Luiz Fernando da Silva Sirino

Universidade Federal do Vale do Rio São Francisco

Curso: Engenharia Elétrica

Disciplina: Cálculo I

Professor: Carlos Antônio Freitas

Relatório: Diferenças Finitas e Soma de Riemann

Juazeiro, Bahia

Julho de 2025

Sumário

1. INTRODUÇÃO

Este relatório tem como objetivo explorar as duas abordagens fundamentais do cálculo numérico explicadas em sala e também propostas na atividade final do semestre, que são elas a derivação por diferenças finitas e a integração por soma de Riemann - Métodos que são amplamente utilizados em aplicações científicas e, principalmente, de engenharia quando a solução analítica de derivadas e integrais não é completamente viável.

2. DERIVAÇÃO POR DIFERENÇAS FINITAS

O método das diferenças finitas é uma técnica numérica usada para estimar a derivada de uma função em um ponto específico, ou seja, em vez de calcular a derivada exata, que nem sempre é acessível de forma analítica, utilizam-se aproximações com base em valores próximos àquele ponto. Desse modo, como explicado em sala a derivada de uma função f(x) em um ponto x pode ser aproximada por diferenças finitas com base em valores da função em pontos próximos a x, em resumo, essa técnica substitui o conceito de derivada como limite por uma diferença entre valores da função dividida por uma distância finita h, distância essa que possuí certo impacto nos resultados, pois valores muito grandes comprometem a precisão e valores muito pequenos podem gerar erros computacionais.

- Existem três formas comuns de aproximar a derivada:
  - Diferença Progressiva: $f'(x_0) \approx [f(x_0 + h) - f(x_0)] / h$
  - Diferença Regressiva: $f'(x_0) \approx [f(x_0) - f(x_0 - h)] / h$
  - Diferença Centrada: $f'(x_0) \approx [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] / (2h)$

A fórmula centrada apresenta maior precisão pois o erro associado à sua aproximação é de ordem h^2, enquanto as demais possuem erro de ordem h. Tal vantagem decorre do cancelamento de termos de menor ordem na expansão em série de Taylor, resultando em uma convergência mais rápida à derivada exata à medida que $h \to 0$.

Demonstração:

$$f(x + h) = f(x) + h f'(x) + (h^2/2) f''(x) + (h^3/6) f'''(x) + ...$$

$$f(x - h) = f(x) - h f'(x) + (h^2/2) f''(x) - (h^3/6) f'''(x) + ...$$

Subtraindo essas duas expressões, temos:

$$f(x + h) - f(x - h) = 2h f'(x) + (2h^3/6) f'''(x) + ...$$

Dividindo ambos os lados por 2h, obtemos a aproximação da derivada:

$f'(x) \approx [f(x + h) - f(x - h)] / (2h)$

2.1. Exemplo 1 - Função Polinomial:

Considere a função $f(x) = x^3 + 4x - 2$. Para estimar sua derivada no ponto $x_0 = 3$ usando $h = 0,001$, utilizando a fórmula centrada, o valor aproximado obtido foi de 31.000, que coincide com o valor exato da derivada analítica $f'(x) = 3x^2 + 4$, que também resulta em 31.

2.2. Exemplo 2 - Função Exponencial:

Seja $f(x) = e^x$, e deseja-se estimar a derivada em $x_0 = 1$ com $h = 0,001$. A aproximação centrada resulta em $f'(1) \approx 2,718$, valor muito próximo de $e \approx 2,71828$.

2.3. Exemplo 3 - Função Trigonométrica:

Tomando $f(x) = \sin(x)$ e $x_0 = \pi/4$ ($\approx 0,7854$), com $h = 0,001$, a derivada aproximada obtida é $f'(\pi/4) \approx \cos(\pi/4) \approx 0,7071$, confirmando a exatidão da técnica.

3. INTEGRAÇÃO POR SOMA DE RIEMANN

A Soma de Riemann é um dos métodos mais básicos e importantes para o cálculo de integrais definidas. De forma resumida, e como repassado em sala de aula, a ideia consiste em particionar o intervalo [a, b] em n subintervalos de mesmo comprimento $\Delta x = (b - a)/n$ e somar áreas de retângulos sob a curva da função, onde a altura de cada retângulo é definida pelo valor da função em um ponto do subintervalo.

- As três principais variantes são:
  - Soma à Esquerda: utiliza o início de cada subintervalo.
  - Soma à Direita: utiliza o final de cada subintervalo.
  - Soma do Ponto Médio: utiliza o valor no meio de cada subintervalo.

Importante ressaltar que a soma do ponto médio é mais precisa pois diferentemente das somas à esquerda e à direita, que possuem erro de aproximação de ordem Δx, a soma do ponto médio possui erro de ordem **Δx^2**, o que implica em uma taxa de convergência mais rápida. A diferença entre elas decorre do fato de que, ao avaliar a função no centro de cada subintervalo, ocorre um cancelamento mais simétrico dos erros locais, reduzindo o erro total acumulado e aumentando a rapidez da convergência, sendo a soma do ponto médio expressa por:

$\int_a^b f(x)\,dx \approx \Sigma f(x_i^*) \cdot \Delta x$

3.1. Exemplo 1 - Função Quadrática:

Para $f(x) = x^2$ no intervalo [0, 2] e n = 10:
- Soma à esquerda: 2,46
- Soma à direita: 2,86
- Soma do ponto médio: 2,66

O valor exato da integral é 8/3 ≈ 2,666..., confirmando que a aproximação pelo ponto médio é mais precisa.

3.2. Exemplo 2 - Função Trigonométrica:

Considere f(x) = sin(x) no intervalo [0, π], com n = 100. A soma do ponto médio resulta em um valor muito próximo de 2, que é o valor exato da integral $\int_0$^π sin(x) dx = 2.

3.3. Exemplo 3 - Função Exponencial:

Para $f(x) = e^x$ no intervalo [0, 1], com n = 1000, a soma do ponto médio aproxima a integral em aproximadamente 1,718, próximo do valor estimado de $\int_0^1 e^x\,dx = e - 1 \approx 1{,}71828$.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Finalizando o trabalho, após estudar e analisar ambos métodos para este trabalho, tanto na construção dos códigos da atividade, quanto na construção deste relatório, termino a atividade com a conclusão de que a derivação por diferenças finitas e a integração por soma de Riemann são métodos essenciais da matemática computacional que permitem resolver numericamente problemas de cálculo diferencial e integral em situações onde soluções analíticas são inviáveis, incluindo funções mais complicadas analíticamente como funções exponenciais e trigonométricas, provando a eficácia e relevância dessas técnicas no contexto acadêmico e profissional.