Pràctica 3: Interpolació polinòmica i aplicacions

Marc Puig Creixell

1 Exercicis 3 i 4: Interpolació

1.1 Exercici 3: Fenòmen de Runge

L'exercici 3 es basava en observar el fenòmen de Runge. En concret a la funció:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

El fenòmen de Runge fa referència a un problema que s'esdevé en els casos d'interpolació polinòmica de funcions amb nodes equidistants. El problema en qüestió és el fet que el polinomi interpolador oscil·la exageradament, donant casos d'error molt elevat en els intervals entre punt i punt. En aquest cas, els resultats del polinomi interpolador amb 10 i 30 punts son els següents:

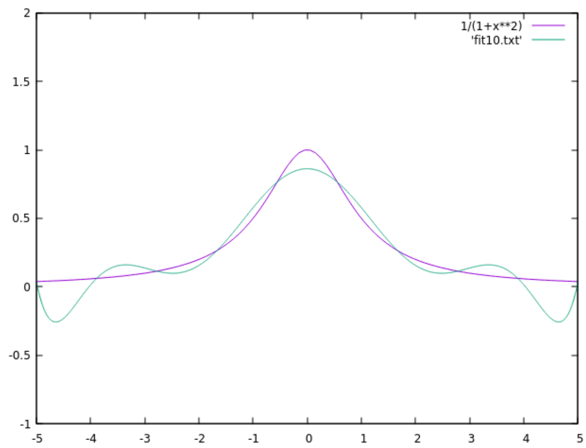

Figure 1: Comparació polinomi d'interpolació de 10 nodes amb $f(x)$

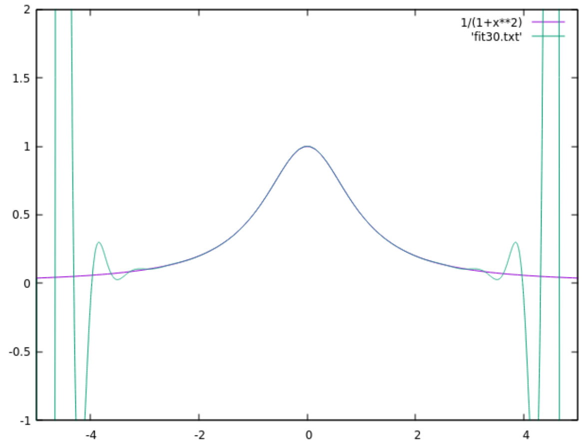

Figure 2: Comparació polinomi d'interpolació de 30 nodes amb $f(x)$

1.2 Exercici 4: Abcisses de Txebitxev

Una de les possibles solucions al fenòmen de Runge és l'ús de les abcisses de Txebitxev. Es tracta d'interpolar el polinomi no amb nodes equiespaiats sinó en nodes de la forma:

$$x_j = 5\cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2(n+1)}\right), \qquad 0 \leq j \leq n$$

D'aquesta manera el fenòmen de Runge queda bastant reduit. Aquí en tenim un exemple, comparant la interpolació en 30 punts equiespaiats i amb 30 abcisses de Txebitxev. Es pot observar que les oscil·lacions pel fenòmen de Runge queden fortament reduides, tot i que a l'inici també hi hagi una pertorbació.

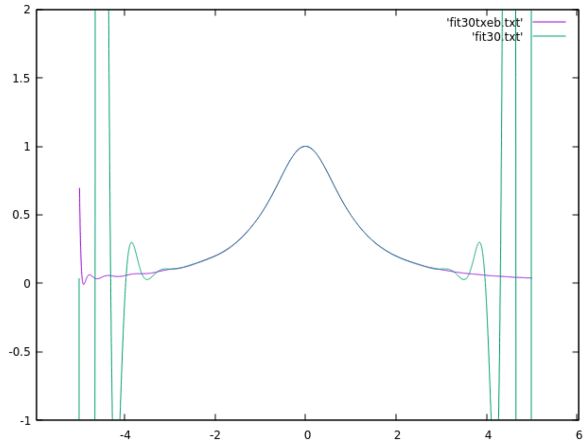

Figure 3: Comparació d'interpolació amb nodes equiespaiats i de Txebitxev

2 Exercici 6: Integració

2.1 Exercici 6: Càlcul d'integrals definides

En aquest exercici cal fer una taula de valors de la funció:

$$f(x) = \int_0^x g(\theta) d\theta, \qquad g(\theta) = e^{\sin(\theta)}$$

Per fer-ho cal utilitzar el mètode dels trapezis, amb un error menor a 10^{-8}. Sabem per teoria que l'error del mètode dels trapezis és:

$$|R_T| = \left| \frac{(a-b)}{12} h^2 g''(\eta) \right| = \left| \frac{(a-b)^3}{12n^2} g''(\eta) \right| = \frac{j^3 \cdot \pi^3}{12 \cdot 10^3 \cdot n^2} |g''(\eta)|$$

Per tant ens cal fitar $g''(\theta)$:

$$g'(\theta) = \cos\theta \cdot e^{\sin\theta}$$

$$g''(\theta) = (cos^2\theta - sin\theta) \cdot e^{\sin\theta}$$

Aleshores,com que $|\cos^2\theta - \sin\theta| \leq 1$ i $|e^{\sin\theta}| \leq e$ tenim que $|g''(\theta)| \leq e$ Aleshores, tornant a la fòrmula inicial:

$$|R_T| = \frac{j^3 \cdot \pi^3}{12 \cdot 10^3 \cdot n^2} |g''(\eta)| \leq \frac{j^3 \pi^3 e}{12 \cdot 10^3 \cdot n^2}$$

I imposant que volem que aquesta expressió sigui $\leq 10^{-8}$:

$$\frac{j^3 \pi^3 e}{12 \cdot 10^3 \cdot n^2} \leq 10^{-8}$$

$$n^2 \geq \frac{j^3\pi^3 e}{12 \cdot 10^{-5}}$$

I per tant:

$$n \geq \sqrt{\frac{j^3\pi^3 e}{12 \cdot 10^{-5}}}$$