Mathematik in der 9. Jahrgangsstufe

Gymnasium Bayern

Martin Putzlocher

26. März 2017

Mathematik in der 9. Jahrgangsstufe
2017
von Martin Putzlocher, Wiesau
Studienrat am Stiftland-Gymnasium in Tirschenreuth, Bayern

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Dieses elektronische Buch soll Schülerinnen und Schülern in der 9. Jahrgangsstufe des Gymnasiums in Bayern oder Lernenden, die einem vergleichbaren Anforderungsniveau gegenüber stehen, helfen, sich im undurchschaubaren Dickicht mathematischer Ausdrücke zurechtzufinden.

Teil I

Grundwissen im Vorfeld der 9. Jahrgangsstufe

Kapitel 1

Algebra und Analysis bis zur 9. Jahrgangsstufe

Die Neugier steht immer an erster Stelle eines Problems, das gelöst werden will.

Galileo Galiei

Nachfolgend werden alle Rechenregeln und Definitionen algebraischer Strukturen wiedergegeben, die bis zum Beginn der 9. Jahrgangsstufe am Gymnasium in Bayern erlernt werden sollen. Dabei wird darauf geachtet, dass die Notation mit dem heutigen Standard in der Mathematik übereinstimmt.

1.1 Schreibweise

Wird das Rechenzeichen weggelassen, so ist fast immer ein Produkt gemeint.

$$ab = a \cdot b$$

Die einzige Ausnahme bilden gemischte Brüche:

$$a\frac{b}{c} = a + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$$
$$a\frac{b}{c} \neq \frac{ab}{c} = \frac{a \cdot b}{c} = a \cdot \frac{b}{c}$$

1.2 Zahlen

Folgende Zahlenmengen sollten zu Beginn der 9. Jahrgangsstufe vertraut sein:

- $\mathbb{N}$, die *natürlichen* Zahlen. Das sind die Zahlen mit denen man abzählt.
  $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \ldots\}$
  Jede natürliche Zahl n hat einen Nachfolger $n+1$ (Axiom vom *Nachfolger*).
- $\mathbb{N}_0$, die natürlichen Zahlen mit der Zahl 0.
- $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N}$, die *ganzen* Zahlen.

- $\mathbb{Q}$, die *rationalen Zahlen*. Das sind alle Zahlen, die man als Bruch schreiben kann.
  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N} \right\}$

Definition 1 (Teilbarkeit)
Eine ganze Zahl a ist durch eine ganze Zahl b (ohne Rest) *teilbar*, wenn a ein Vielfaches von b ist. Man sagt dann auch, „b teilt a“ oder in Symbolen:

$$b \mid a \Leftrightarrow a = k \cdot b \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

Beispiel
124 ist durch 4 teilbar oder in Zeichen
$4 \mid 124$, da $124 = 31 \cdot 4$.

Definition 2 (teilerfremd)
Zwei ganze Zahlen a und b nennt man *teilerfremd*, wenn es außer der Zahl 1 keine andere Zahl gibt, durch die beide teilbar sind.

Beispiel
23 und 24 sind teilerfremd, da sie außer 1 keine gemeinsamen Teiler besitzen.

Definition 3 (Primzahl)
Primzahlen sind die natürlichen Zahlen, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind.

Folgerung 4
Jede natürliche Zahl lässt sich als Produkt von Primzahlen schreiben. Dieses Produkt nennt man die Primfaktorzerlegung *dieser Zahl.*

Beispiel

$$312 = 3 \cdot 104 = 3 \cdot 2 \cdot 52 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 26 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$$

Definition 5 (Primfaktorzerlegung)
Jede natürliche Zahl, die größer als 1 und selbst keine Primzahl ist, lässt sich als Produkt von mindestens zwei Primzahlen schreiben, die dann als *Primfaktoren* bezeichnet werden.

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots$$

Der Prozess zur Bestimmung dieser Primzahlen nennt man die *Primfaktorzerlegung*. Die leichteste Methode hierfür ist die Probedivision. Dabei prüft man, ausgehend von der 2, der Reihe nach, welche Primzahl die zu zerlegende Zahl ohne Rest teilt. Hat man einen solchen Teiler gefunden, führt man die Division aus und wiederholt das Verfahren am Ergebnis der Division. Prüft man hierbei einen möglichen Teiler, der bereits größer als die Quadratwurzel der zu untersuchenden

Zahl ist, kann man das Verfahren abbrechen: Die Zahl ist dann selbst eine Primzahl.

Beispiel
Primfaktorzerlegung der Zahl 315

$$
\begin{array}{ll}
2 \nmid 315 & \\
3 \mid 315 & 315 \div 3 = 105 \\
3 \mid 105 & 105 \div 3 = 35 \\
3 \nmid 35 & \\
5 \mid 35 & 35 \div 5 = 7 \\
7 \text{ ist prim} & \\
\hline
315 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 &
\end{array}
$$

1.3 Größen

Definition 6 (Größe)
Eine *Größe* ist ein Ergebnis einer Messung anhand einer Skala mit vorher festgelegter Einheit. Die Angabe einer Größe besteht immer aus der Angabe des Zahlenwerts *und* der Einheit. Der Wert gibt an, wie oft die Einheit in den Messwert hineinpasst.

$$\text{Größe} = \text{Wert} \cdot \text{Einheit}$$

In allen Wissenschaften werden Größen mit *Größensymbolen* abgekürzt, die wie Variablen behandelt werden können.

Achte darauf, Größensymbole und Einheiten nicht zu verwechseln!

Beispiel (Größen)
Angaben von Größen sind:

$$
\begin{aligned}
l &= 3\,\mathrm{m} && \text{Länge}\\
\vartheta &= 21\,^\circ\mathrm{C} && \text{Temperatur}\\
I &= 2{,}4\,\mathrm{A} && \text{Stromstärke}\\
U &= 5\,\mathrm{V} && \text{elektrische Spannung}\\
m &= 79\,\mathrm{kg} && \text{Masse}
\end{aligned}
$$

Stets lässt sich anhand der Einheit ablesen, um welche Art von Größe[1] es sich handelt.

Bemerkung 7 (Messen)
Das Messen einer Größe besteht darin, die Eigenschaft eines Untersuchungsgegenstands mittels eines geeigneten Messinstruments mit der Einheit einer Skala zu vergleichen. Messungen an realen Gegenständen sind

[1] Statt *Art einer Größe* spricht man auch von ihrer *Dimension*.

immer mit einer Ungenäugikeit – dem *Fehler* der Messung – behaftet. *Fehler* bedeutet hier nicht, dass bei der Messung etwas falsch gemacht wurde.

1.4 Relative Anteile

Definition 8 (Anteil, Bruchteil, Verhältnis)
Die drei Begriffe *Anteil*, *Bruchteil* und *Verhältnis* an bzw. zwischen zwei Größen meinen alle das Gleiche: Den Quotienten der beiden Größen. Dabei sind diese Größen stets von der gleichen Art, sind also in der gleichen Einheit angebbar. Rechnet man die Größen in eine gemeinsame Einheit um, so kann man diese kürzen und übrig bleibt ein Zahlenwert, der angibt, wie groß der Anteil der einen an der anderen Größe, dem *Grundwert*, ist.

Beispiel (Anteil)
Sieben von 28 Schülerinnen und Schülern der Klasse 8c sind Brillenträger. Der Anteil der Brillenträger beträgt also:

$$\frac{7}{28} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\,\%$$

Bemerkung 9 (Prozentangaben)
Eine Angabe in Prozent ist *keine* Größe; das Prozentzeichen ist *keine* Einheit. Das Prozentzeichen steht einfach nur für ein Hundertstel.

$$\% = {}^{1}\!/\!{}_{100} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

Der prozentuale Anteil oder *Prozentsatz* p ist der Quotient aus *Prozentwert* P und *Grundwert* G.

$$p = \frac{P}{G}$$

Beispiel (Prozentangabe)
Im Jahr 2016 verdienten Frauen im Schnitt $21\,\%$ weniger als Männer. Der Bruttostundenverdienst von Männern lag bei $20{,}71\,€$.

Der Unterschied im Bruttoverdienst pro Stunde beträgt also $21\,\%$ von $20{,}71\,€$.

$$P = p \cdot G = 21\,\% \cdot 20{,}71\,€ = 0{,}21 \cdot 20{,}71\,€ \approx 4{,}35\,€$$

Im Durchschnitt verdienten also Frauen $4{,}35\,€$ weniger pro Stunde.

Regel 10 (Prozentualer Zuwachs)
Nimmt eine Größe um einen Prozentsatz p zu, so kommt dieser zu den $100\,\%$ des Grundwerts hinzu. Der Prozentwert wird also zum Grundwert addiert.

$$G' = G + P = G + p \cdot G = G \cdot (1 + p)$$

Zinsen auf ein Guthaben sind eine Anwendung des prozentualen Zuwachses. Häufig ist es in Anwendungen so, dass der Wert nach dem prozentualen Zuwachs als neuer Grundwert erneut Zuwachs erhält. (Zinseszins-Effekt)

Beispiel (Zinseszins)
Hans legt bei der Reibeisenbank $1000\,€$ zu $2\,\%$ Zinsen p.a.[2] an. Auf welchen Betrag ist seine Anlage nach vier Jahren angewachsen?

Das Kapital am Anfang wird als K_0 bezeichnet; das Kapital nach dem ersten Jahr mit K_1 und so weiter.

$$\begin{aligned}
K_0 &= 1000\,€ \\
K_1 &= 1000\,€ \cdot (1 + 2\,\%) = K_0 \cdot 1{,}02 \\
K_2 &= K_1 \cdot (1 + 2\,\%) = K_1 \cdot 1{,}02 = K_0 \cdot 1{,}02^2 \\
K_3 &= K_2 \cdot (1 + 2\,\%) = K_2 \cdot 1{,}02 = K_0 \cdot 1{,}02^3
\end{aligned}$$

[2] p.a. steht für lateinisch *per annum*, also *pro Jahr*.

$$K_4 = K_0 \cdot 1{,}02^4 = 1000\,€ \cdot 1{,}02^4 \approx 1082{,}43\,€$$

Hans hat nach vier Jahren $1083{,}43\,€$ auf dem Konto.

Regel 11 (Prozentuale Abnahme)
Nimmt eine Größe um einen Prozentsatz p ab, so muss dieser von den $100\,\%$ des Grundwerts subtrahiert werden. Der Prozentwert wird also vom Grundwert subtrahiert.

$$G' = G - P = G - p \cdot G = G \cdot (1 - p)$$

Beispiel (Prozentuale Abnahme)
Im Jahr 2015 starben in Deutschland bei Unfällen im Straßenverkehr 3459 Personen. Gegenüber dem Vorjahr sank im Jahr 2016 dieser Wert um $7{,}1\,\%$. Wie viele Personen kamen 2016 bei Unfällen im Straßenverkehr ums Leben?

$$3459 \cdot (1 - 7{,}1\,\%) = 3459 \cdot 0{,}929 \approx 3214$$

3214 Personen starben 2016 bei Verkehrsunfällen.

1.5 Grundlagen der Mengenlehre

Definition 12 (Menge)
Eine Menge ist eine Zusammenfassung von verschiedenen Objekten, die durch endlich viele Worte beschrieben werden kann.

Beispiele für Mengen sind die Menge aller roten Automobile, die Menge der Brillenträger einer Schulklasse, die Menge aller scharfen Gewürze in einem Gewürzregal oder auch die Menge aller ganzen Zahlen.

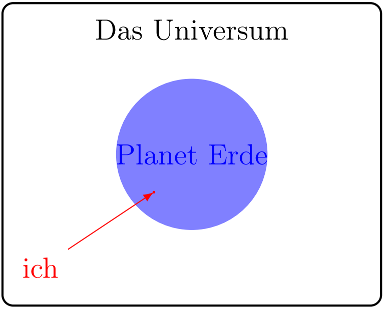
Eine gute Vorstellung von einer Menge ist eine durchsichtige Plastiktüte. Die Menge wird nicht durch das Aussehen der Tüte bestimmt, sondern ausschließlich durch ihren Inhalt.

Diese „Plastiktüte" wird mit geschweiften Klammern (engl.: *curly brackets* oder *braces*) symbolisiert.

Definition 13 (Element)
Die Objekte, die sich in einer Menge befinden, nennt man auch die Elemente der Menge oder ihre Mitglieder.

Ist ein Element a Mitglied in einer Menge A, so sagt man auch „a liegt in A" und schreibt:

$$a \in A$$



ich $\in$ Planet Erde

Abbildung 1.1 Element in einer Menge

Anders herum kann man auch sagen „A enthält a“ und schreibt:

$$A \ni a$$

Ist ein Element b *nicht* in der Menge A enthalten, so gibt es zwei Möglichkeiten dies auszudrücken. Entweder man sagt: „Es gilt nicht, dass b in A enthalten ist.“ $\neg(b \in A)$ oder man formuliert „b ist *kein* Mitglied in A“:

$$b \notin A$$

Beispiel (Mitgliedschaft)
Eine Gruppe von Personen besteht aus Anna, Berta und Clara. Sie bilden eine Menge M.

$$M = \{\text{Anna}, \text{Berta}, \text{Clara}\}$$

Dann gilt:

$$\text{Anna} \in M \qquad\qquad \text{Erik} \notin M$$

Bemerkung 14 (Unterschied Menge - Element)
Zu beachten ist, dass das Objekt x und die Menge mit nur einem Element $\{x\}$ nicht gleichbedeutend sind.

Die Menge $\{x\}$ bildet sich aufgrund einer Einschränkung der Eigenschaften seiner Elemente auf bestimmte Ausprägungen. $\{x\}$ bedeutet also auch, dass alle Elemente mit insoweit gleichen Eigenschaften wie der *Repräsentant* x enthalten sind.

Bemerkung 15 (Unterscheidbarkeit)
Es ist nicht möglich, dass ein Element mehrfach in einer Menge enthalten ist. Die Elemente einer Menge müssen immer unterscheidbar sein. Ein mehrfaches Auftreten des gleichen Elements wird ignoriert. Daher gilt zum Beispiel:

$$\{1; 2; 3; 3; 3; 3; 4\} = \{1; 2; 3; 4\}$$

Bemerkung 16 (Reihenfolge)
In welcher Reihenfolge die Mitglieder einer Menge aufgeschrieben werden, spielt *keine Rolle*. Es geht nur darum, ob ein Element in der Menge enthalten ist, nicht darum, welches zuerst, welches als zweites usw. zur Menge hinzugefügt wurde.

$$\begin{aligned}\{a; b\} &= \{b; a\}\\ \{1; 2; 3\} = \{1; 3; 2\} &= \{2; 3; 1\} = \{2; 1; 3\}\\ &= \{3; 1; 2\} = \{3; 2; 1\}\end{aligned}$$

Will man die Reihenfolge von Elementen berücksichtigen, so handelt es sich nicht um eine Menge, sondern um ein *Tupel*. Tupel schreibt man im Gegensatz zu Mengen mit runden Klammern.

$$(1; 2) \neq (2; 1)$$

Ein Beispiel für ein 2-Tupel ist die Angabe von Koordinaten in einem 2D-Koordinatensystem.

Definition 17 (Leere Menge)
Es gibt nur eine *Leere Menge*. Alle Mengen, die keine Elemente beinhalten sind mit der Leeren Menge identisch. Wären sie nicht identisch, müssten sich die Mengen unterscheiden. Mengen sind aber nur durch ihre Elemente definiert.

Die Menge aller rosafarbenen Einhörner auf der Steinernen Brücke in Regensburg ist eine mögliche Interpretation der Leeren Menge. Anschaulich entspricht die Leere Menge einer leeren Hülle ohne Inhalt.

Die Leere Menge kürzt man entsprechend ab. Es werden aber drei verschiedene Symbole dafür verwendet:

$$\{\} = \emptyset = \varnothing$$

Die Leere Menge ist nicht nichts, sondern eine Menge, wie andere auch. Das Symbol $\varnothing$ darf auch nicht mit der Zahl 0 verwechselt werden. Eine Zahl ist keine Menge. Die Zahl 0 gibt aber die Anzahl der Elemente in der Menge $\varnothing$ an.

Regel 18 (Deskriptive Schreibweise)
Mengen können so viele Mitglieder haben, dass eine aufzählende Schreibweise sehr unhandlich ist.

Dann greift man darauf zurück, ein beliebiges Element aus der Menge zu benennen - den *Repräsentanten* - und dessen Eigenschaften, die seine Mengenzugehörigkeit definieren, anzugeben. Diese Eigenschaften trennt man mit einem senkrechten Strich ab.

$$\{1; 2; 3; 4; \ldots\} = \{n \mid n \geqq 1\}$$

Bei den Eigenschaften können auch mehrere Eigenschaften angegeben werden, die durch „und“ oder „oder“ verknüpft werden. Es ist auch möglich anzugeben, ob eine Eigenschaft nicht erfüllt sein darf. Für diese logischen Verknüpfungen gibt es auch eine eigene Symbolik. Dabei stehen $\wedge$ für „und“, $\vee$ für „oder“ und $\neg$ für „nicht“.

