

Kvanteinformation,  
en film med Jan Philip Solovej

Mads Peter H. Steenstrup

September 2019

# Contents

<b>1</b>	<b>Indledning</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Den deterministiske verden</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Usikkerheden er fundamental</b>	<b>5</b>
3.1	Hvorfor er der atomer, og os? . . . . .	6
<b>4</b>	<b>EPR</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Kvantecomputer og Kvantebit</b>	<b>8</b>
5.1	Måling af elektronens spin . . . . .	8
5.2	kvante-matematik . . . . .	9
5.2.1	Prikprodukt . . . . .	12
<b>6</b>	<b>Måling på et kvantesystem</b>	<b>12</b>
<b>7</b>	<b>Matricer</b>	<b>14</b>
7.1	Matricer virkende på en vektor . . . . .	15
<b>8</b>	<b>Rotation</b>	<b>16</b>
8.1	Egenvektorer og egenverdier . . . . .	17
<b>9</b>	<b>Gennemsnit</b>	<b>19</b>
<b>10</b>	<b>Rotation med komplekse tal</b>	<b>20</b>
10.1	Regning med komplekse tal . . . . .	21
10.2	Kvantebit den generelle form og Bloch-sfæren . . . . .	23
10.2.1	Måling . . . . .	24
<b>11</b>	<b>Spillet</b>	<b>25</b>
11.1	Det klassiske spil . . . . .	25
<b>12</b>	<b>Flere kvantebits</b>	<b>27</b>
12.1	EPR og entanglement . . . . .	27
12.2	GHZ tilstanden . . . . .	29
<b>13</b>	<b>Vinderstrategi</b>	<b>30</b>
13.1	Opsummering . . . . .	32
<b>14</b>	<b>No cloning</b>	<b>33</b>
14.1	Hvordan skaber man en sammenfiltret tilstand i virkeligheden . . . . .	34

<b>15 IBM quantum experience</b>	<b>35</b>
15.1 Enkelt kvantebit . . . . .	36
15.2 flere kvantebits . . . . .	37
15.2.1 GHZ tilstanden . . . . .	38
15.3 Resultater af kvantesimulering . . . . .	39

# 1 Indledning

Dette projektmateriale er skrevet i tilknytning til filmene *Størrelsen på alting – Hvorfor har ting den størrelse de har?* og *bits og qubits – om den forunderlige kvanteverden*. Der indgår i serien om matematisk forskning: 10 danske matematikere – 10 matematiske fortællinger. I filmen fortæller professor Jan Philip Solovej om hvordan kvantemekanikken kan bruges til at løse problemer, som vil være uløselige med en klassisk forståelse af verden. Illustrationerne er fra en præsentation lavet af, Matthias Christandl.

Materialet kan bruges som perspektivering til matematikundervisningen, eller i forbindelse med SRP i matematik og fysik. Dokumentet indeholder matematiske emner som matricer og komplekse tal i relation til kvanteberegninger. Der er igennem materialet en række opgaver, så eleverne selv kan vise væsentlige pointer. Kvanteberegningerne bliver eksemplificeret med GHZ-spillet hvor lokalitet eller realisme bliver brudt. Det er muligt at fokusere på udvalgte matematiske emner.

## 2 Den deterministiske verden

Ifølge den klassiske mekanik kan verden beskrives deterministisk. Hvis vi kender nok til begyndelsesbetingelserne kan vi beregne hvor vi ender. Det kan være vi skal kende få variable, som når vi beregner længden af et kast ud fra starthastighed og kastevinkel. Det kan også være utroligt mange variable som når vi prøver at regne ud om mormor bliver glad for plaiden, eller bare lader som om. De 100 mia. neuroner mormor har, kan ifølge klassisk mekanik i princippet blive kortlagt og med den rigtige funktion kan svaret ud. Her er problemet, at vi ikke kan overskue 100 mia. neuroner, så i praksis kan vi ikke regne ud hvad folk tænker og mener. Selv for ret ukomplicerede systemer kan vi heller ikke gøre os håb om at forudsige begivenheder. Et møntkast ser tilfældigt ud men det skyldes, ifølge klassisk teori, kun vores manglende evne til at holde styr på alle variablene. Alle de mange variable som ligger til grund for tilsyneladende tilfældige hændelser kan defineres som skjulte variable.

### **Definition 1 (Skjult variabel)**

*En skjult variabel er en forklarende variabel med signifikant betydning for det spørgsmål, man undersøger, men som vi ikke har afdækket eller måske slet ikke har kendskab til (endnu).*

Selvom det ikke er praktisk muligt, er det fundamentalt i en klassisk forståelse af verden at begivenheder har en årsag og at vi derfor vil kunne forudsige den hvis vi kendte årsagen.

### 3 Usikkerheden er fundamental

Denne sikkerhed, at vi vidste hvordan verden fungerede, blev udfordret af fremkomsten af kvantemekanikken i begyndelsen af det 20. århundrede. Man vidste, at henfald af atomkerner tilsyneladende forekom tilfældigt. Det var muligt at bestemme hvornår halvdelen af radioaktive atomer var henfaldet, men hvis man ville vide hvornår ét specifikt atom henfaldt var det umuligt. Det er nærliggende at se den denne tilfældighed som vores uvidenhed om atomkernerne. Man kan forestille sig et lille ur i hvert atom som tikker derudaf og helt forudsigeligt bestemmer hvornår atomet henfalder. Hvis vi ikke kender til uret vil det være den skjulte variabel og det tilsyneladende tilfældige henfald skyldes kun vores uvidenhed. I 1927 vandrede Werner Heisenberg gennem Fælledparken og kom op med Heisenbergs ubestemthedsprincip som vendte denne forståelse af verden på hovedet.

Ifølge Werner Heisenberg er der fundamentale størrelser i naturen som vi ikke kan kende på samme tid. Det er kun størrelser som gør sig gældende på meget små skalaer og bestemmer opførslen af atomer, elektroner, fotoner og andet småt. Ubestemthedsprincippet siger at nogen ting kan vi ikke kende helt præcist samtidigt. Det kaldes derfor også for usikkerhedsrelationen og hvis vi for eksempel prøver at bestemme en partikels bevægelsesmængde, hastighed gange masse, meget præcist så bliver usikkerheden på hvor den befinder sig meget stor. Den anden vej rundt siger usikkerhedsrelationen at vi, hvis vi ved hvor en elektron ér, ingen anelse har om hvor hurtigt den bevæger sig. Hvis vi derimod kender dens hastighed må vi opgive at sige noget om hvor den befinder sig. Hvis man forestiller sig et målfoto af 100 meter løbere så bruges det jo til at fastslå hvem der kom først, altså befandt sig på målstregen. Det enkelte foto fortæller intet om hvor hurtigt løberne bevæger sig, denne information er skjult. Matematisk kan usikkerhedsrelationen for hastighed og bevægelsesmængde defineres som.

**Definition 2 (Heisenbergs usikkerhedsrelation)**

*Usikkerhedsrelationen siger, at hvis positionen bestemmes med en nøjagtighed på  $\Delta x$  og impulsen bestemmes med en nøjagtighed på  $\Delta p$  skal produktet overholde uligheden,*

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2, \quad (1)$$

*hvor  $\hbar = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{m}^2\text{kg/s}$  er Plancks konstant.*

Plancks konstant er den mest fundamentale konstant i kvantemekanikken og forbinder bl.a. en foton's frekvens og energi gennem  $E = \hbar \cdot f$ .

**Øvelse 1**

*En elektron har massen  $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{kg}$ , og befinder sig i et atom inden for en radius,  $r_0 \approx 5 \cdot 10^{-11} \text{m}$ .*

- *Bestem usikkerheden i elektronens hastighed.*

**Øvelse 2**

*En bil kører ca 100km/time( $\pm 2 \text{km/time}$ ) og vejer  $m = 1000 \text{kg}$ .*

- Vurder hvor stor usikkerheden i bilens hastighed er.
- Beregn usikkerheden i bilens position.
- Beskriv hvorfor vi ikke oplever usikkerhedsrelationen i vores hverdag.

### 3.1 Hvorfor er der atomer, og os?

Vi kan bruge usikkerhedsrelationen til at vise hvorfor atomerne ikke kolliderer. Vi ser på et brintatom med én proton i kernen og én elektron omkring. Ifølge klassisk mekanik er energien af elektronen summen af kinetisk energi og potentiel energi. Det er givet ved,

$$E(r) = \frac{1}{2} \cdot mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2)$$

hvor  $\frac{1}{2} \cdot mv^2$  er den kinetiske energi og  $-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$  er den potentielle energi som kommer af den elektriske tiltrækningskraft mellem den positive proton og den negative elektron. Konstanterne  $\epsilon_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{N/A}^2$  kaldet vacuum-permabiliteten og  $e$  er elementarladningen.

#### Øvelse 3

Lav en funktionsundersøgelse og vis, at energien går mod minus uendeligt når radius går mod nul.  $\lim_{r \rightarrow 0} E(r) = -\infty$

Øvelsen viser, at det vil være energimæssigt fordelagtigt for elektronen at befinde sig i kernen. Der vil derfor ikke være nogen stabil ligevægt, hvor elektronen befinder sig udenfor atomkernen. For fysiske systemer glæder sætning 1.

#### Sætning 1 (Minimering af energien)

*Et fysisk system vil være i stabil ligevægt i den tilstand som minimerer energien.*

For en bold vil det at ligge for foden af en bakke være en stabil ligevægt, men det at ligge på toppen ikke vil være det. Her er det den potentielle energi som skyldes tyngdefeltet som er mindre i bunden af bakken end på toppen.

Hvis vi bruger usikkerhedsrelationen, ser billedet anderledes ud. Den kinetiske energi kan skrives som,

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}, \quad (3)$$

$p$  er bevægelsesmængden og den hænger nu sammen med elektronens position, gennem usikkerhedsrelationen. Hvis elektronen nærmer sig kernen bliver stedet mere bestemt og derfor bliver bevægelsesmængden større. Det kan vises, at den gennemsnitlige bevægelsesmængden kan skrives som,

$$p = \frac{\hbar}{r} \quad (4)$$

#### Øvelse 4

- Brug ovenstående til at vise at elektronens energifunktion bliver.

$$E(r) = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (5)$$

#### Øvelse 5

- Lav en funktionsundersøgelse og vis at energie nu går mod uendeligt når elektronen nærmer sig kernen.  $\lim_{r \rightarrow 0} = +\infty$ .

Det vil derfor kræve uendeligt meget energi for elektronerne at kollapse ind i kernen. Det kan forklare stabiliteten af vores atomer. En lidt mere krævende øvelse er at finde minimum for energifunktionen.

#### Øvelse 6

- Tegn energifunktionen ind i et koordinatsystem og zoom ind omkring  $r = 10^{-11}$  og undersøg grafens egenskaber.

- Vis at energifunktionene  $E(r) = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$  differentieret mht. afstanden giver.

$$\frac{dE(r)}{dr} = -\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (6)$$

- Løs ligningen  $\frac{dE(r)}{dr} = 0$  og vis ved at indsætte elektronens masse,  $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  at afstanden bliver  $r_0 \approx 5 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ .

