

***INTRODUÇÃO À EXTENSOMETRIA ELÉCTRICA
DE
RESISTÊNCIA***

Aníbal Valido
J. Duarte Silva

ÍNDICE

	Pág.
1 - Introdução	2
2 - Princípios da extensometria eléctrica de resistência	3
3 - Factor do extensómetro. Sensibilidade transversal do extensómetro	6
4 - Princípios fundamentais de medida	10
5 - Análise de medições	13
5.1 - Introdução	13
5.2 - Resolução de uma roseta a 45° (Rectangular)	16
Bibliografia	19

1 - Introdução

A análise de tensões consiste, fundamentalmente, na determinação do estado de tensão num (ou vários) ponto(s) duma estrutura, tendo em conta um conjunto de condições que inclui a forma ou geometria da estrutura, a ligação desta ao meio exterior e o tipo de solicitações a que está submetida.

Se o estado de tensão num ponto é determinado recorrendo a grandezas medidas experimentalmente, então o processo é designado como um método de análise experimental de tensões.

As técnicas de análise experimental de tensões podem ser agrupadas da seguinte forma:

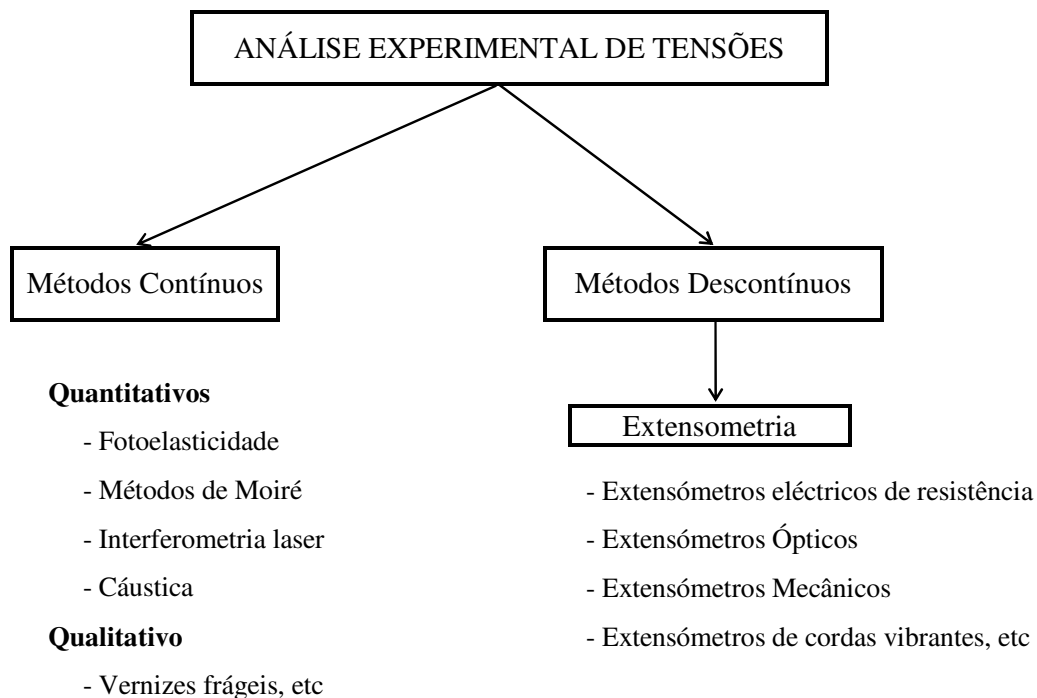


Fig. 1.1 - Técnicas de análise experimental de tensões

De uma maneira geral, a análise experimental de tensões não envolve a medição directa dessa grandeza. O que se faz normalmente é medir uma outra quantidade que de algum modo pode ser relacionada com o estado de tensão no ponto considerado.

Uma das grandezas mais frequentemente medidas na análise experimental de tensões é a extensão, a partir da qual se passa depois para as tensões, recorrendo à teoria da

elasticidade. De acordo com a Fig. 1.1 verifica-se que existem vários tipos de extensómetros, no entanto, nestes apontamentos será considerada apenas a extensometria eléctrica de resistência.

2 - Princípios da extensometria eléctrica de resistência

O princípio de funcionamento dos extensómetros eléctricos de resistência, baseia-se numa característica fundamental dos condutores eléctricos, descoberta em 1856 por Lord Kelvin, segundo a qual a resistência eléctrica varia em função da deformação a que o condutor está sujeito.

Na sua forma mais simples, um extensómetro eléctrico de resistência é constituído por um fio muito fino (grelha) colado sobre uma folha também fina designada por suporte do extensómetro, e dispostos da forma indicada esquematicamente na Fig. 1.2, isto é, a maior parte do comprimento do fio é distribuído segundo uma direcção fixa, designada por x na figura. Os terminais permitem a soldadura dos cabos de ligação ao instrumento de leitura.

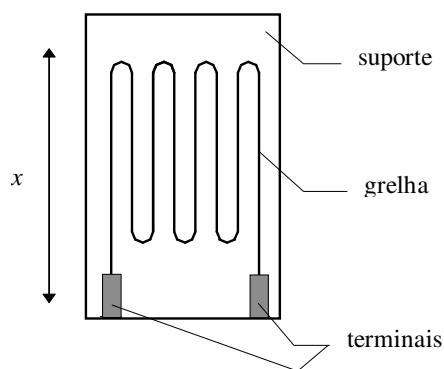


Fig. 1.2 - Representação esquemática de um extensómetro

Quando se pretende conhecer a variação de comprimento numa estrutura segundo uma dada direcção, cola-se um extensómetro na estrutura com os fios paralelos a essa direcção. Qualquer deformação a que a estrutura fique sujeita será transmitida aos fios através da camada de cola e do material de suporte do extensómetro. A variação de resistência eléctrica do fio está relacionada com a sua deformação longitudinal.

Uma vez que o fio de que o extensómetro é feito está principalmente disposto segundo uma dada direcção x , pode-se admitir, em primeira apreciação, que o fio fica sujeito às mesmas deformações que a superfície a que está colado.

Se considerarmos um fio fino sujeito a uma tracção, dentro do domínio elástico, ele sofre um alongamento dL , devido ao efeito da carga ao mesmo tempo que a sua secção transversal diminui. Se $\varepsilon = \frac{dL}{L}$ for a extensão axial, então a extensão do diâmetro (extensão transversal) será dado por $-\nu\varepsilon$, onde ν é o coeficiente de Poisson.