Beispiel (Deskriptive Schreibweise)
Die Menge $\{10; 11; \ldots; 47\}$ kann man auch schreiben als:

$$\{x \mid 10 \leqq x \leqq 47\}$$

Man liest hier: „Die Menge besteht aus allen x mit der Eigenschaft, dass x mindestens den Wert 10 und höchstens den Wert 47 annimmt.“

Oder man löst die doppelte Ungleichung in zwei Ungleichungen auf:

$$\{x \mid x \geqq 10 \wedge \neg(x > 47)\}$$

Beispiel (gerade & ungerade Zahlen)
Die geraden Zahlen sind die Vielfachen von 2. Die Menge der geraden Zahlen ist also:

$$\{x \mid x = 2n \wedge n \in \mathbb{N}\}$$

In Worten: „Die Menge enthält alle Zahlen x, die das Doppelte einer natürlichen Zahl sind.“

Die ungeraden Zaheln hingegen sind genau diejenigen Zahlen, die um 1 kleiner sind, als eine gerade Zahl. Somit lautet die Menge der ungeraden Zahlen:

$$\{x \mid x = 2n - 1 \land n \in \mathbb{N}\}$$

In Worten: „Die Menge enthält alle Zahlen x, die um 1 kleiner als das Doppelte einer natürlichen Zahl sind.“

Definition 19 (Mächtigkeit)
Unter der *Mächtigkeit* einer Menge versteht man die Anzahl ihrer Elemente. Für die Mächtigkeit einer Menge sind zwei Schreibweisen verbreitet: Entweder man schreibt das Symbol der Menge in Betragsstriche oder setzt vor das Mengensymbol das Symbol # (Doppelkreuz oder Raute, engl. „hash“).

Beispiel (Mächtigkeit)
Generell unterscheidet man endliche und unendliche Mengen. Folgende Mengen sind endlich.

$$\begin{aligned} A &= \{1; 2; 3\} & \#A &= 3 \\ B &= \{a; b; c; \ldots; z\} & \#B &= 26 \\ C &= \{x \mid x \in \mathbb{Z} \land -2 \leqq x \leqq 5\} & \#C &= 8 \end{aligned}$$

Regel 20 (Mengendifferenz)
Wenn man aus einer Menge B die Elemente einer anderen Menge A ausschließen möchte, so bildet man die Differenz der Mengen.

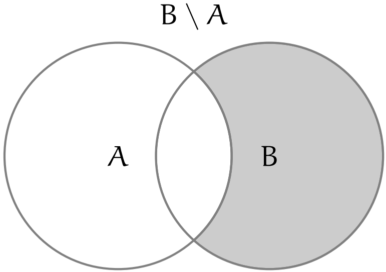


Abbildung 1.2 Differenz zweier Mengen

Die Differenz der Mengen B und A enthält alle Elemente von B, die nicht in A liegen.

$$B \setminus A = \{x \mid x \in B \text{ und } x \notin A\}$$

Definition 21 (Komplement)
Das *Komplement* einer Menge A besteht aus allen Elementen der Grundmenge $\mathcal{G}$ außer denen, die in der Menge A enthalten sind. Es gibt verschiedene

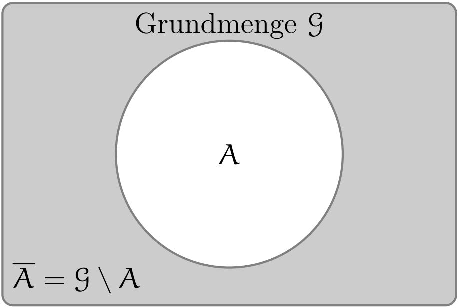


Abbildung 1.3 Komplement der Menge $\mathcal{A}$

Schreibweisen für das Komplement:

$$\overline{\mathcal{A}} = \complement\mathcal{A} = \mathcal{G} \setminus \mathcal{A}$$

Das Komplement einer Menge ist der Teil, der zu dieser Menge ergänzt werden muss, um die Grundmenge zu erhalten.

Folgerung 22
Das Komplement der Grundmenge ist die Leere Menge.

$$\overline{\mathcal{G}} = \{\}$$

Folgerung 23
Das Komplement der Leeren Menge ist die Grundmenge.

$$\overline{\{\}} = \mathcal{G}$$

Folgerung 24
Das Komplement vom Komplement einer Menge ergibt wieder die Menge selbst.

$$\overline{\overline{A}} = \mathcal{G} \setminus (\mathcal{G} \setminus A) = A$$

1.5.1 Teilmenge

Definition 25 (Teilmenge, Obermenge)
Sind alle Elemente einer Menge A in einer zweiten Menge B enthalten, so ist A eine *Teilmenge* von B bzw. B ist eine *Obermenge* von A. Man schreibt:

$$A \subseteq B$$

Wenn die Menge A Teilmenge von B ist, so folgt für jedes Element $x \in A$, dass $x \in B$.

Definition 26 (Echte Teilmenge)
Die Menge A ist eine *echte Teilmenge* von B, wenn für jedes Element $x \in A$ folgt, dass $x \in B$, und es mindestens ein weiteres Element in B gibt, das nicht in

$A \subseteq B$

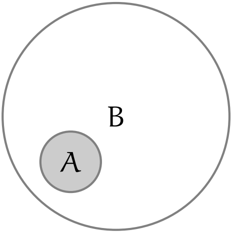


Abbildung 1.4 A ist Teilmenge von B

A enthalten ist. Die Beziehung der echten Teilmenge schreibt man als:

$$A \subset B = A \subsetneq B$$

1.5.2 Schnitt und Vereinigung

Definition 27 (Schnittmenge)
Die *Schnittmenge*, oder kurz der *Schnitt*, der Mengen A und B beinhaltet genau die Elemente, die sowohl in A als auch in B enthalten sind.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

Die Symbole $A \cap B$ spricht man als „A geschnitten mit B“.

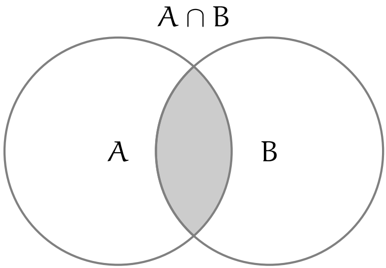


Abbildung 1.5 Schnittmenge von A und B

Definition 28 (Vereinigungsmenge)
Die *Vereinigungsmenge*, oder kurz die *Vereinigung*, der Mengen A und B beinhaltet die Elemente, die in mindestens einer der beiden Mengen, also in A oder B, enthalten sind.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

Die Symbole $A \cup B$ spricht man als „A vereinigt mit B“.

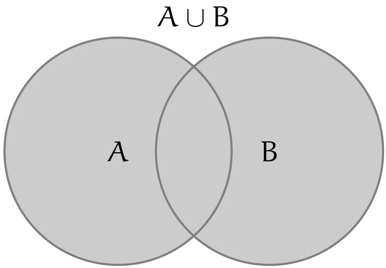


Abbildung 1.6 Vereinigungsmenge von A mit B

1.5.3 Intervall

Definition 29 (Intervall)
Ein *Intervall* ist eine zusammenhängende Menge, die nur durch die Angabe einer unteren und einer oberen Grenze festgelegt wird. Alle Elemente dazwischen sind dann Elemente des Intervalls. Intervalle können nur für Grundmengen angegeben werden, auf denen eine Ordnung – zum Beispiel der Größe nach – existiert. Intervalle werden mit eckigen Klammern geschrieben.

$$[u; o] = \{x \mid u \leqq x \leqq o\}$$

Die Ausrichtung der Klammern hat dabei eine Bedeutung. Zeigt eine Klammer nach außen, dann gehört diese Grenze gerade nicht mehr zum Intervall dazu.

$$[u; o[= \{x \mid u \leqq x < o\}$$
$$]u; o] = \{x \mid u < x \leqq o\}$$
$$]u; o[= \{x \mid u < x < o\}$$

Ein Intervall, dessen beide Grenzen zur Menge dazugehören, nennt man ein *geschlossenes* Intervall. Ein Intervall, bei dem beide Grenzen nicht dazugehören, nennt man *offen.*

Zu jedem Intervall gehört eine (Doppel-)Ungleichung, die jedes Element des Intervalls erfüllt.

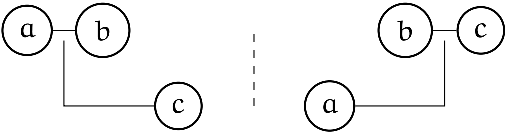
Bemerkung 30 (einseitige Begrenzung)
Auch für den Fall, dass eine Menge nur auf einer Seite beschränkt ist, kann ein Intervall angegeben werden. Dann verwendet man das Symbol ∞ für die andere Grenze.

$$\{x \mid x > 3\} =]3; \infty[$$
$$\{x \mid x \leqq 1\} =]-\infty; 1]$$

∞ ist aber keine Zahl und kann daher nicht in einer Menge enthalten sein. Das bedeutet, dass die eckige Klammer bei ∞ oder $-\infty$ immer nach außen zeigt.

1.6 Grundlegende Rechenregeln

Assoziativgesetz



In Additionen und Multiplikationen ist es erlaubt, die Reihenfolge der Auswertung beliebig zu wählen. In einem Term der gleichen Rechenart können zwei Summanden oder Faktoren beliebig miteinander verbunden werden.

Regel 31
Innerhalb einer Summe aus drei oder mehr Summanden dürfen Klammern beliebig gesetzt und damit die Auswertungsreihenfolge beliebig gewählt werden.

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$$

Regel 32
Innerhalb eines Produkts aus drei oder mehr Faktoren dürfen Klammern beliebig gesetzt und damit die Auswertungsreihenfolge beliebig gewählt werden.

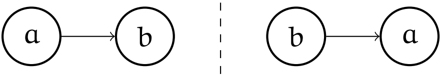
$$a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Achtung! Bei Subtraktionen und Divisionen gilt das Assoziativgesetz nicht.

$$a - b - c \neq a - (b - c)$$
$$a \div b \div c \neq a \div (b \div c)$$

Hier ist das Distributivgesetz anzuwenden.

Kommutativgesetz



In Additionen und Multiplikationen ist es erlaubt, die Reihenfolge der Terme zu verändern bzw. Terme zu vertauschen (*kommutieren*).

Regel 33
Innerhalb einer Summe dürfen die Summanden vertauscht werden.

$$a + b = b + a$$

Regel 34
Innerhalb eines Produkts dürfen die Faktoren vertauscht werden.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Gleichnamige Terme

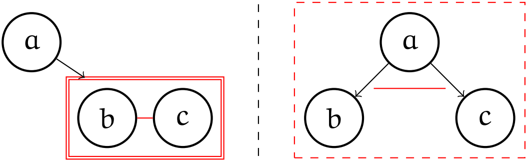
Zwei Pruduktterme sind *gleichnamig*, wenn sie die gleichen Variablen in der gleichen Häufigkeit enthalten. So sind zum Beispiel die Terme $2x$ und $-12x$ gleichnamig; $0{,}1xy^2$ und $0{,}25xy$ hingegen nicht.

Regel 35
Summen aus gleichnamigen Produkttermen lassen sich zu einem Term zusammenfassen.

Beispiel
Potenzen sind nur dann gleichnamig, wenn die Exponenten übereinstimmen

- $2 + 4x - 7 + 12x - 3y = 16x - 3y - 5$
- $x^2 - 2x + 4x^2 = 5x^2 - 2x$
- $x^3 - y^2 + xy - 2x^3 + 2y^2 = -x^3 + y^2 + xy$

Distributivgesetz



Treten Multiplikation und Addition in einem Term auf, so gilt das *Verteilungsgesetz*. (lat. *distribuere* bedeutet so viel wie *verteilen*)

Regel 36
Besteht in einem Produkt ein Faktor aus einer Summe, so ist der Term identisch zur Summe von Produkten.

$$a \cdot (b + c) = ab + ac$$

Durch die Anwendung des Distributivgesetzes lässt sich also ein Produkt in eine Summe verwandeln. Dann spricht man vom *Ausmultiplizieren*.

Aber auch umgekehrt lässt sich so eine Summe in ein Produkt verwandeln, wenn alle Summanden einen gemeinsamen Faktor besitzen.

$$4a + 4b = 4 \cdot (a + b)$$

Dann spricht man vom *Ausklammern* oder *Faktorisieren*.

Aufgaben

Lösungen zu den Grundlegenden Rechengregeln

1. Faktorisiere!

a) $12a + 6b$
b) $19c + 11c$

1.7 Rechnen mit Brüchen

1.7.1 Schreibweisen

Ein Bruch (auch bekannt als Bruchteil, Anteil oder Verhältnis) ist nur eine andere Schreibweise für eine Division.

$$a \div b = \frac{a}{b}$$

Da die Division durch Null nicht definiert ist, darf im Nenner eines Bruchs nie die Null stehen – beliebig kleine Größen hingegen schon.

Der Dividend a wird beim Bruch *Zähler* genannt; der Divisor b wird *Nenner* genannt.

Definition 37 (Stammbruch)
Der *Stammbruch* zu einer Zahl a ist derjenige Bruch mit 1 um Zähler und der Zahl a im Nenner: $\frac{1}{a}$.

Bemerkung 38
Ein Bruch kann stets aufgefasst werden als ein Produkt aus Zähler und Stammbruch des Nenners.

$$a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$$

Umgangssprachlich spricht man statt des Malpunkts auch ein „von“.

$$\frac{1}{b} \cdot a = \frac{1}{b} \text{ von } a$$

Definition 39 (gemischter Bruch)
Ist bei einem Bruch der Zähler größer als der Nenner, so kann der Bruch auch als gemischter Bruch, also als ganze Zahl mit angehängtem Bruchteil geschrieben werden.

$$a = n \cdot b + r$$
$$\frac{a}{b} = \frac{n \cdot b + r}{b} = n + \frac{r}{b} = n\frac{r}{b}$$

In diesem Fall wird auf ein Rechenzeichen zwischen der ganzen Zahl n und dem Bruch $\frac{r}{b}$ verzichtet. Bei dem weggelassenen Rechenzeichen handelt es sich dann aber um ein Plus, nicht um ein Malzeichen.

Beispiel

$$\frac{123}{6} = \frac{120 + 3}{6} = \frac{20 \cdot 6 + 3}{6} = 20\frac{3}{6} = 20\frac{1}{2}$$

Definition 40 (Kehrbruch)
Unter einem *Kehrbruch* versteht man einen Bruch, den man aus einem anderen Bruch bildet, indem man Zähler und Nenner vertauscht.

$$\frac{a}{b} \to \frac{b}{a}$$

Statt vom Bilden des Kehrbruchs spricht man auch vom *Invertieren* eines Bruchs.

Beispiel (Kehrbruch)
Zähler und Nenner wechseln ihre Plätze.

- $\frac{4}{3}$ ist der Kehrbruch zu $\frac{3}{4}$.
- $\frac{1}{2}$ ist der Kehrbruch
  und auch Stammbruch zu 2.
- $\frac{4x+y}{z}$ ist der Kehrbruch zu $\frac{z}{4x+y}$.

1.7.2 Erweitern und Kürzen

Regel 41 (Erweitern)
Erweitern nennt man das Multiplizieren von Zähler und Nenner eines Bruchs mit der gleichen Zahl. Dabei bleibt der Wert des Bruchs erhalten.

$$\frac{a}{b} \quad \to \quad \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{ac}{bc}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$$

Das Erweitern vergrößert die Zahlen in Zähler und Nenner und macht damit den Bruch scheinbar „komplizierter". Das ist aber oft nötig um größere Vereinfachungen zu erreichen.

Beispiel

$$\frac{2}{3} \rightarrow \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}$$

Regel 42 (Kürzen)
Sind Zähler und Nenner Vielfache der Zahl, so können Zähler und Nenner durch diese Zahl dividiert werden, ohne den Wert des Bruchs zu verändern. Diesen Vorgang nennt man Kürzen.

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} \rightarrow \frac{a \cdot \cancel{c}}{b \cdot \cancel{c}} = \frac{a}{b}$$

Das Kürzen ist die gegenteilige Operation zum Erweitern.

