



C6 : Analyse fréquentielle des systèmes asservis

C6-2 : Analyse fréquentielle des systèmes asservis : modèles élémentaires

Émilien DURIF

Lycée La Martinière Monplaisir Lyon
Classe de MPSI
2 Avril 2019



Plan

1 Lieux de transfert : diagrammes de Bode

- Définition

2 Construction des diagrammes de Bode

- Gain pur
- Intégrateur
- Premier ordre
- Second ordre



Plan

1 Lieux de transfert : diagrammes de Bode

- Définition

2 Construction des diagrammes de Bode

- Gain pur
- Intégrateur
- Premier ordre
- Second ordre



Lieux de transfert : diagrammes de Bode

Diagramme de Bode

- Il représente $s(t) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi)$ (en régime permanent) en fonction de la pulsation ω pour une fonction de transfert $H(p)$. Ce diagramme est composé :
 - d'un diagramme de gain représentant le gain en décibel (G_{db}) en fonction de la pulsation ω

$$G_{db} = 20 \log(G) = 20 \log(|H(j\omega)|); \quad (1)$$

- d'un diagramme de phase représentant la phase en degré (φ en $^{\circ}$) en fonction de la pulsation ω

$$\varphi = \arg(H(j\omega)). \quad (2)$$

- Pour ces deux diagrammes, les abscisses (concernant ω) sont représentées en échelle logarithmique.

Remarque

Il suffit d'étudier le module et l'argument de l'expression $H(j\omega)$ qui est obtenu en remplaçant p par $j\omega$ dans $H(p)$



Lieux de transfert : diagrammes de Bode

Diagramme de Bode

- Il représente $s(t) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi)$ (en régime permanent) en fonction de la pulsation ω pour une fonction de transfert $H(p)$. Ce diagramme est composé :
 - d'un diagramme de gain représentant le gain en décibel (G_{db}) en fonction de la pulsation ω

$$G_{db} = 20 \log(G) = 20 \log(|H(j\omega)|); \quad (1)$$

- d'un diagramme de phase représentant la phase en degré (φ en $^{\circ}$) en fonction de la pulsation ω

$$\varphi = \arg(H(j\omega)). \quad (2)$$

- Pour ces deux diagrammes, les abscisses (concernant ω) sont représentées en échelle logarithmique.

Remarque

Il suffit d'étudier le module et l'argument de l'expression $H(j\omega)$ qui est obtenu en remplaçant p par $j\omega$ dans $H(p)$



Lieux de transfert : diagrammes de Bode

Diagramme de Bode

- Il représente $s(t) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi)$ (en régime permanent) en fonction de la pulsation ω pour une fonction de transfert $H(p)$. Ce diagramme est composé :
 - d'un diagramme de gain représentant le gain en décibel (G_{db}) en fonction de la pulsation ω

$$G_{db} = 20 \log(G) = 20 \log(|H(j\omega)|); \quad (1)$$

- d'un diagramme de phase représentant la phase en degré (φ en $^{\circ}$) en fonction de la pulsation ω

$$\varphi = \arg(H(j\omega)). \quad (2)$$

- Pour ces deux diagrammes, les abscisses (concernant ω) sont représentées en échelle logarithmique.

Remarque

Il suffit d'étudier le module et l'argument de l'expression $H(j\omega)$ qui est obtenu en remplaçant p par $j\omega$ dans $H(p)$



Lieux de transfert : diagrammes de Bode

Diagramme de Bode

- Il représente $s(t) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi)$ (en régime permanent) en fonction de la pulsation ω pour une fonction de transfert $H(p)$. Ce diagramme est composé :
 - d'un diagramme de gain représentant le gain en décibel (G_{db}) en fonction de la pulsation ω

$$G_{db} = 20 \log(G) = 20 \log(|H(j\omega)|); \quad (1)$$

- d'un diagramme de phase représentant la phase en degré (φ en $^{\circ}$) en fonction de la pulsation ω

$$\varphi = \arg(H(j\omega)). \quad (2)$$

- Pour ces deux diagrammes, les abscisses (concernant ω) sont représentées en échelle logarithmique.

Remarque

Il suffit d'étudier le module et l'argument de l'expression $H(j\omega)$ qui est obtenu en remplaçant p par $j\omega$ dans $H(p)$



Lieux de transfert : diagrammes de Bode

Addition des fonction de transfert élémentaire

- **Produit** de fonctions de transfert élémentaires \Rightarrow **somme** de gains et d'arguments élémentaires.
- Pour la fonction de transfert de l'exemple de la suspension moto :

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log \left(\left| \frac{\frac{c}{k} j \omega + 1}{\frac{m}{k} (j\omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1} \right| \right) \\ &= 20 \log \left(\left| \frac{c}{k} j \omega + 1 \right| \right) - 20 \log \left(\left| \frac{m}{k} (j\omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1 \right| \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arg(H(j\omega)) = \arg \left(\frac{\frac{c}{k} j \omega + 1}{\frac{m}{k} (j\omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1} \right) \\ &= \arg \left(\frac{c}{k} j \omega + 1 \right) - \arg \left(\frac{m}{k} (j\omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1 \right) \end{aligned}$$

- Le gain et l'argument total sont respectivement la somme de gains élémentaires et d'arguments élémentaires de fonctions de transfert d'ordre 1 et 2.
- Nécessité d'analyser d'un point de vue fréquentiel successivement chacune des fonctions de transfert élémentaires d'ordre 1 ou 2.



Lieux de transfert : diagrammes de Bode

Addition des fonction de transfert élémentaire

- **Produit** de fonctions de transfert élémentaires \Rightarrow **somme** de gains et d'arguments élémentaires.
- Pour la fonction de transfert de l'exemple de la suspension moto :

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log \left(\left| \frac{\frac{c}{k} j \omega + 1}{\frac{m}{k} (j \omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1} \right| \right) \\ &= 20 \log \left(\left| \frac{c}{k} j \omega + 1 \right| \right) - 20 \log \left(\left| \frac{m}{k} (j \omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1 \right| \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arg(H(j\omega)) = \arg \left(\frac{\frac{c}{k} j \omega + 1}{\frac{m}{k} (j \omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1} \right) \\ &= \arg \left(\frac{c}{k} j \omega + 1 \right) - \arg \left(\frac{m}{k} (j \omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1 \right) \end{aligned}$$

- Le gain et l'argument total sont respectivement la somme de gains élémentaires et d'arguments élémentaires de fonctions de transfert d'ordre 1 et 2.
- Nécessité d'analyser d'un point de vue fréquentiel successivement chacune des fonctions de transfert élémentaires d'ordre 1 ou 2.



Lieux de transfert : diagrammes de Bode

Addition des fonction de transfert élémentaire

- **Produit** de fonctions de transfert élémentaires \Rightarrow **somme** de gains et d'arguments élémentaires.
- Pour la fonction de transfert de l'exemple de la suspension moto :

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log \left(\left| \frac{\frac{c}{k} j \omega + 1}{\frac{m}{k} (j \omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1} \right| \right) \\ &= 20 \log \left(\left| \frac{c}{k} j \omega + 1 \right| \right) - 20 \log \left(\left| \frac{m}{k} (j \omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1 \right| \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arg(H(j\omega)) = \arg \left(\frac{\frac{c}{k} j \omega + 1}{\frac{m}{k} (j \omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1} \right) \\ &= \arg \left(\frac{c}{k} j \omega + 1 \right) - \arg \left(\frac{m}{k} (j \omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1 \right) \end{aligned}$$

- Le gain et l'argument total sont respectivement la somme de gains élémentaires et d'arguments élémentaires de fonctions de transfert d'ordre 1 et 2.
- Nécessité d'analyser d'un point de vue fréquentiel successivement chacune des fonctions de transfert élémentaires d'ordre 1 ou 2.



Lieux de transfert : diagrammes de Bode

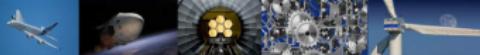
Addition des fonction de transfert élémentaire

- **Produit** de fonctions de transfert élémentaires \Rightarrow **somme** de gains et d'arguments élémentaires.
- Pour la fonction de transfert de l'exemple de la suspension moto :

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log \left(\left| \frac{\frac{c}{k} j \omega + 1}{\frac{m}{k} (j \omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1} \right| \right) \\ &= 20 \log \left(\left| \frac{c}{k} j \omega + 1 \right| \right) - 20 \log \left(\left| \frac{m}{k} (j \omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1 \right| \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \arg(H(j\omega)) = \arg \left(\frac{\frac{c}{k} j \omega + 1}{\frac{m}{k} (j \omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1} \right) \\ &= \arg \left(\frac{c}{k} j \omega + 1 \right) - \arg \left(\frac{m}{k} (j \omega)^2 + \frac{c}{k} j \omega + 1 \right) \end{aligned}$$

- Le gain et l'argument total sont respectivement la somme de gains élémentaires et d'arguments élémentaires de fonctions de transfert d'ordre 1 et 2.
- Nécessité d'analyser d'un point de vue fréquentiel successivement chacune des fonctions de transfert élémentaires d'ordre 1 ou 2.



Plan

1 Lieux de transfert : diagrammes de Bode

- Définition

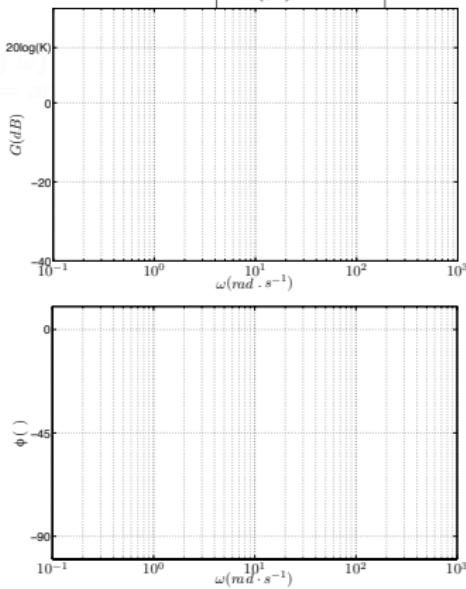
2 Construction des diagrammes de Bode

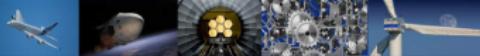
- Gain pur
- Intégrateur
- Premier ordre
- Second ordre

Construction des diagrammes de Bode : gain pur

- #### • Fonction de transfert :

$$H(p) = K. \quad (3)$$





Construction des diagrammes de Bode : gain pur

- Fonction de transfert :

$$H(j\omega) = K.$$

- Ainsi :

- $G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log(K)$
- $\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg(K) = 0$



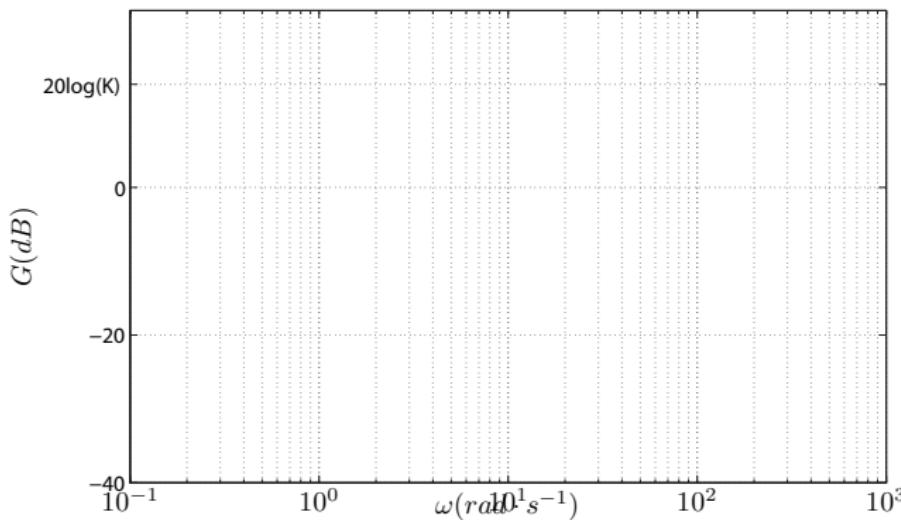
Construction des diagrammes de Bode : gain pur

- Fonction de transfert :

$$H(j\omega) = K.$$

- Ainsi :

- $G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log(K)$,
- $\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg(K) = 0$.





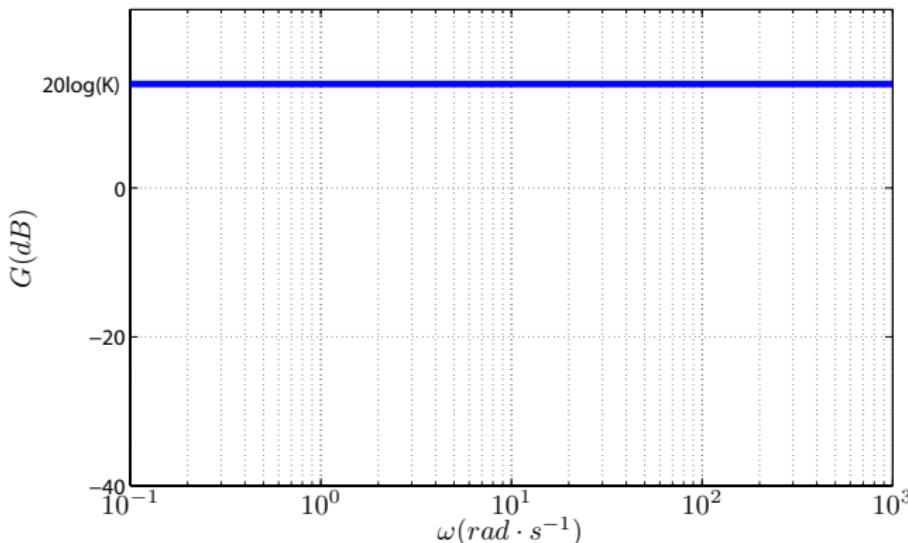
Construction des diagrammes de Bode : gain pur

- Fonction de transfert :

$$H(j\omega) = K.$$

- Ainsi :

- $G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log(K)$,
- $\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg(K) = 0$.





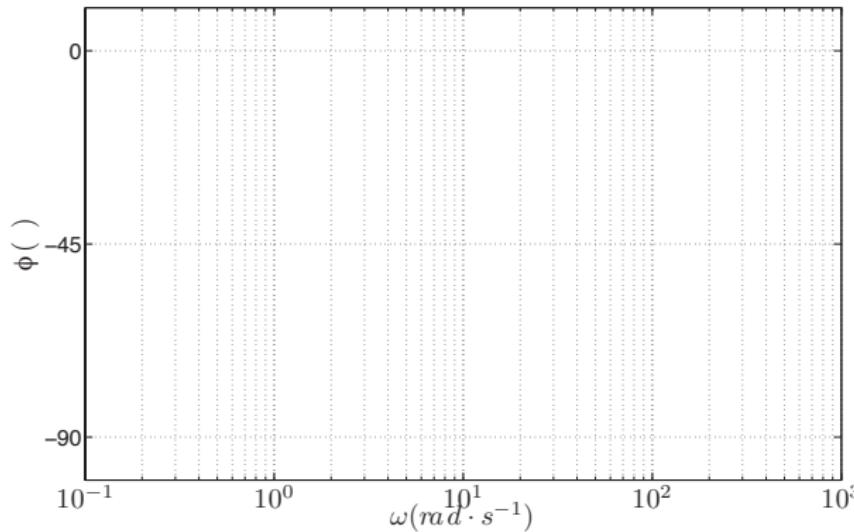
Construction des diagrammes de Bode : gain pur

- Fonction de transfert :

$$H(j\omega) = K.$$

- Ainsi :

- $G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log(K)$,
- $\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg(K) = 0$.





