Le paramètre  $\xi$  contribue à l'amortissement du système mais également la diminution de la rapidité.
- Le paramètre  $\omega_0$  augmente la rapidité du système mais contribue à augmenter l'instabilité car il diminue la période d'oscillation du régime pseudo-harmonique.
- Lorsque  $\xi$  augmente, le comportement du système se rapproche de celui d'un premier ordre.



## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

- Le paramètre  $\xi$  contribue à l'amortissement du système mais également la diminution de la rapidité.
- Le paramètre  $\omega_0$  augmente la rapidité du système mais contribue à augmenter l'instabilité car il diminue la période d'oscillation du régime pseudo-harmonique.
- Lorsque  $\xi$  augmente, le comportement du système se rapproche de celui d'un premier ordre.





## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

1. Régime apériodique

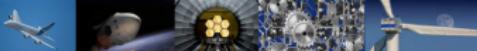
2. Régime critique



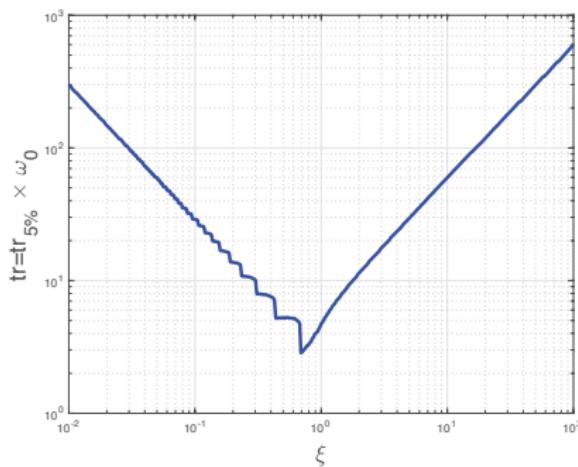
## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

1. Régime apériodique

3. Régime pseudo-périodique



## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon



### Rapidité

Le temps de réponse pour un système du second ordre dépend du coefficient d'amortissement  $\xi$ . Pour une valeur de  $\xi$  donnée, il existe une relation entre  $\omega_0$  et  $t_r$ . On retiendra en particulier :

- le temps de réponse minimum obtenu pour  $\xi = 0,7$  avec  $t_r \omega_0 \approx 3$ ,
- le temps de réponse en régime apériodique critique ( $\xi = 1$ ) :  $t_r \omega_0 \approx 5$



## Système du second ordre : caractérisation de la réponse à un échelon