A resistência R de um fio condutor uniforme é dada por:

$$R = \rho \frac{L}{A} \quad (2.1)$$

onde ρ é a resistividade, L é o comprimento e A a área da secção transversal.

Considerando o diferencial da Eq. (2.1)

$$dR = d\rho \frac{L}{A} + dL \frac{\rho}{A} - \frac{1}{A^2} dA \rho L$$

e dividindo por R , obtém-se

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dL}{L} - \frac{dA}{A} \quad (2.2)$$

Se d_0 for o diâmetro inicial do condutor, o seu diâmetro depois de aplicada a tracção é

$$d_f = d_0 - d_0 \nu \frac{dL}{L} = d_0 \left(1 - \nu \frac{dL}{L} \right) \quad (2.3)$$

Sejam, respectivamente A_0 e A_f , a área inicial e a área depois de aplicada a tracção, da secção transversal do condutor

$$A_0 = \frac{\pi d_0^2}{4} \quad A_f = \frac{\pi d_f^2}{4} = \frac{\pi}{4} d_0^2 \left(1 - v \frac{dL}{L}\right)^2 \quad (2.4)$$

Assim:

$$\frac{dA}{A} = \frac{A_f - A_0}{A} = \frac{\pi d_0^2}{4} \frac{4}{\pi d_0^2} \left[\left(1 - v \frac{dL}{L}\right)^2 - 1 \right] \quad (2.5)$$

donde

$$\frac{dA}{A} = -2v \frac{dL}{L} + v^2 \left(\frac{dL}{L}\right)^2 \cong -2v \frac{dL}{L} \quad (2.6)$$

Substituindo a Eq. (2.6) na Eq. (2.2) vem

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + (1+2v) \frac{dL}{L} \quad (2.7)$$

Esta equação pode ser escrita da forma

$$\frac{dR}{R} = S_A \frac{dL}{L} \quad (2.8)$$

em que

$$S_A = \frac{\frac{dR}{R}}{\frac{dL}{L}} = \frac{d\rho/\rho}{dL/L} + 1 + 2v \quad (2.9)$$

é a sensibilidade da liga metálica utilizada no fio condutor. Na Tabela 2.1 apresenta-se uma lista de materiais normalmente utilizados nos extensómetros, bem como os respectivos valores de S_A .

Tabela 2.1- Materiais utilizados em extensómetros

Material	Composição, %	S_A
Advance ou Constantan	45 Ni, 55 Cu	2.1
Nichrome V	8 Ni, 20 Cr	2.2
Karma	74 Ni, 20 Cr, 3 Al, 3 Fe	2.0
Armour D	70 Fe, 20 Cr, 10 Al	2.0

3 - Factor do extensómetro. Sensibilidade transversal do extensómetro

Como foi visto anteriormente, a sensibilidade dum fio condutor de secção uniforme é:

$$S_A = \frac{dR/R}{\varepsilon} \quad (3.1)$$

Para que o tamanho do extensómetro não seja excessivo, o condutor que o constitui forma uma grelha (ver Fig. 1.2). Devido à existência de arcos de ligação entre filamentos sucessivos (ver. Fig. 3.1), o extensómetro é sensível não só a extensões axiais (ε_a), mas também a extensões transversais (ε_t). Assim, a resposta de um extensómetro, a um estado biaxial de extensão pode ser dada por

$$\frac{dR}{R} = S_a \varepsilon_a + S_t \varepsilon_t + S_s \gamma_{at} \quad (3.2)$$

em que

$\varepsilon_a \rightarrow$ Extensão segundo a direcção axial de extensómetro

$\varepsilon_t \rightarrow$ Extensão segundo a direcção transversal de extensómetros

$\gamma_{aty} \rightarrow$ Distorção

$S_A \rightarrow$ Sensibilidade do extensómetro à extensão axial

$S_t \rightarrow$ Sensibilidade do extensómetro à extensão transversal

$S_s \rightarrow$ Sensibilidade do extensómetro à distorção

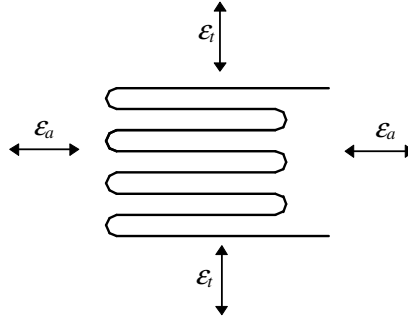


Fig. 3.1 - Extensões axiais e extensões transversais

Em geral, o valor de S_s é pequeno e pode ser desprezado. A resposta do extensómetro pode então ser dada por

$$\frac{dR}{R} = S_a (\epsilon_a + K_t \epsilon_t) \quad (3.3)$$

em que $K_t = \frac{S_t}{S_a}$ é o factor de sensibilidade transversal do extensómetro.

É definido pelos fabricantes de extensómetros uma constante de calibração, denominada factor do extensómetro, S_g , que relaciona a variação de resistência com a extensão axial:

$$\frac{dR}{R} = S_g \epsilon_a \quad (3.4)$$

Os extensómetros são calibrados utilizando uma viga de calibração. A viga é flectida obtendo-se um valor da extensão ϵ_a , que é conhecido. Mede-se então a variação de resistência dR , sendo o factor do extensómetro obtido da Eq. (3.4).

Na situação que acabamos de descrever, o estado de extensão é biaxial, sendo

$$\epsilon_t = -\nu \epsilon_a \quad (3.5)$$

em que ν é o coeficiente de Poisson do material da viga.

Substituindo a Eq. (3.5) na Eq. (3.3), vem

$$\frac{dR}{R} = S_a (\varepsilon_a - \nu K_t \varepsilon_a) = S_a \varepsilon_a (1 - \nu K_t) \quad (3.6)$$

Comparando as Eqs. (3.4) e (3.6), verifica-se que:

$$S_g = S_a (1 - \nu K_t) \quad (3.7)$$

Na Tabela 3.1 indicam-se alguns valores de S_g, S_a, S_t e K_t , para diferentes extensómetros.

Assim, a extensão medida no extensómetro será a extensão real, apenas quando $K_t = 0$ ou o estado de tensão for uniaxial. Em todos os outros casos, existe um erro na medida obtida pelo extensómetro. Para quantificar este erro, considere-se um estado de extensão biaxial com ε_a e ε_t .