Som Jan Philip Solovel redegør for i filmen, svarer det godt til den eksperimentelt bestemte radius på et brint atom. Vi har dermed vist at størrelsen af et brintatom skyldes at atomer følger de kvantemekaniske regler, hvor specielt Heisenbergs usikkerhedsrelation er vigtig.

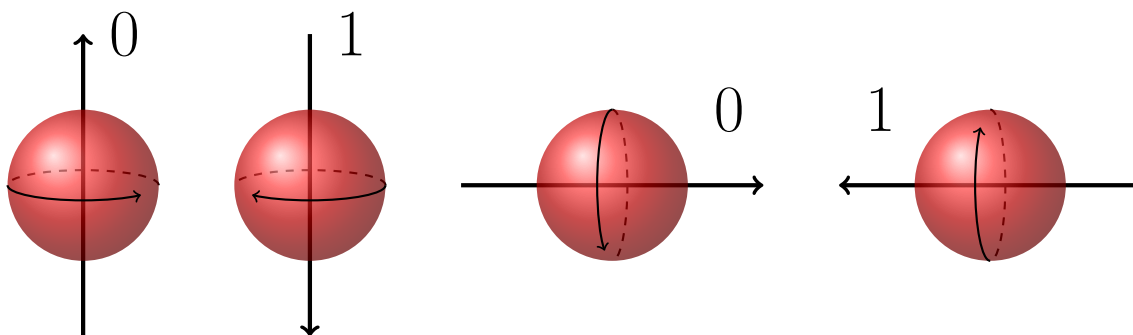
## 4 EPR

Den fundamentale usikkerhed som er en del af kvantemekanikken var svær at acceptere for mange fysikere. Den mest prominente modstander var Albert Einstein som sammen med kollegaerne Boris Podolsky og Nathan Rosen beskrev det såkaldte EPR paradoks. Paradokset går ud på at måle på to partikler i stedet for en, så man kan måle position af den ene partikel og bevægelsesmængde fra den anden. Paradokset ligger i, at det på den måde skulle være muligt at bryde Heisenbergs Usikkerhedsprincip. Paradokset demonstrerer derved at kvantemekanikken ikke er den fulde beskrivelse og at der derfor må være skjulte variable som teorien ikke tager højde for. Selvom paradokset var tænkt som tilbagevisning af kvantemekanikken ligger den til grund for Bells ulighed som er blevet brugt til at teste kvantemekanikken gennem de sidste 50 år. Det er test som entydigt har vist, at det kvantemekaniske resultat har holdt og at det klassiske ikke har.

Det er netop det, at verden ikke kan beskrives med skjulte klassiske variable, men de kvantemekaniske som vi skal beskæftige os med.

## 5 Kvantecomputer og Kvantebit

Kvantecomputere er computere som udnytter kvantemekanikken til at foretage beregninger. Der er mange forskellige slags kvantesystemer som kan bruges til at bygge en kvantecomputer. Vi vil beskrive det ud fra egenskaber ved en elektron, men det kunne også være superledende kredsløb eller polarisation af fotoner. Elektroner har en egenskab som hedder spin. Man kan forestille sig at elektronen er en snurretop og den fysiske analog til 0 er, at den spinner op mens 1 er at den spinner ned. Den kan også mod højre eller mod venstre, eller alle mulige andre veje. De fire tilstande med de to udfald,  $\{0, 1\}$  er vist i figur 1. Lige gyldigt hvilken orientering vil vi altid få finde at elektronen ligger sig parallelt eller anti-parallelt med den retning vi måler. Hvis vi finder at spinnets retning er parallelt med vore måleakse fortolker vi det som et, 0, og hvis den er anti-parallel fortolket vi det som et, 1.



Figur 1: Elektron målt vertikalt og målt horisontalt.

### 5.1 Måling af elektronens spin

Vi vil ikke gå ind i den detaljerede beskrivelse af hvordan man måler en elektrons spin. Det vigtige er, at man vælger hvilken akse man måler elektronens spin langs.

#### **Antagelser 1 (Måling på et kvantesystem)**

*Enhver måling på et kvantemekanisk system tvinger systemet til at være i en af egentilstandene for målingen.*

Det betyder i vores system, at hvis vi måler vertikalt vil elektronernes spin altid vise sig enten at pege op eller ned, og efterfølgende målinger vil også give dette resultat. Systemet er i det som kaldes en egentilstand for måling vertikalt og der bliver den. Hvis vi derimod måler horisontalt vil vi finde elektronen pegende enten til højre eller til venstre. Klassisk logik fortæller os, at når elektronerne er horisontale så er de hverken op eller ned. Det stemmer bare ikke over ens med vores målinger, hvor vi igen vil finde elektronerne pegende op eller ned ved en ny vertikal måling. Ved en horisontal måling siger vi at elektronens spin peger enten til højre eller venstre, men faktisk vil det være



lige så korrekt at sige at er i en superposition af at peget op og ned. Dette er mærkelige, men netop det som gør, at kvantecomputeren kan fungere fundamentalt anderledes end klassiske computere.

## 5.2 kvante-matematik

Vi vil i dette afsnit udvikle den matematik der skal til for at beskrive en qbit, den kvantemekaniske bit. Det foregår ved brug af vektorer og matricer, samt en generalisering til komplekse tal.

Vi beskriver vores qbit ved at beskrive dens tilstande. En qbit kan beskrives ved en todimensionel normeret vektor, dvs. en vektor med længden 1.

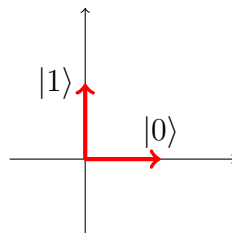
### Definition 3 (kvantetilstand 0 og 1)

De to tilstande 0 og 1 kan matematisk defineres med 2-dimensionelle vektore og har symbolet,  $|\rangle$ , kaldet en ket

$$\text{spin op: } |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\text{spin ned: } |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Da kvantetilstande kan beskrives som 2-dimensionelle vektorer kan vi derfor tegne dem i et koordinatsystem. Det er vist i figur 2. Vi undersøger nogle af egenskaberne ved de



Figur 2: To ortogonale kvantetilstande,  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$ .

to vektorer gennem en øvelse.

### Øvelse 7

- Undersøg om tilstandene  $|0\rangle$  og  $|1\rangle$  er ortogonale ved at bruge prikproduktet.
- Undersøg længden af vektoren for tilstandene  $|0\rangle$  og  $|1\rangle$ .

Vi visualiserer de to spin vektorer svarer de til enhedsvektorerne langs hhv. x-aksen og y-aksen i et kartesiske koordinatsystem. Det stemmer dårligt over ens med elektroner som enten spinner op eller ned. For at få disse billeder til at stemme over ens bruger man

Bloch-sfære i stedet for det katesisik koordinatsystem til beskrivelse af kvantetilstande. Vi gennemgår dette i afsnit, [10.2](#).

Oversættelsen mellem den retning elektronerne spinner og de kvantemekaniske tilstande er

**Definition 4 (De kvantemekaniske tilstande og elektronspin)**

*Elektronen kan enten spinne vertikale op eller ned, eller spinne horisontalt til højre eller til venstre.*

$$\text{spin op: } |0\rangle, \text{ spin ned: } |1\rangle \quad (9)$$

$$\text{spin til højre: } |+\rangle, \text{ spin til venstre } |-\rangle \quad (10)$$

Vi kan bevæge os rundt i koordinatsystemet ved brug af de to vektorer,  $|0\rangle$  og  $|1\rangle$ , som vi normalt gør ved at gå frem og tilbage af x- og y-aksen. Hvis vi på den måde kan skabe alle andre vektorer ud fra et mindre sæt kan disse være en basis for alle andre vektorer. Der gælder følgende definition

**Definition 5 (Komplet ortonormalbasis)**

*Hvis alle andre vektorer kan skrives som en linear-kombination af vektorerne og de er indbyrdes ortogonale og med længden én, kaldes sættet af vektorerne en komplet ortonormalbasis.*

Hvis vi bruger sætningen på vores normale 2-dimensionale kartesiske koordinatsystem kan den komplette ortonormalbasis bestå af enhedsvektoren parallel med x-aksen og enhedsvektoren parallel med y-aksen. Basisvektorerne er her  $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  og  $\vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Øvelse 8**

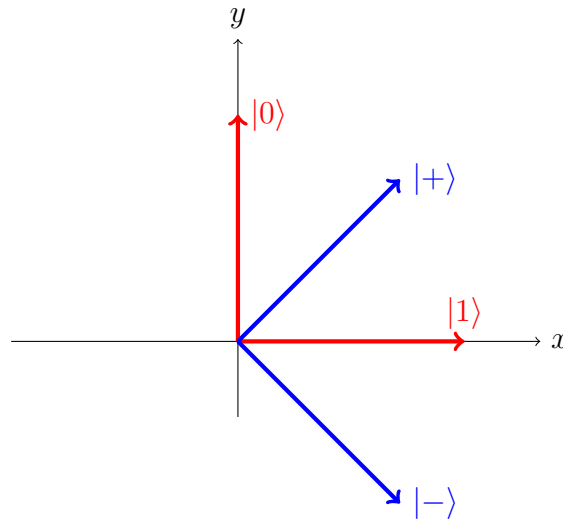
- konstruer vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$  ud af basisvektorerne
- konstruer vektoren  $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$  ud af basisvektorerne
- konstruer vektoren  $\vec{c} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$  ud af basisvektorerne
- konstruer vektoren  $\vec{d} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$  ud af basisvektorerne

Til vores kvantebits bruger vi tilstandene,  $|0\rangle$  og  $|1\rangle$  som vores ortonormalbasis.

**Sætning 2 (basis for en kvantebit)**

I en kvantebit udgør tilstandene,  $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  og  $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  en komplet ortonormal-basis.

Det betyder, at en vilkårlig kvantebit kan skrives som en sum af  $|0\rangle$  og  $|1\rangle$ . Det er netop superpositionen igen, men her beskrevet med lineær algebra, vektorregning, hvor det hedder linear-kombination. Tilstandene  $|0\rangle, |1\rangle$  svarer til at elektronerne enten spinner op eller spinner ned. De horisontale tilstande kaldes,  $|+\rangle$  og  $|-\rangle$  og kan laves ved at kombinere  $|0\rangle$  og  $|1\rangle$ . Vi kan illustrere det i figur 3.



Figur 3: De fire kvantemekaniske tilstande i kartesisk koordinatsystem.

**Øvelse 9**

- beskriv i ord hvad det vil sige at en kvantetilstand er en linearkombination af  $|0\rangle$  og  $|1\rangle$ .
- brug figur 3 til at argumenter for at tilstanden  $|+\rangle$  netop er en linearkombination af,  $|0\rangle, |1\rangle$ .
- brug figur 3 til at argumenter for at tilstanden  $|-\rangle$  netop er en linearkombination af,  $|0\rangle, |1\rangle$ .

