

## C4 : Modélisation cinématiques des systèmes composés de chaines de solides

### C4-3 : Cinématique du point

Émilien DURIF

Lycée La Martinière Monplaisir Lyon  
Classe de MPSI  
11 Décembre 2018



# Plan

1 Grandeur de base liées à la cinématique du point

2 Dérivation vectorielle

3 Composition cinématique

- Composition des vitesses
- Composition des accélérations
- Composition par relation de Chasles



# Plan

1 Grandeur de base liées à la cinématique du point

2 Dérivation vectorielle

3 Composition cinématique

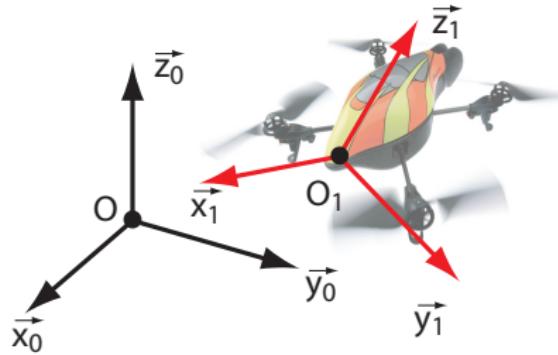
- Composition des vitesses
- Composition des accélérations
- Composition par relation de Chasles



## Introduction

### Introduction

- Ce chapitre présente les bases de calculs liées à la cinématique du point. Nous pourrons alors utiliser ces notions pour étudier les mouvements relatifs de solides.
- On étudiera les mouvements par rapport à des référentiels d'observation. Nous pourrons exprimer les champs de vitesses dans des repères ou des bases qui pourront être différents du référentiel d'observation. On les appellera repère d'expression.

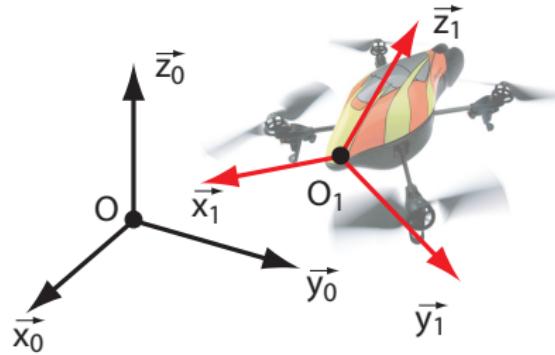


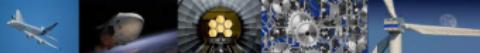


## Introduction

### Introduction

- Ce chapitre présente les bases de calculs liées à la cinématique du point. Nous pourrons alors utiliser ces notions pour étudier les mouvements relatifs de solides.
- On étudiera les mouvements par rapport à des **référentiels d'observation**. Nous pourrons exprimer les champs de vitesses dans des repères ou des bases qui pourront être différents du référentiel d'observation. On les appellera **repère d'expression**.

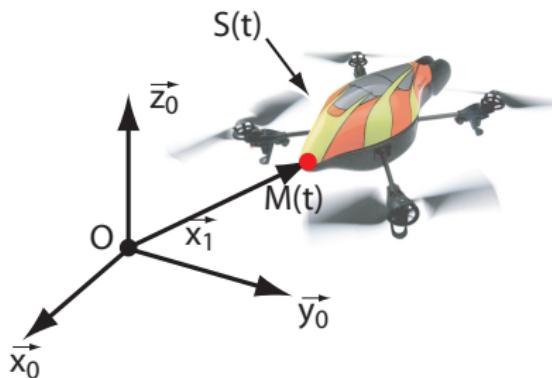




## Cinématique du point : vecteur position

### Vecteur position

Soit un solide  $S$  en mouvement par rapport à un repère  $R_O$  ( $O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0}$ ). On repère un point  $M(t)$  d'un solide à l'aide du vecteur position  $\overrightarrow{OM(t)}$ .



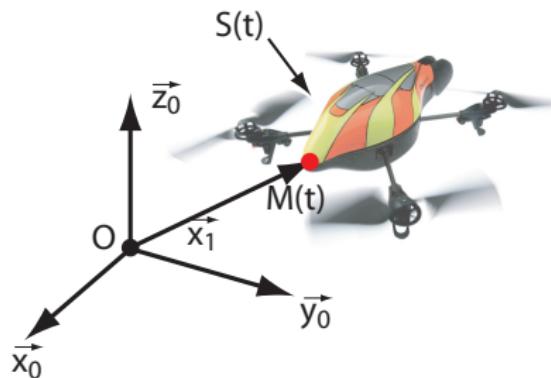
### Remarque

Pour exprimer  $\overrightarrow{OM(t)}$ , on pourra utiliser le système de coordonnées le plus adapté (voir chapitre précédent) au problème en tenant compte de la nature du mouvement.

## Cinématique du point : vecteur position

### Vecteur position

Soit un solide  $S$  en mouvement par rapport à un repère  $R_O$  ( $O, \vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0}$ ). On repère un point  $M(t)$  d'un solide à l'aide du vecteur position  $\overrightarrow{OM(t)}$ .



### Remarque

Pour exprimer  $\overrightarrow{OM(t)}$ , on pourra utiliser le système de coordonnées le plus adapté (voir chapitre précédent) au problème en tenant compte de la nature du mouvement.



## Cinématique du point : vecteur vitesse

### Vecteur vitesse

$$\vec{V}(M/R_0) = \left[ \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} \right]_{R_0}. \quad (1)$$

- Le vecteur vitesse a une direction tangente à la trajectoire.
- La norme du vecteur vitesse est homogène à une longueur divisée par un temps.