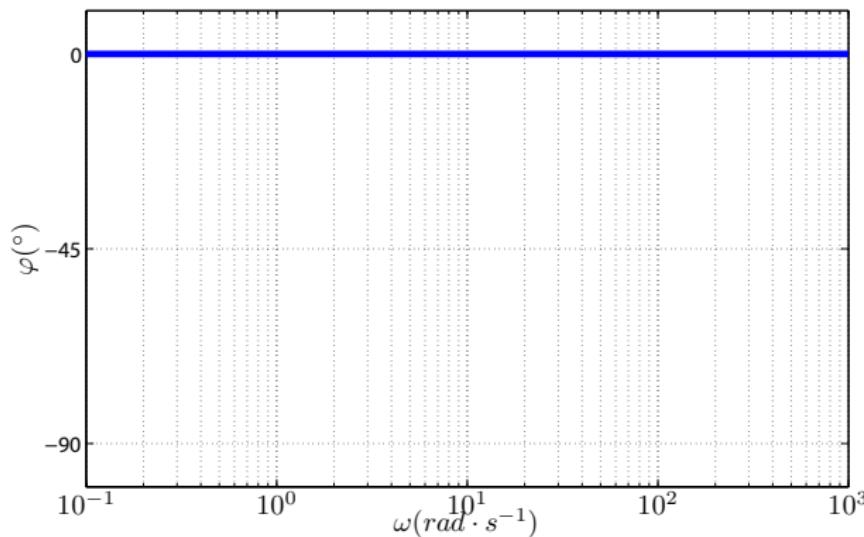
Construction des diagrammes de Bode : gain pur

- Fonction de transfert :

$$H(j\omega) = K.$$

- Ainsi :

- $G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log(K)$,
- $\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg(K) = 0$.

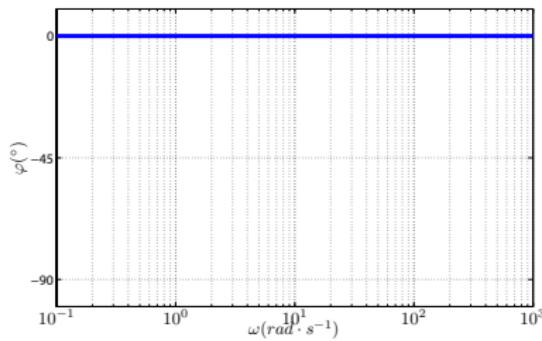
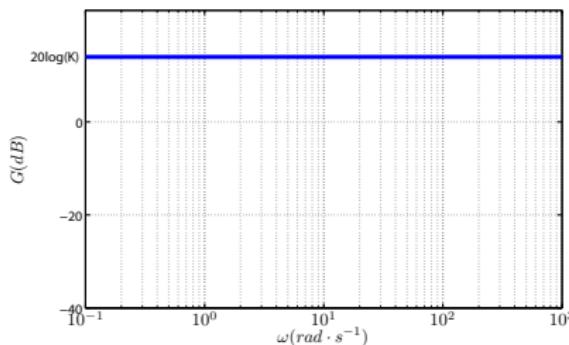




Construction des diagrammes de Bode : gain pur

Fonction de transfert :

$$H(j\omega) = K.$$





Plan

1 Lieux de transfert : diagrammes de Bode

- Définition

2 Construction des diagrammes de Bode

- Gain pur
- Intégrateur
- Premier ordre
- Second ordre



Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

- Fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{p}. \quad (4)$$



Lieux de transfert : diagrammes de Bode Construction des diagrammes de Bode

Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

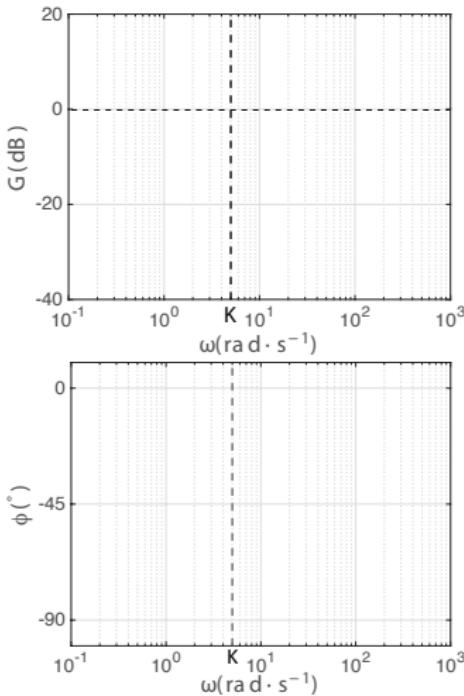
- Fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}.$$



Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

- Fonction de transfert :





Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

- $G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log(K) - 20 \log(\omega)$: droit affine :
 - pour coefficient directeur $-20 \text{ dB par décade}$,
 - et qui coupe l'axe des abscisses en $\omega = K$.



Lieux de transfert : diagrammes de Bode Construction des diagrammes de Bode

Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

- $G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log(K) - 20 \log(\omega)$: droit affine :
 - pour coefficient directeur **-20 dB par décade**,
 - et qui coupe l'axe des abscisses en $\omega = K$.



Lieux de transfert : diagrammes de Bode Construction des diagrammes de Bode

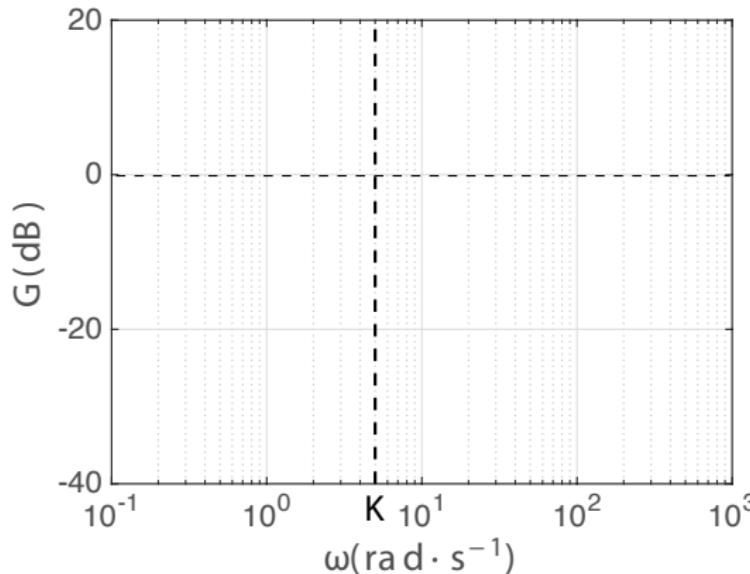
Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

- $G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log(K) - 20 \log(\omega)$: droit affine :
 - pour coefficient directeur **-20 dB par décade**,
 - et qui coupe l'axe des abscisses en $\omega = K$.



Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

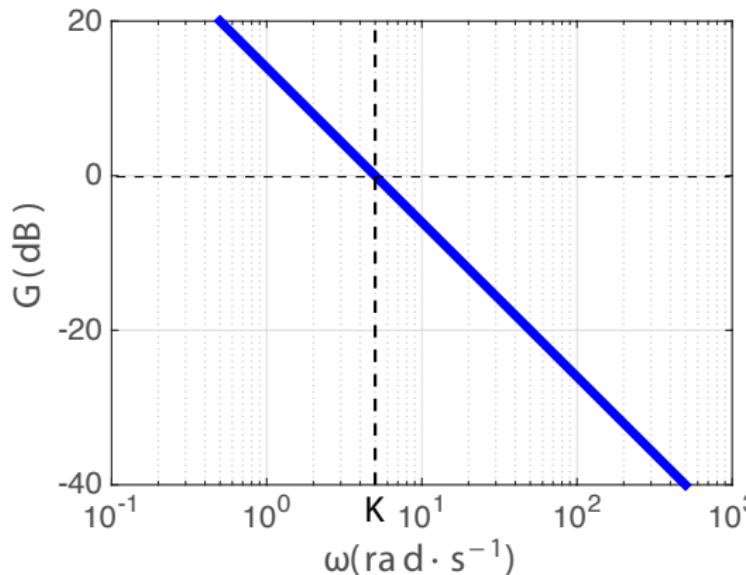
- $G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log(K) - 20 \log(\omega)$: droit affine :
 - pour coefficient directeur **-20 dB par décade**,
 - et qui coupe l'axe des abscisses en $\omega = K$.





Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

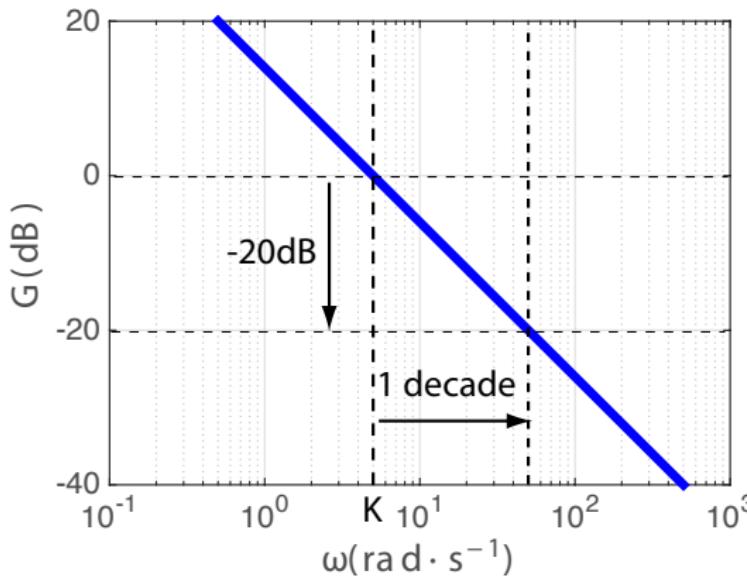
- $G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log(K) - 20 \log(\omega)$: droit affine :
 - pour coefficient directeur **-20 dB par décade**,
 - et qui coupe l'axe des abscisses en $\omega = K$.





Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

- $G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log(K) - 20 \log(\omega)$: droit affine :
 - pour coefficient directeur **-20 dB par décade**,
 - et qui coupe l'axe des abscisses en $\omega = K$.





Lieux de transfert : diagrammes de Bode Construction des diagrammes de Bode

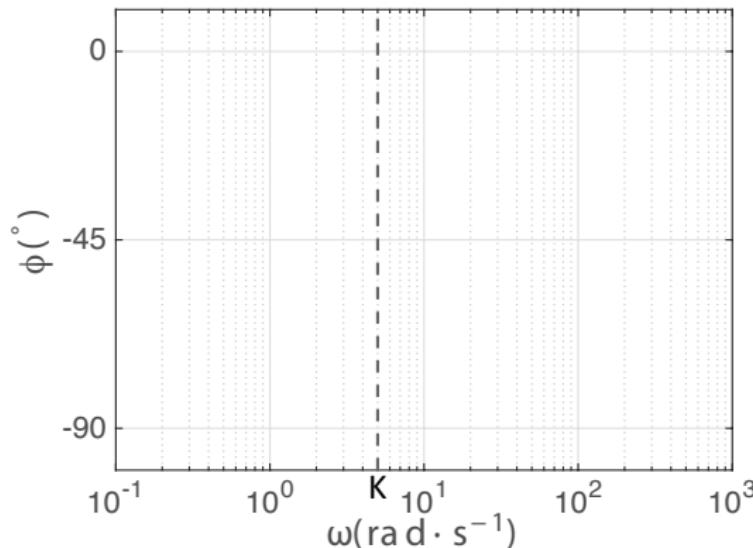
Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

- $\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg(K) - \arg(j\omega) = -90^\circ$: droite horizontale passant par $\varphi = -90^\circ$.



Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

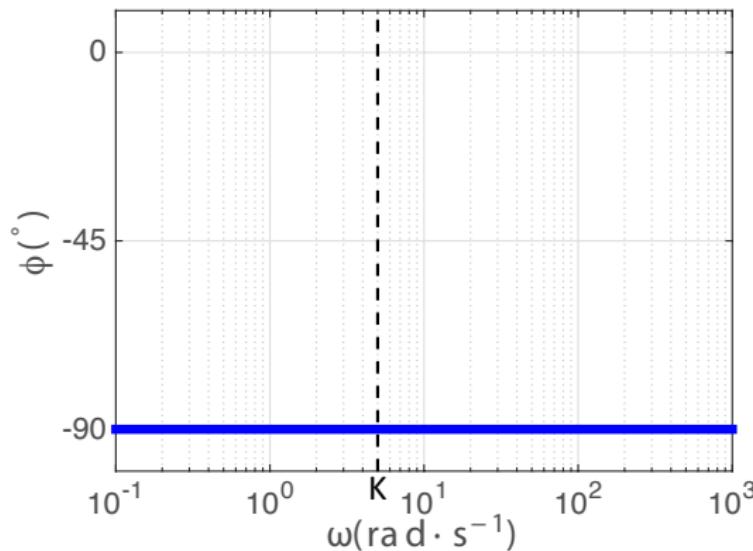
- $\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg(K) - \arg(j\omega) = -90^\circ$: droite horizontale passant par $\varphi = -90^\circ$.





Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

- $\varphi = \arg(H(j\omega)) = \arg(K) - \arg(j\omega) = -90^\circ$: droite horizontale passant par $\varphi = -90^\circ$.

