Semaine 4 du 6 octobre 2025 (S41)

Logique et raisonnements par récurrence.

1 Propositions.

2 Connecteurs logiques.

2.1 Négation.

2.2 Conjonction « et » et disjonction « ou ».

2.3 Implication.

2.4 Équivalence.

3 Quantificateurs universel et existentiel.

Les quantificateurs ne sont pas définis de manière formelle/ensembliste.

3.1 Définition.

3.2 Permutation de quantificateurs.

Ces propriétés sont admises.

3.3 Négation.

Ces propriétés sont admises.

3.4 Le pseudo-quantificateur $\exists!$.

3.5 Quantificateurs et inégalités.

4 Raisonnements par récurrence.

Les « démonstrations » des différents principes de récurrence ne sont pas exigibles. L'objectif de cette partie est que les étudiants sachent rédiger proprement des raisonnements par récurrence.

4.1 Principe du minimum.

Ce principe est admis, on montrera ultérieurement qu'il est équivalent au principe de récurrence.

4.2 Principe de récurrence simple.

4.3 Erreurs classiques.

4.4 Bonne définition d'une suite définie par récurrence.

Ceci est un exemple motivant l'étude des deux nouveaux principes de récurrence. Aucune connaissance sur les suites récurrentes n'est attendue.

4.5 Récurrence double.

4.6 Récurrence triple, etc.

4.7 Récurrence forte.

4.8 Méthodologie : choix du type de récurrence.

4.9 Récurrence à partir d'un certain rang.

4.10 Récurrence sur un intervalle fini d'entiers.

4.11 Récurrence descendante.

4.12 Quelques récurrences fausses.

Questions de cours

Ces questions de cours sont à savoir traiter, et non à apprendre par cœur.
Les colleurs sont libres de demander tout ou partie d'une de ces questions de cours, mais aussi de mélanger les différentes questions ou de donner des exemples numériques différents de ceux proposés.
L'évaluation de la maîtrise du cours ne se limite pas à la question de cours : la connaissance des définitions et théorèmes du cours pourra être évaluée à tout moment de la colle.

— Soit P et Q deux propositions. À quoi sont équivalentes logiquement $\neg(P \wedge Q)$ et $\neg(P \vee Q)$? Justifier un de ces deux résultats avec une table de vérité.
— Soit q et q deux propositions. À quoi est équivalente la négation de $p \Rightarrow q$? Le démontrer par une table de vérité.
— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Écrire de manière quantifiée, puis nier la phrase
  — f est monotone ;
  — f est périodique ;
  — f s'annule au plus une fois ;
  — f prend au moins une fois la valeur 1.
— Nier la proposition suivante, et déterminer sa valeur de vérité.

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \leqslant y \Rightarrow x^2 \leqslant y^2.$$

— Nier la proposition suivante, et déterminer sa valeur de vérité.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ (|x| \leqslant y) \Rightarrow (x > |y|).$$

— Donner la négation de la proposition suivante, où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall h \in \mathbb{R}^*,\ |h| \leqslant \eta \Rightarrow \left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$
— Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
— Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x-1} = x - |x-3|$.
— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique couple (g, h) de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ tel que g est paire, h est impaire et $f = g + h$.
— Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(y - f(x)) = 2 - x - y$.
— Énoncer le principe de récurrence double.
Montrer que si u est une suite réelle telle que $u_0 =$, $u_1 =$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,$u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 1$.
— Énoncer le principe de récurrence forte.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^p(2q+1)$.