



C8 : ANALYSE DES PERFORMANCES DES SYSTÈMES ASSERVIS

## C8-1 - Stabilité des systèmes asservis

2 Mai 2023

---

### Table des matières

---

<b>I</b>	<b>Intérêts et objectifs</b>	<b>1</b>
1	Introduction . . . . .	1
2	Classe et ordre d'une fonction de transfert . . . . .	2
3	Exemple du cours . . . . .	3
<b>II</b>	<b>Stabilité</b>	<b>6</b>
1	Définition et propriétés . . . . .	6
a)	Définition . . . . .	6
b)	Propriétés . . . . .	6
c)	Instabilité après bouclage . . . . .	8
2	Critères de stabilité . . . . .	9
a)	Critère algébrique . . . . .	9
b)	Critère graphique . . . . .	10
3	Marges de stabilité . . . . .	13
a)	Marge de gain . . . . .	14
b)	Marge de phase . . . . .	14
c)	Interprétation dans le plan de Bode . . . . .	14
4	Application aux systèmes du premier et deuxième ordre . . . . .	16

### Compétences

- **Modéliser**
  - Établir un modèle de comportement à partir d'une réponse temporelle ou fréquentielle.
- **Résoudre**
  - Proposer une démarche permettant d'évaluer les performances des systèmes asservis.
  - Déterminer la réponse fréquentielle.
  - Déterminer les performances d'un système asservi.

---

## I. Intérêts et objectifs

---

### 1 Introduction

Ce chapitre permet d'énoncer les outils nécessaires à la caractérisation de la **stabilité** des systèmes linéaires continus et invariants asservis. Durant tout ce chapitre nous allons énoncer les principes de quantification de la stabilité d'un système modélisé par une fonction de transfert.

## 2 Classe et ordre d'une fonction de transfert



### Définition 1 : Classe et ordre d'une fonction de transfert

Soit une fonction de transfert en boucle ouverte ( $FTBO(p)$ ) ou en boucle fermée ( $FTBF(p)$ ) donnée par la fonction  $H(p)$  :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + c_1 p + \dots + c_m p^m}{1 + d_1 p + \dots + d_n p^n}. \quad (1)$$

On appelle :

- **zéros** de la fonction de transfert, celles qui annulent son numérateur;
- **pôles** de la fonction de transfert, les valeurs de  $p$  qui annulent son dénominateur;
- $\alpha (\geq 0)$ , sa **classe** (pour une  $FTBO(p)$ , il correspond directement au nombre d'intégrateurs purs dans la boucle ouverte);
- $n_o = n + \alpha$  l'ordre du système qui correspond au nombre de pôles du système;
- $K$ , le **gain** de la fonction de transfert;

#### Classe d'une FTBO quelconque

**Ordre, gain et classe de :**  $H_1(p) = \frac{8 p^3 + 2 p^2 + 3 p + 12}{9 p^5 + 4 p^3 + 6 p^2}$

**Ordre, gain et classe de :**  $H_2(p) = \frac{7 p^4 + 3 p^3 + 2 p + 7}{p^3 + 2 p^2 + 6}$

### 3 Exemple du cours



#### Exemple 1 : Robot Lola

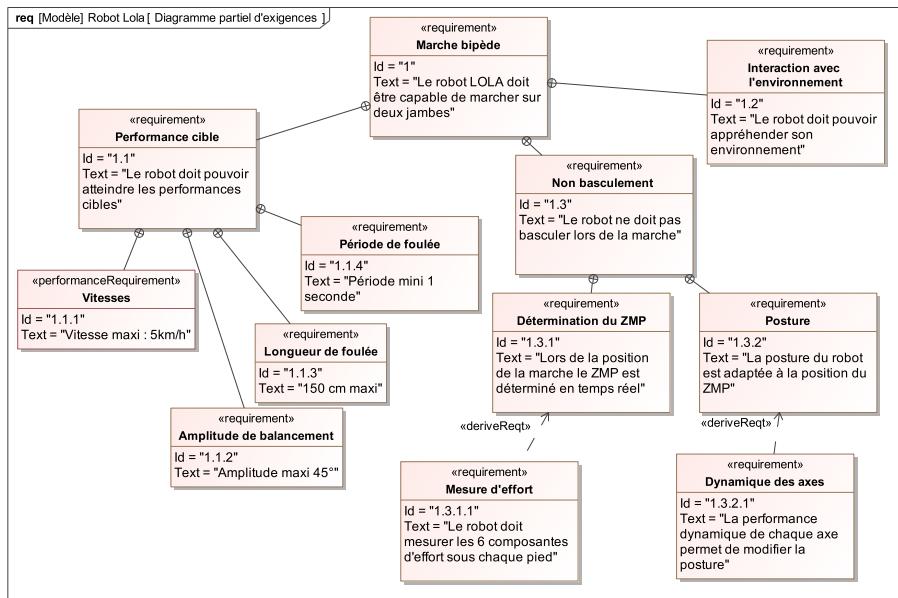
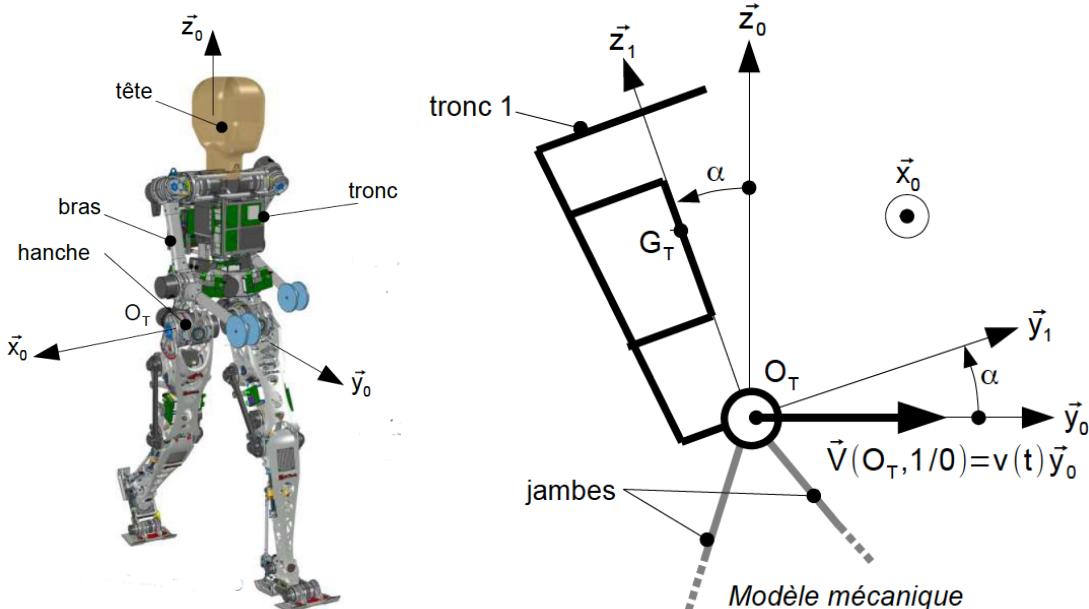


