



C7 : Analyse fréquentielle des systèmes asservis

C7-1 : Analyse fréquentielle des systèmes asservis : Introduction

Émilien DURIF

Lycée La Martinière Monplaisir Lyon
Classe de MPSI
22 Mars 2022



Plan

- ① Définition de l'analyse fréquentielle
- ② Intérêts de l'étude fréquentielle
- ③ Exemple d'une suspension d'un véhicule
- ④ Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique
- ⑤ Annexes : Démonstrations complémentaires



Définition de l'analyse fréquentielle

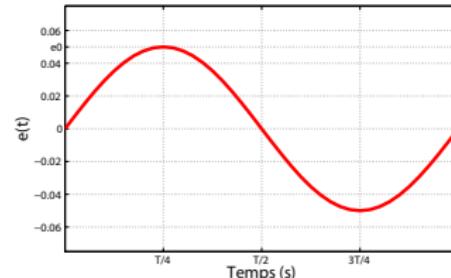
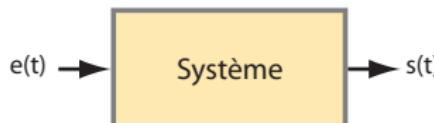
Analyse fréquentielle ou harmonique

L'**analyse fréquentielle** d'un système linéaire, continu et invariant consiste à étudier la réponse ($s(t)$) vis à vis d'une entrée ($e(t)$) de type **harmonique ou sinusoïdale** :

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t) = e_0 \sin(2\pi f t) \quad (1)$$

Ce signal est caractérisé par :

- sa **fréquence** $f = 1/T$ (inverse de la période T),
- ou sa **pulsation** $\omega = 2\pi f$,
- son **amplitude** e_0 .





Intérêts de l'étude fréquentielle

Décomposition en série de Fourier

Tout signal **périodique** se décompose en une **somme de signaux harmoniques** (e.g. sinusoïdale).

Par exemple un signal périodique et impaire de fréquence f peut se décomposer de la façon suivante :

$$e(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cdot \sin(2\pi k f t) \quad (2)$$

Remarque

En pratique : décomposition finie en série de Fourier ($\tilde{e}(t)$) (n termes) :

$$\tilde{e}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sin(2\pi k f t) \quad (3)$$

La précision de la décomposition sera alors d'autant plus fidèle au signal de départ que le nombre de termes (n) sera grand.



Intérêts de l'étude fréquentielle

Décomposition en série de Fourier

Tout signal périodique se décompose en une somme de signaux harmoniques (e.g. sinusoïdale).

Par exemple un signal périodique et impaire de fréquence f peut se décomposer de la façon suivante :

$$e(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cdot \sin(2\pi k f t) \quad (2)$$

Remarque

En pratique : décomposition finie en série de Fourier ($\tilde{e}(t)$) (n termes) :

$$\tilde{e}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sin(2\pi k f t) \quad (3)$$

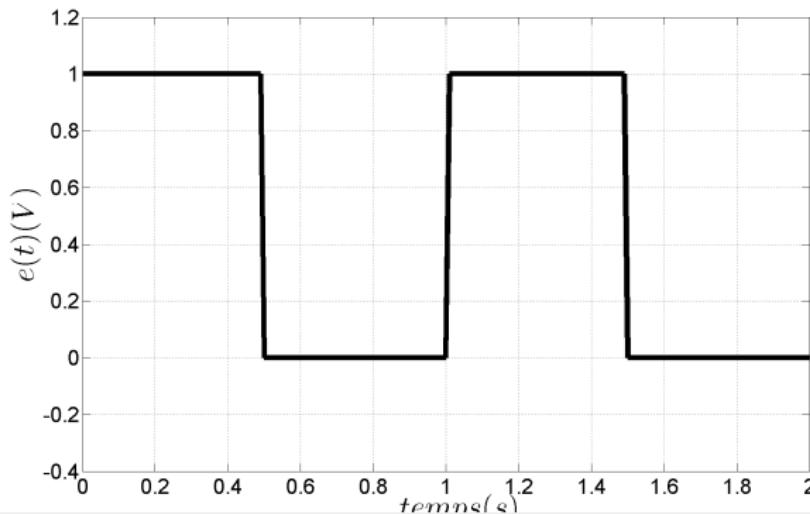
La précision de la décomposition sera alors d'autant plus fidèle au signal de départ que le nombre de termes (n) sera grand.



Intérêts de l'étude fréquentielle

Reconstitution d'un signal carré périodique à l'aide d'une décomposition finie en série de Fourier :

$$\tilde{e}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sin(2\pi k f t)$$

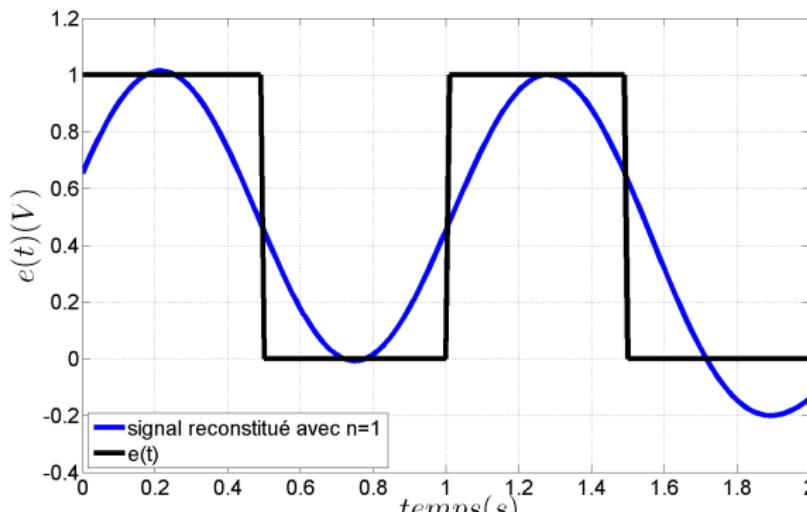




Intérêts de l'étude fréquentielle

Reconstitution d'un signal carré périodique à l'aide d'une décomposition finie en série de Fourier :

