



C7 : ANALYSE FRÉQUENTIELLE DES SYSTÈMES ASSERVIS

## C7-3 - Analyse fréquentielle des systèmes asservis : applications

25 Avril 2023

---

### Table des matières

---

|  |           |
|--|-----------|
| <b>I Combinaison des diagrammes de Bode élémentaires</b>                         | <b>2</b>  |
| 1 Caractérisation d'une fonction de transfert complexe . . . . .                 | 2         |
| 2 Méthodologie de tracé des fonctions de transferts complexes . . . . .          | 2         |
| <b>II Application à l'exemple de la suspension d'un véhicule</b>                 | <b>2</b>  |
| 1 Décomposition de la fonction de transfert . . . . .                            | 3         |
| 2 Construction du diagramme de Bode de $H_1(j\omega)$ . . . . .                  | 3         |
| 3 Calcul et classement des pulsations de cassure . . . . .                       | 4         |
| 4 Construction du diagramme de Bode complet . . . . .                            | 5         |
| 5 Caractérisation fréquentielle paramétrée de la suspension automobile . . . . . | 6         |
| 6 Interprétation temporelle d'une étude fréquentielle . . . . .                  | 6         |
| <b>III Autres types de lieux de transfert</b>                                    | <b>10</b> |
| 1 Diagramme de Nyquist . . . . .   | 10        |
| 2 Diagramme de Black . . . . .   | 10        |
| <b>IV Conclusion</b>   | <b>11</b> |

### Compétences

- **Analyser**
  - Identifier la structure d'un système asservi.
  - Interpréter et vérifier la cohérence des résultats obtenus expérimentalement, analytiquement ou numériquement.
- **Modéliser**
  - Établir un modèle de connaissance par des fonctions de transfert.
  - Modéliser le signal d'entrée.
  - Établir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle.
  - Vérifier la cohérence du modèle choisi en confrontant les résultats analytiques et/ou numériques aux résultats expérimentaux.
- **Résoudre**
  - Déterminer la réponse fréquentielle.
- **Communiquer**
  - Utiliser un vocabulaire technique, des symboles et des unités adéquats.

## I. Combinaison des diagrammes de Bode élémentaires

### 1 Caractérisation d'une fonction de transfert complexe

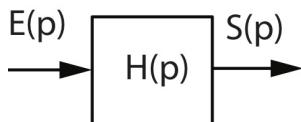


#### Définition 1 : Fonction de transfert complexe

On cherche à étudier dans le domaine fréquentiel un phénomène physique ou un composant. On considère alors la fonction de transfert reliant deux grandeurs physiques (d'entrée  $e(t)$  et de sortie  $s(t)$ ) qu'on pourra mettre dans la plupart des cas sous la forme :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K_S \prod_{k=1}^{n_3} (1 + \tau_k \cdot p) \cdot \prod_{l=1}^{n_4} \left( 1 + \frac{2\xi_l}{\omega_{l0}} p + \frac{p^2}{\omega_{l0}^2} \right)}{p^\alpha \cdot \prod_{i=1}^{n_1} (1 + \tau_i \cdot p) \cdot \prod_{j=1}^{n_2} \left( 1 + \frac{2\xi_j}{\omega_{j0}} p + \frac{p^2}{\omega_{j0}^2} \right)} \quad (1)$$

On remarque donc qu'on peut l'écrire qu'un produit de fonction de transfert usuelles de type **intégrateur, premier ordre, et second ordre** qui résultera dans le plan de Bode à la somme de tracés élémentaires.



- $K_S$  est le gain statique.
- $\alpha$  est la **classe** de la fonction transfert :
  - le nombre d'**intégrations** si  $\alpha > 0$ ;
  - le nombre de **dérivations** si  $\alpha < 0$ .
- L'ordre de la fonction de transfert est donné par
  - $n = n_1 + 2 \cdot n_2 + \alpha$  si  $\alpha > 0$ ;
  - $n = n_1 + 2 \cdot n_2$  si  $\alpha < 0$ ;
- avec :
  - $n_1$  le nombre de fonction de transfert du **premier ordre**.
  - $n_2$  le nombre de fonction de transfert du **second ordre** à pôles complexes.

