Pontificia Universidad Católica de Chile

Escuela de Ingeniería

Modelación de Problemas de Optimización

Segunda edición - Agosto 2017

Juan Carlos Ferrer O.
Profesor Titular
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Pedro Gazmuri Sch.
Profesor Titular Adjunto
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas

Juan Carlos Muñoz A.
Profesor Titular
Departamento de Ingeniería de Transporte y Logística

Prefacio

Muy frecuentemente, los individuos y organizaciones deben tomar decisiones de distinto orden de complejidad. Estas decisiones consisten típicamente en escoger una opción de entre varias disponibles. Muchas veces esta decisión no es trivial y se hace necesario contar con herramientas de apoyo que permitan vislumbrar todas las alternativas disponibles y clarificar un mecanismo de selección entre dichas alternativas. Este texto pretende colaborar con este proceso de decisión, por medio de enseñar el desarrollo de una valiosa herramienta de apoyo: los modelos matemáticos de optimización.

Cuando alguien está interesado en analizar un determinado problema real que observa, es natural que intente definirlo formalmente, simplificarlo de modo de conservar sólo aquello que es medular en el fenómeno que le interesa y, ojalá convertir sus partes integrantes y las relaciones que las vinculan en una nueva estructura que le permita operar en el problema con libertad. Esta estructura puede tener forma física o abstracta. Por ejemplo, en el plano físico los arquitectos construyen maquetas, los ingenieros aeronáuticos construyen aeromodelos o la compañía de teléfonos diseña un plano de calles de la ciudad. Si se observa, cada una de estas reducciones del problema original conserva sólo lo esencial de la situación que se representa, simplificando aquello que no entrega información útil. Es a este procedimiento que le denominamos modelar.

Si se quiere una definición de lo que significa modelar, diremos que un modelo es una estructura que se ha construido que exhibe características de un sistema. Es una simplificación de una realidad concreta, orientada a nuestros propósitos.

En ciencias, muchos de los problemas que se abordan, interesa modelarlos en forma abstracta usando un lenguaje matemático. Así, se representan los fenómenos haciendo uso de la variedad de representaciones que esta ciencia ha desarrollado. Los modelos de optimización representan una de las familias de estos modelos matemáticos. Esta familia comparte una estructura común la cual consiste en determinar el (o los) punto que maximiza (o minimiza) una función objetivo sujeto a que satisfaga un cierto conjunto de restricciones.

Dada la importancia que tiene la creación de modelos (físicos o abstractos) para el buen desempeño de varias profesiones, es normal que las escuelas que preparan a estos profesionales destinen muchos esfuerzos en procurar que sus alumnos modelen adecuadamente. Esto es, que sean capaces de convertir realidades que observan o imaginan en modelos que permitan a un tercero interactuar con ellas.

Por otra parte, en las escuelas de ciencias se realizan escasos esfuerzos para enseñar a los alumnos a traducir una realidad concreta, escrita en palabras, en un lenguaje matemático que les permita a ellos mismos desprender conclusiones y soluciones. Normalmente se da por entendido que modelar es sencillo y que el mejor modo de aprender es mediante ejercitar esta habilidad. Si bien compartimos la segunda parte, creemos que esta ejercitación debiera tener una estructura y una variedad adecuadas. Lamentablemente hasta el año 2005 no existía (o al menos no lo sabíamos) un texto que presente una abundante, variada y estructurada colección de problemas modelados de optimización. Este texto ha pretendido llenar este vacío.

El texto se nutre de problemas desarrollados por los autores y por otros profesores de la Escuela de Ingeniería de la Pontificia Universidad Católica de Chile, y esta segunda edición viene complementada con más de 50 nuevos problemas del curso de Optimización en los últimos años. Estos problemas han sido pensados en el espíritu de enseñar a modelar mediante ejercicios que signifiquen un esfuerzo en términos de ingenio y abstracción. Los ejercicios han sido resueltos de modo que esta traducción desde el lenguaje oral al lenguaje matemático trasluzca una metodología.

Agradecimientos

Los autores quieren agradecer a todos quienes directa o indirectamente han contribuido a formar esta colección de problemas de modelación matemática. Especiales agradecimientos a Claudia Prieto Vásquez y Jaime González Hodar quienes fueron un apoyo fundamental para generar las primeras dos ediciones de este libro respectivamente (2005 y 2017). También agradecen a los profesores del curso de Optimización desde el año 2010 que contribuyeron a desarrollar los problemas de las interrogaciones del curso que fueron incluidos en esta edición. Ellos son: Pamela Álvarez, Gustavo Angulo, Pamela Carrillo, Alejandro Cataldo, Raimundo Cuadrado, Sebastián Encina, Marión Fuentes, Ricardo Giesen, Mathias Klapp, Homero Larraín, Álvaro Lorca, Armin Lüer, José Tomás Marquínez, Felipe Palominos, Germán Paredes, David Pozo, Claudia Prieto, Víctor Valdebenito, y Jorge Vera.

Contents

1 Modelos de Programación Lineal

En esta sección queremos presentar las principales herramientas de modelamiento continuo, es decir, aquellas para modelar problemas cuyas variables de decisión pertenezcan a un espacio continuo. Se presentan diversas técnicas para abordar ciertas dificultades de modelación y/o de posterior resolución, como por ejemplo, cómo representar en forma lineal un problema de naturaleza no lineal.

Comenzamos con problemas lineales ya que en la práctica éstos juegan un rol fundamental dentro de investigación de operaciones. Esto se debe a que las personas piensan y razonan en forma lineal lo cual facilita la aceptación de este tipo de modelos para apoyar la toma de decisiones. Esto también se refleja en los principales libros de investigación operativa, por la extensión y el detalle con que tratan el tema de problemas lineales.

Como veremos a lo largo de este libro en cada esfuerzo de modelación, una aplicación efectiva de programación lineal requiere: (i) entender muy bien los supuestos que hay detrás, y (ii) saber interpretar las soluciones obtenidas.

La formulación general de un problema de programación lineal es de la siguiente forma. La función objetivo:

$$Max/Min \quad f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

está sujeta a las siguientes restricciones técnicas

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \begin{pmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{pmatrix} b_i \qquad i = 1, ..., m$$

y a las siguientes restricciones de signo

$$(x_j \geq 0) \text{ ó } (x_j \leq 0) \text{ ó } (x_j \;\; libre) \qquad j = 1, ..., n$$

donde "libre" significa que la variable no tiene restricción de signo.

Como podemos ver, tanto la función objetivo como el lado izquierdo de las restricciones técnicas corresponden a funciones lineales. De esta forma el supuesto que implica la linealidad es lo que determina la aplicabilidad en problemas del mundo real.

Para tener una mejor idea del concepto de linealidad, asumamos que las variables $x_1, ..., x_n$ corresponden a varias actividades, y los valores que se les asignen (soluciones) corresponden al nivel de cada actividad. Teniendo esta interpretación en mente, la propiedad de linealidad implica los siguientes dos supuestos:

- Aditividad: El consumo total de cada recurso (restricción) así como el valor total del objetivo son el resultado de la agregación de los consumos de recursos y contribuciones luego de llevar a cabo cada actividad en forma independiente.
- Proporcionalidad: Los consumos de recursos y contribuciones para cada actividad son proporcionales al nivel de actividad actual.

A continuación se presentan una serie de problemas de Programación Lineal.

1.1 Movimiento de Petróleo

PetrolCargo es una empresa que transporta enormes cantidades de petróleo en buques de carga entre los cinco continentes. Recientemente adquirió un contrato con dos empresas petroleras que desean utilizar de forma exclusiva sus servicios en el próximo buque que zarpe. La empresa PetrolA podrá transportar petróleo ligero y/o petróleo pesado, pagando por ello 3 mil dólares y 2 mil dólares por cada mil litros transportados de cada tipo respectivamente. A su vez que la empresa PetrolB pagará 5 mil dólares por cada mil litros de petróleo mediano transportados en el buque.

El buque de carga tiene una capacidad máxima de 25.000 toneladas, a repartir entre las empresas. Para ello, estima que las densidades de los petróleos son de 4 tons/1.000 litros, 8 tons/1.000 litros y 5 tons/1.000 litros para los petróleos liviano, pesado y mediano respectivamente. Y, por otro lado, el contrato definido entre

PetrolCargo y PetrolA indica que el buque de carga debe transportar como mínimo 2 millones de litros de petróleo en total para esta empresa. Construya un modelo de programación lineal que le permita a PetrolCargo determinar cómo cargar el buque de modo que maximice sus ingresos. Además, construya la forma estándar asociada a este problema.

SOLUCIÓN[1]

Definiendo x_1 y x_2 como la cantidad de miles de litros que se cargarán de petróleo ligero y de petróleo pesado respectivamente, y x_3 como la cantidad de miles de litros que se cargarán de petróleo mediano, el modelo de optimización asociado al problema es el que sigue:

$$\begin{array}{lrl} \max & 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 & \\ \text{s.a.} & 4x_1 + 8x_2 + 5x_3 & \leq 25.000 \\ & x_1 + x_2 & \geq 2.000 \\ & x_1, x_2, x_3 & \geq 0 \end{array}$$

1.2 Donación de Sangre

La donación y recepción de sangre se puede hacer entre distintos grupos sanguíneos. Suponga que el parámetro δ_{ij} es igual a 1 si un donante del grupo i es compatible con un receptor del grupo j. En cierto país, los porcentajes de población con los distintos grupos sanguíneos se indican en el parámetro p_j para el grupo j. Se considera que el número de receptores del país se reparte entre los distintos grupos sanguíneos siguiendo los porcentajes indicados en el parámetro anterior. Para mantener los niveles globales de reserva necesarios se ha de adquirir de un país vecino (previamente definido) un total de n litros. El coste varía en función del grupo sanguíneo donante, representado en el parámetro c_i.

Plantee un modelo de optimización en variables continuas que permita asegurar una cantidad de sangre suficiente para la población minimizando costos.

SOLUCIÓN[2]

Se tiene la siguiente variable de decisión:

x_{ij}: cantidad de sangre adquirida de un donante tipo i que va dirigida hacia receptores del grupo j.

Por lo que el modelo es el siguiente:

$$\min \sum_i \sum_j c_i x_{ij}$$

s.a.

$$\begin{array}{rcll} \sum_i x_{ij} & = & np_j & \forall j \\ x_{ij} & \leq & n\delta_{ij} & \forall i, j \\ x_{ij} & \geq & 0 & \forall i, j \end{array}$$

La primera restricción indica que la cantidad a adquirir destinada a un grupo debe respetar las proporciones totales. La segunda restricción impide que se adquiera sangre si no se respeta la condición de compatibilidad. La última es la naturaleza de las variables.

