Devoir surveillé n°5

Barème

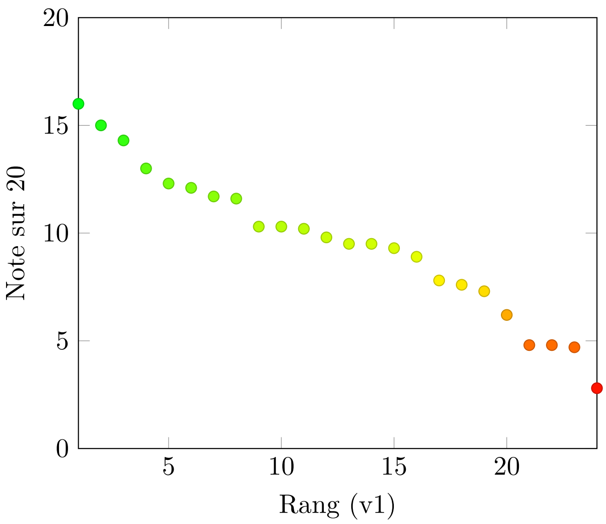
Calculs : 18 questions sur 2 points, total sur 36 , ramené sur 5 points
Problème : 33 ou 30 questions sur 4 points, total sur 132 (v1) ou 120 (v2), ramené sur 15 points

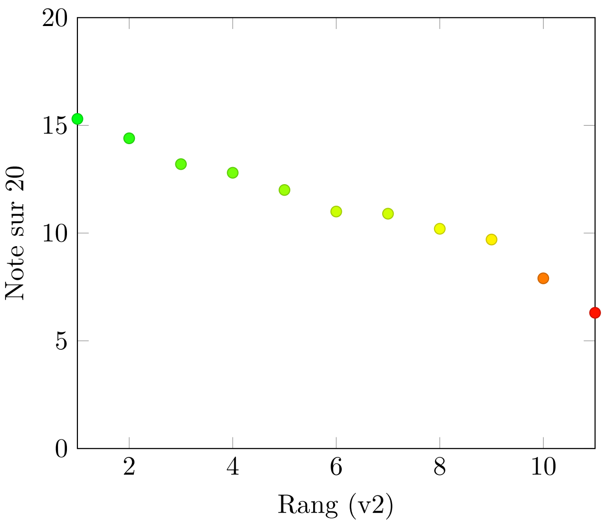
Soit c le nombre de points obtenus sur la fiche de calculs et p le nombre de points obtenus sur les exercices, la note sur 20 est le réel $n = \min\left\{\varphi\left(\frac{5c}{36} + \frac{15p}{\alpha}\right), 20\right\}$ avec $\alpha = 105$ (v1) ou 105 (v2), et φ une fonction continue strictement croissante choisie par mes soins, dépendant de la version choisie.

Statistiques

	Calculs	Problème (v1)	Problème (v2)	*Précision (v1)*	*Précision (v2)*
Minimum	13	13	22	*42%*	*45%*
Q1	18	42	42	*56%*	*56%*
Médiane	22	57	50	*67%*	*66%*
Q3	24	71	64	*72%*	*69%*
Maximum	31	89	79	*85%*	*86%*
Moyenne	21.1	54.4	51.7	*65.1%*	*64.0%*

Répartition des notes





Remarques générales

- La fiche de calculs a été assez bien réussie. Poursuivez vos efforts !
- Vous devez justifier soigneusement vos réponses, d'autant plus quand la réponse est donnée dans l'énoncé...
- Il faut définir et quantifier **toutes** les variables que vous utilisez.
- À partir du prochain devoir, je sanctionnerai les oublis de définition de variable, toutes les confusions entre f et $f(x)$, entre u_n et (u_n) à chaque question.

Exercice 1

- **Question 1.** Ici, le plus judicieux est de prouver que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$.
  Si vous revenez à la définition d'un anneau, vous devez ne pas oublier de prouver que les deux lois sont des lois de composition internes, vous devez bien vérifier que les éléments neutres et les opposés que vous proposez sont des éléments de $\mathbb{Z}[i]$, bref, vous êtes obligés de faire à peu près tout le travail qu'on fait si on utilise la notion de sous-anneau, mais vous devez en plus justifier l'associativité des deux lois, la commutativité de l'addition, la distributivité...
- **Question 3a.** Un nombre premier p peut tout à fait s'écrire comme produit de deux entiers : en effet, $p = p \times 1$.
- **Question 3b.** Vous ne pouviez pas donner un contre-exemple en donnant un élément irréductible sans prouver qu'il était bien irréductible...