### 2 Méthodologie de tracé des fonctions de transferts complexes

1. Mise sous forme canonique de la fonction de transfert sous la forme donnée par l'équation 1;
2. identification de fonctions de transfert élémentaires : intégrateur, premier ordre, deuxième ordre;
3. calcul de toutes les pulsations caractéristiques (cassure ou coupure) ( $\frac{1}{\tau_k}$ ,  $\frac{1}{\tau_i}$ ,  $\omega_{l0}$  et  $\omega_{j0}$ );
4. classement dans l'ordre croissant de toutes les pulsations caractéristiques;
5. construction d'un tableau permettant de caractériser les comportement asymptotique de chaque fonction de transfert élémentaires.

## II. Application à l'exemple de la suspension d'un véhicule

Reprendons l'exemple de la suspension du véhicule Clever. Nous rappelons la fonction de transfert du véhicule.

$$H(p) = \frac{k + c p}{k + c p + m p^2} = \frac{1 + \frac{c}{k} p}{1 + \frac{c}{k} p + \frac{m}{k} p^2}$$

En remplaçant  $p$  par  $j\omega$ , on obtient :

$$H(j\omega) = \frac{1 + \frac{c}{k} j\omega}{1 + \frac{c}{k} j\omega + \frac{m}{k} (j\omega)^2} = \frac{1 + j\tau\omega}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega + \frac{1}{\omega_0^2} (j\omega)^2}$$



## 1 Décomposition de la fonction de transfert

On remarque donc que cette fonction de transfert est le produit entre une fonction de transfert du premier et du second ordre :

$$H(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)$$

Avec,

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1(j\omega) = 1 + j\tau\omega \\ H_2(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} j\omega + \frac{1}{\omega_0^2} (j\omega)^2} \end{array} \right.$$

**On prendra pour valeurs numériques :**

- $\tau = 0,01 \text{ s}$ ;
- $\xi = 0,2$ ;
- $\omega_0 = 28,3 \text{ rad/s}$

## 2 Construction du diagramme de Bode de $H_1(j\omega)$

On pose :

$$H_1(j\omega) = 1 + \tau j\omega$$

On se propose de tracer le diagramme de Bode de  $H_1(j\omega)$  avec  $\tau = 0,01 \text{ s}$

**Expression du gain :**

On a donc deux branches asymptotiques :

- Un branche horizontale jusqu'à  $\omega = \frac{1}{\tau}$ .
- Un branche correspondant à une droite de pente  $+20 \text{ dB/décade}$  et coupant l'axe des abscisses en  $\omega = \frac{1}{\tau}$ .

**Expression de la phase :**

On a donc deux branches asymptotiques :

- Un branche horizontale correspondant à  $\varphi = 0^\circ$  pour  $\omega < \frac{1}{\tau}$ .
- Un branche horizontale correspondant à  $\varphi = 90^\circ$  pour  $\omega > \frac{1}{\tau}$ .