[1] Interrogación 1, 2017'1
[2] Interrogación 1, 2015'2

1.3 Instalación de Central de Telecomunicaciones

Se quiere evaluar la instalación de una central de telecomunicaciones en una zona austral, optimizando la cantidad de servicios que se presten con el fin de maximizar las ganancias. Esta empresa ofrece 3 tipos de servicios: telefonía, TV cable e Internet, los cuáles pueden ser contratados individualmente o en combos de 2 o 3 servicios, en los cuáles se les hace un descuento a los clientes. Por lo tanto, consideraremos que la empresa ofrece 7 servicios (x_i) (los 3 individuales, 3 combinaciones de a 2 y 1 con los 3 servicios juntos), cada uno con un valor (y_i) y un costo para la empresa (c_i). El valor de cada servicio depende exclusivamente de la empresa, ya que no existe competencia en la zona. Además, estos valores son tarifas planas, y en el caso de la telefonía que se cobra también por el uso, se le agregó un valor adicional promedio para poder evaluar el problema. Para evaluar si el proyecto es o no rentable, habrá que considerar que la empresa tiene una imagen enfocada principalmente a entregar servicios de televisión por cable, por lo que el proyecto no les interesará si no entregan un mínimo de 100 servicios en esta área. Por otra parte, la municipalidad de la zona sólo le dará permiso para instalarse si logran satisfacer una demanda mínima de 180 teléfonos. Además, el servicio de internet que sería llevado a la zona, puede soportar un máximo de 200 abonados para asegurar la buena calidad del servicio. También, para justificar sus "combos" de servicio, cada uno deberá tener por lo menos 10 clientes. Finalmente, se tiene un capital de \$5.000.000 para cubrir los gastos del primer mes (antes de recibir el pago de los abonados).

SOLUCIÓN[3]

El objetivo de la empresa es maximizar sus utilidades y para ello debe decidir la cantidad a ofrecer de cada tipo de servicio, de esta manera la variable de decisión a emplear en el modelo resulta ser:

x_i =Cantidad de servicio del tipo i a ofrecer
$i = \{1 =$TV cable, $2 =$teléfono , $3 =$ internet, $4 =$ TV cable, Internet y Teléfono,
$5 =$ TV cable e Internet, $6 =$ Teléfono e Internet, $7 =$ TV cable y Teléfono$\}$

La función objetivo debe considerar la maximización de la utilidad, expresada como la diferencia entre las ganacias obtenidas y los costos incurridos por la entrega de cada tipo de servicio. El modelo debe considerar las restricciones de un mínimo de servicio en TV cable y teléfonos, un máximo de clientes de Internet y un mínimo de clientes para la entrega de servicios conjuntos, además de las restricciones de capital para la inversión. Considerando esto el problema de optimización queda expresado por:

$$P) \quad Max \quad \sum_{i=1}^{7} x_i(y_i - c_i)$$

$$\begin{aligned}
x_1 + x_4 + x_5 + x_7 &\geq 100 \\
x_2 + x_4 + x_6 + x_7 &\geq 180 \\
x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &\leq 200 \\
\sum_{i=1}^{7} x_i c_i &\leq 5.000.000 \\
x_i &\geq 10 \quad \forall i = 4, ..., 7 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

Problemas Propuestos:

1. Analice qué ocurre si no existiera requerimiento de parte de la empresa en cuanto al número mínimo de contratos de TV cable. Haga lo mismo para el requerimiento de la municipalidad y luego para el número máximo de abonados a Internet.

[3] Cristian Andrés Salazar Hulín, Optimización 1^{er} Semestre 2003.

2. Suponga que la empresa llega a una zona donde ya existe una empresa de condiciones similares pero que no ofrece combos o descuentos por contratar más de un servicio. Esta empresa cuenta con 120 contratos de teléfono, 50 de Internet y 70 de TV cable. La nueva empresa decide comprarle sus clientes, pagando un monto de \$20.000.000 más un bono de $2c_i$ por cada cliente (donde c_i sigue siendo el costo que tiene para la empresa entregar el servicio). Toda esta gestión se realiza antes de que la empresa se instale, i.e. la empresa sigue teniendo los mismos \$5.000.000 para gastar durante el primer mes. En esta zona también existen requerimientos; para teléfonos el mínimo debe ser de 150, para Internet de 100 y para TV cable de un máximo de 200. Plantee un nuevo modelo que maximice las utilidades de la empresa.

1.4 Producción de Evento

Una persona que acaba de ganar un premio decide celebrarlo y hacer una fiesta con sus amigos. Para esto ha decidido invertir \$1.300.000, los cuales se dividen en \$1.000.000 para el arriendo del local y \$300.000 para insumos. El objetivo del evento es que todos lo pasen lo mejor posible, y para medir esto se utilizará una función que llamaremos "función felicidad", la cual depende de 7 variables (x_i): donde x_1 corresponde al número de personas, x_2 a la duración (en horas), x_3 a los litros de cerveza (con un costo unitario de c_3), x_4 corresponde a los litros de otros tragos (con un costo unitario de c_4), x_5 a los litros de bebida (con un costo unitario de c_5), x_6 a los paquetes de picadillo (con un costo unitario de c_6) y x_7 corresponde a la ambientación. El valor de esta función se mide en "unidades de felicidad" (f). Luego de una encuesta entre los amigos se concluyó que por cada 50 personas que asistan a la fiesta, se alegran 15 ($15f$) y que por cada hora de duración se alegran 100 personas ($100f$). Por el lado de los bebestibles, se obtuvo que por cada litro de cerveza se alegran 2 personas ($2f$), por cada litro de otros tragos se alegran 4 personas ($4f$) y por cada litro de bebida se alegra sólo 1 ($1f$). Finalmente por cada paquete de picadillo se alegra 1 persona ($1f$) y por cada \$10.000 que se gasten en ambientación se alegran 15 ($15f$). Además, se sabe que para que la fiesta resulte no se podrá gastar menos de \$80.000 en ambientación. Para la organización del evento habrá que considerar varios aspectos: primero que nada, la cantidad de cada tipo de bebestible y picadillo, deberá ser mayor o igual a 1; el arriendo del local parte de un precio base de \$100.000 y aumenta en \$150.000 por cada hora de arriendo, con una disponibilidad máxima de 8 horas; por otra parte, el local cuenta con un sistema de refrigeración con una capacidad máxima de 800 litros. También, por seguridad se pide que el grado alcohólico no supere en promedio los 20° por persona, considerando que cada litro de cerveza tiene 5° y cada litro de otro trago tiene 35°. Por último, existe una capacidad del local, donde el número máximo de personas es de 800.

SOLUCIÓN[4]

El objetivo del problema es determinar qué cantidad de cada recurso utlizar, de tal manera que la variable de decisión viene dada por:

x_i = Cantidad a emplear de cada uno de los recursos, $i = 1, ..., 7$

Se debe maximizar la ´función felicidad' considerando como restricciones la capacidad de refrigeración de 800 lts para los bebestibles (cervezas, tragos y bebidas), la suma máxima de \$1.000.000 destinada para el arriendo del local que considera un costo fijo y un costo variable dependiente de las horas de duración de la fiesta, la cantidad máxima de \$300.000 destinada a bebestibles, picadillos y ambientación, el mayor grado alcohólico por persona (20^o) permitido por seguridad, el gasto mínimo de \$80.000 en ambientación, la duración máxima de 8 horas de la fiesta y la cantidad máxima de personas. Se debe considerar además, que cada una de las variables debe ser no negativa, y en particular la cantidad de cervezas, bebidas, tragos y picadillo debe ser mayor o igual a 1.

Por lo tanto, el problema de optimización es:

$$P) \quad Max \quad 0.3x_1 + 100x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 + x_6 + 0.0015x_7$$

[4]Diego Gallardo A. José Luis Noguer. Optimización 1996.

$$
\begin{aligned}
x_3 + x_4 + x_5 &\leq 800 \\
100.000 + 150.000 x_2 &\leq 1.000.000 \\
c_3x_3 + c_4x_4 + c_5x_5 + c_6x_6 + x_7 &\leq 300.000 \\
5x_3 + 35x_4 &\leq 20x_1 \\
80.000 &\leq x_7 \\
x_2 &\leq 8 \\
x_1 &\leq 800 \\
x_i &\geq 0 \quad \forall i = 1,2,7 \\
x_i &\geq 1 \quad \forall i = 3,4,5,6
\end{aligned}
$$

Problemas Propuestos:

1. Analice como cambia el problema si en lugar de existir 3 tipos de bebestibles hay sólo 1. ¿Se mantendrá la cantidad total de bebestibles? Realice el análisis para cada uno de los tipos de bebestible, considerando primero, que cada uno alegra a distinto número de personas (tal como lo indica el enunciado); y luego, que cada uno alegra a un número igual al promedio de la "felicidad" que cada uno produce por separado.

2. Suponga que al local pueden ingresar todas las personas que lo deseen, i.e., la restricción de capacidad máxima del local ya no existe. ¿Cambia el resultado del problema?

1.5 Habilitación de un Avión Comercial

Una línea aérea decide incorporar un nuevo avión para vuelos comerciales a su flota. Para habilitarlo necesita conocer cuál es el número óptimo de asientos por clase (x_i), la cantidad requerida de azafatas (y_1) y auxiliares de vuelo (y_2), de tal manera que la utilidad sea máxima. Existen 3 tipos de clases: Primera, Ejecutiva y Económica. Por políticas internas se debe ofrecer un mínimo de asientos por clase de 25, 80 y 120 respectivamente. Además un estudio de mercado indicó que la demanda máxima para cada clase es de 45, 100 y 210, por lo que tener un número superior de asientos por clase no tendrá ningún sentido. Por otra parte, el número de azafatas y auxiliares también está acotado. Por un lado, el avión no puede funcionar con menos de 8 azafatas y 2 auxiliares de vuelo; y por límite de espacio no podrán ser más de 18 azafatas y 5 auxiliares de vuelo. Además, para entregar un buen servicio en cada clase, deberá haber al menos 1 azafata por cada 10 pasajeros de Primera, por cada 20 de Ejecutiva y por cada 40 de Económica. También deberá haber un auxiliar de vuelo por cada 100 pasajeros del avión. El sueldo de cada azafata es de \$200 dólares y el de un auxiliar de \$120 dólares. El avión dispone de 420 m^2 para distribuir los asientos (el espacio para pasillos, cabinas y baños no esta incluído), y habrá que considerar que un asiento de Primera ocupa $1,8$ m^2, uno de Ejecutiva $1,4$ m^2 y uno de Económica 1 m^2. El valor de un pasaje en cada una de las clases es de $\$2.000, \$1.300$ y \$900 dólares respectivamente, mientras que el costo de la comida por asiento para cada una de las clases es de $\$80, \$60$ y \$50 dólares. El costo de mantención del avión es de \$75.000 dólares. Finalmente, tras un cuidadoso estudio de servicio e imagen, la línea aérea concluyó que por cada azafata que tuviera por sobre el mínimo, recibiría un beneficio total equivalente a \$100 dólares, y por cada auxiliar de vuelo adicional el beneficio sería de \$50 dólares; esto debido a que entregarían un mejor servicio y los clientes preferirían viajar en su línea.