Beispiel

$$\frac{86}{24} = \frac{43 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{43}{12}$$

Bemerkung 43
Kürzen ist nur dann möglich, wenn in Zähler und Nenner ein Produkt steht oder Zähler und Nenner als ein Produkt geschrieben werden können. Dazu kann es nötig sein, Summen durch Faktorisieren in Produkte umzuwandeln. Bei Zahlen kann eine Primfaktorzerlegung hilfreich sein.

$$\frac{ab + ac}{ad} = \frac{a(b + c)}{ad} = \frac{b + c}{d}$$

Beispiel

$$\frac{4x + 2}{6} = \frac{2(2x + 1)}{2 \cdot 3} = \frac{2x + 1}{3}$$

Bemerkung 44
Steht im Zähler oder Nenner hingegen eine Addition, so ist das Kürzen nicht möglich. Dies lässt sich kurz in folgendem Merksatz zusammenfassen:

> Aus Differenzen und aus Summen kürzen nur die Dummen.

$$\frac{a + b}{ac} \neq \frac{b}{c} \qquad \frac{a + b}{a + c} \neq \frac{b}{c}$$

1.7.3 Grundrechenarten

Regel 45 (Multiplikation von Brüchen)
Zwei Brüche multipliziert man, in dem man die Zähler und die Nenner jeweils miteinander multipliziert.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Beispiel

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Regel 46 (Division von Brüchen)
Einen Bruch dividiert man durch einen anderen, indem man statt der Division mit dem Kehrbruch des Divisors multipliziert.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Beispiel

$$\frac{1}{2} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

Bemerkung 47 (Doppelbruch)
Da eine Division immer auch als Bruch geschrieben werden kann, ist es möglich, die Division zweier Brüche als Bruch von Brüchen zu schreiben.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

Beachte hierbei, dass der Bruchstrich in der Mitte etwas länger (oder dicker) als die Bruchstriche in Zähler und Nenner ist. Da für die Division das Kommutativgesetz *nicht* gilt, spielt es eine Rolle, welche Division zuerst ausgeführt wird. Man kann sich auch Klammern um die Brüche in Zähler und Nenner schreiben, um die Berechnungsreihenfolge hervorzuheben.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)}$$

Die Berechnung eines Doppelbruchs erfolgt genauso wie die Division zweier Brüche:

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{d}{c}\right) = \frac{ad}{bc}$$

Beispiel

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{2} \div \frac{4}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{8}$$

Beispiel

$$\frac{x}{\frac{7}{5}} = x \div \frac{7}{5} = x \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{7}x$$

Regel 48 (Addition von Brüchen)
Zwei Brüche lassen sich nur addieren, wenn sie den gleichen Nenner besitzen. Dann erhält das Ergebnis denselben Nenner, während die Zähler addiert werden.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Haben die beiden Summanden nicht den gleichen Nenner, sind sie also nicht *gleichnamig*, so müssen sie auf einen *Hauptnenner* erweitert werden. Als Hauptnenner ist immer das Produkt der bisherigen Nenner geeignet.

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{a \cdot d}{c \cdot d} + \frac{b \cdot c}{d \cdot c} = \frac{ad}{cd} + \frac{bc}{cd} = \frac{ad+bc}{cd}$$

Der einfachste Hauptnenner ist das *kleinste gemeinsame Vielfache* (kgV) der bisherigen Nenner.

Beispiel (Addition von Brüchen)
Sind die Nenner nicht gleich, muss zunächst auf den Hauptnenner erweitert werden.

- $\frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{6}{7}$
- $\frac{2}{7} + \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{10}{35} + \frac{21}{35} = \frac{31}{35}$
- $\frac{2}{7} + \frac{16}{21} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 3} + \frac{16}{21} = \frac{6}{21} + \frac{16}{21} = \frac{22}{21} = 1\frac{1}{21}$

1.8 Lineare Terme

Definition 49 (Linearer Term)
Ein Term $T(x)$ heißt *linear*, wenn in ihm nur Summanden ohne Variable oder mit Variable in erster Potenz vorkommen. Ein linearer Term ist zum Beispiel:

$$T(x) = 2x + 4 - 5x + 7$$

Fasst man in einem linearen Term alle gleichnamigen Terme zusammen, so erhält man nur noch zwei Summanden: der erste Summand enthält die Variable x, während der zweite nur aus einer Zahl besteht.

$$T(x) = 2x + 4 - 5x + 7 = -3x + 11$$

Daraus ergibt sich die allgemeine Form für einen linearen Term:

$$T(x) = mx + t$$

1.8.1 Lineare Gleichung

Definition 50 (Lineare Gleichung)
Eine *lineare Gleichung* ist eine Gleichung deren beide Seiten lineare Terme sind.

$$mx + t = nx + s$$

Dabei können die Parameter m, n, t und s auch gleich null sein.

Eine lineare Gleichung hat genau dann eine Lösung, wenn $m \neq n$. Sie hat keine Lösung, bzw. ihre Lösungsmenge ist die Leere Menge, wenn $m = n$.

Regel 51 (Lösen einer lin. Gleichung)
Zu Lösung einer linearen Gleichung bringt man durch *Äquivalenzumformungen* zunächst alle Terme mit der gesuchten Variablen x auf eine Seite der Gleichung und alle Zahlen auf die andere. Dann fasst man die gleichnamigen Terme zusammen und dividert anschließend die Gleichung durch den Vorfaktor von x.

Äquivalenzumformungen sind Rechenoperationen, die man auf beiden Seiten der Gleichung im gleichen Schritt durchführt, ohne dabei die Gleichwertigkeit der beiden Seiten der Gleichung zu stören. Dieser Prozess ist vergleichbar mit dem beidseitigen Hinzufügen oder Entfernen von Gewichten auf einer Balkenwaage.

$$
\begin{aligned}
mx + t &= nx + s && \mid -nx - t \\
mx - nx &= s - t \\
(m-n)x &= s - t && \mid \div (m-n) \\
x &= (s-t) \div (m-n) = \frac{s-t}{m-n} \\
\mathcal{L} &= \left\{ \frac{s-t}{m-n} \right\}
\end{aligned}
$$

Beispiel (Lineare Gleichung)

$$
\begin{aligned}
2x + 5 &= 3x - 7 && \mid -3x - 5 \\
-x &= -12 && \mid \div (-1) \\
x &= 12 \\
\mathcal{L} &= \{12\}
\end{aligned}
$$

Probe:

$$2 \cdot \underline{12} + 5 = 29 = 3 \cdot \underline{12} - 7$$

1.8.2 Proportionalität

Definition 52 (Direkte Proportionalität)
Zwei Größen heißen zueinander *direkt proportional*, wenn ihr *Verhältnis* stets gleich ist. *Verhältnis* ist hier

nur eine andere Bezeichnung für den Quotienten dieser beiden Größen. Man schreibt:

$$\mathsf{x} \propto \mathsf{y} \Leftrightarrow \frac{\mathsf{y}}{\mathsf{x}} = \mathsf{c} = \text{konstant}$$

Die Größe c nennt man dann die *Proportionalitätskonstante*. Das Zeichen $\propto$ liest man hierbei also „ist proportional zu". Das Vorliegen einer direkten Proportionalität erkennt man an der *Quotientengleichheit* der beiden Größen.

Manchmal findet man auch die Schreibweise $\mathsf{x} \sim \mathsf{y}$. „$\sim$" bedeutet aber eigentlich „ist ähnlich zu".

Fasst man das Wertepaar $(\mathsf{x}|\mathsf{y})$ als einen Punkt in einem kartesischen Koordinatensystem auf. So liegen diese Punkte auf einer *Ursprungsgeraden* des Koordinatensystems genau dann, wenn die Größen x und y direkt proportional zueinander sind.

Liegt eine direkte Proportionalität vor, so kann man die Beziehung der beiden Größen stets durch einen je-desto-Satz beschreiben:

> Je größer x, desto größer y.

Das Doppelte (Dreifache, ...) einer Größe hat immer das Doppelte (Dreifache, ...) der anderen Größe zur Folge.

Beispiel (Direkte Proportionalität)
Bewegt sich ein Körper mit der konstanten Geschwindigkeit $v = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$, so sind die vergangene Zeit t und die zurückgelegte Strecke x zueinander direkt proportional. Wertepaare, die dieser Beziehung entsprechen sind:

t in s	0	1	5	7.5
x in m	0	2	10	15

Definition 53 (Indirekte Proportionalität)
Zwei Größen heißen zueinander *indirekt proportional*, wenn ihr Produkt stets den gleichen Wert ergibt. Sie zeichnen sich also durch *Produktgleichheit* aus. Man schreibt:

$$x \propto \frac{1}{y} \Leftrightarrow x \cdot y = c = \text{konstant}$$

Die Größe c nennt man auch hier die *Proportionalitätskonstante*. Die indirekte Proportionalität ist identisch mit der direkten Proportionalität der einen Größe zum Kehrwert der anderen.

Fasst man das Wertepaar $(x|y)$ als einen Punkt in einem kartesischen Koordinatensystem auf. So liegen diese Punkte auf einer *Hyperbel* – einer Kurve, die sich den Achsen des Koordinatensystems beliebig nahe annähert, ohne sie zu schneiden.

Liegt eine indirekte Proportionalität vor, so kann man die Beziehung der beiden Größen stets durch einen je-desto-Satz beschreiben:

Je größer x, desto *kleiner* y.

Das Doppelte (Dreifache, ...) der einen Größe hat immer die Hälfte (das Drittel, ...) der anderen Größe zur Folge.

Beispiel (Indirekte Proportionalität)
Auf einem kleinen Bauernhof reicht das Futter für $e = 24$ Enten genau $t = 10$ Tage lang. Wie lange würde das Futter für 30 Enten ausreichen?

Das Futter reicht für $c = e \cdot t = 240$ Ententage. Das ist hier die Proportionalitätskonstante. Für 30 Enten gilt:

$$\begin{aligned} e \cdot t &= c \\ t &= \frac{c}{e} \\ t &= \frac{240\,\text{Ententage}}{30\,\text{Enten}} = 8\,\text{Tage} \end{aligned}$$

1.9 Funktionen

1.9.1 Funktionsbegriff

Definition 54 (Funktion)
Eine *Funktion* ist eine *eindeutige Zuordnung.*

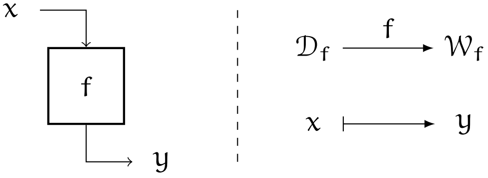


Abbildung 1.7 Symbolische Darstellungen einer Funktion

Eine Funktion f ordnet jedem Element aus der *Definitionsmenge* $\mathcal{D}_f$ ein Element aus der *Wertemenge* $\mathcal{W}_f$ zu. Man sagt auch ein Wert x *wird abgebildet auf* y (in Zeichen: $x \mapsto y$).

Eine Funktion ist durch Angabe des Funktionsterms und der Definitionsmenge vollständig bestimmt. Eine andere Möglichkeit wäre die Angabe aller möglichen Wertepaare $(x; y)$, z.B. in Form einer Tabelle, die durch die Funktion einander zugeordnet werden.

1.9.2 Graph einer Funktion

Definition 55 (Funktionsgraph)
Der Graph $\mathcal{G}_f$ einer Funktion f ist die Menge aller Punkte $P(x|y)$, deren Koordinaten die Gleichung $f(x) = y$ erfüllen. In Zeichen:

$$\mathcal{G}_f = \{P(x|y) \mid x \in \mathcal{D}_f \text{ und } y \in \mathcal{W}_f \text{ und } y = f(x)\}$$

Trägt man alle Punkte, die sich in dieser Menge befinden in ein Koordinatensystem ein, so erhält man den charakteristischen Verlauf – die „Kurve“ – der Funktion f.

Beispiel (Funktionsgraph)
Gegeben ist die Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x$ und der Definitionsmenge $\mathcal{D}_f = [3; 9] \subset \mathbb{Q}$. Dies kann man auch schreiben als:

$$\begin{aligned} f: \qquad x &\mapsto y = \frac{1}{3}x \\ [3; 9] &\to [1; 3] \end{aligned}$$

Dann entspricht der zugehörige Graph folgender Punktemenge.

$$\mathcal{G}_f = \left\{ P(x|y) \mid x \in [3; 9] \text{ und } y = \frac{1}{3}x \right\}$$

Oder dargestellt im Koordinatensystem:

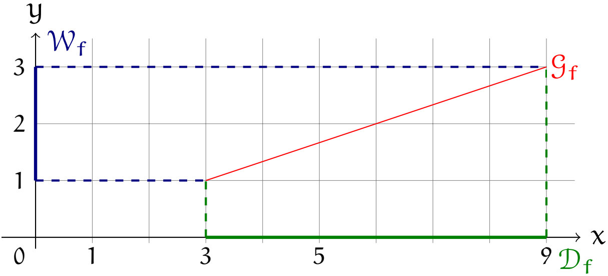


Abbildung 1.8 Graph der Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{3}x$

1.9.3 Lineare Funktion

Bemerkung 56 (Lineare Funktion)
Fasst man einen linearen Term als Funktion $f(x) = mx + t$ auf, so ist der zugehörige Funktionsgraph eine Gerade. Diese Gerade schneidet dann die y-Achse beim Wert t (y-Achsenabschnitt) und hat die *Steigung* m. Eine Steigung m bedeutet, dass bei jeder Änderung von x um $+1$ sich der Wert des Funktionsterms um m verändert.

$$f(x + 1) = m(x + 1) + t = mx + m + t$$

$$= \underbrace{mx + t}_{=f(x)} + m$$

$$f(x+1) = f(x) + m$$

Beispiel
Betrachtet man den linearen Term $f(x) = 4x + 5$, so gilt

$$\begin{aligned} f(0) &= 4 \cdot 0 + 5 = 5 && \text{y-A.-A.} \\ f(x+1) &= 4(x+1) + 5 = f(x) + 4 \\ f(x+1) - f(x) &= 4 && \text{Steigung} \end{aligned}$$

1.10 Potenzgesetze

Eine Potenz ist eine abkürzende Schreibweise für ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren.

$$a^n$$

Der Exponent n gibt an, wie oft die Basis a mit sich selbst multipliziert wird.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-mal}}$$

Die Potenz ist also nur eine abkürzende Schreibweise für eine n-malige Multiplikation.

Regel 57
Multipliziert man zwei Potenzen gleicher Basis, so werden deren Exponenten addiert.

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-mal}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{m\text{-mal}} \\ &= \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n+m\text{-mal}} \\ &= a^{n+m} \end{aligned}$$

Beispiel (Multiplikation von Potenzen)

$$\begin{aligned} 2^3 \cdot 2^4 &= \overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}^{3\text{-mal}} \cdot \overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}^{4\text{-mal}} \\ &= 2^{3+4} = 2^7 \end{aligned}$$

$$12^2 \cdot 12 = 12^2 \cdot 12^1 = 12^{2+1} = 12^3$$

Potenzen mit unterschiedlicher Basis lassen sich so nicht zusammenfassen. Man kann aber versuchen, die gleiche Basis herzustellen.

$$6^4 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^4 \cdot 3^3 = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 3^3 = 2^4 \cdot 3^7$$

Regel 58
Potenziert man eine Potenz, so werden die Exponenten multipliziert.

$$
\begin{aligned}
(a^n)^m &= \overbrace{a^n \cdot a^n \cdots a^n}^{m\text{-mal}} \\
&= \overbrace{\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-mal}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-mal}} \cdots \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\text{-mal}}}^{m\text{-mal}} \\
&= \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \cdot m\text{-mal}} \\
&= a^{n \cdot m}
\end{aligned}
$$

Folgerung 59 (Kommutativgesetz der Exponenten)
Wird eine Potenz potenziert, so können die Exponenten vertauscht werden.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} = a^{m \cdot n} = (a^m)^n$$

Beispiel

$$
\begin{aligned}
\left(3^2\right)^3 &= \overbrace{3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2}^{3\text{-mal}} \\
&= \overbrace{3 \cdot 3 \cdots 3}^{6\text{-mal}} \qquad = 3^{2 \cdot 3} = 3^6
\end{aligned}
$$

Folgerung 60 (Produkte von Potenzen mit gleichen
Werden Potenzen mit gleichem Exponenten miteinander multipliziert, so lassen sie sich zu einer Potenz zusammenfassen. Dabei wird das Kommutativgesetz der Multiplikation angewandt.

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n} = \underbrace{ab \cdot ab \cdots ab}_{n} = (ab)^n$$

Folgerung 61 (Quotienten von Potenzen mit gleich
Werden Potenzen mit gleichem Exponenten dividiert, so lässt sich die Division der Potenzen zu einer Potenz zusammenfassen. Dabei wird die Regel zur Multiplikation von Brüchen angewandt.

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^{n}}{\underbrace{b \cdot b \cdots b}_{n}} = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Definition 62 (Negativer Exponent)
Ist der Exponent (-1), so ist die Potenz identisch mit dem Kehrbruch der Basis.

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

Bemerkung 63
Der Kehrbruch eines Bruchs kann auch als „hoch -1“ geschrieben werden:.

$$\frac{b}{a} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$$

Folgerung 64
Ein negatives Vorzeichen im Exponenten entspricht dem Kehrbruch der Potenz mit positivem Vorzeichen im Exponenten.

$$\begin{aligned} a^{-n} = a^{(-1)\cdot n} &= (a^n)^{-1} = \frac{1}{a^n} \\ &= \left(a^{-1}\right)^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \underbrace{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}\cdots\frac{1}{a}}_{n\text{-}mal} \end{aligned}$$

Regel 65
Dividiert man eine Potenz durch eine andere mit gleicher Basis, so werden die Exponenten subtrahiert.