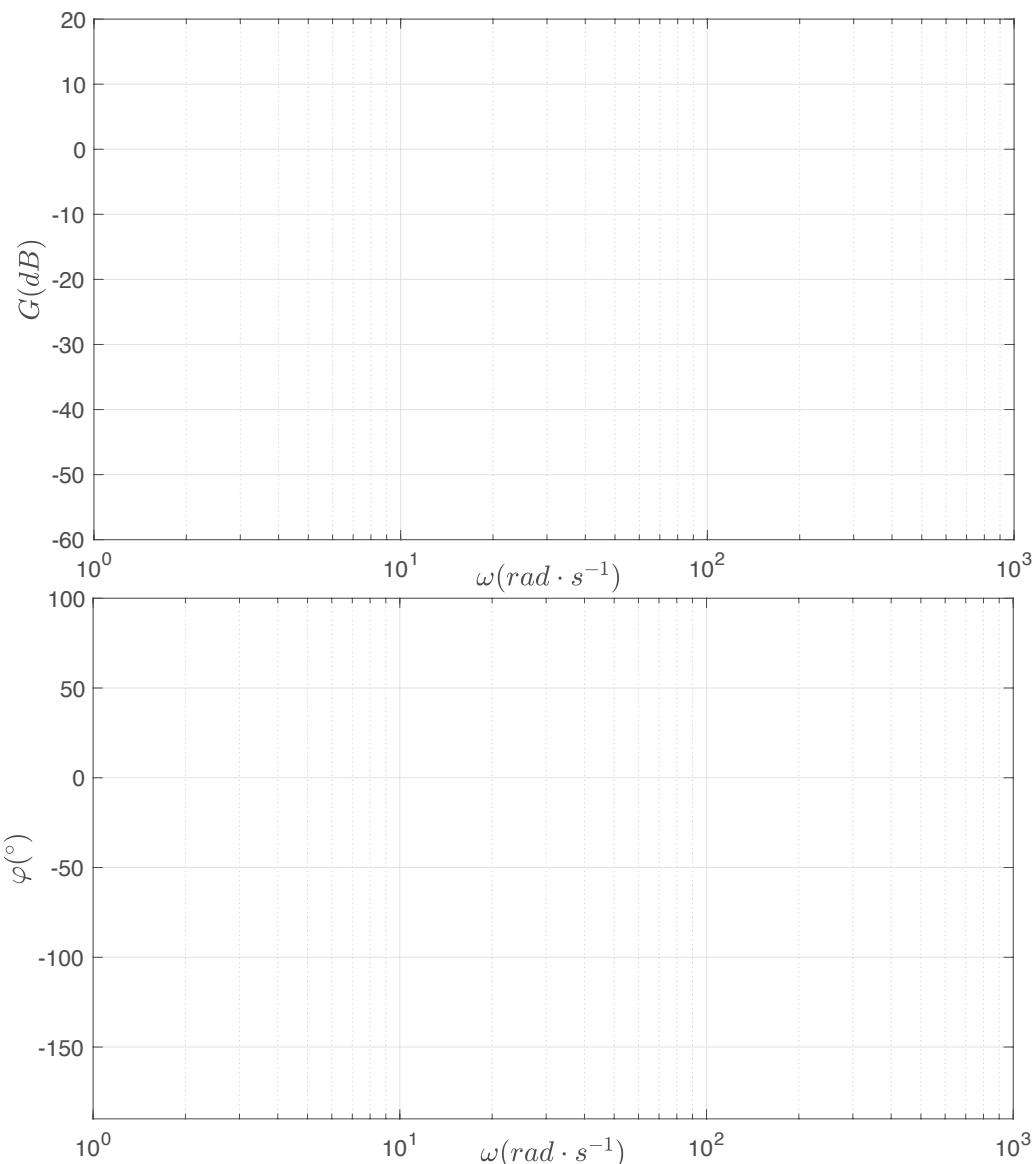


FIGURE 1 – Diagramme de Bode pour une fonction de transfert du premier ordre de  $H_1(j\omega)$

### 3 Calcul et classement des pulsations de cassure

#### 1. Expressions littérales des pulsations de cassure :

#### 2. Applications numériques :

#### 3. Classement des pulsations de cassure

#### 4 Construction du diagramme de Bode complet

On va utiliser ici un tableau permettant de caractériser complètement le tracé asymptotique de  $H(j\omega)$ .

| $\omega$           | $0 \rightarrow \omega_2$ |                     | $\omega_2$ | $\omega_2 \rightarrow \omega_1$ |                     | $\omega_1$ | $\omega_1 \rightarrow \infty$ |                     |
|--------------------|--------------------------|---------------------|------------|---------------------------------|---------------------|------------|-------------------------------|---------------------|
| Tracé asymptotique | Gain (dB/dec)            | $\varphi(^{\circ})$ | Gain (dB)  | Gain (dB/dec)                   | $\varphi(^{\circ})$ | Gain (dB)  | Gain (dB/dec)                 | $\varphi(^{\circ})$ |
| $H_1(p)$           |                          |                     |            |                                 |                     |            |                               |                     |
| $H_2(p)$           |                          |                     |            |                                 |                     |            |                               |                     |
| $H(p)$             |                          |                     |            |                                 |                     |            |                               |                     |

