Notes of maths

PhilippeMENG

2021 年 2 月 12 日

目录

这本书的出发点是我决心编写一本自己的数学百科全书。从我自己学习的角度，我非常需要一本自己的宝典来吸收百家之长，这是我能够不断阅读并取得真正效果保障。

Chapter 1

Vocabulaire de théorie des ensembles

Théorème 1.1 (The Knaster-Tarski fixed-point theorem)**.** *Suppose that A is a set and that $f : P(A) \to P(A)$ is an increasing function; if $B \subseteq C \subseteq A$ then $f(B) \subseteq f(C)$. Then there exists $G \subseteq A$ such that $f(G) = G$.*

证明. Note that f is defined as a mapping from $P(A)$ to itself: it is not defined in terms of a mapping from A to itself. Thus $\emptyset \subseteq f(\emptyset)$ and $A \supseteq f(A)$; the inclusions change direction. The theorem states that equality holds at some intermediate subset.

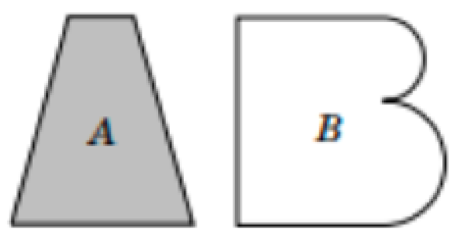
We shall show that there exists a set G such that $G \subseteq f(G)$ and $f(G) \subseteq G$; the axiom of extensionality then ensures that $G = f(G)$. Let $\mathcal{G} = \{B \in P(A) : B \subseteq f(B)\}$, and let $G = \cup_{B\in\mathcal{G}} B$. If $B \in \mathcal{G}$ then $B \subseteq G$, and so $f(B) \subseteq f(G)$. Thus $B \subseteq f(B) \subseteq f(G)$. Consequently $G = \cup_{B\in\mathcal{G}} B \subseteq f(G)$, and so $G \in \mathcal{G}$. On the other hand, since $G \subseteq f(G)$ it follows that $f(G) \subseteq f(f(G))$, and so $f(G) \in \mathcal{G}$. Thus $f(G) \subseteq \cup_{B\in\mathcal{G}} B = G$

□

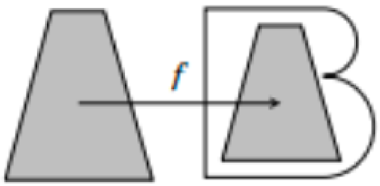
We aim to show that if there are injections $f : A \to B$ and $g : B \to A$, then there is a bijection $h : A \to B$. The proof of this fact, though not particularly difficult, is not entirely trivial, either. The fact that f and g guarantee that such an h exists is called the the **Cantor-Bernstein-Schröeder theorem**. This theorem is very useful for proving two sets A and B have the same cardinality: it says that instead of finding a bijection $A \to B$, it suffices to find injections $A \to B$ and $B \to A$. This is useful because injections are often easier to find than bijections.

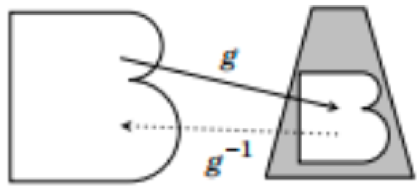
We will prove the Cantor-Bernstein-Schröeder theorem, but before doing so let's work through an informal visual argument that will guide us through (and illustrate) the proof.

Suppose there are injections $f : A \to B$ and $g : B \to A$. We want to use them to produce a bijection $h : A \to B$. Sets A and B are sketched below. For clarity, each has the shape of the letter that denotes it, and to help distinguish them the set A is shaded.

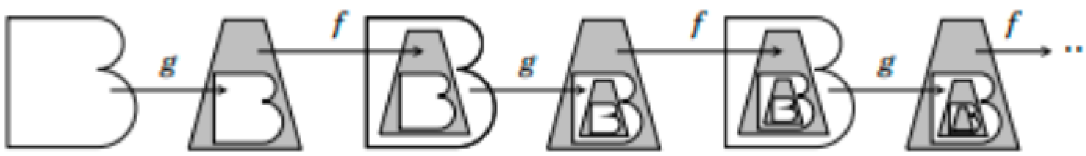


The injections $f : A \to B$ and $g : B \to A$ are illustrated in Figure Think of f as putting a "copy" $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ of A into B, as illustrated. This copy, the range of f, does not fill up all of B (unless f happens to be surjective). Likewise, g puts a "copy" $g(B)$ of B into A. Because they are not necessarily bijective, neither f nor g is guaranteed to have an inverse. But the map $g : B \to g(B)$ from B to $g(B) = \{g(x) : x \in B\}$ is bijective, so there is an inverse $g^{-1} : g(B) \to B$. (We will need this inverse soon.)





Consider the chain of injections illustrated in the figure below.

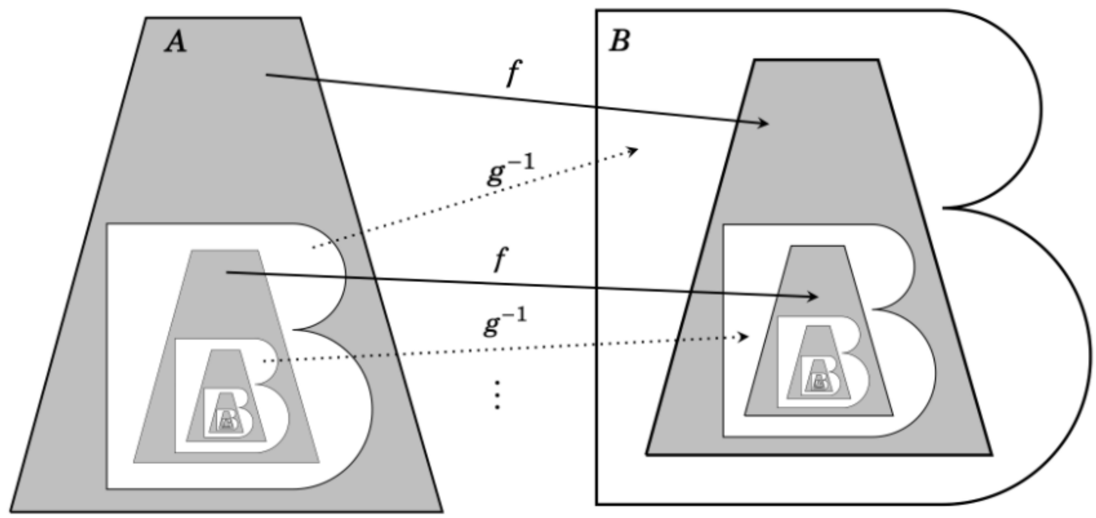


On the left, g puts a copy of B into A. Then f puts a copy of A (containing the copy of B) into B. Next, g puts a copy of this B -containing- A -containing- B into A, and so on, always alternating g and f.

The first time A occurs in this sequence, it has a shaded region $A - g(B)$. In the second occurrence of A, the shaded region is $(A - g(B)) \cup (g \circ f)(A - g(B))$. In the third occurrence of A, the shaded region is

$$(A - g(B)) \cup (g \circ f)(A - g(B)) \cup (g \circ f \circ g \circ f)(A - g(B))$$

To tame the notation, let's say $(g \circ f)^2 = (g \circ f) \circ (g \circ f)$, and $(g \circ f)^3 = (g \circ f) \circ (g \circ f) \circ (g \circ f)$, and so on.Let's also agree that $(g \circ f)^0 = I_A$, that is, it is the identity function on A. Then the shaded region of the n^{th} occurrence of A in the sequence is $\bigcup_{k=0}^{n-1} (g \circ f)^k (A - g(B))$ This process divides A into gray and white regions: the gray region is $G = \bigcup_{k=0}^{n-1} (g \circ f)^k (A - g(B))$ and the white region is $A - G$.



The figure suggests our desired bijection $h : A \to B$. The injection f sends the gray areas on the left bijectively to the gray areas on the right. The injection $g^{-1} : g(B) \to B$ sends the white areas on the left bijectively to the white areas on the right. We can thus define $h : A \to B$ so that $h(x) = f(x)$ if x is a gray point, and $h(x) = g^{-1}(x)$ if x is a white point. This informal argument suggests that given injections $f : A \to B$ and $g : B \to A$, there is a bijection $h : A \to B$. But it is not a proof. We now present this as a theorem and tighten up our reasoning in a careful proof, with the above diagrams and ideas as a guide.

Théorème 1.2 (The Cantor-Bernstein-Schroder Theorem)**.** *If* $|A| \leq |B|$ *and* $|B| \leq |A|$*, then* $|A| = |B|$*. In other words, if there are injections* $f : A \to B$ *and* $g : B \to A$*, then there is a bijection* $h : A \to B$*.*

证明. (**Direct**)

Suppose there are injections $f : A \to B$ and $g : B \to A$. Then, in particular, $g : B \to g(B)$ is a bijection from B onto the range of g, so it has an inverse $g^{-1} : g(B) \to B$. (Note that $g : B \to A$ itself has no inverse

$g^{-1} : A \to B$ unless g is surjective.)

Consider the subset $G = \bigcup_{k=0}^{n-1} (g \circ f)^k (A - g(B)) \subseteq A$ Let $W = A - G$, so $A = G \cup W$ is partitioned into two sets G (think gray) and W (think white). Define a function $h : A \to B$ as $h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in G \\ g^{-1}(x) & \text{if } x \in W \end{cases}$ Notice that this makes sense: if $x \in W$, then $x \notin G$, so $x \notin A - g(B) \subseteq G$, hence $x \in g(B)$, so $g^{-1}(x)$ is defined.

To finish the proof, we must show that h is both injective and surjective.