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{a^m} &= a^n \cdot \frac{1}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} \\ &= a^{n-m} \end{aligned}$$

Beispiel

$$\frac{3^7}{3^5} = 3^7 \cdot 3^{-5} = 3^{7-5} = 3^2 = 9$$

Folgerung 66
Die Division durch eine Potenz mit negativem Exponenten entspricht der Multiplikation mit der Potenz und positivem Exponenten.

$$\begin{aligned} a^n \div a^{-m} &= a^n \cdot a^m = a^{n+m} \\ &= a^{n-(-m)} = a^{n+m} \end{aligned}$$

Beispiel

$$10^3 \div 10^{-4} = 10^3 \cdot 10^4 = 10^{(3+4)} = 10^7$$

Bemerkung 67 (Null als Basis und Exponent)
Beachte: Sobald eine Potenz einen negativen Exponenten besitzt, so darf die Basis nicht null sein!

$$0^n \text{ nicht definiert, wenn } n < 0$$

Ist der Exponent positiv oder null, so darf auch die Basis gleich null sein. Es gilt:

$$0^n = 0 \qquad \text{wenn } n > 0$$

$$0^0 = 1$$
$$a^0 = 1 \qquad \text{wenn } a \in \mathbb{Q}$$

Bemerkung 68 (Einheiten)
Manchmal werden Einheiten vor allem in Texten mit negativen Exponenten geschrieben, wenn diese im Nenner eines Bruchs stehen würden. So findet man statt der Geschwindigkeitsangabe $100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ auch $100\,\mathrm{kmh}^{-1}$ oder für die Erdbeschleunigung $g = 9{,}81\,\mathrm{ms}^{-2}$.

1.11 Bruchterme

Definition 69 (Bruchterm)
Einen Term, bei dem eine der Variablen im Nenner eines Bruchs vorkommt, nennt man einen *Bruchterm*. Bei solchen Termen kann für die Variable(n) im Nenner mindestens ein Wert nicht eingesetzt werden. Die Definitionsmenge des Bruchterms muss daher eingeschränkt werden.

Beispiel (Bruchterm und Definitionsmenge)

$$T(x) = \frac{2}{x-1}$$
$$x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

$$\mathcal{D}_T = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$$

Regel 70 (Bestimmung der Definitionsmenge)
Um die Definitionsmenge eines Bruchterms festlegen zu können betrachtet man nacheinander alle Nennerterme. Bei jedem einzelnen Nennerterm sucht man die Nullstellen, indem man jeden der Nennerterme gleich Null setzt und nach der Variablen auflöst. Die Werte, die man so erhält, schließt man aus der Grundmenge aus und erhält so die Definitionsmenge.

Grundmenge $\mathcal{G}$

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{S(x)}{P(x) \cdot Q(x)} = \frac{S(x)}{P(x)} \cdot \frac{1}{Q(x)} \\ P(x) \neq 0 &\Rightarrow x \neq x_1 \\ Q(x) \neq 0 &\Rightarrow x \neq x_2 \\ \mathcal{D}_T &= \mathcal{G} \setminus \{x_1; x_2\} \end{aligned}$$

Definition 71 (Bruchgleichung)
Eine Gleichung, in der die gesuchte Größe im Nenner eines Bruchs steht, nennt man eine *Bruchgleichung*.

Regel 72 (Lösen von Bruchgleichungen)
Eine Bruchgleichung läst sich am einfachsten dadurch lösen, dass man die komplette Gleichung mit allen Nennern durchmultipliziert, in denen die gesuchte Größe enthalten ist.

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{S(x)} &= \frac{P(x)}{Q(x)} && \mid \cdot S(x) \cdot Q(x) \\ \frac{R(x) \cdot S(x) \cdot Q(x)}{S(x)} &= \frac{P(x) \cdot S(x) \cdot Q(x)}{Q(x)} && \mid \text{Kürzen} \\ R(x)Q(x) &= P(x)S(x) && \mid - P(x)S(x) \\ R(x)Q(x) - P(x)S(x) &= 0 && \mid \dots \end{aligned}$$

Damit erreicht man, dass nur noch auf einer Seite der Gleichung ein Term steht, der von der gesuchten Größe abhängt. Die gesuchte Größe befindet sich dann nicht mehr im Nenner eines Bruchs.

Beispiel (Lösen einer Bruchgleichung)

$$\begin{aligned} \frac{2x}{2x-1} &= \frac{x+1}{x} && \mid \cdot (2x-1) \cdot x \\ \frac{2x \cdot (2x-1) \cdot x}{2x-1} &= \frac{(x+1) \cdot (2x-1) \cdot x}{x} && \mid \text{Kürzen} \\ 2x \cdot x &= (x+1) \cdot (2x-1) && \mid \text{Vereinfachen} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 &= 2x^2 - x + 2x - 1 \\ 2x^2 &= 2x^2 + x - 1 && \mid -(2x^2 + x - 1) \\ -x + 1 &= 0 \\ x &= 1 \\ \mathcal{L} &= \{1\} \end{aligned}$$

Kapitel 2

Geometrie bis zur 9. Jahrgangsstufe

> Denn es ist nicht genug,
> einen guten Kopf zu haben;
> die Hauptsache ist, ihn
> richtig anzuwenden.
>
> *Diskurs über die Methode*
> René Descartes

2.1 Geometrische Grundbegriffe

Definition 73 (Strecke, Strahl, Gerade)
Eine *Strecke* [AB] ist die kürzeste Verbindung der beiden Punkte A und B. Die Strecke ist durch ihre Endpunkte begrenzt. Die Strecke hat keine Breite.

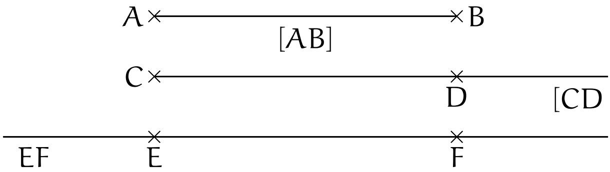


Abbildung 2.1 Strecke, Strahl, Gerade

Eine *Gerade* AB ist der Ort aller Punkte, die in einer Linie mit der Strecke $[AB]$ liegen. Die Gerade ist im Gegensatz zu Strecke nicht begrenzt und daher unendlich lang. Die Gerade hat keine Breite. Zwei voneinander verschiedene Punkte bestimmen stets eine Gerade.

Eine *Halbgerade* oder ein *Strahl* $[AB$ ist der Teil der Geraden AB, der durch den Punkt A, jedoch nicht durch den Punkt B begrenzt ist.

Definition 74 (Winkel)
Ein *Winkel* ist der Teil der Ebene, der von zwei Strahlen, die im gleichen Punkt beginnen, eingeschlossen wird. Diese beiden Strahlen nennt man dann die *Schenkel* des Winkels. Der gemeinsame Startpunkt heißt *Scheitel*.

Als Maßeinheit für Winkel ist das Gradmaß verbreitet: Ein voller Winkel entspricht 360°. Winkel misst man im mathematisch positivem Sinn, also entgegen dem Uhrzeigersinn.

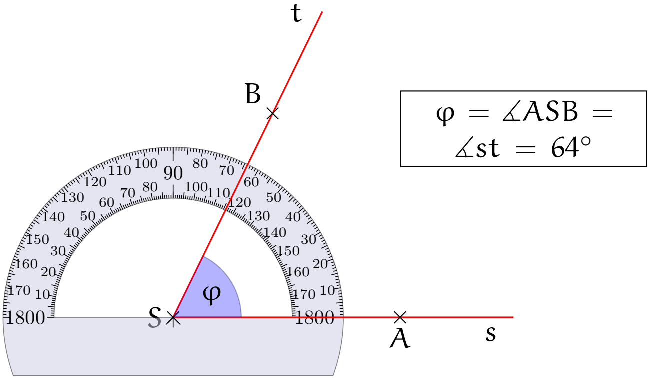


Abbildung 2.2 Winkel

Definition 75 (Nebenwinkel)
Winkel und *Nebenwinkel* ergänzen sich zu 180°.

Definition 76 (Rechter Winkel, orthogonal)
Ein Winkel ist ein *rechter Winkel*, wenn der Winkel gleich seinem Nebenwinkel ist.

Satz 77 (Innenwinkelsumme)
Die Innenwinkelsumme in einem Dreieck ist stets 180°.

2.2 Grundkonstruktionen

Mittelpunkt Winkelhalbierende Rechter Winkel Parallele

2.3 Dreiecksgeometrie

Umkreis Inkreis Satz des Thales

2.4 Strahlensätze

V-Figur X-Figur

2.5 Ähnlichkeit

2.6 Zentrische Streckung

Kapitel 3

Grundwissen Wahrscheinlichkeitsrechnung

Spielen ist Experimentieren mit dem Zufall.

Fragmente
NOVALIS

3.1 Grundbegriffe der Stochastik

Definition 78 (Zufallsexperiment)
Ein *Zufallsexperiment* ist reales, physisches Experiment mit nicht-vorhersagbarem oder bewusst beeinflussbarem Ausgang, das – zumindest im Prinzip – beliebig oft durchgeführt (reproduziert) werden kann.

Beispiel (Zufallsexperimente)
Zufallsexperimente, die Du kennen solltest, sind:

- Werfen einer Münze
- Werfen eines oder mehrerer Würfel
- Verdecktes Ziehen einer Karte aus einem gemischten Stapel
- Ziehen eines Loses aus einer Lostrommel
- Ziehen aus einer *Urne*

Als *Urne* bezeichnet man ein Gefäß, dessen Inhalt von außen nicht erkennbar ist.

Definition 79 (Ergebnis)
Unter einem *Ergebnis* versteht man eine Beschreibung eines möglichen Ausgangs eines Zufallsexperiments. Ergebnisse werden in der Regel mit einem kleinen Omega ω abgekürzt.

Oft ist es zweckmäßig die Ergebnisse abhängig von der Art des Zufallsexperiments zu benennen (z.B. Augenzahl beim Würfeln).

Definition 80 (Ergebnisraum)
Die Menge, die alle möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments enthält nennt man den *Ergebnisraum*. Der Ergebnisraum wird in der Regel mit einem großen Omega Ω abgekürzt.

Für jedes Ergebnis ω eines Zufallsexperiments gilt:

$$\omega \in \Omega$$

Die Mächtigkeit des Ergebnisraums entspricht der Anzahl der möglichen, unterscheidbaren Ergebnisse.

Beispiel (Ergebnisraum)
Ergebnisräume und ihre Mächtigkeiten zu verschiedenen Zufallsexperimenten:

Münzwurf

$$\Omega = \{\text{Kopf}, \text{Zahl}\} \qquad |\Omega| = 2$$

Werfen eines Würfels

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \qquad |\Omega| = 6$$

Zweifacher Münzwurf

$$\Omega = \{(K, K); (K, Z); (Z, K); (Z, Z)\} \qquad |\Omega| = 4$$

Werfen zweier Würfel

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1);(1,2);(1,3);\ldots;(1,6); \\ (2,1);(2,2);(2,3);\ldots;(2,6); \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ (6,1);(6,2);(6,3);\ldots;(6,6) \end{Bmatrix} \qquad |\Omega| = 36$$

Definition 81 (Ereignis)
Ein *Ereignis* A ist eine Teilmenge des Ergebnisraums. D.h. mehrere Ergebnisse eines Zufallsexperiments können zu einem Ereignis zusammengefasst werden. Ereignisse werden normalerweise mit lateinischen Großbuchstaben abgekürzt.

$$A \subset \Omega$$

Beispiel (Ereignis)
Betrachtet wird das Zufallsexperiment „Werfen eines Würfels“. Das Ereignis A trete ein, wenn die Augenzahl des Würfels mindestens 5 beträgt. Dann gilt:

$$A = \{5; 6\} \subset \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = \Omega$$

Definition 82 (Gegenereignis)
Jedes Ereignis A besitzt ein Gegenteil, das *Gegenereignis* $\overline{A}$. Das Gegenereignis ist das *Komplement* der

Menge A über der Grundmenge Ω.

$$\overline{A} = \Omega \setminus A$$

Das Gegenereignis besteht also aus allen Ergebnissen, die nicht im Ereignis enthalten sind.

Beispiel (Gegenereignis)
Betrachtet wird das Zufallsexperiment „Augensumme bei Werfen zweier Würfel“.

$$\Omega = \{2; 3; 4; \ldots; 12\}$$

A: „Augensumme beträgt mindestes 5.“

$$A = \{5; 6; 7; \ldots; 12\}$$

$\overline{A}$: „Augensumme beträgt weniger als 5.“

$$\overline{A} = \Omega \setminus A = \{2; 3; 4\}$$

Regel 83 (Gegenereignis bilden)
Die Beschreibung des Gegenereignisses entsteht durch logische Verneinung der Beschreibung des zugehörigen Ereignisses. Eigentlich würde es also genügen, der Beschreibung ein „nicht“ voran zu stellen.

3.2 Laplace-Wahrscheinlichkeit

3.3 Kombinatorische Grundelemente

Teil II

Mathematik für die 9. Jahrgangsstufe

Kapitel 4

Algebra der 9. Jahrgangsstufe

> Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.
>
> Leopold Kronecker

4.1 Quadratwurzel

Definition 84 (Quadratwurzel)
Die Quadratwurzel aus A, geschrieben als $\sqrt{A}$, ist die Seitenlänge eines Quadrats mit dem Flächeninhalt A.

Somit gilt per Definition:

$$\sqrt{A}^2 = A$$

Da die Seitenlänge eines Quadrats als geometrische Größe stets positiv ist, gilt:

$$\sqrt{A} \geqq 0$$

Das Berechnen einer Wurzel (lat. *radix*) wird auch *Radizieren* genannt. Die Größe, die unter dem Wurzelzeichen steht, nennt man *Radikand*.

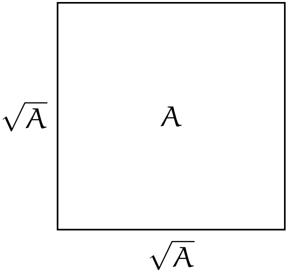


Abbildung 4.1 Definition der Quadratwurzel

Beispiel

- $\sqrt{4} = 2$, da $2^2 = 4$.
- $\sqrt{100} = 10$, da $10^2 = 100$.

- $\sqrt{144} = 12$, da $12^2 = 144$.
- $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$, da $1{,}2^2 = 1{,}44$.

Regel 85 (Quadratwurzel aus 2)
Die Länge der Diagonalen im Quadrat mit Seitenlänge 1 ist $\sqrt{2}$. Dies gilt, da das über einer solchen Diagonalen errichtete Quadrat den Flächeninhalt 2 hat.

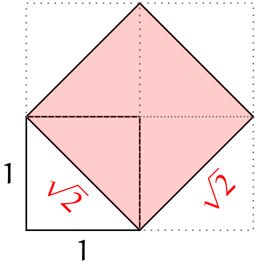


Abbildung 4.2 Definition von $\sqrt{2}$

4.1.1 Reelle Zahlen

86 Satz (Irrationalität von $\sqrt{2}$)

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Die Zahl $\sqrt{2}$ lässt sich nicht als Bruch schreiben und ist daher keine rationale Zahl.

Beweis Angenommen $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Dann lässt sich $\sqrt{2}$ als vollständig gekürzter Bruch schreiben. Das heißt, es gibt einen Bruch $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$, bei dem der Zähler p und der Nenner q teilerfremd sind. Also gibt es keine Zahl, die p und q ohne Rest teilt.

Aus dieser Annahme folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= \sqrt{2} && \cdot q \\
p &= \sqrt{2}q && ()^2 \\
p^2 &= \left(\sqrt{2}q\right)^2 \\
p^2 &= \sqrt{2}^2 q^2 \\
p^2 &= 2q^2
\end{aligned}$$

Also lässt sich p^2 durch 2 teilen. Da p^2 eine Quadratzahl ist, lässt sich p^2 auch durch 4 teilen und somit ist p durch 2 teilbar.

Wenn p durch 2 teilbar ist, so gibt es ein $r \in \mathbb{N}$ mit $r = \frac{p}{2}$ oder $p = 2r$. Also gilt:

$$\begin{aligned} (2r)^2 &= 2q^2 \\ 4r^2 &= 2q^2 && \div 2 \\ 2r^2 &= q^2 \end{aligned}$$

Also lässt sich q^2 durch 2 teilen. Da q^2 eine Quadratzahl ist, lässt sich q^2 auch durch 4 teilen und somit ist q durch 2 teilbar.

Damit lassen sich p und q durch 2 teilen. Das steht im Gegensatz zur Annahme, dass sich $\sqrt{2}$ als vollständig gekürzter Bruch schreiben lässt. Die Annahme muss also verworfen werden. $\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

Definition 87 (Irrationale Zahlen)
Alle (reellen) Zahlen, die sich nicht als Bruch schreiben lassen, nennt man die *irrationalen* Zahlen $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

$$x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{I}$$

Die irrationalen Zahlen lassen sich als unendliche aber nicht periodische Dezimalbrüche darstellen.

Zu den irrationalen Zahlen gehören zum Beispiel $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, e, ...

Definition 88 (Reelle Zahlen)
Die *reellen* Zahlen umfassen die rationalen und die irrationalen Zahlen.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Die reellen Zahlen enthalten alle endlichen und unendlichen Dezimalbrüche.

Die reellen Zahlen umfassen alle bisherigen Zahlenmengen. Es gilt:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \supset \mathbb{I}$$

4.1.2 Näherung irrationaler Zahlen

Definition 89 (Intervallschachtelung)
Eine *Intervallschachtelung* ist eine Folge von Intervallen, wobei das nächste Intervall immer im jeweils vorangehenden enthalten sein muss. Das Prinzip ist ähnlich wie die *Matroschka*-Puppen aus Russland.