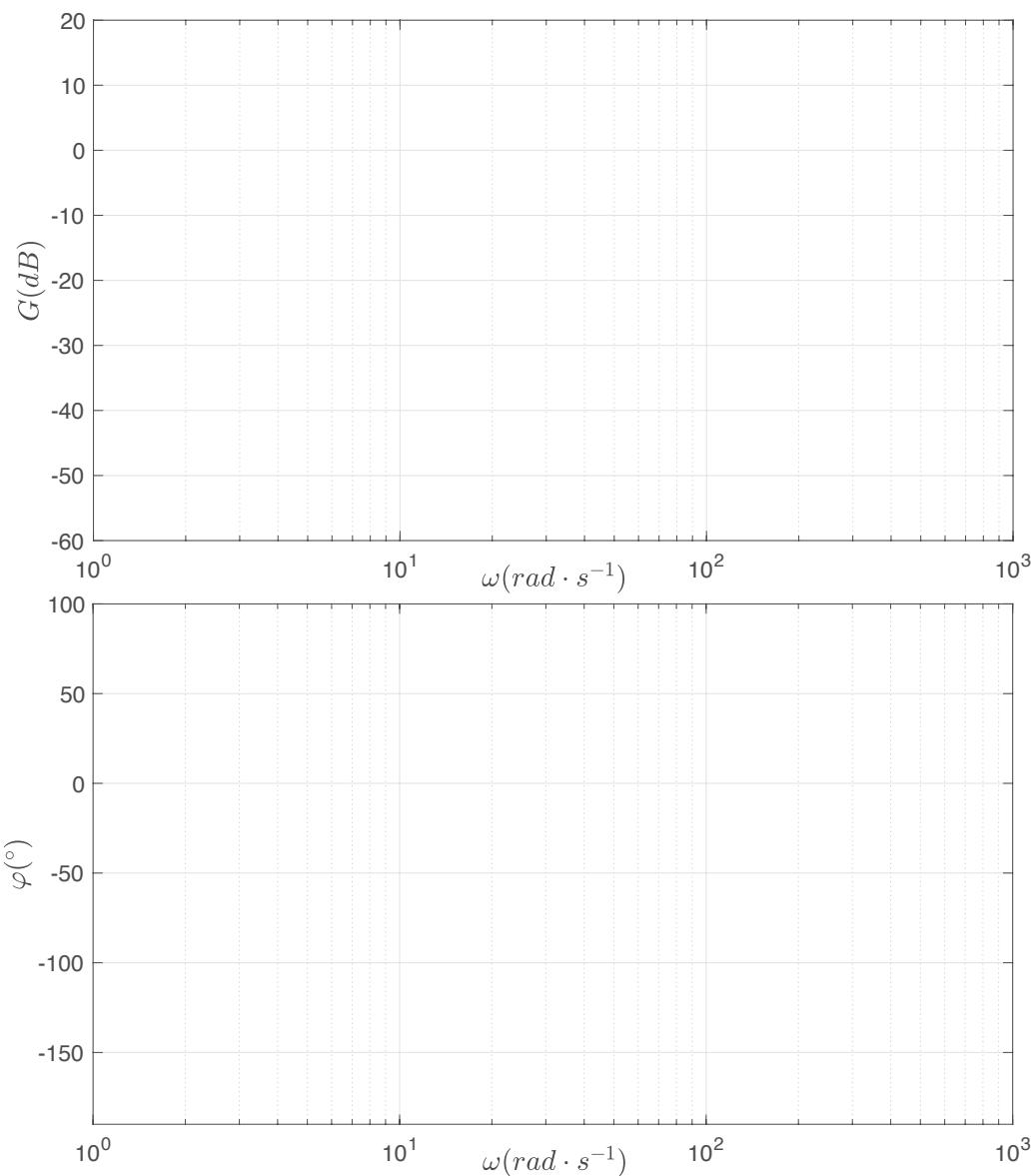


FIGURE 2 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert globale de la suspension d'un véhicule

## 5 Caractérisation fréquentielle paramétrée de la suspension automobile

On peut alors tracer pour différentes valeurs de  $\xi$  les différents diagrammes de Bode (figure 3 avec  $\tau = 0,05\text{s}$ ).

- Pour des pulsations faibles ( $\omega \rightarrow 0$ ) :
  - $G_{dB}$  est proche de 0 c'est à dire que  $G$  est proche de 1 et donc que l'amplitude du signal de sortie est similaire à celle du signal d'entrée.
  - $\varphi \approx 0^\circ$  ainsi le retard est très faible : peu de déphasage entre l'entrée et la sortie.
- Pour des pulsations proche de la pulsation de coupure ( $\omega \approx \omega_0 \approx \omega_r$ ) :
  - La résonance apparaît dès lors que  $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$  à  $\omega = \omega_r \approx \omega_0$ .
  - Dans ce cas  $G_{dB}$  est grand donc  $G$  aussi et l'amplitude de sortie est fortement amplifiée par rapport à l'amplitude d'entrée.
  - Le déphasage est équivalent à  $-90^\circ$  soit environ 1/4 de période.
- Pour des pulsations élevées ( $\omega \rightarrow +\infty$ ) :
  - $G_{dB}$  diminue fortement c'est à dire que  $G$  est très faible et donc que l'amplitude du signal de sortie est très amortie par rapport à celle du signal d'entrée.
  - $\varphi \approx -90^\circ$  ainsi le retard est de l'ordre d'un quart de période.