Vi kan også beskrive horisontal kvantiseringen med ket symbolet og vektorer. De fire tilstande er

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Vi kan nu undersøge egenskaberne for de nye vektorer.

### Øvelse 10

- Vis, at  $|+\rangle$  og  $|-\rangle$  er ortogonale og har længde 1, ved brug af prikprodukt.

Vi kan se at  $|+\rangle$  og  $|-\rangle$  har samme egenskaber som tilstandene  $|0\rangle$  og  $|1\rangle$ .

#### 5.2.1 Prikprodukt

Vi har brugt prikproduktet nogle gange. Formalismen med ket,  $|\rangle$ , kan udvides med en bra,  $\langle|$  og prikproduktet for tilstandene  $a$  og  $b$  er,

$$\langle a|b\rangle = (a_1, a_2) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2. \quad (13)$$

Vi kan samle hovedpointerne om de fire kvantetilstande.

#### Resultater 1

$$\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1 \quad (14)$$

$$\langle +|+\rangle = \langle -|-\rangle = 1 \quad (15)$$

$$\langle 0|1\rangle = \langle +|-\rangle = 0 \quad (16)$$

$$\langle 0|+\rangle = \langle 1|+\rangle = \sqrt{2} \quad (17)$$

$$\langle 0|-\rangle = \langle 1|-\rangle = \sqrt{2} \quad (18)$$

Vi kan altså se at tilstandene  $\langle 0|+\rangle = \sqrt{2}$  ikke er ortogonale.

### Øvelse 11

- vis at  $\langle 0|+\rangle$  giver  $\sqrt{2}$ .
- vis at  $\langle 0|-\rangle$  giver  $\sqrt{2}$ .

## 6 Måling på et kvantesystem

Hvis vi måler i  $\{0, 1\}$  basen får vi at vores kvantetilstand enten er spin op eller spin ned, lige gyldigt hvilken kvantetilstand systemet var i før målingen. Vi kan derfor ikke observere en superposition med en enkelt måling, den giver sig først til kende når vi måler mange gange på identiske kvantesystemer. Med en qbit i tilstanden,  $|+\rangle$ , vil målinger i  $\{0, 1\}$  basen give tilstand  $|0\rangle$  50% af gangene og tilstand  $|1\rangle$  50% af gangene. Det vil i hver enkelt måling være umuligt at sige hvilket resultat vi får men gennemsnittet vil blive halvt af hver.

Sandsynligheden for at måle kvantebitten i en tilstand beregnes ved brug af prikproduktet.

**Definition 6**

Sandsynligheden for at måle en qbit i kvantetilstanden  $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ , når kvantetilstanden faktisk er,  $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  beregnes som

$$P(\psi|\phi) = |\langle\psi|\phi\rangle|^2 = \left| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right|^2 = |a \cdot \alpha + b \cdot \beta|^2$$

Vi kan nu beregne sandsynligheden for at måle vores qbit i tilstand  $|0\rangle$ , når den er i kvantetilstanden  $|+\rangle$ .

$$\begin{aligned} P(\langle 0|+\rangle) &= |\langle 0|+\rangle|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0|(|0\rangle + |1\rangle) \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle) \right|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (0 + 1) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{19}$$

Vi kan se, at sandsynligheden netop er 50% for at måle vores qbit i tilstand  $|0\rangle$ .

**Øvelse 12**

- vis at  $P(\langle 1|+\rangle) = 50\%$ .
- vis at  $P(\langle 1|-\rangle) = 50\%$

Vi har dermed vist, at en horisontal kvantisering netop giver lige stor sandsynlighed for at være spin op og spin ned.

**Øvelse 13**

Vi ved at vores qbit befinder sig i en af tilstandene,  $|0\rangle, |1\rangle, |+\rangle, |-\rangle$ . Antag at vi ved en måling finder en qubit i tilstand  $|1\rangle$ .

- Hvilken tilstand kunne vores qbit have været i før målingen?
- Hvilken tilstand kunne vore qbit helt sikkert ikke have været i før målingen?

**Øvelse 14**

Alice måler på en qbit der oprindeligt er i tilstand  $|1\rangle$  og får resultatet  $|+\rangle$ . Efter hendes måling sender hun sin qbit videre til Bob, som måler, om den er i tilstand  $|1\rangle$ .

- Hvilket resultat kan Bob få?
- Hvad er målesandsynlighederne?

## 7 Matricer

Mens tilstande kan beskrives ved vektorer kan operatorer beskrives med matricer. Ligesom normale operatorer, gange, kvadratrods osv. virker på tal, virker matricerne på vektorer. Det hedder én matrix, matricen og flertal matricer og man kan se, at det er en matrix ved at man bruger stort bogstav. En todimensionel matrix kan skrives som,

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

hvor  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  er tal og kaldes matricens elementer. Addition og subtraktion er rimeligt ligetil.

### Definition 7 (matrix addition og subtraction)

man adderer matricer ved at addere elementer med samme position i matricerne med hinanden,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Tilsvarende subtraherer man to matricer ved

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Vi kan også gange matricer sammen. Det gøres som følger,

### Definition 8 (Matrixmultiplikation)

Man ganger matricer ved at gange første række med første søjle og skriver det på første plads,  $(1,1)$  i den nye matrix. Man ganger derefter første række med anden søjle og skriver det på plads  $(1,2)$ . Det kan gøre som,

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Matrixmultiplikation af to lige store matricer giver derfor en ny matrix med samme dimensioner. Figur 4, viser hvordan element  $(1,1)$  i den nye matrix fremkommer ved at gange  $a_{11} \cdot b_{11}$  og addere  $a_{12} \cdot b_{21}$ . Skalarer er kommutative hvilket vi kender fra re-

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

Figur 4: Matrixmultiplikation hvor første række er vist ganget med første søjle.

glen, at faktorernes orden er ligegyldig. Med Matrixmultiplikation betyder rækkefølgen noget og den er derfor ikke kommutativ.

**Sætning 3 (Ikke kommutativitet af matrixmultiplikation)**

For matricer gælder den kommutative regel ikke generelt. Det betyder at

$$A \cdot B \neq B \cdot A \quad (23)$$

Vi beviser det med et modstridsbevis.

**Bevis 1**

Vi antager at matricer er kommutative og finder et eksempel hvor det ikke gælder.

Vi vælger to matricer  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  og  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  og udregner produkter

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

mens den anden vej giver

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

De to resultater er ikke samme matrix så antagelsen må være forkert og vi kan konkludere at matricer ikke er kommutative m.h.t. multiplikation.

Dette er radikalt anderledes end vores normale tal og Heisnebergs usikkerhedsrelation kan faktisk vises ud fra at matricer ikke er kommutative.

**7.1 Matricer virkende på en vektor**

Formålet med at introducere matricer er at de skal bruges til at manipulere vores kvantetilstande, repræsenteret ved vektorer. En matrix virker på en vektor ved at blive gange på fra venstre.

**Definition 9 (Matrix virkende på en vektor)**

En matrix,  $M$  virker på vektoren,  $\vec{b}$  ved at gange gange rækker i matricen med søjlen i vektoren,

$$M\vec{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Derved kommer der en ny vektor med samme dimensioner som  $\vec{b}$ .

En matrix virkende på en vektor giver derfor en ny vektor. Dette gør dem ideelle til at manipulere vores kvantetilstande, da vi godt vil ændre på vores vektorer. Hvis f.eks. vi virker med matricen  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  på vektoren  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  får vi,

$$M\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Vi kan se, at matricen ændrer tilstanden fra spin op til spin ned.

### Øvelse 15

- vis at en vektor ikke ændrer sig ved at blive ganget med  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .  $I$  kaldes enhedsmatricen og er matricernes ettal.
- vis hvordan spin ned bliver påvirket af matricen  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$
- begrund hvorfor matricen,  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  kaldes en spin flip matrix.
- overvej hvordan matrisen skal se ud hvis man skal roterer fra spin op til tilstanden højre,  $|+\rangle$ .

For at gå fra tilstanden *spin op* til *højre* kræver det en rotation på  $45^\circ$ . Vi så i ligning 11 at de to tilstande kan skrives med vektorerne,

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ og } |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (28)$$

Matricen til at foretage denne rotation kaldes en Hadamard operator og skrives som

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (29)$$

Det overlades til en øvelse at vise, at en Hadamard netop giver de to tilstande.

### Øvelse 16

- vis at  $H|0\rangle = |+\rangle$
- vis at  $H|1\rangle = |-\rangle$
- vis at  $H|+\rangle = |1\rangle$
- vis at  $H|-\rangle = |0\rangle$

Vi har nu værktøjerne til at ændre kvantiseringen af vores qbit mellem *spin op*, *spin ned*, *højre* og *venstre*.

## 8 Rotation

Den generelle rotation sker med rotationsmatricen,  $R(\theta)$ . Hvis vi godt vil rotere vores kvantebit,  $\theta$  grader med skal vi bruge følgende matricen

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Hvis vi vil rotere fra tilstand  $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$  skal vi rotere  $90^\circ$ , fra x-aksen til y-aksen, se evt. figur 3.



### Øvelse 17

- vis at en  $\theta = 90^\circ$  rotation giver spin flip matricen,  $R(90^\circ) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- vis at en  $\theta = 45^\circ$  rotation sker med matricen

$$R(45^\circ) |0\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- vis at  $R(45^\circ) |0\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = |+\rangle$
- Vis at  $R(45^\circ) |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , ikke giver tilstanden  $|-\rangle$ .
- Hvad sker der med tilstanden  $|0\rangle$  ved en generel rotation,

$$R(\theta) |0\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

Vi kan skrive en generel tilstand af en qbit som  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ , hvor koefficienterne,  $a, b$ , afgør hvilken tilstand systemet er i.

### Øvelse 18

- vis at en tilstand  $|0\rangle$  ved en rotation giver tilstanden  $|\psi\rangle = \cos(\theta) |0\rangle + \sin(\theta) |1\rangle$ .
- vis at den roterede tilstand  $|\psi\rangle$  er normeret, har længden en.

Vi har vist at vi kan ændre vores kvantetilstand med rotation og i forgående kapitel med en Hadamard matrix. Det var den som skiftede mellem  $|0\rangle \rightarrow |+\rangle$  osv. Alle de manipulationer af enkelte qbits kan gøres ved at sætte rotationer og Hadamard gate sammen. Vi har derfor et komplet værktøj til at ændre vores kvantebit.

## 8.1 Egenvektorer og egenverdier

Der er grundlæggende to forskellige operatorer i kvantemekanik, dem hvor tilstandene forbliver de samme og dem hvor tilstandene ændrer sig. I vores kvantecomputer er operatorer hvor tilstanden ændrer sig netop rotationer som beskrevet ovenfor. Hvis kvantetilstanden ikke ændrer sig siger man at systemet er i en egentilstand.

#### Definition 10 (Egenvektor)

Hvis vektoren ikke ændrer andet end evt. længde ved en matrixoperation kaldes vektoren for egenvektor til matricen.