SOLUCIÓN[5]

Para plantear el modelo es necesario identificar dos grupos de variables, un grupo que identifique la cantidad de asientos a instalar en cada clase y otro grupo que permita decidir la cantidad de personal (azafatas y auxiliares de vuelo) que debe ser asignado a cada avión.

x_i = Número de asientos en la clase i, $i = \{1 =$Primera, $2 =$Ejecutiva, $3 =$Económica$\}$
y_i = Cantidad de personal i, $i = \{1 =$Azafatas, $2 =$Auxiliares de vuelo$\}$

[5] Andrés Flores M. Michael Ridell H. Optimización 1^{er} Semestre 1996.

El objetivo del problema es maximizar la utilidad de la línea aérea, esto es la diferencia entre ingresos (pasajes vendidos y beneficios por servicio) y costos (costo de comida y costo de mantención). El modelo debe considerar las restricciones del problema, las que incluyen un número máximo y mínimo de asientos por cada clase, además del espacio disponible para su instalación; y un nivel mínimo de servicio reflejado en la cantidad de azafatas y auxiliares de vuelo por clase.

Por lo tanto, el problema de optimización se puede expresar como sigue:

$$P) \quad Max \quad [1.920x_1 + 1.240x_2 + 850x_3 + (y_1 - 8)100 + (y_2 - 2)50] - [200y_1 + 120y_2 + 75.000]$$

$$\begin{aligned}
1,8x_1 + 1,4x_2 + x_3 &\leq 420 \\
0.1x_1 + 0.05x_2 + 0.025x_3 &\leq y_1 \\
\sum_{i=1}^{3} x_i &\leq 100 \cdot y_2 \\
25 &\leq x_1 \leq 45 \\
80 &\leq x_2 \leq 100 \\
120 &\leq x_3 \leq 210 \\
8 &\leq y_1 \leq 18 \\
2 &\leq y_2 \leq 5
\end{aligned}$$

Es importante destacar que éste corresponde al problema relajado del modelo original, ya que no se está considerando que el número de azafatas y de auxiliares de vuelo (y_i) debe ser un número entero.

Problemas Propuestos:

1. ¿Cómo cambia el problema si el sueldo de los auxiliares de vuelo fuera el mismo que el de las azafatas? Plantee el nuevo modelo.

2. Si no existiera la restricciones de máximo y mínimo para el personal del avión, ¿cuántas azafatas y auxiliares convendrá llevar abordo?

3. Por reformas internas, la línea área decide fusionar sus dos primeras clases a una sola, promediando todas las especificaciones que cada una tiene por separado, para tener las nuevas especificaciones de esta clase. Replantee el modelo y analice su resultado. La cantidad de asientos que debe tener esta nueva clase, ¿es un promedio de la cantidad de asientos óptima encontrada en el modelo original de las clases Primera y Ejecutiva?

1.6 Distribución de Dinero

Ricardo Ramírez, distinguido alumno de *ingeniería*, debe decidir cómo distribuir los $\$I$ que recibe semanalmente de sus generosos padres.

Para facilitar la decisión ha dividido todos los bienes y servicios que puede adquirir en dos categorías: los *básicos* y los *suntuarios*. Ricardo ha determinado que, en promedio, el precio unitario de un bien *básico* es $\$P_b$, mientras que el precio unitario de un bien *suntuario* es de $\$P_s$.

Existe una cantidad mínima de unidades de bienes *básicos* (relacionados con locomoción, alimentación, fotocopias, etc.) igual a M_b que deben ser consumidos cada semana. Por otra parte, la cantidad de dinero que invierta en productos *suntuarios* no puede ser superior a tres veces la invertida en productos *básicos*.

Además, Ricardo sabe que para disfrutar de los productos *suntuarios* necesita de T_s minutos por unidad adquirida, y sólo dispone de H horas libres a la semana.

Considere que los bienes no se pueden inventariar, y que Ricardo recibe un beneficio igual a f_s por unidad de bien *suntuario* adquirida y un beneficio de f_b por cada unidad `por sobre el mínimo` de bienes *básicos* consumidos.

1.	Personal de carabineros	18 %
2.	Implementos para carabineros	10 %
3.	Recintos penales	2 %
4.	Personal de seguridad en recintos penales	3 %
5.	Recintos hospitalarios	24 %
6.	Personal médico	20 %
7.	Proyectos de investigación en salud	8 %
8.	Aseo y ornato	4 %
9.	Areas verdes	7 %
10.	Eventos	4 %

Table 1: Presupuesto Comunal

Formule un modelo de PL continua que permita a Ricardo decidir cuánto dinero invertir en bienes *básicos* y *suntuarios* en una semana.

SOLUCIÓN[6]

`Definición de Variables`:

- $X_b \equiv$ Cantidad de dinero gastada en bienes *básicos* en una semana
- $X_s \equiv$ Cantidad de dinero gastada en bienes *suntuarios* en una semana.

`Función Objetivo`:

$$\max\left\{\left(\frac{X_b}{P_b} - M_b\right) \cdot f_b + \frac{X_s}{P_s} \cdot f_s\right\}$$

`Restricciones`:

$$\begin{aligned} X_b + X_s &\leq I && (1) \\ 3 \cdot X_b &\geq X_s && (2) \\ \frac{X_b}{P_b} &\geq M_b && (3) \\ \frac{X_s}{P_s} \cdot T_s &\leq H \cdot 60 && (4) \\ X_s,\ X_b &\geq 0 && (5) \end{aligned}$$

Donde la restricción (1) corresponde a la restricción presupuestaria, la segunda a no gastar en productos *suntuarios* más de tres veces lo que se gasta en *básicos*, la restricción (3) obliga a consumir el mínimo de unidades en productos *básicos*, la restricción (4) asegura que tendremos el tiempo suficiente para consumir todos los productos *suntuarios* que se adquieran en una semana, y por último la restricción (5) asegura la no negatividad de las variables de decisión.

1.7 Presupuesto Comunal

Un alcalde con planes de reelección desea demostrar preocupación extrema por su comuna, por lo que realiza una encuesta con el fin de conocer las prioridades de los habitantes de ella, para así distribuir de una forma más eficiente los fondos municipales, que ascienden a $100.000.000. Con esto dejará más contenta a la gente y asegurará también votos para la elección. La encuesta constaba de 10 puntos, a cada uno de los cuales había que asignarle un porcentaje de preferencia que indicara el beneficio que les gustaría entregarle a las diferentes áreas, cuidando que la suma total fuera de un 100%. Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 1.

[6] Interrogación 1, 2011'1

Ahora, en conocimiento de los porcentajes (p_i) de preferencia, el alcalde necesita conocer el monto (x_i) que deberá destinar a cada una de las áreas para poder cumplir su objetivo de reelección. La experiencia señala que existe una directa relación entre la obtención de votos y el desempeño del alcalde, de la forma $\sum_{i=1}^{10} x_i c_i$, es decir, mientras mayor sea esta cifra, mayor será la cantidad de votos obtenida por el alcalde.

Por otra parte, las exigencias mínimas impuestas por el consejo municipal indican que el gasto en el área de seguridad (los primeros cuatro items) no debe ser menor a \$37.000.000, mientras que los montos asignados al desarrollo de la salud (items 5 ,6 y 7), deben ser al menos \$52.000.000. Finalmente, en los últimos 3 items, la inversión no debe ser superior a los \$25.000.000, y en particular, en ningún item se podrá invertir menos de \$1.000.000.

SOLUCIÓN[7]

El alcalde desea conocer la cantidad de dinero que debe destinar a cada una de las areas para cumplir su objetivo de reelección, luego emplearemos la variable de decisión:

$x_i =$ Cantidad en dinero destinada al desarrollo del punto i, $i = 1, ..., 10$.

El objetivo del problema es que el alcalde obtenga la mayor cantidad de votos, considerando las restricciones de capital total disponible, inversión mínima en seguridad y salud, inversión máxima en las otros áreas y que en cada área se deben invertir al menos \$1.000.000.

Por lo tanto, el problema de optimización es:

$$P) \quad Max \quad \sum_{i=1}^{10} c_i x_i$$

$$\begin{array}{rcll}
\sum_{i=1}^{10} x_i & \leq & 100.000.000 & \\
\sum_{i=1}^{4} x_i & \geq & 37.000.000 & \\
\sum_{i=5}^{7} x_i & \geq & 52.000.000 & \\
\sum_{i=8}^{10} x_i & \leq & 25.000.000 & \\
x_i & \geq & 1.000.000 & \forall i
\end{array}$$

Problemas Propuestos:

1. Si por cada \$500.000 adicionales que se inviertan en salud el alcalde se asegura 10 votos en la elección, y se sabe que con 400 votos sale reelegido. ¿Como afectará esto las decisiones del alcalde?

2. Si un nuevo estudio señala que por cada \$100.000 invertidos en el área seguridad el alcalde se asegura 2 votos, en el área de salud 3 votos y en las otras áreas 1 voto. Plantee un nuevo modelo considerando que el objetivo del alcalde es ser reelegido, lo que se consigue con un mínimo de 400 votos.

1.8 Producción Óptima de una Fábrica de Telas

Una fábrica textil, se dedica a la producción de 5 tipos de telas (i): Seda, Viscosa, Gabardina, Lycra y Franela. Cada una genera distintas utilidades (u_i) y tiene una demanda diaria promedio (d_i), datos conocidos a través de un estudio de mercado. Por otra parte, cada tipo de tela (i) está compuesta por cuatro tipos de materia prima (j): algodón (a_i), polyester (p_i), lycra (l_i) y seda (s_i) en distinta proporción. La fábrica dispone diariamente de un stock limitado de estos productos (m_j). El objetivo del problema es calcular la cantidad (x_i) a producir de cada tipo de tela para que la utilidad diaria de la fábrica sea máxima. Asumiendo

[7] Yamille Del Valle K.Marcos Orchard C. Optimización 1^{er} Semestre 1996.

para esto, que tanto la mano de obra como la maquinaria podrán adaptarse sin inconvenientes a los valores obtenidos.