Tabela 3.1 - Valores de S_g, S_a, S_t e K_t , para diferentes tipos de extensómetros

Tipo de extensómetro	S_g	S_a	S_t	K_t (%)
EA-06-015CK-120	2.13	2.14	0.0385	1.8
EA-06-030TU-120	2.02	2.03	0.0244	1.2
WK-06-062DY-350	1.96	1.96	-0.0098	-0.5
WK-06-125RA-350	1.99	1.98	-0.0297	-1.5
WA-06-250BG-120	2.10	2.10	-0.0063	-0.3
WK-06-500BL-1000	2.06	2.03	-0.0893	-4.4

Substituindo a Eq. (3.7) na Eq. (3.3), vem

$$\frac{dR}{R} = \frac{S_g}{1 - \nu K_t} (\varepsilon_a + K_t \varepsilon_t) = \frac{S_g \varepsilon_a}{1 - \nu K_t} \left(1 + K_t \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_a} \right) \quad (3.8)$$

resolvendo para ε_a , temos

$$\varepsilon_a = \frac{dR/R}{S_g} \frac{(1 - \nu K_t)}{1 + K_t(\varepsilon_t/\varepsilon_a)} \quad (3.9)$$

O valor da extensão aparente, ε'_a , que se obtém considerando apenas o factor do extensómetro é

$$\varepsilon'_a = \frac{dR/R}{S_g} \quad (3.10)$$

Comparando as Eqs. (3.9) e (3.10), verifica-se que

$$\varepsilon_a = \varepsilon'_a * \frac{1 - \nu K_t}{1 + K_t(\varepsilon_t/\varepsilon_a)} \quad (3.11)$$

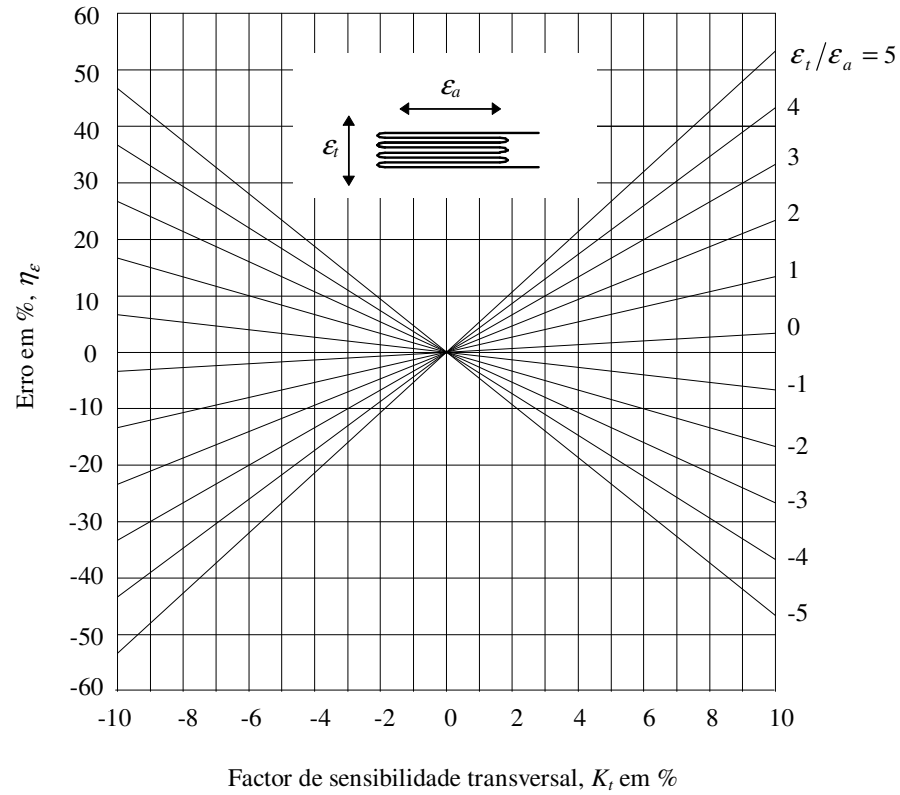


Fig. 3.2 - Erro em função de K_t , tendo como parâmetro a razão $\varepsilon_t/\varepsilon_a$

Assim, o erro em % que se comete quando se despreza a sensibilidade transversal do extensómetro é

$$\eta_{\epsilon} = \frac{\epsilon'_a - \epsilon_a}{\epsilon_a} * 100 \quad (3.12)$$

Substituindo a Eq. (3.11) na Eq. (3.12), vem

$$\eta_{\epsilon} = \frac{K_t (\epsilon_t / \epsilon_a + \nu)}{1 - \nu K_t} * 100 \quad (3.13)$$

Na Fig. 3.2 está representada graficamente a Eq. (3.13). Esta figura permite avaliar, se para um dado caso se deve ter em conta ou não o erro η_{ϵ} . Quando K_t e $\frac{\epsilon_t}{\epsilon_a}$ têm valores elevados, o erro cometido pode ser significativo. Existem no entanto métodos para corrigir este erro devido ao efeito transversal do extensómetro.

4 - Princípios fundamentais de medida

O extensómetro propriamente dito poderá ser encarado como uma simples resistência passiva, alimentada por uma fonte de alimentação adequada. As variações de resistência causadas por deformações mecânicas do extensómetro são medidas num circuito do tipo potenciometrico ou ponte de Wheatstone, que produz um determinado sinal de saída em termos de diferença de potencial.

Esse sinal é amplificado, lido e/ou registado, depois de convenientemente manipulado por forma a representar directamente as grandezas que se pretendem ler.

A ponte de Wheatstone é um circuito muito utilizado para medir a variação de resistência sofrida por um extensómetro quando é submetido a determinada deformação.

