MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques. Curs 2022-23. Semestre de tardor

Pràctica 2: Àlgebra Lineal Numèrica

L'objectiu d'aquesta pràctica és resoldre sistemes lineals usant factorització LU amb pivotatge maximal per columnes. En el cas d'haver de llegir una matriu $n \times m$ d'un fitxer (com a l'apartat 4), haurà de tenir el format

```
n m
a11 a12 ... a1m
a21 a22 ... a2m
...
an1 an2 ... anm
```

Podeu veure alguns exemples en el campus virtual.

1.- Escriviu en un fitxer de nom **triU.c** una funció:

```
void triU(double **U, double *b, int n)
```

que resol un sistema triangular superior de dimensió `n` amb matriu `U` i terme independent `b`. A la sortida `b` contindrà la solució del sistema. La matriu `U` no es modificarà.

Nota: A la entrada la matriu `U` pot tenir tots els elements no nuls. Només es considerarà la part triangular superior per a resoldre el sistema.

2.- Escriviu en un fitxer de nom **triL.c** una funció:

```
void triL(double **L, double *b, int n)
```

que resol un sistema triangular inferior amb 1's a la diagonal de dimensió `n` amb matriu `L` i terme independent `b`. A la sortida `b` contindrà la solució del sistema. La matriu `L` no es modificarà.

Nota: A l'entrada, la matriu `L` pot tenir tots els elements no nuls. Només es considerarà la part triangular inferior estricte per a resoldre el sistema.

3.- Escriviu en el fitxer **flud.c** una funció

```
int flud(double **a, int *p, int n, double tol, double *det)
```

que calculi la factorització $PA = LU$ o $A = LU$ i $\det A$ d'una matriu A de dimensió $n \times n$ usant eliminació gaussiana amb pivotatge maximal per columnes o eliminació gaussiana sense pivotatge. Els paràmetres són:

- `a` Matriu $n \times n$, coneguda a l'entrada. A la sortida, contindrà els elements essencials de la factorització LU: part de sota la diagonal de L (multiplicadors) i elements de U.
- `p` Si a l'entrada és el punter NULL, la funció calcularà la descomposició LU de la matriu sense pivotatge. En cas contrari, a la sortida `p` contindrà la permutació de files de A: $\forall i = 0, 1, \ldots, n-1$, la fila `i` de PA és la fila `p[i]` de A.
- `n` Dimensió de la matriu.
- `tol` Tolerància per a decidir si un pivot és zero o no.
- `det` A la sortida contindrà el determinant de la matriu, si s'ha pogut calcular.

Com a valor de la funció es retorna 1, si s'ha pogut fer la factorització i 0 en cas contrari.

4.- Escriviu en un fitxer de nom **resolLU1.c** una funció `main` per llegir de fitxer la matriu A $n \times n$ dels sistemes lineals i una altra matriu B $n \times m$ de termes independents, i que usant les funcions anteriors escrigui la matriu solució X $n \times m$, el determinant de la matriu A, i a més que calculi $\|A\|_\infty$ i $\|X\|_\infty$.

5.- Aplicacions:

1. Considerem la matriu $n \times n$ depenent d'un paràmetre $A_\lambda = A_0 + \lambda I$, on A_0 és una matriu que té els elements de la diagonal iguals a 0 i la resta d'elements igual a -1, i $\lambda \in [5-\epsilon, 5+\epsilon]$. Fent una modificació de la funció anterior (que escriureu al fitxer **resolLU2.c**), determineu per a quins valors de λ es pot fer la descomposició LU sense pivotatge i per quins valors no es pot fer. Contesteu a la mateixa pregunta per a la descomposició LU amb pivotatge. Feu-ho per als valors $n = 6, 7, 8 \ldots,$. Proveu-ho per diversos valors de ϵ i la tolerància. Per exemple podeu agafar $\epsilon = 10^{-5}$, una tolerància de 10^{-12}, i provar-ho per 10^5 valors diferents de λ en l'interval $[5-\epsilon, 5+\epsilon]$. Expliqueu i comenteu els resultats.

2. Considerem la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & (\sqrt{2})^2 & \cdots & (\sqrt{2})^{n-1} \\ 1 & \sqrt{3} & (\sqrt{3})^2 & \cdots & (\sqrt{3})^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \sqrt{n+1} & (\sqrt{n+1})^2 & \cdots & (\sqrt{n+1})^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Modificant la funció `main` (que escriureu al fitxer **resolLU3.c**), calculeu $\kappa_\infty(A) = \|A\|_\infty \cdot \|A^{-1}\|_\infty$ i $\det A$, per $n = 3, 4, \ldots, 10, \ldots$. Comenteu els resultats.

Per entregar (al Campus Virtual, abans del 6 de novembre a les 23:59):

- Creeu un directori anomenat **CognomNom-P2** i poseu-hi els fitxers corresponents a aquesta pràctica.
- Creeu un fitxer .c per a cadascun dels apartats amb el nom indicat.
- Escriviu els comentaris de l'apartat 5 en un fitxer diferent.
- Poseu Nom i Cognoms com a comentari d'inici a cadascun dels fitxers.
- Useu notació científica per a escriure els valors reals.
- Entregueu un zip amb tot el directori. El nom del zip ha de ser de la forma **Cognom-Nom-P2.zip**