SOLUCIÓN[8]

Ya que el objetivo del problema es determinar la cantidad a producir de cada tipo de tela, emplearemos la variable de decisión:

x_i = Cantidad a producir de la tela i
$i = \{1 =$ seda, $2 =$ viscosa, $3 =$ gabardina, $4 =$ lycra, $5 =$ franela$\}$

Se debe maximizar la utilidad de la fábrica sujeta a las restricciones de no poder vender más cantidad de tela de la demanda existente y no sobrepasar el stock máximo de materia prima. Además, por tratarse de cantidad de tela, las variables de decisión deben ser no negativas.

Considerando que:
u_i = Utilidad generada por la tela i.
d_i = Demanda diaria promedio de la tela i.
a_i, p_i, l_i, s_i = Materia prima empleada en cada tela i.
m_j = Stock de materia prima, $j = \{1 =$algodón, $2 =$polyester, $3 =$lycra, $4 =$seda$\}$

son datos del modelo, el problema de optimización se puede expresar como:

$$P) \quad Max \quad \sum_{i=1}^{5} x_i u_i$$

sujeto a:

$$\begin{array}{rcll} x_i & \leq & d_i & \forall i \\ \sum_{i=1}^{5} a_i x_i & \leq & m_1 & \\ \sum_{i=1}^{5} p_i x_i & \leq & m_2 & \\ \sum_{i=1}^{5} l_i x_i & \leq & m_3 & \\ \sum_{i=1}^{5} s_i x_i & \leq & m_4 & \\ x_i & \geq & 0 & \forall i \end{array}$$

Problemas Propuestos:

1. Replantee el modelo para una fábrica que produce n tipos de tela, a partir de m materias primas.

2. En época de crisis, la fábrica se da cuenta que ya no puede seguir fabricando los 5 tipos de tela, ya que la gente está invirtiendo cada vez menos en este rubro, y decide reducir su variedad a sólo 3 tipos. ¿Cómo se puede adaptar este modelo para que la fábrica sepa cuáles son los 3 tipos que le conviene seguir fabricando? Para esto, considere que las materias primas tienen un costo de c_j.

[8]Gonzalo Bustos X. César Momares A. Optimización 1^{er} Semestre, 2003.

1.9 Fabricación de un Cohete

Una fábrica de cohetes, desea conocer la cantidad y tipo óptimo de combustible (x_{ijk}) que debe tener cada cohete con el fin de que recorra la mayor cantidad de kilómetros por litro. La fábrica tiene asignado un valor máximo (M) para gastar en combustible por cada viaje del cohete. Se cuenta con 3 proveedores (i), los cuáles a su vez ofrecen gasolina con y sin plomo (j), de 3 octanajes diferentes (k): 93, 95 y 97 octános. Cada litro de combustible tiene asociado un rendimiento (r_{ijk}) km/l, distinto para cada proveedor, como también un costo (c_{ijk}) y un peso (p_{ijk}) por litro. Como los cohetes ya están diseñados, ya tienen un peso y volumen específico, y por lo tanto estos datos no afectarán el problema. Lo que sí es importante, y por eso se mencionó, es el peso del litro de combustible, ya que limitará la cantidad que podrá llevar el cohete para que no incida en la distancia recorrida por éste, este peso no podrá ser mayor a P kilos.

SOLUCIÓN[9]

El objetivo del problema es determinar la cantidad y tipo de combustible que se debe adquirir para maximizar el rendimiento del cohete, para esto consideraremos las siguientes variables de decisión:

x_{ijk} = Cantidad de combustible que se debe comprar al proveedor i, del tipo j, con k octános;
$i = \{1, 2, 3\}, j = \{1 = \text{con plomo}, 2 = \text{sin plomo}\}$
$k = \{1 = 93 \text{ octános}, 2 = 95 \text{ octános}, 3 = 97 \text{ octános}\}$

El modelo debe considerar, además, las restricciones de capital asignado a cada viaje del cohete y el peso máximo de combustible que puede transportar. Obteniéndose el siguiente problema de optimización:

$$P) \quad Max \quad \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} x_{ijk} r_{ijk}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} x_{ijk} c_{ijk} &\leq M \\
\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{3} x_{ijk} p_{ijk} &\leq P \\
x_{ijk} &\geq 0 \quad \forall i, j, k
\end{aligned}$$

Problemas Propuestos:

1. Uno de los proveedores decide igualar sus precios a otro de los proveedores. ¿Cómo se puede modificar el modelo para que se vea representada esta situación?.
2. Nuevamente, uno de los proveedores decide, a modo de oferta, bajar sus precios, igualándolos todos al de la gasolina más barata. ¿Cómo sería el nuevo modelo?

1.10 Fábrica de Ladrillos

Una fábrica produce tres tipos de ladrillos: de primera, segunda y tercera calidad. Para un metro cúbico de ladrillos, se requiere un metro cúbico de material base y aditivos adicionales. La calidad de los ladrillos se distingue en los aditivos que cada uno requiere. En este momento la planta tiene 2.000 m^3 de material base y se debe decidir cuánto producir de modo de maximizar el ingreso por ventas. Los precios de los ladrillos son \$2.000, \$1.800 y \$1.500 el m^3 respectivamente según la calidad.

Existen dos tipos de aditivos, clase A y B.

- Cada metro cúbico de ladrillo de primera calidad requiere 500 ml del aditivo A.

[9] Mariangel Arratia L. Pedro Asencio H. Optimización 1^{er} Semestre 2003.

- Cada metro cúbico de ladrillo de segunda calidad requiere 250 ml del aditivo A y 350 ml del aditivo B.
- Cada metro cúbico de ladrillo de tercera calidad requiere 800 ml del aditivo B.

La fábrica maneja un stock de 200 lts del aditivo A y 1.000 lts del aditivo B. Se le pide generar un modelo de programación que refleje las características del problema descrito.

SOLUCION

El objetivo del problema es decidir cuánto producir de cada tipo de ladrillo de manera de maximizar el ingreso por ventas, por lo que resulta conveniente emplear la variable:

$x_i =$ Cantidad a producir del ladrillo tipo i,
$i = \{1\text{: Primera calidad, 2: Segunda calidad, 3: Tercera calidad}\}$

Como dato del problema se nos da la cantidad a emplear de cada aditivo para producir un metro cúbico de cada ladrillo, así como el precio de venta de cada uno de ellos.

El objetivo del problema es maximizar los ingresos por concepto de ventas, sujeto a las restricciones de stock de cada una de las materias primas (material base y aditivos), además de las restricciones de no negatividad exigidas por la implementación del modelo Con esto en consideración, el modelo de optimización queda expresado por:

$$P) \quad Max \quad 2.000x_1 + 1.800x_2 + 1.500x_3$$

$$\begin{aligned} 0.5x_1 + 0.25x_2 &\leq 200 \\ 0.35x_2 + 0.8x_3 &\leq 1.000 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2.000 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Problemas Propuestos

1. Replantee el modelo para el caso en que, añadiendo un aditivo C a los ladrillos de primera, segunda y tercera, se obtiene un ladrillo de superprimera, supersegunda o supertercera. Considere que los precios de estos ladrillos son el doble de los normales, y que las cantidades necesarias de aditivo por ladrillo son 150 ml, 95 ml y 80 ml, respectivamente. El precio por litro del aditivo C es de \$10.000. ¿Cuanto se produciría ahora de cada uno de los seis tipos de ladrillo?.
2. Como modificaría el modelo si es que le ofrecen una nueva tecnología, para la cual se requieren tres máquinas, una para el proceso con el material base, otra para la aplicación del aditivo A, y otra para la aplicación del aditivo B, cuyos precios son \$10.000, \$120.000 y \$8.000, respectivamente. Al utilizar esta nueva tecnología, los ladrillos pasan a requerir: el ladrillo de primera, 200 ml de aditivo A y 800 cm^3 de material base; el ladrillo de segunda, 100 ml de aditivo A, 200 ml de aditivo B y 900 cm^3 de material base; y el ladrillo de tercera, 250 ml de aditivo B y 850 cm^3 de material base. Considere el caso en que la tecnología debe instalarse completa y el caso en que se pueden instalar independientemente cada uno de los procesos, esto es, se pude instalar la maquinaría correspondiente a la aplicación del aditivo A independientemente de la que modela el material base.

1.11 Agua Purificada

Un comerciante compra agua purificada en grandes cantidades para luego venderla al detalle, en dos tipos de envases (x_i): botella de 1 lt y bidón de 5 lt. El precio de venta es de \$350 y \$300 por litro respectivamente. Se abastece a partir de dos proveedores (y_i); el primero, puede venderle como máximo 10.000 lt a un valor de \$100 por litro; y el segundo le ofrece la cantidad que él desee pero a un precio de \$120 por litro. En total, el comerciante puede vender a lo más 15.000 botellas de 1 lt y 10.000 bidones de 5 lt. al mes en el mercado, en base a un estudio de demanda realizado Por otro lado, el comerciante tiene un contrato seguro con una clínica a la cual debe entregarle adicionalmente 600 bidones de 5 lt. Por otra parte, en los lugares a los cuales el comerciante abastece, compran más botellas que bidones, pero igualmente, se cumple que la cantidad de litros de agua vendida en botellas es menos de $\frac{1}{3}$ del total de agua comprada. El comerciante necesita decidir de qué forma abastecerse, de manera de maximizar su utilidad. Para simplificar el problema, considere que los costos de envasado son nulos, y que el comerciante vende todo lo que envasa.

SOLUCIÓN

El comerciante debe tomar dos decisiones, por un lado la cantidad de envases de cada tipo (botella y bidón) a vender, y por otro lado el modo de abastecerse de manera de satisfacer la demanda y maximizar su utilidad, de esta manera las variables de decisión para el modelo pueden ser:

x_i = Cantidad de envases tipo i que vende el comerciante,
$i = \{1 = \text{botellas de } 1lt,\ 2 = \text{bidones de } 5lt\}$
y_i = Cantidad de agua que el comerciante compra al proveedor i.

El problema consiste en maximizar la utilidad del comerciante, como la diferencia entre los ingresos percibidos por la venta del agua, y los costos de abastecimiento. El modelo debe considerar como restricciones, la satisfacción de la demanda total, la satisfacción de la demanda adicional de la clínica, el máximo de litros que se le puede comprar al proveedor 1, la proporción de agua vendida en botellas de 1 lt y el hecho de que el comerciante vende todo lo que envasa, además de las restricciones de no negatividad de las variables.