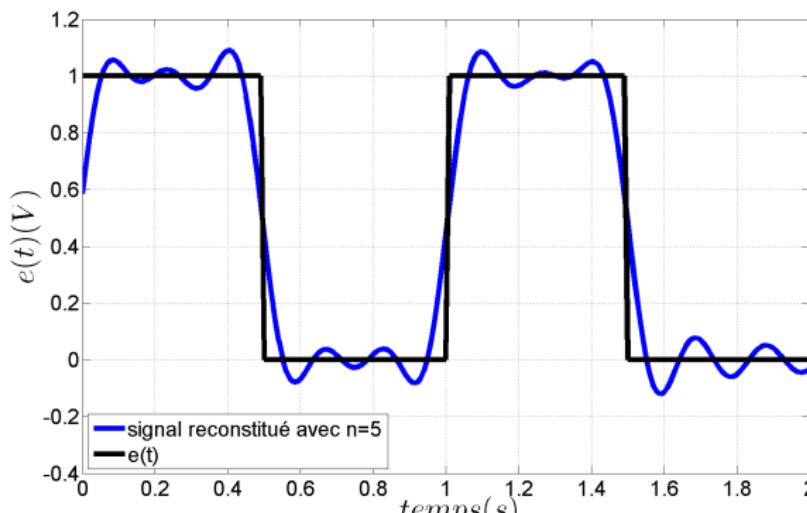
$$\tilde{e}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sin(2\pi k f t)$$



Intérêts de l'étude fréquentielle

Reconstitution d'un signal carré périodique à l'aide d'une décomposition finie en série de Fourrier :

$$\tilde{e}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sin(2\pi k f t)$$

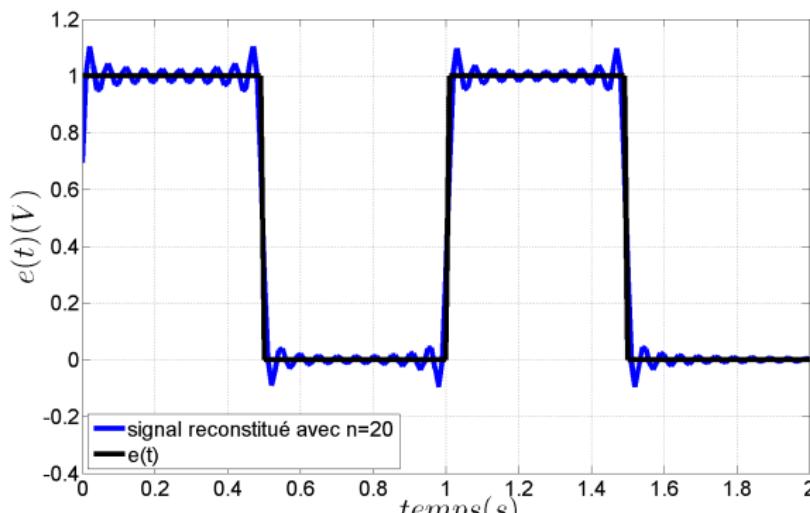




Intérêts de l'étude fréquentielle

Reconstitution d'un signal carré périodique à l'aide d'une décomposition finie en série de Fourier :

$$\tilde{e}(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sin(2\pi k f t)$$

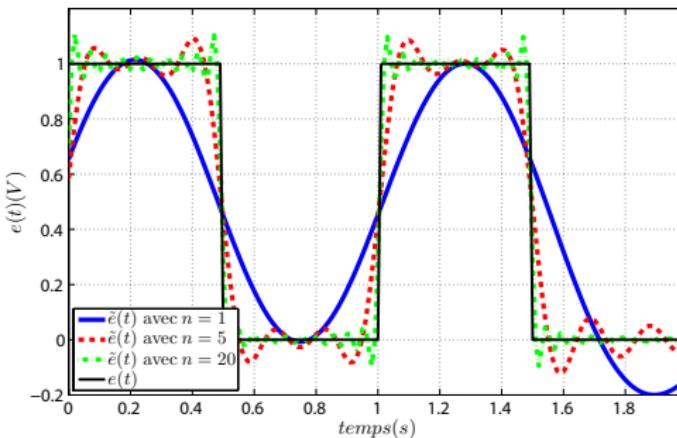




Intérêts de l'étude fréquentielle

Étude d'un signal quelconque

- Pour étudier la réponse d'un système vis-à-vis d'un signal quelconque, il faudra alors être capable de caractériser **la réponse fréquentielle** sur une plage de fréquence (f) ou de pulsation (ω) étendue.
- On peut également choisir cette méthode d'analyse pour vérifier le comportement d'un système vis à vis d'une entrée harmonique caractérisée par différentes valeurs de fréquence (f) ou de pulsation (ω).

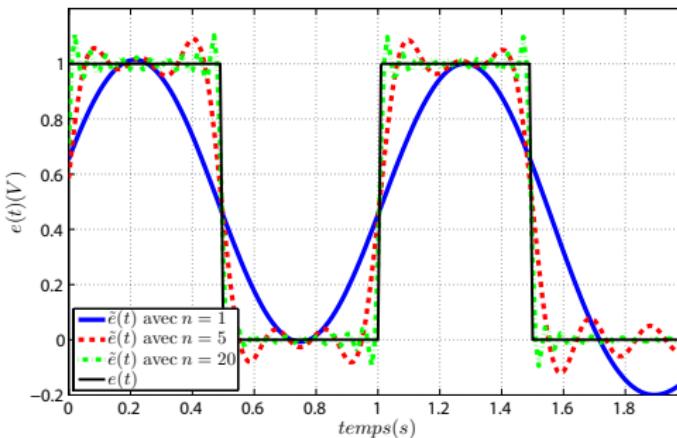




Intérêts de l'étude fréquentielle

Étude d'un signal quelconque

- Pour étudier la réponse d'un système vis-à-vis d'un signal quelconque, il faudra alors être capable de caractériser **la réponse fréquentielle** sur une plage de fréquence (f) ou de pulsation (ω) étendue.
- On peut également choisir cette méthode d'analyse pour vérifier le comportement d'un système vis à vis d'une entrée harmonique caractérisée par différentes valeurs de fréquence (f) ou de pulsation (ω).

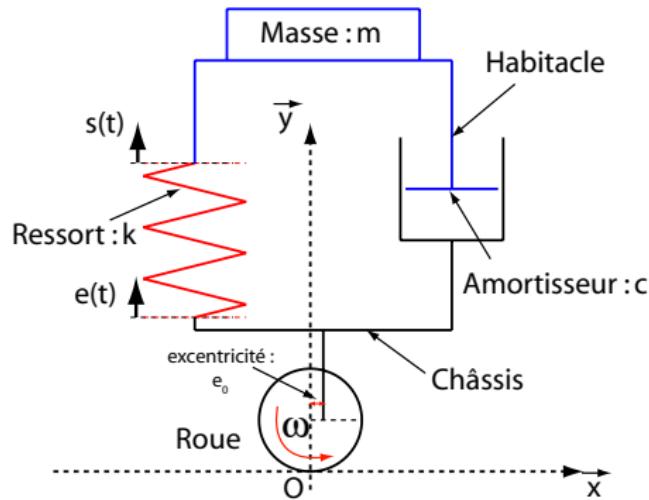




Exemple d'une suspension d'un véhicule

Suspension de véhicule

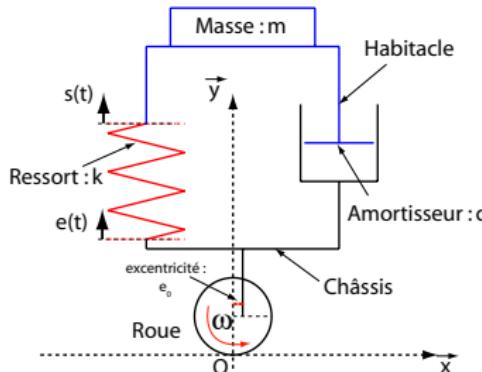
- $m = 100\text{kg}$,
- $c = 1,13\text{kN} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$,
- $k = 80\text{kN.m}^{-1}$.



