# 1　線形代数

## 1.1　諸知識

## 1.2　ベクトル空間，写像，同型

**定義 1** 1 次独立と 1 次従属
ベクトルの組 $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, ..., \boldsymbol{a_m}$ について，1 次関係

$$c_1\boldsymbol{a_1} + c_2\boldsymbol{a_2}, ..., c_m\boldsymbol{a_m} = \boldsymbol{0}\,(c_i \in \mathbb{R})$$

が成り立つのは，自明な 1 次関係つまり，$c_1 = c_2 = ... = c_m = 0$ の場合のみのとき，$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, ..., \boldsymbol{a_m}$ は 1 次独立であるという．また 1 次独立でないとき，すなわち

$$c_1\boldsymbol{a_1} + c_2\boldsymbol{a_2}, ..., c_m\boldsymbol{a_m} = \boldsymbol{0}$$

をみたす $c_1, c_2, ..., c_m$ で，そのうちの少なくとも 1 つが 0 でないものが存在するとき，1 次従属であるという．

**定義 2** 部分空間
ベクトル空間 $V$ の空でない部分集合 $W$ が，$V$ における和とスカラー倍の演算によってベクトル空間になるとき，$W$ を $V$ の部分空間という．

**定理 1** ベクトル空間 $V$ の部分集合 $W$ が部分空間であるための必要十分条件

1. $W \neq \phi$
2. 任意の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in W$ と任意の $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して $\lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} \in W$

**定理 2** 生成系
$V$ を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間，$\boldsymbol{a_1}, ..., \boldsymbol{a_r}$ を $V$ のベクトルとする．

$$W = \{x_1\boldsymbol{a_1} + ... + x_r\boldsymbol{a_r} | x_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., r\}$$

は $V$ の部分空間になる．

定理 2 によって保証される部分空間 $W$ を，$\boldsymbol{a_1}, ..., \boldsymbol{a_r}$ によって生成される，または張られる部分空間といい，$S[\boldsymbol{a_1}, ..., \boldsymbol{a_r}]$ で表す．そして，$\boldsymbol{a_1}, ..., \boldsymbol{a_r}$ を $W$ の生成系という．

**定義 3** 像空間と核空間
$V, W$ を 2 つのベクトル空間，$f : V \to W$ を線形写像とするとき，

$$\mathrm{Im}f = \{f(\boldsymbol{x}) | \boldsymbol{x} \in V\}$$

を $f$ の像空間,

$$\mathrm{Ker}f = \{\boldsymbol{x} \in V | f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$$

を $f$ の核空間という．

## 1.3　計量ベクトル空間

**定義 4** 内積
$V$ を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とするとき $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対し，実数 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が定まり，次の (1)〜(4) を満たすとき，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積という．

1. $\boldsymbol{a}$