Kvanteinformation og kvantecomputer

Mads Peter H. Steentrup

December 19, 2017

Contents

1 Introduktion

Kvantekomputeren hvor beregninger foretages med systemer i kvantemekaniske tilstande, har potentielt mulighed for at foretage beregninger som ingen almindeling komputer kan klare. For at forstå en kvantekomputer skal man kunne noget kvantemakanik. Heldigvis er den kvantemekaniske komputer opbygget af enheder som ligesom i en klassisk komputer kun kan levere enten et 0 eller et 1. Det gør at kvantemakanikken bliver overskuelig og at matematikken bliver til gængelig på gymnasieniveau. Noten henvender sig til 3.g hold som kan tage det som et emne i fysik eller matematik eller til elever som skriver SRP.

2 IBM kvantecomputer

IBM's kvantecomputer bliver beskrevet her. I følgende afsnit vil jeg gennemgå deres beskrivelse lidt mere grundigt.

En kvantemekanisk enhed som svare til en klassisk computers bit kaldes en Qubit. Den har to basis-tilstande $|0\rangle$ og $|1\rangle$, hvilket kan visualiseres som en vektor som enten peger op, $|0\rangle$, eller ned, $|1\rangle$, af z-aksen, hvilket ses i figur 1. Den generelle kvantetilstand kan skrivs som $|\psi\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle$, hvor a, b tilhører

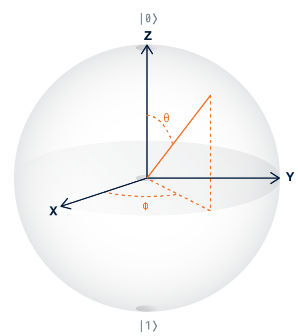

Figure 1: kvantemekanisk tilstand visualiseret på bloch spheren.

de komplekse tal. På figur 1 kan man se en tilstand som er roteret θ om x-aksen og ϕ om z-aksen.

Vi måler altid omkring z-aksen og sandsynligheden for at finde kvantesystemet i tilstand op ved en måling er $P_0 = |a|^2$ mens sandsynligheden for, tilstand net, er $P_1 = |b|^2$. Dette kan findes ved at tage det indre produkt mellem den generelle tilstand, $|\psi\rangle$ og hhv. tilstand, $|0\rangle$ og $|1\rangle$.

Prikproduktet eller det indre produkt, med komplekte vektorfunktioner kan defineres som.

Definition 1 (indre produkt) *Det indre produkt mellem to vektorer,* $|\alpha\rangle = \begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{pmatrix}$ *og* $|\beta\rangle = \begin{pmatrix}\beta \\ \beta\end{pmatrix}$ *kan skrives som*

$$\langle\alpha|\,|\beta\rangle = (\alpha_1^* \quad \alpha_2^*)\begin{pmatrix}\beta_1 \\ \beta_2\end{pmatrix} = \alpha_1^* \cdot \beta_1 + \alpha_2^* \cdot \beta_2.$$

α^* *er den kompleks konjungerede af* α.

Definition 2 (nomeret vektor) *En nomeret vektor har længden 1. Hvilket vil sige at det indre produkt giver 1.*

Hvis vektor $|\alpha\rangle$ er nomeret er $\langle\alpha|\,|\alpha\rangle = \alpha_1^*\alpha_1 + \alpha_2^*\alpha_2 = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1$.

Definition 3 (Ortogonale vektorer) *Vektorer siges at være ortogonale hvis deres indre produkt er nul.*

Når vi beskriver Qubits er tilstandene, $|0\rangle$ og $|1\rangle$ tilstrækkeligt.

Definition 4 (Komplet ortogonal basis) *basistilstandene,* $|0\rangle$ *og* $|1\rangle$ *kan skrives som en 2-dimensionelle ortogonale vektorer med længden 1.*

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vektorerne former en komplet basis for alle vektorer på block-spheren.

Opgave 1

- Vis, at tilstand, $|0\rangle$ og tilstand, $|1\rangle$ er ortogonale.
- Vis, at tilstand,$|0\rangle$ og tilstand, $|1\rangle$ har normen 1.
- Vis, at $P_0 = |a|^2$, når tilstandsvektoren er, $|\psi\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle$.

svar. $P_0 = |\,\langle 0|\,|\psi\rangle\,|^2 = |\,\langle 0|\,(a\,|0\rangle + b\,|1\rangle)|^2 = |a|^2$ Det er tilstandene er nomerede går at vi kan fortolke kvadratet på det indre produkt som sandsynligheden for at finde systemet i en given tilstand. Hvis systemet var i tilstand, $|0\rangle$ svarer det til at $a = 1$ og $b = 0$ i den generelle tilstand og derfor er $P_0 = |a|^2 = |1|^2 = 1$. Det kan vises at den tilsvarende sandsynlighed for at tilstand, $|1\rangle\,, P_1 = 0$.