Diagramme des exigences



On s'intéresse ici à la mise en place d'une commande permettant d'assurer les performances dynamiques du robot Lola en terme de maintien d'une posture verticale. On note  $\alpha(t)$ , l'**angle de tangage**. Cet axe est actionné par un moteur à courant continu avec une **tension d'alimentation** noté  $U_c(t)$ .

#### 1.3.2.1 Performance dynamique de chaque axe permet de modifier la posture

Critère	Niveau	Flexibilité
Marge de phase	$M\varphi = 50^\circ$	Mini
Erreur Statique	$0^\circ$	$\pm 0,5^\circ$
Bande passante à 0 dB en boucle ouverte	$\omega_{BP} = 50 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$	Mini
Temps de réponse à 5%	0,2s	Maxi
Dépassement	1°	Maxi

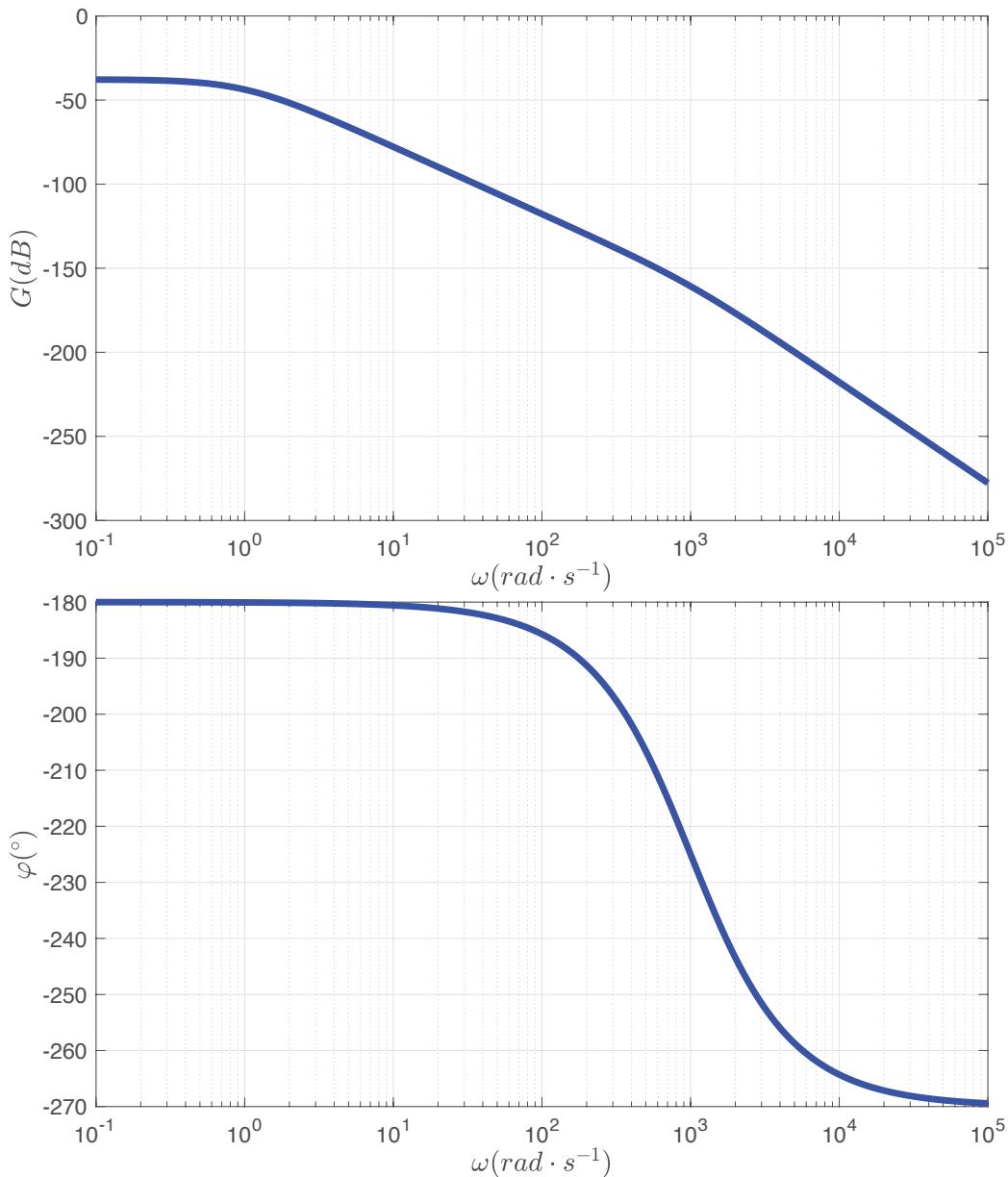


### Exemple 2 : Robot Lola

On peut montrer que la fonction de transfert du robot Lola en boucle ouverte est de la forme :

$$F(p) = \frac{\alpha(p)}{U_c(p)} = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p)(-1 + \tau_1 \cdot p)(1 + \tau_2 \cdot p)}$$

**Q 1 : Proposer un tracé asymptotique sur le diagramme de Bode de  $F(p)$**





### Exemple 3 : Robot Lola

**Q 2 :** En analysant les diagrammes de Bode ci-dessus, déterminer les valeurs de  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  et  $K$ .