**Definition 11 (Måling som egenværdi)**

Matricer for hvem tilstandsvektorerne er egenvektorer giver målinger af kvantesystemer og de målte værdier svarer til egenværdierne.

Spin op/ned tilstandene har egenvektorer til matricen,  $S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Det kan ses ved at lade  $S_z$  den virke på vektorerne fra venstre,

$$S_z |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$S_z |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Vi får dermed egenværdierne, en og minus en. Det kan virke uheldigt at egenværdien til tilstand,  $|0\rangle$  her egenværdi 1, men det er desværre standardnotation. Matricerne med egenvektorer langs akserne er hedder Paulis spin matricer,  $S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $S_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Øvelse 19**

- Find egenværdierne for tilstand,  $|+\rangle$ ,  $|-\rangle$ , ved at opskrive dem som vektorer og lade  $S_x$  matricen virke på dem.

**Resultater 2**

Egenværdien er hhv. 1 og  $-1$  og en måling giver altid en af disse værdier.

$$S_z |0\rangle = |0\rangle \Rightarrow \text{egenværdi på } 1 \quad (33)$$

$$S_z |1\rangle = -|1\rangle \Rightarrow \text{egenværdi på } -1 \quad (34)$$

$$S_x |+\rangle = |+\rangle \Rightarrow \text{egenværdi på } 1 \quad (35)$$

$$S_x |-\rangle = -|-\rangle \Rightarrow \text{egenværdi på } -1 \quad (36)$$

$$(37)$$

Dette kan så oversættes til det binære talsystem ved at lade,

$$1 \rightarrow 0 \quad (38)$$

$$-1 \rightarrow 1 \quad (39)$$

Analysen af egenværdien og egenvektorer til matricer er en del af en større analyse, hvor man bl.a. kan finde stationære løsninger til dynamiske systemer.

## 9 Gennemsnit

Hvis matricerne giver egenværdierne til egenvektorer og disse er i en superposition kan man spørge, hvilken værdi der kommer af en måling. Helt generelt kræver en undersøgelse af kvantemekaniske systemer at systemerne bliver testet mange gange og at man tager gennemsnittet af målingerne til sidst. Dette gennemsnit kan beregnes ved.

### Definition 12

*Gennemsnittet af en måling ved matricen,  $A$ , over mange ens kvantesystemer, med samme tilstand  $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$  kan skrives som.  $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$ .*

Hvis vores qbit er kvantiseret med *spin op* bliver gennemsnittet af at måle i  $Z$  basen med matricen  $S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,

$$\langle S_z \rangle = \langle 0 | S_z | 0 \rangle = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1. \quad (40)$$

Vi får hver gang en værdi på en og derfor bliver gennemsnittet selvfølgelig også en. Hvis vores qbit derimod er kvantiseret horisontalt,  $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ , bliver målinger vertikalt med  $S_z$  derfor,

$$\langle S_z \rangle = \langle + | S_z | + \rangle = \frac{1}{2} (1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (1 \ -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)) = 0. \quad (41)$$

Vi får her et gennemsnit på nul. Det kan vi fortolke som at vi i gennemsnit vil måle lige mange *spin op* og *spin ned*, når kvantetilstanden er til højre. Det kan også vises det ved brug af ket notationen,

$$\langle S_z \rangle = \langle + | S_z | + \rangle = \frac{1}{2} (\langle 0 | + \langle 1 |) S_z (|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{2} (\langle 0 | + \langle 1 |) (|0\rangle - |1\rangle) = 1 - 1 = 0. \quad (42)$$

Ved tredje lighedstegn brugte jeg at,  $|0\rangle$  og  $|1\rangle$  er egenvektorer til  $S_z$  med egenværdier, 1 og  $-1$ . Dette er igen et udtryk for at det er lige så sandsynligt at finde kvantesystemet i *spin op* som i *spin ned*, når det er kvantiseret horisontalt.

### Øvelse 20

- Find  $\langle S_z \rangle$  når kvantesystemet er i tilstand,  $|1\rangle$
- Find  $\langle S_z \rangle$  når kvantesystemet er i tilstand,  $|-\rangle$ .

Vi kan måle i den retning vi har lyst til. En af dem kunne være midt mellem  $\{0, 1\}$  og

$\{+, -\}$  basen. Vi kan eks. måle gennemsnittet, hvis vi er i kvantetilstanden  $|0\rangle$ ,

$$\frac{\langle S_z + S_x \rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0 | (S_z + S_x) | 0 \rangle \quad (43)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (44)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (45)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (46)$$

Vi finder altså gennemsnittet til  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  når kvantetilstanden oprindeligt er  $|0\rangle$  når vi måler i den mærkelige blanding.

### Øvelse 21

- Find gennemsnittet når vi starter i  $|1\rangle$  tilstanden.

## 10 Rotation med komplekse tal

I afsnit 5.2 arbejdede vi med rotation af kvantebit fra en tilstand op,  $|0\rangle$  til andre tilstande. Vi viste, hvordan en kvantisering i  $\{+, -\}$  kan formuleres som en superposition af at være spin op og spin ned. Vi så også, at spin op vektorerne  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  og spin ned  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , udgjøre en orthonormal basis, hvorved at alle andre vektorer kan skrives som linearkombination af disse to vektorer.

Vi mangler en dimension, med den matematik vi har nu kan vi kun bevæge os i xy-planen. For at få z-aksen med bliver vi nød til at introducerer komplekse tal. Komplekse tal er et helt matematisk emne for sig og vi bruger kun en lille del af den her.

### Definition 13 (Komplekse tal)

De komplekse tal består af alle tal på formen  $z = x + y \cdot i$ , hvor  $x$  og  $y$  er reelle tal. Tallet  $x$  kaldes den reelle del af  $z$  og skrives også  $Re(z)$ , mens  $y$  kaldes imaginærdelen af  $z$  og skrives  $Im(z)$ .

Delen  $i \cdot y$  kaldes den imaginære del og er et reelt tal,  $y$  er ganget med  $i$  som er defineret som

### Definition 14 (imaginære tal)

Tallet  $i$  er defineret som det tal der gange med sig selv giver minus en. Det kan skrives som,

$$i^2 = -1$$

Ved at udvide med komplekse tal får vi netop den ekstra dimension vi har brug for. Det kan ses ved at plotte det komplekse tal  $z = x + i \cdot y$  som et punkt i  $x, y$  planen, se figur 5.

Det virker ulogisk at der kan findes et tal som når man ganger det med sig selv giver minus en. Det viser sig at denne abstraktion er meget nyttig i moderne matematik og helt uundværlig i den formelle beskrivelse af kvantemekanikken.

## 10.1 Regning med komplekse tal

Regning med komplekse tal er næsten som at regne med reelle tal, man skal bare huske at  $i \cdot i = -1$ . For to komplekse tal  $z_1 = x_1 + y_1 \cdot i$  og  $z_2 = x_2 + y_2 \cdot i$  gælder derfor.

- $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2) \cdot i$
- $z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2) \cdot i$
- $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 \cdot i)(x_2 + y_2 \cdot i) = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 \cdot i \cdot i + x_1 \cdot y_2 \cdot i + x_2 \cdot y_1 \cdot i = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot i$

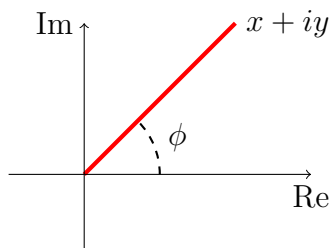
Division er lidt mere kompliceret og det kommer vi tilbage til.

### Øvelse 22

For de to komplekse tal  $z_1 = 2 + 3i$  og  $z_2 = 4 - 2i$  udregn

- $z_1 + z_2 =$
- $z_1 - z_2 =$
- $z_1 \cdot z_2 =$

Et komplekst tal kan visualiseres som et punkt i et koordinatsystem hvor x-aksen er den reelle akse og y-aksen den komplekse eller imaginære, se figur 5.



Figur 5: Komplekse talplan

Den reelle del er altså afstanden langs x-aksen og den imaginære del er afstanden langs y-aksen. Figur 5 viser også en anden måde at skrive komplekse tal på. Hvis vi kender vinklen  $\phi$ , phi, og længden  $|z|$  kan vi komme frem til samme punkt. Det svare til en omskrivning til polære koordinater hvor  $x = |z| \cdot \cos \phi$  og  $y = |z| \cdot \sin \phi$ .

**Definition 15 (polære koordinater for komplekse tal)**

Ved polære koordinater til det komplekse tal  $z$  forstås talparret  $(r, \phi)$ , hvor  $r = |z|$  og  $\phi$  er vinklen mellem 1. aksen og stedvektoren til punktet  $z$  i det komplekse plan.  $z$  kan skrives som

$$z = r \cdot (\cos \phi + \sin \phi \cdot i)$$

eller

$$z = r \cdot e^{i\phi}$$

Vinklen  $\phi$  kalde argumentet for  $z$  og  $r$  kaldes modulus for  $z$ .

**Øvelse 23**

- Vis at Eulers berømte ligning  $e^{i\pi} = -1$  passer.

Længden af  $z$  kan findes ved brug af pythagoras sætning  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  eller ved at bruge at  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ , hvor  $\bar{z}$  er den komplekst konjugerede.

**Definition 16 (Kompleks konjugeret)**

Den kompleks konjugerede til tallet  $z = x + i \cdot y$  er

$$\bar{z} = x - i \cdot y$$

Den imaginære del ændrer fortegn når man komplekst konjugerer.

**Sætning 4 (modulus for komplekse tal)**

modulus for  $z$  kan beregnes som

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

**Bevis 2**

Vi bruger  $z$  i polær form og standard potensregneregler.

$$z \cdot \bar{z} = e^{i\phi} \cdot r \cdot e^{-i\phi} \cdot r = e^{i\phi - i\phi} \cdot r^2 = r^2$$

Vi kan også finde vinklen ved

**Sætning 5 (Argumentet af komplekse tal)**

Argumentet for  $z$ ,  $\phi$  kan beregnes ved brug af tangens,

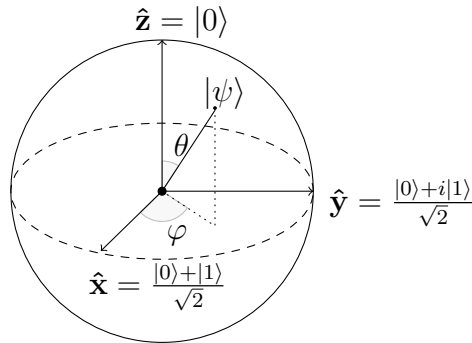
$$\phi = \arg(z) = \arctan \frac{y}{x}$$

**Øvelse 24**

Omskriv  $z = 2 + 3i$  til polære koordinater.

## 10.2 Kvantebit den generelle form og Bloch-sfæren

Vi kan nu se på den generelle form for en kvantebit. Hvis vi tænker tilbage på elektronen som et kvantemekanisk system, kan vi nu matematisk beskrive en kvantisering i en vilkårlig retning i rummet. For at få matematikken til at stemme over ens med den fysiske fortolkning hvor elektronen faktisk er kvantiseret langs en af akser i koordinatsystemet indfører vi blochsfære. Blochsfæren er vist i figur 6, hvor tilstandene  $|0\rangle$  ligger langs z-aksen og  $|+\rangle$  tilstanden ligger langs x-aksen. Rotation bliver beregnet ud fra z-aksen med en rotation fra z-aksen,  $\theta$  og en rotation i xy-planen,  $\phi$ .