## 6 Interprétation temporelle d'une étude fréquentielle

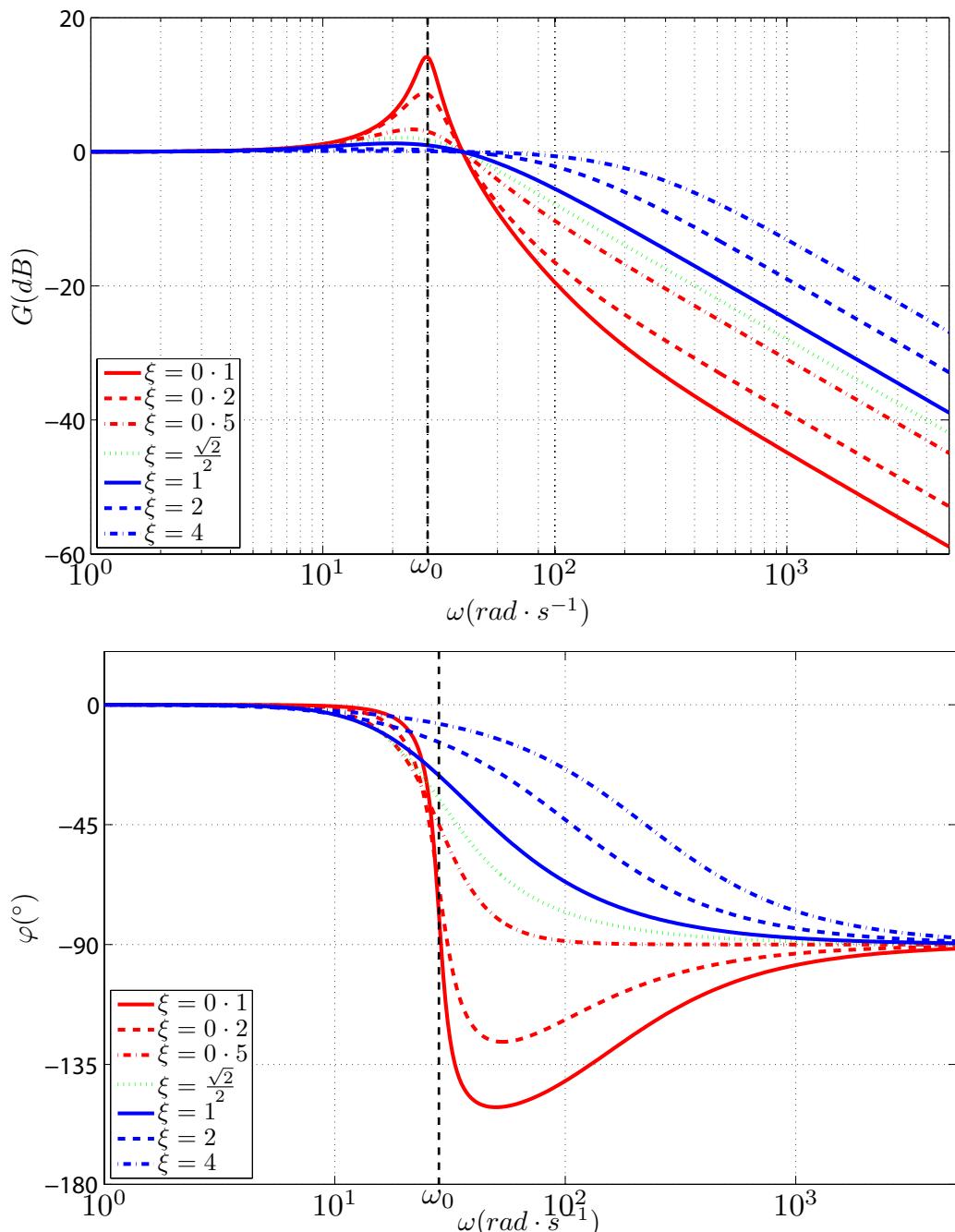
On se place dans le cas de  $\xi = 0,2$ ,  $\tau = 0,05\text{s}$  et  $\omega_0 = 28,3 \text{ rad/s}$ . Les diagrammes de Bode sont donnés sur la figure 4.

