L'Hopital: Difusion en un Reactor Tubular

Carolina Ortiz y Maria Paz Urdaneta

Abril 2015

1. Planteamiento del problema

Un fluído newtoniano se mueve dentro de un reactor químico tubular con flujo laminar, de la siguiente manera:

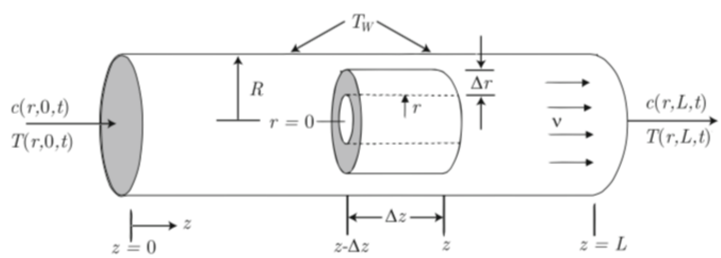

Figura 1: Reactor Tubular

En dos dimensiones el problema del reactor se puede plantear con sus respectivos balances de masa y energía, incluyendo convección, difusión y una reacción química. Se puede expresar de la siguiente manera

$$c_t = -v(r)c_z + D(c_{zz} + c_{rr} + \frac{1}{r}c_r) - r(c,T)$$
$$T_t = -v(r)T_z + \frac{\lambda}{\rho c_p}(T_{zz} + T_{rr} + \frac{1}{r}T_r) + \frac{-\Delta H}{\rho c_p}r(c,T)$$

Con las siguientes condiciones iniciales:

$$T_r(0,z,t) = 0$$
$$c_r(0,z,t) = 0$$
$$v(r) = v_{max}(1 - (\frac{r}{R})^2)$$

Lo que se busca es demostrar que al usar la regla de l'Hôpital, para $r = 0$, es decir, en el centro del tubo se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$c_t = -vc_z + D(c_{zz} + 2c_{rr}) - r(c,T)$$
$$T_t = -vT_z + \frac{\lambda}{\rho c_p}(T_{zz} + 2T_{rr}) + \frac{-\Delta H}{\rho c_p} r(c,T)$$

2. Solucion del problema

Utilizado el limite de r cuando tiende a cero, se reducen las ecuaciones a la siguiente forma:

$$\lim_{x\to 0} c_t = \lim_{x\to 0} -v(0)c_z + D(\lim_{x\to 0} c_{zz} + \lim_{x\to 0} c_{rr} + \lim_{x\to 0} \frac{1}{r} c_r) - \lim_{x\to 0} r(c,T)$$
$$\lim_{x\to 0} T_t = \lim_{x\to 0} -v(0)T_z + \frac{\lambda}{\rho c_p}(\lim_{x\to 0} T_{zz} + \lim_{x\to 0} T_{rr} + \lim_{x\to 0} \frac{1}{r} T_r) + \lim_{x\to 0} \frac{-\Delta H}{\rho c_p} r(c,T)$$

Remplazando las condiciones inciales se obtiene:

$$c_t = -c_z + D(c_{zz} + c_{rr} + \frac{0}{0}) - r(c,T)$$
$$T_t = -T_z + \frac{\lambda}{\rho c_p}(T_{zz} + T_{rr} + \frac{0}{0}) + \frac{-\Delta H}{\rho c_p} r(c,T)$$

Como hay lugares en los cuales hay divisiones de ceros entre ceros, es necesario aplicar la ley de L'Hopital. La ley de L'Hopital se basa en derivar arriba y abajo del fraccionario que tiene el problema de division entre ceros en este caso. Por tal motivo se obtiene el siguiente resultado:

$$c_t = -c_z + D(c_{zz} + c_{rr} + \frac{c_{rr}}{1}) - r(c,T)$$
$$T_t = -T_z + \frac{\lambda}{\rho c_p}(T_{zz} + T_{rr} + \frac{T_{rr}}{1}) + \frac{-\Delta H}{\rho c_p} r(c,T)$$

Lo cual a su vez es igual al resultado esperado:

$$c_t = -vc_z + D(c_{zz} + 2c_{rr}) - r(c,T)$$
$$T_t = -vT_z + \frac{\lambda}{\rho c_p}(T_{zz} + 2T_{rr}) + \frac{-\Delta H}{\rho c_p} r(c,T)$$