### Attention

- Le vecteur vitesse est obtenu par dérivation vectorielle.
- La définition du repère par rapport auquel le vecteur position est dérivé est primordiale.
- Ce vecteur peut toutefois être exprimé dans n'importe quelle base.
- On préfère bien souvent représenter ce vecteur dans la base locale.



## Cinématique du point : vecteur vitesse

### Vecteur vitesse

$$\vec{V}(M/R_0) = \left[ \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} \right]_{R_0}. \quad (1)$$

- Le vecteur vitesse a une direction tangente à la trajectoire.
- La norme du vecteur vitesse est homogène à une longueur divisée par un temps.

### Attention

- Le vecteur vitesse est obtenu par dérivation vectorielle.
- La définition du repère par rapport auquel le vecteur position est dérivé est primordiale.
- Ce vecteur peut toutefois être exprimé dans n'importe quelle base.
- On préfère bien souvent représenter ce vecteur dans la base locale.



## Cinématique du point : vecteur vitesse

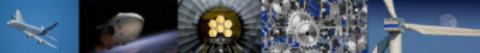
### Vecteur vitesse

$$\vec{V}(M/R_0) = \left[ \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} \right]_{R_0}. \quad (1)$$

- Le vecteur vitesse a une direction tangente à la trajectoire.
- La norme du vecteur vitesse est homogène à une longueur divisée par un temps.

### Attention

- Le vecteur vitesse est obtenu par dérivation vectorielle.
- La définition du repère par rapport auquel le vecteur position est dérivé est primordiale.
- Ce vecteur peut toutefois être exprimé dans n'importe quelle base.
- On préfère bien souvent représenter ce vecteur dans la base locale.



## Cinématique du point : vecteur vitesse

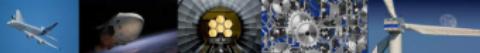
### Vecteur vitesse

$$\vec{V}(M/R_0) = \left[ \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} \right]_{R_0}. \quad (1)$$

- Le vecteur vitesse a une direction tangente à la trajectoire.
- La norme du vecteur vitesse est homogène à une longueur divisée par un temps.

### Attention

- Le vecteur vitesse est obtenu par dérivation vectorielle.
- La définition du repère par rapport auquel le vecteur position est dérivé est primordiale.
- Ce vecteur peut toutefois être exprimé dans n'importe quelle base.
- On préférera bien souvent représenter ce vecteur dans la base locale.



## Cinématique du point : vecteur vitesse

### Vecteur vitesse

$$\vec{V}(M/R_0) = \left[ \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} \right]_{R_0}. \quad (1)$$

- Le vecteur vitesse a une direction tangente à la trajectoire.
- La norme du vecteur vitesse est homogène à une longueur divisée par un temps.

### Attention

- Le vecteur vitesse est obtenu par dérivation vectorielle.
- La définition du repère par rapport auquel le vecteur position est dérivé est primordiale.
- Ce vecteur peut toutefois être exprimé dans n'importe quelle base.
- On préférera bien souvent représenter ce vecteur dans la base locale.

## Cinématique du point : vecteur vitesse

### Vecteur vitesse

$$\vec{V}(M/R_0) = \left[ \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} \right]_{R_0}. \quad (1)$$

- Le vecteur vitesse a une direction tangente à la trajectoire.
- La norme du vecteur vitesse est homogène à une longueur divisée par un temps.

### Attention

- Le vecteur vitesse est obtenu par dérivation vectorielle.
- La définition du repère par rapport auquel le vecteur position est dérivé est primordiale.
- Ce vecteur peut toutefois être exprimé dans n'importe quelle base.
- On préférera bien souvent représenter ce vecteur dans la base locale.



## Cinématique du point : vecteur vitesse

### Vecteur vitesse

$$\vec{V}(M/R_0) = \left[ \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} \right]_{R_0}. \quad (1)$$

- Le vecteur vitesse a une direction tangente à la trajectoire.
- La norme du vecteur vitesse est homogène à une longueur divisée par un temps.

### Attention

- Le vecteur vitesse est obtenu par dérivation vectorielle.
- La définition du repère par rapport auquel le vecteur position est dérivé est primordiale.
- Ce vecteur peut toutefois être exprimé dans n'importe quelle base.
- On préférera bien souvent représenter ce vecteur dans la base locale.



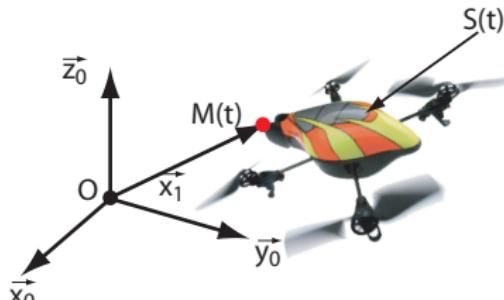
## Cinématique du point : vecteur vitesse

### Interprétation graphique

$$\vec{V}(M/R_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM(t + \Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)}}{\Delta t}.$$

$$\overrightarrow{OM(t + \Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)}$$

On remarque que lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\vec{V}(M/R_0) \mapsto \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)} / \Delta t$





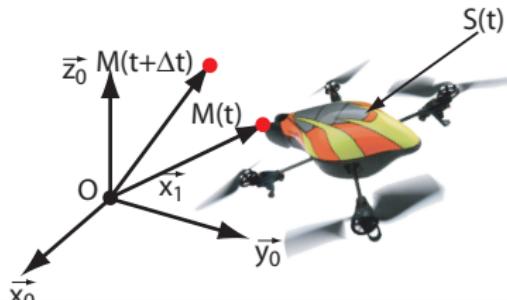
## Cinématique du point : vecteur vitesse

