目录

第一部分　复数

数论

问题 1. 对于 $b^2, b \in \mathbb{Z}^+$, 找出 $c, d \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $b^2 = c^2 + d^2$.

证明. □

球极投影

定义 0.1. [扩展复平面] 集合 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 称为扩展复平面，记为 $\mathbb{C}_\infty$. 对于 $z, \in \mathbb{C}_\infty$, 定义度量 $d(z, \infty) = d(\infty, z) = \infty$.

从扩展平面到三维球面 S 有映射 f 定义如下

$$f(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{-i(z - \bar{z})}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \tag{1}$$

我们来证明球极投影是一个连续的双射，并且其逆映射也连续。

命题 0.1. $f^{-1}\colon S \to \mathbb{C}_\infty$ 存在，而且对任意 $(x_1, x_2, x_3) \in S$, 有

$$f^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$

.

把 $\mathbb{C}_\infty$ 看作是 $\mathbb{R}^{\nvDash}{}_\infty$, 也可以写

$$f^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \big(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}\big).$$

命题 0.2. $g\colon S \to \mathbb{R}\colon (x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}\right)$ 是连续函数。

要证明定理 0.2，我们有下面更一般的命题。

命题 0.3. 函数 $f\colon Z \to X \times Y$ 连续当，且仅当其分量函数

$$f_1\colon Z \to X$$

和

$$f_2\colon Z \to Y$$

都连续。

忽略对这个一般命题的证明，直接用它来证明

证明. 对于 $x = (x_1, x_2, x_3)$, 设 $S \to \mathbb{R}$ 的函数 $g_1(x) = \frac{x_1}{1-x_3}$, $g_2(x) = \frac{x_2}{1-x_3}$. 那么 $f^{-1}(x) = (g_1(x), g_2(x))$.

- g_1,g_2 都是连续函数.

  这是因为 g_1 可以分解为 $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, 1 - x_3) \mapsto \frac{x_1}{1-x_3}$. g_2 类似。

- 由于 g_1, g_2 都连续，所以，根据 命题 0.3 f^{-1} 也连续。

$\square$