$\omega$	$0 \rightarrow \frac{1}{\tau_1}$		$\frac{1}{\tau_1}$	$\frac{1}{\tau_1} \rightarrow \frac{1}{\tau_2}$		$\frac{1}{\tau_2}$	$\frac{1}{\tau_2} \rightarrow \infty$	
Tracé asymptotique	Gain (dB/dec)	$\varphi(^{\circ})$	Gain (dB)	Gain (dB/dec)	$\varphi(^{\circ})$	Gain (dB)	Gain (dB/dec)	$\varphi(^{\circ})$
$\frac{K}{-1+\tau_1 \cdot p}$								
$\frac{K}{1+\tau_1 \cdot p}$								
$\frac{K}{1+\tau_2 \cdot p}$								
$F(p)$								

Par la suite, on simplifie  $F(p)$  par  $\frac{K}{(1+\tau_1 \cdot p)(-1+\tau_1 \cdot p)}$ .

**Q 3 : Justifier ce choix de simplification.**

## II. Stabilité

### 1 Définition et propriétés

#### a) Définition

 **Définition 2 : Stabilité**

La stabilité traduit la propriété de convergence temporelle asymptotique vers un état d'équilibre d'un système.

Un système est dit stable au sens **Entrée-Bornée-Sortie-Bornée (EBSB)** si, lorsqu'on lui applique une entrée bornée, la sortie reste bornée.

Les figures 1 (a) et (b) illustrent donc la différence entre un système amorti et non amorti donc instable.

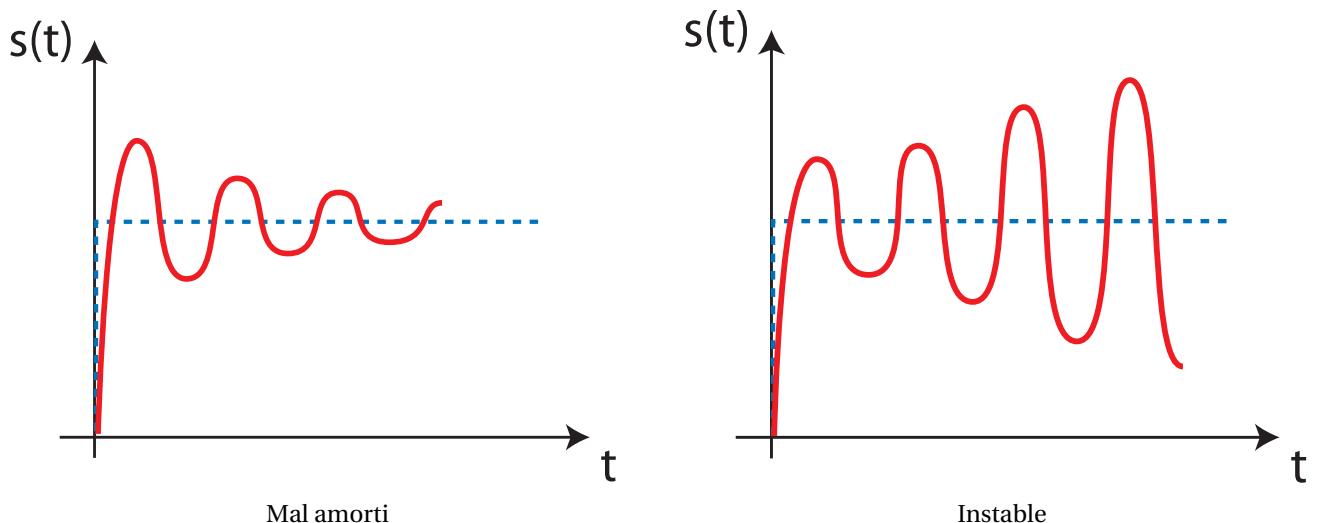


FIGURE 1 – Stabilité et instabilité d'un système sollicité par un échelon.

#### b) Propriétés

 **Propriété 1 : Condition nécessaire de stabilité avec les pôles de la FTBF**

Soit un système linéaire continu et invariant. Sa fonction de transfert en boucle fermée (FTBF( $p$ )) peut se mettre sous la forme suivante :

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{a \prod_{i=1}^n (p - z_i)^{k_i}}{b \prod_{j=1}^m (p - d_j)^{l_j}}$$



- Les  $z_1, \dots, z_n$  sont les racines de  $N(p)$  et sont appelés les **zéros de la FTBF**.
- Les  $d_1, \dots, d_n$  sont les racines de  $D(p)$  et sont appelés les **pôles de la FTBF**.

Un système est **stable** si les **pôles de sa FTBF** sont tous à **partie réelle strictement négative**.



### Démonstration 1 :

On peut classifier les pôles suivant qu'ils soient :

- réels :  $d_i^r$ ;
- réels multiples d'ordre  $n_i$  :  $d_i^m$ ;
- complexes :  $d_i^c = r_i \pm j \omega_i$ ;
- complexes multiples d'ordre  $n_i$  :  $d_i = r_i^m \pm j \omega_i^m$ ;

On peut alors réaliser une décomposition en éléments simples en classifiant les termes suivant les quatre catégories précédentes. On obtient alors la sortie  $s(t)$  qui s'écrit comme une combinaison linéaire de quatre types de fonctions :

- $s_1(t) = e^{d_i^r t} u(t)$ ;
- $s_2(t) = t^{n_i-1} e^{d_i^m t} u(t)$ ;
- $s_3(t) = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) e^{r_i t} u(t)$ ;
- $s_4(t) = B_i \cos(\omega_i^m t + \varphi_i) t^{n_i-1} e^{r_i^m t} u(t)$ ;

Ainsi pour que la sortie reste bornée, il faut donc que les fonctions exponentielles soient décroissantes et donc que  $d_i^r$ ,  $d_i^m$ ,  $r_i$  et  $r_i^m$  soient négatifs donc que **les pôles soient à partie réelle strictement négative**.