### Interprétation graphique

$$\vec{V}(M/R_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM(t + \Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)}}{\Delta t}.$$

$$\overrightarrow{OM(t + \Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)}$$

On remarque que lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\vec{V}(M/R_0) \mapsto \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)} / \Delta t$





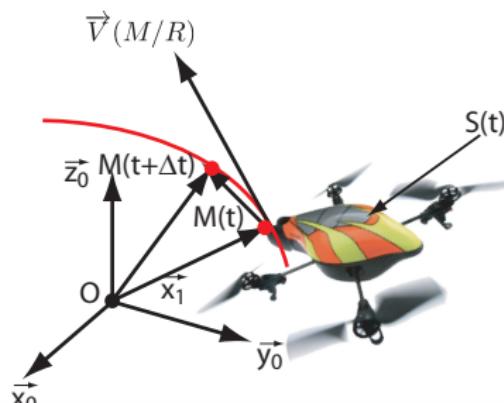
## Cinématique du point : vecteur vitesse

### Interprétation graphique

$$\vec{V}(M/R_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM(t + \Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)}}{\Delta t}.$$

$$\overrightarrow{OM(t + \Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)}$$

On remarque que lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\vec{V}(M/R_0) \mapsto \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)} / \Delta t$





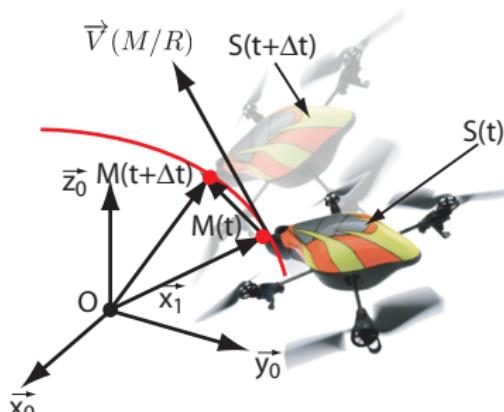
## Cinématique du point : vecteur vitesse

### Interprétation graphique

$$\vec{V}(M/R_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM(t + \Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)}}{\Delta t}.$$

$$\overrightarrow{OM(t + \Delta t)} - \overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)}$$

On remarque que lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\vec{V}(M/R_0) \mapsto \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)} / \Delta t$



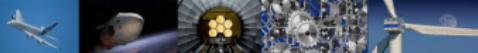


## Cinématique du point : vecteur accélération

### Vecteur accélération

$$\vec{a}(M/R_0) = \left[ \frac{d\vec{V}(M/R_0)}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d^2\vec{OM}(t)}{dt^2} \right]_{R_0}. \quad (2)$$

La norme du vecteur accélération est homogène à une longueur divisée par un temps au carré.

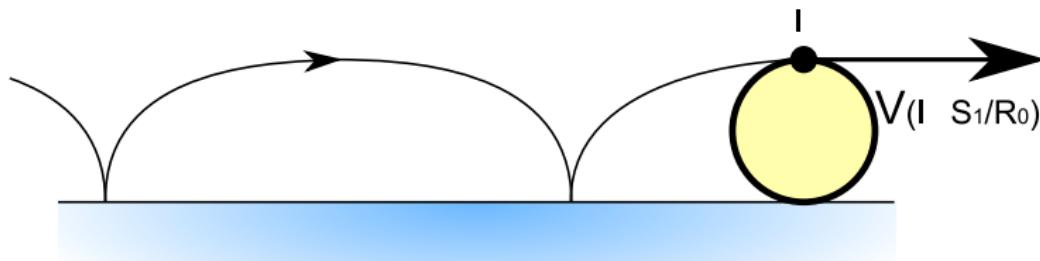


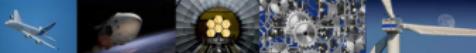
## Cinématique du point : Trajectoire

### Trajectoire

On définit la trajectoire ( $\Delta$ ) du point  $M$  dans le repère  $R_0$  par l'ensemble des points  $I$  de  $R$  par lequel passe  $M$  au cours du temps.

$$(\Delta) = \{M_{(t)}, \forall t\}$$





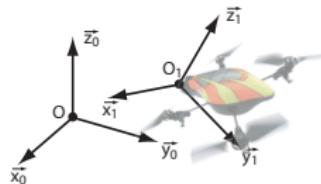
## Cinématique du point : vecteur de rotation instantané

### Vecteur de rotation instantané

Soit le repère  $R_1$  attaché à  $S$ , le **vecteur de rotation instantané** du repère  $R_1$  par rapport à  $R_0$  (ou de  $S/R_0$ ) mesure la vitesse angulaire de changement d'orientation du repère  $R_1$  par rapport à  $R_0$ . On le note

$$\vec{\Omega}(R_1/R_0). \quad (3)$$

Sa norme est homogène à un angle divisé par une unité de temps donc à l'inverse d'un temps (une mesure d'angle est sans dimension).



### Propriété

Contrairement au vecteur vitesse, le vecteur de rotation instantané est le même pour tous les points d'un même solide. Il ne dépend pas du point considéré.



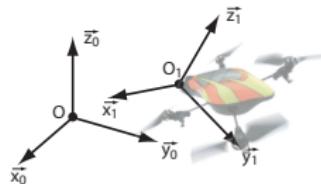
## Cinématique du point : vecteur de rotation instantané

### Vecteur de rotation instantané

Soit le repère  $R_1$  attaché à  $S$ , le **vecteur de rotation instantané** du repère  $R_1$  par rapport à  $R_0$  (ou de  $S/R_0$ ) mesure la vitesse angulaire de changement d'orientation du repère  $R_1$  par rapport à  $R_0$ . On le note

$$\vec{\Omega}(R_1/R_0). \quad (3)$$

Sa norme est homogène à un angle divisé par une unité de temps donc à l'inverse d'un temps (une mesure d'angle est sans dimension).