- **Question 4a.** Si x et y sont deux réels, et si a et b sont deux réels *quelconques*, il n'y a aucune raison que $|x-a| \leq \dfrac{1}{2}$ et $|y-b| \leq \dfrac{1}{2}$... Il était nécessaire de définir les deux entiers à partir des parties réelle et imaginaire de z.
  En outre, si $|x-a| \leq \dfrac{1}{2}$ et $|y-b| \leq \dfrac{1}{2}$, l'inégalité triangulaire donne juste $|(x+iy)-(a+ib)| \leq 1$, et non $|(x+iy)-(a+ib)| < 1$.

Exercice 2v1

- **Question 2c.** Lu plusieurs fois : « $y_n > x_n$, donc $\ln\left(\dfrac{y_n}{x_n}\right) > \cancel{1}$ », c'est faux... Par exemple, $2 > 1$ mais $\ln 2 < 1$.
  Par ailleurs, le fait que $\ln\left(\dfrac{y_n}{x_n}\right) > 0$ n'a aucune utilité pour justifier que (w_n) converge vers 0.
- **Question 5a.** Que de justifications alambiquées ! Il suffisait ici d'exprimer x_n et y_n en fonction de u_n et de v_n, puis d'utiliser la continuité de la fonction exponentielle.

Exercice 2v2

- **Question 1a.** Pour justifier l'existence d'une borne supérieure, on démontre **toujours** qu'il s'agit d'une partie de $\mathbb{R}$ **non vide** et **majorée**.
- **Question 1b.** Beaucoup de réponses erronées. Examiner si m_n appartient ou non à U_{n+1} n'a pas franchement d'intérêt : vous êtes encore nombreux à confondre borne inférieure et plus petit élément, ou à vouloir utiliser le plus petit élément d'un ensemble alors que celui-ci n'existe pas forcément.
  L'inégalité $m_n \leqslant u_n \leqslant M_n$ est écrite dans l'énoncé : vous ne pouvez pas espérer obtenir des points si vous l'écrivez sans aucune justification.
- **Question 1c.** Un majorant de la suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas dépendre de n. Si on considère la suite (α_n) de terme général $n-1$, alors (α_n) est croissante et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n \leqslant n$, puis-je vraiment en déduire que (α_n) converge car croissante et « majorée par $\cancel{n}$ » ?

Exercice 3

Question 1. La limite est donnée dans l'énoncé, l'évaluation de la question ne porte donc que sur la justification.

Question 2. Résoudre une inéquation ne donne pas un tableau de signes. Savoir que $\varphi_n'(x) > 0$ si et seulement si $x > 1$ ne permet pas de connaître les points d'annulation de la dérivée : une fonction qui vérifie cette équivalence pourrait tout à fait avoir une dérivée nulle sur tout $]-\infty, 1]$.

Question 3. Vous devez être irréprochables sur ce type de questions. L'idéal ici est d'utiliser le théorème de la bijection, d'abord sur l'intervalle $[0,1]$ puis sur l'intervalle $]1,+\infty[$, en vérifiant bien évidemment toutes les hypothèses et en évitant les formules floues.
Il est indispensable d'indiquer que φ_n est continue et strictement croissante sur $]1,+\infty[$, mais dire qu'elle est *à valeurs dans* $]-1,+\infty[$ n'a pas d'intérêt : la fonction $x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$ est elle aussi continue et strictement croissante sur $]1,+\infty[$ à valeurs dans $]-1,+\infty[$, pourtant l'équation $-\mathrm{e}^{-x} = 1$ n'a pas de solution.
On rappelle que

le théorème des valeurs intermédiaires fournit un résultat d'existence mais aucun résultat d'unicité

Il ne permet pas non plus de justifier qu'il n'existe pas d'antécédent : si on considère la fonction sin, $1 \notin \left[\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right), \sin(\pi)\right]$, pourtant 1 admet bien un antécédent par sin dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$
Enfin, il est incompréhensible de trouver encore des copies qui ne mentionnent pas la continuité, ou qui oublient de mentionner la **stricte** croissance.