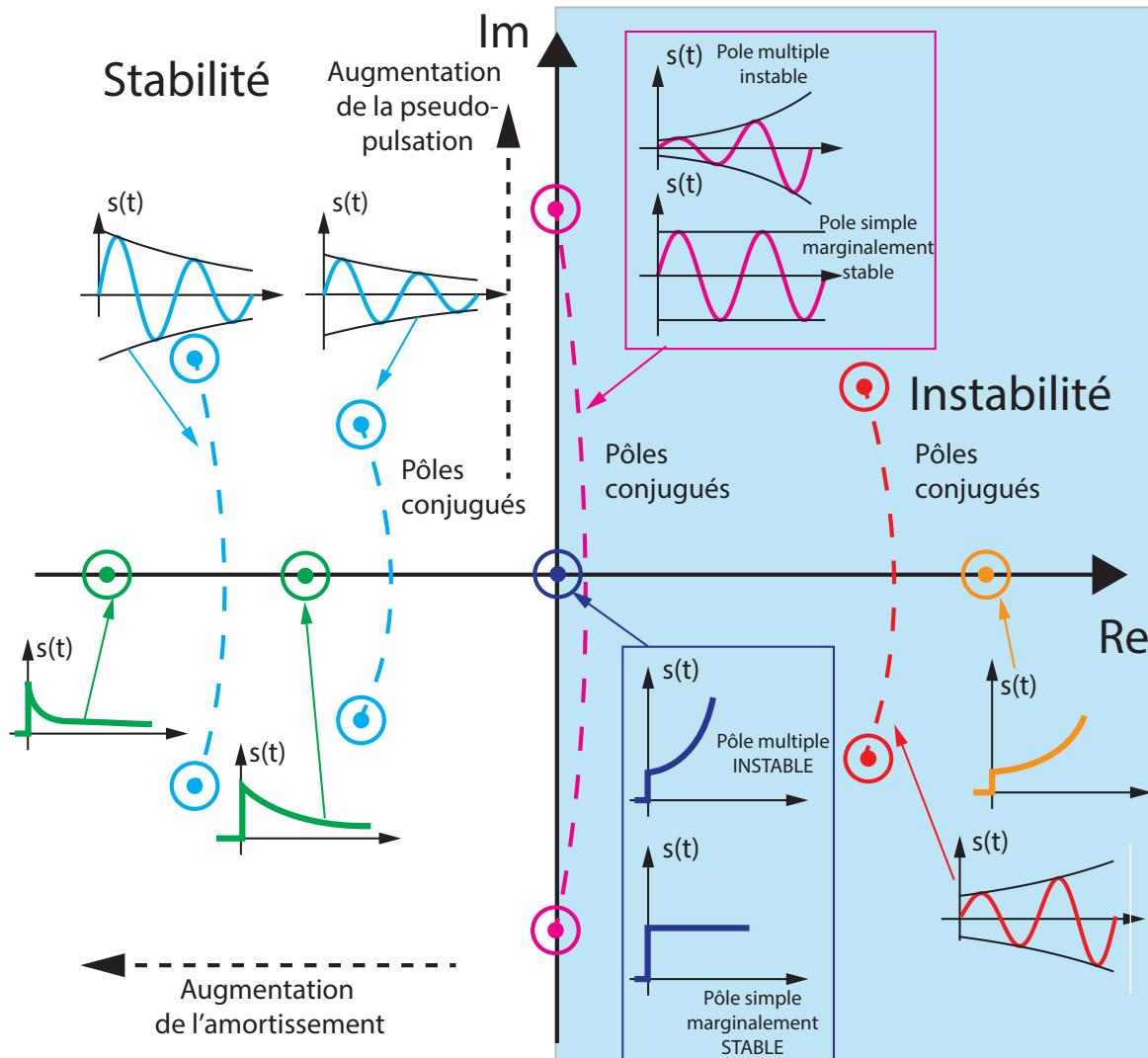
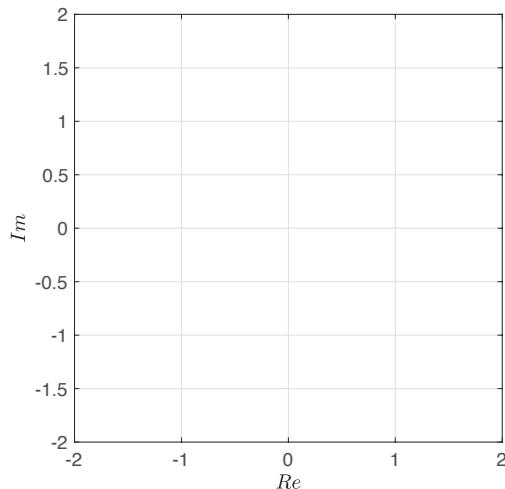


FIGURE 2 – Allures de la réponse à l'impulsion de dirac en fonction de la position de pôles de la FTBF

**Exemple 4 : Robot Lola**

**Q 4 : Représenter les pôles de  $F(p)$  dans le plan Q 5 : Que pouvons-nous dire sur la stabilité en complexe.**

**c) Instabilité après bouclage**

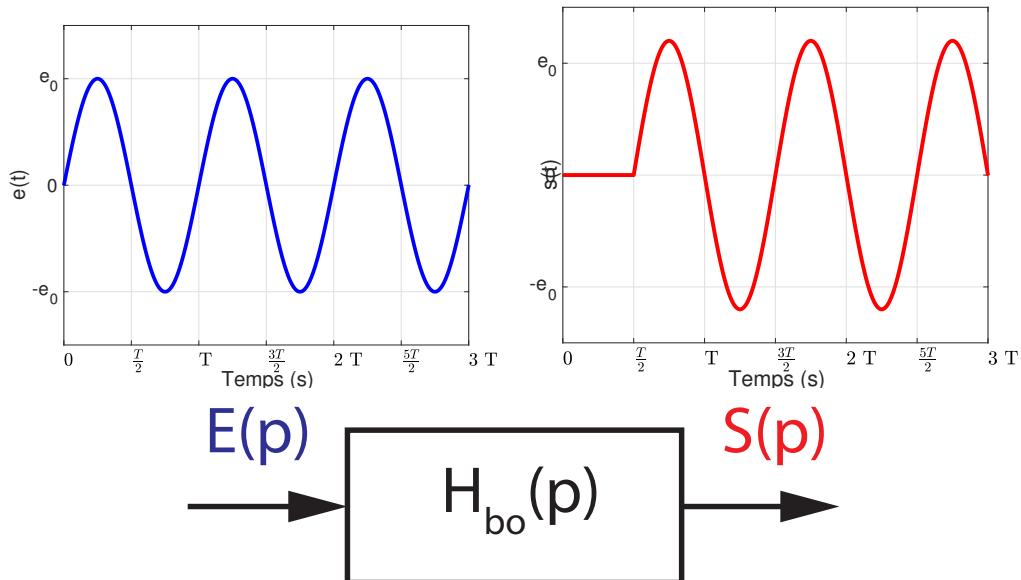
Un système peut être intrinsèquement stable (en Boucle ouverte) mais le fait de l'asservir peut le rendre instable.