Consideremos o circuito da ponte de Wheatstone representada na Fig. 4.1. A diferença do potencial na resistência R_1 é

$$V_{AB} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V \quad (4.1)$$

da mesma forma, a diferença do potencial na resistência R_4 é

$$V_{AD} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} V \quad (4.2)$$

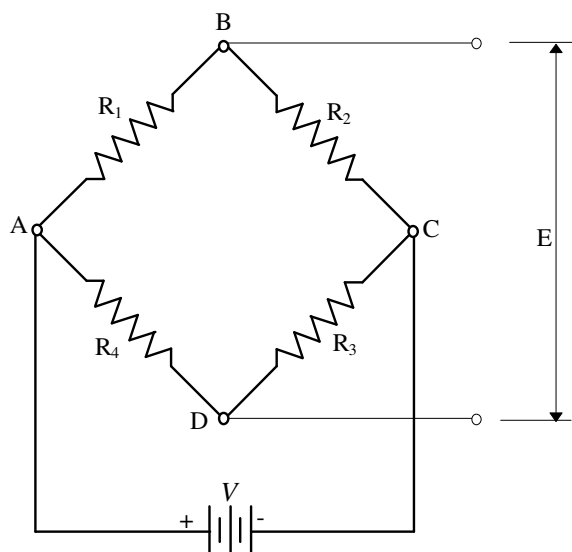


Fig. 4.1 - Ponte de Wheatstone

A diferença de potencial E da ponte, equivalente a V_{BD} é dada por

$$E = V_{BD} = V_{AB} - V_{AD} \quad (4.3)$$

Substituindo as Eqs. (4.1) e (4.2) na Eq. (4.3), e simplificando vem

$$E = \frac{R_1 * R_3 - R_2 R_4}{(R_1 + R_2) (R_3 + R_4)} V \quad (4.4)$$

A diferença de potencial E é zero, e a ponte diz-se em equilíbrio, quando

$$R_1 R_3 = R_2 R_4 \quad (4.5)$$

Considere-se uma ponte de Wheatstone inicialmente em equilíbrio, $R_1 R_3 = R_2 R_4$ e consequentemente $E=0$. Demonstra-se que a variação de E , devida à variação ΔR_1 , ΔR_2 , ΔR_3 e ΔR_4 , de cada uma das resistências é dada por

$$\Delta E = V \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)^2} \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) (1 - \eta) \quad (4.6)$$

ou, fazendo $r = \frac{R_2}{R_1}$

$$\Delta E = V \frac{r}{(1+r)^2} \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) (1 - \eta) \quad (4.7)$$

Em que η representa um termo não linear, cuja influência é desprezável quando se medem extensões menores que 5%, que é o que acontece no caso dos metais no regime elástico ($\varepsilon \approx 0.1\%$). Dum modo geral ao medirem-se deformações, R_1 é um extensómetro activo colado sobre a estrutura que se deforma, R_2 é um extensómetro idêntico ao anterior colado sobre uma peça do mesmo material da estrutura, mas que não se deforma. Este extensómetro designa-se por extensómetro compensador e tem por objectivo eliminar os efeitos de origem térmica, para que somente as deformações de origem mecânica sejam detectadas. R_3 e R_4 são resistências eléctricas puras (ver Fig. 4.2).

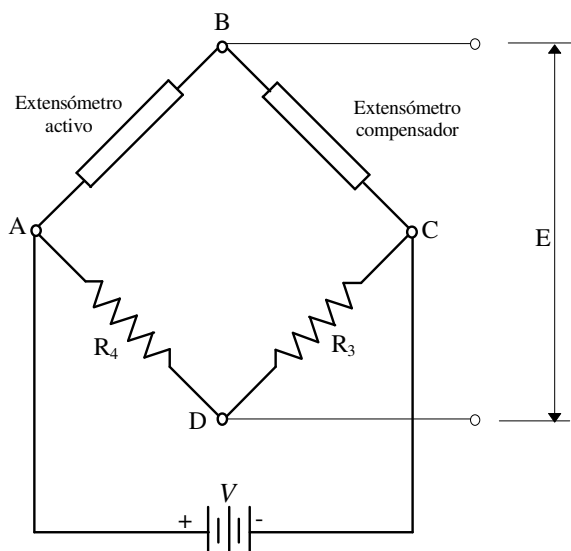


Fig. 4.2 - Ponte de Wheatstone com extensômetro compensador

Os valores mais utilizados para a resistência dum extensómetro são 120 e 350 ohms.

A razão de se utilizar 120 ohms como a resistência mais usual, reside no facto de resistências menos elevadas darem sinais muito fracos para poderem ser medidos com precisão, e de resistências mais elevadas serem difíceis de isolar, além de serem muito mais frágeis uma vez que têm que ser feitas com fios bastante mais finos.

Devido à elevada precisão a requerer nas medidas em extensometria eléctrica de resistência,

os extensómetros são fabricados com uma tolerância muito apertada. Assim, os extensómetros de 120 ohms dum modo geral indicam para valor da resistência real do extensómetro 120 ± 0.2 ohms. Ao valor de 120 ohms dá-se o nome de resistência nominal do extensómetro.

5 - Análise de medições

5.1 - Introdução

Os extensómetros eléctricos de resistência são normalmente utilizados na superfície livre duma peça, para se determinar o estado de tensão num determinado ponto dessa superfície.

Geralmente é necessário medir três extensões no ponto para definir completamente tanto o estado de extensão como o estado de tensão.

Em alguns casos pode ser utilizado apenas um extensómetro para determinar o estado de tensão num ponto. Por exemplo, no caso de tracção uniaxial dum provete, em que $\sigma_{xx} \neq 0$ e $\sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0$, um extensómetro colado segundo a direcção da tracção (direcção x) dá o valor da extensão principal 1, (ϵ_1) . As restantes extensões principais são $\epsilon_2 = \epsilon_3 = -\nu\epsilon_1$.

As respectivas tensões principais são $\sigma_1 = E\epsilon_1$ e $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, em que E e ν são respectivamente o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material.

Considere-se agora o caso em que se conhecem as direcções principais (Ex: reservatórios cilíndricos sob pressão). Se se colocarem dois extensómetros, cada um segundo cada uma das direcções principais, obtêm-se directamente as extensões principais.

As tensões principais podem ser calculadas através das relações

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_1 + \nu\epsilon_2) \\ \sigma_2 &= \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_2 + \nu\epsilon_1)\end{aligned}\tag{5.1}$$

onde se considerou um estado plano de tensão.