2.1 Andre akser

Der er ikke noget specielt ved z-aksen så det må være muligt at have kvantiseringen enten ud af x- eller y-aksen. Vores eneste krav er at tilstandene igen er nomeret og ortogonale. Da tilstandene, $|0\rangle$ og $|1\rangle$ udgør en komplet basis må de andre kunne skrives som linearkombinationer, eller superpositioner. De fire tilstande er

$$\begin{aligned}
|0_x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) && = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
|1_x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) && = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
|0_y\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i\,|1\rangle) && = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \\
|1_y\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i\,|1\rangle) && = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

For at få fire tilstande er det nødvendigt at introducere komplekse tal for y-aksen. Den generelle tilstandsvektor kan skrives som

$$|\psi\rangle = a\,|0\rangle + e^{i\phi} b\,|1\rangle \tag{1}$$

Opgave 3

- Vis, at en rotation om z-aksen på $\phi = \pm\pi/2$ netop giver $e^{i\phi} = \pm i$.
- Vis, at $|0\rangle_x$ og $|1\rangle_x$ er otrogonale og har længde 1.
- Vis det samme for y-aksen.
- Vis, at sandsynligheden for at måle, 0 når kvantetilstanden er, $|1\rangle_x$, er $P_0 = |\langle 0|0_x\rangle|^2 = 1/2$.
- Vis det tilsvarende for at måle, 1.

Det at sandsynligheden for at måle enten op eller ned af z-aksen når tilstanden er langs x eller y-aksen siges at tilstanden er i en superposition mellem er være op eller ned. Det kan fortolkes som om tilstanden både er op og ned på samme tid. Denne egenskab er helt grundlæggende for kvantecomputeren, og meget anderledes end klassiske tilstande.

3 Matricer

Mens tilstande kan beskrives ved vektorer kan operatorer beskrives med matricer. Ligesom normale operatorer, gange, kvadratrod osv. virker på tal, virker matricerne på vektorer. Der er grundlæggende to forskellige operatorer i kvantemekanik, dem hvor tilstandene forbliver de samme og dem hvor tilstandene ændrer sig.

Sætning 1 *Matricer for hvem tilstandsvektorerne er egenvektorer giver målinger af kvantesystemer og de målte værdier svarer til egenværdierne.*

Et eksempel på en matrice med egenvektor til tilstand, $|0\rangle$ er $S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Det kan ses ved at lade den virke på vektoren, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ fra venstre,

$$S_z|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

altså egenværdien, 1. Det kan virke uheldigt at egenværdien til tilstand, $|0\rangle$ her egenværdi 1, men det er desværre standardnotation. Matricerne hvor med egenvektorer langs de tre akser er Paulis spin matricer.
$S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, S_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$
Opgave 4

- Find egenværdierne for de resterende 5 kvantemekaniske tilstande.

Her kan man også se på matricerne generelt og derfra finde egenvektorer og egenværdier.

3.1 Matricer, den anden slags

For at ændre på kvantetilstanden bruges også matrice, som ikke giver egenværdier. De tre Pauli spin matricer giver rotation af vores qubit, hvis det ikke er egentilstande. Eksempel,

$$S_x |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi har altså at operatoren, S_x roterer tilstanden en halv omgang omkring a-aksen, så tilstanden op bliver til tilstanden ned. Det kan på samme måde vises at S_y svare til en rotation omkring y-aksen. Det giver også mening at hvis tilstanden er kvantiseret langs den akse man roterer om så sker der ikke noget med tilsatanden. Det er netop egentilstandene til denne rotation. S_x, S_y, S_z roterer en halv omgang, men hvis vi har lyst til at roterer eks en kvart omgang, $\pi/2$, så vi eks. går fra tilstand $|0_z\rangle \rightarrow |0_x\rangle$ skal vi bruge andre matricer. Denne rotationsmatrix har navnet en Hadamard, efte Hadamard, og er $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Opgave 5

- Vis at $H |0_z\rangle = |0_x\rangle$
- Vis, at $H |0_x\rangle = |0_z\rangle$

Rotation fra x- til y-aksen sker ved matricen $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ og den anden vej, x- til -y-aksen $S^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

Opgave 6

- Vis, tilsvarende at $S |0_x\rangle = |0_y\rangle$ og
- at $S^\dagger |0_x\rangle = |1_y\rangle$

3.1.1 Unitære matricer

Under operationerne i kvantecomputeren er det essentielt at sandsynligheden for at finde systemet i en eller anden kvantetilstand er bevaret. Med andre ord skal det stadigt gælde at for en generel kvantetilstand, $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ er $|a|^2 + |b|^2 = 1$, stadigt opfyldt. For at normen af vektorerne skal forblive 1, skal matricerne være unitære.