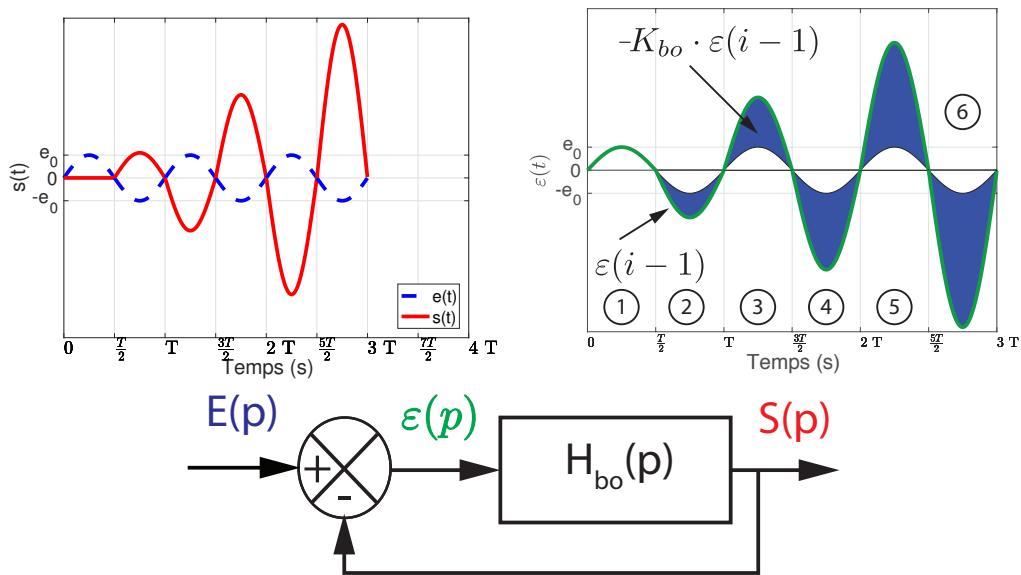
## Propriété 2 : Instabilité d'un système après bouclage

Soit un système en boucle ouverte :

- sollicité par une entrée sinusoïdale de période  $T$  et d'amplitude  $e_0$ ;
- de fonction de transfert  $H_{bo}(p)$ ;
- avec un gain  $K_{bo}(T) > 1$ ;
- dans une configuration avec un déphasage d'une demi période ( $\varphi(T) = -180^\circ$ ).



Quand on boucle le système, l'entrée de  $H_{bo}(p)$  est  $\varepsilon(p) = E(p) - S(p)$ . On remarque bien que le système devient instable.



## 2 Critères de stabilité

### a) Critère algébrique

Soit un système linéaire, continu et invariant quelconque avec pour fonction de transfert :

$$FTBF(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

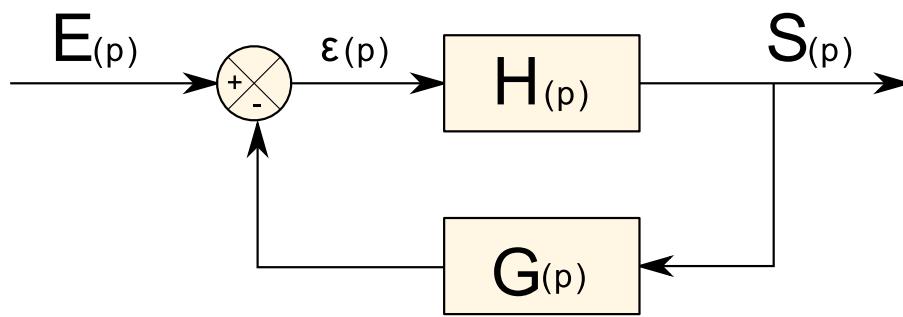
Avec  $D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0$

### Théorème 1 : Condition nécessaire de stabilité

Pour qu'un système soit stable au sens "EBSB", il est nécessaire que les coefficients  $a_0, \dots, a_n$  du polynôme du dénominateur de sa **fonction de transfert en boucle fermée** soient tous du même signe.

#### b) Critère graphique

On considère le système modélisé par le schéma bloc suivant :



On peut exprimer la  $FTBF(p)$  en fonction de la  $FTBO(p) = H(p) G(p)$  et on obtient :

$$FTBF(p) = \frac{H(p)}{1 + FTBO(p)}.$$

Ainsi chercher une condition sur les pôles de la  $FTBF(p)$  revient à chercher des conditions sur les zéros de  $1 + FTBO(p)$  appelé **polynôme caractéristique**.

On appelle alors le **point critique**, le point qui dans le plan complexe a pour affixe  $-1$  (module 1, argument  $-180^\circ$ ).



### Définition 3 : Critère du revers

Un système est **stable en boucle fermée** si en parcourant le lieu de Nyquist de la **FTBO(p)**, **dans le sens des  $\omega$  croissants**, on laisse le **point critique**  $-1$  sur la gauche.



### Remarque 1 :

- Ce critère est valable uniquement si la **FTBO(p)** ne possède pas de pôle à partie réelle strictement positive (stabilité en BO).
- Si un système a son diagramme de Nyquist qui passe par le point  $-1$ , alors cela signifie que la fonction  $1 + FTBO(p)$  possède un **pôle imaginaire pur**. Cela se traduit par un **gain infini pour une pulsation donnée** sur le diagramme de Bode. Le système est donc instable. La **réponse indicielle est oscillatoire**.