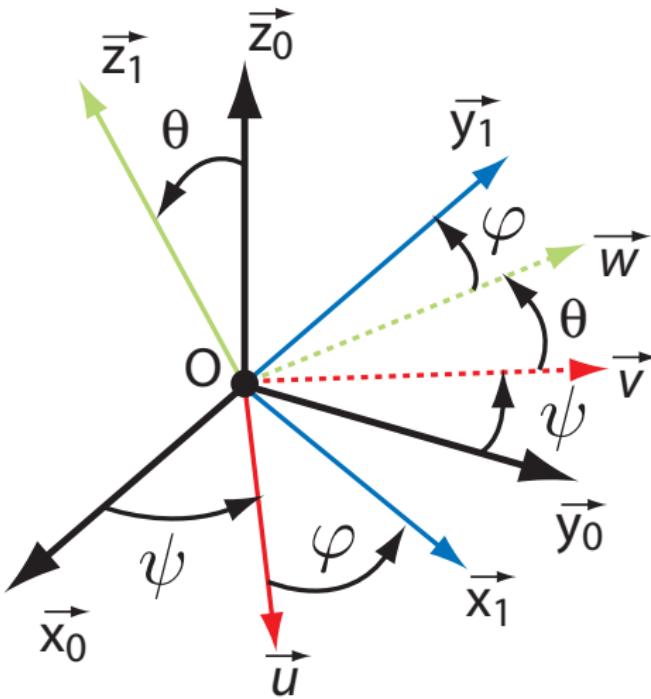
### Propriété

Contrairement au vecteur vitesse, le vecteur de rotation instantané est le même pour tous les points d'un même solide. Il ne dépend pas du point considéré.



## Cinématique du point : vecteur de rotation instantané

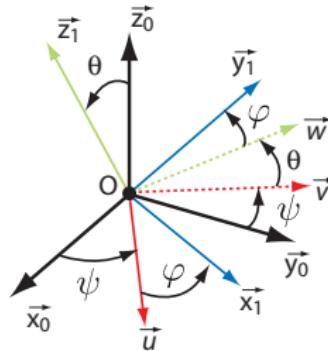
Exemple : angles d'Euler :





## Cinématique du point : vecteur de rotation instantané

Exemple : angles d'Euler :

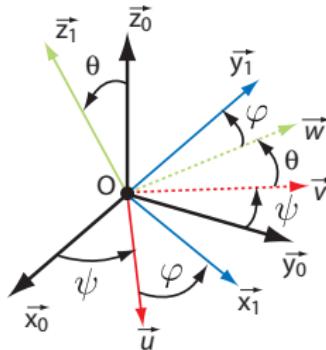


$$\vec{\Omega}(R_1/R_0) = \dot{\psi} \vec{z}_0 + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\varphi} \vec{z}_1$$

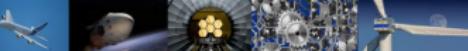


## Cinématique du point : vecteur de rotation instantané

Exemple : angles d'Euler :

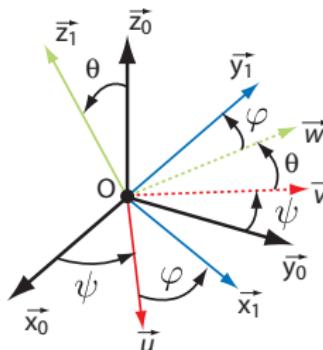


$$\begin{aligned}\vec{\Omega}(R_1/R_0) &= \dot{\psi} \vec{z}_0 + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\varphi} \vec{z}_1 \\ &= \dot{\psi} \vec{z}_0 + \dot{\theta} (\cos(\psi) \vec{x}_0 + \sin(\psi) \vec{y}_0) + \dot{\varphi} (\cos(\theta) \vec{z}_0 - \sin(\theta) \vec{v})\end{aligned}$$



## Cinématique du point : vecteur de rotation instantané

Exemple : angles d'Euler :



$$\begin{aligned}\vec{\Omega}(R_1/R_0) &= \dot{\psi} \vec{z}_0 + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\varphi} \vec{z}_1 \\&= \dot{\psi} \vec{z}_0 + \dot{\theta} (\cos(\psi) \vec{x}_0 + \sin(\psi) \vec{y}_0) + \dot{\varphi} (\cos(\theta) \vec{z}_0 - \sin(\theta) \vec{v}) \\&= \dot{\psi} \vec{z}_0 + \dot{\theta} (\cos(\psi) \vec{x}_0 + \sin(\psi) \vec{y}_0) + \dot{\varphi} (\cos(\theta) \vec{z}_0 - \sin(\theta) (\cos(\psi) \vec{y}_0 - \sin(\psi) \vec{x}_0)) \\&= \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \sin(\theta) \sin(\psi) + \dot{\theta} \cos(\psi) \\ -\dot{\varphi} \sin(\theta) \cos(\psi) + \dot{\theta} \sin(\psi) \\ \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos(\theta) \end{bmatrix}_{R_0}\end{aligned}$$



# Plan

1 Grandeur de base liées à la cinématique du point

2 Dérivation vectorielle

3 Composition cinématique

- Composition des vitesses
- Composition des accélérations
- Composition par relation de Chasles