For injective, we assume $h(x) = h(y)$, and deduce $x = y$. There are three cases to consider. First, if x and y are both in G, then $h(x) = h(y)$ means $f(x) = f(y)$, so $x = y$ because f is injective. Second, if x and y are both in W, then $h(x) = h(y)$ means $g^{-1}(x) = g^{-1}(y)$, and applying g to both sides gives $x = y$. In the third case, one of x and y is in G and the other is in W. Say $x \in G$ and $y \in W$. The definition of G gives $x = (g \circ f)^k(z)$ for some $k \geq 0$ and z in $A - g(B)$. Note $h(x) = h(y)$ now implies $f(x) = g^{-1}(y)$, that is, $f\left((g \circ f)^k(z)\right) = g^{-1}(y)$. Applying g to both sides gives $(g \circ f)^{k+1}(z) = y$, which means $y \in G$. But this is impossible, as $y \in W$. Thus this third case cannot happen. But in the first two cases $h(x) = h(y)$ implies $x = y$, so h is injective.

To see that h is surjective, take any $b \in B$. We will find an $x \in A$ with $h(x) = b$. Note that $g(b) \in A$, so either $g(b) \in W$ or $g(b) \in G$. In the first case, $h(g(b)) = g^{-1}(g(b)) = b$, so we have an $x = g(b) \in A$ for which $h(x) = b$. In the second case, $g(b) \in G$. The definition of G shows $g(b) = (g \circ f)^k(z)$ for some $z \in A - g(B)$ and $k \geq 0$. In fact we have $k > 0$, because $k = 0$ would give $g(b) = (g \circ f)^0(z) = z \in A - g(B)$, but clearly $g(b) \notin A - g(B)$. Thus $g(b) = (g \circ f) \circ (g \circ f)^{k-1}(z) = g\left(f\left((g \circ f)^{k-1}(z)\right)\right)$. Because g is injective, this implies $b = f\left((g \circ f)^{k-1}(z)\right)$.Let $x = (g \circ f)^{k-1}(z)$, so $x \in G$ by definition of G. Observe that $h(x) = f(x) = f\left((g \circ f)^{k-1}(z)\right) = b$. We have now seen that for any $b \in B$, there is an $x \in A$ for which $h(x) = b$.

Thus h is surjective.

Since $h : A \to B$ is both injective and surjective, it is also bijective.

$\square$

证明. (**Indirect**)

The existence of f says that ' A is no bigger than B ' and the existence of g says that ' B is no bigger than A '. The conclusion then is that if both hold then ' A and B are the same size'. We shall consider the problem of whether two sets are always comparable in size later.

We consider the mappings $f : P(A) \to P(B)$ and $g : P(B) \to P(A)$ determined by f and g; they are clearly increasing maps. On the other hand the mapping $C_A : P(A) \to P(A)$ defined by $C_A(D) = A \backslash D$ is order reversing, as is the corresponding mapping $C_B : P(B) \to P(B)$. Thus the composite mapping $S = C_A \circ g \circ C_B \circ f$ is an increasing mapping from $P(A)$ into itself. The Knaster-Tarski fixed-point theorem then tells us that there exists $D \subseteq A$ such that $S(D) = D$; the restriction $f_{|D}$ of f to D is a bijection of D onto $f(D)$. Let $E = f(D)$, so that $C_B(f(D)) = B \backslash E$. Thus

$$\begin{aligned} A \backslash D = C_A(D) = C_A(S(D)) &= C_A\left(C_A g C_B f(D)\right) \\ &= g\left(C_B f(D)\right)) = g(B \backslash E) \end{aligned}$$

Consequently the restriction $g_{|B\backslash E}$ of g to $B \backslash E$ is a bijection of $B \backslash E$ onto $A \backslash D$; let $k : A \backslash D \to B \backslash E$ be its inverse. We now set $h(a) = f_{|D}(a)$ for $a \in D$, and set $h(a) = k(a)$ for $a \in A \backslash D$; h clearly has the required properties.

$\square$

Chapter 2

Logarithme

Propriété fondamentale Une fonction continue strictement monotone sur un intervalle est une bijection de cet intervalle sur son image.

Exposant rationnel Soit $q \in \mathbb{N}*$.Alors,il est clair que la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt[q]{x}$ est continue et strictement croissante.

Chapter 3

Vector calculus

3.1 The vector product(Axial vector)

3.1.1 Rules of calculation

No associativity $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} \neq \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ The vector on the left side lies in the plane spanned by the vectors $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ (因为 the plane spanned by the vectors $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ 和 The vector on the left side 都与 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 垂直) ; the vector on the right side is in the plane spanned by $\mathbf{b}$ and $\mathbf{c}$. The subsequent example also shows that associativity does not hold. One has $\mathbf{e_1} \times (\mathbf{e_2} \times \mathbf{e_2}) = \mathbf{0}$, but $(\mathbf{e_1} \times \mathbf{e_2}) \times \mathbf{e_2} = -\mathbf{e_1}$.

Chapter 4

The natural numbers

4.1 The Peano axioms

To define the natural numbers,we will use two fundamental concepts: the zero number 0, and the increment operation.

Chapter 5

Ensembles des nombres réels

5.1 Densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Définition 5.1. On dit que'une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, (a < b \Rightarrow A \cap]a, b[\neq \emptyset)$$

Proposition 5.1. ***caractérisation séquentielle de la densité***

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, A est dense dans $\mathbb{R}$ ssi pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ une suite d'élément de A qui converge vers x.

5.2 Borne supérieure et borne inférieure

Définition 5.2. Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonne,A une partie de E.

- On dit que A admet une borne supérieure (dans E) si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément.

  Dans ce cas,ce plus petit élément est appelé la borne supérieure de A et est noté $\sup A$

  $\sup A = \min\{M \in E, M \quad majore \quad A\} = \min\{M \in E | \forall a \in A, a \leq M\}$

- On dit que A admet une borne inférieure (dans E) si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément.

  Dans ce cas,ce plus grand élément est appelé la borne inférieure de A et est noté $\inf A$

  $$\inf A = \max\{m \in E, m \text{ minore } A\} = \max\{m \in E | \forall a \in A, m \leq a\}$$

Remarque 5.1. **注意 sup 与 max 的区别**

- si A admet un plus grand élément, alors $\max A = \sup A$.
- Par contre la réciproque est fausse.Par exemple,$[0, 1[$ admet une borne supérieure qui est 1 mais pas de plus grand élément

Chapter 6

Généralités sur les fonctions d'une variable réelle

6.1 Fonctions lipschitziennes

Définition 6.1. Soient $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction et $k \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est k-lipschitzienne si :

$$\forall x, y \in I, |f(y) - f(x)| \leq k\,|y - x|$$

- On dit qu'une fonction f est lipschitzienne s'il existe $k > 0$ tel que f soit k-lipschitzienne.

- Si f est k-lipschitzienne avec $0 < k < 1$, on dit que f est k-contractante.

Remarque 6.1. La fonction cosinus est 1-lipschitzienne. En effet, soient x et y deux réels, alors :

$$\begin{aligned}|\cos(y)-\cos(x)| &= \left|\int_x^y \cos'(t)\mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\int_x^y -\sin(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \int_I |sin(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \text{où I} = [x,y] \text{ si x} \leq \text{y et I} = [y,x] \text{ sinon} \\ &\leq \int_I \mathrm{d}t \\ &= |y-x|\end{aligned}$$

6.2 Fonctions monotones

Proposition 6.1. *Soient $f : I \to R$ et$g : J \to R$ deux applications. On suppose que :*

- *f et g sont monotones sur I et J respectivement ;*
- *on peut définir la composée $g \circ f$, c'est-à-dire $f(I) \subset J$.*

Alors la fonction $g \circ f$ est monotone sur I, la monotonie étant donné par ***'la règle des signes'*** *(croissante : + , décroissante : −). Autrement dit, si f et g sont de même monotonie, alors $g \circ f$ est croissante et si f et g sont de monotonies opposées, alors $g \circ f$ est décroissante. Par ailleurs, si f et g sont strictement monotones, alors $g \circ f$ l'est aussi.*

Chapter 7

Étude locale d'une fonction

Cadre Dans toute la suite, on se restreint à des fonctions définies sur un intervalle réel I ayant au moins deux points, c'est-à-dire tel que $-\infty \leq \inf I < \sup I \leq \infty$.

On définie alor:

- L'intérieur de I, noté $\mathring{I} =]\inf I, \sup I[$.On a donc dans notre cadre $\mathring{I} \neq \emptyset$
- L'adhérence de I,notée $\overline{I}$, par $\overline{I} = [\inf I, \sup I] \subset \overline{\mathbb{R}}$.

有必要强调，这里用 inf 和 sup 来定义区间形态实在比较易混淆，且 I 本身的状态不明确，有时用 $\mathring{I}$ 和 $\overline{I}$ 只是起到一个确定强调的作用，并不代表 I 需要这么限制或衍生。但是这个 I 的框架是非常全面的，为了这个全面性，人为地增加了一点抽象度。

Définition 7.1. Voisinage d'un point

Soit $a \in \mathbb{R}$.On définit:

- la boule ouverte(respectivement fermée) de centre a et de rayon $\alpha > 0$ par $B(a, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}, |x - a| < \alpha\}$(respectivement $B_f(a, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \alpha\}$).

  Les ensembles $B(a, \alpha)$ pour $\alpha > 0$ sont appelés des voisinages ouverts de a (dans $\mathbb{R}$) et les ensembles $B_f(a, \alpha)$ sont appelés des voisinages fermés de a (dans $\mathbb{R}$);

- un voisinage ouvert (respectivement fermé) de $+\infty$ est un intervalle de la forme $]A,+\infty[$(respectivement $[A,+\infty[$) avec $A \in \mathbb{R}$;
- un voisinage ouvert (respectivement fermé) de $-\infty$ est un intervalle de la forme $]-\infty, A[$(respectivement $]-\infty, A]$) avec $A \in \mathbb{R}$.

