Technická univerzita v Košiciach
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra kybernetiky a umelej inteligencie

Simulačné systémy

(Zadanie č. 2)

2. ročník, Inteligentné systémy
Zimný semester 2009

Michal Puheim

Text zadania

Riešenie Lineárnej Diferenciálnej Rovnice (LDR) 2. a vyššieho rádu s konštantnými koeficientami analyticky a algoritmicky v programovacom jazyku Matlab.

Obsah zadania:

1. Zadaná LDR (2. alebo 3. rádu) s konštantnými koeficientami s Počiatočnými Podmienkami (PP) a Pravou Stranou (PS). (možnosť zmeny koeficientov)

2. Riešenie LDR v časovej oblasti.

3. Riešenie LDR v LT -> prechod do časovej oblasti.

4. Numerické riešenie pomocou programovacieho jazyka Matlab.

Program bude obsahovať analytické riešenie a výsledok numerického riešenia pomocou funkcie ode45, porovnanie obidvoch riešení s vypočítaním chyby (global).

Dodefinovanie zadania

Pre vypracovanie zadania som si vybral diferenciálnu rovnicu

$$y''(t)-7y'(t)+10y(t)=20t^2-28t+14\,,$$

s počiatočnými podmienkami $y'(0)=0, y(0)=0$.

Analýza úlohy

a) Analytické riešenie v časovej oblasti:

Charakteristická rovnica: $r^2-7r+10=0$, kde koreňmi sú $r_1=5$ a $r_2=2$.
Všeobecné homogénne riešenie: $y_h(t)=C_1e^{5t}+C_2e^{2t}$.
Odhad pravej strany: $y_p(t)=K_1t^2+K_1t+K_0$.
Pod dosadení do pôvodnej rovnice:

$$10(K_2t^2+K_1t+K_0)-7(2K_2t+K_1)+2K_2=20t^2-28t+14$$
$$10K_2t^2+10K_1t+10K_0-14K_2t-7K_1+2K_2=20t^2-28t+14$$

$$t^2: 10K_2=20$$
$$t^1: 10K_1-14K_2=-28$$
$$t^0: 10K_0-7K_1+2K_2=14$$

Tvar pravej strany po zistení koeficientov $K_0=1, K_1=0, K_2=2$: $y_p(t)=2t^2+1$.
Zistenie C_1 a C_2 pomocou počiatočných podmienok $y'(0)=0, y(0)=0$:

$$y(t)=C_1e^{5t}+C_2e^{2t}+2t^2+1 \qquad 0=C_1+C_2+1$$
$$y'(t)=5C_1e^{5t}+2C_2e^{2t}+4t \qquad 0=5C_1+2C_2$$
$$C_1=\frac{2}{3} \quad C_2=-\frac{5}{3}$$

Riešenie: $y(t)=\frac{2}{3}e^{5t}-\frac{5}{3}e^{2t}+2t^2+1$

b) Analytické riešenie pomocou Laplaceovej transformácie do s-oblasti:

Rovnica transformovaná do s-oblasti (pre nulové počiatočné podmienky):

$$s^2 Y(s) - 7sY(s) + 10sY(s) = \frac{40}{s^3} - \frac{28}{s^2} + \frac{14}{s}$$

Po niekoľkých úpravách a rozklade na parciálne zlomky dostaneme:

$$Y(s) \; = \; -\frac{5}{3}\frac{1}{s-2} \; + \frac{2}{3}\frac{1}{s-5} \; + \frac{1}{s} \; + 2\frac{2!}{s^3}$$

Riešenie (spätnou transformáciou):

$$y(t) = \frac{2}{3}e^{5t} - \frac{5}{3}e^{2t} + 2t^2 + 1$$

Návrh riešenia

Prepis rovnice do substitučného kanonického tvaru pre numerické riešenie:

$$y(t) = x_1$$
$$y'(t) = x'_1 = x_2$$
$$y''(t) = x'_2 = 7x_2 - 10x_1 + 20t^2 - 28t + 14$$

Pričom posledné dve rovnice využijeme pri numerickom riešení v Matlabe.