## Cinématique du point : Dérivation vectorielle

### Vecteur exprimé dans la base de dérivation

•

$$\left[ \frac{d\vec{U}(t)}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d(x(t) \cdot \vec{x}_0 + y(t) \cdot \vec{y}_0 + z(t) \cdot \vec{z}_0)}{dt} \right]_{R_0}$$

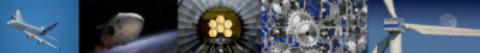
•

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\vec{U}(t)}{dt} \right]_{R_0} &= \frac{dx(t)}{dt} \cdot \vec{x}_0 + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \vec{y}_0 + \frac{dz(t)}{dt} \cdot \vec{z}_0 \\ &+ x(t) \cdot \left[ \frac{d\vec{x}_0}{dt} \right]_{R_0} + y(t) \cdot \left[ \frac{d\vec{y}_0}{dt} \right]_{R_0} + z(t) \cdot \left[ \frac{d\vec{z}_0}{dt} \right]_{R_0}. \end{aligned}$$

- Or les vecteurs unitaires  $\vec{x}_0$ ,  $\vec{y}_0$  et  $\vec{z}_0$  sont fixes dans le repère  $R_0$  ( $O$ ,  $\vec{x}_0$ ,  $\vec{y}_0$ ,  $\vec{z}_0$ ) donc par rapport au temps. On obtient alors :

•

$$\boxed{\left[ \frac{d\vec{U}(t)}{dt} \right]_R = \frac{dx(t)}{dt} \cdot \vec{x}_0 + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \vec{y}_0 + \frac{dz(t)}{dt} \cdot \vec{z}_0.} \quad (4)$$



## Cinématique du point : Dérivation vectorielle

### Vecteur exprimé dans la base de dérivation



$$\left[ \frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d(x(t) \cdot \overrightarrow{x_0} + y(t) \cdot \overrightarrow{y_0} + z(t) \cdot \overrightarrow{z_0})}{dt} \right]_{R_0}$$



$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt} \right]_{R_0} &= \frac{dx(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{x_0} + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{y_0} + \frac{dz(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{z_0} \\ &+ x(t) \cdot \left[ \frac{d\overrightarrow{x_0}}{dt} \right]_{R_0} + y(t) \cdot \left[ \frac{d\overrightarrow{y_0}}{dt} \right]_{R_0} + z(t) \cdot \left[ \frac{d\overrightarrow{z_0}}{dt} \right]_{R_0}. \end{aligned}$$

- Or les vecteurs unitaires  $\overrightarrow{x_0}$ ,  $\overrightarrow{y_0}$  et  $\overrightarrow{z_0}$  sont fixes dans le repère  $R_0$  ( $O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}$ ) donc par rapport au temps. On obtient alors :



$$\boxed{\left[ \frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt} \right]_R = \frac{dx(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{x_0} + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{y_0} + \frac{dz(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{z_0}.} \quad (4)$$



## Cinématique du point : Dérivation vectorielle

### Vecteur exprimé dans la base de dérivation



$$\left[ \frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d(x(t) \cdot \overrightarrow{x_0} + y(t) \cdot \overrightarrow{y_0} + z(t) \cdot \overrightarrow{z_0})}{dt} \right]_{R_0}$$



$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt} \right]_{R_0} &= \frac{dx(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{x_0} + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{y_0} + \frac{dz(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{z_0} \\ &+ x(t) \cdot \left[ \frac{d\overrightarrow{x_0}}{dt} \right]_{R_0} + y(t) \cdot \left[ \frac{d\overrightarrow{y_0}}{dt} \right]_{R_0} + z(t) \cdot \left[ \frac{d\overrightarrow{z_0}}{dt} \right]_{R_0}. \end{aligned}$$

- Or les vecteurs unitaires  $\overrightarrow{x_0}$ ,  $\overrightarrow{y_0}$  et  $\overrightarrow{z_0}$  sont fixes dans le repère  $R_0$  ( $O$ ,  $\overrightarrow{x_0}$ ,  $\overrightarrow{y_0}$ ,  $\overrightarrow{z_0}$ ) donc par rapport au temps. On obtient alors :



$$\boxed{\left[ \frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt} \right]_R = \frac{dx(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{x_0} + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{y_0} + \frac{dz(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{z_0}.} \quad (4)$$



## Cinématique du point : Dérivation vectorielle

### Vecteur exprimé dans la base de dérivation



$$\left[ \frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d(x(t) \cdot \overrightarrow{x_0} + y(t) \cdot \overrightarrow{y_0} + z(t) \cdot \overrightarrow{z_0})}{dt} \right]_{R_0}$$



$$\begin{aligned} \left[ \frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt} \right]_{R_0} &= \frac{dx(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{x_0} + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{y_0} + \frac{dz(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{z_0} \\ &+ x(t) \cdot \left[ \frac{d\overrightarrow{x_0}}{dt} \right]_{R_0} + y(t) \cdot \left[ \frac{d\overrightarrow{y_0}}{dt} \right]_{R_0} + z(t) \cdot \left[ \frac{d\overrightarrow{z_0}}{dt} \right]_{R_0}. \end{aligned}$$

- Or les vecteurs unitaires  $\overrightarrow{x_0}$ ,  $\overrightarrow{y_0}$  et  $\overrightarrow{z_0}$  sont fixes dans le repère  $R_0$  ( $O$ ,  $\overrightarrow{x_0}$ ,  $\overrightarrow{y_0}$ ,  $\overrightarrow{z_0}$ ) donc par rapport au temps. On obtient alors :



$$\boxed{\left[ \frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt} \right]_R = \frac{dx(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{x_0} + \frac{dy(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{y_0} + \frac{dz(t)}{dt} \cdot \overrightarrow{z_0}.} \quad (4)$$



## Cinématique du point : dérivation vectorielle

Vecteur exprimé dans une autre base

dérivation vectorielle

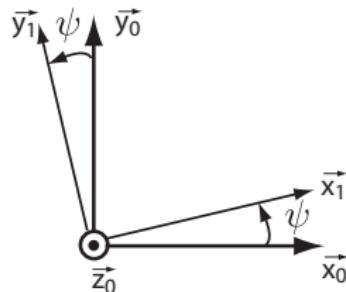
$$\left[ \frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d\overrightarrow{U(t)}}{dt} \right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{U(t)}, \quad (5)$$

où  $\overrightarrow{\Omega}(R_1/R_0)$  est le vecteur de rotation instantané du repère  $R_1$  par rapport au repère  $R_0$ .