„Eine Intervallschachtelung für $\frac{1}{3}$“ bedeutet, dass alle Intervalle $\frac{1}{3}$ enthalten sollen, während ihre Länge

(= Obere Grenze - Untere Grenze) kleiner wird. Eine Intervallschachtelung für $\frac{1}{3}$ ist zum Beispiel:

$$[0; 1]; \left[\frac{1}{6}; \frac{3}{6}\right]; \left[\frac{3}{12}; \frac{5}{12}\right]; \left[\frac{7}{24}; \frac{9}{24}\right]; \ldots$$

oder mit Dezimalbrüchen:

$$[0; 1]; [0{,}1; 0{,}5]; [0{,}2; 0{,}4]; [0{,}3; 0{,}35]; \ldots$$

Es ist nicht unbedingt nötig, bei jeder Verfeinerung (also Verkürzung auf das nächste Intervall) beide Grenzen zu verändern. Eine Intervallschachtelung liegt auch vor, wenn sich nur eine der beiden Grenzen ändert.

Die Aufstellung einer Intervallschachtelung erlaubt es, eine irrationale Zahl ungefähr anzugeben oder sogar ein Verfahren zu entwickeln, dass eine Berechnung der Zahl mit beliebiger Genauigkeit ermöglicht.

Regel 90 (Heron-Verfahren)
Ein Algorithmus zur näherungsweisen Bestimmung einer Quadratwurzel ist das Verfahren nach Heron von Alexandria.

4.1.3 Rechnen mit Quadratwurzeln

Regel 91 (Multiplizieren von Quadratwurzeln)
Multipliziert man zwei Quadratwurzeln entspricht das dem Produkt der Radikanden unter einer gemeinsamen Quadratwurzel.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

Das gilt wegen Folgerung 60, weil:

$$\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \sqrt{a}^2 \cdot \sqrt{b}^2 = a \cdot b = \left(\sqrt{ab}\right)^2$$

Folgerung 92 (Quadratwurzel und Quadrat)
Das Quadrat einer Quadratwurzel ist gleich der Quadratwurzel aus dem Quadrat und das ist der Betrag des Radikanden.

$$\sqrt{a}^2 = \sqrt{a^2} = |a|$$

Quadrat und Wurzel lassen sich also vertauschen. Ist $a \geqq 0$*, so gilt sogar* $\sqrt{a^2} = a$*. Dann kann man davon sprechen, dass sich Quadratwurzel und Quadrat gegenseitig aufheben.*

Regel 93 (Teilweises Radizieren)
Lässt sich der Radikand in ein Produkt aus einem Quadrat und einem weiteren Faktor zerlegen, so kann

ein Teil des Radikanden radiziert – also aus der Wurzel herausgezogen – werden.

$$\sqrt{a^2 \cdot b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = |a| \cdot \sqrt{b}$$

Beispiel

$$\sqrt{28} = \sqrt{4 \cdot 7} = \sqrt{2^2 \cdot 7} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$$

Regel 94 (Dividieren von Quadratwurzeln)
Für die Division von Quadratwurzeln gilt die gleiche Regel wie für die Multiplikation: Dividiert man zwei Quadratwurzeln entspricht das der Quadratwurzel aus dem Quotienten der Radikanden.

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Folgerung 95 (Quadratwurzel aus einer Potenz)
Ist der Exponent einer Potenz, die unter einer Quadratwurzel steht, gerade, so bewirkt das Radizieren, dass der Exponent halbiert wird.

$$\sqrt{a^{2n}} = \sqrt{(a^n)^2} = |a^n|$$

Beispiel

$$\sqrt{2^6} = \sqrt{(2^3)^2} = 2^3$$

Regel 96 (Wurzeln von Wurzeln)
Steht eine Wurzel unter einer Wurzel, so arbeitet man sich von innen nach außen vor.

$$\sqrt{\sqrt{a^4}} = \sqrt{\sqrt{a^{2\cdot 2}}} = \sqrt{\sqrt{(a^2)^2}} = \sqrt{a^2} = |a|$$

Jede der Wurzeln halbiert dabei den Exponenten des Radikanden.

Regel 97 (Addieren von Quadratwurzeln)
Bei der Addition von Quadratwurzeln ist *keine* Vereinfachung möglich!

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$$

4.2 Binomische Formeln

Ein *Binom* ist ein Summenterm, der aus der Summe zweier Größen besteht. Die Binomischen Formeln sind Rechenregeln zur Vereinfachung von Potenzen oder Produkten eines Binoms.

Regel 98 (Plus-Formel)

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)\cdot(a+b) = a^2+ab+ba+b^2\\ (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\end{aligned}$$

Regel 99 (Minus-Formel)

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)\cdot(a-b) = a^2-ab-ba+b^2\\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\end{aligned}$$

Regel 100 (Plus-Minus-Formel)

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2-ab+ba-b^2\\ (a+b)(a-b) &= a^2-b^2\end{aligned}$$

Regel 101 (Allgemeine Binomische Formel)
Untersucht man aufeinander folgende Potenzen des Binoms $(a+b)$, so lässt sich nach dem Ausmultiplizieren und dem Zusammenfassen gleichnamiger Terme ein Muster feststellen.

$$\begin{aligned}(a+b)^0 &= 1\\ (a+b)^1 &= 1a+1b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= 1a^2 + 2ab + 1b^2 \\
(a+b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\
(a+b)^4 &= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4 \\
(a+b)^5 &= 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 \\
&\quad +5ab^4 + 1b^5
\end{aligned}$$

Sortiert man den Summenterm (die rechte Seite) nach der Vielfachheit[1] der vorkommenden Variablen, so stellt man fest, dass der erste Summand die erste Variable in der Potenz des Binoms enthält und der Exponent des letzten Summanden ebenso mit dem Exponenten des Binoms übereinstimmt. Bei allen gemischten Produkttermen[2] in der Summe entspricht die Summe der Exponenten dem Exponenten des Binoms.

Die Zahlen, die hier jeweils an die Terme mit a und b multipliziert werden, nennt man die *Binomialkoeffizienten.*[3]

Das Muster für die gesamten Terme lässt sich durch

[1]Statt von *Vielfachheit* spricht man hier auch von der *Multiplizität.*

[2]Gemeint sind diejenigen Produktterme, die sowohl a als auch b beinhalten

[3]Ein *Koeffizient* ist eine Zahl, die mit einer Variablen multipliziert wird.

die *Allgemeine Binomische Formel* beschreiben.

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots \\ &\qquad \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\end{aligned}$$

Dabei steht die Schreibweise $\binom{n}{k}$ für die *Binomialkoeffizienten*. Diese bestimmt man über folgende Rechenvorschrift:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Die Binomialkoeffizienten findet man in dieser Abfolge auch im *Pascalschen Dreieck* wieder.

Bemerkung 102 (Pascalsches Dreieck)
Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ bilden ein recht einfaches Zahlenschema, das das *Pascalsche Dreieck* genannt wird. In diesem Zahlendreieck nummeriert man die Zeilen von 0 beginnend durch. Ebenso werden in jeder Zeile die Zahlen von 0 beginnend nummeriert. Das k-te Element in der n-ten Zeile entspricht dann dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$.

Zum Beispiel ist das 3. Element in der 5. Zeile die Zahl $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} = 10$.

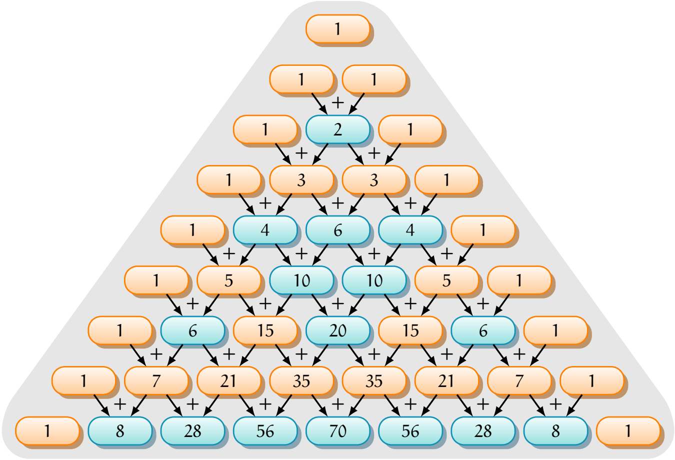


Abbildung 4.3 Pascalsches Dreieck

4.3 Wurzelterme

Definition 103 (Wurzelterm)

Ein Wurzelterm ist ein Term, indem eine Variable oder gesuchte Größe unter einer Wurzel steht.

Regel 104 (Definitionsmenge eines Wurzelterms) Der Radikand einer Wurzel darf nicht negativ sein. Daraus ergeben sich Bedingungen an die Defintionsmenge der Variablen, die unter Wurzeln stehen.

Zur Bestimmung der Definitionsmenge des Terms $T(x) = \sqrt{R(x)}$ muss also die Ungleichung $R(x) \geqq 0$ gelöst werden.

Beispiel (Bestimmung der Definitionsmenge)

$$\begin{aligned} T(x) &= \sqrt{1-x} \\ 1-x &\geqq 0 \\ 1 &\geqq x \\ \mathcal{D}_T &=]-\infty; 1] \end{aligned}$$

Regel 105 (Rationalmachen eines Nenners) Bei einem Term, der nach der gesuchten Größe aufgelöst werden soll, ist einer der nötigen Schritte, Wurzeln aus einem oder mehreren Nennern zu entfernen. Das kann durch geschicktes Erweitern des jeweiligen Bruchs erreicht werden.

Fall 1: Der Nenner eines Terms besteht aus einer Wurzel.

Dann erweitert man den Bruch mit dem Nenner.

$$\frac{a}{\sqrt{R}} = \frac{a \cdot \sqrt{R}}{\sqrt{R} \cdot \sqrt{R}} = \frac{a\sqrt{R}}{R}$$

Fall 2: Im Nenner steht eine Wurzel in einer Summe oder Differenz.

Hier nutzt man die dritte Binomische Formel (Plus-Minus-Formel), um die Wurzel aus dem Nenner zu eliminieren.

$$\frac{a}{b+\sqrt{R}} = \frac{a \cdot \left(b-\sqrt{R}\right)}{\left(b+\sqrt{R}\right) \cdot \left(b-\sqrt{R}\right)} = \frac{a\left(b-\sqrt{R}\right)}{b^2-R}$$

$$\frac{a}{b-\sqrt{R}} = \frac{a \cdot \left(b+\sqrt{R}\right)}{\left(b-\sqrt{R}\right) \cdot \left(b+\sqrt{R}\right)} = \frac{a\left(b+\sqrt{R}\right)}{b^2-R}$$

Nach dem Erweitern ist es meist sinnvoll das Produkt im Zähler so stehen zu lassen und *nicht* auszumultiplizieren.

Beispiel (Rationalmachen des Nenners, Fall 1)

$$\frac{2}{\sqrt{x+1}} = \frac{2\sqrt{x+1}}{x+1}$$

Beispiel (Rationalmachen des Nenners, Fall 2)

$$\begin{aligned}
\frac{2}{x+\sqrt{x+1}} &= \frac{2\cdot\left(x-\sqrt{x+1}\right)}{\left(x+\sqrt{x+1}\right)\cdot\left(x-\sqrt{x+1}\right)} \\
&= \frac{2\left(x-\sqrt{x+1}\right)}{x^2-(x+1)}
\end{aligned}$$

4.4 n-te Wurzel

Definition 106 (n-te Wurzel)
Die Lösungen der Gleichung $x^n = a$ nennt man die n-ten Wurzeln von a. Kurz:

$$\begin{aligned}
x^n &= a \\
x &= (\pm)\sqrt[n]{a}
\end{aligned}$$

Eine negative Lösung tritt dabei nur dann auf, wenn entweder n gerade ist oder n ungerade und a negativ sind. In letzterem Fall gibt es keine positive Lösung. Für gerades n gibt es immer zwei reelle Lösungen, für ungerades n stets nur eine.

Beispiel

$$x^3 = -27$$

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-27} = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^4 &= 81 \\ x &= \pm\sqrt[4]{81} = \pm 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^5 &= 32 \\ x &= \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2 \end{aligned}$$

Regel 107 (Stammbruch als Exponent)
Die n-te Wurzel entspricht der Umkehrung der n-ten Potenz. Es gilt:

$$\sqrt[n]{x^n} = x = x^1 = x^{\frac{n}{n}} = x^{n \cdot \frac{1}{n}} = \left(x^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

Oder allgemeiner für $a \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Die n-te Wurzel ist also nichts anderes als die $\frac{1}{n}$-te Potenz.

Regel 108 (Rationale Exponenten)
Die n-te Wurzel aus der m-ten Potenz kann einfach als eine Potenz geschrieben werden. Sie hat dann den Exponenten $\frac{m}{n}$.

$$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{m \cdot \frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$$

Generell ist dieser Ausdruck nur für $a \geqq 0$ definiert. Ob auch negative Werte für a möglicherweise zugelassen werden können, hängt davon ab, ob m oder n gerade oder ungerade sind.

Bemerkung 109
Auch für rationale Zahlen als Exponent gelten weiter die Potenzgesetze. Also gilt:

$$\begin{aligned}
a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} &= a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+pn}{nq}} \\
a^{\frac{m}{n}} \div a^{\frac{p}{q}} &= a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq-pn}{nq}} \\
\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} &= a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}} \\
a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} &= (ab)^{\frac{m}{n}} \\
a^{\frac{m}{n}} \div b^{\frac{m}{n}} &= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}
\end{aligned}$$

4.5 Quadratische Terme

Definition 110 (Quadratischer Term)
Ein Term $T(x)$ heißt *quadratisch*, wenn in ihm nur Summanden ohne Variable oder mit Variable in erster Potenz oder mit Variable im Quadrat vorkommen. Ein quadratischer Term ist zum Beispiel:

$$T(x) = 2x^2 - 3x + 1 + x^2 + 5x$$

Fasst man in einem quadratischen Term alle gleichnamigen Terme zusammen, so erhält man nur noch drei Summanden: der erste Summand enthält x^2 und danach folgt ein linearer Term.

$$T(x) = 2x^2 - 3x + 1 + x^2 + 5x = 3x^2 + 2x + 1$$

Daraus ergibt sich die allgemeine Form für einen linearen Term:

$$T(x) = ax^2 + bx + c$$

Diese Schreibweise nennt man auch die *Normalform* eines quadratischen Terms.

4.5.1 Quadratische Funktion

Bemerkung 111

Der Graph einer quadratischen Funktion, also einer Funktion mit quadratischem Term, ist eine *Parabel.* Der Funktionsgraph *Parabel* ist eindeutig bestimmt durch den *Scheitelpunkt* und die *Öffnungsweite* und *Öffnungsrichtung.*

Die Parabel, die zum einfachsten quadratischen Term $f(x) = x^2$ gehört, nennt man die *Normalparabel.*

Ist die Funktion in der Form

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

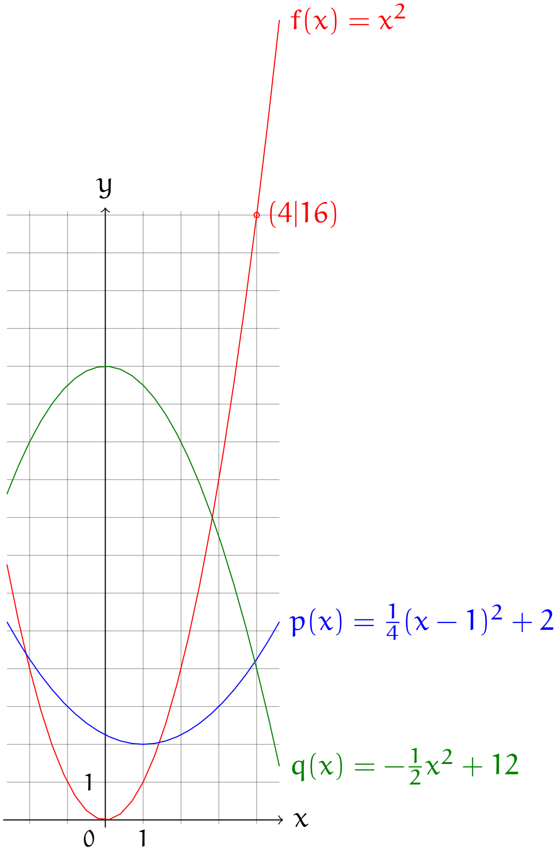


Abbildung 4.4 Parabeln - Graphen quad. Funktionen

gegeben, so kann man anhand des Koeffizienten a Öffnungsweite und Öffnungsrichtung der Parabel ablesen:

- Gilt $|a| > 1$, dann ist die Parabel schmaler als die Normalparabel.
- Gilt $|a| < 1$, dann ist die Parabel weiter als die Normalparabel.
- Gilt $a > 0$, dann ist die Parabel nach oben geöffnet. Der Scheitelpunkt ist der tiefste Punkt (Minimum) der Parabel.
- Gilt $a < 0$, dann ist die Parabel nach unten geöffnet. Der Scheitelpunkt ist der höchste Punkt (Maximum) der Parabel.