Figur 6: Bloch sfære

Vi kræver stadig at kvantiseringen  $|0\rangle, |1\rangle$  er ortogonale hvilket betyder at tilstande på modsatte sider af Bloch-sfæren må være ortogonale. Det viser, at Bloch-sfæren ikke er et normalt kartesisk koordinatsystem. En rotation på  $\theta = 180^\circ$  skal stadig sende tilstand  $|0\rangle$  over i tilstand  $|1\rangle$ . Det gøres ved at definere den generelle tilstand som,

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad a = \cos \theta/2, \quad b = \sin \theta/2 \quad (47)$$

### Øvelse 25

- Vi at en rotation på  $\theta = 90^\circ$  netop giver  $|+\rangle$  kvantiseringen.

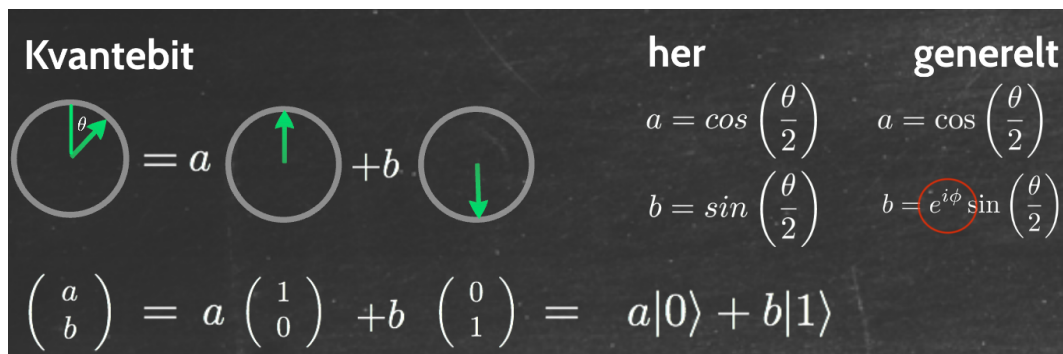
Hvis vi gerne vil bevæge os i xy-planen på bloch-sfæren kræver det brugen af den komplekse eksponentialfunktion. Den komplekse eksponentialfunktion skal ganges på når,  $b$ , udregnes hvilket man kan se i figur 7 er det kun  $e^{i\phi}$  som er kommet med i definitionen af konstanten,  $b$ , som er ny. I figur 6 ses den generelle tilstand  $|\psi\rangle$  drejet  $\theta$  fra z-aksen og  $\phi$  fra x-aksen.

Vi kan nu dreje vores tilstandsvektor i alle retninger. I praksis har vi oftest kun brug for tilstande langs akserne.

### Øvelse 26

Start med kvantebitten i tilstanden  $|0\rangle$  og foretag

- en rotation  $\theta = 90^\circ$  og vis at tilstanden bliver  $|0\rangle_x = |+\rangle$ .
- foretag yderligere en rotation  $\phi = 90^\circ$  og vis at tilstanden nu er  $|0\rangle_y$ , langs y-aksen.



Figur 7: Komplekse del af kvantebit

- foretag yderligere en rotation  $\phi = 90^\circ$  og vis at tilstanden nu er  $|1\rangle_x = |-\rangle$ , langs minus x-aksen.
- Vis hvordan man kommer fra tilstanden  $|0\rangle$  til tilstanden  $|1\rangle_y = \frac{|0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{2}}$ .

De nye kvantetilstande parallelt og anti-parallelt med y-aksen kan skrives som.

$$|0\rangle_y = \frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}}, |1\rangle_y = \frac{|0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{2}},$$

### Øvelse 27

- Vis at tilstandene  $|0\rangle_y$  og  $|1\rangle_y$  er ortogonale.
- vis at de hver har længden 1.

Vi har dermed en matematisk beskrivelse af kvantiseringen i 3 dimensioner.

### 10.2.1 Måling

Vi mangler nu kun at se på målinger i det generelle tilfælde. Selvom vi kan definere og regne med komplekse tal giver de sig aldrig til kende når vi måler på systemerne. Målinger er klassiske operationer og de komplekse tal hører til de rene kvantesystemer.

#### Sætning 6 (Målinger på et kvantesystem giver reelle værdier)

Enhver måling på et kvantesystem giver en reel måleværdi.

Sandsynligheden for at finde et kvantesystem i en tilstand er også en reel værdi.

En måling svare i vores verden til et klik i en detektor. Det er måske ikke så mærkeligt at denne ikke kan være kompleks men bare er binær,  $\{0, 1\}$ . Sandsynligheden for at finde et system i en kvantetilstand beregnes som tidligere vist som,  $P(|a\rangle) = |\langle a | \psi \rangle|^2$ , altså prikproduktet mellem tilstanden  $|\psi\rangle$  og  $|a\rangle$ . For at det skal lykkes skal  $\langle a |$  være den komplekst konjugerede af  $|a\rangle$ . For tilstanden  $|0\rangle_y$  bliver den komplekst konjugerede

$$|0\rangle_y = \frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}} \Rightarrow \langle 0|_y = \frac{\langle 0| - i\langle 1|}{\sqrt{2}}$$



## Øvelse 28

- Vis at sandsynligheden for at måle spin up er 50% når kvantebitten er i tilstanden  $|0\rangle_y$ .

## 11 Spillet

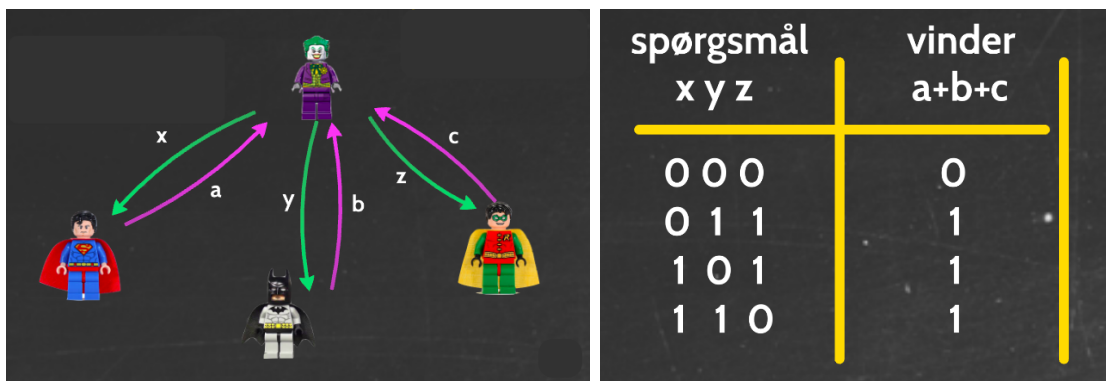
Jan Philip Solovej bruger GHZ spillet til at forklare, hvorfor kvanteberegninger kan noget som klassiske beregninger ikke kan. Man kan som han viser vinde spillet hvis man bruger kvantemekanik og taber det hvis man ikke gør. Det er selvfølgelig en kunstig situation, men forskere har vist, at en kvantecomputer netop vil kunne klare opgaver og løse problemer som klassiske computere ikke har nogen chance for at klare. GHZ spillet er også endnu et eksempel på at Einsteins ide om skjulte variable som forklaring på de mærkelige kvantefænomener ikke kan være rigtig.

### 11.1 Det klassiske spil

GHZ-spillet er her sat op med en game master, Jokeren, som giver information til Batman, Robin og Supermand. Jokeren kan kun give information ud i form af bits, som enten kan have værdien, 0 eller 1. Spillerne svarer også bits altså, 0 eller 1. Spillet er illustreret i figur 8.

Spilleregler:

- spillerne vælger hvilken strategi de vil følge når spillet går i gang.
- Jokeren sender tre bits, 0 eller 1, én til hver af spillerne,  $\{x, y, z\}$
- de tre spillere sender uden at tale sammen deres svar tilbage.
- hvis summen af de tre spilleres svar svarer til den højre kolonne, figur 8 vinder de.



Figur 8: De tre spillere og Jokeren. De får nu spørgsmål, venstre kolonne, og svaret som gør at de vinder, højre kolonne.

Spillerne må altså gerne tale sammen før de får deres spørgsmål, men ikke efter. Man kan skrive strategierne op som funktioner. Funktionen for Supermand hedder her  $a(x)$  og en strategi kunne være,  $a(0) = 1$  og  $a(1) = 0$ , altså send det modsatte tilbage. Supermand sender altså 1 tilbage hvis han modtager et 0 fra Jokeren og sender 0 tilbage hvis han modtager et 1.

### Øvelse 29

- *Dan strategier og test om du kan vinde spillet.*

Hvis I regner rigtigt finder I ikke nogen strategier som giver gevinst hver gang. Det kan vi bevise matematisk, men vi har brug for at definere hvad et lige og et ulige tal er.

#### Definition 17 (lige og ulige tal)

*Et helt tal  $z$  siges at være lige hvis  $z = 2 \cdot n$  hvor  $n \in \mathbb{Z}$ , er et heltal. Et ulige heltal  $z$  defineres ved at være lig  $z = 2 \cdot n + 1$ .*

### Øvelse 30

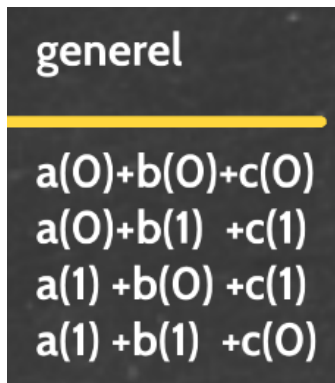
- *Brug definitionen til at vise at 9 er et ulige tal*
- *vis at 8 er lige*
- *vis at 0 er lige*
- *vis at et ulige plus et ulige tal giver et lige*
- *vis at et lige tal plus et ulige giver et ulige*
- *vis at lige+ulige+ulige+ulige giver noget ulige*

Hvis vi kigger på kolonnen med resultatet for at vinde, figur 8 er det tallene  $\{0, 1, 1, 1\}$  eller tallene  $\{\text{lige}, \text{ulige}, \text{ulige}, \text{ulige}\}$ . Spillerne skal derfor komme op med et lige resultat og tre ulige. Summen af resultaterne giver noget ulige som vist i øvelsen ovenfor. Figur 9 viser de mulige strategier. Hvis vi summere den første søjle, Supermands søjle, så står der  $a(0) + a(0) + a(1) + a(1) = 2 \cdot a(0) + 2 \cdot a(1) = 2 \cdot (a(0) + a(1)) \Rightarrow \text{lige tal}$

### Øvelse 31

- *Vis på samme måde, at de to næste kolonner også giver et lige tal.*
- *Brug at lige tal plus lige tal vil at vise at svarene fra superheltenes summeret giver et lige tal.*

Konklusionen er at summen af superheltenes svar altid giver et lige tal mens summen af de rigtige svar altid giver et ulige tal. Der er derfor ikke nogen klassisk måde superheltenes kan vinde spillet. I denne her simple verden kan vi se, at ingen skjulte variable kan hjælpe vores superhelte.