El modelo de optimzación para este problema queda expresado por:

$$P) \quad Max \quad 350x_1 + 1500x_2 - 100y_1 - 120y_2$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 & \leq & 15.000 \\ x_2 & \leq & 10.600 \\ x_2 & \geq & 600 \\ y_1 & \leq & 10.000 \\ 3x_1 & \leq & y_1 + y_2 \\ x_1 + 5x_2 & = & y_1 + y_2 \\ x_i, y_i & \geq & 0 \ \forall i = 1, 2 \end{array}$$

Problemas Propuestos:

1. ¿Qué pasa si se elimina la restricción de que el comerciante vende todo lo que envasa?
2. Analice como cambia el problema si el segundo proveedor:

   a) iguala los precios del primero, b) vende agua a un menor precio, pero con un máximo de 5.000 litros.
3. Replantee el problema para el caso en que el comerciante decide vender además botellas individuales de $500cc$, a un valor de \$200 (es decir, a un valor de \$400 por litro).

1.12 Sistema de Atención Telefónico

Usted es ingeniero de una empresa de servicios que recibe las solicitudes de compra, los reclamos y la información por medio del teléfono. Esta empresa cuenta con un sistema con capacidad de 100 llamadas simultáneas. Cuando llega una llamada, si existe al menos una telefonista desocupada, una de ellas toma el llamado, si todas están ocupadas, entonces la llamada dará tono ocupado y se perderá la comunicación.

El problema se suscita al contratar a las telefonistas, debido a que la empresa trabaja de lunes a domingo, sin embargo los contratos con las operarias deben tener días de descanso.

El departamento de marketing le informa que, de acuerdo a sus estimaciones, de lunes a viernes debe haber como mínimo 100 telefonistas trabajando. Ellos estiman que las solicitudes caen los sábados y domingos y por lo tanto se requieren como mínimo 70 telefonistas el sábado y 45 el domingo.

Por otra parte, el departamento jurídico le informa a usted que el sistema tradicional de trabajar lunes a viernes y descansar sábados y domingos no es obligatorio en los contratos laborales, es decir pueden crearse nuevos arreglos, sin embargo deben respetarse ciertas normas:

1. No se puede trabajar más de diez días continuados ni menos de tres.
2. No se puede dar más de cuatro días de descanso seguidos ni días aislados.
3. Cualquier fórmula debe contemplar que los días laborales y los festivos deben estar en proporción cinco es a dos.
4. Todos los operarios deben tener al menos un domingo libre al mes.

En base a estos argumentos, el departamento jurídico le propone a usted tres tipos de contrato:

1. Un primer tipo es para telefonistas que trabajan de lunes a viernes y descansan sábados y domingos.
2. Un segundo consistirá en que la primera semana la persona descansará lunes y martes, la segunda martes y miércoles, la tercera miércoles y jueves, la cuarta jueves y viernes, la quinta viernes y sábado, la sexta sábado y domingo y la séptima domingo y lunes. De ahí en adelante se repetirá otra vez la primera y así sucesivamente. Para esto se contratarán grupos de siete personas que realicen su ciclo de trabajo con una semana de desfase.
3. Otro contrato consistirá en que la primera semana descansará lunes y martes, la segunda miércoles y jueves, la tercera viernes y sábado, la cuarta sábado y domingo. De ahí en adelante se repetirá otra vez la primera y así sucesivamente. Para esto se contratarán grupos de cuatro personas que realicen su ciclo de trabajo con una semana de desfase.

El departamento de personal le informa que el sueldo de una persona según el primer tipo de contrato es de \$200.000. Para el segundo tipo es de \$240.000 y el tercero es de \$250.000. Le indican además que creen que habrá suficiente gente interesada en trabajar.

Usted debe formular un problema de optimización para determinar cuántas telefonistas contratar de modo de satisfacer los requerimientos de marketing y qué los costos para la empresa sean mínimos.

SOLUCIÓN

El objetivo del problema es determinar cuántas telefonistas contratar en cada tipo de contrato de modo de satisfacer los requerimientos de marketing y qué los costos para la empresa sean mínimos.

Para el desarrollo de este modelo supondremos que los meses constan de 28 días, o lo que es lo mismo, que los sueldos se pagan por cada período de ese largo. Esto nos ayuda a eliminar cualquier tipo de problema que se podría originar en una semana incompleta, con los sueldos, el número de operarios trabajando, etc.

Ahora bien, la forma de contratar es por personas según algunos contratos y por grupos según otros, por lo tanto, las variables de decisión del modelo deben ser coherentes con éstas condiciones, de esta manera, sea:

$x =$ Número de personas contratadas por contrato de tipo 1.
$y =$ Número de grupos de 7 personas contratadas por contrato de tipo 2.
$z =$ Número de grupos de 4 personas contratadas por contrato de tipo 3.

Es necesario relacionar las variables de decisión con el número de operarios que se encontraran trabajando cada día, para esto se elaboraron tablas, las cuales se rellenaron con cruces si ese día el usuario en cuestión trabaja, estableciendo los totales de trabajo por día para cada uno de los tipos de contrato.

Para el contrato 1 hay un solo individuo en el grupo (Tabla 2), para el contrato tipo 2, existen 7 personas en cada grupo (Tabla 3) y para el contrato tipo 3, existen 4 personas en cada grupo (Tabla 4).

L	M	W	J	V	S	D
✓	✓	✓	✓	✓		
1	1	1	1	1	0	0

Table 2: Contrato Tipo 1

L	M	W	J	V	S	D
		✓	✓	✓	✓	✓
✓			✓	✓	✓	✓
✓	✓			✓	✓	✓
✓	✓	✓			✓	✓
✓	✓	✓	✓			✓
✓	✓	✓	✓	✓		
	✓	✓	✓	✓	✓	
5	5	5	5	5	5	5

Table 3: Contrato Tipo 2

L	M	W	J	V	S	D
		✓	✓	✓	✓	✓
✓	✓			✓	✓	✓
✓	✓	✓	✓			✓
✓	✓	✓	✓	✓		
3	3	3	3	3	2	3

Table 4: Contrato Tipo 3

Día	**Cantidad Total de Trabajadores**
Lunes	$x + 5y + 3z$
Martes	$x + 5y + 3z$
Miercoles	$x + 5y + 3z$
Jueves	$x + 5y + 3z$
Viernes	$x + 5y + 3z$
Sábado	$5y + 2z$
Domingo	$5y + 3z$

Table 5: Sistema de Atención Telefónico

De esta manera, podemos establecer la cantidad total de trabajadores para cada día en función de las variables del modelo, información que se presenta en la Tabla 5.

Ahora bien, el problema consiste en mimimizar los costos por concepto de contrataciones, cumpliendo con los requerimietos de disponibilidad de telefonistas. El modelo debe incluir, además, la no negatividad de las variables. Con estas consideraciones el modelo se puede expresar como sigue:

$$P) \quad Min \quad 200.000x + 1.680.000y + 1.000.000z$$

$$\begin{aligned} x + 5y + 3z &\geq 100 \\ 5y + 2z &\geq 70 \\ 5y + 3z &\geq 45 \\ x, y, z &\geq 0 \end{aligned}$$

Problemas Propuestos

1. Cómo cambiaría su modelo si en vez de minimizar los egresos de la empresa le pidieran que con 12 millones de pesos al mes, usted logre que en suma semanal el número de telefonistas faltantes para cumplir con los requerimientos de Marketing sea mínimo. Note que si se tienen más telefonistas que los requeridos en un día cualquiera no le ayuda con lo solicitado.

2. Considere que ahora Ud. sabe que los requerimientos por llamadas son función del tiempo de espera, esto es, el tiempo que debe estar llamando un cliente antes de ser atendido. Ud. sabe además que éste tiempo de espera es función de la cantidad de telefonistas. De esta manera se han calibrado tres funciones, que entregan los requerimientos por llamadas en función de la cantidad de telefonistas activas. La primera es válida de Lunes a Viernes, la segunda el Sábado y la tercera el Domingo. Estas funciones pueden expresarse cómo LV(tele), S(tele) y D(tele), donde "tele" es el número de telefonistas activas. El departamento de Marketing quiere saber cual es la cantidad que se debe contratar de telefonistas para atender el máximo de clientes, sabiendo que se cuenta con un presupuesto máximo de $24.000.000.

1.13 Venta de Acciones

Un inversionista posee un portfolio de n tipos de acciones. Este portfolio consiste en s_i acciones del tipo i, las que adquirió a un precio p_i; $i = 1, ...n$. El precio actual de la acción tipo i es q_i y en un año más su precio será r_i. El inversionista desea vender algunas acciones de modo de obtener hoy un capital de al menos K y de maximizar el valor de su portfolio en acciones al año siguiente. Cada venta tiene asociada un costo de transacción equivalente a un 1% del valor de la transacción. Además él debe pagar un impuesto de 30% por las ganancias de capital que pueda obtener al vender una acción a un precio mayor que el precio al que compró la acción. Por ejemplo, si él compró una acción a valor de $30 y la vende a un valor de $50, y vende 1.000 de estas acciones, debe pagar un impuesto de $6.000. Observe que él podría vender acciones a un precio inferior al precio en que la compró, en cuyo caso no paga impuestos por ganancias de capital. Formule un modelo que le permita al inversionista resolver su problema en forma óptima.

SOLUCIÓN

En este problema lo que hay que determinar es la cantidad de acciones a vender hoy de cada tipo. Para esto utilizaremos las variables de decisión x_i. El objetivo es maximizar el valor del portfolio dentro de un año, es decir,

$$P) \quad Max \quad \sum_{i=1}^{n} r_i(s_i - x_i).$$

Los ingresos por ventas de hoy serán $\sum q_i x_i$, y el monto sobre el cual habrá que pagar impuestos es $\sum \max\{0; q_i - p_i\} x_i$, por lo que la restricción de obtener hoy un capital de K está dada por:

$$0.99 \sum_{i=1}^{n} q_i x_i - 0.30 \sum_{i=1}^{n} \max\{0; q_i - p_i\} x_i \geq K.$$

	Producto 1	**Producto 2**
Tasa producción máq. 1	5	6
Tasa producción máq. 2	4	8
Utilidad ($)	6	4

Table 6: Datos Planificación de Producción

Finalmente hay que considerar la no-negatividad de las variables y el límite máximo de venta dado por el número de acciones del portfolio actual, es decir,

$$0 \leq x_i \leq s_i \qquad \forall i.$$

Con este modelo se obtendrá una solución fraccionaria que probablemente sea una muy buena aproximación. En caso de requerirse una solución entera habrá que agregar restricciones de integralidad a las variables de decisión.

1.14 Planificación de Producción

Dos productos se manufacturan pasando en forma sucesiva a través de máquinas diferentes. El tiempo disponible para elaborar los 2 productos en cada máquina está limitado a 8 horas diarias, pero puede excederse ese período hasta en 4 horas sobre una base de tiempo extra. Cada hora de tiempo extra costará \$5 adicionales. Las tasas de producción (unidades por hora) de los productos y sus respectivas utilidades se encuentran la Tabla 6. Determine el nivel de producción que maximiza la ganancia neta.