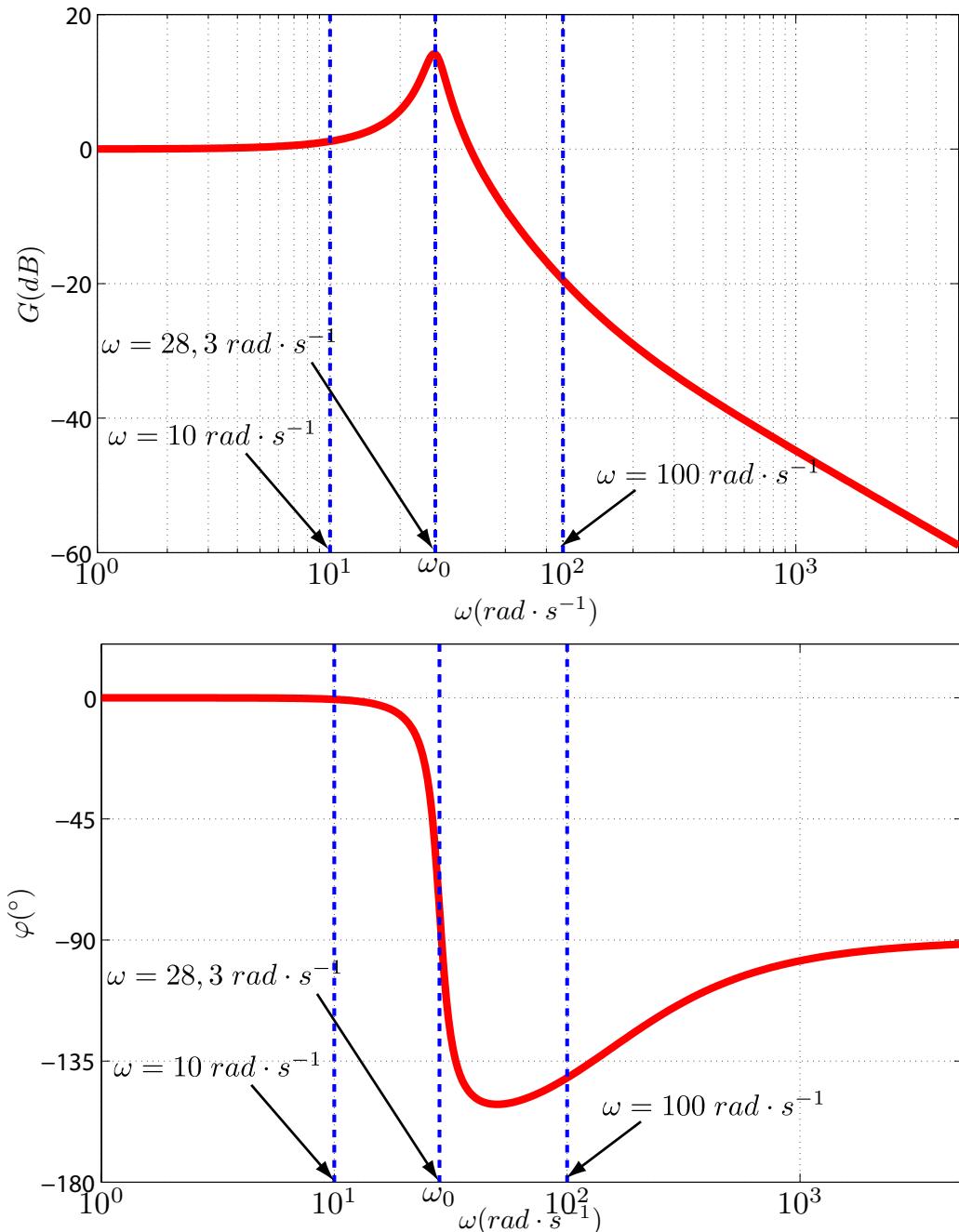
On note bien ici l'existence d'une résonance lorsque  $\omega = \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$ .