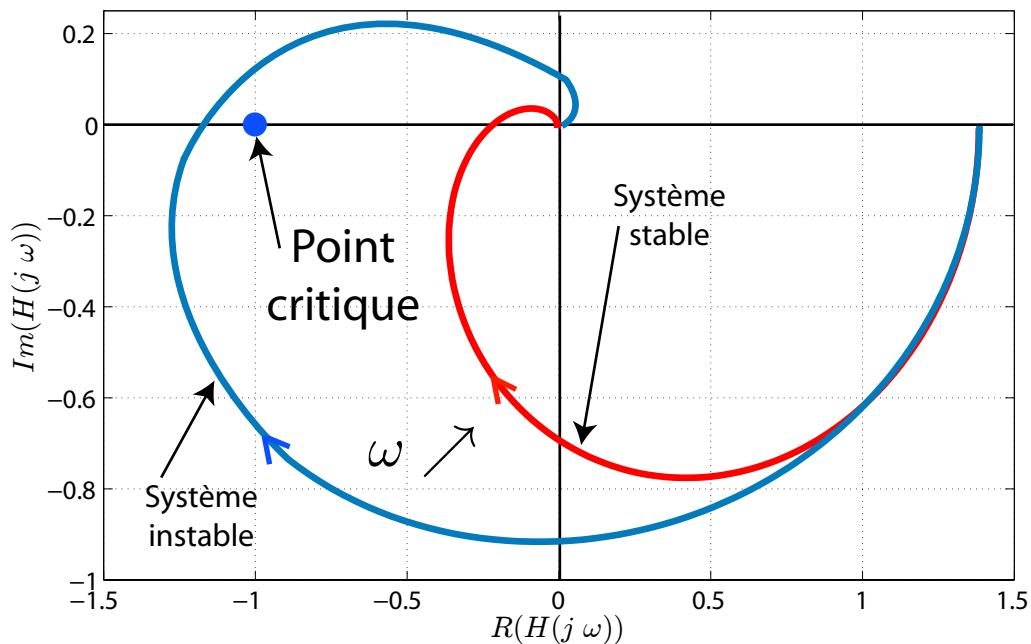


FIGURE 3 – Critère de revers dans le diagramme de Nyquist

#### Interprétation du critère du revers sur le diagramme de Bode (figure 4)

Le point critique d'affixe  $-1$  s'écrit  $e^{-i\pi}$ . Dans le diagramme de Bode en gain ce point correspond à un gain nul car  $G_{dB} = 20 \log(1) = 0$ .

Ainsi pour laisser le point critique  $-1$  “à gauche” sur le diagramme de Nyquist et donc avoir un système stable, il faut :

- avoir, pour la pulsation  $\omega = \omega_{\varphi 180}$  correspondant à  $\arg(FTBO(j\omega)) = -180^\circ$ , un gain inférieur à  $0dB$  ( $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega_{\varphi 180})|) < 0dB$ ), ou bien
- avoir, pour la pulsation  $\omega = \omega_{c0}$  correspondant à un gain nul ( $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega)|) = 0$ ), un argument supérieur à  $-180^\circ$  ( $\arg(FTBO(j\omega_{c0})) > -180^\circ$ ).



#### Remarque 2 :

Dans le cas de l'égalité des deux conditions précédentes :

- $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega_{\varphi 180})|) = 0dB$
- $\arg(FTBO(j\omega_{c0})) = -180^\circ$ ; la fonction  $1 + FTBO(p)$  possède un pôle imaginaire pur. Cela se traduit par un gain infini pour une pulsation donnée sur le diagramme de Bode. Le système est donc instable. La réponse indicelle est oscillatoire.