Analytické riešenie $y(t) = \frac{2}{3}e^{5t} - \frac{5}{3}e^{2t} + 2t^2 + 1$ použijeme pre porovnanie.

Implementácia riešenia

Program naprogramovaný v prostredí simulačného jazyka MATLAB je zostavený z dvoch súborov – hlavného programu dr2radu.m a funkcie dy.m.

Použité premenné:
T – časový interval,
PP – interval obsahujúci počiatočné podmienky PP(1) a PP(2),
t – vektor času,
y – vektor funkcie *y* určenej numericky pomocou funkcie ode45,
d – vektor funkcie *y* určenej analyticky,
chyba – maximálny rozdiel medzi ekvivalentnými prvkami vektorov y a d,
rozdiel – rozdiel vektorov d a y (po prvkoch).

Popis programu:
Hlavná časť programu zabezpečí načítanie konečného času T(2). Hodnoty ostatných parametrov diferenciálnej rovnice sú pevne určené. Program odovzdá údaje funkcii ode45, ktorá zároveň používa funkciu dy.m, kde je rovnica zapísaná pomocou substitučného kanonického tvaru. Funkcia ode45 numerickým výpočtom určí vektor t (na intervale T(1) až T(2)) a k nemu ekvivalentné hodnoty funkcie y. Následne vypočíta funkciu d, čo je ekvivalentná funkcia k y, len je vypočítaná pomocou analyticky zisteného predpisu. Program vyráta chybu a vykreslí priebehy funkcií y a d.

Zdrojový kód dr2radu.m

```
%  Program pre riesenie LDR II. radu.
%  (d2y/dt^2)-7*(dy/dt)+10*y=20*(t^2)-28*t+14
%  Casovy interval [T1..T2] je urceny uzivatelom.

%  Urcenie casoveho intervalu
T(2)=input('Zadaj konecnu hodnotu casoveho intervalu:');
T(1)=0;
%  Urcenie pociatocnych podmienok
PP(2)=0;
PP(1)=0;
%  Kontrolny vypis
fprintf('Pocitam diferencialnu rovnicu (d2y/dt^2)-7*(dy/dt)+10*y=20*(t^2)-28*t+14,\n')
fprintf('na casovom intervale t=[%d..%d], pre pociatocne podmienky t=0, y(t)=0,
dy(t)/dt=0.\n',T(1),T(2))

%  Riesenie pomocou funkcie ode45
[t,y]=ode45('dy',T,PP);
%  Analyticke riesenie
d=(2/3).*exp(5.*t)-(5/3).*exp(2.*t)+2.*(t.^2)+1;

%  Odhad chyby
rozdiel=abs(d-y(:,1));   %vektor rozdielov funkcii v danom case
chyba=max(rozdiel);      %najvacsia odchylka numerickeho a analytickeho riesenia
fprintf('Maximalna odchylka = %f\n',chyba)

%  Vykreslenie vyriesenych priebehov:
subplot(3,1,1)
plot(t,y(:,1))
title('Numericke riesenie y(t)'), xlabel('t'),ylabel('yn(t)')
subplot(3,1,2)
plot(t,d,'g--')
title('Analyticke riesenie y(t)'), xlabel('t'),ylabel('ya(t)')
subplot(3,1,3)
plot(t,y(:,1),t,d,'g--')
title('Obe riesenia y(t)'), xlabel('t'),ylabel('yn(t),ya(t)')
return
```

Zdrojový kód dy.m

```
function xder=dy(t,x)
%  Zapis danej DR II. radu na dve DR I. radu.
xder=[x(2);7.*x(2)-10.*x(1)+20.*(t^2)-28.*t+14];
return
```

Príloha: Model v Simulinku