Exemple d'une suspension d'un véhicule

- L'axe de la roue est légèrement excentrée par rapport à son centre. Ceci provoque donc un déplacement du châssis en fonction de la vitesse de rotation de la roue ω .

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t).$$



- Le PFD en résultante suivant la direction \vec{y} appliqué à l'habitacle par rapport au repère R_0 :

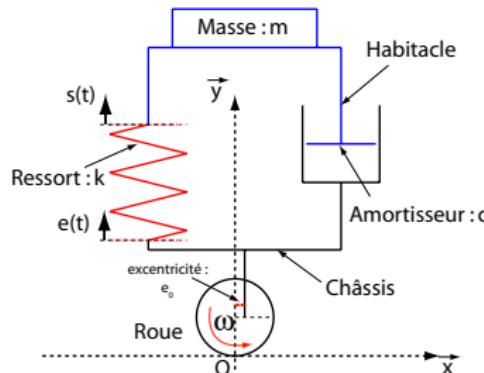
$$-c \left(\frac{d(s(t) - e(t))}{dt} \right) - k(s(t) - e(t)) = m \frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$



Exemple d'une suspension d'un véhicule

- L'axe de la roue est légèrement excentrée par rapport à son centre. Ceci provoque donc un déplacement du châssis en fonction de la vitesse de rotation de la roue ω .

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t).$$



- Le PFD en résultante suivant la direction \vec{y} appliquée à l'habitacle par rapport au repère R_0 :

$$-c \left(\frac{d(s(t) - e(t))}{dt} \right) - k(s(t) - e(t)) = m \frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$



Exemple d'une suspension d'un véhicule

- Le PFD en résultante suivant la direction \vec{y} appliqué à l'habitacle par rapport au repère R_0 :

$$-c \left(\frac{d(s(t) - e(t))}{dt} \right) - k(s(t) - e(t)) = m \frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$

- La fonction de transfert du système $H(p) = S(p)/E(p)$ est égale à :

$$H(p) = \frac{c p + k}{m p^2 + c p + k} = \frac{\frac{c}{k} p + 1}{\frac{m}{k} p^2 + \frac{c}{k} p + 1}$$

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t).$$



Exemple d'une suspension d'un véhicule

- Le PFD en résultante suivant la direction \vec{y} appliqué à l'habitacle par rapport au repère R_0 :

$$-c \left(\frac{d(s(t) - e(t))}{dt} \right) - k(s(t) - e(t)) = m \frac{d^2 s(t)}{dt^2}.$$

- La fonction de transfert du système $H(p) = S(p)/E(p)$ est égale à :

$$H(p) = \frac{c p + k}{m p^2 + c p + k} = \frac{\frac{c}{k} p + 1}{\frac{m}{k} p^2 + \frac{c}{k} p + 1}$$

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t).$$

Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

- Transformée de Laplace de l'entrée harmonique ($e(t)$)

$$E(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2}$$



Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

- Transformée de Laplace de l'entrée harmonique ($e(t)$)

$$E(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2}$$

- Dans le domaine de Laplace la sortie $S(p)$ d'un système soumis à une entrée harmonique s'écrit :

$$S(p) = H(p)E(p) = H(p) \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2}$$

- Pour le cas de la suspension d'un véhicule, nous obtenons alors :

$$S(p) = \left(\frac{\frac{c}{k} p + 1}{\frac{m}{k} p^2 + \frac{c}{k} p + 1} \right) \left(\frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2} \right)$$

Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

- Transformée de Laplace de l'entrée harmonique ($e(t)$)

$$E(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2}$$

- Dans le domaine de Laplace la sortie $S(p)$ d'un système soumis à une entrée harmonique s'écrit :

$$S(p) = H(p)E(p) = H(p) \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2}$$

- Pour le cas de la suspension d'un véhicule, nous obtenons alors :

$$S(p) = \left(\frac{\frac{c}{k} p + 1}{\frac{m}{k} p^2 + \frac{c}{k} p + 1} \right) \left(\frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2} \right)$$

Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

On obtient alors par une transformée de Laplace inverse,

$$S(t) = e_0 \left[\frac{G}{2j} \left(-e^{-j(\varphi + \omega t)} + e^{j(\varphi + \omega t)} \right) + e^{a t} Q(t) \right] \\ = e_0 [G \sin(\omega t + \varphi) + e^{a t} Q(t)]$$

Avec $a < 0$: $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{at} Q(t) = 0$ (régime transitoire)

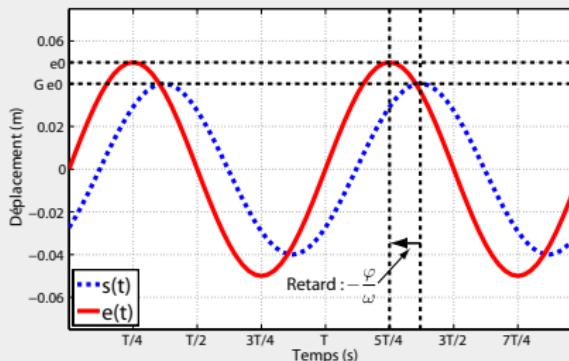
Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

Réponse fréquentielle en régime permanent

Ainsi, en régime établi ou permanent la sortie $s(t)$ est égale à :

$$s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

- $G = \frac{s_0}{e_0} = |H(j\omega)|$ caractérise le gain (c'est à dire le facteur d'amplitude du sinus),
- $\varphi = \arg(H(j\omega))$ est le déphasage (c'est à dire l'avance ou le retard du sinus).





Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t)$$

$$s(t) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi)$$



Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

$$e(t) = e_0 \sin(\omega t)$$
$$s(t) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi)$$



Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

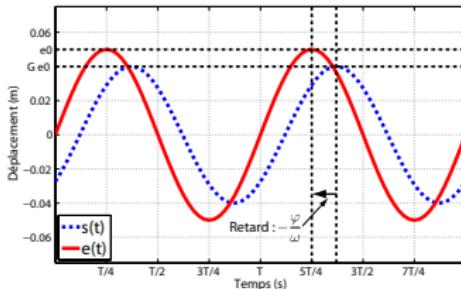
Remarque : cas général

Dans le cas général d'un système linéaire continu invariant, sous les hypothèses de stabilité et avec des **conditions initiales nulles** le résultat précédent est encore valable.



Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : Conclusion

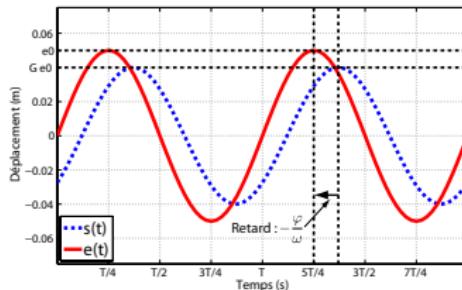
- L'étude fréquentielle d'un système linéaire continu et invariant revient à étudier :
 - le gain fréquentielle G ,
 - la phase φ de la fonction de transfert $H(p)$,
- en fonction de la pulsation ω ou de la fréquence f .
- On utilisera pour cela des outils des outils graphiques appelés "lieux de transfert".





Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : Conclusion

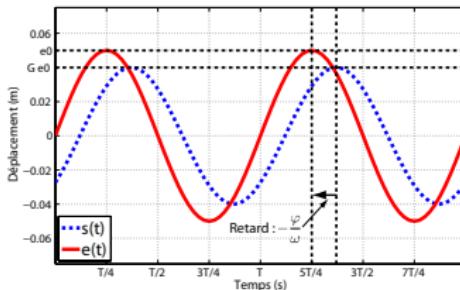
- L'étude fréquentielle d'un système linéaire continu et invariant revient à étudier :
 - le gain fréquentielle G ,
 - la phase φ de la fonction de transfert $H(p)$,
- en fonction de la pulsation ω ou de la fréquence f .
- On utilisera pour cela des outils des outils graphiques appelés "lieux de transfert".





Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : Conclusion

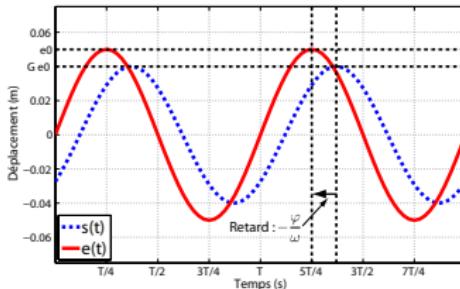
- L'étude fréquentielle d'un système linéaire continu et invariant revient à étudier :
 - le gain fréquentielle G ,
 - la phase φ de la fonction de transfert $H(p)$,
- en fonction de la pulsation ω ou de la fréquence f .
- On utilisera pour cela des outils des outils graphiques appelés "lieux de transfert".





Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : Conclusion

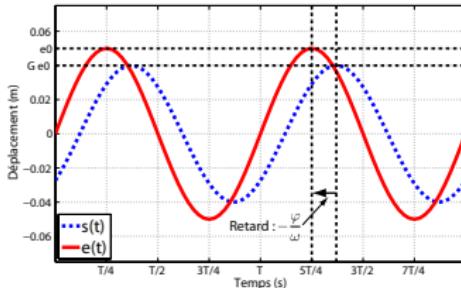
- L'étude fréquentielle d'un système linéaire continu et invariant revient à étudier :
 - le gain fréquentielle G ,
 - la phase φ de la fonction de transfert $H(p)$,
- en fonction de la pulsation ω ou de la fréquence f .
- On utilisera pour cela des outils des outils graphiques appelés "lieux de transfert".





Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : Conclusion

- L'étude fréquentielle d'un système linéaire continu et invariant revient à étudier :
 - le gain fréquentielle G ,
 - la phase φ de la fonction de transfert $H(p)$,
- en fonction de la pulsation ω ou de la fréquence f .
- On utilisera pour cela des outils des outils graphiques appelés “lieux de transfert”.





Définition de l'analyse fréquentielle Intérêts de l'étude fréquentielle Exemple d'une suspension d'un véhicule Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique :

Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : Conclusion



Définition de l'analyse fréquentielle Intérêts de l'étude fréquentielle Exemple d'une suspension d'un véhicule Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique :

Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : Conclusion



Définition de l'analyse fréquentielle Intérêts de l'étude fréquentielle Exemple d'une suspension d'un véhicule Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique :

Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : Conclusion



Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

- La décomposition dans le domaine de Laplace de $S(p)$ donne

$$S(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2} H(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{(p + j\omega)(p - j\omega)} H(p) = \\ e_0 \left[\frac{A}{p + j\omega} + \frac{B}{p - j\omega} + \frac{D}{p - p_1} + \frac{E}{p - p_2} \right]$$

- $p_1 = a + b j$ et $p_2 = a - b j$ sont les pôles de $H(p)$ avec $a = -\frac{c k}{2 m k} = -\frac{c}{2m} < 0$.

- En calculant la limite de $(p + j\omega)S(p)$ en $-j\omega$:

$$A = H(-j\omega) \frac{-j\omega}{-2j\omega} = \frac{H(-j\omega)}{2}$$

- En calculant la limite de $(p - j\omega)S(p)$ en $j\omega$:

$$B = H(j\omega) \frac{\omega}{2j\omega} = \frac{H(j\omega)}{2j}$$

- Pour le cas de la suspension d'un véhicule, nous obtenons alors :

$$S(p) = \left(\frac{\frac{c}{k} p + 1}{\frac{m}{k} p^2 + \frac{c}{k} p + 1} \right) \left(\frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2} \right)$$



Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

- La décomposition dans le domaine de Laplace de $S(p)$ donne

$$S(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2} H(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{(p + j\omega)(p - j\omega)} H(p) = \\ e_0 \left[\frac{A}{p + j\omega} + \frac{B}{p - j\omega} + \frac{D}{p - p_1} + \frac{E}{p - p_2} \right]$$

- $p_1 = a + b j$ et $p_2 = a - b j$ sont les pôles de $H(p)$ avec $a = -\frac{c}{2m k} = -\frac{c}{2m} < 0$.

- En calculant la limite de $(p + j\omega)S(p)$ en $-j\omega$:

$$A = H(-j\omega) \frac{-j\omega}{-j\omega} = \frac{H(-j\omega)}{-2j}$$

- En calculant la limite de $(p - j\omega)S(p)$ en $j\omega$:

$$B = H(j\omega) \frac{\omega}{2j\omega} = \frac{H(j\omega)}{2j}$$

- Pour le cas de la suspension d'un véhicule, nous obtenons alors :

$$S(p) = \left(\frac{\frac{c}{k} p + 1}{\frac{m}{k} p^2 + \frac{c}{k} p + 1} \right) \left(\frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2} \right)$$



Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

- La décomposition dans le domaine de Laplace de $S(p)$ donne

$$S(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2} H(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{(p + j\omega)(p - j\omega)} H(p) = \\ e_0 \left[\frac{A}{p + j\omega} + \frac{B}{p - j\omega} + \frac{D}{p - p_1} + \frac{E}{p - p_2} \right]$$

- $p_1 = a + b j$ et $p_2 = a - b j$ sont les pôles de $H(p)$ avec $a = -\frac{c k}{2 m k} = -\frac{c}{2m} < 0$.