## Cinématique du point : dérivation vectorielle

Cas particulier de la rotation de  $R_1$  par rapport à  $R_0$  autour d'un seul axe fixe  $\vec{z}_0$



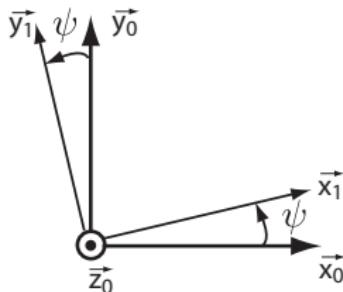
$$\left[ \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_0} = \dots$$

$$\left[ \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_{R_0} = \dots$$

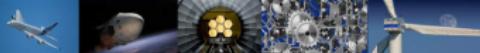


## Cinématique du point : dérivation vectorielle

Cas particulier de la rotation de  $R_1$  par rapport à  $R_0$  autour d'un seul axe fixe  $\vec{z}_0$

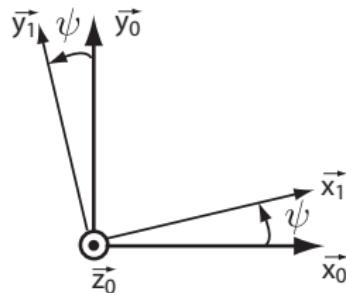


$$\begin{aligned}\left[ \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_0} &= \left[ \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{x}_1 \\ &= \vec{0} + \dot{\psi} \vec{z}_{0,1} \wedge \vec{x}_1 = \dot{\psi} \vec{y}_1\end{aligned}$$
$$\left[ \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_{R_0} = \dots$$



## Cinématique du point : dérivation vectorielle

Cas particulier de la rotation de  $R_1$  par rapport à  $R_0$  autour d'un seul axe fixe  $\vec{z}_0$



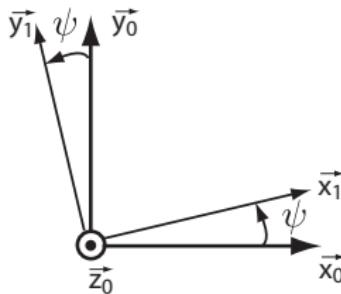
$$\begin{aligned}\left[ \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_0} &= \left[ \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{x}_1 \\ &= \vec{0} + \dot{\psi} \vec{z}_{0,1} \wedge \vec{x}_1 = \dot{\psi} \vec{y}_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[ \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_{R_0} &= \left[ \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{y}_1 \\ &= \vec{0} + \dot{\psi} \vec{z}_{0,1} \wedge \vec{y}_1 = -\dot{\psi} \vec{x}_1.\end{aligned}$$



## Cinématique du point : dérivation vectorielle

Cas particulier de la rotation de  $R_1$  par rapport à  $R_0$  autour d'un seul axe fixe  $\vec{z}_0$



$$\left[ \frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_{R_0} = \dot{\psi} \vec{y}_1$$

$$\left[ \frac{d\vec{y}_1}{dt} \right]_{R_0} = -\dot{\psi} \vec{x}_1$$

### Remarque

On remarque que la dérivée d'un vecteur tournant autour d'un axe fixe par rapport au repère de dérivation, a pour norme, la vitesse angulaire et est dirigée par le vecteur directement orthogonal au vecteur initial.



# Plan

1 Grandeurs de base liées à la cinématique du point

2 Dérivation vectorielle

3 **Composition cinématique**

- Composition des vitesses
- Composition des accélérations
- Composition par relation de Chasles



## Cinématique du point : composition des vitesses

- 

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$$

- On calcule alors la vitesse de  $M$  par rapport au repère  $R_0$  à l'aide de la dérivée vectorielle du vecteur position :

$$\vec{V}(M/R_0) = \left[ \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \right]_{R_0} + \left[ \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_0}.$$

- Or,

$$\left[ \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}.$$

- On obtient alors

$$\begin{aligned} \vec{V}(M/R_0) &= \left[ \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \right]_{R_0} + \left[ \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}. \\ &= \vec{V}_e(M, R_1/R_0) + \vec{V}_r(M/R_1). \end{aligned}$$



## Cinématique du point : composition des vitesses

- 

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$$

- On calcule alors la vitesse de  $M$  par rapport au repère  $R_0$  à l'aide de la dérivée vectorielle du vecteur position :

$$\vec{V}(M/R_0) = \left[ \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \right]_{R_0} + \left[ \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_0}.$$

- Or,

$$\left[ \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}.$$

- On obtient alors

$$\begin{aligned} \vec{V}(M/R_0) &= \left[ \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \right]_{R_0} + \left[ \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}. \\ &= \vec{V}_e(M, R_1/R_0) + \vec{V}_r(M/R_1). \end{aligned}$$