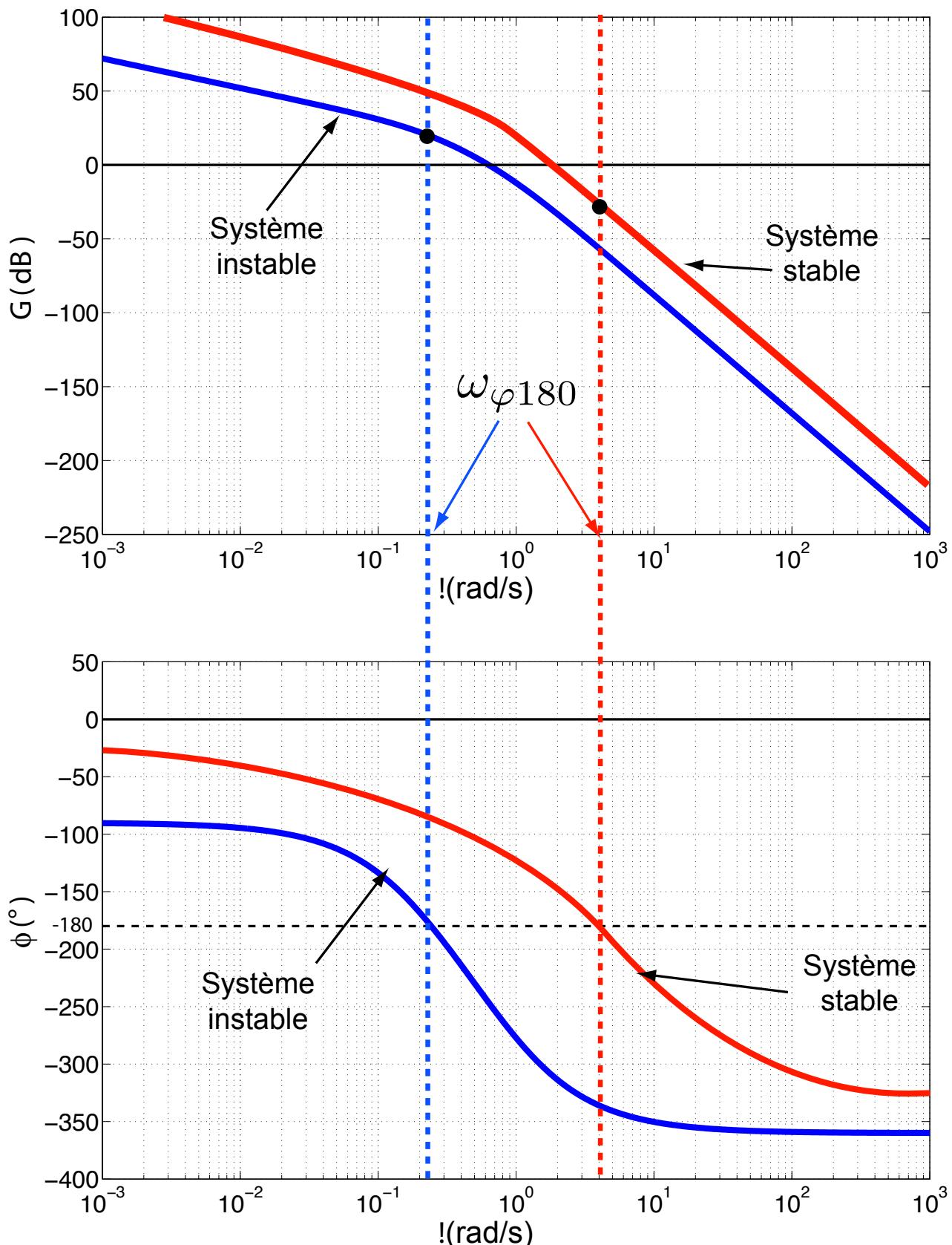


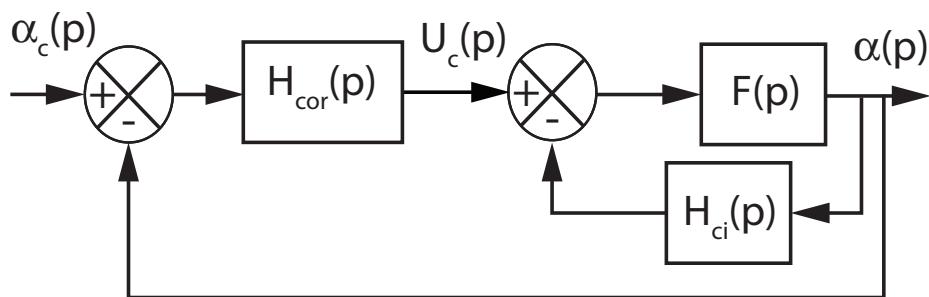
FIGURE 4 – Critère de revers dans le diagramme de Bode



### Exemple 5 : Robot Lola

**Q 6 :** Expliquer pourquoi le critère du revers ne peut pas être appliqué pour étudier la stabilité en boucle fermée.

Afin de résoudre ce problème, il est décidé d'asservir la chaîne directe en position et en vitesse. Pour cela, la centrale inertie permet de mesurer l'angle de tangage  $\alpha(t)$  ainsi que la vitesse angulaire  $\frac{d\alpha(t)}{dt}$ . L'asservissement ainsi réalisé est présenté sous la forme du schéma-bloc ci-dessous.  $U_c(p)$  est la tension de commande en sortie du correcteur. La fonction de transfert de la centrale inertie sera prise égale à  $H_{ci}(p) = K_1 \cdot (p + 1)$ .



**Q 7 :** Déterminer deux conditions sur  $K_1$  pour que la fonction de transfert en boucle ouverte non-corrigée  $F_{BO}(p) = \frac{\alpha(p)}{U_c(p)}$  soit stable. En déduire la valeur minimale de  $K_1$

### 3 Marges de stabilité

Usuellement, pour régler un système, on ne se contente pas d'une stabilité limite, mais on prend une certaine marge par rapport à la limite d'instabilité.

a) **Marge de gain**

 **Définition 4 : Marge de gain**

La marge de gain ( $\Delta G$  ou  $MG_{dB}$ ) se définit par :

$$\Delta G = -20 \log(|FTBO(j \omega_{\varphi 180})|). \quad (3)$$

avec  $\omega_{\varphi 180}$ , la pulsation correspondant à  $\arg(FTBO(j \omega_{\varphi 180})) = -180^\circ$ .

b) **Marge de phase**

 **Définition 5 : Marge de phase**

La marge de phase ( $M\varphi^\circ$ ) se définit par :

$$M\varphi^\circ = 180 + \arg(FTBO(j \omega_{c0})). \quad (4)$$

avec  $\omega_{c0}$ , la pulsation correspondant à  $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j \omega)| = 0)$  ou  $|FTBO(j \omega_{c0})| = 1$ .