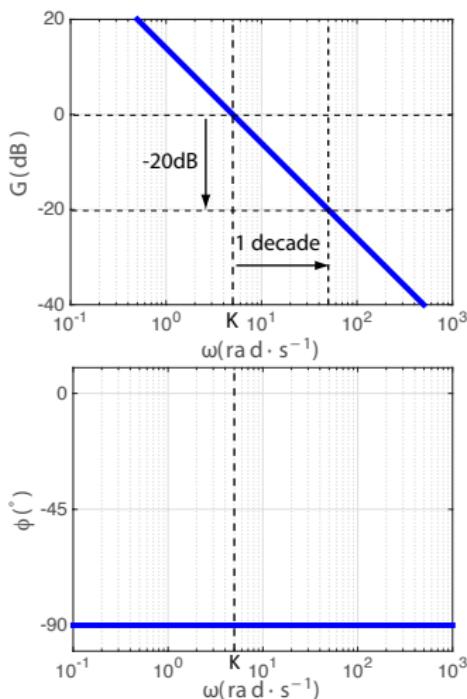




Construction des diagrammes de Bode : intégrateur

Fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}.$$





Plan

1 Lieux de transfert : diagrammes de Bode

- Définition

2 Construction des diagrammes de Bode

- Gain pur
- Intégrateur
- Premier ordre
- Second ordre

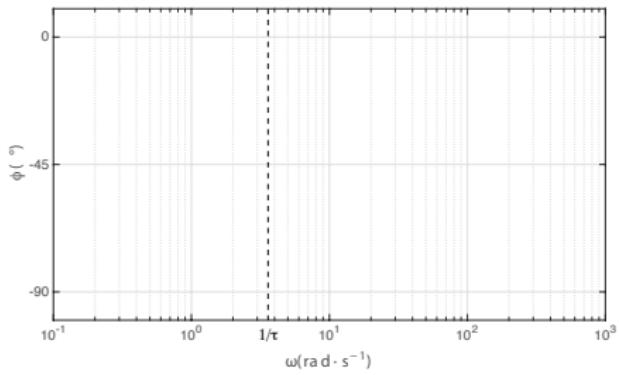
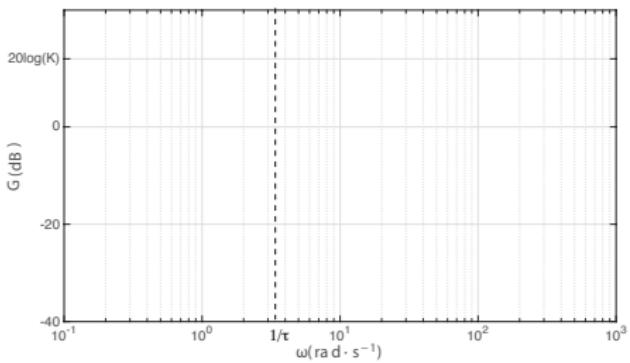


Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- Fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}. \quad (5)$$

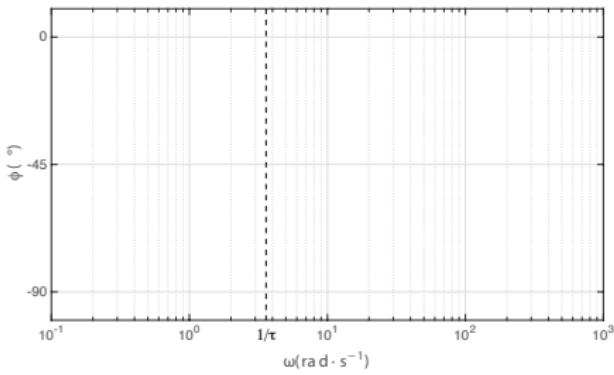
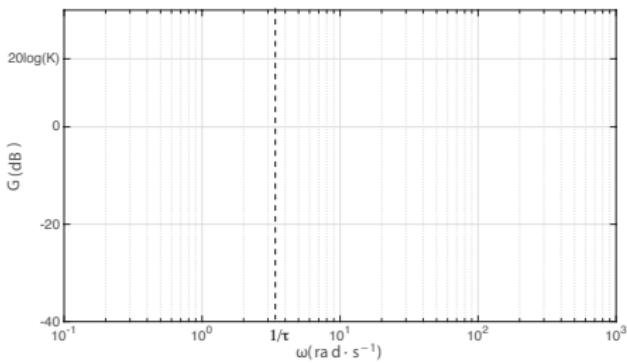
- Diagramme asymptotique : branches approximées de G_{dB} et φ lorsque :



Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- #### • Fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau j\omega}.$$





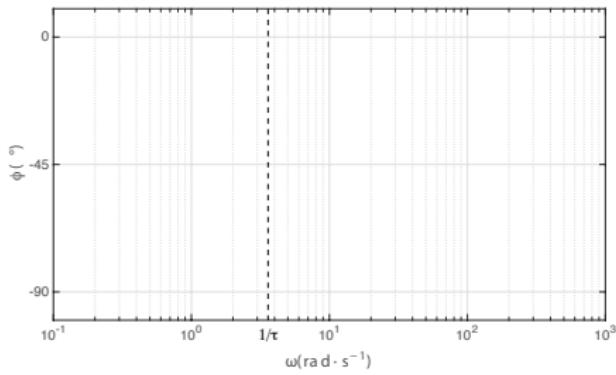
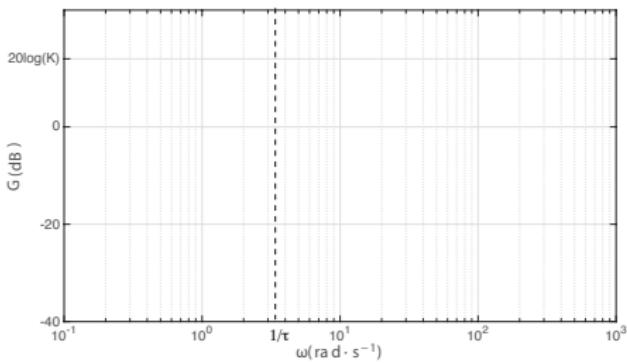
Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- Fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau j\omega}.$$

- Diagramme asymptotique : branches approximées de G_{dB} et φ lorsque :

- ① $\omega \rightarrow 0,$
- ② $\omega \rightarrow +\infty.$





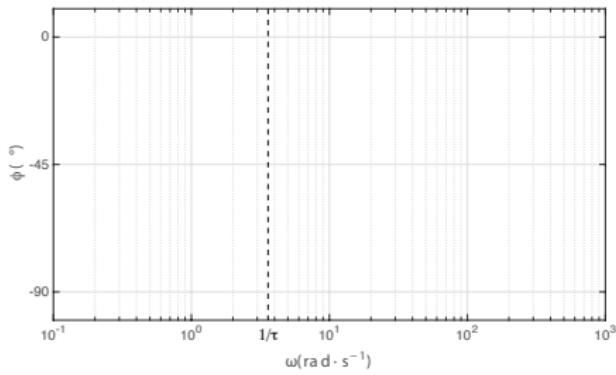
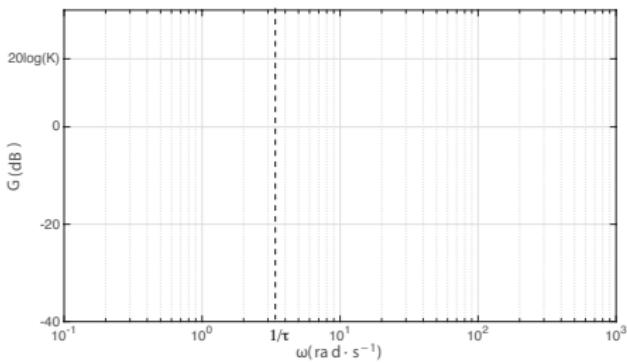
Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- Fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau j\omega}.$$

- Diagramme asymptotique : branches approximées de G_{dB} et φ lorsque :

- ➊ $\omega \rightarrow 0$,
- ➋ $\omega \rightarrow +\infty$.





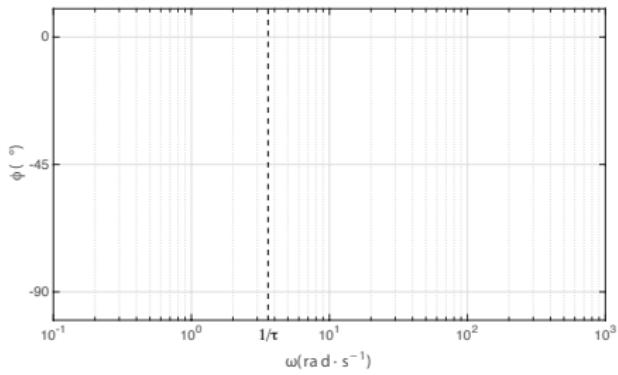
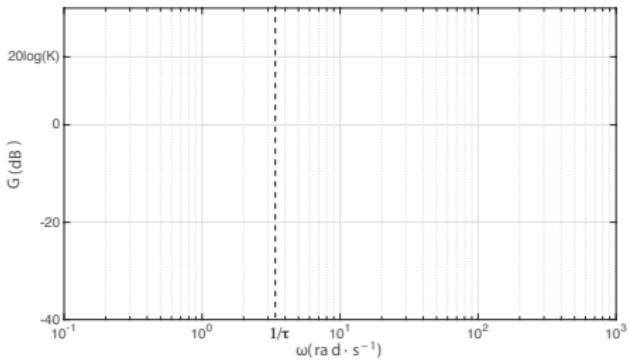
Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- Fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau j\omega}.$$

- Diagramme asymptotique : branches approximées de G_{dB} et φ lorsque :

- ① $\omega \rightarrow 0$,
- ② $\omega \rightarrow +\infty$.





Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- Calcul du gain de $H(j\omega)$:

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log \left(\left| \frac{K}{1 + \tau j \omega} \right| \right) = 20 \log \left(\frac{K}{\sqrt{1 + (\tau \omega)^2}} \right) \\ &= 20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right). \end{aligned}$$

- Tracé du diagramme asymptotique en gain :

➊ $\omega \rightarrow 0^+$

$$20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right) \underset{\omega \rightarrow 0^+}{\approx} 20 \log(K)$$

➋ $\omega \rightarrow +\infty$

$$20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right)$$

$$\underset{\omega \rightarrow +\infty}{\approx} 20 \log(K) - 20 \log \left([\tau \omega]^{\frac{1}{2}} \right) = 20 \log(K) - 2 \cdot \frac{20}{2} \log(\tau \omega)$$

$$= 20 \log(K) - 20 \log(\tau \omega) = 20 \log(K) + 20 \log \left(\frac{1}{\tau} \right) = 20 \log(\omega)$$

Le diagramme asymptotique en gain est donc une droite horizontale à $20 \log(K)$ et une droite descendante à $20 \log(\omega)$.



Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- Calcul du gain de $H(j\omega)$:

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log \left(\left| \frac{K}{1 + \tau j \omega} \right| \right) = 20 \log \left(\frac{K}{\sqrt{1 + (\tau \omega)^2}} \right) \\ &= 20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right). \end{aligned}$$

- Tracé du diagramme asymptotique en gain :

➊ $\omega \rightarrow 0^+$

$$20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0^+} 20 \log(K)$$

➋ $\omega \rightarrow +\infty$

$$20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right) \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 20 \log(K) - 20 \log \left(\left[\tau \omega \right]^{\frac{1}{2}} \right) = 20 \log(K) - 2 \cdot \frac{20}{2} \log(\tau \omega)$$

$$\begin{aligned} &= 20 \log(K) - 20 \log(\tau \omega) = 20 \log(K) + 20 \log \left(\frac{1}{\tau \omega} \right) = 20 \log(K) \end{aligned}$$

Le diagramme asymptotique en gain est donc une droite horizontale à $20 \log(K)$.



Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- Calcul du gain de $H(j\omega)$:

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log \left(\left| \frac{K}{1 + \tau j \omega} \right| \right) = 20 \log \left(\frac{K}{\sqrt{1 + (\tau \omega)^2}} \right) \\ &= 20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right). \end{aligned}$$

- Tracé du diagramme asymptotique en gain :

① $\omega \rightarrow 0$:

$$20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right) \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 20 \log(K)$$

② $\omega \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} &\underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} 20 \log(K) - 20 \log \left([\tau \omega]^2^{1/2} \right) = 20 \log(K) - 2 \frac{20}{2} \log(\tau \omega) \\ &= 20 \log(K) - 20 \log(\tau \omega) = 20 \log(K) + 20 \log \left(\frac{1}{\tau} \right) - 20 \log(\omega) \end{aligned}$$

- Sur le tracé semi-logarithmique, droite affine de coefficient directeur $-20 \text{ dB par décade}$
- Atteignez la droite horizontale ($20 \log(K)$) en $\omega = \frac{1}{\tau}$



Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- Calcul du gain de $H(j\omega)$:

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log \left(\left| \frac{K}{1 + \tau j \omega} \right| \right) = 20 \log \left(\frac{K}{\sqrt{1 + (\tau \omega)^2}} \right) \\ &= 20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right). \end{aligned}$$

- Tracé du diagramme asymptotique en gain :

① $\omega \rightarrow 0$:

$$20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right) \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 20 \log(K)$$

Droite horizontale située à $20 \log(K)$

② $\omega \rightarrow +\infty$:

$$20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right)$$

$$\underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} 20 \log(K) - 20 \log \left([\tau \omega]^2 \right)^{1/2} = 20 \log(K) - 2 \frac{20}{2} \log(\tau \omega)$$

$$= 20 \log(K) - 20 \log(\tau \omega) = 20 \log(K) + 20 \log \left(\frac{1}{\tau} \right) - 20 \log(\omega)$$

- Sur le tracé semi-logarithmique, droite affine de coefficient directeur $-20 \text{ dB par décade}$
- Atteignez la droite horizontale ($20 \log(K)$) en $\omega = \frac{1}{\tau}$



Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- Calcul du gain de $H(j\omega)$:

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log \left(\left| \frac{K}{1 + \tau j \omega} \right| \right) = 20 \log \left(\frac{K}{\sqrt{1 + (\tau \omega)^2}} \right) \\ &= 20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right). \end{aligned}$$

- Tracé du diagramme asymptotique en gain :

① $\omega \rightarrow 0$:

$$20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right) \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 20 \log(K)$$

② Droite horizontale situé à $20 \log(K)$
② $\omega \rightarrow +\infty$:

$$20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right)$$

$$\underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} 20 \log(K) - 20 \log \left([\tau \omega]^2 \right)^{1/2} = 20 \log(K) - 2 \frac{20}{2} \log(\tau \omega)$$

$$= 20 \log(K) - 20 \log(\tau \omega) = 20 \log(K) + 20 \log \left(\frac{1}{\tau} \right) - 20 \log(\omega)$$

- Sur le tracé semi-logarithmique, droite affine de coefficient directeur $-20 \text{ dB par décade}$
- et qui coupe la droite horizontale ($20 \log(K)$) en $\omega = \frac{1}{\tau}$.

Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- Calcul du gain de $H(j\omega)$:

$$G_{dB} = 20 \log \left(\left| \frac{K}{1 + \tau j \omega} \right| \right) = 20 \log \left(\frac{K}{\sqrt{1 + (\tau \omega)^2}} \right)$$

$$= 20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right)$$

- #### • Tracé du diagramme asymptotique en gain :

① $\omega \rightarrow 0$:

$$20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right) \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 20 \log(K)$$

② $\omega \rightarrow +\infty :$

$$\begin{aligned} \omega \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} & 20 \log(K) - 20 \log \left([\tau \omega]^2 \right)^{1/2} = 20 \log(K) - 2 \frac{20}{2} \log(\tau \omega) \\ & = 20 \log(K) - 20 \log(\tau \omega) = 20 \log(K) + 20 \log \left(\frac{1}{\tau} \right) - 20 \log(\omega) \end{aligned}$$

- Sur le tracé semi-logarithmique, droite affine de coefficient directeur -20 dB par d閏ade et qui coupe la droite horizontale ($20 \log(K)$) en $\omega = \frac{1}{\tau}$.



Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

- Calcul du gain de $H(j\omega)$:

$$\begin{aligned} G_{dB} &= 20 \log \left(\left| \frac{K}{1 + \tau j \omega} \right| \right) = 20 \log \left(\frac{K}{\sqrt{1 + (\tau \omega)^2}} \right) \\ &= 20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right). \end{aligned}$$

- Tracé du diagramme asymptotique en gain :

① $\omega \rightarrow 0$:

$$20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right) \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 20 \log(K)$$

Droite horizontale situé à $20 \log(K)$
② $\omega \rightarrow +\infty$:

$$20 \log(K) - 20 \log \left(\sqrt{1 + (\tau \omega)^2} \right)$$

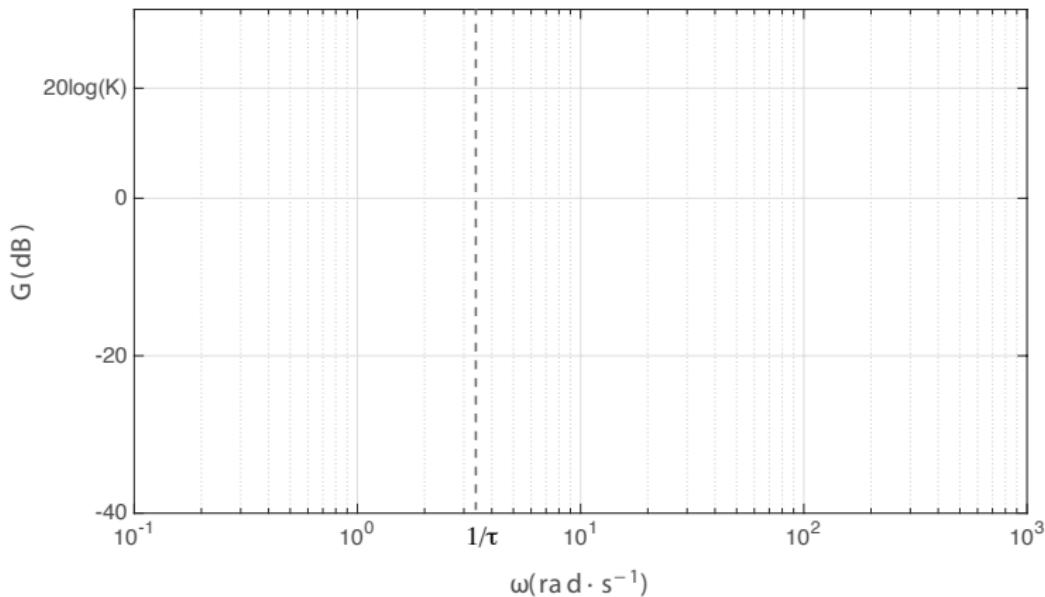
$$\underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} 20 \log(K) - 20 \log \left([\tau \omega]^2 \right)^{1/2} = 20 \log(K) - 2 \frac{20}{2} \log(\tau \omega)$$

$$= 20 \log(K) - 20 \log(\tau \omega) = 20 \log(K) + 20 \log \left(\frac{1}{\tau} \right) - 20 \log(\omega)$$

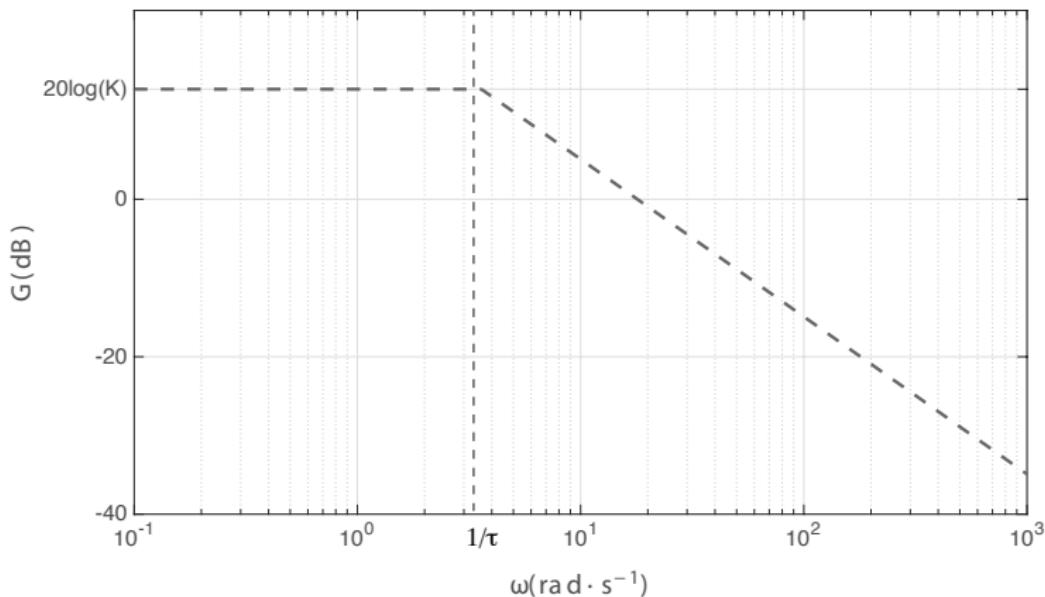
- Sur le tracé semi-logarithmique, droite affine de coefficient directeur -20 dB par d閏ade
- et qui coupe la droite horizontale ($20 \log(K)$) en $\omega = \frac{1}{\tau}$.



Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

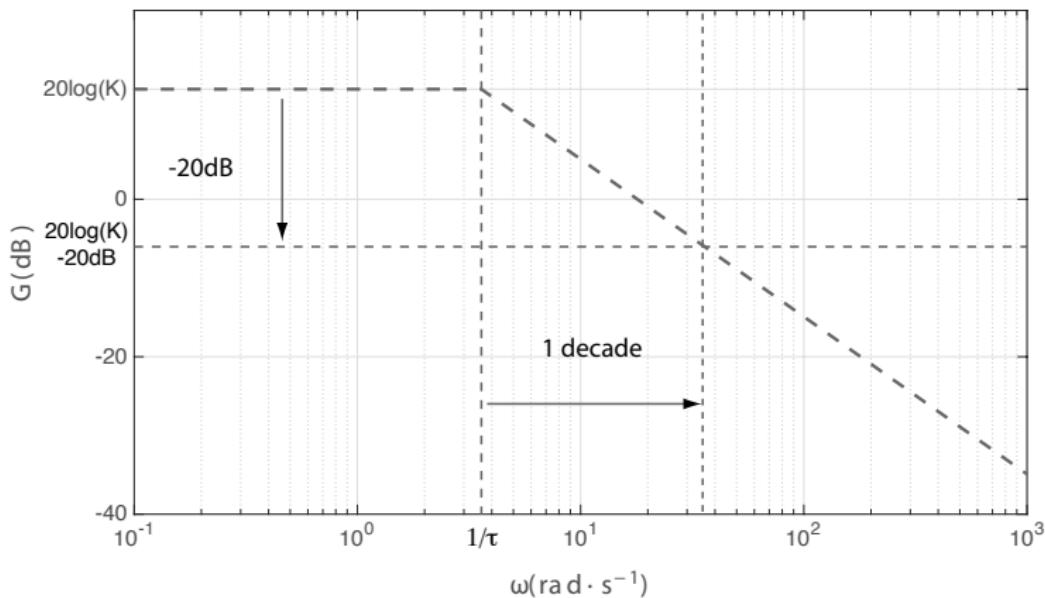


Construction des diagrammes de Bode : premier ordre





Construction des diagrammes de Bode : premier ordre



Construction des diagrammes de Bode : premier ordre

Pulsation de coupure

La pulsation de coupure ω_c se définit comme la valeur de ω telle que :

$$|H(j\omega_c)| = \frac{|H(j\omega_0)|_0}{\sqrt{2}}. \quad (6)$$

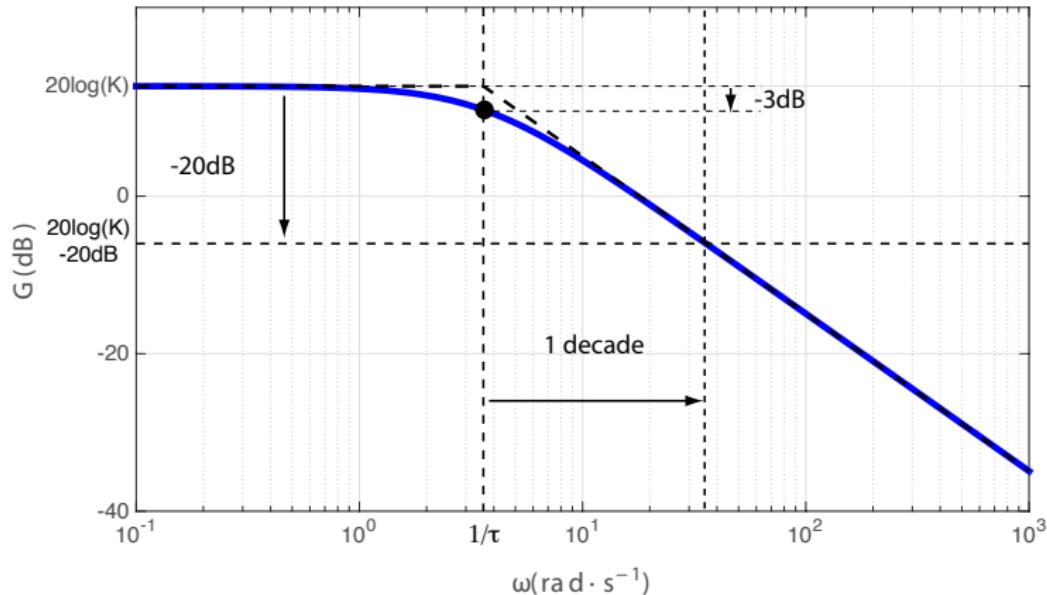
où $|H(j\omega_0)|$ est le module de la fonction de transfert $H(j\omega)$ lorsque ω tend vers 0. On trouve que le gain de coupure :

$$G_{dB}(\omega_c) = 20 \log(K) - 20 \log(\sqrt{2}) \simeq 20 \log(K) - 3 dB \quad (7)$$

Pour un premier ordre, $\omega_c = \frac{1}{T}$.



Construction des diagrammes de Bode : premier ordre





Lieux de transfert : diagrammes de Bode

- Calcul de la phase de $H(j\omega)$:

$$\begin{aligned}\varphi &= \arg\left(\frac{K}{1 + \tau j\omega}\right) = \arg(K) - \arg(1 + \tau j\omega) \\ &= 0 - \arctan(\tau\omega) \\ &= -\arctan(\tau\omega)\end{aligned}$$

- Tracé du diagramme asymptotique en phase :

① $\omega \rightarrow 0$

$$\varphi = \arg(K) - \arg(1 + \tau j\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} -\arg(\tau\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$$

② $\omega \rightarrow +\infty$

$$\varphi = \arg(K) - \arg(1 + \tau j\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} -\arg(\tau\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} -\frac{\pi}{2}$$



Lieux de transfert : diagrammes de Bode

- Calcul de la phase de $H(j\omega)$:

$$\begin{aligned}\varphi &= \arg\left(\frac{K}{1 + \tau j\omega}\right) = \arg(K) - \arg(1 + \tau j\omega) \\ &= 0 - \arctan(\tau\omega) \\ &= -\arctan(\tau\omega)\end{aligned}$$

- Tracé du diagramme asymptotique en phase :

➊ $\omega \rightarrow 0$:

$$\varphi = \arg(K) - \arg(1 + \tau j\omega) \xrightarrow[\omega \rightarrow 0]{} 0$$

➋ $\omega \rightarrow +\infty$:

$$\varphi = \arg(K) - \arg(1 + \tau j\omega) \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} -\arg(\tau j\omega) \xrightarrow[\omega \rightarrow +\infty]{} -\frac{\pi}{2}$$



Lieux de transfert : diagrammes de Bode

- Calcul de la phase de $H(j\omega)$:

$$\begin{aligned}\varphi &= \arg\left(\frac{K}{1 + \tau j\omega}\right) = \arg(K) - \arg(1 + \tau j\omega) \\ &= 0 - \arctan(\tau\omega) \\ &= -\arctan(\tau\omega)\end{aligned}$$

- Tracé du diagramme asymptotique en phase :

① $\omega \rightarrow 0$:

$$\varphi = \arg(K) - \arg(1 + \tau j\omega) \xrightarrow[\omega \rightarrow 0]{} 0$$

② $\omega \rightarrow +\infty$:

$$\varphi = \arg(K) - \arg(1 + \tau j\omega) \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} -\arg(\tau j\omega) \xrightarrow[\omega \rightarrow +\infty]{} -\frac{\pi}{2}$$



Lieux de transfert : diagrammes de Bode

- Calcul de la phase de $H(j\omega)$:

$$\begin{aligned}\varphi &= \arg\left(\frac{K}{1 + \tau j\omega}\right) = \arg(K) - \arg(1 + \tau j\omega) \\ &= 0 - \arctan(\tau\omega) \\ &= -\arctan(\tau\omega)\end{aligned}$$

- Tracé du diagramme asymptotique en phase :

① $\omega \rightarrow 0$:

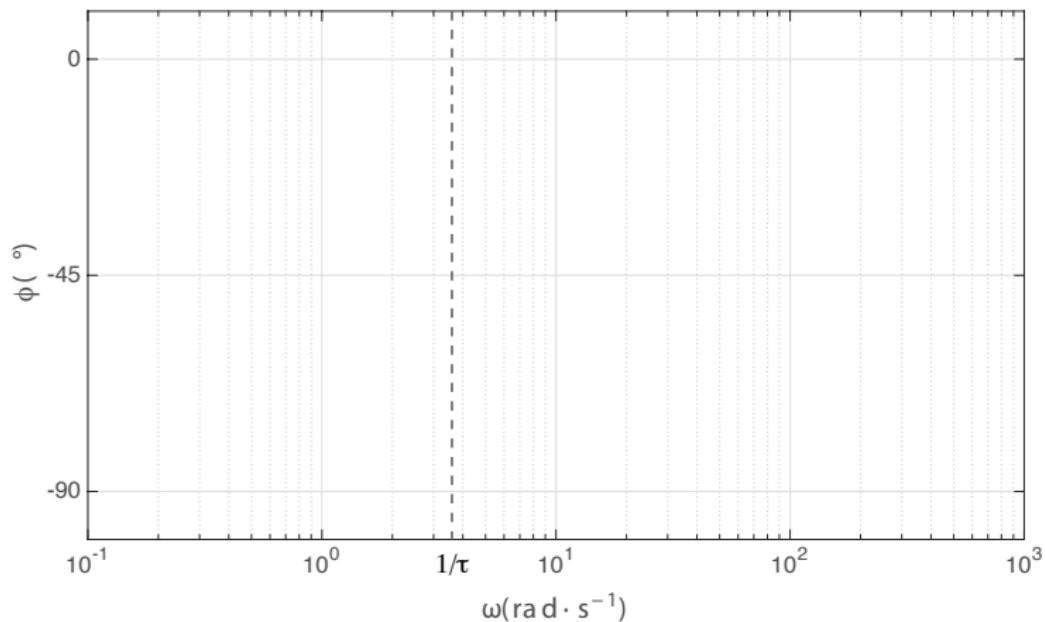
$$\varphi = \arg(K) - \arg(1 + \tau j\omega) \xrightarrow[\omega \rightarrow 0]{} 0$$

② $\omega \rightarrow +\infty$:

$$\varphi = \arg(K) - \arg(1 + \tau j\omega) \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} -\arg(\tau j\omega) \xrightarrow[\omega \rightarrow +\infty]{} -\frac{\pi}{2}$$