Am Parameter c kann man ablesen, bei welchem Wert die y-Achse von der Parabel geschnitten wird, denn $f(0) = c$.

4.5.2 Scheitelpunktsform

Bemerkung 112

Der Scheitelpunkt kann in der Normalform eines quadratischen Terms nicht direkt abgelesen werden. Um das zu erreichen, verwandelt man den Term in die *Scheitelpunktsform* durch die *quadratische Ergänzung*.

Regel 113 (Quadratische Ergänzung)
Bei der Quadratischen Ergänzung versucht man den Term in eine Summe aus einem quadrierten Binom und einer Zahl umzuformen. Dazu wird passend eine *kreative Null* eingefügt. Das bedeutet, dass man eine Zahl addiert und gleich wieder subtrahiert. Dadurch ändert sich der Wert des Terms nicht.

$$
\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \underbrace{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{=0}\right) + c \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c \\
&= a\left(x + \underbrace{\frac{b}{2a}}_{-x_S}\right)^2 + \underbrace{c - \frac{b^2}{4a}}_{y_S} \\
&= a\left(x - x_S\right)^2 + y_S
\end{aligned}
$$

Für die Koordinaten des Scheitelpunkts S gilt also:

$$x_S = -\frac{b}{2a}$$
$$y_S = c - \frac{b^2}{4a}$$

Es gilt $f(x_S) = \underbrace{a\,(x_S - x_S)^2}_{=0} + y_S = y_S$.

Beispiel (Ablesen des Scheitelpunkts)
Der Graph der quadratischen Funktion

$$p(x) = \frac{1}{10}(x \underbrace{+5}_{-x_S})^2 \underbrace{+20}_{y_S}$$

hat seinen Scheitelpunkt bei $S(-5 \mid 20)$.

Beispiel
Gegeben sei $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$.

Umwandlung in die Scheitelpunktsform durch quad. Ergänzung:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^2 - 2x + 5 &= \frac{1}{2}\left(x^2 - 4x\right) + 5\\ &= \frac{1}{2}\left(\underbrace{x^2 - 4x + 2^2}_{\text{binom. Formel}} - 2^2\right) + 5\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left((x-2)^2-4\right)+5 \\
&= \frac{1}{2}(x-2)^2-2+5 \\
&= \frac{1}{2}(x-2)^2+3 \\
x_S &= +2 \\
y_S &= +3
\end{aligned}
$$

Somit liegt hier der Scheitelpunkt bei $S(2|3)$. Die Parabel ist weiter als die Normalparabel und nach oben geöffnet. Sie schneidet die y-Achse bei $y = 5$.

Bemerkung 114 (Nullstellen)
Die Schnittpunkte eines Graphen mit der x-Achse nennt man seine *Nullstellen.* Eine Parabel kann bis zu zwei Nullstellen haben, da quadratische Gleichungen bis zu zwei Lösungen haben können. Die Bestimmung der Nullstellen entspricht der Lösung der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$.

Definition 115
Quadratische Gleichung Eine *quadratische Gleichung* liegt vor, wenn die höchste Potenz einer Variablen in der Gleichung ihr Quadrat ist. Quadratische Gleichungen können mehr als eine Lösung besitzen.

Gleichungen wie

$$
\begin{aligned}
x^2 &= 1 & \mathcal{L} &= \{-1;+1\} \\
(x+1)^2 &= 0 & \mathcal{L} &= \{-1\} \\
x^2 &= -5 & \mathcal{L} &= \{\} \\
2x^2+4x-1 &= 0 & \mathcal{L} &= \left\{-1+\frac{\sqrt{6}}{2};-1-\frac{\sqrt{6}}{2}\right\} \\
(x-1)^2+5 &= 10 & \mathcal{L} &= \left\{1+\sqrt{5};1-\sqrt{5}\right\}
\end{aligned}
$$

sind quadratische Gleichungen.

Regel 116
Befindet sich in einer quadratischen Gleichung auf der einen Seite des Gleichheitszeichens ein Term in Scheitelpunktsform und auf der anderen Seite eine Zahl, so lässt sich diese Gleichung mit wenigen Äquivalenzumformungen lösen.

Zu beachten ist hierbei, dass das Anwenden der Quadratwurzel auf eine Gleichung zur Folge hat, dass in der nächsten Zeile positive und negative Werte möglich sind.

$$
\begin{aligned}
x^2 &= a & &|\sqrt{\dots} \\
\sqrt{x^2} = |x| &= \sqrt{a}
\end{aligned}
$$

$$x = \pm\sqrt{a}$$

Denn:

$$\sqrt{a}^2 = a \qquad\qquad (-\sqrt{a})^2 = a$$

Beispiel (Quadratische Gleichung lösen)

$$\begin{aligned}
4(x-2)^2 + 3 &= 11 && \mid -3 \\
4(x-2)^2 &= 8 && \mid \div 4 \\
(x-2)^2 &= 2 && \mid \sqrt{\dots} \\
x - 2 &= \pm\sqrt{2} && \mid +2 \\
x &= 2 \pm \sqrt{2} \\
\mathcal{L} &= \{2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}\}
\end{aligned}$$

Hier verkompliziert ein Ausmultiplizieren von $(x-2)^2$ eher den Weg zur Lösung der Gleichung.

Doch auch, wenn der quadratische Term *nicht* in der Scheitelpunktsform vorliegt, gibt es eine einfach anwendbare Regel zur Bestimmung der Lösungen. Da diese Regel von so großer Bedeutung für die Lösung von Gleichungen ist, nennt man sie auch die *Mitternachtsformel.* (Wird man mitten in der Nacht geweckt, sollte man diese Formel aufsagen können.)

117 Satz (Mitternachtsformel / Lösungsformel)
Eine quadratische Gleichung der Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

hat die Lösung(en)

$$\boxed{x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

wenn $D = b^2 - 4ac \geqq 0$.

$\boxed{\textit{Beweis}}$ Der Nachweis erfolgt über die quadratische Ergänzung.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

quadratische Ergänzung

$$
\begin{aligned}
a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}&=0\\
a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2&=\frac{b^2}{4a}-c\\
a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2&=\frac{b^2-4ac}{4a}\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2&=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\\
x_{1/2}+\frac{b}{2a}&=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\\
x_{1/2}&=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
x_{1/2}&=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{aligned}
\qquad\square
$$

Regel 118 (Diskriminante)
An der *Diskriminante* $D=b^2-4ac$ kann man ablesen, wie viele Lösungen eine quadratische Gleichung besitzt.

- $D>0$: Die Gleichung hat zwei Lösungen.

- $D = 0$: Die Gleichung hat genau eine Lösung.
- $D < 0$: Die Gleichung ist in den reellen Zahlen nicht lösbar.

4.5.3 Gemeinsame Punkte von Funktionsgraphen

In Anwendungen ist es häufig nötig die Existenz oder die genaue Lage gemeinsamer Punkte von Funktionsgraphen zu bestimmen. Dazu gibt es zwei verschiedene Herangehensweise, die zum gleichen mathematischen Problem führen. Im Folgenden werden diese Strategien anhand der Funktionen $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$ und $f(x) = (x-2)^2 - 1$ vorgestellt.

Der Graph der Funktion $f(x) = (x-2)^2 - 1$ ist die Menge aller Punkte, die die Funktionsgleichung erfüllen. Es gilt:

$$\mathcal{G}_f = \left\{ P(x|y) \mid y = (x-2)^2 - 1 \right\}$$

Gleiches gilt für die Funktion $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

$$\mathcal{G}_g = \left\{ P(x|y) \mid y = \frac{1}{2}x + 1 \right\}$$

Die gemeinsamen Punkte der Funktionsgraphen sind also genau diejenigen, die in diesen beiden Mengen

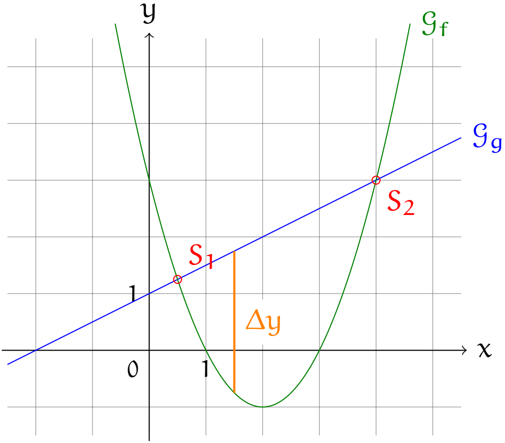


Abbildung 4.5 Schnittpunkte der Geraden $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$ mit der Parabel $f(x) = (x-2)^2 - 1$

enthalten sind. Für einen gemeinsamen Punkt S gilt daher:

$$\mathcal{G}_f \ni S(x|y) \in \mathcal{G}_g$$

Das bedeutet, dass für den gleichen Wert von x beide Funktionsterme den gleichen y-Wert ergeben müssen.

Regel 119 (Gleichsetzen der Funktionsterme)
Bei gemeinsamen Punkten zweier Funktionsgraphen müssen deren Funktionsterme an der jeweiligen Stelle den gleichen Wert ergeben. Um diese Punkte zu bestimmen, genügt es die Funktionterme gleichzusetzen und die Gleichung zu lösen.

Zur Bestimmung gemeinsamer Punkte der Graphen $\mathcal{G}_f$ und $\mathcal{G}_g$:

$$\boxed{f(x) = g(x)}$$

Die Lösungsmenge dieser Gleichung beinhaltet die x-Koordinaten *aller* gemeinsamen Punkte. Die zugehörigen y-Koordinaten werden anschließend durch Auswertung eines der beiden Funktionsterme für die entsprechenden Werte von x bestimmt.

Beispiel
Berechnung der x-Koordinaten der gemeinsamen Punkte:

$$(x-2)^2 - 1 = \frac{1}{2}x + 1$$

$$x^2 - 4x + 4 - 1 = \frac{1}{2}x + 1 \qquad \left| -1 - \frac{1}{2}x \right.$$

$$x^2 - 4{,}5x + 2 = 0$$

Lösungsformel:

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= \frac{4{,}5 \pm \sqrt{4{,}5^2 - 8}}{2} \\ &= \frac{4{,}5 \pm \sqrt{12{,}25}}{2} \\ &= \begin{cases} 4 \\ \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der y-Koordinaten ist es egal, welchen der Funktionsterme man benutzt.

$$\begin{aligned} f(4) &= (4-2)^2 - 1 & g(4) &= \frac{1}{2} \cdot 4 + 1 \\ &= 4 - 1 = 3 & &= 3 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2} - 2\right)^2 - 1 & g\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \\ &= 2\frac{1}{4} - 1 = 1\frac{1}{4} & &= 1\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Beispiel (Parameter bestimmen)
Bestimme die Werte von m, für die die Graphen der Funktionen

$$p(x) = -(x-2)^2 + 1 \qquad \text{und} \qquad g(x) = mx + 1$$

gemeinsame Punkte besitzen.

Die x-Koordinaten der potenziellen Schnittpunkte werden über das Gleichsetzen der Funktionsterme bestimmt:

$$\begin{aligned}
-(x-2)^2+1 &= mx+1 \\
-(x^2-4x+4) &= mx \\
-x^2+4x-mx-4 &= 0 \\
-x^2+(4-m)x-4 &= 0
\end{aligned}$$

Anwenden der Lösungsformel:

$$x_{1/2} = \frac{-(4-m) \pm \sqrt{(4-m)^2-4\cdot 4}}{-2}$$

Die Gleichung hat nur dann Lösungen, wenn die Diskriminante $D=(4-m)^2-16$ größer oder gleich null ist.

$$\begin{aligned}
D=(4-m)^2-16 &\geqslant 0 && \mid +16 \\
(4-m)^2 &\geqslant +16 && \mid \sqrt{\ldots} \\
4-m &\geqslant +4 && \text{oder} \quad 4-m \leqslant -4 \\
-m &\geqslant 0 && \text{oder} \quad -m \leqslant -8 \\
m &\leqslant 0 && \text{oder} \quad m \geqslant 8
\end{aligned}$$

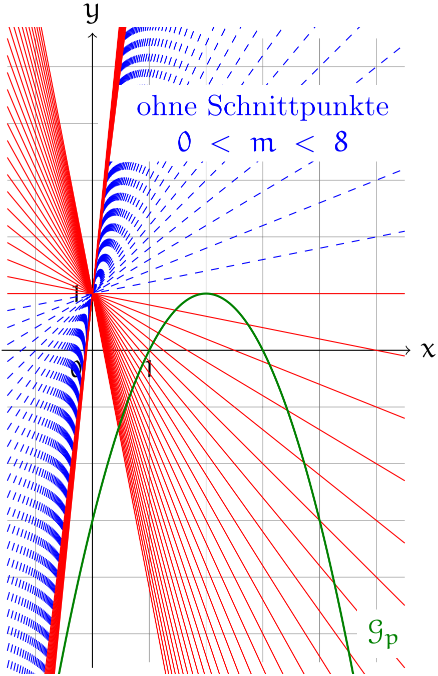


Abbildung 4.6 Schnittpunkte der Geraden aus der Geradenschar $g(x) = mx{+}1$ mit der Parabel $f(x) = -(x{-}2)^2{+}1$

Für alle $m \leqslant 0$ und für alle $m \geqslant 8$ haben die Graphen der beiden Funktionen Schnittpunkte.

Regel 120 (Nullstellen der Differenz)
Eine andere Sichtweise führt ebenso zur Bestimmung der gemeinsamen Punkte: Zu jedem Wert der Variable x liefern beide Funktionsterme einen eigenen Wert y. Wenn sich diese Werte nicht voneinander unterscheiden, wenn also die Differenz Δy der Funktionswerte gleich 0 ist, so handelt es sich um einen gemeinsamen Punkt der Funktionsgraphen.

$$\begin{aligned} \Delta y = y_f - y_g &\stackrel{!}{=} 0 \\ f(x) - g(x) &= 0 \end{aligned}$$

in unserem Beispiel:

$$(x-2)^2 - 1 - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = 0$$

Die weitere Rechnung verläuft dann wie vorher.

Die Bestimmung gemeinsamer Punkte führt nicht nur bei Parabel und Gerade zu einer quadratischen Gleichung. Auch bei Parabel–Parabel, Hyperbel–Gerade und Hyperbel–Hyperbel kann oft dieses Problem darauf zurückgeführt werden, eine quadratische Gleichung lösen zu müssen.

Beispiel
Bestimme die gemeinsamen Punkte der Graphen der Funktionen $f(x) = \frac{4}{x-2} + 1$ und $g(x) = 2x - 1$.

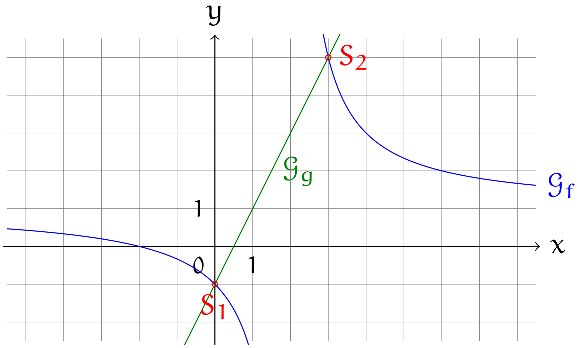


Abbildung 4.7 Gemeinsame Punkte von Gerade $2x - 1$ und Hyperbel $\frac{4}{x-2} + 1$.

Gleichsetzen der Funktionsterme:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \frac{4}{x-2} + 1 &= 2x - 1 && \mid -1 \\ \frac{4}{x-2} &= 2x - 2 && \mid \cdot (x-2) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
4 &= (2x-2)(x-2) \\
4 &= 2x^2 - 4x - 2x + 4 && |-4 \\
0 &= 2x^2 - 6x
\end{aligned}
$$

Faktorisieren:

$$0 = 2x \cdot (x-3)$$

Ein Produkt ist 0, wenn einer der Faktoren 0 ist.

$$x_1 = 0 \qquad\qquad x_2 = +3$$

Darauf folgt die Bestimmung der y-Koordinaten der Schnittpunkte:

$$
\begin{aligned}
g(x_1) &= g(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1 \\
g(x_2) &= g(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5
\end{aligned}
$$

Die Schnittpunkte sind also $S_1(0|-1)$ und $S_2(3|5)$.

Kapitel 5

Geometrie der 9. Jahrgangsstufe

> Wo Materie ist, dort ist auch Geometrie.
>
> ---
>
> *De fundamentis astrologiae certioribus*
> Johannes Kepler

5.1 Satzgruppe des Pythagoras

Pythagoras von Samos wurde um 570 v.Chr. geboren. Nachdem er Ägypten und Babylon bereist hatte, ließ er sich um 530 v.Chr. im Süden des heutigen Italien nieder und gründete dort einen Orden. Ziel des

Ordens der *Pythagoreer* war vor allem eine harmonische Lebensführung. Die Pythagoreer hatten starken politischen Einfluss und waren wirtschaftlich erfolgreich. Um 510 v.Chr. wurde Pythagoras aus Kroton vertrieben. Er ging mit seinen Anhängern nach Metapont, wo er auch starb. Er hinterließ seine Frau und seine Tochter MYIA, die selbst zu einer bedeutenden Philosophin ihrer Zeit werden sollte.