c) **Interprétation dans le plan de Bode**

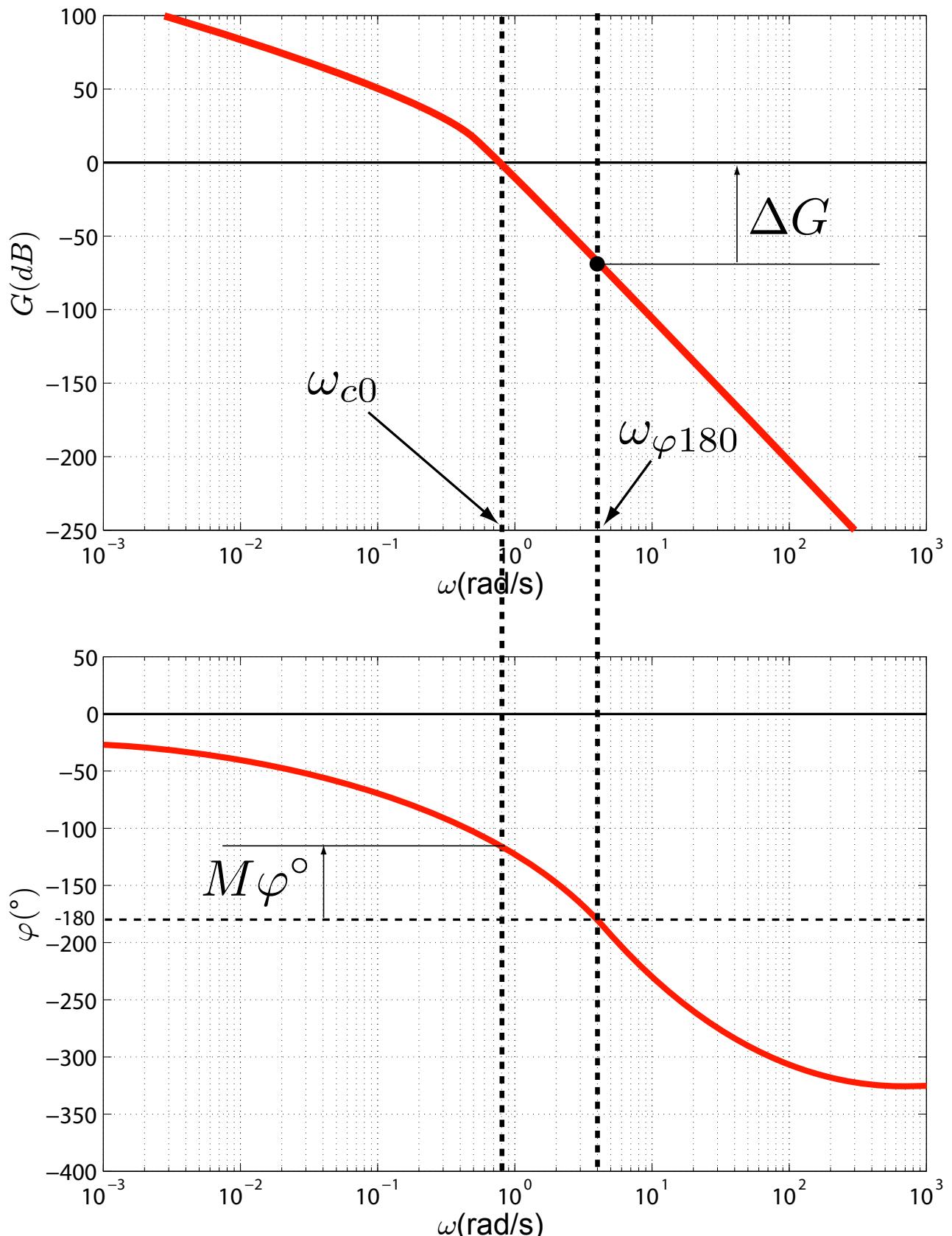


FIGURE 5 – Marges de gain et de phase dans le plan de Bode

#### 4 Application aux systèmes du premier et deuxième ordre



##### Définition 6 : Stabilité des systèmes du premier et deuxième ordre

Les fonctions de transfert en boucle ouverte du premier ou du deuxième ordre ont une phase toujours strictement supérieure à  $-180^\circ$  ainsi le critère du revers appliqué à Bode :

**Pour la pulsation  $\omega = \omega_{c0}$  correspondant à un gain nul ( $G_{dB} = 20 \log(|FTBO(j\omega)|) = 0$ ), l'argument doit être supérieur à  $-180^\circ$  ( $\arg(FTBO(j\omega_{c0})) > -180^\circ$ )**

est toujours vérifié.

Ainsi ces systèmes sont inconditionnellement stables.

(5)

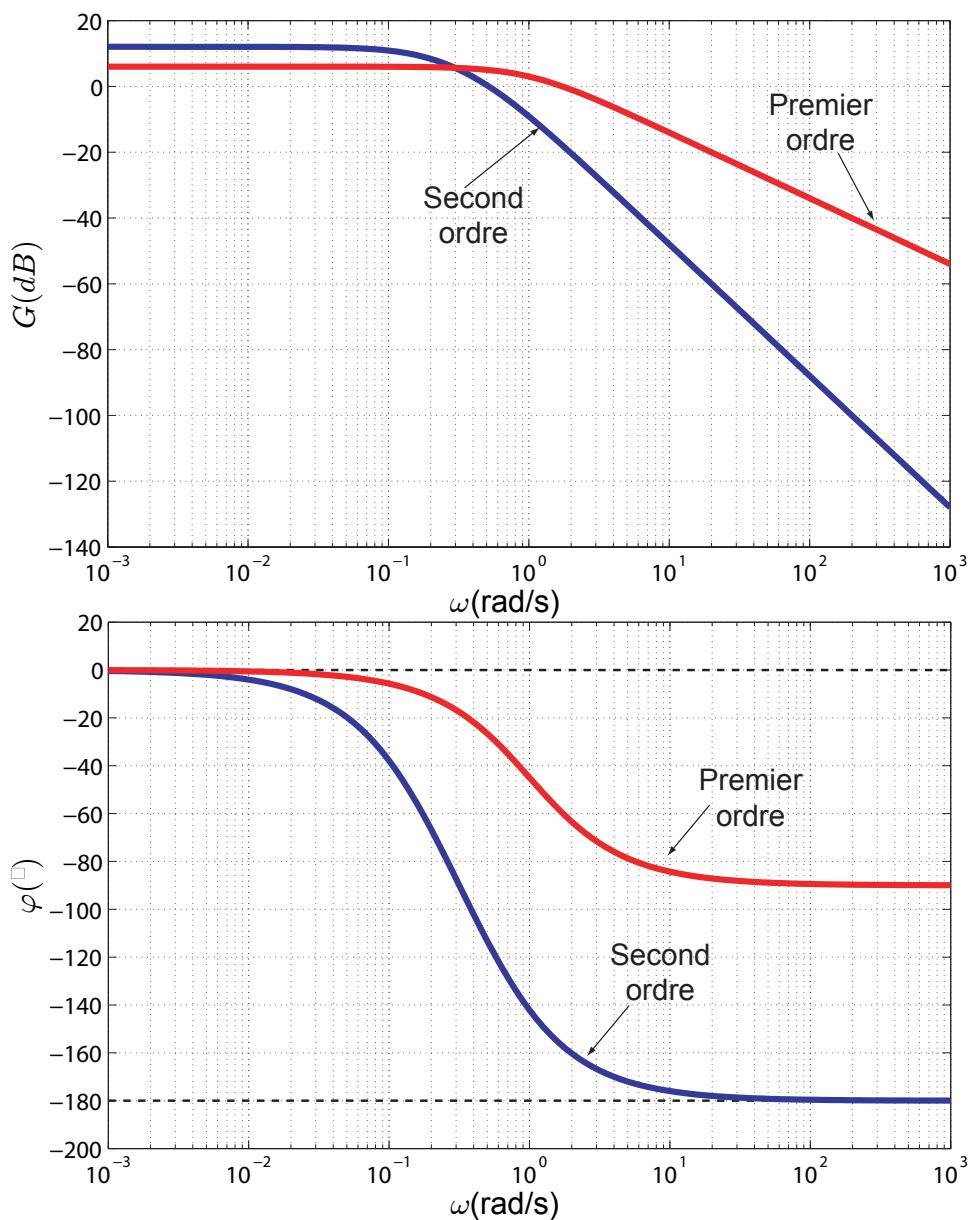


FIGURE 6 – Allures de diagramme de Bode du premier et second ordre