O valor das tensões em qualquer outro plano (x', y', z') , pode ser obtido utilizando as seguintes equações:

$$\begin{aligned}\sigma_{x'x'} &= \sigma_1 \cos^2(x', x) + \sigma_2 \cos^2(x', y) + \sigma_3 \cos^2(x', z) \\ \sigma_{y'y'} &= \sigma_1 \cos^2(y', x) + \sigma_2 \cos^2(y', y) + \sigma_3 \cos^2(y', z) \\ \sigma_{z'z'} &= \sigma_1 \cos^2(z', x) + \sigma_2 \cos^2(z', y) + \sigma_3 \cos^2(z', z) \\ \tau_{x'y'} &= \sigma_1 \cos(x', x) \cos(y', x) + \sigma_2 \cos(x', y) \cos(y', y) + \sigma_3 \cos(x', z) \cos(y', z) \\ \tau_{y'z'} &= \sigma_1 \cos(y', x) \cos(z', x) + \sigma_2 \cos(y', y) \cos(z', y) + \sigma_3 \cos(y', z) \cos(z', z) \\ \tau_{z'x'} &= \sigma_1 \cos(z', x) \cos(x', x) + \sigma_2 \cos(z', y) \cos(x', y) + \sigma_3 \cos(z', z) \cos(x', z)\end{aligned}\tag{5.2}$$

em que x , y e z representam aqui as direcções principais.

Acabamos de ver dois casos em que se utilizam respectivamente um e dois extensómetros. Acontece no entanto, na maior parte das situações, que nada se conhece acerca do campo de tensões e das direcções principais. Nestes casos, torna-se necessário efectuar três medições segundo três direcções diferentes, recorrendo-se à utilização de rosetas.

Na Fig. 5.2 estão representados alguns tipos de rosetas.

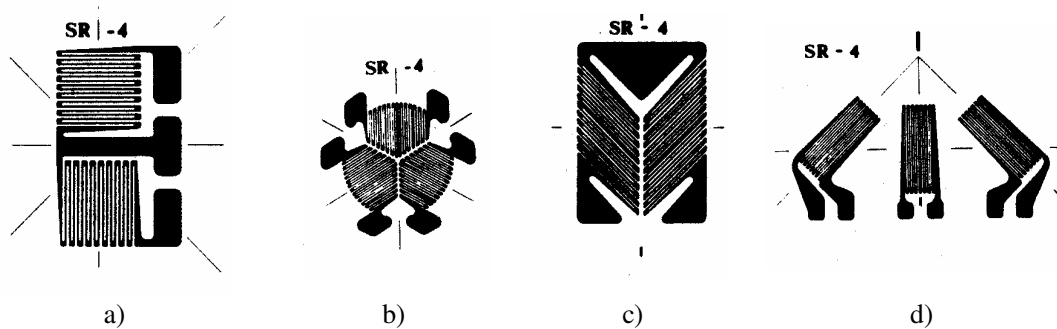


Fig. 5.2 - a) roseta de 2 extensómetros a 90° , b) roseta de 3 extensómetros a 60° (delta), c) roseta de 2 extensómetros a 60° , d) roseta de 3 extensómetros a 45° (rectangular)

Consideremos três extensómetros alinhados segundo as direcções A , B e C conforme representado na Fig. 5.3.

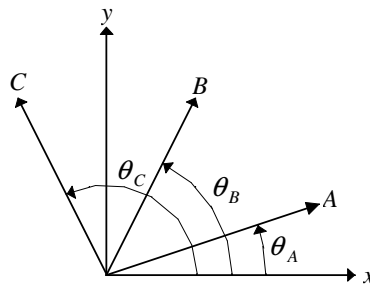


Fig. 5.3 - Três extensómetros colocados de forma arbitrária relativamente aos eixos x e y

A relação entre as extensões segundo A , B e C e as extensões segundo x e y , é

$$\begin{aligned}\varepsilon_A &= \varepsilon_{xx} \cos^2 \theta_A + \varepsilon_{yy} \sin^2 \theta_A + \gamma_{xy} \sin \theta_A \cos \theta_A \\ \varepsilon_B &= \varepsilon_{xx} \cos^2 \theta_B + \varepsilon_{yy} \sin^2 \theta_B + \gamma_{xy} \sin \theta_B \cos \theta_B \\ \varepsilon_C &= \varepsilon_{xx} \cos^2 \theta_C + \varepsilon_{yy} \sin^2 \theta_C + \gamma_{xy} \sin \theta_C \cos \theta_C\end{aligned}\tag{5.3}$$

As componentes cartesianas da extensão ε_{xx} , ε_{yy} e γ_{xy} podem ser determinadas resolvendo o sistema de três equações a 3 incógnitas das Eqs. (5.3).

As extensões principais e as direcções principais são dadas por

$$\begin{aligned}\varepsilon_1, \varepsilon_2 &= \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \\ \operatorname{tg} 2\phi &= \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}\end{aligned}\tag{5.4}$$

em que ϕ é o ângulo entre a direcção principal 1 e o eixo x . As tensões principais são obtidas através das Eqs. (5.1).

As direcções A , B e C podem ser quaisquer no entanto, nas rosetas que se encontram disponíveis comercialmente, estes ângulos tomam apenas alguns valores (ver Fig. 5.2).

5.2 - Resolução de uma roseta a 45° (Rectangular)

Como foi referido anteriormente nestas rosetas os extensómetros formam entre si ângulos de 45°, tal como se indica na Fig. 5.4.

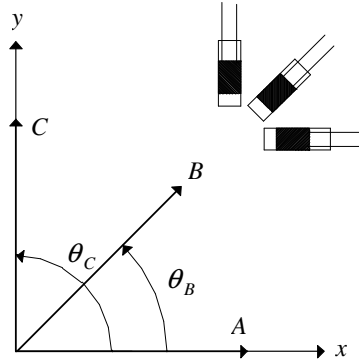


Fig. 5.4 - Posição dos extensómetros numa roseta a 45°

Das Eqs. (5.3) tem-se

$$\varepsilon_A = \varepsilon_{xx} \qquad \varepsilon_B = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \gamma_{xy}) \qquad \varepsilon_C = \varepsilon_{yy} \quad (5.5)$$

donde

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_B - \varepsilon_A - \varepsilon_C$$

Uma vez determinados os valores de ε_{xx} , ε_{yy} e γ_{xy} , as extensões principais e o ângulo principal ϕ podem ser obtidos através das Eqs. (5.4), obtendo-se

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}(\varepsilon_A + \varepsilon_C) + \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_C)^2 + (2\varepsilon_B - \varepsilon_A - \varepsilon_C)^2} \quad (5.6a)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_A + \varepsilon_C) - \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_C)^2 + (2\varepsilon_B - \varepsilon_A - \varepsilon_C)^2}$$

$$\operatorname{tg} 2\phi = \frac{2\varepsilon_B - \varepsilon_A - \varepsilon_C}{\varepsilon_A - \varepsilon_C} \quad (5.6b)$$