On note $\mathcal{V}_f(a)$ l'ensemble des voisinages fermés de a.

值得注意的是，在 a 有限的情况下我们的领域实际上就是 boule。另外，$\mathcal{V}_f(a)$ 是一个邻域的集合，里面的元素不是 x, 而是作为 x 的集合的闭邻域。

Proposition 7.1.

$$a \in \overline{I} \ \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}_f(a), I \cap V \neq \emptyset.$$

Définition 7.2. Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et $a \in \overline{I}$. On dit qu'une propriété relative à f est vraie au voisinage de a (ou localement en a) s'il existe un voisinage **ouvert** $\mathcal{B}$ de a telle que la propriété est vraie sur $I \cap \mathcal{B}$.

Définition 7.3. Définition générale de la limite Soient $a \in \overline{I}, l \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f admet l pour limite en a si:

$$\forall U \in \mathcal{V}_f(l), \exists V \in \mathcal{V}_f(a), \forall x \in I \cap V, f(x) \in U.$$

Proposition 7.2. *Limite d'une fonction composée et caractérisation séquentielle de la limite Soient $f : I \to J \subset \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{K}$ deux fonctions, a$\in \overline{I}$.On suppose que :*

1. $\lim_{x\to a} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$;
2. $\lim_{x\to l} g(x) = L$.

Alors $g \circ f$ admet une limite en a et $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = L$.

Chapter 8

Relation de comparaisons

Proposition 8.1. *$f \underset{a}{=} o(g)$ si et seulement si il existe une fonction h, définie sur un voisinage V de a telle que $f(x) = g(x)h(x)$ pour tout x dans V et telle que* $\lim_{x\to a} h(x) = 0$

证明.

- Montrons $\Rightarrow$

  On suppose que $f \underset{a}{=} o(g)$.Prenons pour commencer,$\epsilon = 1 > 0$.Il existe alors un voisinage ouvert V_1 de a tel que: $(\star)\ \forall x \in I \cap V_1, |f(x)| \leq |g(x)|$
  .

  On définit alors la fonction h sur $I \cap V_1$ par:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} & \text{si } g(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } g(x) = 0 \end{cases}$$

□

Chapter 9

Suites réelles et complexes

9.1 Suite de nombres réels

9.1.1 Définition

On appelle suite de nombre réels une fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Pour tout entier n, on note $u(n) = u_n$. On note alors $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite u et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

Si u est une suite, on appelle u_n le nième terme de la suite u (ou terme d'indice ou de rang n). La suite u est alors notée $(u_n)_{n\in N}$ ou (u_n) plus simplement.Par extension, nous appellerons aussi suite réelle une famille de réels indexée par un intervalle d'entiers du type $[\![n_0, +\infty[\![$ .La suite u est dans ce cas notée $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Une suite peut être définie de trois manières différentes :
1.par une formule explicite : chaque terme de la suite est donné directement en fonction de n, soit $u_n = f(n)$.
2.par une formule de récurrence : u_n est exprimé en fonction de n et des termes précédents : $u_{n-1}, ..., u_0$
3.par une formule implicite : le terme général un de la suite est solution d'

une équation dépendant de n. Par exemple,

$\forall n \in \mathbb{N}$, u_n est l'unique solution de l'équation $x^3 + x - 1 = n$

rang et suite stationnaire On dit qu'une suite (u_n) satisfait la propriété $P(n)$ à partir d'un certain rang s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, P(n)$ est vraie.

La suite (u_n) est dite stationnaire si elle est constante à partir d' un certain rang i.e si : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}$.

Exemple: La suite (u_n) définie par $u_n = \prod_{k=0}^{n}(100-k)$ est stationnaire, constante égale à 0 à partir du rang n = 100.

Théorème(basic) de la relation équivalante Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suite complexes ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow u_n \underset{+\infty}{=} v_n + o(v_n).$$

证明.

$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Longleftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1 \Longleftrightarrow \frac{u_n}{v_n} \underset{+\infty}{=} 1+o(1) \Longleftrightarrow u_n \underset{+\infty}{=} v_n+v_n o(1) \Longleftrightarrow u_n \underset{+\infty}{=} v_n+o(v_n).$$

(car $\frac{v_n o(1)}{v_n} = o(1) \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$)

□

9.1.2 Séries

Définition: Soit u dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ On appelle série de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite S $\in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{R}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

On note aussi $\sum u_k$ la suite S de terme général $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

这里非常秀的是将级数定义的像是一个与另一个数列挂钩的数列，完全刷新了我以前对级数的认识。从而将级数划归到了实数列的研究范围。所以我们可以借助数列发散收敛的相关成果来研究一下级数的发散收敛问题。但是这里有一个非常技巧性的，用于确定级数范围 (是否有界) 的方法 (Comparaison avec une intégrale，其实就是一个不等式), 同时它也可以给出一个关于级数的行为的很好的“点子”，即给出它的等价 (对发散级数)。Ce genre de méthode va marcher quand on étudie une série de terme général $(f(k))_{k\in\mathbb{N}}$ avec f une fonction monotone et continue.

下面举一个判定级数收敛性的例子，方法是用‘单调有界数列收敛’这一性质去判断。即先研究单调性，再研究有界性。

Exemple：Montrer que la série de terme général $(\frac{1}{(n+1)^2})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

证明. Ici, $\forall$ n $\in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}$.
Pour tout n dans $\mathbb{N}$，

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(k+1)^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{(n+2)^2} \geq 0.$$

La suite S est donc croissante.
De plus, pour k dans $\mathbb{N}^*$, la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ est décroissante sur [k,k+1],donc:

$$\forall t \in [k, k+1], \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$$

Pour k dans $\mathbb{N}^*$, la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ est continue sur [k,k+1].Intégrant l’ inégalité précédentes, on obtient :

$$\forall t \in [k, k+1], \frac{1}{(k+1)^2} = \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

这一步利用了积分的保号性，不等式两边同时乘上 dt 后对 t 求和 (即对 t 积分) 这里注意 $\frac{1}{(k+1)^2}$ 与积分变量 t 无关，而积分的上下限选取又恰好是一个长度为 1 的区间从而我们保证了左边我们研究的项在积分后不变而右边变成了积分的形式，从而得到了一个新的限制关系 (同一个量同时满足小于

一个函数和它的积分)。事实上，我们只是利用这种操作来得到一个放缩的灵感，来从无到有的人为构建放缩不等式，这时我们利用右边构建的定积分写成了一个可以求和的”差项“级数，即前后项可以互相抵消一部分。

On obtient donc que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$，

$$S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant 1 + (1 - \frac{1}{n+1}) \leqslant 2$$

La suite S est croissante et majorée, donc converge.
Conclusion : la série de terme général $(\frac{1}{(n+1)^2})_{n\in\mathbb{N}}$ converge. □

Remarque:“积分比较”不但可以确定一个级数收敛，也可以给出级数和的一组上下界,

$$\forall t \in [k, k+1], \frac{1}{t^2} \leqslant \frac{1}{k^2}$$

On obtient :

$$\forall t \in [k, k+1], \frac{1}{k^2} = \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k^2} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k^2}\,\mathrm{d}t$$

Soit:

$$\frac{1}{n^2} + (1 - \frac{1}{n+1}) \leqslant S_n = \frac{1}{n^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

取极限后，我们最终得到级数和的范围在 1 和 2 之间.

Théorème de Césaro 这个定理给出了一种特殊级数和其项数列的收敛关系。我们先给出这种特殊的级数：

Définition: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle;on lui associe la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$v_0 = u_0 \quad et \quad \forall n \in \mathbb{N}*, v_n = \frac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée moyenne de Césaro de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème: Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l alors La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers l

证明. Soit $\epsilon > 0$ fixé, on veut montrer que $\exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ on ait $|v_n - l| < \epsilon$.

Or par hypothèse $\lim_{n\to\infty} u_n = l$,donc:

$\exists p = p(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p$ on ait $|u_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$

On a pour tout $n \geq p$,

$$\begin{aligned} v_n - l &= \frac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n} - l \\ &= \frac{u_1 + u_2 + ... + u_p + u_{p+1} + ... + u_n - nl}{n} \\ &= \frac{(u_1 - l) + (u_2 - l) + ... + (u_p - l) + (u_{p+1} - l) + ... + (u_n - l)}{n} \\ &= \frac{(u_1 - l) + (u_2 - l) + ... + (u_p - l)}{n} + \frac{(u_{p+1} - l) + ... + (u_n - l)}{n} \end{aligned}$$

En vertu de l'inégalité triangulaire :

$$|v_n - l| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}|u_k - l| + \frac{1}{n}\sum_{k=p+1}^{n}|u_k - l|.$$

En posant

$$C = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}|u_k - l|$$

(notons que C est une constante indépendante de n) et puisque $|u_k - l| < \frac{\epsilon}{2}$ pour tout k $\geq$ p, on a :

$$\begin{aligned} |v_n - l| \leq& \frac{C}{n} + \frac{n-p}{n}\frac{\epsilon}{2}. \\ \leq& \frac{C}{n} + \frac{\epsilon}{2} \quad (car \quad \frac{n-p}{n} < 1). \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\lim_{n\to\infty} \frac{C}{n} = 0$ donc

$\exists q = q(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq q$ on ait $|\frac{C}{n}| = \frac{C}{n} < \frac{\epsilon}{2}$

Donc,en prenant $N = max(p, q)$, on a finalement:

$\exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ on ait $|v_n - l| < \epsilon$.

□

Théorème de Bolzano-Weierstrass Soit u dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. Alors, il existe une suite extraite de u qui est convergente.