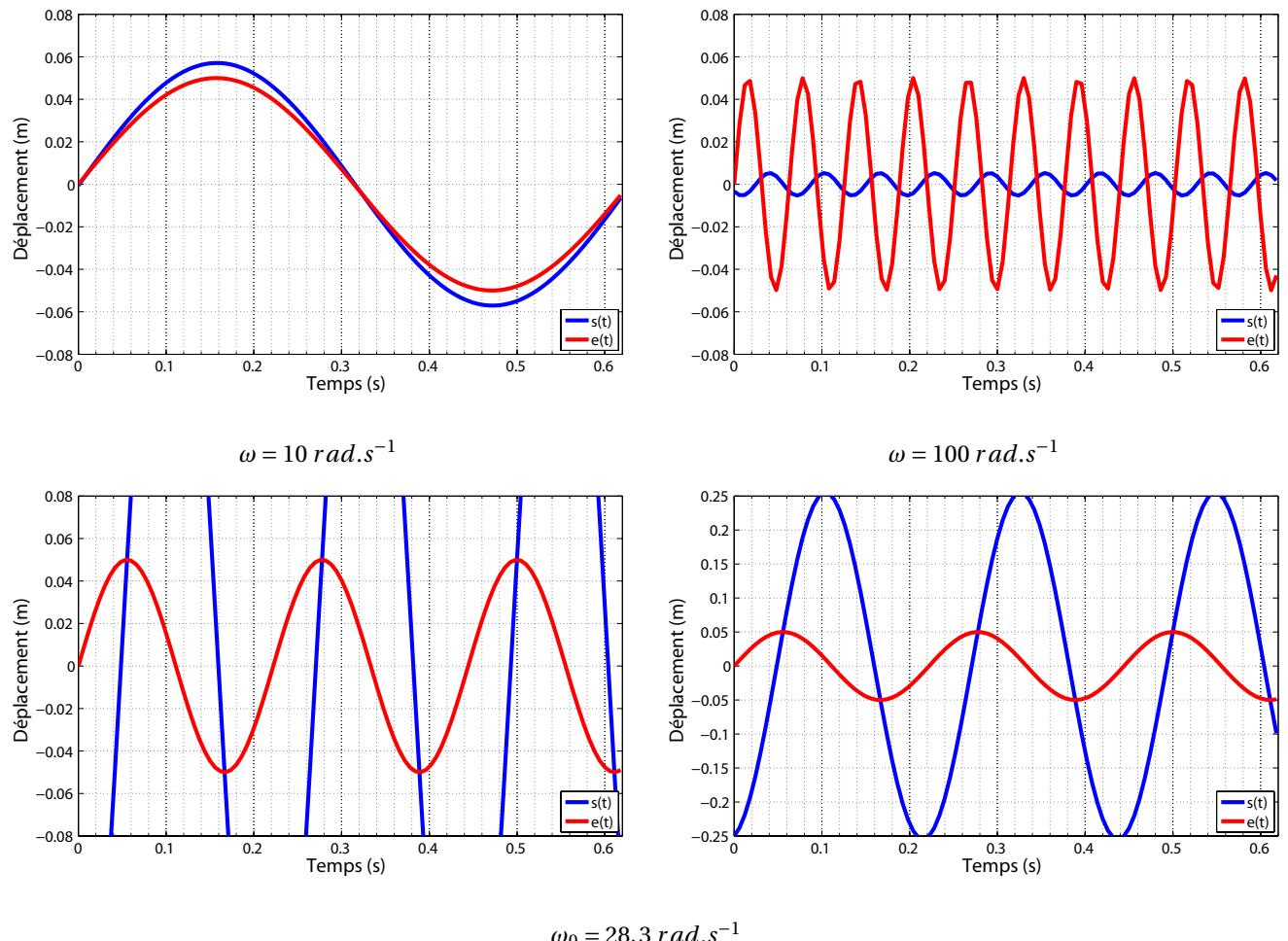
On se place alors sur trois valeurs de  $\omega$  pour étudier le signal temporel.

1.  $\omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$ ,
2.  $\omega = \omega_0 = 28,3 \text{ rad.s}^{-1}$ ,
3.  $\omega = 100 \text{ rad.s}^{-1}$ .

Grâce au diagramme de bode pour chacun de ces trois cas, on peut reconstituer le signal temporel de sortie avec  $G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|)$  et  $\varphi = \arg(H(j\omega))$ .