Figur 9: Strategierne skrevet som funktioner

## 12 Flere kvantebits

Vi har nu arbejdet med hvordan man roterer og måler på en enkelt kvantebit. Lige som med en klassisk computer er en enkelt kvantebit ikke så meget værd. I vores eksempel har hver superhelt en kvantebit og vi skal nu se hvordan flere kvantebits kan beskrives matematisk.

### 12.1 EPR og entanglement

Den simpleste to-partikel tilstand, som er interessant er EPR tilstanden. Figur 10 viser til højre en lysstråle som kommer gennem en ikke lineær krystal. Nogle gange vil krystallen udsend fotonerne i en vinkel, de grønne pile. Disse to fotoner har en samlet tilstand som kan skrives som,

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle$$

hvor tallenen i ketten,  $|\rangle$  viser tilstanden for de to fotoner,  $|\text{foton}_1 \text{ foton}_2\rangle$ . Ved en



Figur 10: to kvantebits entangled

måling vil man finde at de to fotoner enten er i tilstand,  $|00\rangle$  eller tilstand  $|11\rangle$  men aldrig tilstand  $|10\rangle$  eller  $|01\rangle$ . Det betyder at vi har 50% chance for at begge partikler er i tilstad  $|0\rangle$  og 50% for at de begge er i tilstand  $|1\rangle$ . Det er derimod ikke muligt at måle en partikel i tilstand  $|0\rangle$  og den anden i tilstanden  $|1\rangle$ . Disse to fotoner siges at være entangled, eller på dansk sammenfiltrede. Her er nogle facts om de to entangled partikler.

- hver partikel er tilfældigt spin op eller spin ned.
- efter en måling af én af partiklerne er den andens orientering også bestemt.
- partiklerne kan være langt fra hinanden.
- effekten optræder instantant, med det samme.

Disse fire punkt strider på mange måder mod den klassiske forståelse af verden. Især at effekten optræder med det samme lige gyldigt hvor langt partiklerne er fra hinanden, skabte modstand. Det strider umiddelbart mod at intet signal kan bevæge sig hurtigere end lysets hastighed, hvilket er en af hjørnestenene i Einsteins relativitetsteori. Det viser sig ved en nærmere analyse, at der faktisk ikke bliver sendt information i klassisk forstand så med lidt god vilje er kvantemekanikken og relativitetsteorien ikke på kollisionskurs her. Man kan forestille sig, at krystallen virkede ved tilfældigt at sende to fotoner med spin op ud og andre gange tilfældigt to fotoner med spin ned. Det vil give de tilstandene

$$|\psi\rangle = |00\rangle, \text{ eller } |\psi\rangle = |11\rangle. \quad (48)$$

Dette vil også give resultatet at man altid måler det samme på begge fotoner. For at vise at det ikke er sådan verden hænger sammen må vi måle i en anden basis. Hvis vi måler en spin op foton langs x-aksen, basen  $+/-$ , har vi tidligere vist, at resultatet 50% af gangene vil give  $+$  og 50% af gangene vil give  $-$ , helt tilfældigt. Som tidligere vist kan vi måle langs andre akser ved at rotere vores kvantebits.

Det er muligt at roterer hver kvantebit uafhængigt af de andre kvantebit. Vi kan derfor bruge resultatet for rotation af enkelte kvantebits,

$$R(90^\circ) |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \text{ og } R(90^\circ) |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle). \quad (49)$$

Hvis vi starter i tilstanden  $|00\rangle$  roterer den første kvantebit fra spin op til spin langs x-aksen bliver tilstanden

$$R_1(90^\circ) |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |10\rangle$$

### Øvelse 32

- udregn hvad en rotation af kvantebit 2 giver,  $R_2(90^\circ) |00\rangle =$
- udregn  $R_1(90^\circ) |11\rangle =$

Lad os måle EPR tilstanden i  $\mp$  basen, langs x-aksen. Det gøres ved at rotere dem til

at ligge langs x-aksen og så måle i z-basen som vi plejer.

$$R_2(90^\circ)R_1(90^\circ)\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = \quad (50)$$

$$R_2(90^\circ)\frac{1}{2}(|00\rangle + |10\rangle + |11\rangle - |01\rangle) = \quad (51)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle + |11\rangle - |10\rangle - |01\rangle + |00\rangle) = \quad (52)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad (53)$$

### Øvelse 33

- *hvis vi efter rotation måler første foton i tilstand  $|0\rangle$ , hvad ved vi så om anden fotons tilstand?*
- *hvad sker der hvis vi måler på foton 2 først?*

Det viser sig at vores EPR qbits er korreleret lige gyldigt hvilken basis vi vælger at måle dem i. Det er ret specielt, husk at vi mister alt information hvis vi måler en enkelt qbit i en orthogonal basis, men med to sammenfildrede qbits vil de blive ved med at være korrelerede. Vi kan lave samme rotation med de to ikke sammenfildrede tilstande,  $|\psi\rangle = |00\rangle$ , eller  $|\psi\rangle = |11\rangle$ .

### Øvelse 34

- *vis at  $R_2(90^\circ)R_1(90^\circ)\frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle$  giver tilstanden  $|00\rangle + |01\rangle + |01\rangle + |11\rangle$ .*
- *Hvis vi nu måler første foton til tilstanden  $|0\rangle$ , hvad ved vi så om den anden fotons tilstand?*
- *Beskriv hvorfor fotonernes spin nu ikke længere er korreleret.*

Vi har nu to hypoteser som vi kan teste i laboratorierne. Den første er at fotonerne forbliver korrelerede ved rotation og den anden, at korrelationen forsvinder. Det er netop hvad forskere har undersøgt og resultatet er entydigt til fordel for den første hypotese.

## 12.2 GHZ tilstanden

Den maksimalt entangled trepartikeltilstand er tilskrevet fysikerne Greenberger, Horner og Zeilinger, og ses i figur 11.

### Øvelse 35

- *hvad er sandsynligheden for at finde systemet i tilstand  $|000\rangle$ .*
- *hvad måler Batmand og Supermand hvis Robin har målt tilstand  $|1\rangle$  først.*

### Greenberger-Horne-Zeilinger tilstand

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} |000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |111\rangle$$

Figur 11: tre kvantebits entangled

## 13 Vinderstrategi

Vi har nu værktøjerne til at spille spillet med Jokeren igen, men denne gang kan vi vinde!. For at vinde spillet skal superheltene bruge GHZ tilstanden, med tre entangled partikler, én hver. Vinderstrategien spillerne skal de følge er skitseret i figur 12. Før

**1) Forbered**

$$\Psi = |000\rangle - |110\rangle - |101\rangle - |011\rangle$$

**distribuer en partikel til hver af deltagerne**

**2) Den enkelte deltager:**  
hvis 1 modtages, roterer med  $90^\circ$   
hvis 0 modtages, roterer ikke

**3) Den enkelte deltager:**  
måler og sender resultatet tilbage

Figur 12: Vinderstrategien

spillet begynder må de godt tale sammen og de laver den fælles tilstand,

$$|\psi\rangle = |000\rangle - |110\rangle - |101\rangle - |011\rangle$$

### Øvelse 36

*tilstanden  $|\psi\rangle$  har ikke længden 1, som den skal.*

- *hvorfor var det vigtigt at en tilstandsvektor skal have længden 1?*
- *beregn længden af tilstanden  $\psi$*
- *hvilken konstant skal der ganges på for at normere tilstanden?*

Spillerne modtager enten tallet 0 eller tallet 1 fra Jokeren. De skal helt individuelt rotere deres kvantebit med  $90^\circ$  hvis de modtager et 1 og intet gøre hvis de modtager et 0.

Til sidst laver hver spiller en måling, med resultatet 0 eller 1 og sender det tilbage. Hele spillet er vist i figur 13. Første kolonne er Jokerens spørgsmål, han sender enten 0

spørgsmål x y z	vinder a+b+c	efter rotation $ 0\rangle \xrightarrow{\frac{1}{\sqrt{2}}( 0\rangle +  1\rangle)}$	måling $ 0\rangle \xrightarrow{\text{green box}}$
0 0 0	0	$ 000\rangle -  110\rangle -  101\rangle -  011\rangle$	✓
0 1 1	1	$ 001\rangle +  010\rangle -  100\rangle -  111\rangle$	✓
1 0 1	1	$ 001\rangle -  010\rangle +  100\rangle -  111\rangle$	✓
1 1 0	1	$- 001\rangle +  010\rangle +  100\rangle -  111\rangle$	✓

Figur 13: Spillet kvantemekanisk

eller 1 og kun i den specifikke rækkefølge. Anden kolonne giver det svar som spillerne skal komme med for at vinde.

Tredje kolonne er den svære så lad os tage den en bid af gangen. I første række hvor der ikke foretages nogen rotation er resultatet netop et lige tal, 0 eller 2. Husk at resultatet af en måling er at systemet enten er i tilstand,  $|000\rangle$  eller  $|110\rangle$  eller  $|101\rangle$  eller  $|011\rangle$ . Hvis de måler tilstand  $|110\rangle$  betyder det at de måler

$$a = 1, b = 1, c = 0 \Rightarrow a + b + c = 2, \text{ lige tal}$$

Et lige tal er det samme som 0 når vi regner binært.

### Øvelse 37

- Undersøg om de andre tilstande i første række også giver resultatet 0 ved måling.
- undersøg om de andre rækker giver det ønskede resultat ved måling, 1 eller 3, altså et ulige tal.

Hvis man vil vise at rotationen faktisk giver tilstandene i 3. kolonne skal vi holde tungen lige i munden og skaffe os noget papir og en blyant. Det er ikke sværere end tidligere, men meget mere besværligt. Det vi skal huske er,

- Foretag en rotation af gangen.
- bruge at  $R(90^\circ) |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$  og  $R(90^\circ) |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$
- samle led og reducerer i udtrykket.