## Cinématique du point : composition des vitesses

- 

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$$

- On calcule alors la vitesse de  $M$  par rapport au repère  $R_0$  à l'aide de la dérivée vectorielle du vecteur position :

$$\vec{V}(M/R_0) = \left[ \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \right]_{R_0} + \left[ \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_0}.$$

- Or,

$$\left[ \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}.$$

- On obtient alors

$$\begin{aligned}\vec{V}(M/R_0) &= \left[ \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \right]_{R_0} + \left[ \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}. \\ &= \vec{V}_e(M, R_1/R_0) + \vec{V}_r(M/R_1).\end{aligned}$$



## Cinématique du point : composition des vitesses

- 

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$$

- On calcule alors la vitesse de  $M$  par rapport au repère  $R_0$  à l'aide de la dérivée vectorielle du vecteur position :

$$\vec{V}(M/R_0) = \left[ \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \right]_{R_0} + \left[ \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_0}.$$

- Or,

$$\left[ \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_0} = \left[ \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}.$$

- On obtient alors

$$\begin{aligned} \vec{V}(M/R_0) &= \left[ \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \right]_{R_0} + \left[ \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}. \\ &= \vec{V}_e(M, R_1/R_0) + \vec{V}_r(M/R_1). \end{aligned}$$



## Cinématique du point : composition des vitesses

- Où  $\vec{V}_e(M/R_0)$  se définit comme la vitesse d'entrainement de M par rapport à  $R_0$  :

$$\begin{aligned}\vec{V}_e(M/R_0) &= \vec{V}(M \in R_1/R_0) = \left[ \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \right]_{R_0} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M} \\ &= \vec{V}(O_1/R_0) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1M} \\ &= \vec{V}(M \in R_1/R_0)\end{aligned}$$

- De plus  $\vec{V}_r(M/R_1)$  se définit comme la vitesse relative de M par rapport au repère  $R_1$  :

$$\vec{V}_r(M/R_1) = \left[ \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right]_{R_1}.$$



## Cinématique du point : composition des vitesses

- Où  $\vec{V}_e(M/R_0)$  se définit comme la vitesse d'entrainement de M par rapport à  $R_0$  :

$$\begin{aligned}\vec{V}_e(M/R_0) &= \vec{V}(M \in R_1/R_0) = \left[ \frac{d\overrightarrow{O_1 M}}{dt} \right]_{R_0} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1 M} \\ &= \vec{V}(O_1/R_0) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1 M} \\ &= \vec{V}(M \in R_1/R_0)\end{aligned}$$

- De plus  $\vec{V}_r(M/R_1)$  se définit comme la vitesse relative de M par rapport au repère  $R_1$  :

$$\vec{V}_r(M/R_1) = \left[ \frac{d\overrightarrow{O_1 M}}{dt} \right]_{R_1}.$$



## Cinématique du point : composition des vitesses

- Où  $\vec{V}_e(M/R_0)$  se définit comme la vitesse d'entrainement de M par rapport à  $R_0$  :

$$\begin{aligned}\vec{V}_e(M/R_0) &= \vec{V}(M \in R_1/R_0) = \left[ \frac{d\overrightarrow{O_1 M}}{dt} \right]_{R_0} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1 M} \\ &= \vec{V}(O_1/R_0) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1 M} \\ &= \vec{V}(M \in R_1/R_0)\end{aligned}$$

- De plus  $\vec{V}_r(M/R_1)$  se définit comme la vitesse relative de M par rapport au repère  $R_1$  :

$$\vec{V}_r(M/R_1) = \left[ \frac{d\overrightarrow{O_1 M}}{dt} \right]_{R_1}.$$



## Cinématique du point : composition des vitesses

### Composition des vitesses

La formule de composition des vitesses s'écrit alors :

$$\vec{V}(M/R_0) = \vec{V}_r(M/R_1) + \vec{V}_e(M, R_1/R_0) = \vec{V}(M/R_1) + \vec{V}(M \in R_1/R_0). \quad (6)$$

Avec



## Cinématique du point : composition des vitesses

### Composition des vitesses

La formule de composition des vitesses s'écrit alors :

$$\vec{V}(M/R_0) = \vec{V}_r(M/R_1) + \vec{V}_e(M, R_1/R_0) = \vec{V}(M/R_1) + \vec{V}(M \in R_1/R_0). \quad (6)$$

Avec



$$\begin{aligned}\vec{V}_e(M, R_1/R_0) &= \left[ \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \right]_{R_0} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1 M} \\ &= \vec{V}(O_1/R_0) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1 M} = \vec{V}(M, R_1/R_0)\end{aligned}$$



$$\vec{V}_r(M/R_1) = \left[ \frac{d\overrightarrow{O_1 M}}{dt} \right]_{R_1}.$$



## Cinématique du point : composition des vitesses

### Composition des vitesses

La formule de composition des vitesses s'écrit alors :

$$\vec{V}(M/R_0) = \vec{V}_r(M/R_1) + \vec{V}_e(M, R_1/R_0) = \vec{V}(M/R_1) + \vec{V}(M \in R_1/R_0). \quad (6)$$

Avec



$$\begin{aligned}\vec{V}_e(M, R_1/R_0) &= \left[ \frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt} \right]_{R_0} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1 M} \\ &= \vec{V}(O_1/R_0) + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1 M} = \vec{V}(M, R_1/R_0)\end{aligned}$$



$$\vec{V}_r(M/R_1) = \left[ \frac{d\overrightarrow{O_1 M}}{dt} \right]_{R_1}.$$



## Cinématique du point : composition des vitesses

### Composition des vitesses

La formule de composition des vitesses s'écrit alors :

$$\vec{V}(M/R_0) = \vec{V}_r(M/R_1) + \vec{V}_e(M, R_1/R_0) = \vec{V}(M/R_1) + \vec{V}(M \in R_1/R_0). \quad (6)$$

Avec

### Interprétation de la vitesse d'entrainement

La vitesse d'entrainement  $\vec{V}(M \in R_1/R_0)$  s'interprète comme la vitesse du point  $M$  appartenant à  $R_1$  par rapport à  $R_0$ . C'est à dire comme si  $M$  était fixe dans  $R_1$ .