FIGURE 3 – Diagramme de Bode de la suspension d'un véhicule pour différentes valeurs de  $\xi$

FIGURE 4 – Diagramme de Bode de la suspension d'un véhicule pour  $\xi = 0,2$

FIGURE 5 – Réponse temporelle de la suspension du Clever avec  $\xi = 0,2$

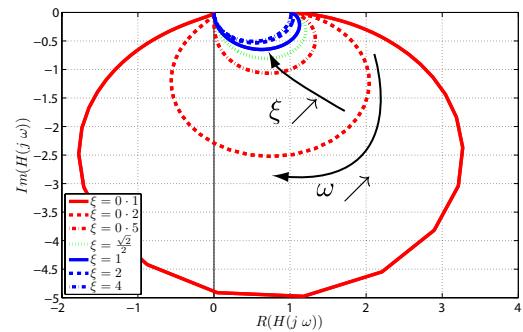
### III. Autres types de lieux de transfert

#### 1 Diagramme de Nyquist



##### Définition 2 : Diagramme de Nyquist

Le **diagramme de Nyquist** permet de représenter l'état de la réponse fréquentielle ( $s(t) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi)$ ) en fonction de la pulsation  $\omega$  pour une fonction de transfert  $H(p)$ . Ce diagramme donne l'évolution de la partie imaginaire de la fonction de transfert ( $Im(H(j\omega))$ ) en fonction de sa partie réelle ( $R(H(j\omega))$ )



#### 2 Diagramme de Black



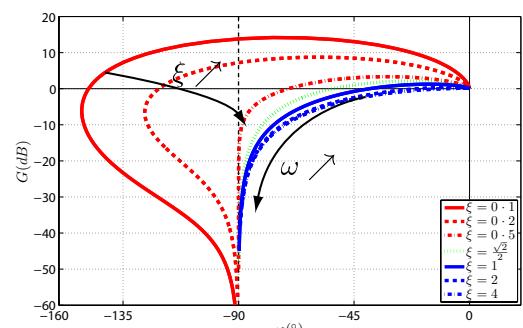
##### Définition 3 : Diagramme de Black

Le **diagramme de Black** permet de représenter l'état de la réponse fréquentielle ( $s(t) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi)$ ) en fonction de la pulsation  $\omega$  pour une fonction de transfert  $H(p)$ . Ce diagramme donne l'évolution du gain en décibel ( $G_{dB}$ )

$$G_{dB} = 20 \log(G) = 20 \log(|H(j\omega)|);$$

en fonction de la phase en degré ( $\varphi$  en °).

$$\varphi = \arg(H(j\omega)).$$



##### Remarque 1 :

Ces deux derniers diagrammes (Nyquist et Black) sont utilisés habituellement sous la forme d'abaques pour caractériser la **stabilité** des systèmes asservis.

## IV. Conclusion

### Conclusion : Analyse fréquentielle

L'analyse fréquentielle présente des outils très puissant pour caractériser la réponse d'un système vis-à-vis d'une consigne harmonique. Ce chapitre a mis en exergue dans un premier temps la nécessité d'étudier :

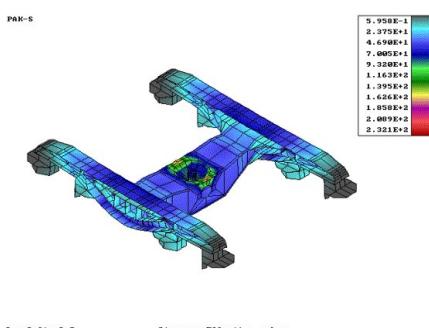
- le gain ( $G_d B = 20 \log(|H(j\omega)|)$ ),
- la phase ( $\varphi = \arg(H(j\omega))$ ),

en fonction de la pulsation  $\omega$ . On peut alors facilement reconstituer temporellement l'évolution de la sortie puisque celle-ci est simplement de type harmonique en régime permanent.

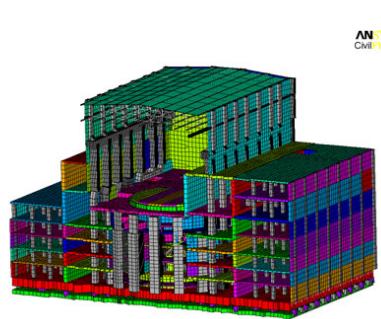
Ce type de procédé est très répandu dans plusieurs domaines de l'ingénierie :

- **analyse modale** pour la conception de système mécanique,
- conception de bâtiments résistant à des **ondes sismiques**.

Néanmoins dans ces domaines bien souvent, les comportements des systèmes sont **complexes ou non-linéaires**. On utilisera alors des **moyens numériques** pour caractériser complètement leur comportement fréquentiel.



Analyse modale d'un bogie de TGV



Analyse modale pour le dimensionnement para-sismique d'un bâtiment



Effondrement du pont de Tacoma (1940)