证明. Soit u une suite bornée. Pour commencer, je définie un ensemble $\mathfrak{BW}$:

$$\mathfrak{BW} = \{n_0 \in \mathbb{N} | \forall n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \leqslant u_{n_0}\}$$

这里定义出 $\mathfrak{BW}$(BW 代表 Bolzano-Weierstrass) 是第一次 extraction 的像集，这个 extraction 做了这样一次抽取即，使得它的像集的元素及其对应的 u 中的项暗含了一个递减数列。从这个比较抽象和模糊的集合出发我们根据它是无限集和有限集分两种情况，用数学归纳法来分别定义两个对映的具体的 extraction(能用数学归纳法来定义的也只有以 $\mathbb{N}$ 为出发集的函数了)。

Cas1 l’ensemble $\mathfrak{BW}$ est infini.

Je définis une fonction $\mathbb{N} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{N}$ par récurrence en posant :

$$\varphi(0) = inf\{n \in \mathfrak{BW}\}$$

$\mathfrak{BW}$ est un ensemble d’entiers non-vide, donc il contient un plus petit élément qui est dans $\mathbb{N}$ et $\varphi(0) \in \mathbb{N}$.

$\varphi(k)$ étant défini, on pose :

$$\varphi(k+1) = inf\{n \in \mathfrak{BW} \backslash \{\varphi(0), ..., \varphi(k)\}\}$$

On construit ainsi par récurrence une extraction φ. $\mathfrak{BW} \backslash \{\varphi(0), ..., \varphi(k)\}$ d’entiers non-vide (car sinon $\mathfrak{BW}$ est fini), donc il contient un plus petit élément qui est dans $\mathbb{N}$ et $\varphi(k+1) \in \mathbb{N}$ et $\varphi(k+1) \geq \varphi(k)$.

上面的最后一条关系是利用了以下原理:$\varphi(k), \varphi(k+1) \in \mathfrak{BW} \backslash \{\varphi(0), ..., \varphi(k-1)\}$，但是 $\varphi(k)$ 却做了这个集合的下界，从而一定有 $\varphi(k+1) \geq \varphi(k)$。

La suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée puisque u est minorée. La suite est également décroissante. 因为 $(\varphi(n))_{n \in \mathbb{N}}$ 在集合 $\mathfrak{BW}$ 里，而集合 $\mathfrak{BW}$ 的定

义是一个性质定义，它的每一个元素对映的 u 中的项是所有比它大的元素对映的 u 中的项中最大的。所以，元素越小的对应的 u 中的项就越大。这里的这个结论也可以直接由定义中的逻辑命题和单调递减数列判定命题结合得出。La suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée, donc converge.

Cas2 l'ensemble $\mathfrak{BW}$ est fini，je note N son plus grand élément (si par hasard M est vide, 这时 N 取谁是任意选取的，je prends N = 0，). 因为收敛是无穷数列的性质，所以这里 $\mathfrak{BW}$ 已经不再是我们需要的 extraction 了，同样这也绝了我们想要构建一个递减无穷数列的念头。但这里我们没有必要再建立一个抽象的 extraction 而是利用这种对递减数列的排除直接在 $\mathfrak{BW}$ 外 (这个外只能指 majorant，因为无穷数列的指标都要递增往正无穷) 用数学归纳法搭建一个逐项递增的无穷数列。On définit une extraction $\mathbb{N} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{N}$ par récurrence en posant $\varphi(0) = N + 1$. $N + 1 \notin \mathfrak{BW}$. $\varphi(k)$ étant construit, on pose :

$$\varphi(k+1) = inf\{n \in [\![\varphi(k)+1, +\infty[\![, u_{\varphi(k+1)} \geq u_{\varphi(k)}\}$$

这个集合永远非空，因为我们所选的元素都不在 $\mathfrak{BW}$ 中，等于说是对 $\mathfrak{BW}$ 中性质命题的否定，然后我们会得到一个关于存在性 (任意的否定) 的结论。另外在用数学归纳法构建 extraction 时，inf 是一个很好用的逐项筛选工具，只要在其后把我们需要的集合范围加上，我们就等于确定了一个抽象且合理的对象 (项)。La suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. La suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi majorée, donc cette suite converge.

Dans tous les cas, on a donc construit une suite extraite convergente, ce qui prouve le théorème de Bolzano-Weierstrass. □

Chapter 10

Dérivation

1. 导数的定义: Soit $f : I \longrightarrow R$ et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. On note alors : $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

2. 一阶 DL 与导数的等价 (不能推广到 $n \geq 2$ 的阶数): Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}($ ou bien $\mathbb{C})$ et $a \in I$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) f est dérivable en a et $f'(a) = \lambda$;

(ii) $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \lambda(x-a) + o(x-a)$

La seconde forme est appelée le développement limité d'ordre 1 de f en a. On écrit aussi souvent pour le DL que $f(h+a) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \lambda h + o(h)$.

3. 可导必连续: Si f est dérivable en a, alors f est continue en a

4. 导数的代数结构 Lensemble $A = \{I \xrightarrow{f} \mathbb{R} \mid f \text{ derivable en } a\}$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre. De plus, l'application $f \longmapsto f'(a)$ est une application linéaire.

5. 常用的导数 (比较不熟的)

Fonction	Dérivée	Intervalle de validité
$f(x)=\mathrm{ch}(x)$	$f'(x)=\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\mathrm{sh}(x)$	$f'(x)=\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\mathrm{th}(x)$	$f'(x)=1-\mathrm{th}^2(x)$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\arcsin(x)$	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,[1$
$f(x)=\arctan(x)$	$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\mathrm{Argch}(x)$	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]\,1,+\infty[$
$f(x)=\mathrm{Argsh}(x)$	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\mathrm{Argth}(x)$	$f'(x)=\frac{1}{1-x^2}$	$]-1,1[$
$\ln\lvert u\rvert$	$\frac{u'}{u}$	u garde un signe constant sur I (ou u ne s'annule pas sur I)
u^α	$\alpha u^t u^{\alpha-1}$	$\alpha\in\mathbb{R}$ et $u>0$
u^v	$\left(v'\ln(u)+\frac{vu'}{u}\right)u^v$	$u>0$ sur l'intervalle I

6. 反函数的导数的有关结论: Soit $f : I \to J$ continue et bijective, $a \in I$ et $b = f(a)$. Alors: (i) Si $f'(a)$ existe et $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$. (ii) Si $f'(a)$ existe et $f'(a) = 0$, alors $\lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b} = +\infty$. $y \neq b$ (iii) Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$, alors f^{-1} est dérivable en b et $(f^{-1})'(b) = 0$. En particulier, si f est dérivable sur I et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors f^{-1} est dérivable sur J et on a : $(f^{-1})' = \frac{1}{f' o f^{-1}}$

7. 可导和连续的集合论语言：Soit f une fonction de I dans $\mathbb{K}$. On note $\mathcal{D}^n(I)$ l'ensemble des fonctions n -fois dérivables sur I. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I, et on note $f \in \mathcal{C}^n(I)$, si f est n fois dérivable sur I et si $f(n)$ est continue sur I. - On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si $\forall n \in N, f \in \mathcal{C}^n(I)$ $\mathcal{C}^0(I) \supset \mathcal{D}^1(I) \supset \mathcal{C}^1(I) \supset \mathcal{D}^2(I) \supset \cdots \supset \mathcal{D}^n(I) \supset \mathcal{C}^n(I) \supset \mathcal{D}^{n+1}(I) \supset \cdots \mathcal{C}^\infty(I)$

8.n 阶可导的定义: Soit $n \geq 2$. On dit que f est n fois dérivable en a si f est $n-1$ fois dérivable sur un voisinage de a et si $f^{(n-1)}$ est dérivable en

a. On pose alors $\left(f^{(n-1)}\right)'(a)=f^{(n)}(a)$

9. 可导和连续集的代数结构：Soit $n>1$

(i) Les ensembles $\mathcal{D}^n(I), \mathcal{C}^n(I)$ et $\mathcal{C}^\infty(I)$ sont des $\mathbb{K}$-algèbres.

(ii) Si $f\in\mathcal{D}^n(I)$ (respectivement $f\in\mathcal{C}^n(I)$, respectivement $f\in\mathcal{C}^\infty(I)$) et si fne s'annule pas sur I, alors $\frac{1}{f}\in\mathcal{D}^n(I)$ (respectivement $\frac{1}{f}\in\mathcal{C}^m(I)$, respectivement $\frac{1}{f}\in\mathcal{C}^\infty(I)$

(iii) Si $f: I\to J$ et $g: J\to K$ sont $\mathcal{D}^n$ (respectivement $\mathcal{C}^n$, respectivement $\mathcal{C}^\infty$), alors $g\circ f$ est $\mathcal{D}^n$ (respectivement $\mathcal{C}^n$, respectivement $\mathcal{C}^\infty$).

(iv)Soit $f: I\to J$ une bijection. On suppose que :

1. f est de classe $\mathcal{D}^n$ (respectivement $\mathcal{C}^n$) sur I ;

2. $\forall x\in I, f'(x)\neq 0$. Alors f^{-1}, la bijection réciproque de f, est de classe $\mathcal{D}^n$ (respectivement $\mathcal{C}^n$) sur J.

证明. On démontre le résultat par récurrence sur $n\geqslant 1$.

Initialisation:

Pour $n=1$, c'est le théorème de dérivabilité de la bijection réciproque. Si on rajoute $\mathcal{C}^1$, il n'y a qu'à rajouter que f' est alors continue et ne s'annule pas, f^{-1} est également continue donc $\frac{1}{f'\circ f^{-1}}$ est continue, c'est-à-dire $(f^{-1})'$ est continue sur J.