- En calculant la limite de $(p + j\omega)S(p)$ en $-j\omega$:

$$A = H(-j\omega) \frac{\omega}{-2j\omega} = \frac{H(-j\omega)}{-2j}$$

- En calculant la limite de $(p - j\omega)S(p)$ en $j\omega$:

$$B = H(j\omega) \frac{\omega}{2j\omega} = \frac{H(j\omega)}{2j}$$

- Pour le cas de la suspension d'un véhicule, nous obtenons alors :

$$S(p) = \left(\frac{\frac{c}{k} p + 1}{\frac{m}{k} p^2 + \frac{c}{k} p + 1} \right) \left(\frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2} \right)$$



Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

- La décomposition dans le domaine de Laplace de $S(p)$ donne

$$S(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2} H(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{(p + j\omega)(p - j\omega)} H(p) = \\ e_0 \left[\frac{A}{p + j\omega} + \frac{B}{p - j\omega} + \frac{D}{p - p_1} + \frac{E}{p - p_2} \right]$$

- $p_1 = a + b j$ et $p_2 = a - b j$ sont les pôles de $H(p)$ avec $a = -\frac{c k}{2 m k} = -\frac{c}{2m} < 0$.

- En calculant la limite de $(p + j\omega)S(p)$ en $-j\omega$:

$$A = H(-j\omega) \frac{\omega}{-2j\omega} = \frac{H(-j\omega)}{-2j}$$

- En calculant la limite de $(p - j\omega)S(p)$ en $j\omega$:

$$B = H(j\omega) \frac{\omega}{2j\omega} = \frac{H(j\omega)}{2j}$$

- Pour le cas de la suspension d'un véhicule, nous obtenons alors :

$$S(p) = \left(\frac{\frac{c}{k} p + 1}{\frac{m}{k} p^2 + \frac{c}{k} p + 1} \right) \left(\frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2} \right)$$



Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

- La décomposition dans le domaine de Laplace de $S(p)$ donne

$$S(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2} H(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{(p + j\omega)(p - j\omega)} H(p) = \\ e_0 \left[\frac{A}{p + j\omega} + \frac{B}{p - j\omega} + \frac{D}{p - p_1} + \frac{E}{p - p_2} \right]$$

- $p_1 = a + b j$ et $p_2 = a - b j$ sont les pôles de $H(p)$ avec $a = -\frac{c}{2m k} = -\frac{c}{2m} < 0$.

- En calculant la limite de $(p + j\omega)S(p)$ en $-j\omega$:

$$A = H(-j\omega) \frac{\omega}{-2j\omega} = \frac{H(-j\omega)}{-2j}$$

- En calculant la limite de $(p - j\omega)S(p)$ en $j\omega$:

$$B = H(j\omega) \frac{\omega}{2j\omega} = \frac{H(j\omega)}{2j}$$

- Pour le cas de la suspension d'un véhicule, nous obtenons alors :

$$S(p) = \left(\frac{\frac{c}{k} p + 1}{\frac{m}{k} p^2 + \frac{c}{k} p + 1} \right) \left(\frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2} \right)$$



Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

- La décomposition dans le domaine de Laplace de $S(p)$ donne

$$S(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2} H(p) = \frac{e_0 \cdot \omega}{(p + j\omega)(p - j\omega)} H(p) = \\ e_0 \left[\frac{A}{p + j\omega} + \frac{B}{p - j\omega} + \frac{D}{p - p_1} + \frac{E}{p - p_2} \right]$$

- $p_1 = a + b j$ et $p_2 = a - b j$ sont les pôles de $H(p)$ avec $a = -\frac{c}{2m k} = -\frac{c}{2m} < 0$.

- En calculant la limite de $(p + j\omega)S(p)$ en $-j\omega$:

$$A = H(-j\omega) \frac{\omega}{-2j\omega} = \frac{H(-j\omega)}{-2j}$$

- En calculant la limite de $(p - j\omega)S(p)$ en $j\omega$:

$$B = H(j\omega) \frac{\omega}{2j\omega} = \frac{H(j\omega)}{2j}$$

- Pour le cas de la suspension d'un véhicule, nous obtenons alors :

$$S(p) = \left(\frac{\frac{c}{k}p + 1}{\frac{m}{k}p^2 + \frac{c}{k}p + 1} \right) \left(\frac{e_0 \cdot \omega}{p^2 + \omega^2} \right)$$



Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

Remarque : stabilité des systèmes

- L'étude fréquentielle d'un système asservi n'a de sens que si le **système est stable**.
- La condition $a = -\frac{c \cdot k}{2 \cdot m \cdot k} = -\frac{c}{2m} < 0$ revient à dire que les pôles de la fonction de transfert sont à partie réelle négative ce qui est une condition de stabilité des systèmes asservis.
- Dans le cours de première année, nous n'étudierons que des système stables. En deuxième année, nous étudierons la méthode pour caractériser la stabilité d'un système.

Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

Remarque : stabilité des systèmes

- L'étude fréquentielle d'un système asservi n'a de sens que si le **système est stable**.
- La condition $a = -\frac{c k}{2 m k} = -\frac{c}{2m} < 0$ revient à dire que les pôles de la fonction de transfert sont à partie réelle négative ce qui est une condition de stabilité des systèmes asservis.
- Dans le cours de première année, nous n'étudierons que des système stables. En deuxième année, nous étudierons la méthode pour caractériser la stabilité d'un système.



Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

Remarque : stabilité des systèmes

- L'étude fréquentielle d'un système asservi n'a de sens que si le **système est stable**.
- La condition $a = -\frac{c k}{2 m k} = -\frac{c}{2m} < 0$ revient à dire que les pôles de la fonction de transfert sont à partie réelle négative ce qui est une condition de stabilité des systèmes asservis.
- Dans le cours de première année, nous n'étudierons que des système stables. En deuxième année, nous étudierons la méthode pour caractériser la stabilité d'un système.



Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

- **A et B sont des complexes conjugués.**
- $H(j\omega)$ est un nombre complexe et peut donc s'écrire sous la forme $H(j\omega) = G e^{j\varphi}$, avec $G = |H(j\omega)|$ et $\varphi = \arg(H(j\omega))$.
- On obtient alors,

$$\begin{aligned} S(p) &= e_0 \left[\frac{H(-j\omega)}{-2j(p+j\omega)} + \frac{H(j\omega)}{2j(p-j\omega)} + \frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2} \right] \\ &= e_0 \left[\frac{1}{2j} \left(-\frac{Ge^{-j\varphi}}{p+j\omega} + \frac{Ge^{j\varphi}}{p-j\omega} \right) + \frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2} \right] \end{aligned}$$

- La transformée de Laplace inverse de $\frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2}$ est de la forme $e^{a t} Q(t)$ avec $Q(t)$ une fonction bornée dans le temps.

$$\begin{aligned} S(t) &= e_0 \left[\frac{G}{2j} \left(-e^{-j(\varphi+\omega t)} + e^{j(\varphi+\omega t)} \right) + e^{a t} Q(t) \right] \\ &= e_0 [G \sin(\omega t + \varphi) + e^{a t} Q(t)] \end{aligned}$$

- $a < 0 : \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{a t} Q(t) = 0$ (régime transitoire)



Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

- A et B sont des complexes conjugués.
- $H(j\omega)$ est un nombre complexe et peut donc s'écrire sous la forme $H(j\omega) = G e^{j\varphi}$, avec $G = |H(j\omega)|$ et $\varphi = \arg(H(j\omega))$.
- On obtient alors,

$$\begin{aligned} S(p) &= e_0 \left[\frac{H(-j\omega)}{-2j(p+j\omega)} + \frac{H(j\omega)}{2j(p-j\omega)} + \frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2} \right] \\ &= e_0 \left[\frac{1}{2j} \left(-\frac{Ge^{-j\varphi}}{p+j\omega} + \frac{Ge^{j\varphi}}{p-j\omega} \right) + \frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2} \right] \end{aligned}$$

- La transformée de Laplace inverse de $\frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2}$ est de la forme $e^{a t} Q(t)$ avec $Q(t)$ une fonction bornée dans le temps.

$$\begin{aligned} S(t) &= e_0 \left[\frac{G}{2j} \left(-e^{-j(\varphi+\omega t)} + e^{j(\varphi+\omega t)} \right) + e^{a t} Q(t) \right] \\ &= e_0 [G \sin(\omega t + \varphi) + e^{a t} Q(t)] \end{aligned}$$

- $a < 0 : \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{a t} Q(t) = 0$ (régime transitoire)



Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

- A et B sont des complexes conjugués.
- $H(j\omega)$ est un nombre complexe et peut donc s'écrire sous la forme $H(j\omega) = G e^{j\varphi}$, avec $G = |H(j\omega)|$ et $\varphi = \arg(H(j\omega))$.
- On obtient alors,

$$\begin{aligned}S(p) &= e_0 \left[\frac{H(-j\omega)}{-2j(p+j\omega)} + \frac{H(j\omega)}{2j(p-j\omega)} + \frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2} \right] \\&= e_0 \left[\frac{1}{2j} \left(-\frac{Ge^{-j\varphi}}{p+j\omega} + \frac{Ge^{j\varphi}}{p-j\omega} \right) + \frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2} \right]\end{aligned}$$

- La transformée de Laplace inverse de $\frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2}$ est de la forme $e^{a t} Q(t)$ avec $Q(t)$ une fonction bornée dans le temps.

$$\begin{aligned}S(t) &= e_0 \left[\frac{G}{2j} \left(-e^{-j(\varphi+\omega t)} + e^{j(\varphi+\omega t)} \right) + e^{a t} Q(t) \right] \\&= e_0 [G \sin(\omega t + \varphi) + e^{a t} Q(t)]\end{aligned}$$

- $a < 0$: $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{a t} Q(t) = 0$ (régime transitoire)



Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

- A et B sont des complexes conjugués.
- $H(j\omega)$ est un nombre complexe et peut donc s'écrire sous la forme $H(j\omega) = G e^{j\varphi}$, avec $G = |H(j\omega)|$ et $\varphi = \arg(H(j\omega))$.
- On obtient alors,

$$\begin{aligned} S(p) &= e_0 \left[\frac{H(-j\omega)}{-2j(p+j\omega)} + \frac{H(j\omega)}{2j(p-j\omega)} + \frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2} \right] \\ &= e_0 \left[\frac{1}{2j} \left(-\frac{Ge^{-j\varphi}}{p+j\omega} + \frac{Ge^{j\varphi}}{p-j\omega} \right) + \frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2} \right] \end{aligned}$$

- La transformée de Laplace inverse de $\frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2}$ est de la forme $e^{a t} Q(t)$ avec $Q(t)$ une fonction bornée dans le temps.

$$\begin{aligned} S(t) &= e_0 \left[\frac{G}{2j} \left(-e^{-j(\varphi+\omega t)} + e^{j(\varphi+\omega t)} \right) + e^{a t} Q(t) \right] \\ &= e_0 [G \sin(\omega t + \varphi) + e^{a t} Q(t)] \end{aligned}$$

- $a < 0 : \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{a t} Q(t) = 0$ (régime transitoire)



Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique

- A et B sont des complexes conjugués.
- $H(j\omega)$ est un nombre complexe et peut donc s'écrire sous la forme $H(j\omega) = G e^{j\varphi}$, avec $G = |H(j\omega)|$ et $\varphi = \arg(H(j\omega))$.
- On obtient alors,

$$\begin{aligned}S(p) &= e_0 \left[\frac{H(-j\omega)}{-2j(p+j\omega)} + \frac{H(j\omega)}{2j(p-j\omega)} + \frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2} \right] \\&= e_0 \left[\frac{1}{2j} \left(-\frac{Ge^{-j\varphi}}{p+j\omega} + \frac{Ge^{j\varphi}}{p-j\omega} \right) + \frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2} \right]\end{aligned}$$

- La transformée de Laplace inverse de $\frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2}$ est de la forme $e^{a t} Q(t)$ avec $Q(t)$ une fonction bornée dans le temps.

$$\begin{aligned}S(t) &= e_0 \left[\frac{G}{2j} \left(-e^{-j(\varphi+\omega t)} + e^{j(\varphi+\omega t)} \right) + e^{a t} Q(t) \right] \\&= e_0 [G \sin(\omega t + \varphi) + e^{a t} Q(t)]\end{aligned}$$

- $a < 0 : \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{a t} Q(t) = 0$ (**régime transitoire**)



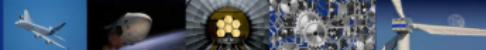
Démonstrations complémentaires

On remarque que A et B sont des complexes conjugués.