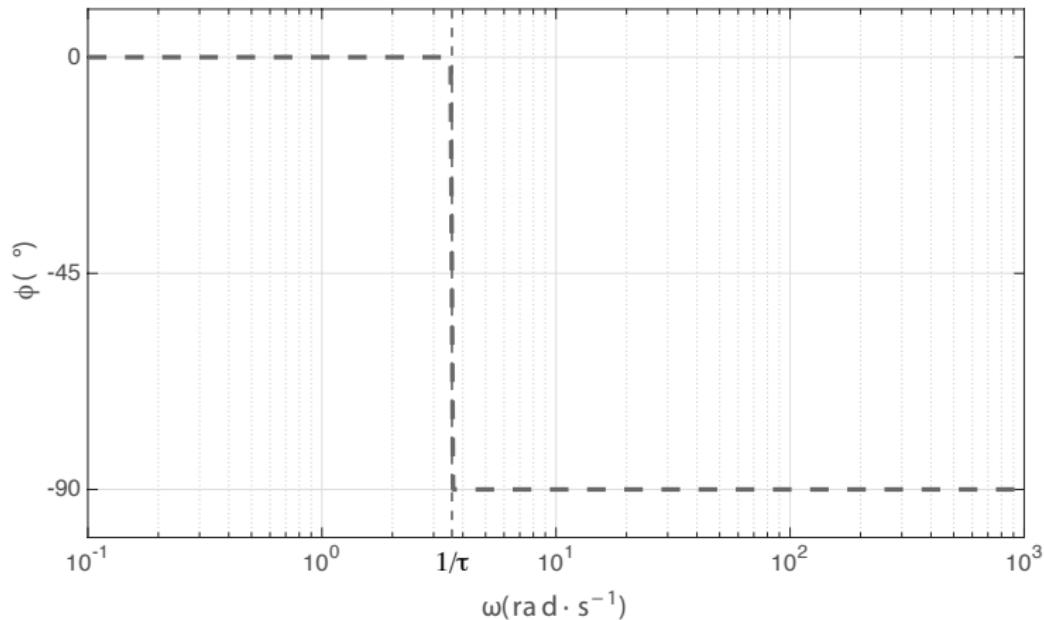


Construction des diagrammes de Bode : premier ordre



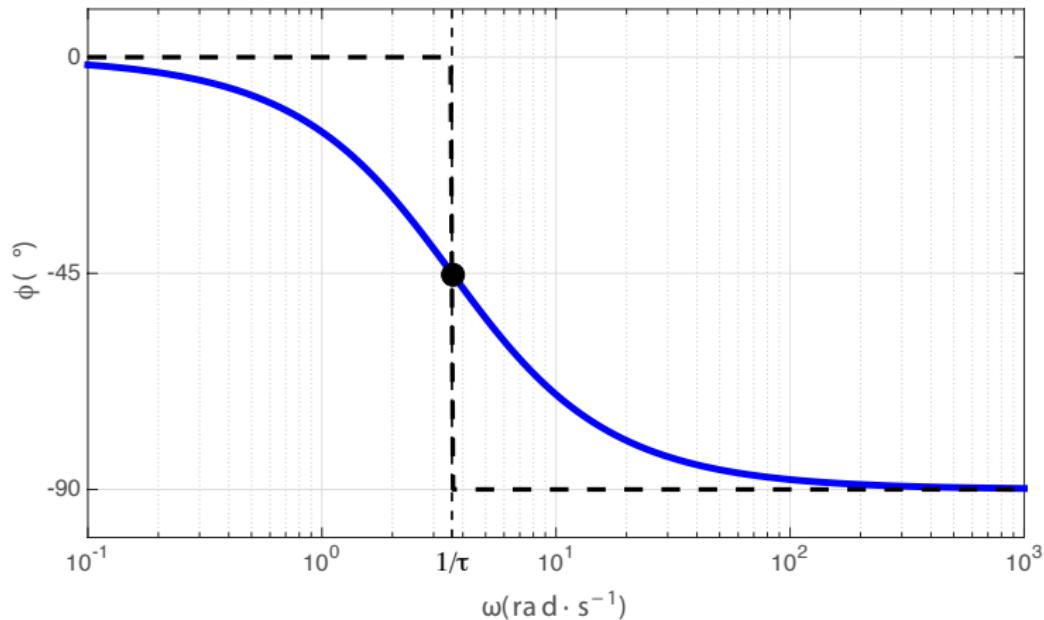


Construction des diagrammes de Bode : premier ordre





Construction des diagrammes de Bode : premier ordre





Plan

1 Lieux de transfert : diagrammes de Bode

- Définition

2 Construction des diagrammes de Bode

- Gain pur
- Intégrateur
- Premier ordre
- Second ordre



Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Fonction de transfert d'un système du second ordre

-

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad (8)$$

- Ainsi, en remplaçant p par $j\omega$, on obtient :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}.$$

- Le dénominateur peut alors s'écrire de différentes manières selon si :

$\Delta > 0$: poles réels
 $\Delta < 0$: poles complexes



Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Fonction de transfert d'un système du second ordre

-

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad (8)$$

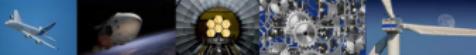
- Ainsi, en remplaçant p par $j\omega$, on obtient :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}.$$

- Le dénominateur peut alors s'écrire de différentes manières selon si :

• Les racines sont réelles

• Les racines sont complexes



Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Fonction de transfert d'un système du second ordre

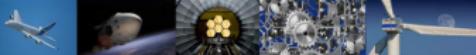
-

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad (8)$$

- Ainsi, en remplaçant p par $j\omega$, on obtient :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}.$$

- Le dénominateur peut alors s'écrire de différentes manières selon si :
 - ① $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta > 0$: 2 pôles réels.
 - ② $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.



Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Fonction de transfert d'un système du second ordre

-

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad (8)$$

- Ainsi, en remplaçant p par $j\omega$, on obtient :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}.$$

- Le dénominateur peut alors s'écrire de différentes manières selon si :
 - ➊ $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta > 0$: 2 pôles réels.
 - ➋ $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.



Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Fonction de transfert d'un système du second ordre

-

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \quad (8)$$

- Ainsi, en remplaçant p par $j\omega$, on obtient :

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega + \frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2}}.$$

- Le dénominateur peut alors s'écrire de différentes manières selon si :
 - ① $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta > 0$: 2 pôles réels.
 - ② $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

④ $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta > 0 : 2$ pôles réels.



Construction des diagrammes de Bode : second ordre

① $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta > 0$: 2 pôles réels.

- Les deux pôles sont réels
- Calcul de Δ

$$\Delta = \frac{4\xi^2 - 4}{\omega_0^2}$$

- Les racines s'écrivent donc :

$$p_{1/2} = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_0} \pm \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\xi^2 - 1}}{\frac{2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

- La factorisation du dénominateur donne :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} (p - p_1)(p - p_2).$$

- On pose alors :

$$\begin{cases} T_1 &= -\frac{1}{p_1} \\ T_2 &= -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

- On a alors :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} \left(p + \frac{1}{T_1} \right) \left(p + \frac{1}{T_2} \right).$$



Construction des diagrammes de Bode : second ordre

① $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta > 0$: 2 pôles réels.

- Les deux pôles sont réels
- Calcul de Δ

$$\Delta = \frac{4\xi^2 - 4}{\omega_0^2}$$

- Les racines s'écrivent donc :

$$p_{1/2} = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_0} \pm \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\xi^2 - 1}}{\frac{2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

- La factorisation du dénominateur donne :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} (p - p_1)(p - p_2).$$

- On pose alors :

$$\begin{cases} T_1 &= -\frac{1}{p_1} \\ T_2 &= -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

- On a alors :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} \left(p + \frac{1}{T_1} \right) \left(p + \frac{1}{T_2} \right).$$



Construction des diagrammes de Bode : second ordre

① $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta > 0$: 2 pôles réels.

- Les deux pôles sont réels
- Calcul de Δ

$$\Delta = \frac{4\xi^2 - 4}{\omega_0^2}$$

- Les racines s'écrivent donc :

$$p_{1/2} = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_0} \pm \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\xi^2 - 1}}{\frac{2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

- La factorisation du dénominateur donne :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} (p - p_1)(p - p_2).$$

- On pose alors :

$$\begin{cases} T_1 &= -\frac{1}{p_1} \\ T_2 &= -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

- On a alors :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} \left(p + \frac{1}{T_1} \right) \left(p + \frac{1}{T_2} \right).$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ④ $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta > 0 : 2$ pôles réels.

 - Les deux pôles sont réels
 - Calcul de Δ

$$\Delta = \frac{4\xi^2 - 4}{\omega_0^2}$$

- Les racines s'écrivent donc :

$$p_{1/2} = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_0} \pm \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\xi^2 - 1}}{\frac{2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

- La factorisation du dénominateur donne :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}(p - p_1)(p - p_2)$$



Construction des diagrammes de Bode : second ordre

① $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta > 0$: 2 pôles réels.

- Les deux pôles sont réels
- Calcul de Δ

$$\Delta = \frac{4\xi^2 - 4}{\omega_0^2}$$

- Les racines s'écrivent donc :

$$p_{1/2} = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_0} \pm \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\xi^2 - 1}}{\frac{2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

- La factorisation du dénominateur donne :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} (p - p_1)(p - p_2).$$

- On pose alors :

$$\begin{cases} T_1 &= -\frac{1}{p_1} \\ T_2 &= -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

- On a alors :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} \left(p + \frac{1}{T_1} \right) \left(p + \frac{1}{T_2} \right).$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ④ $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta > 0 : 2$ pôles réels.

 - Les deux pôles sont réels
 - Calcul de Δ

$$\Delta = \frac{4\xi^2 - 4}{\omega_0^2}$$

- Les racines s'écrivent donc :

$$p_{1/2} = \frac{-\frac{2\xi}{\omega_0} \pm \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\xi^2 - 1}}{\frac{2}{\omega_0^2}} = \omega_0 \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

- La factorisation du dénominateur donne :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2}(p - p_1)(p - p_2)$$

- On pose alors :

$$\begin{cases} T_1 = -\frac{1}{p_1} \\ T_2 = -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

- On a alors :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} \left(p + \frac{1}{T_1} \right) \left(p + \frac{1}{T_2} \right).$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

❶ $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

- On a alors :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} \left(p + \frac{1}{T_1} \right) \left(p + \frac{1}{T_2} \right).$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

$$\textcircled{1} \quad \xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0 : 2 \text{ pôles réels.}$$

- On a alors :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} \left(p + \frac{1}{T_1} \right) \left(p + \frac{1}{T_2} \right).$$

- qui s'écrit également,

$$\frac{1}{\omega_0^2} \left(p + \frac{1}{T_1} \right) \left(p + \frac{1}{T_2} \right) = \frac{1}{T_1 T_2 \omega_0^2} (T_1 p + 1) (T_2 p + 1).$$



Construction des diagrammes de Bode : second ordre

❶ $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

- On a alors :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} \left(p + \frac{1}{T_1} \right) \left(p + \frac{1}{T_2} \right).$$

- qui s'écrit également,

$$\frac{1}{\omega_0^2} \left(p + \frac{1}{T_1} \right) \left(p + \frac{1}{T_2} \right) = \frac{1}{T_1 T_2 \omega_0^2} (T_1 p + 1) (T_2 p + 1).$$

- On remarque que :

$$p_1 \cdot p_2 = \omega_0^2 = \frac{1}{T_1 T_2}.$$

- Donc,

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = (T_1 p + 1) (T_2 p + 1).$$



Construction des diagrammes de Bode : second ordre

① $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

- On a alors :

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{\omega_0^2} \left(p + \frac{1}{T_1} \right) \left(p + \frac{1}{T_2} \right).$$

- qui s'écrit également,

$$\frac{1}{\omega_0^2} \left(p + \frac{1}{T_1} \right) \left(p + \frac{1}{T_2} \right) = \frac{1}{T_1 T_2 \omega_0^2} (T_1 p + 1) (T_2 p + 1).$$

- On remarque que :

$$p_1 \cdot p_2 = \omega_0^2 = \frac{1}{T_1 T_2}.$$

- Donc,

$$1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} = (T_1 p + 1) (T_2 p + 1).$$



Construction des diagrammes de Bode : second ordre

❶ $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

- Les deux pôles réels sont donc :

$$\begin{cases} p_1 &= \omega_0 \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \\ p_2 &= \omega_0 \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \end{cases}$$

$$H(j\omega) = \frac{K}{(1 + j T_1 \omega)(1 + j T_2 \omega)}$$

- avec :

$$\begin{cases} T_1 &= -\frac{1}{p_1} \\ T_2 &= -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

- On peut alors calculer le gain :

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log(|1 + j T_1 \omega|) - 20 \log(|1 + j T_2 \omega|)$$

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log(\sqrt{1 + (T_1 \omega)^2}) - 20 \log(\sqrt{1 + (T_2 \omega)^2})$$

- Somme d'un gain pur et de deux gains du premier ordre.



Construction des diagrammes de Bode : second ordre

❶ $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

- Les deux pôles réels sont donc :

$$\begin{cases} p_1 &= \omega_0 \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \\ p_2 &= \omega_0 \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \end{cases}$$

$$H(j\omega) = \frac{K}{(1 + j T_1 \omega)(1 + j T_2 \omega)}$$

- avec :

$$\begin{cases} T_1 &= -\frac{1}{p_1} \\ T_2 &= -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

- On peut alors calculer le gain :

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log(|1 + j T_1 \omega|) - 20 \log(|1 + j T_2 \omega|)$$

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log(\sqrt{1 + (T_1 \omega)^2}) - 20 \log(\sqrt{1 + (T_2 \omega)^2})$$

- Somme d'un gain pur et de deux gains du premier ordre.



Construction des diagrammes de Bode : second ordre

❶ $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

- Les deux pôles réels sont donc :

$$\begin{cases} p_1 &= \omega_0 \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \\ p_2 &= \omega_0 \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \end{cases}$$

$$H(j\omega) = \frac{K}{(1 + j T_1 \omega)(1 + j T_2 \omega)}$$

- avec :

$$\begin{cases} T_1 &= -\frac{1}{p_1} \\ T_2 &= -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

- On peut alors calculer le gain :

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log(|1 + j T_1 \omega|) - 20 \log(|1 + j T_2 \omega|)$$

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log(\sqrt{1 + (T_1 \omega)^2}) - 20 \log(\sqrt{1 + (T_2 \omega)^2})$$

- Somme d'un gain pur et de deux gains du premier ordre.



Construction des diagrammes de Bode : second ordre

❶ $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

- Les deux pôles réels sont donc :

$$\begin{cases} p_1 &= \omega_0 \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \\ p_2 &= \omega_0 \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \end{cases}$$

$$H(j\omega) = \frac{K}{(1 + j T_1 \omega)(1 + j T_2 \omega)}$$

- avec :

$$\begin{cases} T_1 &= -\frac{1}{p_1} \\ T_2 &= -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

- On peut alors calculer le gain :

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log(|1 + j T_1 \omega|) - 20 \log(|1 + j T_2 \omega|)$$

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log(\sqrt{1 + (T_1 \omega)^2}) - 20 \log(\sqrt{1 + (T_2 \omega)^2})$$

- Somme d'un gain pur et de deux gains du premier ordre.



Construction des diagrammes de Bode : second ordre

❶ $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

- Les deux pôles réels sont donc :

$$\begin{cases} p_1 &= \omega_0 \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \\ p_2 &= \omega_0 \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \end{cases}$$

$$H(j\omega) = \frac{K}{(1 + j T_1 \omega)(1 + j T_2 \omega)}$$

- avec :

$$\begin{cases} T_1 &= -\frac{1}{p_1} \\ T_2 &= -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

- On peut alors calculer le gain :

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log(|1 + j T_1 \omega|) - 20 \log(|1 + j T_2 \omega|)$$

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log(\sqrt{1 + (T_1 \omega)^2}) - 20 \log(\sqrt{1 + (T_2 \omega)^2})$$

- Somme d'un gain pur et de deux gains du premier ordre.



Construction des diagrammes de Bode : second ordre

❶ $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

- Les deux pôles réels sont donc :

$$\begin{cases} p_1 &= \omega_0 \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \\ p_2 &= \omega_0 \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \end{cases}$$

$$H(j\omega) = \frac{K}{(1 + j T_1 \omega)(1 + j T_2 \omega)}$$

- avec :

$$\begin{cases} T_1 &= -\frac{1}{p_1} \\ T_2 &= -\frac{1}{p_2} \end{cases}$$

- On peut alors calculer le gain :

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log(|1 + j T_1 \omega|) - 20 \log(|1 + j T_2 \omega|)$$

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log(\sqrt{1 + (T_1 \omega)^2}) - 20 \log(\sqrt{1 + (T_2 \omega)^2})$$

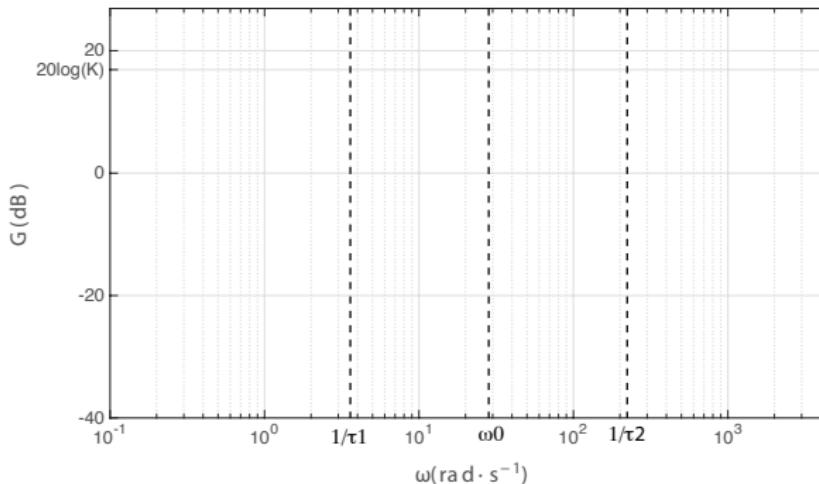
- Somme d'un gain pur et de deux gains du premier ordre.



Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ❶ $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log(\sqrt{1 + (T_1 \omega)^2}) - 20 \log(\sqrt{1 + (T_2 \omega)^2})$$

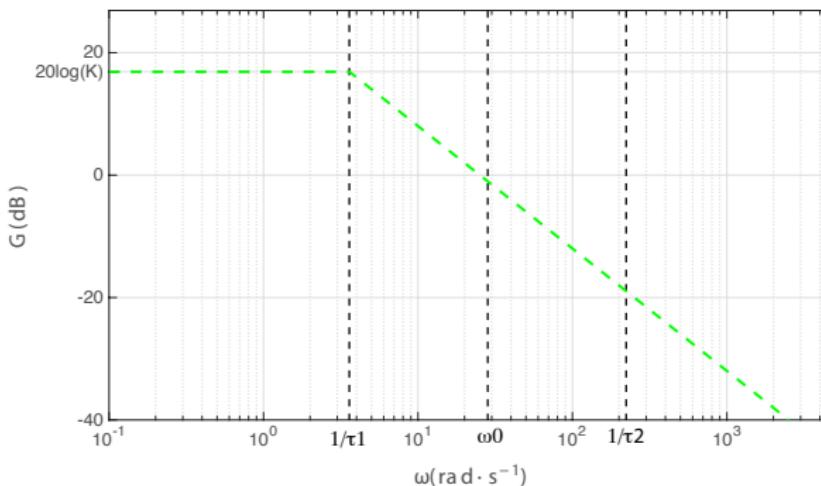




Construction des diagrammes de Bode : second ordre

❶ $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log(\sqrt{1 + (T_1 \omega)^2}) - 20 \log(\sqrt{1 + (T_2 \omega)^2})$$

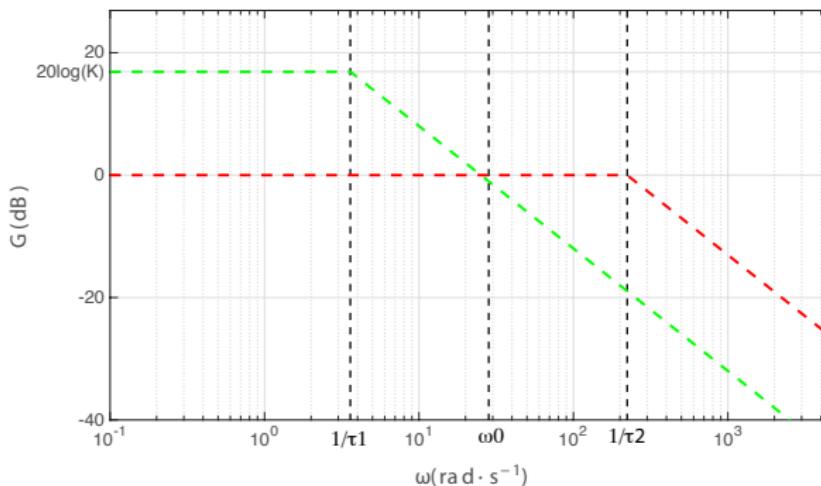




Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ❶ $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log(\sqrt{1 + (T_1 \omega)^2}) - 20 \log(\sqrt{1 + (T_2 \omega)^2})$$

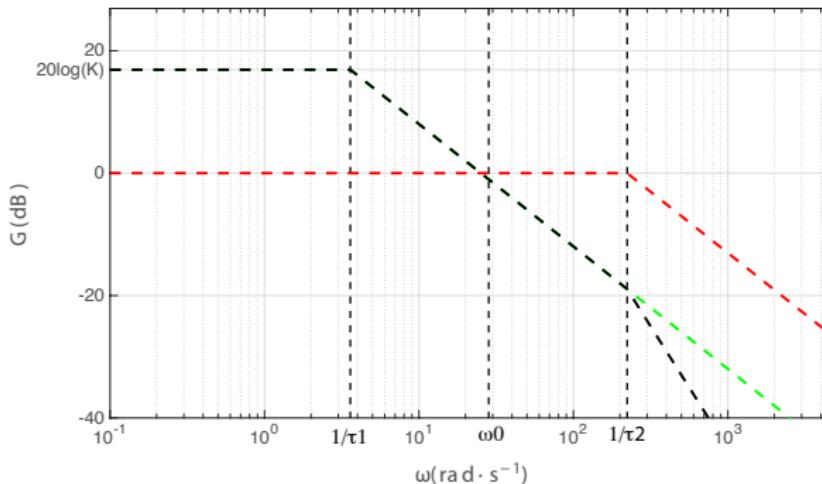




Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ❶ $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log(\sqrt{1 + (T_1 \omega)^2}) - 20 \log(\sqrt{1 + (T_2 \omega)^2})$$

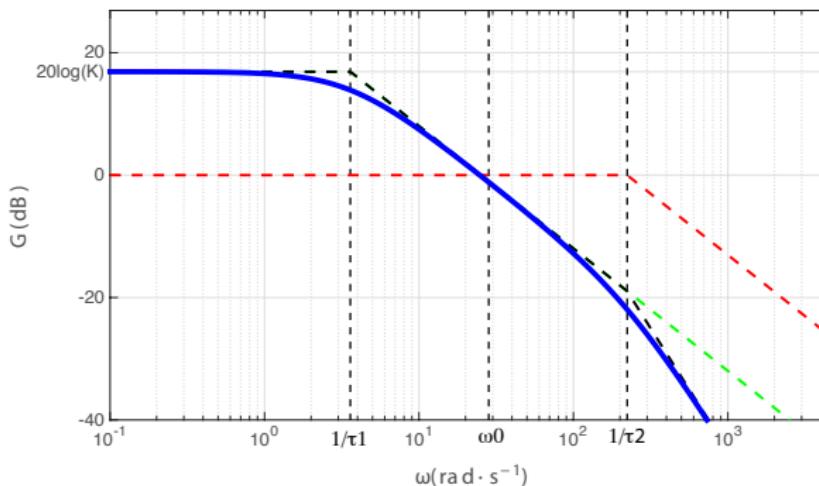




Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ❶ $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log(\sqrt{1 + (T_1 \omega)^2}) - 20 \log(\sqrt{1 + (T_2 \omega)^2})$$

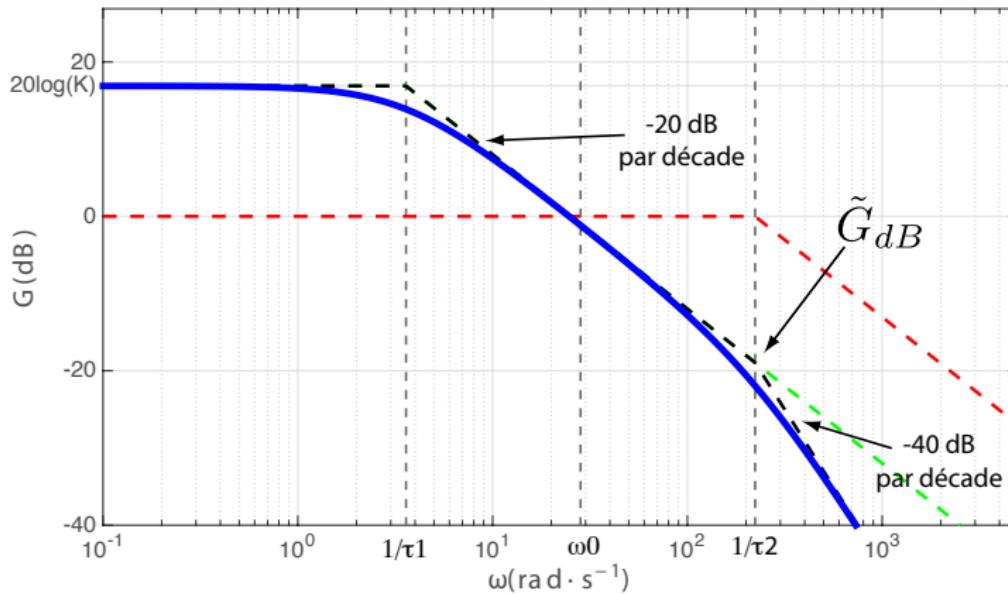




Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ❶ $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log(\sqrt{1 + (T_1 \omega)^2}) - 20 \log(\sqrt{1 + (T_2 \omega)^2})$$

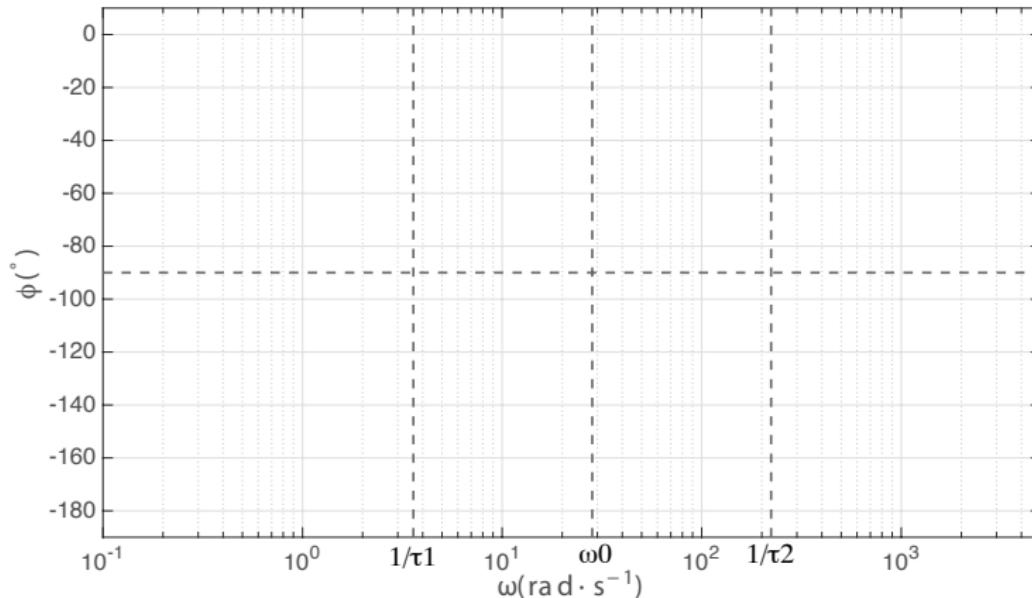




Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ❶ $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

$$\varphi = -\arg(1 + j T_1 \omega) - \arg(1 + j T_2 \omega)$$

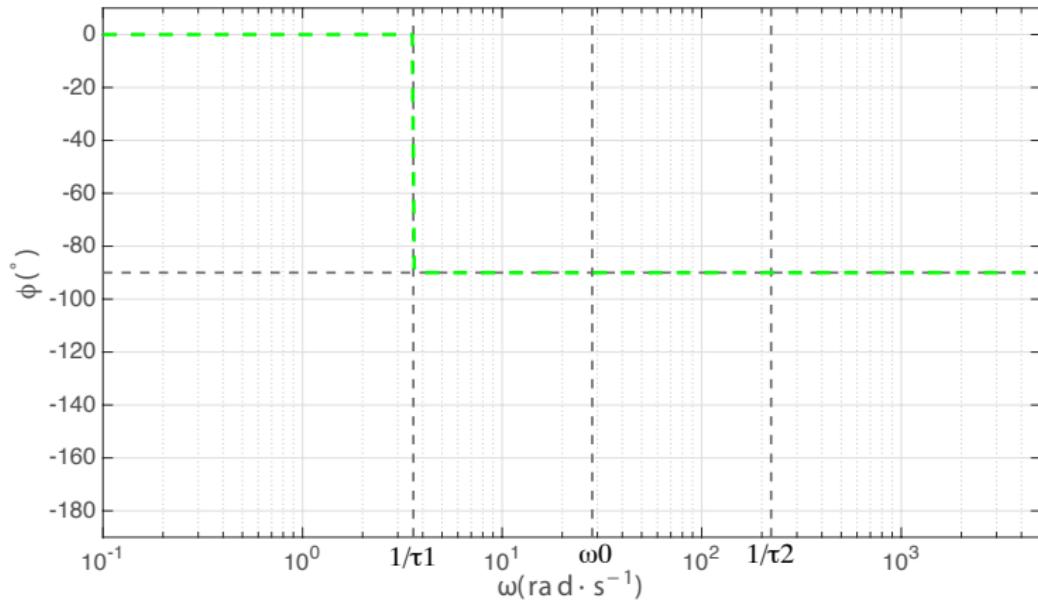




Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ❶ $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

$$\varphi = -\arg(1 + j T_1 \omega) - \arg(1 + j T_2 \omega)$$

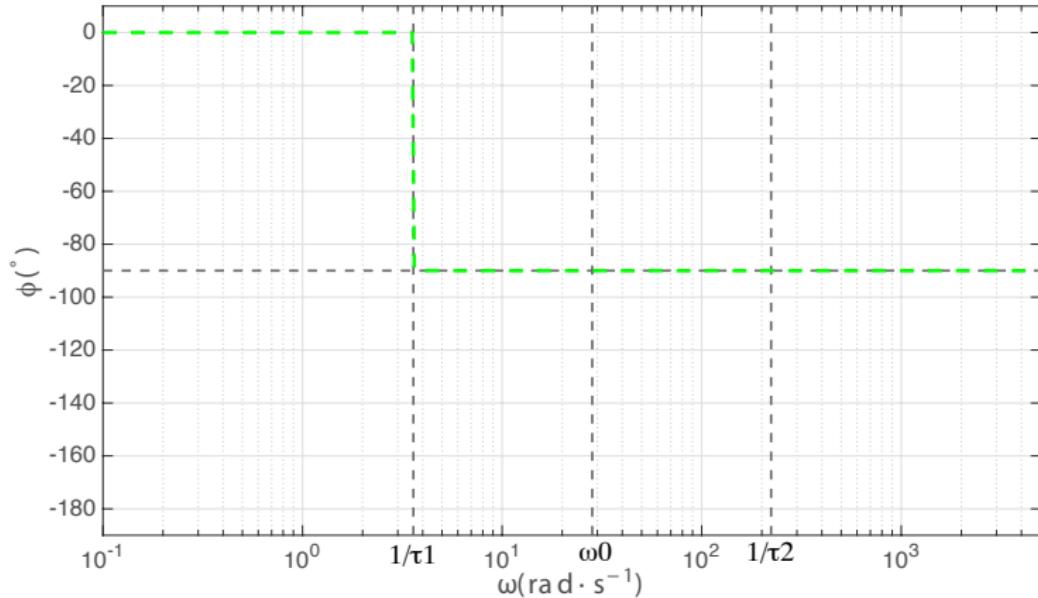




Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ❶ $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