Hérédité:

On suppose la propriété vraie au rang $n\geqslant 1$ et on montre qu'elle est vraie au rang $n+1$. Soit f une bijection de I dans J, de classe $\mathcal{D}^{n+1}$ (respectivement $\mathcal{C}^{n+1}$) et telle que f' ne s'annule pas sur I. Puisque $\mathcal{D}^{n+1}\subset\mathcal{D}^1$, la propriété au rang 1 assure que f^{-1} est dérivable sur J et que :

$$\left(f^{-1}\right)'=\frac{1}{f'\circ f^{-1}}$$

Or, par hypothèse de récurrence, $f^{-1}\in\mathcal{D}^n(J)$ (respectivement $\mathcal{C}^n$) et de plus, $f'\in\mathcal{D}^n(I)$ (respectivement $\mathcal{C}^n$). D'après la proposition précédente,

$f' \circ f^{-1}$ est $\mathcal{D}^n$ sur J (respectivement $\mathcal{C}^n$) et ne s'annule pas par hypothèse. Par conséquent, $(f^{-1})'$ est de classe $\mathcal{D}^n$ sur J (respectivement $\mathcal{C}^n$), c'est-à-dire $f^{-1} \in \mathcal{D}^{n+1}(J)$ (respectivement $\mathcal{C}^{n+1}(J)$) Ce qui montre que la propriété est vraie au rang $n+1$ et achève la récurrence.

□

10. Formule de Leibniz

Soient f et g deux fonctions $\mathcal{D}^n$ sur I. Alors $fg \in \mathcal{D}^n(I)$ et on a :

$$\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}}$$

证明. A nouveau, on démontre cette formule par récurrence.

Initialisation:

Pour $n = 0$, il n'y a rien à prouver.

Hérédité: On suppose la propriété vraie au rang n et on montre qu'elle est vraie au rang $n+1$. Soient f et g deux fonctions $\mathcal{D}^{n+1}$ sur I. Puisque $n+1 \geqslant 1$, f et g sont dérivables sur I. Par conséquent, fg est dérivable sur I et : $(fg)' = f'g + fg'$ Or, $f' \in \mathcal{D}^n(I), g' \in \mathcal{D}^n(I)$ et $f, g \in \mathcal{D}^{n+1}(I) \subset \mathcal{D}^n(I)$. On applique alors l'hypothèse de

récurrence : $f'g \in \mathcal{D}^n(I), fg' \in \mathcal{D}^n(I)$ et:

$$(f'g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} (f')^{(k)} g^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} = \sum_{k=1}^{n+1} \tbinom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

et de même,

$$(fg')^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$$

Il s'ensuit que

$$
\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= (f'g)^{(n)} + (fg')^{(n)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \binom{n}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n}{n} f^{(n+1)} g^{(0)} \\
&= \binom{n+1}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}
\end{aligned}
$$

montre aue la propriété est vraie au rang $n+1$ et achève la récurrence.

$\square$

Chapter 11

Probabilité

11.1 Définition et propriétés d'une probabilité

11.1.1 Définition

Soit Ω un univers fini.On appelle mesure de probabilité (ou probabilité) sur Ω toute application :

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$$

satisfaisant les propriété suivantes:

1.pour tout A $\in \mathcal{P}(\Omega)$,0 $\leqslant$ P(A) $\leqslant$ 1;

2.P(Ω) = 1;

3.pour tout (A,B) $\in \mathcal{P}(\Omega)^2$ tel que A$\cup$B = $\emptyset$, P(A$\cup$B)=P(A)+P(B).

On dit alors que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilité.On dit aussi que (Ω, P) est un espace probabilité.

11.1.2 Mesure de Dirac en ω

Soit Ω un univers fini non vide et soit $\omega_0 \in \Omega$.On considère l'application δ_{ω_0} définie par:

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \delta_{\omega_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_0 \in A, \\ 0 & \text{si } \omega_0 \notin A, \end{cases}$$

Alors δ_{ω_0} est une mesure de probabilité sur Ω,appelé mesure de Dirac en ω_0

11.2 Set

11.2.1 Atoms

For any set A, we have the obvious decomposition:

$$\Omega = A + A^c$$

The way to think of this is: the set A gives a classification of all points ω in Ω according as ω belongs to A or to A^c. A college student may be classified according to whether he is a mathematics major or not, but he can also be classified according to whether he is a freshman or not, of voting age or not, has a car or not, ... , is a girl or not. Each two-way classification divides the sample space into two disjoint sets, and if several of these are superimposed(叠合) on each other we get, e.g.,

$$\begin{aligned}
\Omega &= (A + A^c)(B + B^c) \\
&= AB + A^cB + AB^c + A^cB^c, \\
\Omega &= (A + A^c)(B + B^c)(C + C^c) \\
&= ABC + A^cBC + AB^cC + A^cB^cC + ABC^c + A^cBC^c + AB^cC^c + A^cB^cC^c,
\end{aligned}$$

Let us call the pieces of such a decomposition the atoms.There are 2, 4, 8 atoms respectively above because 1, 2, 3 sets are considered. In general there will be 2^n atoms if n sets are considered. Now these atoms have a remarkable property, which will be illustrated 在涉及三个集合 A，B，C 的那种情况下, as follows: no matter how you operate on the three sets A, B, C, and no matter how many times you do it, the resulting set can always be written as the union of some of the atoms. Here are some examples:

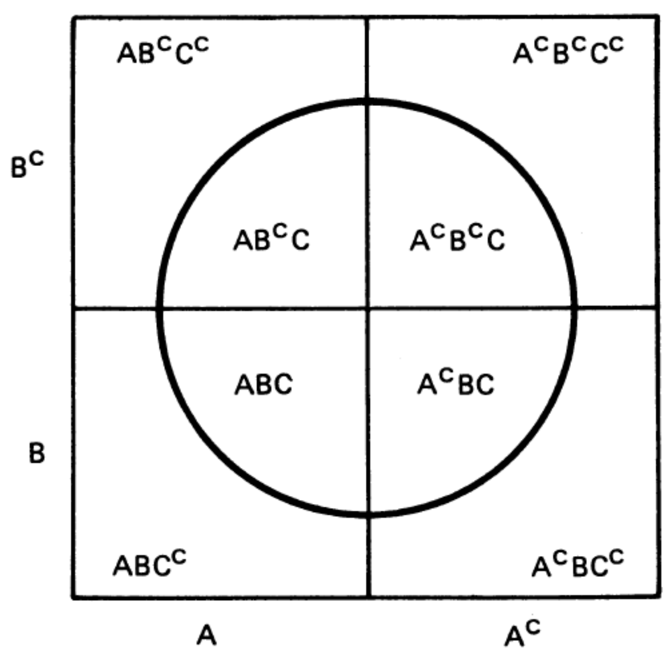
$$A \cup B = ABC + A^cBC + AB^cC + ABC^c + A^cBC^c + AB^cC^c$$

$$(A \backslash B) \backslash C^c = AB^cC$$

$$(A \triangle B)C^c = A^cBC^c + AB^cC^c$$

注意 $A \cup B$ 不能写成 $A + B$, 因为 A 与 B 的交集非空

具体的理解可以一图胜千言，对照着下图中的区域去验证



Chapter 12

Relations and Operations

A relation R on X is reflexive if xRx for all $x \in X$,that is,if R contains the **diagonal**

$$\underset{X}{\triangle} := \{(x, x); x \in X\}$$

Chapter 13

Groups and Homomorphisms

13.1 Cosets

Let N be a subgroup of G and $g \in G$.Then $g \odot N$ is the **left coset** and $N \odot g$ is the **right coset** of $g \in G$ with respect to N .If we define

$$g \sim h :\Longleftrightarrow g \in h \odot N,$$

then $\sim$ is an equivalent relation on G: **If $\mathbf{g} \in \mathbf{h} \odot \mathbf{N}$, then there is some $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$ with $\mathbf{g} = \mathbf{h} \odot \mathbf{n}$.** Indeed, $\sim$ is reflexive because $e \in N(g = g \odot e$, 所以 $g \sim g)$. If $g \in h \odot N$ and $h \in k \odot N$,then

$$g \in (k \odot N) \odot N = k \odot (N \odot N) = k \odot N$$

Chapter 14

Généralité sur espace vectoriel

Définition 14.1. Soient E un ensemble et $\mathbb{K}$ un corps commutatif(ici,$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).On dit que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou bien un $\mathbb{K}$-espace vectoriel) lorsque E est muni:

-d'une loi de composition interne, notée +,telle que $(E, +)$ soit un group abélien

-d'une loi de omposition externe ,notée $\cdot$, $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ vérifiant les propriétés suivantes:

P1 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E, (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$

P2 $\forall \lambda, \forall u, v \in E, \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$

P3 $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E, (\lambda \times \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$

P4 $\forall u \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot u = u$

Les éléments de E sont appelés les vecteurs et les éléments de $\mathbb{K}$ les scalaires

Remarque 14.1. $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Proposition 14.1. *Soit X est un ensemble quelconque et $(F,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.Alors l'ensemble $\mathcal{F}(X, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les* *opérations suivantes définies pour tout f,g* $\in \mathcal{F}(X,F)$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$*:*

$$\begin{aligned} f \oplus g : X &\to F & \quad et \quad \lambda \odot f : X &\to F \\ x &\mapsto f(x)+g(x) & x &\mapsto \lambda \cdot f(x) \end{aligned}$$

Remarque 14.2. Les ensembles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ sont des $\mathbb{R}$-espace vectoriel.Les ensembles $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ et $\mathcal{F}(I,\mathbb{C})$ sont des $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

之所以给出这些常见的 espace vectoriel，是因为我们以后不想再来重复造轮子了，争取一次证明，以后一直用着.