Si $H(p)$ est du type : $H(p) = \alpha p^2 + \beta p + \gamma$

$$A = \frac{H(-j\omega)}{-2j} = \frac{\alpha (-j\omega)^2 + \beta (-j\omega) + \gamma}{-2j} = \frac{\gamma - \alpha\omega^2 - j\beta\omega}{-2j} = \frac{j(\gamma - \alpha\omega^2) + \beta\omega}{2}$$

$$\begin{aligned}B &= \frac{H(j\omega)}{2j} = \frac{\alpha (j\omega)^2 + \beta (j\omega) + \gamma}{2j} = \frac{\gamma - \alpha\omega^2 + j\beta\omega}{2j} = -\frac{j(\gamma - \alpha\omega^2) - \beta\omega}{2} \\&= \frac{-j(\gamma - \alpha\omega^2) + \beta\omega}{2}\end{aligned}$$



Démonstrations complémentaires

Transformée de Laplace inverse de $\frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2}$:

- On peut déjà montrer que D et E sont complexes conjugués.

Dans l'exemple du cours en utilisant les limites et en posant $\tau = \frac{c}{k}$, on obtient

$$\begin{aligned} D &= \lim_{p \rightarrow p_1} (p - p_1) S(p) = \frac{e_0 \omega (1 + \tau p_1)}{(p_1 - p_2)(p_1^2 + \omega^2)} = \frac{e_0 \omega (1 + \tau (a + j b))}{(2 b j)(a^2 + 2 j a b - b^2 + \omega^2)} \\ &= \frac{e_0 \omega (1 + \tau (a + j b))}{2 b (-2 a b + j(a^2 - b^2 + \omega^2))} = \frac{e_0 \omega (1 + \tau a + j b) (-2 a b - j(a^2 - b^2 + \omega^2))}{2 b (4 a^2 b^2 + (a^2 - b^2 + \omega^2)^2)} \\ &= \frac{e_0 \omega [-2 a b (1 + \tau a) + \tau b (a^2 - b^2 + \omega^2) + j (-2 \tau a b^2 - (1 + \tau a)(a^2 - b^2 + \omega^2))]}{2 b (4 a^2 b^2 + (a^2 - b^2 + \omega^2)^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \lim_{p \rightarrow p_2} (p - p_2) S(p) = \frac{e_0 \omega (1 + \tau p_2)}{(p_2 - p_1)(p_2^2 + \omega^2)} = \frac{e_0 \omega (1 + \tau (a - j b))}{-2 b j (a^2 - 2 j a b - b^2 + \omega^2)} \\ &= \frac{e_0 \omega (1 + \tau (a - j b))}{-2 b (2 a b + j(a^2 - b^2 + \omega^2))} = \frac{e_0 \omega (1 + \tau a - j b) (2 a b - j(a^2 - b^2 + \omega^2))}{-2 b (4 a^2 b^2 + (a^2 - b^2 + \omega^2)^2)} \\ &= \frac{e_0 \omega [2 a b (1 + \tau a) - \tau b (a^2 - b^2 + \omega^2) + j (-2 \tau a b^2 - (1 + \tau a)(a^2 - b^2 + \omega^2))]}{2 b (4 a^2 b^2 + (a^2 - b^2 + \omega^2)^2)} \end{aligned}$$

- On remarque que D et E sont complexes conjugués.



Démonstrations complémentaires

Transformée de Laplace inverse de $\frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2}$:

- On remarque que D et E sont complexes conjugués, donc on pose :

$$D = \beta e^{j\alpha}$$

$$E = \beta e^{-j\alpha}$$

- Ainsi,

$$\frac{D}{p-p_1} + \frac{E}{p-p_2} = \frac{\beta e^{j\alpha}}{p-(a+bj)} + \frac{\beta e^{-j\alpha}}{p-(a-bj)}$$

- La transformée de Laplace inverse donne :

$$\begin{aligned} & \left(\beta e^{j\alpha} e^{(a+bj)t} + \beta e^{-j\alpha} e^{(a-bj)t} \right) u(t) \\ &= \beta e^{at} \left(e^{j(\alpha+bt)} + e^{-j(\alpha+bt)} \right) u(t) = 2\beta e^{at} \cos(bt + \alpha). \end{aligned}$$



Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : cas général

- Système linéaire continu invariant, stable avec des conditions initiales nulles :

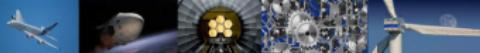
$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

- Avec une réponse à un échelon pour avoir la condition initiale $s(0) = 0$, il faut que,

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p S(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p H(p) E(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \frac{1}{p} H(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} H(p) = 0.$$

- Degré du dénominateur $D(p) >$ au degré de son numérateur $N(p)$.
- Décomposition en éléments simples de $S(p)$:

$$S(p) = e_0 \left[\frac{A}{p + j\omega} + \frac{B}{p - j\omega} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\alpha_i} \frac{C_{ki}}{(p - p_i)^i} \right]$$



Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : cas général

- Système linéaire continu invariant, stable avec des conditions initiales nulles :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

- Avec une réponse à un échelon pour avoir la condition initiale $s(0) = 0$, il faut que,

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p S(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p H(p) E(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \frac{1}{p} H(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} H(p) = 0.$$

- Degré du dénominateur $D(p)$ > au degré de son numérateur $N(p)$.
- Décomposition en éléments simples de $S(p)$:

$$S(p) = e_0 \left[\frac{A}{p + j\omega} + \frac{B}{p - j\omega} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\alpha_i} \frac{C_{ki}}{(p - p_i)^i} \right]$$



Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : cas général

- Système linéaire continu invariant, stable avec des conditions initiales nulles :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

- Avec une réponse à un échelon pour avoir la condition initiale $s(0) = 0$, il faut que,

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p S(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p H(p) E(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \frac{1}{p} H(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} H(p) = 0.$$

- Degré du dénominateur $D(p) >$ au degré de son numérateur $N(p)$.
- Décomposition en éléments simples de $S(p)$:

$$S(p) = e_0 \left[\frac{A}{p + j\omega} + \frac{B}{p - j\omega} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\alpha_i} \frac{C_{ki}}{(p - p_i)^i} \right]$$



Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : cas général

- Système linéaire continu invariant, stable avec des conditions initiales nulles :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

- Avec une réponse à un échelon pour avoir la condition initiale $s(0) = 0$, il faut que,

$$\lim_{t \rightarrow 0} s(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p S(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p H(p) E(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} p \frac{1}{p} H(p) = \lim_{p \rightarrow +\infty} H(p) = 0.$$

- Degré du dénominateur $D(p) >$ au degré de son numérateur $N(p)$.
- Décomposition en éléments simples de $S(p)$:

$$S(p) = e_0 \left[\frac{A}{p + j\omega} + \frac{B}{p - j\omega} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\alpha_i} \frac{C_{ki}}{(p - p_i)^i} \right]$$



Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : cas général

- Décomposition en éléments simples de $S(p)$:

$$S(p) = e_0 \left[\frac{A}{p + j\omega} + \frac{B}{p - j\omega} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\alpha_i} \frac{C_{ki}}{(p - p_i)^i} \right]$$

- L'entier α_i représente la classe du $i^{\text{ème}}$ pôle (p_i).
- La condition de stabilité du système fait que les pôles $p_i = a_i \pm jb_i$ sont à partie réelles négatives.
- La transformée de Laplace inverse de $\frac{C_{ki}}{(p - p_i)^i}$ est de la forme :

$$e^{a_i t} Q_i(t)$$

Elle représente le régime transitoire et tend vers 0 en $+\infty$.