Vi prøver med at foretage udregningen for linje to, hvor jokeren sender (0, 1, 1) og qbit

to og tre skal roteres.

starttilstanden

$$|000\rangle - |110\rangle - |101\rangle - |011\rangle$$

roterer anden kvantetilstand 90 grader.

$$R2(90^\circ)(|000\rangle - |110\rangle - |101\rangle - |011\rangle) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}((|000\rangle + |010\rangle) - (|110\rangle - |100\rangle) - (|101\rangle + |111\rangle) - (|011\rangle - |001\rangle))$$

roterer tredje kvantetilstand med 90 grader.

$$R3(90^\circ)\frac{1}{\sqrt{2}}((|000\rangle + |010\rangle) - (|110\rangle - |100\rangle) - (|101\rangle + |111\rangle) - (|011\rangle - |001\rangle)) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}((|000\rangle + |001\rangle) + (|010\rangle + |011\rangle) - (|110\rangle + |111\rangle) + (|100\rangle + |101\rangle) - (|101\rangle - |100\rangle) - (|111\rangle - |110\rangle) - (|011\rangle - |010\rangle) + (|001\rangle - |000\rangle)) =$$

reduktion giver  $\Rightarrow$

$$|001\rangle + |010\rangle - |100\rangle - |111\rangle$$

Reduktionen kan ses i figur 14. Resultatet er netop den ønskede kvantetilstand i række

$$\frac{1}{2}((\cancel{|000\rangle} + \cancel{|001\rangle}) + (\cancel{|010\rangle} + \cancel{|011\rangle}) - (\cancel{|110\rangle} + \cancel{|111\rangle}) + (\cancel{|100\rangle} + \cancel{|101\rangle}) - (\cancel{|101\rangle} - \cancel{|100\rangle}) - (\cancel{|111\rangle} - \cancel{|110\rangle}) - (\cancel{|011\rangle} - \cancel{|010\rangle}) + (\cancel{|001\rangle} - \cancel{|000\rangle}))$$

Figur 14: Reduktion af ligningen

3. Lad os vise at resultatet netop bliver 1 ved måling.

$$S_z |001\rangle = 1 + 1 - 1 = 1 \quad (54)$$

$$S_z |010\rangle = 1 - 1 + 1 = 1 \quad (55)$$

$$S_z |100\rangle = -1 + 1 + 1 = 1 \quad (56)$$

$$S_z |111\rangle = 1 + 1 + 1 = 3 = 1 \text{ modulo } 2 \quad (57)$$

Vi har altså vist at resultatet netop bliver en ved måling og spillerne vinder med denne strategi.

### Øvelse 38

- *Vis at spillerne også vinder med de andre strategier.*

## 13.1 Opsummering

Vi har vist, at der ikke findes nogen klassisk strategi til at vinde spiller, men at der findes en kvantemekanisk løsning. Det her eksempel har rødder helt tilbage til den oprindelige diskussion om hvorvidt den mærkelige opførsel af kvantesystemer, bare skyldtes ukendte skjulte variable. Ved at betragte et så simpelt system som spillet her, har vi vist, at



den klassiske mekanik ikke kan være hele svaret. Hvis det var det kunne man ikke lave kvantemekaniske beregninger og få et bedre resultat end den klassiske løsning. Der findes andre eksempler hvor EPR-paradokset hvor Bells ulighed er den mest kendte.

## 14 No cloning

En af de væsentlige grunde til at der er blevet forsket i kvantecomputere, er den mulighed de giver for at foretage fuldstændig fortrolig kommunikation. I dag baserer vi os i grove træk på at det er besværligt at faktorisere store tal. Det bliver så besværligt at selv kraftige computere ikke kan gøre det i overskuelig tid og vores information er derfor sikker. Vi kan ikke matematisk bevise, at der ikke findes en smart måde at primtalsfaktoriserer og en anden udnyttelse af en kvantecomputer er faktisk at gøre netop det hurtigere. Ikke kloningsteoremet i kvantecomputing giver derimod en fundamental sikkerhed ved overførsel af information.

### Sætning 7 (no cloning)

*En generel kvantemekanisk tilstand kan ikke kopieres.*

Beviset foregår som et modstridsbevis. Vi antager at vi godt kan klonen en tilstand og viser at det ikke går godt. Vi benytter os af at alle tilstande for vores qbits kan skrives som en superposition af basistilstandene,  $|0\rangle$  og  $|1\rangle$ . Hvis vi kalder vores kopieringsoperator for  $W$  må der gælde,

$$W |0\rangle |0\rangle = |0\rangle |0\rangle \quad (58)$$

$$W |1\rangle |0\rangle = |1\rangle |1\rangle. \quad (59)$$

Vi kopierer tilstanden fra den første qbit til den anden. Hvis den vi prøver at kopiere er i en superposition får vi,

$$W |+\rangle |0\rangle = W \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} W(|0\rangle |0\rangle + |1\rangle |0\rangle) \quad (60)$$

Hvis vi bruger resultaterne fra ligning 58) bliver

$$W |+\rangle |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} W(|0\rangle |0\rangle + |1\rangle |0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle |0\rangle + |1\rangle |1\rangle). \quad (61)$$

Det kan vi sammenligne med det resultat vi gerne skulle få ud af kloningen,

$$W |+\rangle |0\rangle = |+\rangle |+\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{2}(|0\rangle |0\rangle + |0\rangle |1\rangle + |1\rangle |0\rangle + |1\rangle |1\rangle) \quad (62)$$

Det ses, at de to resultater ikke er de samme. Vi har derfor bevist at vi ikke kan klonen vore superpositionstilstand. Da et enkelt eksempel er nok i et modstridsbevis, har vi nu bevist no cloning teoremet.

Finten er at hvis en slem person, altid Eve for Eavesdropper, opfanger informationen kan hun ikke kopiere den. Hvis information sendes som fotoner og Eve opfanger dem, bliver hun nødt til at måle på den, hun kan ikke sende en klon videre og måle på den ene af dem. Vores første antagelse 1 siger at systemet så vil være i en egentilstand. Hvis fotonen eks. var i en superposition af spin op og spin ned vil den efter målingen være i en af dem. Eve kan derfor ikke sende superpositionen videre og Alice og Bob, dem som gerne vil sende information, kan se at nogen har ændret på systemet.

## 14.1 Hvordan skaber man en sammenfiltret tilstand i virkeligheden

Kvantecomputeren er her, men ikke i en form hvor almindelige mennesker kan købe en. Det kræver stadig et laboratorium og højt specialiserede forskere af få kvantecomputerne til at køre. Det skyldes blandt andet, at kvantebitterne skal holdes på en temperatur lige over det absolute nulpunkt,  $-273^{\circ}\text{C}$ , for ikke at termiske fluktuationer skal ødelægge kvantetilstandene. Det er universiteter og store virksomheder som Google og IBM og det amerikanske militær som har mulighed for at køre en kvantecomputer. Der er flere firmaer som stiller sine kvantecomputere til rådighed for offentligheden hvor man kan booke tid til sine eksperimenter. IBM har udviklet et browserbaseret interface hvorigennem man kan eksperimentere med deres kvantecomputer. Hvis man skaber en unik algoritme kan man få lov til at køre den og hvis algoritmen er prøvet før kan man vælge at se det tidligere resultat.

For at visualiserer de kvantemekaniske beregninger danner vi et kvantekredsløbsdiagram. Det læses fra venstre mod højre og enkelte kvantebitoperationer forløber på en vandret streng. Figur 15 viser hvordan kvantetilstanden  $|0\rangle$  bliver til  $|+\rangle$  ved en hadamard gate.

$$\text{---} \boxed{H} \text{---} \quad , \quad |0\rangle \text{---} \boxed{H} \text{---} |+\rangle$$

Figur 15: Hadamard kredsløbsdiagram

Hvis vi har flere kvantebits bruger vi flere strenge. Et eksempel på en flerbit operation er CNOT, hvor en tilstanden af kvantebit to skifter hvis kvantebit et er i tilstanden  $|1\rangle$ . Diagrammet ses i figur 16 hvor kvantebit 2 skifter fordi kvantebit 1 er i tilstand  $|1\rangle$ . En måling foretages hos IBM i  $|0/1\rangle$  basen, langs z-aksen, med symbol som et

$$\text{---} \bullet \text{---} \quad , \quad \begin{array}{c} |1\rangle \text{---} \bullet \text{---} |1\rangle \\ |0\rangle \text{---} \oplus \text{---} |1\rangle \end{array}$$

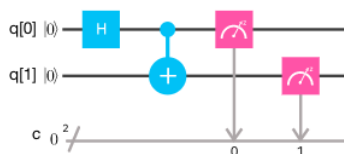
Figur 16: CNOT diagram

speedometer.

## 15 IBM quantum experience

Vi vil nu skabe nogle af tilstandene og resultaterne fra de forgående kapitler på IBM's quantum experience, [quantumexperience](https://quantumexperience.ibm.com/). Siden har en glimrende introduktion, både til den fysiske kvantecomputer og til kvanteberegninger. Alle vores kvantebit er i tilstand  $|0\rangle$  fra start og for at lave om på tilstandene eller måle dem trækker vi ikoner ind fra højre.

Lad os skabe en sammenfiltret tilstand i IBM's kvantecomputer. Udgangspunktet



Figur 17: opsætningen i computeren. øverste linje er kvantebit0 og den næstøverste er kvantebit1.

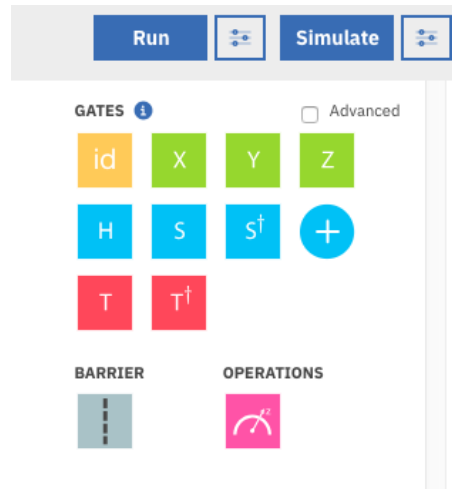
er at begge kvantebit, kaldet  $q[0]$  og  $q[1]$ , er i tilstand,  $|0\rangle$ . En Hadamard rotation,  $H$ , roterer kvantebit0 til tilstanden  $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ , altså superpositionen. Ved hjælp af en CNOT gate bliver kvantebit1 derefter roteret hvis kvantebit0 er i tilstand  $|1\rangle$  og ellers ikke. Da kvantebit0 er i en superposition bliver denne superposition overført på kvantebit1. Begge kvantebits kan nu betragtes som værende i tilstand  $|0\rangle$  og  $|1\rangle$ . Hvis vi måler dem hver for sig kan får vi at udfaldet enten er  $|0\rangle$  eller  $|1\rangle$  helt tilfældigt, men figur 18 viser noget overraskende. Resultatet ses i figur 18, hvor tilstandene  $|00\rangle$  og



Figur 18: resultatet af at generere entangled states 100 gange.

$|11\rangle$ , hver næsten har 50% sandsynlighed, mens de andre ikke har nogen. Selvom hver enkelt kantebit er tilfældig er den altid fuldt af samme resultat fra den anden kvantebit. Vi observerer med andre ord aldrig tilstanden,  $|10\rangle$  eller  $|01\rangle$  hvor kvantebittene er i hver sin tilstande. Dette er en maksimalt sammenfiltret kvantemekanisk tilstand af to partikler.

Forsøget er kørt 100 gange og hver gang er den eneste oplysning man har fået at, enten var kvantebit0 i tilstand  $|0\rangle$  eller i tilstand  $|1\rangle$  ved måling. Sandsynligheden er ikke præcis 50%, hvilket skyldes, at der er usikkerhed i målingerne på selve kvantecomputeren. Denne usikkerhed går som normal tællestatistik som kvadratroden af antallet af tællinger.