Da Eq. (5.6b) obtêm-se dois valores diferentes para o ângulo ϕ . Sejam, respectivamente ϕ_1 o ângulo entre o eixo x e a direcção principal 1 e ϕ_2 o ângulo entre o eixo x e a direcção principal 2. Demonstra-se que os eixos principais podem ser identificados aplicando as seguintes regras:

$$\begin{array}{lll}
 0 < \phi_1 < 90^\circ & \text{quando} & \varepsilon_B > \frac{1}{2}(\varepsilon_A + \varepsilon_C) \\
 -90^\circ < \phi_1 < 0 & \text{quando} & \varepsilon_B < \frac{1}{2}(\varepsilon_A + \varepsilon_C) \\
 \phi_1 = 0 & \text{quando} & \varepsilon_A > \varepsilon_C \quad \text{e} \quad \varepsilon_A = \varepsilon_1 \\
 \phi_1 = \pm 90^\circ & \text{quando} & \varepsilon_A < \varepsilon_C \quad \text{e} \quad \varepsilon_A = \varepsilon_2
 \end{array} \quad (5.7)$$

Finalmente, determinam-se as tensões principais, utilizando os valores obtidos nas Eqs. (5.a) nas Eqs. (5.1), obtendo-se

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= E \left[\frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2(1-\nu)} + \frac{1}{2(1+\nu)} \sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_C)^2 + (2\varepsilon_B - \varepsilon_A - \varepsilon_C)^2} \right] \\
 \sigma_2 &= E \left[\frac{\varepsilon_A + \varepsilon_C}{2(1-\nu)} - \frac{1}{2(1+\nu)} \sqrt{(\varepsilon_A - \varepsilon_C)^2 + (2\varepsilon_B - \varepsilon_A - \varepsilon_C)^2} \right]
 \end{aligned} \quad (5.8)$$

As componentes cartesianas das extensões, as extensões principais e as respectivas direcções principais, podem também ser obtidas graficamente, como está representado na Fig. 5.5. Para a construção do círculo de Mohr, procede-se da seguinte forma:

- Traçar os eixos (ε - abcissas, $\frac{\gamma}{2}$ - ordenadas)
- Marcar os valores de $\varepsilon_A, \varepsilon_B$ e ε_C sobre o eixo das abcissas e traçar rectas verticais passando por esses pontos
- Calcular γ_{xy} utilizando a Eq. (5.5) e marcar os pontos $A \equiv (\varepsilon_A, \frac{\gamma_{xy}}{2})$ e $C \equiv (\varepsilon_C, -\frac{\gamma_{xy}}{2})$
- O diâmetro do círculo é determinado traçando a recta que une os pontos A e C, cuja intersecção com o eixo das abcissas define ainda o centro do círculo (ponto 0)
- Traçar o círculo de centro em 0 que passa por A e C, e cuja intersecção com a recta vertical que passa por ε_B define o ponto B
- Os valores das extensões principais ε_1 e ε_2 são dados pelas intersecções do círculo com o eixo das abcissas

g) O ângulo principal $2\phi_1$ é definido pelo ângulo $A0\varepsilon_1$, e é negativo se o ponto A estiver acima do eixo ε . O ângulo principal $2\phi_2$ é definido pelo ângulo $A0\varepsilon_2$, e é positivo se o ponto A estiver acima do eixo ε

h) A projecção do ponto D no eixo das ordenadas, dá o valor de $\frac{\gamma_{\max}}{2}$

Uma vez conhecidas as extensões principais, as tensões principais podem ser obtidas através das Eqs. (5.1).

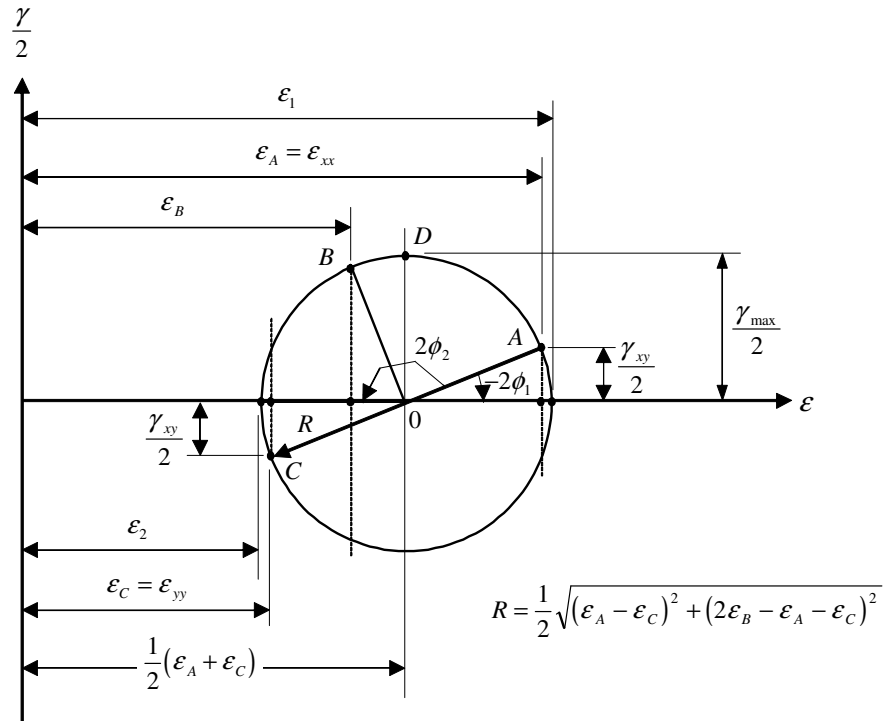


Fig. 5.5 - Solução gráfica das extensões principais e direcções principais para uma roseta a 45°

BIBLIOGRAFIA

1. Luís Trabucho, *Introdução à Extensometria Eléctrica de Resistência e Guia dos Trabalhos Experimentais da Disciplina de Mecânica dos Materiais I do 2º Ano do*

Curso de Engenharia Mecânica do Instituto Superior Técnico durante o Semestre de Março a Julho de 1985

2. Enciclopédia Vishay de análise experimental de tensões
3. *Handbook on Experimental Mechanics*, Society For Experimental Mechanics, Inc.
4. James W. D. & William F., *Experimental Stress Analysis*, McGraw-Hill
5. J. F. Silva Gomes, *Análise Experimental de Tensões: de Novo um Tema Actual*