Remarque 14.3. Notez la différence fondamentale dans les règles entre espaces vectoriels et anneaux:

dans un espace vectoriel, $\lambda \cdot u = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad ou \quad u = 0$

证明. $(\lambda \cdot u = 0_E \Rightarrow \lambda = 0_{\mathbb{K}} \quad ou \quad u = 0_E) \Leftrightarrow (\lambda \cdot u = 0_E \quad et \quad \lambda \neq 0_{\mathbb{K}} \Rightarrow u = 0_E)$

这里用逻辑符号改写，利用同种符号的交换性和否定的改写可以得到这个等价，这样我们就控制了变量。

Soient λ un scalaire non nul et u un vecteur tels que $\lambda \cdot u = 0_E$.$\mathbb{K}$ est un corps et $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ donc λ admet un inverse pour la loi $\times$ dans $\mathbb{K}$ Il vient alors:

$$0_E = \lambda^{-1} \cdot 0_E = \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot u) = (\lambda^{-1} \times \lambda) \cdot u = 1_{\mathbb{K}} \cdot u = u$$

□

dans un anneau,$a \times b = 0 \nRightarrow a = 0 \quad ou \quad b = 0$ (例子：在 ($\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$,+,∘) 这个 anneau 中定义 f 和 g 分别在不同的点不为 0，在其他点都为 0，则 f∘g=0 但 f≠0 且 g≠0)

Définition 14.2. Soient $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs.On appelle combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ tout vecteur v sécrivant sous la forme :

$$v = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot u_k$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont scalaires

Définition 14.3. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F$\subset$E.On dit que F est un sous-$\mathbb{K}$-espace vectoriel de E si:

(i)$0_E \in F$

(ii)F est stable par combinaisons linéaires

Définition 14.4. Soient E un espace vectoriel et u un vecteur non nul.On pose alors:

$$\mathbb{K} \cdot u = \{\lambda \cdot u, \lambda \in \mathbb{K}\}$$

On dit que $\mathbb{K} \cdot u$ est la droite vectorielle dirigée par u ou que u est un vecteur dircteur de $\mathbb{K} \cdot u$

Proposition 14.2. *Soit u$\in E \setminus \{0_E\}$.Alors, $\mathbb{K} \cdot u$ est un sous-espace vectoriel de E.De plus, tout élément non nul de $\mathbb{K} \cdot u$ est un vecteur directeur de $\mathbb{K} \cdot u$.*

Chapter 15

Opération sur les espaces vectoriels

15.1 Intersection et sous-espace engendré par une partie

Proposition 15.1. Intersection *Soient E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E.Alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.*

注意这是一个关于运算的命题，这个运算的被拿出来说的重要性就在这里体现了，也就是子向量空间的交集运算是 ***stable*** 的。

证明. On applique les définitions.

-Pour tout i∈I,F_i est un sous-espace vectoriel de E donc:

$$\forall i \in I, 0_E \in F_i$$

Ce qui équivaut à $0_E \in \bigcap_{i\in I} F_i$

-Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $u, v \in \bigcap_{i\in I} F_i$.Soit $i \in I$.Puisque F_i est un sous-espace vectoriel de E,$\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F_i$.Ceci étant vrai pour tout $i \in I$,on en déduit que :

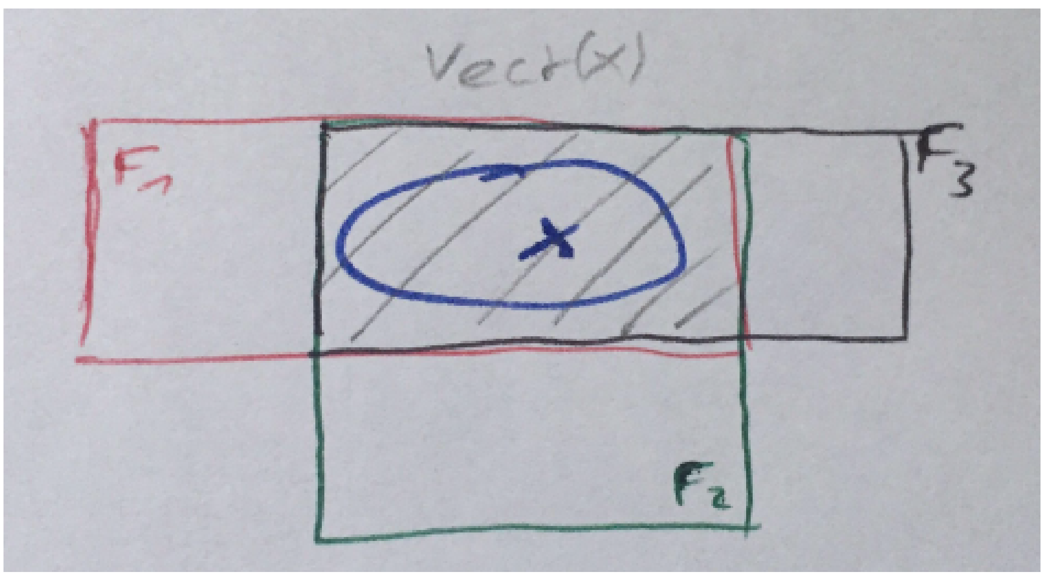
$$\lambda \cdot u + \mu \cdot v \in \bigcap_{i \in I} F_i$$

Ce qui prouve que $\bigcap_{i \in I} F_i$ est bien un sous-espace vectoriel de E. □

Définition 15.1. Espace vectoriel engendré par une partie Soient E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X⊂E une partie quelconque de E.On appelle espace vectoriel engendré par X,et on note $Vect(X)$ ou $\langle X \rangle$,l'ensemble défini par :

$$\langle X \rangle = \bigcap_{\substack{X \subset F \\ F sev E}} F$$

Dans le dessin suivant, on suppose qu'il y a trois sev de E qui contiennent X.(En fait, cette situation ne peut pas se produire en réalité.)



注意联系：首先，“叫响名字”：一个是子向量空间的交集运算，一个是从向量空间集 **E** 中提取了一个任意子集 **X** 来对交集运算中未明的 **I** 集合进行抽象的效果定义，即，$I = \{i| \quad X \subset F_i\}$，其实是相当于交集运算中的特例.

Proposition 15.2. *Pour toute partie* $X \subset E, < X >$ *est un sous-espace vectoriel de E et c'est le plus petit sous-espace vextoriel de E(au sens de l'inclusion) qui contient X*

Remarque 15.1. $< \emptyset >= \{0_E\}$

15.2 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 15.2. Somme de deux sous-espaces vectoriels Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.On définit la somme de F et G, noté $F+G$, par :

$$F+G = \{u \in E| \quad \exists (x,y) \in F \times G, u = x+y\}$$

Proposition 15.3. Propriété de somme de deux sous-espaces vectoriels *Avec les hypothèse de la définition ,* $F+G$ *est un sous-espace vectoriel de contenant F et G, c'est-à-dire que*

$$F+G = Vect(F \cup G)$$

证明. Montrons directement que $F+G = Vect(F \cup G)$,ce qui prouvera également que $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Montrons que $F+G \subset Vect(F \cup G)$.

Soit u $\in F+G$.Par définition , il existe x$\in$F et y$\in$ G tels que u=x+y.On a alors $u = 1_{\mathbb{K}} \cdot x + 1_{\mathbb{K}} \cdot y$ avec x,y $\in$ F$\cup$G et $1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ donc $u \in \langle F \cup G \rangle$

Montrons que $\langle F \cup G \rangle \subset F+G$

Soit u$\in \langle F \cup G \rangle$.Il existe $n \in \mathbb{N}, (n)_{0 \leq i \leq n} \in (F+G)^{n+1}$ et $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que: $u = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i$ Posons $I = \{i \in [\![0,n]\!]| \quad x_i \in F\}$ et $J = [\![0,n]\!] \backslash I$.On a alors :

$$u = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \quad + \quad \sum_{j \in J} \lambda_j x_j$$

Pour tout $i \in I$, $x_i \in F$ et F est un sous-espace vectoriel de E donc: $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \in F$.De même, pour tout $j \in J, x_j \in G \backslash F \subset G$ et G est un sous-espace vectoriel de E donc $y = \sum_{j \in J} \lambda_j x_j \in G$ .Notez bien que si $I = \emptyset$ ou $J = \emptyset$, le résultat est encore valable puisque $\sum_{i \in \emptyset} \lambda_i x_i = 0_E$ qui appartient bien à F et à G .

Ainsi,$u = x + y$ avec $x \in F$ et $x \in G$, c'est-à-dire $u \in F + G$. D'où , la seconde inclusion □

15.3 Sommes directes et sous-espaces sectoriels supplémentaires

Proposition: 直和的等价 (具体形式) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F,G deux sous-espaces vectoriels de E.Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:

(i)F et G sont en somme dircte;

(ii)Tout éléments u de $F + G$ se décompense de façon unique sous la forme $u - x + y$ avec $x \in F$ et $y \in G$,c'est-à-dire

$$\forall u \in F + G, \exists !(x, y) \in F \times G, u = x + y$$

证明. Montrons $(ii) \implies (i)$.
On suppose (ii).Soit $x \in F \cup G$.Alors, par exemple,$(-x) \in G$.Il s'ensuit que $0_E = x + (-x)$ avec $x \in F$ et $(-x) \in G$.Or, on a également $0_E \in F \cup G$: on peut donc aussi écrire $0_E = 0_E + 0_E$ avec $(0_E, 0_E) \in F \times G$.D'après (ii), la décomposition est unique : ceci implique que $x = 0_E$,prouvant ainsi que $F \cup G = 0_E$ □

Definition: Supplémentaire Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espace vectoriels de E.On dit que F et G sont supplémentaires (ou supplémentaire dans E) si tout vecteur de E peut se décomposer de façon unique en la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.Autrement dit F et G sont supplémentaire si:

$$\forall u \in F + G, \exists!(x, y) \in F \times G, u = x + y$$

Théorème: Existence du supplémentaire Soit E un espace sectoriel et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F admet au moins un supplémentaire dans E.