Figur 19: Simple kvantegates til programmering. Ved Run knappen køres på den rigtige kvantecomputer, ved Simulate bruges en normal computer. i'et i den blå cirkel giver en hurtig oversigt over egenskaberne.

En oversigt over de simpleste kvante-gates kan ses i figur 19.  $X, Y, Z$  gatene svarer til rotation om de forskellige akser, hvor vi igen befinder os i bloch-sfæren, beskrevet i afsnit 10.2. En  $X$ -gate skal derfor forstås som en  $180^\circ$  rotation omkring  $x$ -aksen. Hvis den foretages på starttilstanden,  $|0\rangle$  hvor kvantiseringen er op langs  $z$ -aksens, vil en  $X$ -gate medføre tilstanden  $|1\rangle$ , pegende i minus  $z$ -retningen. En forklaring på de forskellige gates kan findes under, [i](#).

Den bedste måde at få styr på programmet er at ved at afprøve simple eksempler.

## 15.1 Enkelt kvantebit

### Øvelse 39

- Lav en måling af starttilstanden.
- Lav en måling efter,  $X, Y, H$  gaten, hver for sig. Hvordan fortolker du resultatet?
- Prøv at følg ændringen i kvantetilstand på bloch sfæren, [21](#).

Det er kun muligt at måle langs  $z$ -aksen. Hvis vi vil måle om kvantetilstanden er  $|+\rangle$  eller  $|-\rangle$ , altså langs  $x$ -aksen eller modsat retning må vi først roterer denne tilstand til  $z$ -aksen. Det gøres ved en Hadamard gate,  $H : x \rightarrow z$ , eller  $-x \rightarrow -z$ . Figur 20 viser kredsløbet for at generere,  $|-\rangle$ , tilstanden og måle den i 0/1 basen.

### Øvelse 40

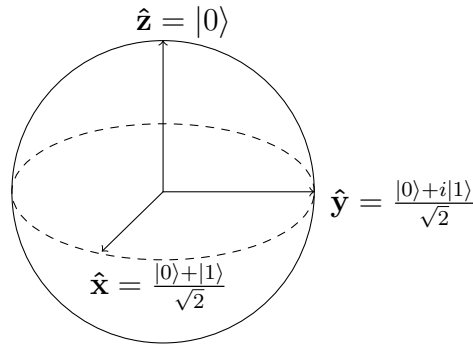
- Lav kredsløbet om så  $I$  genererer og måler tilstanden  $|+\rangle$  langs  $x$ -aksen.
- Gør det samme for kvantiseringer langs  $y$ -aksen, målt langs  $y$ -aksen.

### Øvelse 41

- Prøv at ændre på antallet af forsøg, shots. Det gøres til højre for simuler knappen.



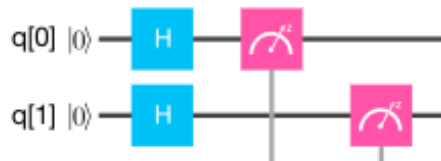
Figur 20: Den grønne boks  $z \rightarrow -x$ . Den røde er en måling af kvantiseringen langs x-aksen ved en Hadamard gate.



Figur 21: Bloch sfære

## 15.2 flere kvantebits

Vi vender tilbage til eksemplet i starten af dette afsnit, hvor vi så på to kvantebits som blev sammenfiltret. I stedet for kredsløbet i figur 17 kan vi prøve at bruge en Hadamard gate på hver de to kvantetilstande, kredsløbsdiagram 22.



Figur 22: Hadamard gate på hver kvantetilstand.

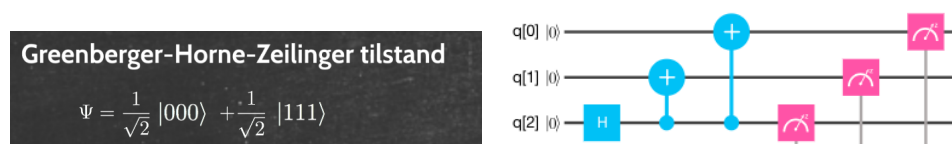
### Øvelse 42

- Kør en simulering med kredsløbet i figur 22 og beskriv resultatet.
- sammenlign med resultatet fra figur 18, hvor de to partikler er sammenfiltret.
- Hvordan kan man bruge disse to eksempler til at beskrive sammenfiltring.
- Prøv at mål i  $x$ -basen som i øvelsen ovenfor ved at sætte en Hadamard gate før målingen. Hvad er resultatet?
- Gør det samme for kredsløbet i figur 17. Gør det nogen forskel hvilken basis du måler for sammenfiltring?

Sidste resultat, at sammenfiltrede kvantetilstande også er sammenfiltrede hvis man måler i en vilkårlig basis, er et fundamentalt resultat for kvantesystemer. Det betyder at de to kvantebits er stærkere korrelerede end klassisk bits. Selv om vi mister alt information om den oprindelige kvantisering af en enkelt bit, hvis vi måler i en ortogonal basis, forbliver denne bit korreleret med den anden bit og resultatet er præcist det samme, hvis den anden også måles i samme ortogonale basis.

### 15.2.1 GHZ tilstanden

GHZ tilstanden er igen vist i figur 23 sammen med kredsløbsdiagrammet. Med disse tre



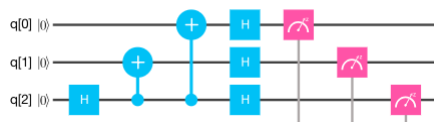
Figur 23: GHZ tilstanden og kredsløbsdiagrammet til at skabe det.

maksimalt sammenfiltrede tilstande kan vi nu vise, at det også på kvantecomputeren er muligt at vinde spillet. Vi vil gøre det med en lidt anden strategi end den vi brugte til at vise det i afsnit 13. Formålet er stadig at svare korrekt på Jokerens spørgsmål, vist igen i figur 24. Med den delte GHZ tilstand vælger de tre spillere at måle langs

spørgsmål x y z	vinder a+b+c
0 0 0	0
0 1 1	1
1 0 1	1
1 1 0	1

Figur 24: Spillet.

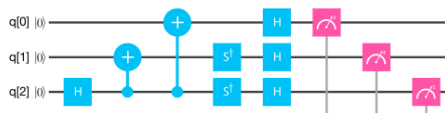
x-aksen hvis de får et 0 og langs y-aksen, hvis de får et 1, fra Jokeren. Måling langs x-aksen sker ved at indsætte en Hadamard gate lige før målingen, se figur 25. Det giver



Figur 25: Måling hvis Jokeren sender  $\{0,0,0\}$

netop den tilstand som spillerne starter med i det teoretiske afsnit. Bemærk at der når I kører simulationen kommer der ikke minus som i tilstandene figur 13. Det giver stadig enten et lige eller ulige tal, hvis man lægger resultaterne sammen og dermed samme udfald.

Lad os prøve næste række i figur 24, hvor Jokeren sender  $\{0, 1, 1\}$ . Vi skal derfor måle kvantebit 2 og 3 langs y-aksen. Det kan vi gøre ved at indsætte  $S^\dagger$  og  $H$ , hvor  $S^\dagger$  roterer fra  $y \rightarrow x$  og  $H$  igen roterer  $x \rightarrow z$ . Kredsløbsdiagrammet kan ses i figur 27a. Resultatet er ved summering et ulige resultat, altså en vinder.



Figur 26: Måling hvis Jokeren sender  $\{0, 1, 1\}$

#### Øvelse 43

- Foretag selv kodningen af den sidste to rækker i figur 24 og overbevis jer om at spillerne vil vinde spillet.

### 15.3 Resultater af kvantesimulering

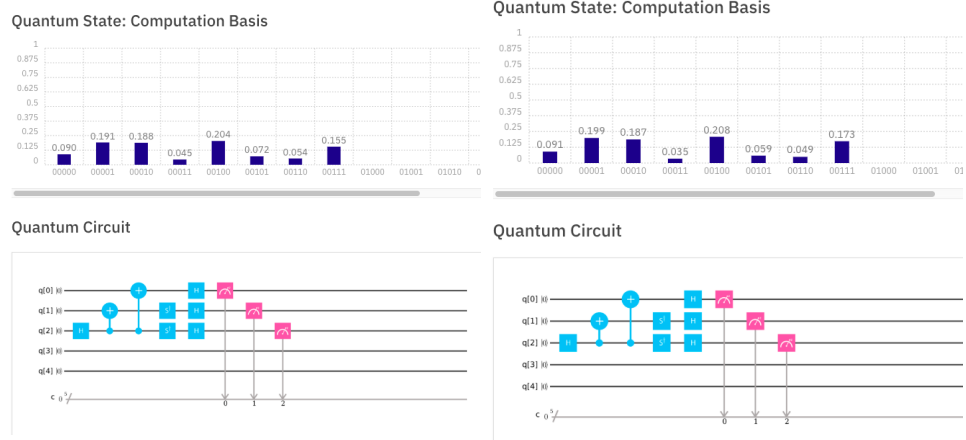
Nedenfor er resultatet af et spil hvor Jokeren har sendt  $\{0, 1, 1\}$  for forskellige gentagelser af simuleringen.

Vi viste at spillerne matematisk kan vinde spille hver gang, hvis de bruger kvantemekanikken. I virkeligheden kan I se at resultaterne er mere mudrede.

#### Øvelse 44

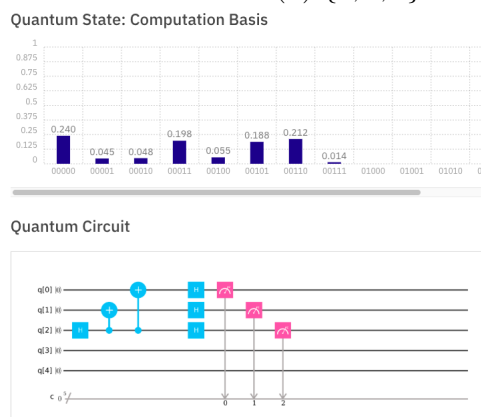
- Beregn sandsynligheden for at give det korrekte svar i to realiseringer af spillet.
- Overvej om der er en klassisk strategi hvor spillerne vil vinde lige så ofte som den kvantemekaniske.

Vi har vist at det i praksis er svært at vinde spillet med den kvantecomputer vi har til rådighed. Det viser at kvantecomputeren stadig på et tidligt udviklingsstadium. Matematisk kan vi vise en lang række interessante og brugbare kvanteberegninger, som vil ændre vores forståelse af beregninger og potentielt kan ændre væsentlige dele af vores samfund. I praksis er kvantecomputeren stor og besværlig og ikke særligt pålidelig. Med de ressourcer der nu investeres i udviklingen kan det komme til at gå rigtig stærkt og de næste år byder helt sikkert på en spændende teknologisk udvikling.



(a)  $\{0, 1, 1\}$  med 1024 gentagelse.

(b)  $\{0, 1, 1\}$  med 8192 gentagelse.



(c)  $\{0, 0, 0\}$  med 8192 gentagelse.

Figur 27: realisationer af kvanteberegninger.