$$\varphi = -\arg(1 + j T_1 \omega) - \arg(1 + j T_2 \omega)$$

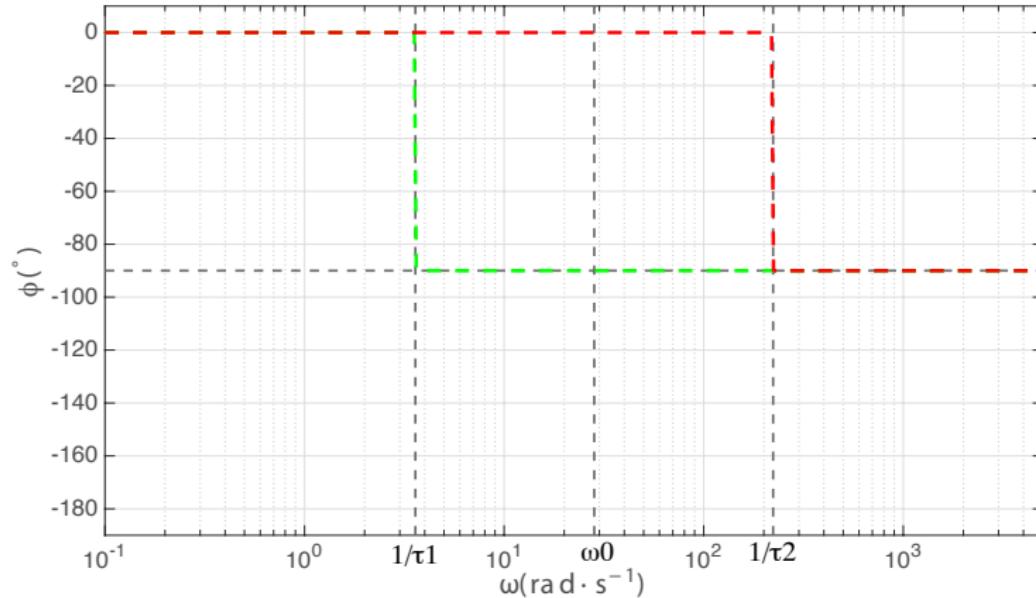




Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ❶ $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

$$\varphi = -\arg(1 + j T_1 \omega) - \arg(1 + j T_2 \omega)$$

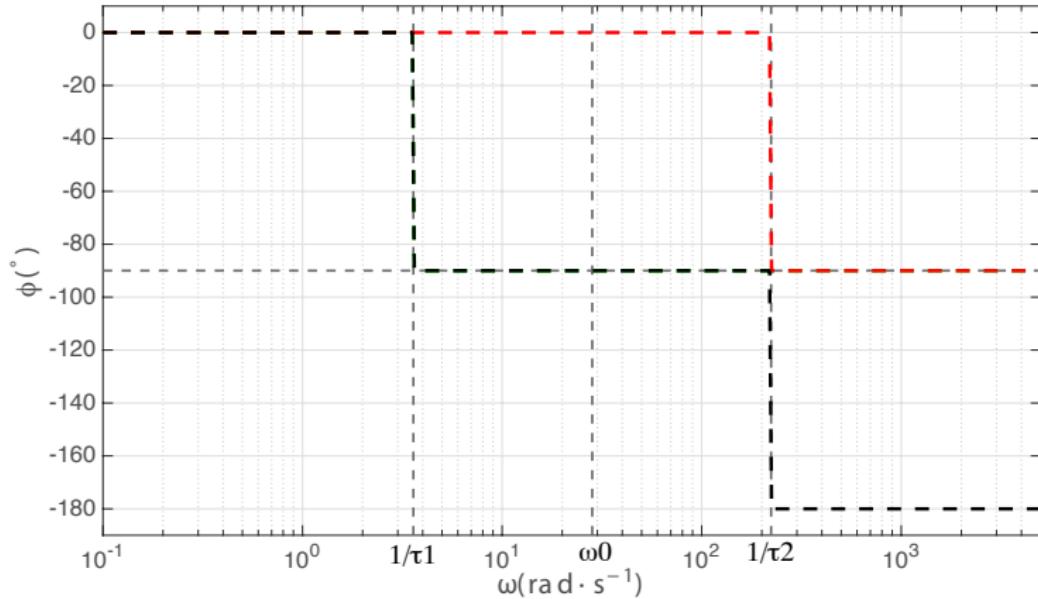




Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ❶ $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

$$\varphi = -\arg(1 + j T_1 \omega) - \arg(1 + j T_2 \omega)$$

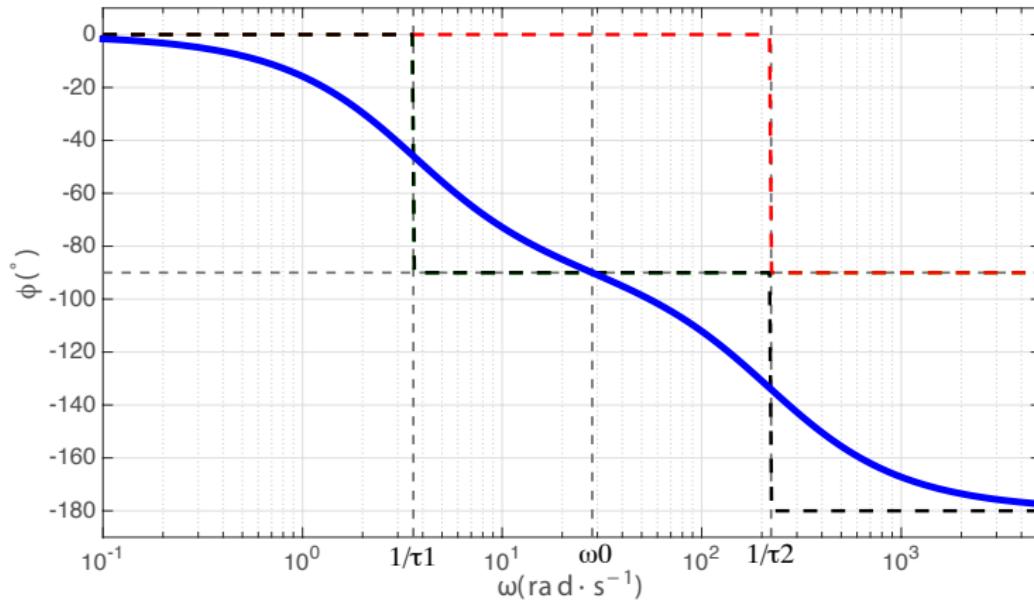


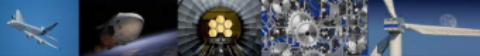


Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ❶ $\xi \geq 1 \rightarrow \Delta \geq 0$: 2 pôles réels.

$$\varphi = -\arg(1 + j T_1 \omega) - \arg(1 + j T_2 \omega)$$





Construction des diagrammes de Bode : second ordre

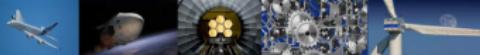
- ② • Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.

•

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\omega\right)^2}}.$$

- Diagramme asymptotique de G_{dB} et φ lorsque :





Lieux de transfert : diagrammes de Bode Construction des diagrammes de Bode

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ② • Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.



$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\omega\right)^2}}.$$

- Diagramme asymptotique de G_{dB} et φ lorsque :



Construction des diagrammes de Bode : second ordre

② Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.

-

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\varepsilon}{\omega_0}\omega\right)^2}}.$$

- Diagramme asymptotique de G_{dB} et φ lorsque :

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

• Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.

- 1

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\omega\right)^2}}.$$

- Diagramme asymptotique de G_{dB} et φ lorsque :

- ① $\omega \rightarrow 0$,
 ② $\omega \rightarrow +\infty$.

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\omega\right)^2}}.$$

- Diagramme asymptotique de G_{dB} et φ lorsque :

- 1** $\omega \rightarrow 0,$
2 $\omega \rightarrow +\infty.$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ② Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.

① $\omega \rightarrow 0 :$

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0} \omega\right)^2} \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 20 \log(K)$$

Droite horizontale située à $20 \log(K)$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.

$$① \omega \rightarrow 0 :$$

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\omega\right)^2} \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 20 \log(K)$$

Droite horizontale située à $20 \log(K)$

- $$② \omega \rightarrow +\infty :$$

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log\left(\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\omega\right)^2}\right) \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} 20 \log(K) - 40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ② Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\omega\right)^2} \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 20 \log(K)$$

Droite horizontale située à $20 \log(K)$

- $$② \omega \rightarrow +\infty :$$

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log\left(\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\omega\right)^2}\right) \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} 20 \log(K) - 40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

- Équation du gain asymptotique \tilde{G}_{dB} en $+\infty$ est donnée par :

$$\tilde{G}_{dB} = 20 \log(K) + 40 \log(\omega_0) - 40 \log(\omega)$$

Sur le tracé semi-logarithmique, ceci correspond à une droite affine avec

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ② Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.

① $\omega \rightarrow 0 :$

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0} \omega\right)^2} \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 20 \log(K)$$

Droite horizontale située à $20 \log(K)$

- $$② \omega \rightarrow +\infty :$$

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log\left(\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\omega\right)^2}\right) \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} 20 \log(K) - 40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

- Équation du gain asymptotique \tilde{G}_{dB} en $+\infty$ est donnée par :

$$\tilde{G}_{dB} = 20 \log(K) + 40 \log(\omega_0) - 40 \log(\omega)$$

Sur le tracé semi-logarithmique, ceci correspond à une droite affine avec

- pour coefficient directeur $-40 \text{ dB par d閎cada}$,
 - et qui coupe la branche asymptotique $\omega \rightarrow 0$ en $\omega = \omega_0$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ② Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$: 2 pôles complexes.

① $\omega \rightarrow 0 :$

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0} \omega\right)^2} \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 20 \log(K)$$

Droite horizontale située à $20 \log(K)$

- $$② \omega \rightarrow +\infty :$$

$$G_{dB} = 20 \log(K) - 20 \log\left(\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\omega\right)^2}\right) \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} 20 \log(K) - 40 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

- Équation du gain asymptotique \tilde{G}_{dB} en $+\infty$ est donnée par :

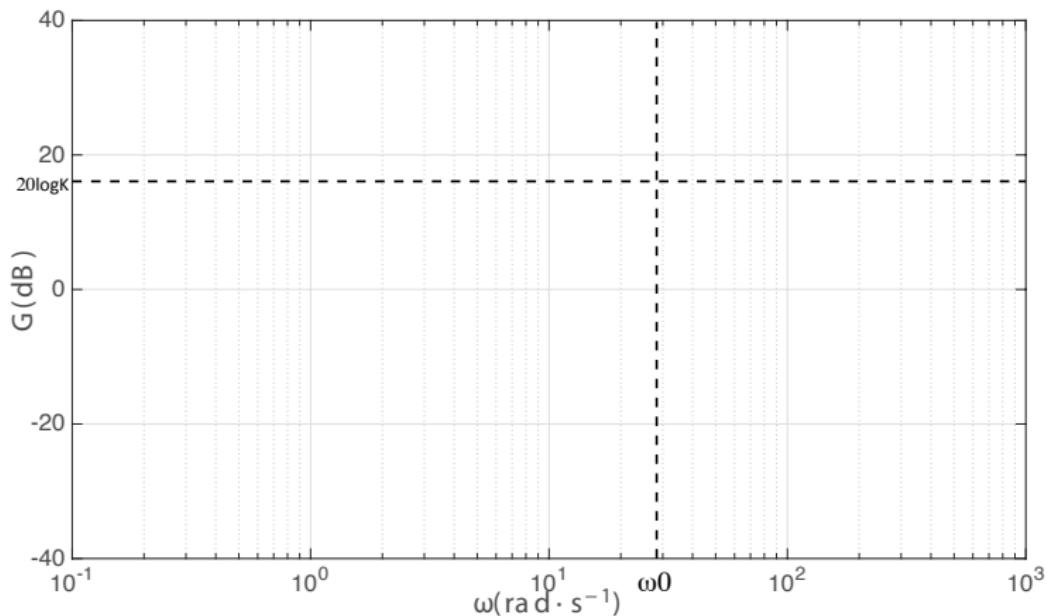
$$\tilde{G}_{dB} = 20 \log(K) + 40 \log(\omega_0) - 40 \log(\omega)$$

Sur le tracé semi-logarithmique, ceci correspond à une droite affine avec

- pour coefficient directeur $-40 \text{ dB par d閎cada}$,
 - et qui coupe la branche asymptotique $\omega \rightarrow 0$ en $\omega = \omega_0$