SOLUCIÓN

Consideremos las siguientes variables de decisión:

x_i : Número de unidades a producir del producto i
y_i : Número de horas extras de la máquina j

La función objetivo es la utilidad por los productos producidos menos el costo máquina de trabajar horas extras. Las resticciones consideran las horas disponibles de cada máquina, el máximo de horas extras, y la no negatividad de las variables. De esta forma el modelo queda:

$$P) \quad Max \quad 6x_1 + 4x_2 - 5(y_1 + y_2)$$

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{6} &\leq 8 + y_1 \\ \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{8} &\leq 8 + y_2 \\ y_1, y_2 &\leq 4 \\ x_1, x_2, y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

1.15 Distribución de Especies en un Predio

Se tiene un terreno agrícola de 6 Hectáreas, que dada sus características se quiere destinar al cultivo de almendras. Para esto se cuenta con 5 especies: Non Pareil, Ner Plus, Texas, Carmel y Merced, las cuales deberán ser distribuidas en una proporción tal, que se garantice la polinización. Esta proporción (d_i), según estudios, deberá ser entre un 64% y un 70% para la especie Non Pareil; entre un 9% y un 12% para la Ner Plus; entre un 10% y un 12% para la Texas; y entre un 4% y un 6% para cada una de las dos restantes. El objetivo es encontrar la cantidad de árboles (x_i) de cada especie que se deberán plantar para maximizar las utilidades del predio. Para esto, habrá que considerar que existe un máximo (T) de árboles a plantar de acuerdo con el tamaño del terreno y la distancia que debe existir entre un árbol y otro. Además se sabe que cada especie tiene asociada una producción promedio de almendras por árbol (q_i), así como un precio de mercado (p_i) por kilo de producto.

SOLUCIÓN[10]

El objetivo del modelo es encontrar la cantidad de árboles de cada especie que se deben plantar para maximizar las utilidades del predio. Del enunciado del problema se desprende que es necesario considerar dos tipos de variables:

x_i = Número de árboles a plantar de la especie i,
$i = \{1 : \text{NonPareil}; 2 : \text{NerPlus}; 3 : \text{Texas}; 4 : \text{Carmel}; 5 : \text{Merced}\}$
d_i = Proporción en que serán distribuidos los árboles de la especie i,

El modelo debe considerar la maximización de beneficios por concepto de ventas, restringido a la cantidad máxima de árboles a plantar y a los límites establecidos para la proporción de cada una de las especies. Para efectos del modelo, la primera restricción se considerará en igualdad, mientrás que la segunda restricción involucra una relación entre el número de árboles de cada especie y la proporción de cada una de ellas dependiente de la cantidad total de árboles. Agregando las restricciones de no negatividad de las variables a las mencionadas anteriormente se obtiene el siguiente modelo para el problema:

$$P) \quad Max \quad \sum_{i=1}^{5} p_i q_i x_i$$

$$\begin{array}{rcll}
\sum_{i=1}^{5} x_i & = & T & \\
x_i & = & d_i T & \forall i \\
0.64 & \leq & d_1 \leq 0.70 & \\
0.09 & \leq & d_2 \leq 0.12 & \\
0.10 & \leq & d_3 \leq 0.12 & \\
0.04 & \leq & d_4 \leq 0.06 & \\
0.04 & \leq & d_5 \leq 0.06 & \\
x_i & \geq & 0 & \forall i
\end{array}$$

Problemas Propuestos:

1. Replantee el problema sin considerar la restricción de proporcionalidad, es decir, pensando que cualquier distribución de árboles es factible.

2. Analice como afecta la utilidad del predio si en vez de plantar 5 especies, se plantan sólo 4, dejando libre el espacio que ésta usaría en teoría (i.e. ese pedazo de terreno no entrega utilidad, o simplemente piense que la cantidad T de árboles a plantar disminuye en x_i, siendo esta cantidad la que representa a la especie que ya no se plantaría). Realice el análisis para cada una de las especies.

1.16 El Curanto más Grande

La comunidad de Castro, con motivo de su semana de aniversario, ha decidido preparar el curanto más grande jamás hecho por alguna isleña. Con este motivo, realizó diversas encuestas de opinión entre los mejores cocineros de la zona. La idea es poder determinar los ingredientes a utilizar, además de sus cantidades respectivas, para lograr la mejor combinación de sabores.

[10] Alejandro Amaro C., Raúl Schmidt H.. Optimización 1^{er} Semestre 1996.

Ingrediente	**Volumen**	**Costo**	**Aceptación**
Mariscos	1.5	1500	10
Arroz	1.2	300	7
Pescado	1.1	1000	7
Chorizo	1.4	1300	9
Caldo	1	500	5
Verduras	1.3	400	6
Pollo	1.6	1150	9

Table 7: Volumen, Costo y Aceptación de Ingredientes

El objetivo del estudio consiste en maximizar la calidad del curanto, calidad que se verá reflejada en una función de sabor, por ende, se requerirá maximizar el sabor del plato. El estudio realizado incluyó en su desarrollo siete ingredientes, determinados como posibles por la encuesta hecha a los cocineros. Estos ingredientes son: mariscos (x_1), arroz (x_2), pescado (x_3), chorizo (x_4), caldo (x_5), verduras (x_6), y pollo (x_7).

Como se sabe, el curanto es un plato que se prepara introduciendo todos los ingredientes en un hoyo hecho en la tierra con brasas en el fondo. Por razones de sanidad (para poder asegurar la correcta cocción de todos los ingredientes), el volumen del hoyo no debe ser superior a los 1.000 lts. Cada ingrediente aporta, según su cantidad, un cierto volumen al total. Por ejemplo, se ha estimado que un kilogramo de mariscos, ocupa $1,5$ lts de espacio (recordar que los mariscos van con concha), el volumen ocupado por los mariscos y los restantes ingredientes se resumen en la Tabla 7.

Por otro lado, la Municipalidad de Castro cuenta con un presupuesto de \$500.000 para la realización del curanto. Cada ingrediente tiene un costo asociado. Por ejemplo, un kilo de verduras tiene un costo de \$400, mientras que el kilo de chorizo tiene un costo de \$1.300 el kilo; los restantes costos se presentan en la Tabla 7.

La correcta consistencia del curanto, se debe en parte, a la cantidad de productos vegetales utilizados en su preparación. De esta forma, la cantidad de arroz y verduras a utilizar no debe superar los 200 kilos.

En cuanto al modelo de calidad para determinar la función objetivo se consideró lo siguiente: según los datos registrados por la Municipalidad, los diferentes ingredientes tienen distintos grados de "aceptación" entre el público, por ejemplo, gusta más una mayor cantidad de mariscos a una mayor cantidad de caldo. De esta forma, cada ingrediente fue evaluado en una escala de 1 a 10, siendo 10 el máximo, los valores obtenidos se presentan en la Tabla 7.

SOLUCION[11]

El problema consiste en determinar la cantidad de cada ingrediente a utilizar de modo de lograr la mejor combinación de sabores, de modo que el modelo quedará bien expresado a través de la variable de decisión:

$x_i =$ Kilos de ingrediente i a utilizar en el curanto, $i = 1, ..., 7$

Para expresar el objetivo del problema, que es maximizar la calidad del curanto, se debe hacer uso del estudio de aceptación elaborado por la Municipalidad, además de considerar las restricciones de volumen y de costo asociadas, y la restricción que asegura la correcta consistencia del curanto. Esto permite plantear el siguiente modelo:

$$P) \ Max \ \ 10x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 5x_5 + 6x_6 + 9x_7$$

$$\begin{aligned} 1.5x_1 + 1.2x_2 + 1.1x_3 + 1.4x_4 + x_5 + 1.3x_6 + 1.6x_7 &\leq 1000 \\ 1500x_1 + 300x_2 + 1000x_3 + 1300x_4 + 500x_5 + 400x_6 + 1150x_7 &\leq 500000 \\ x_2 + x_6 &\leq 200 \\ x_i &\geq 0 \qquad \forall i \end{aligned}$$

[11] Javier Egaña. Optimización 1^{er} Semestre 2004.

	Estruct.	Mecánicos	Eléctricos	Diseñadores	Transp.
Estética	2	1	0	2	0
Estructura	2	1	1	1	1
Mecánica	1	3	0	1	1
Confort	1	1	0	2	0
Tecnología	0	0	2	2	1
Seguridad	1	1	1	1	1
Medio Ambiente	0	0	1	1	2
Costo Semanal	$15.500.000	$ 16.500.000	$ 17.200.000	$ 14.350.000	$ 14.750.000

Table 8: Equipos Necesarios para cada Faceta del Automóvil

1.17 Diseño Automotriz

Suponga que usted es un magnate y, aburrido con los negocios convencionales, se ha decidido por empezar un negocio automotriz cumpliendo el sueño que ha tenido desde pequeño: fabricar su propio vehículo. Para esto, luego de construir su propia empresa automotriz, ha contratado un equipo de ingenieros que se encargarán de diseñar cada faceta del nuevo vehículo, las cuales se han desglosado en:

- Estética (Diseño de la carrocería)
- Estructura (Diseño de amortiguación)
- Mecánica (Diseño del motor, transmisión, etc.)
- Confort (Diseño del interior, aislamiento sonoro, etc)
- Tecnología (Implementación de adelantos tecnológicos, GPS, etc)
- Seguridad (Diseño de dispositivos de seguridad, air-bags, etc)
- Integración con el medio ambiente (Baja emisión de contaminantes, reutilización de los componentes)

El equipo de ingenieros que ha contratado para realizar semejante hazaña está dividido, según la especialidad de los profesionales que integran cada uno de éstos, en los siguientes departamentos:

- Equipo de Ingenieros Estructurales
- Equipo de Ingenieros Mecánicos
- Equipo de Ingenieros Eléctricos
- Equipo de Diseñadores
- Equipo de Ingenieros de Transporte

Para lograr una total penetración en el mercado usted ha decidido contratar a una empresa externa especialista en la clasificación de los automóviles, la que está encargada de cuantificar el logro alcanzado por este nuevo vehículo en términos de puntaje. Así, para cada una de los distintos aspectos del automóvil se le ha asignado un puntaje de 1 a 10, donde 1 sería un aspecto logrado pésimamente y un 10 sería un aspecto alcanzado a la perfección. Su objetivo sería entonces lograr la mayor suma de puntos en total, pero existe un inconveniente… todo tiene su precio y la empresa externa especialista que lo asesora ha estimado que se necesitan determinadas semanas de trabajo en cada aspecto para subir un punto. Además, cada aspecto debe ser atendido por más de un equipo de desarrollo. Lo anterior se resume en la Tabla 8, donde se presentan además, los costos semanales por equipo de trabajo.