## Cinématique du point : composition des accélérations

### Composition des accélérations

La formule de **composition des accélérations** s'écrit :

$$\vec{a}(M/R_0) = \vec{a}(M/R_1) + \vec{a}(M, R_1/R_0) + 2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1) \quad (7)$$

L'accélération **absolue**  $\vec{a}(M/R_0)$  se décompose ainsi en :

- une accélération **relative** :  $\vec{a}(M/R_1)$ ,
- une accélération **d'entraînement** :  
$$\vec{a}(M, R_1/R_0) = \left[ \frac{d}{dt} (\vec{\Omega}(R_1/R_0)) \right]_{R_0} \wedge \overrightarrow{O_1 M} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge (\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1 M}),$$
- une accélération **complémentaire ou de Coriolis** :  $2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1)$ .



## Cinématique du point : composition des accélérations

### Composition des accélérations

La formule de **composition des accélérations** s'écrit :

$$\vec{a}(M/R_0) = \vec{a}(M/R_1) + \vec{a}(M, R_1/R_0) + 2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1) \quad (7)$$

L'accélération **absolue**  $\vec{a}(M/R_0)$  se décompose ainsi en :

- une accélération **relative** :  $\vec{a}(M/R_1)$ ,
- une accélération **d'entraînement** :  
$$\vec{a}(M, R_1/R_0) = \left[ \frac{d}{dt} (\vec{\Omega}(R_1/R_0)) \right]_{R_0} \wedge \overrightarrow{O_1 M} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge (\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1 M}),$$
- une accélération **complémentaire ou de Coriolis** :  $2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1)$ .



## Cinématique du point : composition des accélérations

### Composition des accélérations

La formule de **composition des accélérations** s'écrit :

$$\vec{a}(M/R_0) = \vec{a}(M/R_1) + \vec{a}(M, R_1/R_0) + 2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1) \quad (7)$$

L'accélération **absolue**  $\vec{a}(M/R_0)$  se décompose ainsi en :

- une accélération **relative** :  $\vec{a}(M/R_1)$ ,
- une accélération **d'entraînement** :  
$$\vec{a}(M, R_1/R_0) = \left[ \frac{d}{dt} \left( \vec{\Omega}(R_1/R_0) \right) \right]_{R_0} \wedge \overrightarrow{O_1 M} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge (\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1 M}),$$
- une accélération **complémentaire ou de Coriolis** :  $2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1)$ .



## Cinématique du point : composition des accélérations

### Composition des accélérations

La formule de **composition des accélérations** s'écrit :

$$\vec{a}(M/R_0) = \vec{a}(M/R_1) + \vec{a}(M, R_1/R_0) + 2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1) \quad (7)$$

L'accélération **absolue**  $\vec{a}(M/R_0)$  se décompose ainsi en :

- une accélération **relative** :  $\vec{a}(M/R_1)$ ,
- une accélération **d'entraînement** :  
$$\vec{a}(M, R_1/R_0) = \left[ \frac{d}{dt} \left( \vec{\Omega}(R_1/R_0) \right) \right]_{R_0} \wedge \overrightarrow{O_1 M} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge (\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \overrightarrow{O_1 M}),$$
- une accélération **complémentaire ou de Coriolis** :  $2\vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{V}(M/R_1)$ .



## Composition par relation de Chasles

### Composition par relation de Chasles

Les champs cinématiques associés à la cinématique des solides sont décomposables à l'aide d'une "relation de Chasles" :

- Les vecteurs rotation instantanés :

$$\vec{\Omega}(S_n/S_0) = \vec{\Omega}(S_n/S_{n-1}) + \vec{\Omega}(S_{n-1}/S_{n-2}) + \cdots + \vec{\Omega}(1/0) \quad (8)$$

- les vecteurs vitesses d'entrainement en un même point  $A$  :

$$\vec{V}(A \in S_n/S_0) = \vec{V}(A \in S_n/S_{n-1}) + \vec{V}(A \in S_{n-1}/S_{n-2}) + \cdots + \vec{V}(A \in 1/0) \quad (9)$$

### Remarque : notion de torseur

On verra dans le chapitre suivant que ces deux grandeurs seront modélisables dans un même outil : **Le Torseur Cinématique**.



## Composition par relation de Chasles

### Composition par relation de Chasles

Les champs cinématiques associés à la cinématique des solides sont décomposables à l'aide d'une "relation de Chasles" :

- Les vecteurs rotation instantanés :

$$\vec{\Omega}(S_n/S_0) = \vec{\Omega}(S_n/S_{n-1}) + \vec{\Omega}(S_{n-1}/S_{n-2}) \cdots \vec{\Omega}(1/0) \quad (8)$$

- les vecteurs vitesses d'entrainement en un même point  $A$  :

$$\vec{V}(A \in S_n/S_0) = \vec{V}(A \in S_n/S_{n-1}) + \vec{V}(A \in S_{n-1}/S_{n-2}) \cdots \vec{V}(A \in 1/0) \quad (9)$$

### Remarque : notion de torseur

On verra dans le chapitre suivant que ces deux grandeurs seront modélisables dans un même outil : **Le Torseur Cinématique**.