- Ainsi, en reprenant, le raisonnement vu précédemment, on trouve aisément que la transformée de Laplace inverse de $S(p)$, $s(t)$ est de la forme :

$$s(t) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

[

Remarque : cas général] Dans le cas général d'un système linéaire continu invariant, sous les hypothèses de **stabilité** et avec des **conditions initiales nulles** le résultat



Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : cas général

- Décomposition en éléments simples de $S(p)$:

$$S(p) = e_0 \left[\frac{A}{p + j\omega} + \frac{B}{p - j\omega} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\alpha_i} \frac{C_{ki}}{(p - p_i)^i} \right]$$

- L'entier α_i représente la classe du i^{ème} pôle (p_i).
- La condition de stabilité du système fait que les pôles $p_i = a_i \pm jb_i$ sont à partie réelles négatives.
- La transformée de Laplace inverse de $\frac{C_{ki}}{(p - p_i)^i}$ est de la forme :

$$e^{a_i t} Q_i(t)$$

Elle représente le régime transitoire et tend vers 0 en $+\infty$.

- Ainsi, en reprenant, le raisonnement vu précédemment, on trouve aisément que la transformée de Laplace inverse de $S(p)$, $s(t)$ est de la forme :

$$s(t) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

[

Remarque : cas général] Dans le cas général d'un système linéaire continu invariant, sous les hypothèses de stabilité et avec des conditions initiales nulles le résultat



Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : cas général

- Décomposition en éléments simples de $S(p)$:

$$S(p) = e_0 \left[\frac{A}{p + j\omega} + \frac{B}{p - j\omega} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\alpha_k} \frac{C_{ki}}{(p - p_i)^i} \right]$$

- L'entier α_i représente la classe du i^{ème} pôle (p_i).
- La condition de stabilité du système fait que les pôles $p_i = a_i \pm jb_i$ sont à partie réelles négatives.
- La transformée de Laplace inverse de $\frac{C_{ki}}{(p - p_i)^i}$ est de la forme :

$$e^{a_i t} Q_i(t)$$

Elle représente le régime transitoire et tend vers 0 en $+\infty$.

- Ainsi, en reprenant, le raisonnement vu précédemment, on trouve aisément que la transformée de Laplace inverse de $S(p)$, $s(t)$ est de la forme :

$$s(t) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

[

Remarque : cas général] Dans le cas général d'un système linéaire continu invariant, sous les hypothèses de stabilité et avec des conditions initiales nulles le résultat



Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : cas général

- Décomposition en éléments simples de $S(p)$:

$$S(p) = e_0 \left[\frac{A}{p + j\omega} + \frac{B}{p - j\omega} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\alpha_k} \frac{C_{ki}}{(p - p_i)^i} \right]$$

- L'entier α_i représente la classe du $i^{\text{ème}}$ pôle (p_i).
- La condition de stabilité du système fait que les pôles $p_i = a_i \pm jb_i$ sont à partie réelles négatives.
- La transformée de Laplace inverse de $\frac{C_{ki}}{(p - p_i)^i}$ est de la forme :

$$e^{a_i t} Q_i(t)$$

Elle représente le régime transitoire et tend vers 0 en $+\infty$.

- Ainsi, en reprenant, le raisonnement vu précédemment, on trouve aisément que la transformée de Laplace inverse de $S(p)$, $s(t)$ est de la forme :

$$s(t) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

[

Remarque : cas général] Dans le cas général d'un système linéaire continu invariant, sous les hypothèses de stabilité et avec des conditions initiales nulles le résultat



Caractérisation de la sortie correspondante à une entrée harmonique : cas général

- Décomposition en éléments simples de $S(p)$:

$$S(p) = e_0 \left[\frac{A}{p + j\omega} + \frac{B}{p - j\omega} + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\alpha_k} \frac{C_{ki}}{(p - p_i)^i} \right]$$

- L'entier α_i représente la classe du $i^{\text{ème}}$ pôle (p_i).
- La condition de stabilité du système fait que les pôles $p_i = a_i \pm jb_i$ sont à partie réelles négatives.
- La transformée de Laplace inverse de $\frac{C_{ki}}{(p - p_i)^i}$ est de la forme :

$$e^{a_i t} Q_i(t)$$

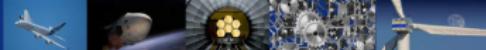
Elle représente le régime transitoire et tend vers 0 en $+\infty$.

- Ainsi, en reprenant, le raisonnement vu précédemment, on trouve aisément que la transformée de Laplace inverse de $S(p)$, $s(t)$ est de la forme :

$$s(t) = G e_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

[

Remarque : cas général] Dans le cas général d'un système linéaire continu invariant, sous les hypothèses de stabilité et avec des conditions initiales nulles le résultat



Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Démonstration du facteur de résonance $|H(j \omega)|_{max}$ est obtenu lorsque

$$\omega = \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}.$$

- On obtient alors,

$$\begin{aligned}|H(j \omega)|_{max} &= \frac{K}{\sqrt{\left(1 - (1 - 2\xi^2) \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0} \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}\right)^2}} \\&= \frac{K}{\sqrt{(1 - 1 + 2\xi^2)^2 + \left(2\xi \sqrt{1 - 2\xi^2}\right)^2}} = \frac{K}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2 (1 - 2\xi^2)}} = \frac{K}{2 \xi \sqrt{1 - \xi^2}}\end{aligned}$$

- De plus on peut calculer $\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j \omega)|$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j \omega)| = K.$$



Construction des diagrammes de Bode : second ordre

Démonstration du facteur de résonance $|H(j\omega)|_{max}$ est obtenu lorsque

$$\omega = \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}.$$

- On obtient alors,

$$\begin{aligned}|H(j\omega)|_{max} &= \frac{K}{\sqrt{\left(1 - (1 - 2\xi^2) \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi}{\omega_0} \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}\right)^2}} \\&= \frac{K}{\sqrt{(1 - 1 + 2\xi^2)^2 + \left(2\xi\sqrt{1 - 2\xi^2}\right)^2}} = \frac{K}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2(1 - 2\xi^2)}} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}\end{aligned}$$

- De plus on peut calculer $\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)|$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)| = K.$$