15.4 Produit cartésien de deux espaces vectoriel

Chapter 16

Applications linéaires

Définition 16.1. Applications Linéaires morphisme

Proposition 16.1. Equivalence pour voir si une application est linéaire 验证线性映射的过程，有一点像验证子向量空间的线性组合 ***stable*** 的过程 *(*区别在于原来是在一个集合内部，现在是两个集合之间*)*，但是因为线性映射的定义的性质中带有 $\mathbf{f(0_E) = 0_F}$，所以不用看

这个命题还是比较有意思的，有助于理解线性映射的定义和外延. 注意如何在未知是线性映射的情况下要重新证明 $\mathbf{f(0_E) = 0_F}$

$\mathbf{f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \longmapsto (2x, x + y)}$ 比较抽象的线性映射

否定一个线性映射可以用 $f(0_E) \neq 0_F$ 来判断

Définition: forme linéaire

16.0.1 Restriction et recollement

Théorème 16.1. Théorème de recollement *Soient E,F deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et G,H deux sous-espaces vectoriels supplémentaire dan E.Alors* *l'application:*

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{L}(G, F) \times \mathcal{L}(H, F) \\ f \mapsto (f|_G, f|_H) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels.En clair ,la connaissance d'une application linéaire sur deux sous-espaces vectoriels supplémentaire détermine l'application linéaire de façon unique.*

证明.

- Tout d'abord,d'après ce qui précède ,$\mathcal{L}(E, F), \mathcal{L}(G, F), \mathcal{L}(H, F)$ sont des $\mathbb{K}$-espace vectoriel.Par suite,$\mathcal{L}(G, F) \times \mathcal{L}(H, F)$ est aussi un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Ensuite,d'après la proposition précédente,si $f \in \mathcal{L}(E, F)$,alors $f_{|G} \in \mathcal{L}(G, F)$ et $f_{|H} \in \mathcal{L}(H, F)$.Par conséquent,$\phi$ est bien définie.

- Par ailleurs, il est clair que pour toutes $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$,pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,et pour tout sous-espace vectoriel A de E,$(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)_{|A} = \lambda \cdot f_{|A} + \mu \cdot g_{|A}$. Par suite,$\phi$ est linéaire.

- Montrons enfin que ϕ est bijective.

  -Injectivité

  Soit $f \in ker\phi$.Montrons que $f = 0$.Par définition de ϕ,$f_{|G} = 0$ et $f_{|H} = 0$.Soit alors $x \in E$ Puisque G et H sont supplémentaires dans E,il existe un unique couple (a,b)$\in G \times H$ tel que $x = a + b$.On a alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a+b) \\ &= f(a)+f(b) \\ &= f_{|G}(a)+f_{|H}(b) \\ &= 0+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquant,pour tout $x \in E, f(x) = 0$,c'est-à-dire $f = 0$(application nulle) et $ker\phi = \{0\}$,c'est-à-dire ϕ est injective.

-Surjectivité

Soient g$\in$ $\mathcal{L}(G, F)$ et h$\in$ $\mathcal{L}(H, F)$,Montrons qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f_{|G} \in \mathcal{L}(G, F)$ et $f_{|H} \in \mathcal{L}(H, F)$.

Soit $x \in E$:il exist un unique couple $(a, b) \in G \times H$ tel que $x = a+b$.On pose alors $f(x) = g(a)+h(b)$.Ceci définit bien une application f de E dans F puisque le couple (a,b) est unique.Montrons alors que f convient.

- Si $x \in G$,alors par unicité du couple $(a, b) \in G \times H$ tel que $x = a + b$,on a $a = x$ et $b = 0$.Alors,$f(x) = g(a) + h(b) = g(x) + h(0) = g(x) + 0 = g(x)$.Par suite,$f_{|G} = g$.
- De la même façon,on montre que $f_{|H} = h$.
- Montrons enfin que $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

  Soient $x, x' \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Il existe alors un unique couple $(a, b) \in G \times H$ et un unique couple $(a, b) \in G \times H$ tels que $x = a + b$ et $x' = a'+b'$.On a alors $\lambda \cdot x+x' = (\lambda \cdot a+a')+(\lambda \cdot b+b')$.G et H étant des sous-espaces vectoriels de E,$(\lambda \cdot a + a', \lambda \cdot b + b') \in G \times H$,Par suite,

$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot x + x') &= g(\lambda \cdot a + a') + h(\lambda \cdot b + b') \\ &= \lambda \cdot g(a) + g(a') + \lambda \cdot h(b) + h(b') \\ &= \lambda \cdot (g(a) + h(b)) + g(a') + h(b') \\ &= \lambda \cdot f(x) + f(x') \end{aligned}$$

Ce qui prouve que f est une application linéaire.

Ainsi,on a montre que pour tout $(g, h) \in \mathcal{L}(G, F) \times \mathcal{L}(H, F)$ qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f_{|G} \in \mathcal{L}(G, F)$ et $f_{|H} \in \mathcal{L}(H, F)$,c'est-à-dire $\phi(f) = (g, h)$.Par conséquant,ϕ est surjective.

$\square$

Chapter 17

Integration

We now turn to integration, which we develop as the ‘area under the curve’. We establish the existence and properties of the Riemann integral; this is an integral whose development is quite straightforward, and which is good for many of the needs of analysis. It has some shortcomings: it can only be applied to a restricted class of functions, and it is not easy to obtain good results about limits of integrals. For this, a more sophisticated(复杂的) integral, the Lebesgue integral, is needed.

As with all theories of integration, we proceed by approximation. To begin with, we restrict attention to bounded real-valued functions on a finite interval $[a, b]$. The easiest functions to start with are the step functions —— functions which take constant values v_j on a finite set $\{I_j : 1 \le j \le k\}$ of disjoint sub-intervals of $[a, b]$. The graph of such a function is a bar graph, and we define the elementary integral of such a function to be $\sum_{j=1}^{k} v_j l(I_j)$, where $l(I_j)$ is the length of the interval I_j. Note that v_j can be positive or negative, so that the integral can take positive and negative values. The idea of the Riemann integral of a function f is to approximate f from above and below by step functions. If the integrals of the approximations from above and from below approach a common limit, then we take this limit to be the

Riemann integral of f. In order to carry out this programme, we need to set up the appropriate machinery. A **dissection** D of $[a, b]$ is a **finite subset** of $[a, b]$ which contains both a and b. We arrange the elements of D, the points of dissection of D, in increasing order: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$. The dissection splits $[a, b]$ into k disjoint intervals $I_1, \cdots I_k$. We need to decide what to do with the endpoints; we adopt the convention that $I_1 = [x_0, x_1]$ and that $I_j = (x_{j-1}, x_j]$ for $2 \leq j < k$. We order the dissections of $[a, b]$ by inclusion: we say that D_2 **refines** D_1 if $D_1 \subset D_2$, and write $D_1 \leq D_2$. This is a partial order on the set Δ of all dissections of $[a, b]$, and Δ is a lattice: $D_1 \vee D_2 = D_1 \cup D_2$ and $D_1 \wedge D_2 = D_1 \cap D_2$. Δ has a least element $\{a, b\}$, but has no greatest element. Suppose that D is a dissection, with intervals $I_1, \cdots, I_k$. We denote the indicator function of I_j by $\chi_j : \chi_j(x) = 1$ if $x \in I_j$, and $\chi_j(x) = 0$ otherwise. Similarly, we write $\chi_{[a,b]}$ for the indicator function of $[a, b]$. We denote the linear span of $\{\chi_j : 1 \leq j \leq k\}$ by E_D; thus a function $f \in E_D$ is of the form $f = \sum_{j=1}^{k} v_j \chi_j$, where $v_1, \cdots, v_k$ are real numbers. The elements of E_D are the step functions on $[a, b]$ whose points of discontinuity are contained in D; note that, according to our convention, step functions are continuous on the left. E_D is a k-dimensional vector space of functions. If D_2 refines D_1, then $E_{D_1} \subset E_{D_2}$, and so the set of spaces $\{E_D : D \in \Delta\}$ also forms a lattice:

$$E_{D_1} \wedge E_{D_2} = E_{D_1} \cap E_{D_2} = E_{D_1 \wedge D_2}$$

and

$$E_{D_1} \vee E_{D_2} = \operatorname{span}(E_{D_1} \cup E_{D_2}) = E_{D_1 \vee D_2}$$

The union $E_\Delta = \cup \{E_D : D \in \Delta\}$ is the infinite-dimensional vector space of all (left-continuous) step functions. We now wish to define the elementary integral of a step function f. If $f = \sum_{j=1}^{k} v_j \chi_j$, we want to define $\int_a^b f(x)dx$ to be $\sum_{j=1}^{k} v_j l(I_j)$, where $l(I_j) = x_j - x_{j-1}$ is the length of I_j. But the representation is not unique, and we need to show that the integral is well-defined.