Por otra parte, el automóvil contra el cual desea competir en el mercado ha sido evaluado por diversas revistas especializadas y a usted le interesa que este nuevo vehículo salga eventualmente mejor evaluado en todas estas pruebas. Pero lamentablemente ninguna revista ha efectuado un desglose tan minucioso de las características de los automóviles y se dispone de la siguiente información:

Aspecto	**Costo por Punto**
Estética	\$ 76.200.000
Estructura	\$ 93.800.000
Mecánica	\$ 94.100.000
Confort	\$ 60.700.000
Tecnología	\$ 77.850.000
Seguridad	\$ 78.300.000
Medio Ambiente	\$ 61.050.000

Table 9: Costo de Aumentar un Punto cada Variable

- Revista N^o 1: Estética, Mecánica y Confort: 22 puntos
- Revista N^o 2: Confort, Tecnología, Seguridad y Mecánica: 21 puntos
- Revista N^o 3: Estética, Estructura Tecnología y Seguridad: 28 puntos
- Revista N^o 4: Medio Ambiente, Estética y Mecánica: 24 puntos

Por último, un estudio de marketing indica que el vehículo no debe tener ningún aspecto con puntuación menor que 5 y a su vez el auto debe promediar una nota 7 como mínimo, para evitar una identificación negativa con la marca desde su lanzamiento.

Su objetivo es crear un automóvil que cumpla con todas estos requerimientos y, a la vez, sea lo mas barato posible, es decir, que el dinero invertido sea el menor posible. El capital disponible es de $US\$6$ millones, aproximadamente \$3.810 millones.

SOLUCION[12]

El problema consiste en decidir que cantidad de dinero invertir en cada uno de los ítems o facetas del vehículo, de esta manera la variable de decisión para el modelo resulta ser:

x_i = Cantidad de dinero a invertir en cada ítem i, $i = 1, ..., 7$

Analizando el problema, se aprecia que aumentar un punto en cada faceta del automóvil tiene diferentes costos, dependiendo de los equipos involucrados. Así, se debe determinar el precio que tiene aumentar en un punto cada variable, lo que se obtiene multiplicando el costo semanal de cada equipo por las semanas necesarias para cada faceta. Los valores obtenidos (C_i, $i = 1, ..., 7$) se presentan en la Tabla 9.

El objetivo del problema es minimizar el costo total, considerando las restricciones de que la puntuación del automóvil debe ser mayor o igual a 7, que ningún item puede tener una puntuación menor a 5 ni mayor que 10 y que se deben superar las evaluaciones publicadas del otro vehículo. De esta manera, el modelo resulta ser:

$$P) \quad Min \quad \sum_{i=1}^{7} x_i$$

[12] José Tomás Cumsille y Camilo Flores. Optimización 1er Semestre 2004.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{7} \frac{x_i}{C_i} &\geq 49 \\
5C_i &\leq x_i \qquad \forall i = 1, ..., 7 \\
x_i &\leq 10C_i \qquad \forall i = 1, ..., 7 \\
\frac{x_1}{C_1} + \frac{x_3}{C_3} + \frac{x_4}{C_4} &\geq 22 \\
\frac{x_3}{C_3} + \frac{x_4}{C_4} + \frac{x_5}{C_5} + \frac{x_6}{C_6} &\geq 21 \\
\frac{x_1}{C_1} + \frac{x_2}{C_2} + \frac{x_5}{C_5} + \frac{x_6}{C_6} &\geq 28. \\
\frac{x_1}{C_1} + \frac{x_3}{C_3} + \frac{x_7}{C_7} &\geq 24 \\
\sum_{i=1}^{7} x_i &\leq 3.810.000.000 \\
x_i &\geq 0 \qquad \forall i = 1, ..., 7
\end{aligned}
$$

1.18 FAMAE: Producción de Tiros

FAMAE, Fábrica de Maestranzas del Ejército, es una empresa dependiente del Ejército de Chile que cuenta con una larga trayectoria en la historia de Chile y el mundo. Fundada en 1810, es la fábrica militar más antigua de América y nació para dar solución principalmente a los problemas de mantenimiento y provisión de los sistemas de armas nacionales. Su importancia recibió un gran empuje en la década de los 70 debido al efecto de la "Enmienda Kennedy", que impedía el acceso a repuestos e insumos del mercado internacional de armas, cuyo efecto más crítico se alcanzó en 1978, para la cuasi-guerra con Argentina. Luego de la crisis de la deuda del año 1982, el empuje liberalizador de la Economía no sólo alcanzó a las empresas privadas, sino también a las militares. De esta forma FAMAE dio un gran paso al incorporarse al rubro de la maquinaria agrícola y sistemas de riego. Dentro de la misma década y especialmente en los años 90, esta empresa se ha modernizado hasta el punto de empezar la producción de armas de diseño nacional: SAF, Mini-SAF, etc. que se suman a la fabricación de fusiles de asalto oficial, $SIG-542$ y $SIG-540$. Además, se compró la licencia a Suiza para la fabricación de los Carros de Transporte 8×8 y 10×10 Mowag Piranha. Este auge de la empresa ha sido además acompañado por una mejora en la eficiencia, tanto en los costos de producción y educación del personal como en la mecanización de la fábrica. En especial, se han implementado laboratorios muy sofisticados de balística, resistencia al impacto de materiales, vidrios antibalísticos, química, etc. Éste último se beneficia de la planta de químicos del Ejército en Talagante, muy moderna y eficiente.

Actualmente se está llevando a cabo la segunda fase del gran proceso modernizador del Ejército (que es parte de un proceso que afecta a todas las FF.AA), que se expresa en hechos como: reducción del personal, cambio de planes de formación en las Escuelas Matrices, adquisición de equipo sofisticado, exigencias mayores para el personal de planta y Especializaciones en el extranjero, etc. Un aspecto muy importante en este proceso es el de uniformar el armamento con el fin de reducir costos de operación. En particular, la Comandancia en Jefe ha solicitado al Director de FAMAE un plan de trabajo para munición estándar NATO, con el orden de producción respectivo:

- Tiros Pistola 9×19 mm. Parabellum (entre 710 y 850 mil)
- Tiros $5,56 \times 45$ mm. NATO (entre 2,4 y 4 millones)
- Tiros $7,62 \times 51$ mm. NATO (entre 4,6 y 5,4 millones)
- Tiros $12,7 \times 99$ mm. NATO (entre 1,9 y 2,7 millones)
- Tiros 20×110 mm. (entre 1,5 y 1,9 millones)

Sin embargo, FAMAE enfrenta simultáneamente otra demanda por parte de Brasil, quien no ocupa el estándar NATO, sino que el oriental:

X_i	**Tiro**	**Polvora**	**Cobre**	**Plomo**	**Madera**	**Precio**
1	9 mm. Parabellum	4.17	3.7	8.03	15	332
2	5.56 NATO	1.9	3.04	3.56	14	266
3	7.62 NATO	9.37	5.3	9.33	36	310
4	12.7 NATO	5.9	12.05	11.3	37	381
5	20 x 110 mm.	2.9	9.9	12.3	35	422
6	7.62 x 39 mm.	5.1	4.7	7.9	23	342
7	20 x 102 mm.	3.9	12.1	9.9	32	453
	Costo (US$/Kg)	5.25	0.81	12.95	0.25	

Table 10: Famae Producción de Tiros

- Tiros $7,62 \times 39$ mm. (hasta 870 mil)
- Tiros 20×102 mm. (hasta 540 mil)

Todos estos productos necesitan de insumos que se adquieren de proveedores nacionales y también de divisiones internas del Ejército, como el complejo químico ya señalado. Además, los tiros de bajo calibre (desde $5,56$ a $7,62$ *mm.*) se distribuyen únicamente en cajas de madera de 1.000 cartuchos; los de $12,7$ *mm.* en cajas de 250, mientras que los más pesados de 20 *mm.* se venden en cajas de 100. En la Tabla 10 se presentan todos los datos (en Kg/caja) concernientes a unidades de componente por cada caja, precio de venta, etc.

Es necesario aclarar que FAMAE dispone de un presupuesto para este proyecto de $US\$6,78$ millones, por lo que probablemente no cuenta con el dinero suficiente para cumplir todos los pedidos. Además, los stocks en el mercado de pólvora y plomo son limitados. En el caso de la pólvora, el Complejo Químico de Talagante se ha comprometido a entregar hasta 198 toneladas de pólvora. Por otra parte, la cantidad de plomo disponible está limitada por parte de la minera a 419 toneladas.

El objetivo de nuestro taller es maximizar las utilidades por concepto de ventas.

SOLUCION[13]

Con este modelo se pretende determinar la cantidad de cada tipo de tiro a fabricar, de manera de maximizar la utilidad de la empresa. Por esta razón la variable de decisión para el modelo puede ser:

$x_i =$ Cantidad de cajas de cada tipo de tiro i a fabricar. $i = 1, ..., 7$

La función objetivo debe maximizar las utilidades por concepto de ventas, esto es la diferencia entre los ingresos por ventas y los costos de materias primas. La Tabla 10 presenta el valor que se obtiene por la venta de cada tiro, el costo de cada materia prima y la cantidad de cada materia prima a emplear en los diferentes tiros, de modo que la función objetivo resulta ser:

$$\begin{aligned} Max \quad & 332x_1 + 266x_2 + 310x_3 + 381x_4 + 422x_5 + 342x_6 + 453x_7 - \\ & [5.25 \cdot (4.17x_1 + 4.9x_2 + 9.37x_3 + 5.9x_4 + 2.9x_5 + 5.1x_6 + 3.9x_7) + \\ & 0.81 \cdot (3.7x_1 + 3.04x_2 + 5.3x_3 + 12.05x_4 + 9.9x_5 + 4.7x_6 + 12.1x_7) + \\ & 12.95 \cdot (8.03x_1 + 3.56x_2 + 9.33x_3 + 11.3x_4 + 12.3x_5 + 7.9x_6 + 9.9x_7) + \\ & 0.25 \cdot (15x_1 + 14x_2 + 36x_3 + 37x_4 + 35x_5 + 23x_6 + 32x_7)] \end{aligned}$$

Lo que simplificado es equivalente a:

$$Max \quad 199.37x_1 + 188.21x_2 + 126.69x_3 + 184.68x_4 + 230.72x_5 + 203.36x_6 + 286.52x_7$$

[13] Oscar Isler. Optimización 1^{er} Semestre 2004.

