

1 線形代数

1.1 諸知識

1.2 ベクトル空間, 写像, 同型

定義 1 1 次独立と 1 次従属

ベクトルの組 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ について, 1 次関係

$$c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2, \dots, c_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0} \ (c_i \in \mathbb{R})$$

が成り立つのは, 自明な 1 次関係つまり, $c_1 = c_2 = \dots = c_m = 0$ の場合のみのとき, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ は 1 次独立であるという. また 1 次独立でないとき, すなわち

$$c_1 \mathbf{a}_1 + c_2 \mathbf{a}_2, \dots, c_m \mathbf{a}_m = \mathbf{0}$$

をみたす c_1, c_2, \dots, c_m で, そのうちの少なくとも 1 つが 0 でないものが存在するとき, 1 次従属であるという.

定義 2 部分空間

ベクトル空間 V の空でない部分集合 W が, V における和とスカラー倍の演算によってベクトル空間になるとき, W を V の部分空間という.

定理 1 ベクトル空間 V の部分集合 W が部分空間であるための必要十分条件

1. $W \neq \emptyset$
2. 任意の $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W$ と任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} \in W$

定理 2 生成系

V を \mathbb{R} 上のベクトル空間, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ を V のベクトルとする.

$$W = \{x_1 \mathbf{a}_1 + \dots + x_r \mathbf{a}_r \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, r\}$$

は V の部分空間になる.

定理 2 によって保証される部分空間 W を, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ によって生成される, または張られる部分空間といい, $S[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r]$ で表す. そして, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ を W の生成系という.

定義 3 像空間と核空間

V, W を 2 つのベクトル空間, $f: V \rightarrow W$ を線形写像とすると,

$$\text{Im} f = \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in V\}$$

を f の像空間,

$$\text{Ker} f = \{\mathbf{x} \in V \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

を f の核空間という.