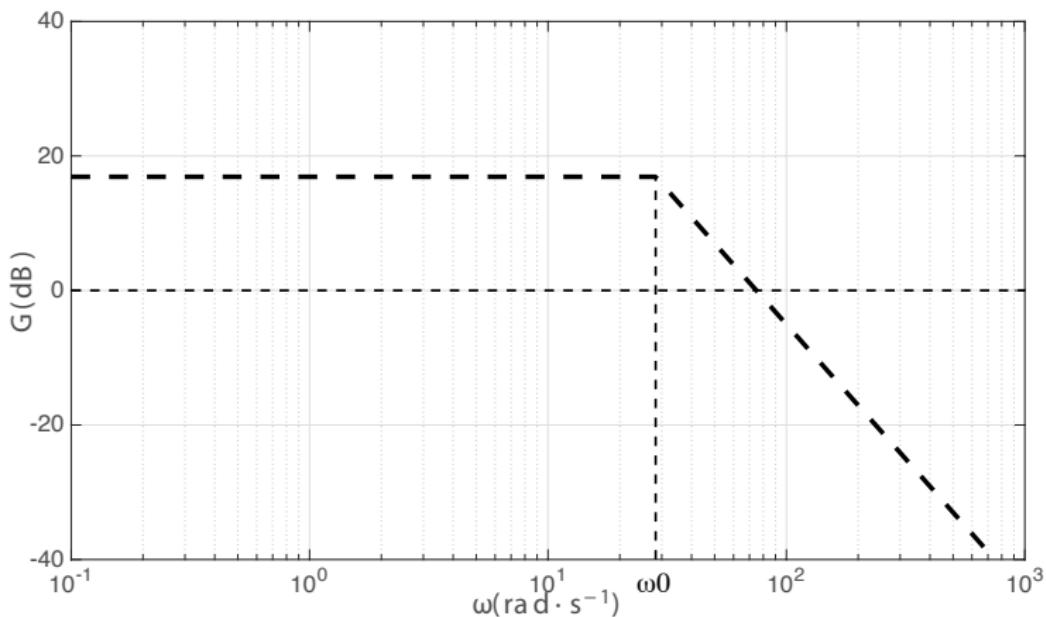


Construction des diagrammes de Bode : second ordre



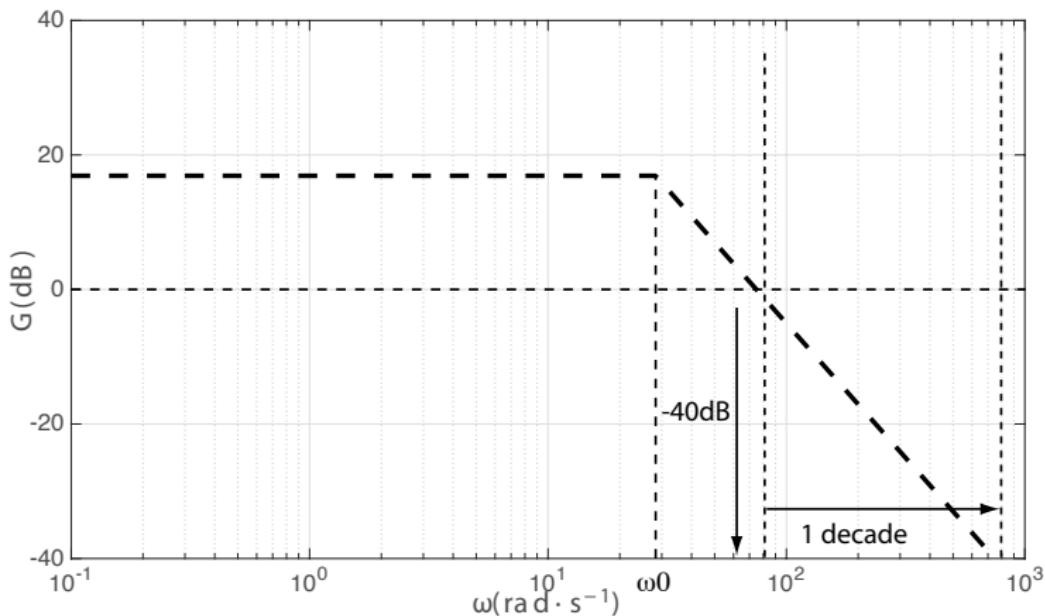


Construction des diagrammes de Bode : second ordre



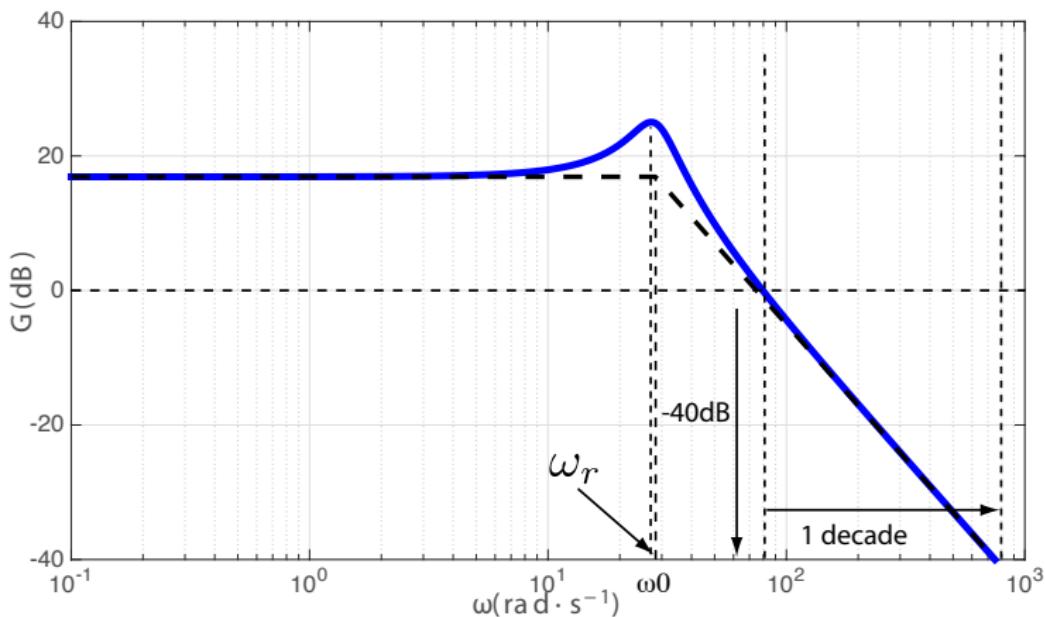


Construction des diagrammes de Bode : second ordre





Construction des diagrammes de Bode : second ordre





Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ② • Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$, 2 pôles complexes : : tracé du diagramme asymptotique en phase

$$\varphi = \arg(K) - \arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)$$

① $\omega \rightarrow 0$:

$$\varphi \xrightarrow[\omega \rightarrow 0]{} 0$$

ce qui correspond à une droite horizontale située à 0°

② $\omega \rightarrow +\infty$:

$$\varphi \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} -\arg\left(-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right).$$

• Ce qui correspond à l'opposé de l'argument d'un réel sur la partie réelle négative, donc :

$$\varphi \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} -\arg(-1) = -180^\circ$$



Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ② • Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$, 2 pôles complexes : : tracé du diagramme asymptotique en phase

$$\varphi = \arg(K) - \arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)$$

- ① $\omega \rightarrow 0$:

$$\varphi \xrightarrow[\omega \rightarrow 0]{} 0$$

ce qui correspond à une droite horizontale située à 0°

- ② $\omega \rightarrow +\infty$:

$$\varphi \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} -\arg\left(-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right).$$

- Ce qui correspond à l'opposé de l'argument d'un réel pur à partie réelle négative, donc :

$$\varphi \xrightarrow[\omega \rightarrow +\infty]{} -\pi = -180^\circ.$$



Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ② • Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$, 2 pôles complexes : : tracé du diagramme asymptotique en phase

$$\varphi = \arg(K) - \arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)$$

- ① $\omega \rightarrow 0$:

$$\varphi \xrightarrow[\omega \rightarrow 0]{} 0$$

ce qui correspond à une droite horizontale située à 0°

- ② $\omega \rightarrow +\infty$:

$$\varphi \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} -\arg\left(-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right).$$

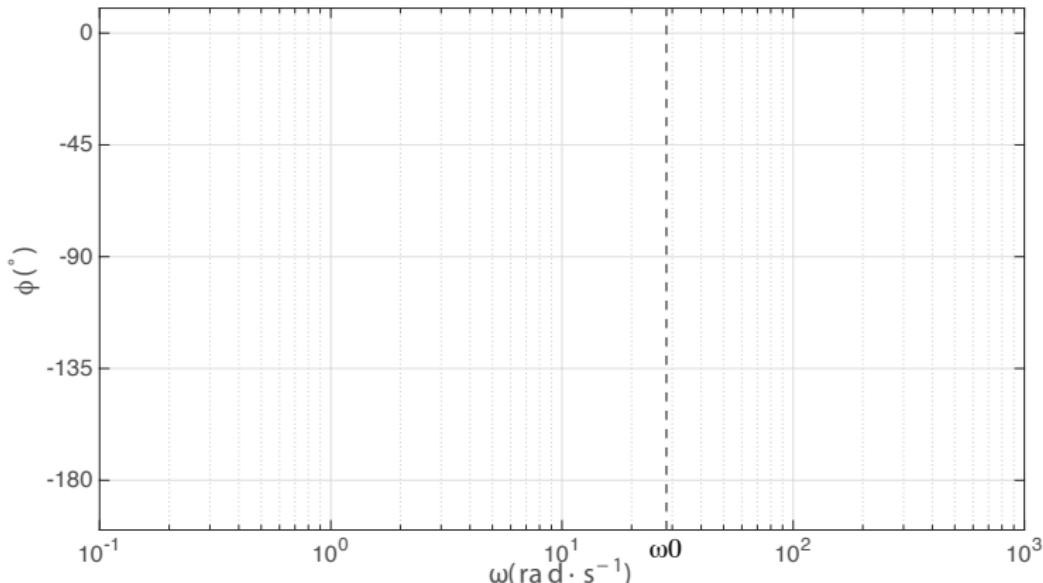
- Ce qui correspond à l'opposé de l'argument d'un réel pur à partie réelle négative, donc :

$$\varphi \xrightarrow[\omega \rightarrow +\infty]{} -\pi = -180^\circ.$$

Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$, 2 pôles complexes : tracé du diagramme asymptotique en phase

$$\varphi = \arg(K) - \arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)$$

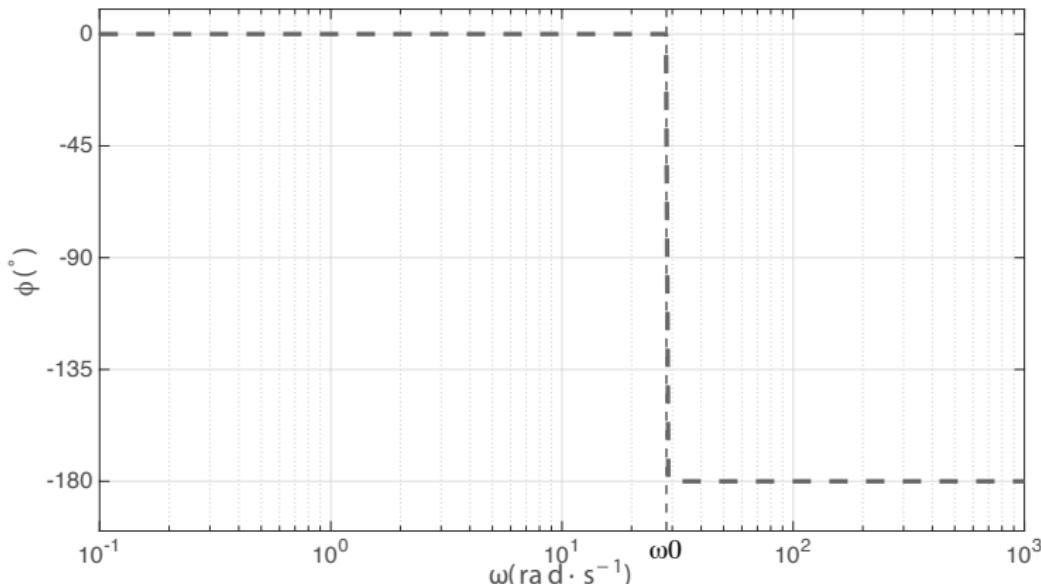




Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- ❷ Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$, 2 pôles complexes : tracé du diagramme asymptotique en phase

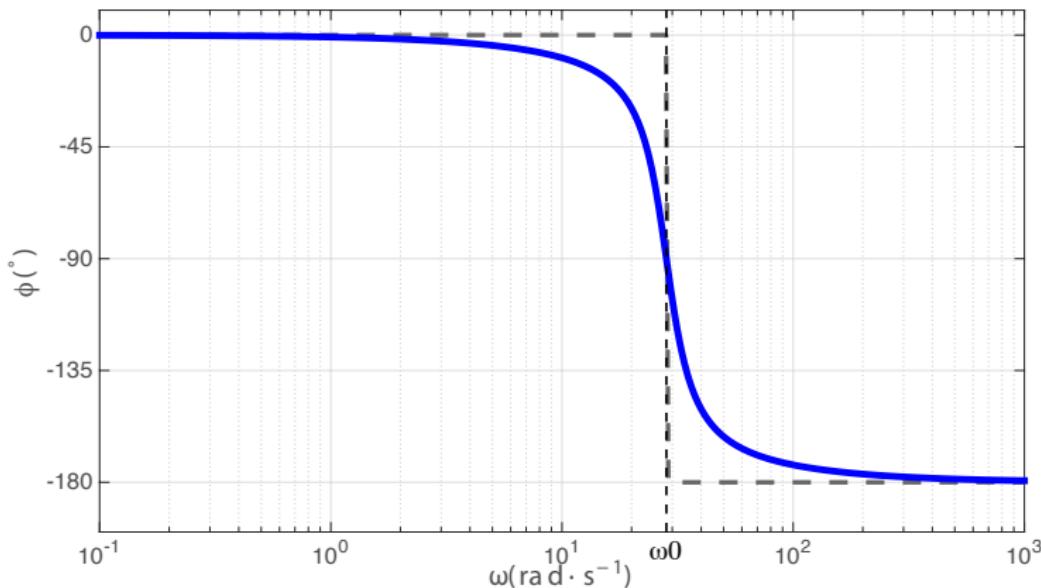
$$\varphi = \arg(K) - \arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)$$



Construction des diagrammes de Bode : second ordre

- Cas où $\xi < 1 \rightarrow \Delta < 0$, 2 pôles complexes : tracé du diagramme asymptotique en phase

$$\varphi = \arg(K) - \arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)$$





Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Pulsation de résonance

La pulsation de résonance est définie comme la pulsation correspondant au maximum du gain.

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (9)$$

Ainsi la résonance existe uniquement si $\xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Facteur de résonance

On appelle le facteur de résonance ou coefficient de surtension la grandeur Q définie par :

$$Q = \frac{|H(j\omega)|_{max}}{\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)|} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (10)$$



Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Pulsation de résonance

La pulsation de résonance est définie comme la pulsation correspondant au maximum du gain.

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (9)$$

Ainsi la résonance existe uniquement si $\xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Facteur de résonance

On appelle le **facteur de résonance ou coefficient de surtension** la grandeur Q définie par :

$$Q = \frac{|H(j\omega)|_{max}}{\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)|} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (10)$$



Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Démonstration du facteur de résonance $|H(j\omega)|_{max}$ est obtenu lorsque $\omega = \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$.

- On obtient alors,

$$\begin{aligned} |H(j\omega)|_{max} &= \frac{K}{\sqrt{\left(1 - (1 - 2\xi^2) \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0} \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}\right)^2}} \\ &= \frac{K}{\sqrt{(1 - 1 + 2\xi^2)^2 + (2\xi\sqrt{1 - 2\xi^2})^2}} = \frac{K}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2(1 - 2\xi^2)}} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \end{aligned}$$

- De plus on peut calculer $\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)|$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)| = K.$$



Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Démonstration du facteur de résonance $|H(j\omega)|_{max}$ est obtenu lorsque $\omega = \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$.

- On obtient alors,

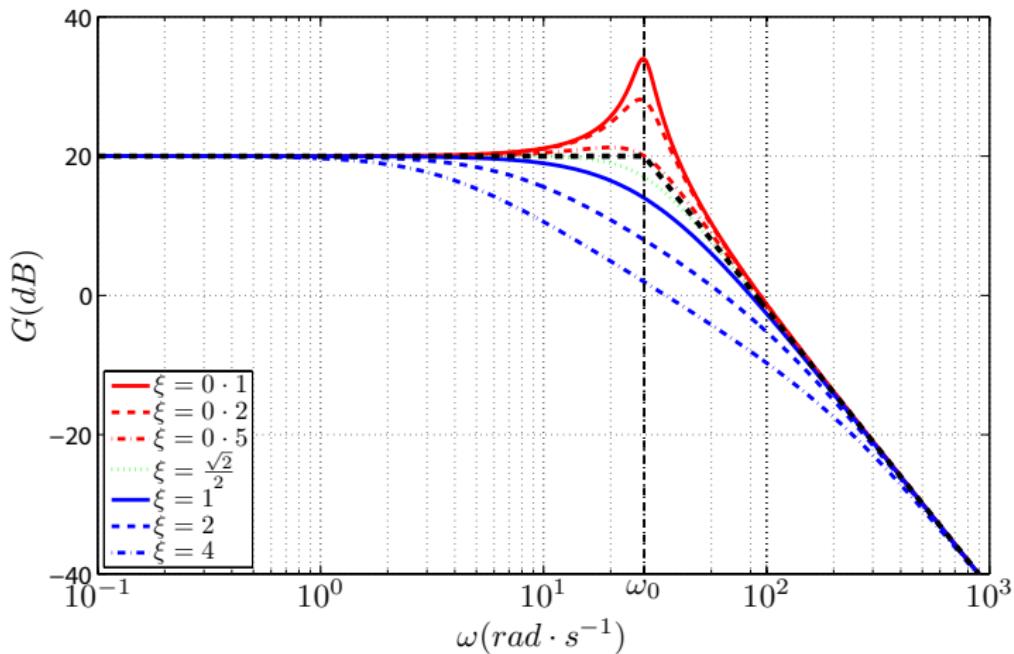
$$\begin{aligned} |H(j\omega)|_{max} &= \frac{K}{\sqrt{\left(1 - (1 - 2\xi^2) \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0} \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}\right)^2}} \\ &= \frac{K}{\sqrt{(1 - 1 + 2\xi^2)^2 + (2\xi\sqrt{1 - 2\xi^2})^2}} = \frac{K}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2(1 - 2\xi^2)}} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \end{aligned}$$

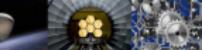
- De plus on peut calculer $\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)|$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)| = K.$$



Construction des diagrammes de Bode : second ordre





Construction des diagrammes de Bode : second ordre