Definition 5 *For en unitær matrix, U gælder*

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I$$

hvor $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *er identitetsmatricen, matricernes ettal.*

Opagve 8

- Vis at matricerne brugt i kavntecomputeren er unitære.

Vi vil nu vise at normen af en vektor er bevaret efter en unitær transformation. Lad $|b\rangle = U|a\rangle$ hvor det indre produkt $|\langle a|a\rangle|^2 = 1$. For tilstand, $\langle b| = (U|a\rangle)^\dagger = \langle a| U^\dagger$ gælder,

$$|\langle b|b\rangle|^2 = |(\langle a| U^\dagger)U|a\rangle|^2 = |\langle a|(U^\dagger U)|a\rangle|^2 = \langle a| I |a\rangle = |\langle a|a\rangle|^2 = 1$$

altså længden er bevaret.

Opgave 9

- Prøv at lave og ændre tilstande i IBM's kvantecomputer og test ovenstående, med en rigtig kvantecomputer.

4 Gennemsnit

Hvis matricerne giver egenværdierne til egenvektorer og disse er i en superposition kan man spørge, hvilken værdi der kommer af en måling. Helt generelt kræver en undersøgelse af kvantemekaniske systemer at systemerne bliver testet mange gange og at man tager gennemsnittet af målingerne tilsidst. Dette gennemsnit kan skrives som

Definition 6 *Gennemsnittet af en måling ved matricen, A, over mange ens kvantesystemer, samme tilstand $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ kan skrives som.*
$\langle A\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$.

Hvis kvantetilstanden er kvantiseret langs x-aksen,$|0_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, bliver en måling langs z-aksen med S_z derfor.

$$\langle S_z\rangle = \langle 0_x|S_z|0_x\rangle = \frac{1}{2}(1\ \ 1)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1\ \ -1)\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1\cdot 1+1\cdot(-1)) = 0$$

Det kan også vises ved

$$\langle S_z\rangle = \langle 0_x|S_z|0_x\rangle = \frac{1}{2}((\langle 0| + \langle 1|)S_z(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{2}((\langle 0| + \langle 1|)(|0\rangle - |1\rangle) = 1 - 1 = 0$$

Hvor jeg i tredje lighedstegn brugte at, $|0\rangle$ og $|1\rangle$ er egenvektorer til S_z med egenværdier, 1 og -1. Dette er igen et udtryk for at det er lige så sandsynligt at finde kvantesystemet i spin op som i spin ned, når det er kvantiseret langs x-aksen.

Opgave

- Find $\langle S_z\rangle$ når kvantesystemet er i tilstand, $|0_y\rangle$
- Find $\langle S_z\rangle$ når kvantesystemet er i tilstand, $|0_z\rangle$.

5 Flere partikler

Som med normale computere er en bit eller en qubit ikke så interessant. Modsat normale bits bliver det nu sjovt med to kvante-bits. For at skrive den samlede kvantetilstand for to kvantebits, langs z-aksen, bliver det, $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$. To bit giver derfor fire tilstande og som vi skal se alle muligt kombinationer.

5.1 Entanglement

Kvante entanglement eller kvantefiltring, er fænomenet hvor to enkelte qubits er korrelerede. Den maksimalt entangled tilstand kaldes en Bell state og skrives som I denne topartikeltilstand kan den ene partikels tilstand ikke separeres fra

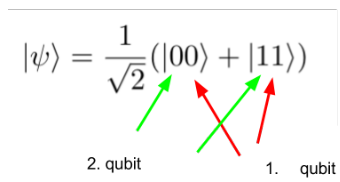

Figure 2: to entangled tilstande.

den andens. Vi kan ikke beskrive tilstanden for den første qubit uden at påvirke den anden qubit. Hvis man måler at qubit 1 er i tilstanden op vil den anden qubit også være i tilstand op. Før man måler er det helt tilfældigt, men efter bare én af dem er målt kendes den anden med sikkerhed. Dette kalder man at bølgefunktionen kollapser og er grundlæggende hvorfor Einstein ikke kunne lide kvantemekanik.