Question 7. La fonction ψ **n'est pas bijective** ! Il est donc hors de question d'« appliquer $\cancel{\psi^{-1}}$ ».
Et même en écrivant : « ψ réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]-1,+\infty[$ (ce qui suppose de l'avoir prouvé auparavant), notons χ cette bijection », il faudrait ensuite vérifier qu'on peut bien remplacer ψ par χ dans l'inégalité, **puis** traiter la question de la monotonie de χ^{-1} : appliquer une fonction à une inégalité ne conserve pas toujours l'inégalité !
Traiter la question en utilisant simplement la croissance de ψ sur $]0,+\infty[$ était ici bien plus efficace.

Question 8. Une limite lorsque n tend vers $+\infty$ ne dépend pas de n... ! ! !

Question 9a. J'ai souvent lu « par stricte croissance de ψ », mais ψ n'est pas croissante ! Vous aviez pourtant étudié ses variations dans la question 6.
Par ailleurs, pour utiliser la stricte croissance de ψ sur $\mathbb{R}_+$, il faut d'abord s'assurer que $\alpha-\epsilon, \alpha, \alpha+\epsilon \in \mathbb{R}_+$.

Question 9c. Même remarque qu'à la question 7 : φ_n n'est pas bijective...

Répartition des points

Version 1

	Question	Non traité	Non encadré	0	1	2	3	4
ex1	1	3	0	0	5	10	3	3
	2a	1	0	2	1	0	5	15
	2b	2	0	5	4	7	0	6
	2c	4	0	9	2	6	0	3
	3a	7	0	5	2	3	3	4
	3b	12	0	12	0	0	0	0
	3c	17	0	5	0	2	0	0
	3d	19	0	3	1	1	0	0
	4a	14	0	2	3	5	0	0
	4b	24	0	0	0	0	0	0
	4c	24	0	0	0	0	0	0
ex2	1a	1	0	0	5	1	3	14
	1b	1	0	1	0	1	0	21
	2a	0	0	0	0	0	0	24
	2b	0	0	2	0	1	0	21
	2c	0	0	0	2	1	9	12
	3	1	1	1	4	1	2	14
	4	2	1	0	2	0	0	19
	5a	4	1	3	3	2	3	8
	5b	7	0	2	0	1	3	11
	5c	9	0	2	2	0	5	6
ex3	1	8	0	3	0	0	3	10
	2	5	0	1	6	0	7	5
	3	8	0	3	2	4	6	1
	4	17	0	3	1	1	1	1
	5	9	0	0	0	0	2	13
	6	10	0	2	3	1	5	3
	7	15	0	0	1	2	2	4
	8	13	0	2	0	1	0	8
	9a	13	0	0	1	4	1	5
	9b	16	0	5	1	0	0	2
	9c	17	0	3	3	1	0	0
	10	16	0	1	0	3	3	1

Version 2

	Question	Non traité	Non encadré	0	1	2	3	4
ex1	1	0	0	1	1	5	1	3
	2a	0	0	0	0	0	1	10
	2b	0	0	0	3	4	0	4
	2c	0	0	0	0	4	2	5
	3a	1	0	1	0	3	1	5
	3b	2	0	8	0	1	0	0
	3c	7	0	3	0	1	0	0
	3d	8	0	2	1	0	0	0
	4a	3	0	1	2	2	1	2
	4b	9	0	0	0	0	0	2
	4c	7	0	3	0	0	0	1
ex2	1a	1	0	0	0	4	0	6
	1b	2	0	2	5	1	1	0
	1c	2	0	2	0	2	0	5
	2a	3	0	0	0	0	1	7
	2b	5	0	4	0	0	0	2
	3a	7	0	1	0	1	0	2
	3b	9	0	0	0	0	0	2
ex3	1	0	0	0	1	0	1	9
	2	0	0	0	1	0	7	3
	3	1	0	2	1	3	4	0
	4	7	0	1	1	0	1	1
	5	3	0	0	0	0	0	8
	6	3	0	1	1	3	2	1
	7	4	0	0	0	1	3	3
	8	4	0	0	0	0	0	7
	9a	4	0	1	1	1	1	3
	9b	6	0	1	1	0	0	3
	9c	7	0	0	0	3	1	0
	10	5	0	0	1	4	1	0