GUIA DOS TRABALHOS LABORATORIAIS

TRABALHO Nº 1

1 - Introdução

O trabalho experimental a seguir considerado refere-se a uma estrutura constituída por uma viga de secção rectangular encastrada numa extremidade e livre na outra, conforme indicado na Fig.1, e é composto por duas partes:

- 1ª - Cálculo do módulo de elasticidade (E) do material
- 2ª - Cálculo do esforço transversal (V) e do momento flector (M), na viga em determinadas condições de carregamento

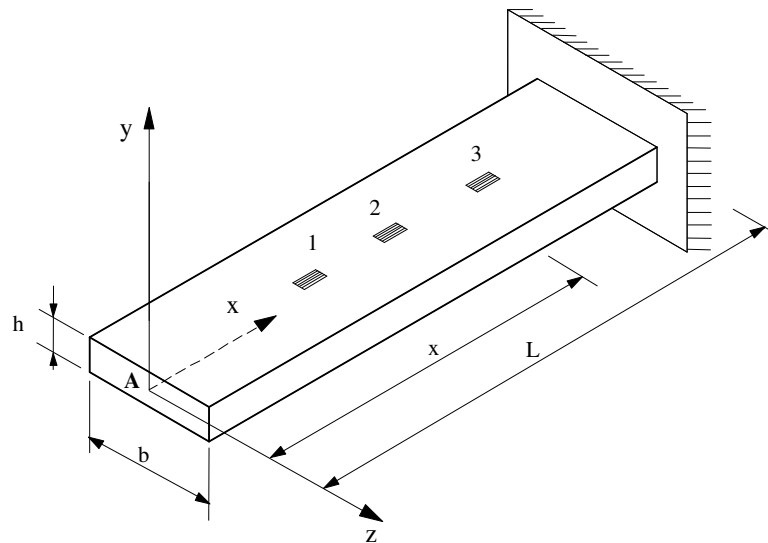


Fig. 1

O conhecimento da distribuição do esforço transversal e do momento flector numa estrutura sujeita à flexão é de grande importância, sobretudo no que diz respeito ao cálculo da distribuição de tensões na estrutura. Consideremos a estrutura anterior solicitada por uma carga vertical na secção A, representada na Fig. 2.

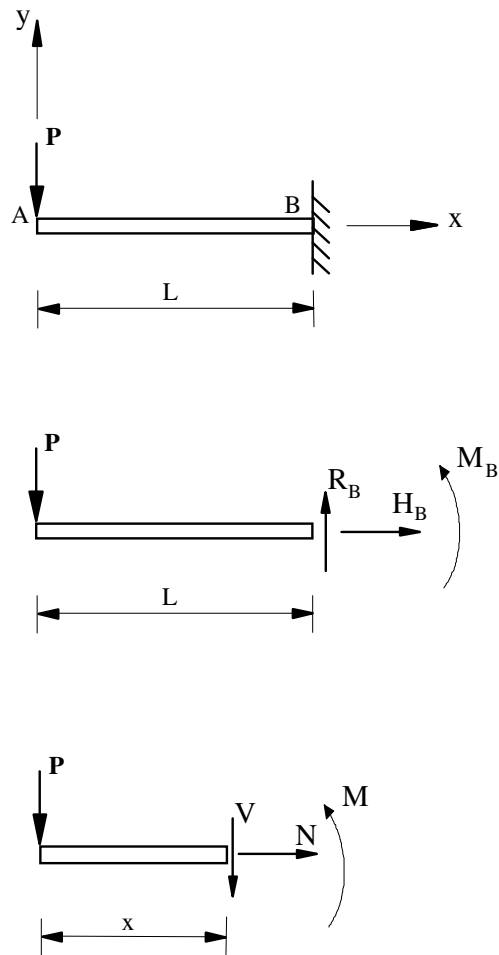


Fig. 2

Das equações de equilíbrio estático e da teoria elementar da flexão de vigas obtém-se

$$R_B = P \quad (1)$$

$$H_B = 0 \quad (2)$$

$$M_B = -PL \quad (3)$$

$$V = \frac{dM}{dx} \quad (4)$$

$$N = 0 \quad (5)$$

$$V = -P \quad (6)$$

$$M = -Px \quad (7)$$

Para qualquer ponto de coordenadas $(x, \frac{h}{2}, z)$ o estado de tensão é uniaxial, com a tensão dada por

$$\sigma_{xx} = -\frac{M(x)h}{2 I_z} = \frac{6 P x}{b h^2} \quad (8)$$

sendo as outras componentes das tensões nulas. Tendo em conta a lei de Hooke tem-se

$$\epsilon_{xx} = \frac{6 P x}{E b h^2} = -\frac{6 M(x)}{E b h^2} \quad (9)$$

Das Eqs. (4) e (9), obtém-se, para vigas de secção rectangular

$$V = -\frac{E b h^2}{6} \frac{d \epsilon_{xx}}{d x} \quad (10)$$

Considere-se que se colocam n extensómetros ao longo da viga e centrados em pontos de coordenadas $(x_i, \frac{h}{2}, 0)$, $i=1, 2, \dots, n$, (ver Fig. 1). Para os pontos entre os extensómetros i e j a Eq. (10) pode ser dada por

$$V_{ij} = -\frac{E b h^2}{6} \frac{\Delta \epsilon_{xx}}{\Delta x} = -\frac{E b h^2}{6} \frac{(\epsilon_{xx})_j - (\epsilon_{xx})_i}{x_j - x_i} \quad (11)$$

2- Procedimento

- i) Anotar as características dos extensómetros
- ii) Medir as grandezas $b, h, x_i, i=1, 2, \dots, n$

- iii) Com a viga descarregada (excepção feita ao peso próprio e ao sistema de carregamento) ajustar o factor de extensómetro na ponte de Wheatstone
- iv) Ligar a ponte de Wheatstone e com a ajuda do potenciómetro de equilíbrio da ponte levar a agulha do mostrador a zero para cada extensómetro
- v) Aplicar sucessivamente várias cargas P_i no ponto A, anotando para cada peso o valor da extensão obtida em cada extensómetro
- vi) Retirar sucessivamente as várias cargas P_i , anotando para cada caso o valor da extensão obtida em cada extensómetro
- vii) Fazer as correcções devido ao efeito transversal se necessário