5.2 Hvordan skaber man en entanglet tilstand

Lad os skabe en entanglet tilstand i IBM's kvantecmputer. Udgangspunktet er

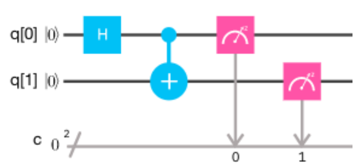

Figure 3: opsætningen i computeren. øverste linje er qubit0 og den næstøverste er qubit1.

at begge qubits er i tilstand, $|0\rangle$. En Hadamard rotation, H, roterer qubit0 til tilstanden $|0_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, altså superpositionen. Fortolkningen er som før at qubit0 både er op og ned. Ved hjælp af en CNOT gate bliver qubit1 roteret hvis qubit1 er i tilstand $|1\rangle$ og ellers ikke. Da qubit0 netop er både op og ned bliver qubit1 også både op og ned. Begge qubits kan nu betragtes som værende både op og ned langs z-aksen, men de er begge enten op eller ned.

Figure 4: resultatet af at generere entangled states 100 gange.

Resultatet ses i figur 4, hvor tilstandene $|00\rangle$ og $|11\rangle$, hver næsten har 50% sandsynlighed, mens de andre ikke har nogen. Forsøget er kørt 100 gange og hver gang er den eneste oplysning man har fået at, enten var qubit0 og qubit1 ned eller også var de op.Sandsynligheden er ikke præcis 50%, hvilket skyldes at der er usikkerhed i målingerne på selve kvantecomputeren.

Opgave 10

- Prøv at ændre på antallet af forsøg, shots, til høre for simuler knappen.

5.2.1 CNOT

CNOT står for control not. Den skifter tilstand af qubit1 hvis qubit0 er i tilstand, $|1\rangle$, og ellers gør den ikke noget.

5.3 Skab selv GHZ tilstande og målinger

IBM GHZ test

6 Det fysiske system

Der er mange forskellige slags kvantesystemer som kan bruges til at bygge en kvantekomputer. Vi vil beskrive det ud fra egenskaber ved en elektron, men det kunne også være superledende kredsløb eller polarisation af fotoner. Elektroner har en egenskab som hedder spin. Man kan forestille sig at elektronen er en snurretop og den fysiske analog til 0 er at den spinner op mens 1 er at den spinner ned, figur 5 viser de to tilstande. Der er stadigt kun to muligheder enten spin op, 0, eller spin ned, 1.

6.1 Måling af elektronens spin

Vi vil ikke gå ind i den detalierede beskrivelse af hvordan man måler om en elektrons spin. Det vigtige er at man vælger hvilken akse man måler elektronens spin langs. Der er ikke noget specielt ved retninger langs z-aksen, op og ned.

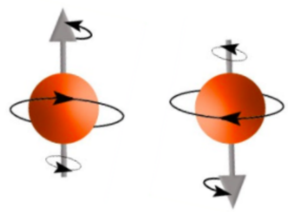

Figure 5: Elektron med spin op eller spin ned

Hvis vi måler elektronernes spin langs eks. x-aksen vil vi også finde at den enten har spin pegende i den positive x-retning, 0, eller den negative x-retning, 1. Figur 6 viser de to situationer.

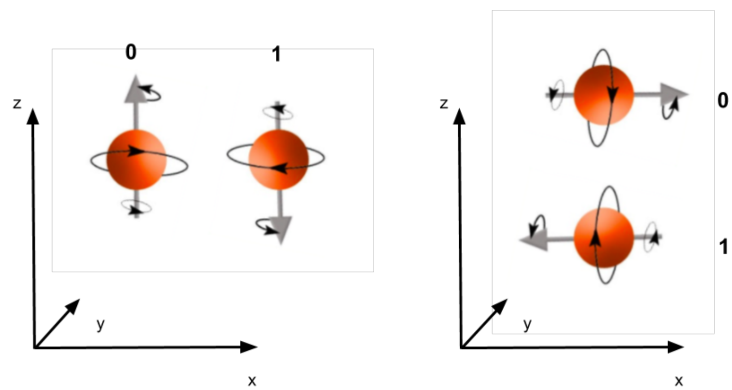

Figure 6: Elektron med spin langs z-ansen og langs x-aksen

Sætning 2 *Enhver måling på et kvantemekanisk system tvinger systemet til at være i en af egentilstandene for målingen.*

Det betyder i, vores system at hvis vi måler langs z-aksens retning vil elektronernes spin altid vise sig enten at pege op eller ned langs z-aksen, og følgende målinger vil også give dette resultat. Man kan ændre retningen elektronerne spinner ved at lave en måling.