Pythagoras unterrichtete seine Anhänger in Philosophie und Mathematik. Viele seiner Kenntnisse brachte er aber von seinen Reisen aus Babylon und Ägypten mit, sodass heute nicht mehr geklärt werden kann, was wirklich von ihm selbst entdeckt worden war. Der *Satz des Pythagoras* war als Rechenvorschrift vermutlich schon den Babyloniern vor 1650 v.Chr. bekannt.[1]

Die Sätze der *Satzgruppe des Pythagoras* erlauben Berechnungen der Seitenlängen und der Höhe von rechtwinkligen Dreiecken. Sie sind nur auf rechtwinklige Dreiecke anwendbar.

Die längste Seite in einem rechtwinkligen Dreieck wird als *Hypotenuse*[2] bezeichnet. Die beiden kurzen Seiten heißen *Katheten*. Der Mittelpunkt des Umkrei-

[1]Die Keilschrifttafel *Plimpton 322* enthält eine Tabelle pythatoreischer Tripel.

[2]Der Begriff *Hypotenuse* stammt von den altgriechischen

ses eines rechtwinkligen Dreiecks ist der Mittelpunkt der Hypotenuse. Diesen Umkreis nennt man den *Thaleskreis*.

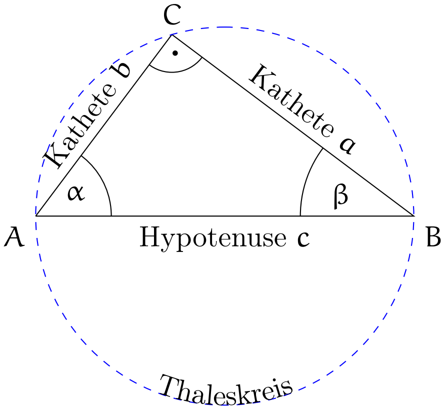


Abbildung 5.1 Benennungen im rechtwinkligen Dreieck

Begriffen *hypo* für „unten“ und *teinein* für „spannen“ oder „sich erstrecken“.

5.1.1 Kathetensatz

121 Satz (Kathetensatz)
Der Flächeninhalt des Quadrats über einer Kathete entspricht dem Flächeninhalt des Rechtecks über der Hypotenuse, dessen zweite Seitenlänge der zugehörige Hypotenusenabschnitt bildet.

$$\boxed{a^2 = p \cdot c \qquad b^2 = q \cdot c}$$

Beweis Der Kathetensatz ergibt sich aus der Ähnlichkeit des Dreiecks $\triangle ABC$ zum Dreieck $\triangle CBH$. Diese Dreiecke sind ähnlich, da sie zwei Winkel gemeinsam haben: Den rechten Winkel bei C bzw. H und den Winkel β.

In diesen ähnlichen Dreiecken sind die Verhältnisse einander entsprechender Streckenlängen gleich. Also gilt:

$$\frac{p}{a} = \frac{a}{c} \qquad\qquad | \cdot a \cdot c$$

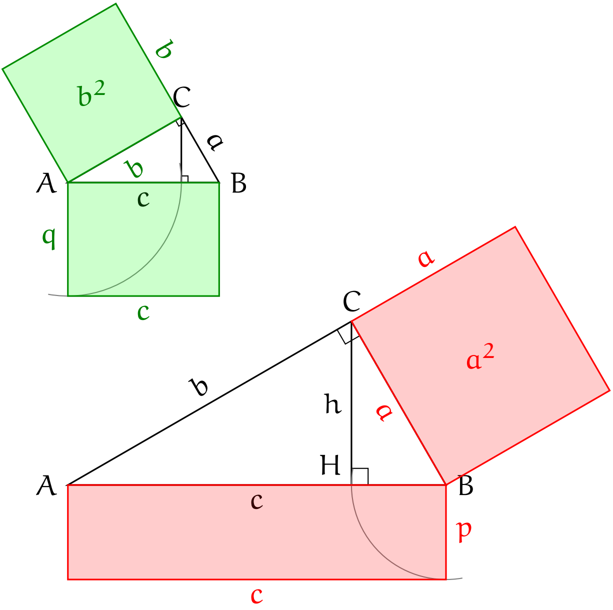


Abbildung 5.2 Veranschaulichung des Kathetensatzes

$$pc = a^2$$

Einfaches Umformen der Gleichung der Seitenverhältnisse liefert also direkt den Kathetensatz. □

Der Beweis für den Kathetensatz für die Kathete b verläuft analog.

Mit Hilfe des Kathetensatzes lässt sich zu jedem Rechteck ein flächengleiches Quadrat konstruieren.

Bemerkung 122 (Flächengleiches Quadrat)
Die Konstruktion eines flächengleichen Quadrats aus einem Rechteck mit gegebenen Seitenlägen c und p kann über die Anwendung des Kathetensatzes erfolgen. Es sei $c = [AB]$. Folgende Konstruktionsschritte sind erforderlich:

1. Trage p an c ab. Das ergibt Punkt H.
2. Errichte einen Halbkreis k über c.
3. Errichte das Lot h zu c durch H.
4. Der Schnittpunkt von h mit k ergibt den Punkt C. Das Quadrat über $[CB]$ hat den gleichen Flächeninhalt.

5.1.2 Satz des Pythagoras

123 Satz (Satz des Pythagoras)
Der Flächeninhalt des Quadrats über der Hypotenuse entspricht der Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten.

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Für den Satz des Pythagoras sind heute über 400 verschiedene Beweise bekannt. Eine kleine Auswahl wird hier präsentiert.

Beweis *(Arithmetischer Beweis)* Über der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks $\triangle ABC$ wird das Quadrat errichtet. An die anderen drei Seiten dieses Quadrats wird wieder das Ausgangsdreieck nach innen angefügt. Daraus ergibt sich das neue Quadrat $\square CDEF$ mit dem Flächeninhalt:

$$A_{\square CDEF} = (b - a)^2 = b^2 - 2ab + a^2$$

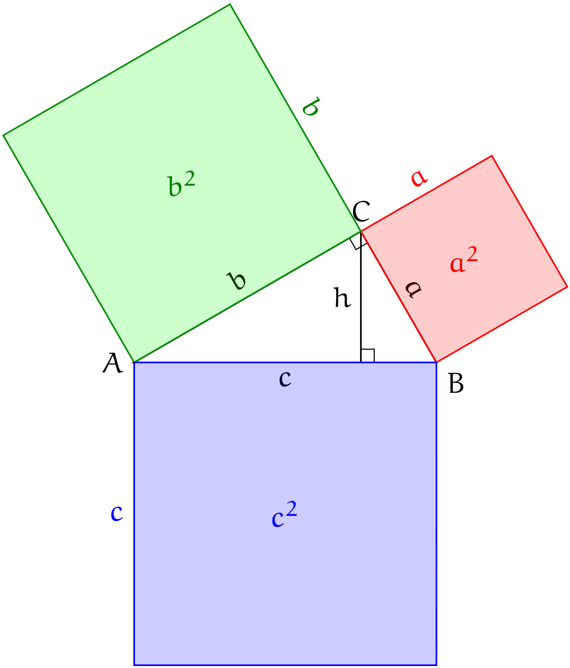


Abbildung 5.3 Veranschaulichung des Satz des Pythagoras

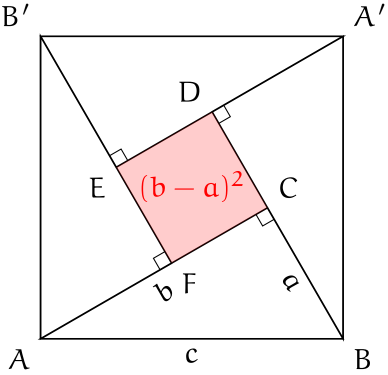


Abbildung 5.4 Figur zum Arithmetischen Beweis des Satz des Pythagoras

Den Flächeninhalt von $\square CDEF$ kann man aber auch auf eine zweite Weise bestimmen. Diesen Flächeninhalt erhält man, wenn man vom Hypotenusenquadrat $\square ABA'B'$ viermal die Fläche des Ausgangsdreicks $\triangle ABC$ subtrahiert.

$$\begin{aligned} A_{\square CDEF} &= A_{\square ABA'B'} - 4 \cdot A_{\triangle ABC} \\ &= c^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}ab \end{aligned}$$

Einsetzen des ersten Terms:

$$
\begin{aligned}
(b-a)^2 &= c^2 - 2ab \\
b^2 - 2ab + a^2 &= c^2 - 2ab \qquad | + 2ab \\
b^2 + a^2 &= c^2 \qquad \square
\end{aligned}
$$

$\boxed{\textit{Beweis}}$ *(Chinesischer Ergänzungsbeweis)* Diese Visualisierung – kein echter Beweis im logischen Sinn – findet man im Kommentar zum ersten Buch von Euklids *Elementen* von PROKLOS, in hinduistischen Schriften und im chinesischen *Zhoubi suanjing* (ca. 100 v.Chr.). Dieser Nachweis ergänzt zum Ausgangsdreieck kongruente Dreiecke außen an das Hypotenusenquadrat. Das sich ergebende Quadrat $\square CDEF$ lässt sich dann durch eine Umordnung der vier kongruenten Dreiecke innerhalb seiner Fläche auch in zwei Rechtecke mit den Seitenlängen a und b, sowie in zwei Quadrate mit den Flächeninhalten a^2 und b^2 zerlegen.[3] Stellt man

[3] Auch bekannt als *Altindischer Ergänzungsbeweis*

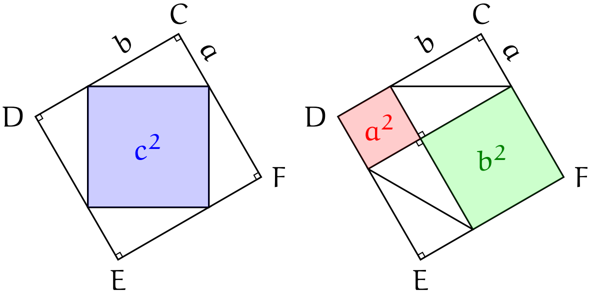


Abbildung 5.5 Figur zum Chinesischen Ergänzungsbeweis des Satz des Pythagoras

den Term für die Fläche von $\square CDEF$ auf, erhält man:

$$A_{\square CDEF} = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} ab$$

aber auch:

$$A_{\square CDEF} = a^2 + b^2 + 2ab$$

Gleichsetzen liefert:

$$\begin{aligned} c^2 + 2ab &= a^2 + b^2 + 2ab \\ c^2 &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

□

$\boxed{\textit{Beweis}}$ *(Beweis nach* EUKLID*)* Der nächste Beweis ist im ersten Buch der Elemente des EUKLID zu finden. Der Beweis fußt auf einer Abfolge von drei flächenerhaltenden Transformationen.[4]

Ausgangspunkt ist das rechtwinklige Dreieck über dessen Katheten die Quadrate errichtet werden. Im ersten Schritt werden die Quadrate einer Scherung entlang von Parallelen zu den Katheten unterzogen, sodass die Punkte D und G auf dem Punkt P zu liegen kommen. P befindet sich in der Verlängerung der Höhe von Dreieck $\triangle ABC$. So erhält man zwei Parallelogramme, die eine Seite gemeinsam haben. Die Parallelogramme haben die Flächeninhalte a^2 und b^2.

Der zweite Schritt besteht darin, dass die Parallelogramme ein zweites Mal einer Scherung unterzogen werden. Dabei kommt der Punkt C auf dem Höhenfußpunkt H zu liegen. Man erhält zwei Rechtecke, die gemeinsam ein Quadrat ergeben, dessen Seitenlänge der Hypotenuse c entspricht.

[4] flächenerhaltende Transformationen sind: Verschiebung, Drehung, Spiegelung und Scherung.

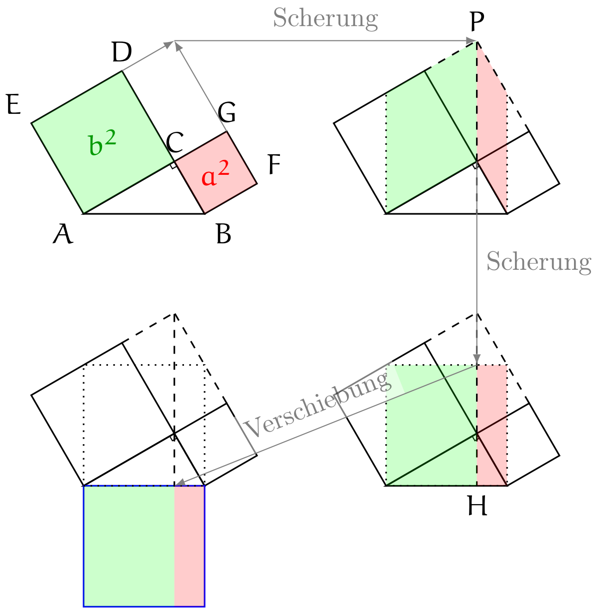


Abbildung 5.6 Beweis nach EUKLID

Um zuletzt noch zu zeigen, dass das Quadrat, das durch die beiden Scherungen entstanden ist, das Hypotenusenquadrat ist, kann man es noch nach unten verschieben.

Da weder Scherung noch Verschiebung einen Flächeninhalt ändern, folgt daraus, dass $a^2 + b^2 = c^2$.

Satz 124 (Umkehrung des Satz des Pythagoras)
Ergibt die Summe der Quadrate zweier Seitenlängen im Quadrat das Quadrat der dritten Seitenlänge, so ist das Dreieck ein rechtwinkliges. Kurz:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad \triangle ABC \quad \textit{ist rechtwinklig.}$$

Definition 125 (Pythagoreisches Tripel)
Unter einem *Pythagoreischen Tripel* versteht man eine Menge von drei ganzen Zahlen, die den Satz des Pythagoras erfüllen. Das bekannteste solche Tripel ist $(3, 4, 5)$, denn:

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

Andere Pythagoreische Tripel sind: $(5; 12; 13)$, $(8; 15; 17)$ oder $(20; 21; 29)$.

Bemerkung 126
Auf der Umkehrung des Satz des Pythagoras beruht auch die oft von Handwerkern benutzte 3-4-5-Regel: Verhalten sich die in einem Dreieck die Seitenlägen wie 3 zu 4 zu 5, dann handelt es sich um ein rechtwinkliges.

5.1.3 Höhensatz

127 Satz (Höhensatz)
Der Flächeninhalt des Quadrats über der Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks entspricht dem Flächeninhalt des Rechtecks der Hypotenusenabschnitte.

$$\boxed{h^2 = p \cdot q}$$

Beweis *(Ergänzungsbeweis)* Der Höhensatz lässt sich dadurch zeigen, dass man die Figur zu einem Rechteck ergänzt. (s. Abb. 5.8) Betrachte dann das Dreieck $\triangle PQR$. Sein Flächeninhalt lässt sich auf zwei Arten berechnen. Einerseits entspricht der Flächeninhalt der Hälfte des Rechtecks mit den Seitenlängen $q + h$ und

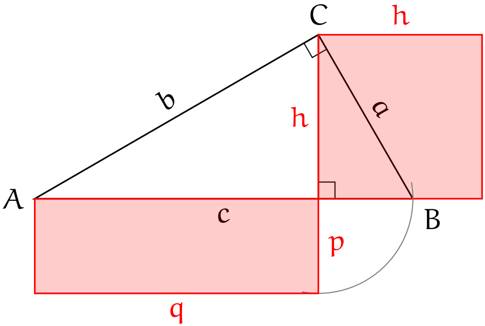


Abbildung 5.7 Veranschaulichung des Höhensatzes

$p + h$. Andererseits setzt sich das Dreiecks aus dem Rechteck mit den Seitenlängen p und q, sowie den Hälften der Rechtecke mit den Seitenlängen q und h bzw. p und h zusammen.

$$A_{\triangle PQR} = \frac{1}{2}(p+h)(q+h) = pq + \frac{1}{2}qh + \frac{1}{2}ph$$

$$\frac{1}{2}\left(pq + ph + qh + h^2\right) = pq + \frac{1}{2}qh + \frac{1}{2}ph$$

$$\frac{1}{2}pq + \frac{1}{2}ph + \frac{1}{2}qh + \frac{1}{2}h^2 = pq + \frac{1}{2}qh + \frac{1}{2}ph$$

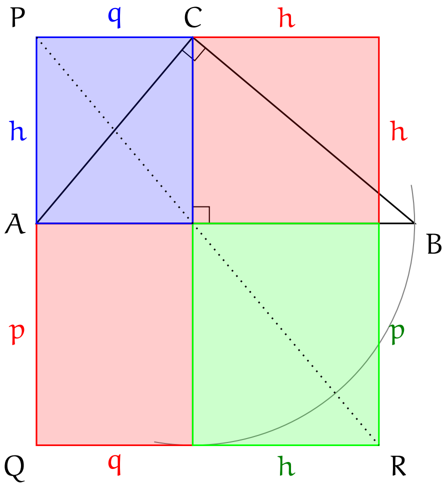


Abbildung 5.8 Beweisfigur zum Höhensatz

$$\frac{1}{2}h^2 = \frac{1}{2}pq$$
$$h^2 = pq \qquad \square$$

5.1.4 Dreiecksberechnungen

Folgerung 128 (Berechnung der Hypotenuse)
Aus dem Satz des Pythagoras folgt: In einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ *gilt für die Länge der Hypotenuse* c*:*

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \qquad\qquad |\sqrt{\ldots} \\ c &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Die Längen der Katheten legen also die Länge der Hypotenuse fest.