Determinação do módulo de elasticidade (E) do material

- viii) Para um dos extensómetros, e para cada valor da carga P considerado em v) e em vi) calcular o valor da tensão respectiva de acordo com a Eq. (8)
- ix) Marcar os pontos (σ_{xx}, ϵ) num diagrama $\sigma - \epsilon$
- x) Traçar a recta $\sigma - \epsilon$ utilizando o método dos mínimos quadrados
- xi) Medir o ângulo θ formado pela recta e pelo eixo das abcissas
- xii) Calcular $E = \tan \theta$

Cálculo do esforço transversal (V) e do momento flector (M)

- xiii) Calcular o valor aproximado do esforço transversal entre os extensómetros i e j , $i=1, 2, \dots, n$ e $j=i+1, \dots, n$, utilizando a Eq. (11)
- xiv) Comparar os valores obtidos em xiii) com os valores dados pela Eq. (6)
- xv) Calcular o valor do momento flector para os pontos de coordenadas $(x_i, \frac{h}{2}, 0)$, $i=1, 2, \dots, n$, utilizando a Eq. (9)
- xvi) Comparar os valores obtidos em xv) com os dados pela Eq. (7)

TRABALHO Nº 2

1 - Introdução

O trabalho experimental a seguir considerado refere-se a um pórtico, cujos montantes e travessa são vigas de secção rectangular conforme indicado na Fig.1.

As condições de apoio do pórtico podem ser quaisquer (livre, apoio simples e encastramento). O trabalho consiste em determinar o valor da tensão normal nos pontos onde estão colocados os extensómetros, e compará-los com os valores teóricos.

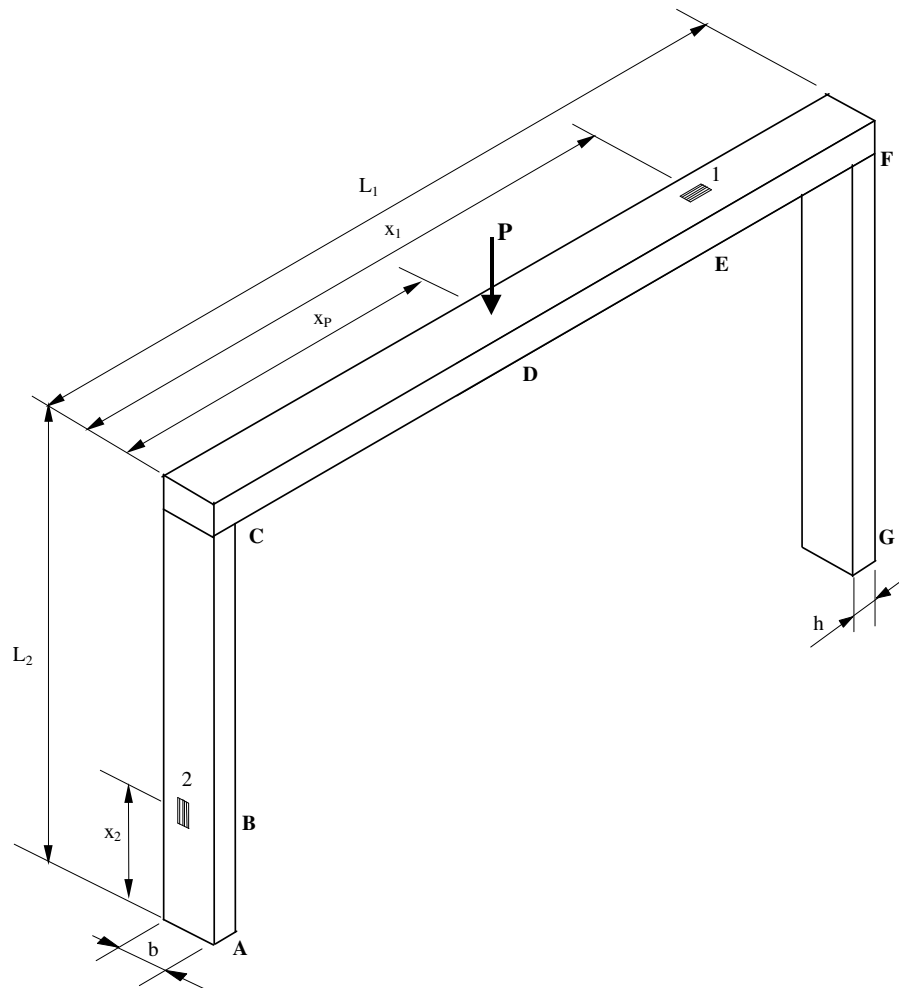


Fig. 1

2- Procedimento

- i) Anotar as características dos extensómetros
- ii) Medir as grandezas que necessárias à resolução do problema (L_1 , L_2 , ...)
- iii) Com a estrutura descarregada (excepção feita ao peso próprio e ao sistema de carregamento) ajustar o factor de extensómetro na ponte de Wheatstone
- iv) Ligar a ponte de Wheatstone e com a ajuda do potenciómetro de equilíbrio da ponte levar a agulha do mostrador a zero para cada extensómetro
- v) Aplicar a carga P no ponto D , anotando o valor da extensão obtida em cada extensómetro
- vi) Fazer as correcções devido ao efeito transversal se necessário
- vii) Para um dos extensómetros, calcular o valor da tensão respectiva recorrendo à lei de Hooke
- viii) Comparar os valores obtidos em vii) com os valores obtidos resolvendo a pórtico teoricamente
- ix) Comentar os resultados

MECÂNICA DOS MATERIAIS II

Extensometria Eléctrica de Resistência – Folha de registos

Trabalho Laboratorial N° 1

		Grupo N°	Data - __/__/__.	Hora - __: __H
		Extensómetro 1	Extensómetro 2	Extensómetro 3
$M_1 =$	Kg			
$M_2 =$	Kg			
$M_3 =$	Kg			
$M_4 =$	Kg			
$M_5 =$	Kg			
$M_6 =$	Kg			
$M_7 =$	Kg			

Outros Dados: $x_1 = 80mm$ $x_2 = 160mm$ $x_3 = 240mm$ $b = 40mm$ $h = 10mm$

Trabalho Laboratorial N° 2

		Extensómetro 1	Extensómetro 2
$M =$	Kg		

Outros Dados: $x_1 = ???mm$ $x_2 = ???mm$ $b = 25mm$ $h = 6mm$