7 GHZ tilstanden

GHZ tilstanden er den maksimalt entangled tre qubit tilstand. De tre qubits er vist med tre farver, blå, rød og grøn i figur 7.

Klassisk går spillet som følger:

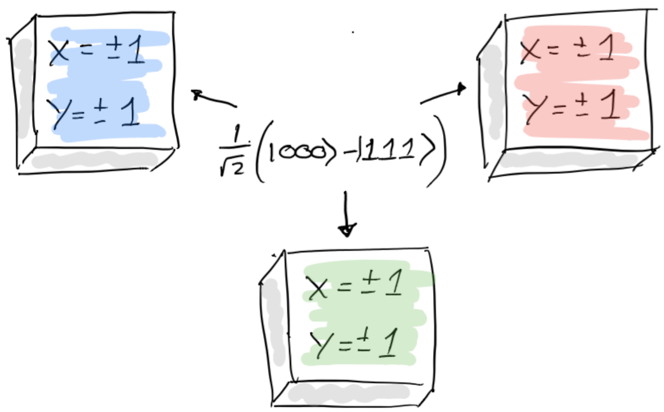

Figure 7:

- Gamemaster sender enten X eller Y til hver spiller, de tre farver.
- Spillerne vælger om de vil sende 1 eller -1, baseret på om de fik X eller Y.
- Spillernes valg ganges sammen
- Spillerne vinder hvis resultatet givet input er følgende.
  $XYY = 1$, $YXY = 1$, $YYX = 1$, $XXX = -1$

Strategier En strategi kunne være at vælge 1 hvis X og -1 hvis Y. Det giver $XYY = 1$, $YXY = 1$, $YYX = 1$, $XXX = 1$. Altså ikke en vinderstrategi.
opgave xx

- Vis at der ikke findes nogen klassiske strategier hvor spillerne kan vinde.

Man kan med andre ord ikke vinde spillet med klassisk fysik. Det betyder også at det ikke kan være klassisk fysik som ligger nedenunder resultaterne som vi bare ikke kender. Det kunne jo være at skjulte variable i vores qubits styrer dem uden at vi ved det. Hvis disse skjulte variable følger lovene fra klassisk fysik vil de ikke kunne gøre spillet bedre - altså vinde.

Lad kvantemekanikken komme til hjælp. Hvis de tre qubits er entangled med en sådan skal vi vise at det kan være muligt.

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle - |111\rangle)$$

Kvantespillet går som følger

- Gamemaster vælger igen X, Y sekvensen.
- Spillerne vælger at måle deres qubit i den givne retning, altså enten langs x- eller y-aksen.

- Spillerne ganger igen deres resultater
- Spillerne vinder hvis samme sekvens som ovenfor fremkommer.

Lad os se hvad det giver at lave en måling langs x- og y-aksen når vores qubit er kvantiseret langs z-aksen.
$S_x |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$,
$S_x |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$
$S_y |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i |1\rangle$
$S_y |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -i |0\rangle$ Med det kan vi lave målingerne på GHZ tilstanden. Hvis gamemaster beder om værdien for XXX bliver det,

$$\begin{aligned} S_x S_x S_x |GHZ\rangle &= S_x S_x S_x \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle - |111\rangle) && (2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}((1)(1)(1)|111\rangle - (1)(1)(1)|000\rangle) && (3) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle - |111\rangle) && (4) \\ &= -|GHZ\rangle && (5) \end{aligned}$$

$S_x S_x S_x$ er altså egenmatice til GHZ tilstanden med egenværdi, -1. Hvis det i stedet er YXY får man,

$$\begin{aligned} S_y S_x S_y |GHZ\rangle &= S_y S_x S_y \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle - |111\rangle) && (6) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}((i)(1)(i)|111\rangle - (-i)(1)(-i)|000\rangle) && (7) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle - |111\rangle) && (8) \\ &= |GHZ\rangle && (9) \end{aligned}$$

Altså en egentilstand med egenværdi 1.
opgave

- Vis at det også går godt med XYY og YYX.

Vi har dermed vist at en kvantemekanisk tilgang kan slå den klassiske.

https://quantumexperience.ng.bluemix.net/qx/tutorial?sectionId=full-user-guidepage=003-Multiple$_Qubits_Gates_and_Entangled_States$ $2F060 - GHZ_States$