Proposition 17.1. *Suppose that D and D' are dissections of $[a,b]$, and that $f \in E_D \cap E'_D$, with representations $f = \sum_{j=1}^{k} v_j \chi_j$ and $f = \sum_{j=1}^{k'} v'_j \chi'_j$. Then*

$$\sum_{j=1}^{k} v_j l(I_j) = \sum_{j=1}^{k'} v'_j l(I'_j).$$

证明. We use the lattice property of Δ. Let $D'' = D \cup D'$. Let $D = \{x_0, \cdots, x_k\}$ and $D'' = \{x''_0, \cdots, x''_{k''}\}$. Then there exist $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_k = k''$ such that $x_j = x''_{r_j}$ for $0 \leq j \leq k$. Thus

$$l(I_j) = \sum_{r=r_{j-1}+1}^{r_j} l(I''_r).$$

注意区间是按后一个点的序号算，这里求和的 r 是按 1 到 k'' 的序走，不是按 r_k 的角标序 (1 到 k) 走.We can write $f = \sum_{r=1}^{k''} v''_r \chi''_r$, where $v_j = v''_r$ for $r_{j-1} < r \leq r_j$. Consequently,

$$\sum_{j=1}^{k} v_j l(I_j) = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{r=r_{j-1}+1}^{r_j} v''_r l(I''_r) \right) = \sum_{r=1}^{k''} v''_r l(I''_r).$$

Similarly, $\sum_{j=1}^{k'} v'_j l(I'_j) = \sum_{r=1}^{k''} v''_r l(I''_r)$, so that

$$\sum_{j=1}^{k} v_j l(I_j) = \sum_{j=1}^{k'} v'_j l(I'_j).$$

We can therefore define the elementary integral as

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{k} v_j l(I_j).$$

□

Remarque 17.1. A partially ordered set $(A, \leq)$ is called a **lattice** if whenever a and b are elements of A then the set $\{a, b\}$ has an infimum, denoted by $a \wedge b$, and a supremum, denoted by $a \vee b$.

17.1 Upper and lower Riemann integrals

We now consider a bounded function f on [a, b], with $m \leq f(x) \leq M$ for all $x \in [a,b]$. We try to integrate it by approximating from above and below by step functions. Let

$$U_f = \{g : g \in E_\Delta \text{ and } g \geq f\}$$

be the set of step functions which are greater than or equal to f. U_f is non-empty, since $M_{\chi_{[a,b]}} \in U_f$. If $g \in U_f, g \geq m_{\chi_{[a,b]}}$, and so $\int_a^b g(x)dx \geq m(b-a)$.Thus the set $\left\{\int_a^b g(x)dx : g \in U_f\right\}$ is bounded below. We define the **upper Riemann integral** of f to be

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\left\{\int_a^b g(x)dx : g \in U_f\right\}$$

很诡异的定义: 先定义 f 的“上阶分 (阶梯分划) 集”，然后给“上阶分集”的定积分集取 inf，也就是在“上阶分集”的定积分集的下界中找一个最大值, 即：**上下上**. 上下不在一个范畴内，一个是阶梯函数集，一个是定积分集.

Similarly we set

$$L_f = \{h : h \in E_\Delta \text{ and } h \leq f\}$$

and define the **lower Riemann integral** of f to be

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\left\{\int_a^b h(x)dx : h \in L_f\right\}$$

Proposition 17.2. *Suppose that f is a bounded function on $[a,b]$. Then $\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$*

证明. If $h \in L_f$ and $g \in U_f$ then $h \leq f \leq g$, so that

$$\int_a^b h(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Taking the supremum over L_f, we see that

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx,$$

so that, taking the infimum over U_f,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \inf\left\{\int_a^b g(x)dx : g \in U_f\right\} = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

□

Suppose that D is a dissection, with intervals $I_1, \cdots, I_k$, and that f is a bounded function on [a, b]. Let $M(I_j) = \sup\{f(x) : x \in I_j\}$, and let $M_D(f) = \sum_{j=1}^k M_j\chi_j$. Then $M_D(f)$ is the least element of $E_D \cap U_f = \{g \in E_D, g \geq f\}$. 这时候又对“上阶分集”中的函数取了最小值，但这个最小值函数又是在对函数值的上集取了最小值的基础上构建的. We set

$$S_D = S_D(f) = \sum_{j=1}^{k} M(I_j)l(I_j) = \int_a^b M_D(f)(x)dx.$$

这个地方就是难点交汇处，我们要找的是所有“上阶分集”中函数的积分集的下界的最大值，我们构造了一个对特定划分的“上阶分集”中的函数的最小值，现在需要建立它们之间的联系。Then

$$S_D = \inf\left\{\int_a^b g(x)dx : g \in U_f \cap E_D\right\},$$

对应关系：“上阶分集”中函数的积分集的下界的最大值 =“上阶分集”中的最小值函数的积分. 这里简化就是：“下界的最大值”= 最小值. 这是成立的. 因为最小值是实打实存在的，这是阶梯函数的特殊性，可以类比于整数相对于实数的特殊性. 顺便吐槽一下，这里的困惑全部来源于对 sup,inf,min, 和 max 不加证明的使用，可见法国人的严谨是有必要的，步步为营最后反而赢得时间，so that

$$\begin{aligned}\overline{\int_a^b} f(x)dx &= \inf\left\{\inf\left\{\int_a^b g(x)dx : g \in U_f \cap E_D\right\} : D \in \Delta\right\}\\ &= \inf\{S_D : D \in \Delta\}.\end{aligned}$$

Similarly, we define $m(I_j) = \inf\{f(x) : x \in I_j\}$ and $m_D(f) = \sum_{j=1}^k m_j(I_j)\chi_j$ and set

$$s_D = s_D(f) = \sum_{j=1}^k m(I_j)l(I_j) = \int_a^b m_D(f)(x)dx.$$

Then

$$s_D = \sup\left\{\sup \int_a^b h(x)dx : h \in L_f \cap E_D\right\},$$

so that

$$\begin{aligned}\underline{\int_a^b} f(x)dx &= \sup\left\{\sup\left\{\int_a^b h(x)dx : h \in L_f \cap E_D\right\} : D \in \Delta\right\}\\ &= \sup\{s_D : D \in \Delta\}.\end{aligned}$$

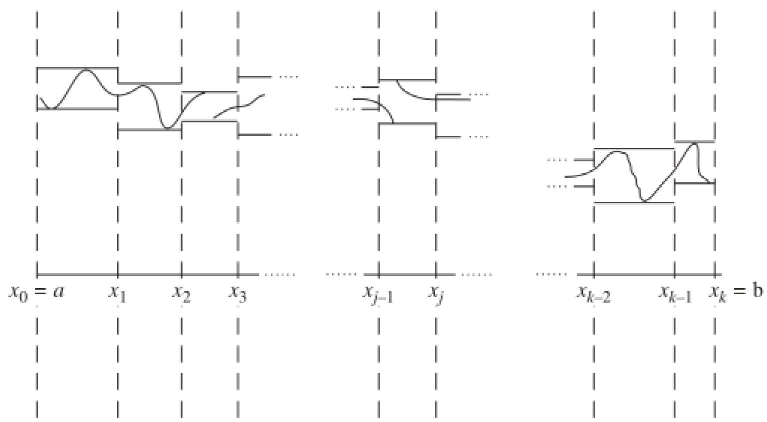


图 17.1: Upper and lower sums S_D and s_D.

Note that if D' refines D then $S_{D'} \leq S_D$ and $s_{D'} \geq s_D$.

In fact, we do not need to consider all the dissections to determine the upper and lower Riemann integrals. If D is a dissection, with intervals $I_1, \cdots, I_k$, we define the **mesh size** $\delta(D)$ to be $\max\{l(I_j) : 1 \leq j \leq k\}$.

Théorème 17.1. *Suppose that $(D_r)_{r=1}^\infty$ is a sequence of dissections of [a, b], and that $\delta(D_r) \to 0$ as $r \to \infty$. If f is a bounded function on [a, b] then $S_{D_r}(f) \to \overline{\int_a^b} f(x)dx$ as $r \to \infty$.*

证明. Suppose that $\epsilon > 0$. Then there exists a dissection D of [a, b], with points of dissection $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ such that $S_D < \int_a^b f(x)dx + \epsilon/2$. The idea of the proof is to choose r large enough so that the set D is contained in a set of intervals of D_r of small total length.(这里的 D 是分点的集合，但我们要求的是 D_r 划分的小区间 (每个小区间的长度都很短) 要包含组成 D 的分点，可以说又一次有点跳脱维度) Let $\eta = \frac{\epsilon}{2(k+1)(M-m+1)}$. There exists r_0 such that $\delta(D_r) < \eta$ for $r \geq r_0$. Suppose that $r \geq r_0$. Let $D' = D \vee D_r$. Then $S_{D'} \leq S_D$. Let $\{J_1, \ldots, J_q\}$ be the intervals of the dissection D_r, and let $K_1, \ldots, K_s$ be the intervals of the dissection D'. We divide $\{1, \ldots, q\}$ into two disjoint subsets. Let $p \in B$ if J_p contains one or more elements of D, and let $p \in G$ otherwise. (B is the set of bad indices, and G is the set of good indices.) Then $|B| \leq k+1$. If $p \in B$, then J_p is the disjoint union $\cup_{r \in S_p} K_r$(所有此 J_p 旗下包含的 D 的端点把此 J_P 二次分化后，对应到 D' 中划分出区间的序号) of finitely many of intervals in D'. Since $m \leq f(x) \leq M$,

$$Ml\left(J_p\right) \geq M\left(J_p\right) l\left(J_p\right) \geq \sum_{r \in S_p} M\left(K_r\right) l\left(K_r\right) \geq m \sum_{r \in S_p} l\left(K_r\right) = ml\left(J_p\right).$$

If $p \in G$, then $J_p = K_r$ for some $r \in \{1, \ldots, s\}$, so that $M\left(J_p\right) = M\left(K_r\right)$ Thus

$$\begin{aligned} S_{D_r} - S_{D'} &= \sum_{p \in B}\left(M_p l\left(J_p\right) - \sum_{r \in S_p} M\left(K_r\right) l(K_r)\right) \\ &\leq \sum_{p \in B}(M-m) l\left(J_p\right) \leq (M-m)(k+1)\delta\left(D_r\right) < \epsilon/2 \end{aligned}$$

Consequently, if $r \geq r_0$ then

$$\int_a^b f(x)dx \leq S_{D_r} \leq S_{D'} + \epsilon/2 \leq S_D + \epsilon/2 < \int_a^b f(x)dx + \epsilon$$

so that $S_{D_r} \to \overline{\int_a^b} f(x)dx$ as $r \to \infty$

□