Folgerung 129 (Berechnung der Höhe)
Die Höhe eines rechtinkligen Dreiecks kann über verschiedene Wege bestimmt werden.

Sind die Hypotenusenabschnitte gegeben, so lässt sich direkt der Höhensatz anwenden.

$$h^2 = pq \qquad \Rightarrow \qquad h = \sqrt{pq}$$

Ist eine Kathete und der zugehörige Hypotenusenabschnitt gegeben, so gilt nach dem Satz des Pythagoras für das Teildreieck $\triangle ACH$ *oder* $\triangle BHC$*:*

$$h^2 + p^2 = a^2 \qquad \Rightarrow \qquad h = \sqrt{a^2 - p^2}$$

analog:

$$h^2 + q^2 = b^2 \qquad \Rightarrow \qquad h = \sqrt{b^2 - q^2}$$

Folgerung 130 (Berechnung der Kathetenlänge) *Die Länge einer der Katheten kann auch über mehrere Wege, abhängig von den gegebenen Größen erfolgen:*

Ist die Länge der Hypotenuse c *und die Länge einer Kathete* b *bekannt, so kann der Satz des Pythagoras angewendet werden.*

$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \Rightarrow \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

Ist ein Hypotenusenabschnitt, z.B. p*, und die Länge der Hypotenuse* c *bekannt, so kann die Länge der Katheten über den Kathetensatz berechnet werden.*

$$\begin{aligned} a^2 &= pc & \Rightarrow \quad & a = \sqrt{pc} \\ b^2 &= qc = (c-p)c & \Rightarrow \quad & b = \sqrt{(c-p)c} \end{aligned}$$

Ist die Höhe h *und der passende Hyptenusenabschnitt, z.B.* p*, bekannt, so kann die Länge der Katheten auch über den Satz des Pythagoras bestimmt werden.*

$$a^2 = h^2 + p^2 \qquad \Rightarrow \qquad a = \sqrt{h^2 + p^2}$$

Folgerung 131 (Gleichschenkliges Dreieck)
An einem gleichschenkligen Dreieck ist keiner der Sätze aus der Satzgruppe des Pythagoras direkt anwendbar. Doch die Höhe auf die Basis des gleichschenkligen Dreiecks teil das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke. In diesen Teildreiecken sind Satz des Pythagoras, Katheten- und Höhensatz anwendbar. So lässt sich die

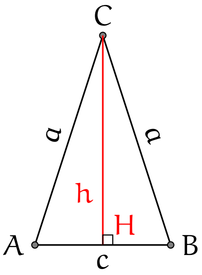


Abbildung 5.9 Gleichschenkliges Dreieck

Höhe des gleichschenkligen Dreiecks aus den Seitenlängen berechnen. Betrachte das Dreieck $\triangle HBC$. *An diesem Dreieck gilt der Satz des Pythagoras:*

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2 = a^2 \qquad \Big| - \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{c^2}{4} \qquad |\sqrt{\ldots}$$
$$h = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{4}}$$

Ist die Höhe des Dreiecks und die Basislänge c *bekannt, so kann mit der gleichen Beziehung die Länge der beiden Schenkel berechnet werden:*

$$a^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + h^2 \qquad |\sqrt{\ldots}$$
$$a = \sqrt{\frac{c^2}{4} + h^2}$$

Folgerung 132 (Höhe im gleichseitigen Dreieck) *Der Satz des Pythagoras verbindet im gleichseitigen Dreieck die Höhe des Dreiecks mit der Seitenlänge. Die Höhe teilt das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke.*

Betrachte das Dreieck $\triangle HBC$. *Der Satz des Pythagoras für dieses Dreieck lautet:*

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \qquad |-\left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$
$$h^2 = \frac{3}{4}a^2 \qquad |\sqrt{\ldots}$$

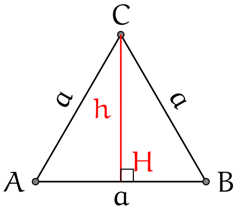


Abbildung 5.10 Gleichseitiges Dreieck

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Somit kann man auch den Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks nur in Abhängigkeit der Seitenlänge ausdrücken.

$$\begin{aligned} A_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \end{aligned}$$

5.1.5 Grundkonstruktionen

Regel 133 (Quadrat zu Rechteck)
Diese Grundkonstruktion erfüllt die Aufgabe ein Quadrat gegebener Fläche in ein *flächengleiches* Rechteck umzuwandeln.

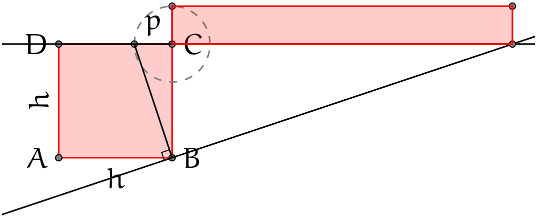


Abbildung 5.11 Flächenerhaltende Umformung eines Quadrats in ein Rechteck

Regel 134 (Flächengleiches Rechteck zu Quadrat)

Regel 135 (Konstruktion einer Quadratwurzel)

Regel 136 (Zerlegung eines Quadrats)

Regel 137 (Quadratur eines Dreiecks)

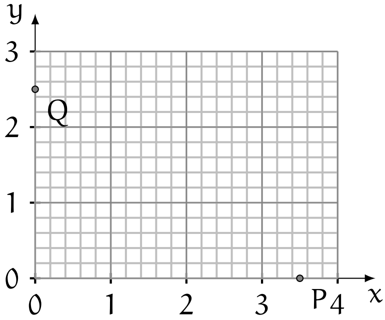
Regel 138 (Konstruktion von Tangenten)

Regel 139 (Gemeinsame Tangenten)

5.1.6 Abstand von Punkten

Folgerung 140 (Abstand in der Ebene)
Der Abstand zweier Punkte in einer Ebene kann anhand ihrer Koordinaten berechnet werden. Betrachte die Punkte $P(x_P \mid y_P)$ *und* $Q(x_Q \mid y_Q)$*. Dann gilt für deren Abstand* $d = d(P; Q)$*:*

$$\begin{aligned} d^2 &= \Delta x^2 + \Delta y^2 \\ &= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \\ &= \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} \end{aligned}$$



Folgerung 141 (Abstand im Raum)

5.1.7 Berechnungen an Körpern

Folgerung 142 (Diagonale im Würfel)

Folgerung 143 (Diagonale im Quader)

Folgerung 144 (Höhe eines Tetraeders)

Folgerung 145 (Höhe einer Pyramide)

Folgerung 146 (Seitenhöhe einer Pyramide)

5.2 Trigonometrische Beziehungen

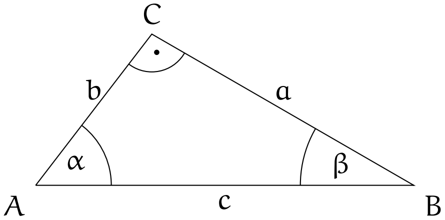


Abbildung 5.12 Rechtwinkliges Dreieck

Definition 147 (Sinus)

Der *Sinus* eines Winkels α bezeichnet das Verhältnis der Streckenlänge von Gegenkathete a zu Hypotenuse c in einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$.

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$$

Definition 148 (Kosinus)
Der *Kosinus* eines Winkels α bezeichnet das Verhältnis der Streckenlänge von Ankathete b zu Hypotenuse c in einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$.

$$\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$

Folgerung 149
Bei α und β im rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ sind die Werte von Sinus und Kosinus vertauscht.

$$\sin(\alpha) = \cos(\beta)$$
$$\cos(\alpha) = \sin(\beta)$$

Definition 150 (Tangens)
Der *Tangens* eines Winkels α bezeichnet das Verhältnis der Streckenlänge von Gegenkathete a zu Ankathete b in einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$.

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$$

Folgerung 151
Der Tangens entspricht dem Verhältnis von Sinus zu Kosinus.

$$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Bemerkung 152 (Notation)
Wenn aus dem Zusammenhang hervorgeht, was alles zum Argument von Sinus, Kosinus oder Tangens gehört, kann man auch die Klammern weglassen.

$$\cos\alpha = \cos(\alpha) \quad \sin\alpha = \sin(\alpha) \quad \tan\alpha = \tan(\alpha)$$

Beachte: Die alleinige Angabe eines Ausdrucks wie sin ist die Angabe einer Funktion, nicht die Angabe einer Zahl.

Regel 153 (Trigonometrie am Einheitskreis)
Der *Einheitskreis* ist der Kreis mit Radius 1.

Trägt man den Winkel α von der x-Achse aus an, so schneidet der zweite Schenkel des Winkels den Einheitskreis im Punkt B. Der Lotfußpunkt durch B auf die x-Achse nennen wir C. Gibt man dem Ursprung des Koordinatensystems noch die Bezeichnung A, so ist das Dreieck $\triangle ABC$ ein rechtwinkliges, dessen Hypotenuse die Länge 1 hat.

In einem Dreieck, dessen Hypotenusenlänge 1 beträgt, entsprechen die Längen der Katheten gerade dem Sinus und Kosinus des Winkels α.

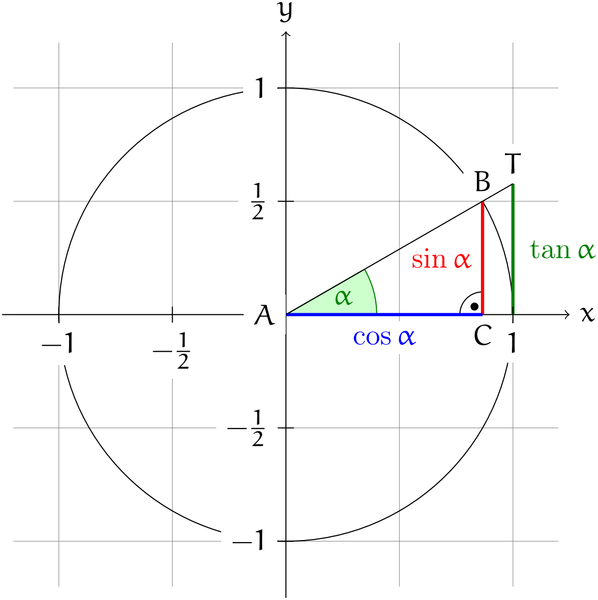


Abbildung 5.13 Die trigonometrischen Beziehungen am Einheitskreis

Bemerkung 154 (Trigonometrische Funktionen) Sinus, Kosinus und Tangens sind *Funktionen*, die einen Winkel als Argument erwarten. Sie zeichnen sich durch einen charakteristischen Verlauf aus. Die Trigonometrischen Funktionen werden in der 10. Jahrgangsstufe ausführlich behandelt.

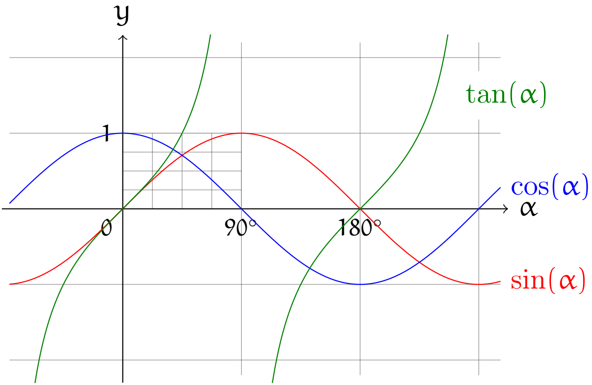


Abbildung 5.14 Graphen trigonometrischer Funktionen

Definition 155 (Umkehrungen der trig. Funktionen

Bemerkung 156 (Potenzen trigonometrischer Funk

157 Satz
Die Summe der Quadrate von Sinus und Kosinus des gleichen Winkels ergibt immer den Wert 1*.*

$$\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$$

5.3 Prisma, Pyramide, Zylinder & Kegel

Definition 158 (Prisma)
Ein *Prisma* ist ein Körper, der ein Vieleck – ein sogenannetes *Polygon* – als Grundfläche besitzt und dessen Boden und Decke parallel zueinander liegen.

Man unterscheidet ein *gerades Prisma*, bei dem die Seitenflächen senkrecht auf der Grundfläche stehen, von einem *schiefen Prisma*.

Regel 159 (Volumen des Prismas)
Für jedes Prisma gilt:

$$V = G \cdot h$$

Das Volumen ist das Produkt aus Grundfläche und Höhe.

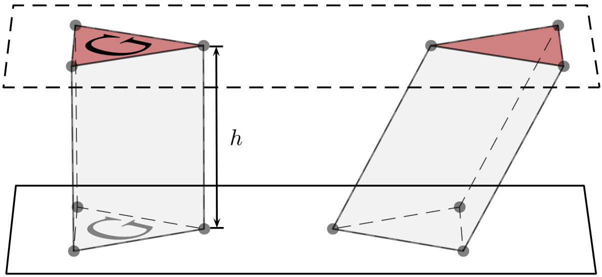


Abbildung 5.15 Gerades und schiefes Prisma

Regel 160 (Prinzip von Cavalieri)
Haben die Querschnittsflächen zwei Körper in jeder Höhe den gleichen Flächeninhalt und haben sie die gleiche Höhe, so ist ihr Volumen gleich.

Also egal, wie die eine Querschnittsfläche gegenüber der Grundfläche verschoben, gedreht oder in Teile zerteilt wird, das Volumen des Körpers bleibt gleich.

Regel 161 (Oberfläche des Prismas)
Die Oberfläche eines Prismas besteht aus dem Doppelten der Grundfläche G (Boden und Deckel) und der *Mantelfläche* M.

$$\mathsf{O} = 2 \cdot \mathsf{G} + \mathsf{M}$$

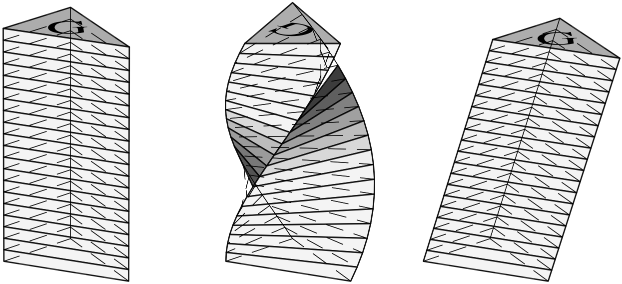


Abbildung 5.16 Körper mit gleichen Querschnittsflächen

Die Mantelfläche beim geraden Prisma besteht aus Rechtecken. Daher ist die Mantelfläche gleich der Summe aus den Produkten der Höhe mit den Seitenlägen der Grundfläche.

$$M = a \cdot h + b \cdot h + \ldots$$

Definition 162 (Zylinder)
Ein *Zylinder* ist ein Körper, dessen Boden und Decke – genauso wie beim Prisma – parallel zueinander liegen und gleich groß sind. Die Grundfläche bildet jedoch ein Kreis und die Mantelfläche ist gekrümmt.

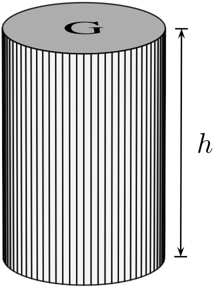


Abbildung 5.17 Zylinder

Regel 163 (Volumen des Zylinders)

Regel 164 (Oberfläche des Zylinders)

Definition 165 (Pyramide)

Regel 166 (Netz einer Pyramide)

Regel 167 (Volumen der Pyramide)

Definition 168 (Kegel)

Regel 169 (Netz eines Kegels)

Regel 170 (Volumen des Kegels)

Kapitel 6

Stochastik der 9. Jahrgangsstufe

> Gott existiert oder nicht. Entweder ich glaube an Gott oder nicht. Von diesen vier Möglichkeiten ist nur eine zu meinem Nachteil. Damit ich diese vermeide, glaube ich an Gott.
>
> Blaise Pascal

6.1 Zusammengesetzte Zufallsexperimente

Baumdiagramm, Urnenmodell

6.2 Pfadregeln

Lösungen

Lösungen zu den Grundlegenden Rechengregeln

1. Faktorisiere!

   a) $12a + 6b = 6(2a + b)$

   b) $19c + 11c = c(19 + 11)$

Abbildungsverzeichnis

Colophon

Dieses Buch wurde mit dem Textsatzsystem
LaTeX von Leslie Lamport und der memoir
Dokumentenklasse gesetzt.
Die Abbildungen wurden mit Ti*k*Z,
tkz-euclide und PSTricks erstellt.
Dreidimensionale Ansichten wurden mit
pst-solides3d generiert.
Der Haupttext ist in 11pt mit den Computer
Modern Schriften von Donald Knuth gesetzt.
Der Formelsatz nutzt die Palatino-Schrift,
entworfen von Hermann Zapf.

Martin Putzlocher — mp@mint-oer.de
Wiesau, 26. März 2017