	Gas Licuado	Carbón	Petroleo
País 1	0.52	0.2	0.55
País 2	0.58	0.26	0.5
País 3	0.6	0.19	0.57

Table 11: Costos Asociados a Importación de Combustibles

	Tiempo Base (días)	Gas Licuado	Carbón	Petroleo
País 1	75	0.07	0.06	0.072
País 2	60	0.056	0.045	0.075
País 3	60	0.061	0.07	0.062

Table 12: Tiempo Adicional de Llegada de Combustible

Este modelo se debe completar con las restricciones del problema, las que incluyen la restricción de presupuesto y de stock de materias primas (pólvora y plomo), además de los intervalos de producción. El modelo completo se presenta a continuación:

$$P) \quad Max \quad 199.37x_1 + 188.21x_2 + 126.69x_3 + 184.68x_4 + 230.72x_5 + 203.36x_6 + 286.52x_7$$

$$\begin{array}{rcl}
132.63x_1 + 77.79x_2 + 183.31x_3 + 196.32x_4 + 191.28x_5 + 138.637x_6 + 166.48x_7 & \leq & 6.78 \cdot 10^6 \\
4.17x_1 + 4.9x_2 + 9.37x_3 + 5.9x_4 + 2.9x_5 + 5.1x_6 + 3.9x_7 & \leq & 198.000 \\
8.03x_1 + 3.56x_2 + 9.33x_3 + 11.3x_4 + 12.3x_5 + 7.9x_6 + 9.9x_7 & \leq & 419.000 \\
710.000 & \leq & x_1 \leq 850.000 \\
2.400.000 & \leq & x_2 \leq 4.000.000 \\
4.600.000 & \leq & x_3 \leq 5.400.000 \\
1.900.000 & \leq & x_4 \leq 2.700.000 \\
1.500.000 & \leq & x_5 \leq 1.900.000 \\
0 & \leq & x_6 \leq 870 \\
0 & \leq & x_7 \leq 540
\end{array}$$

1.19 Crisis del Gas

Debido a la reducción de las importaciones de gas natural desde Argentina, el gobierno chileno ha solicitado a un grupo de expertos idear una política energética que asegure de antemano los requerimientos mínimos del país para el año 2005. De este modo, se requiere importar la materia prima suficiente para generar exactamente 5.000 GWh de energía. Las plantas generadoras de energía se modificarán para operar con tres alternativas al gas natural: carbón, petróleo y gas licuado. Por otro lado, hay tres países que poseen estos recursos y están dispuestos a exportarlos a Chile. Para poder comparar los tres combustibles entre sí, nos concentraremos sólo en su capacidad de producir energía. O sea, el enfoque estará basado en decidir cuantos de los 5000 GWh necesarios se deberán generar a partir de cada combustible.

La Tabla 11 presenta los costos (en millones de dólares) asociados a la importación de la cantidad suficiente de cada combustible para generar 1 GWh.
Es substancial que los combustibles importados lleguen al país en un período no mayor a 180 días. La importación total desde cada país tarda cierto tiempo base en llegar, a lo que se debe agregar una demora adicional variable en días (Tabla 12) que depende de la cantidad de cada combustible que se importe de ese país.

También se deben tomar en cuenta ciertas medidas relacionadas con el medio ambiente. El total de CO_2 emitido por las plantas energéticas en Chile no podrá superar las 1.300 toneladas al momento de generar los

	CO_2 Emitido (Toneladas)
Gas Licuado	0.16
Carbón	0.4
Petróleo	0.19

Table 13: Emisión de CO2 de cada Combustible

5.000 GWh. Evidencias experimentales muestran que por cada GWh generado a partir de cada combustible se emite la cantidad de CO_2 especificada en la Tabla 13

Por último, se han firmado dos acuerdos con los países exportadores. Se deberá adquirir la cantidad suficiente de petróleo del país 3 para generar al menos 500 GWh. Además, entre los tres tipos de combustible, se deberá importar del país 1 la cantidad suficiente para producir 1.500 GWh.

SOLUCIÓN[14]

El objetivo del modelo es determinar una política energética que asegure los requerimientos del país para el año 2005. Para ello debe generar 5.000 GWh a partir de tres tipos de combustibles, abasteciéndose desde 3 países; por lo tanto la decisión se basa en determinar la cantidad de cada tipo de combustible a importar de cada país, en función de la energía que generará cada combustible, lo que es equivalente a emplear la variable de decisión:

x_{ij} = Cantidad de energía que generará el combustible i importado desde el país j

De acuerdo a los datos expresados en las Tablas 11,12 y 13, consideraremos conocidos los siguientes parámetros:

c_{ij} = Costo asociado a importar la cantidad necesaria para generar 1 GWh a partir del combustible i proveniente del país j.

t_{ij} = Demora adicional por importar la cantidad necesaria para generar 1 GWh a partir del combustible i proveniente del país j.

a_i = Toneladas de CO_2 emitidas al generar 1 GWh a partir del combustible i.

Nótese que esto se emplea solo para simplificar la presentación del problema, usando una notación agregada en lugar de usar cada uno de los datos dados por separado, como se ha hecho en problemas anteriores.

Ahora bien, el objetivo del modelo es minimizar los costos asociados a importar los combustibles necesarios, considerando como restricciones cumplir con la política energética de 5.000 GWh, el hecho de que los combustibles no pueden demorar más de 180 días en llegar al país, que en el proceso de generación de energía no se pueden emitir más de 1300 toneladas de CO_2 y que se deben cumplir los acuerdos establecidos con los países exportadores.

De acuerdo a lo anterior, el modelo de optimización se puede expresar por:

$$P) \quad Min \quad \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} c_{ij}x_{ij}$$

[14]Christian Araya. Optimización 1^{er} Semestre 2004.

Descripción	Choclo	Alfalfa	Porotos	Trigo
Producción por hectáreas (unidades)	50	40	40	15
Precio de venta por unidad	2.75	1	2.5	3
Costo de plantación por hectárea	25	10	25	22
Trabajo requerido en hrs-hombre en Septiembre	0	1.5	0	1
Trabajo requerido en hrs-hombre en Diciembre	1.5	0	2.5	0.5

Table 14: Datos del Problema Decisión de Producción Agrícola

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_{ij} &= 5000 \\
\sum_{i=1}^{3} t_{i1}x_{i1} + 75 &\leq 180 \\
\sum_{i=1}^{3} t_{i2}x_{i2} + 60 &\leq 180 \\
\sum_{i=1}^{3} t_{i3}x_{i3} + 60 &\leq 180 \\
\sum_{i=1}^{3} x_{i1} &\geq 1500 \\
\sum_{i=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} a_i x_{ij} &\leq 1300 \\
x_{13} &\geq 500 \\
x_{ij} &\geq 0 \qquad \forall i,j
\end{aligned}$$

1.20 Decisión de Producción Agrícola

Un agricultor tiene 300 hectáreas de tierra, 200 horas-hombre disponibles en Septiembre y 300 horas-hombre disponibles en Diciembre. Puede plantar cualquier combinación de los siguientes productos: choclo, alfalfa, porotos y trigo.

Formule un modelo de programación lineal que, considerando los datos dados en la Tabla 14, permita determinar cuándo y cuánto debe plantar el agricultor de cada producto de modo de maximizar sus ganancias.

El modelo debe considerar, además, los siguientes supuestos:

- La tierra plantada en septiembre no se puede utilizar en diciembre.
- Considere que lo plantado en septiembre y diciembre se cosecha en el mismo tiempo (en el futuro).
- Se vende todo lo que se produce.
- El trabajo requerido en horas-hombres por hectáreas durante septiembre y diciembre, se incurré sólo si plantó o está plantado el cereal respectivo.
- Los meses que el trabajo necesario por hectárea es cero son interpretados como que en esos meses no se puede plantar ese producto, o no es necesario dedicarle tiempo a la plantación, una vez hecha.

SOLUCION

El objetivo del problema es determinar la política de cultivo que debe seguir el agricultor, de manera de maximizar su utilidad. Esta política incluye la opción de plantar cualquier combinación de productos, considerando incluso la de no plantar. Para poder responder a la pregunta de cuánto y cuándo debe plantar el agricultor, emplearemos la variable de decisión:

x_{ij} = Número de hectáreas del producto i que el agricultor debe plantar en el mes j.
$i = \{1 : \text{choclo}, 2 : \text{alfalfa}, 3 : \text{porotos}, 4 : \text{trigo}\}$ $\quad j = \{A : \text{Septiembre}, B : \text{Diciembre}\}$

Descripción	Choclo	Alfalfa	Porotos	Trigo
Beneficio por Hectárea	112.5	30	75	23

Table 15: Beneficio de cada Producto Cultivado

De acuerdo a los datos entregados en la Tabla 14 podemos obtener el beneficio por hectárea de cada tipo de cultivo, empleando la relación dada por la expresión en (6). Los valores obtenidos se presentan en la Tabla 15

$$\text{Beneficio por hectárea} = \text{Producción por hectárea}\cdot\text{Precio unitario - Costo por hectárea} \tag{6}$$

De esta manera, el objetivo del problema es maximizar el beneficio total para el agricultor, considerando las restricciones de terreno de cultivo (máximo de 300 hectáreas) y de mano de obra disponible durante cada mes. Por otro lado, se debe considerar que las variables son no negativas, y que x_{1A}, x_{3A} y x_{2B} siempre son cero, ya que no es posible realizar ese tipo de cultivo en el mes correspondiente. Esto permite formular el siguiente problema de optimización:

$$P) \quad Max \quad 112.5x_{1B} + 30x_{2A} + 75x_{3B} + 23(x_{4A} + x_{4B})$$

$$\begin{aligned}
x_{1B} + x_{2A} + x_{3B} + x_{4A} + x_{4B} &\leq 300 \\
1.5x_{2A} + x_{4A} &\leq 200 \\
1.5x_{1B} + 2.5x_{3B} + 0.5x_{4B} &\leq 300 \\
x_{1B}, x_{2A}, x_{3B}, x_{4A}, x_{4B} &\geq 0
\end{aligned}$$

Problemas Propuestos

1. Suponga que un vecino ofrece al agricultor arrendarle hectáreas para cultivar, a un precio de \$15 la hectárea al año. Considere que esta tierra cuenta con características diferentes a la propia ¿cómo incluiría esta nueva posibilidad en el modelo?

2. Ahora considere que un vecino ofrece arrendarle sus tierras por \$20 la hectárea anual ¿de qué manera incluiría esta nueva condición en el modelo?

3. ¿Que ocurriría si ahora se ofrecen para ser contratados obreros, que le cobrarán \$0,2 por hora trabajada? Implemente esta nueva condición en el modelo. Considere el caso opuesto, en que a Ud. le ofrecen contratarlo para labrar otra tierra a \$0,3 la hora.

4. ¿Cómo modificaría el problema si le informan que pueden transportarle a otro mercado, donde le pagan \$5.5, \$2, \$5 y \$6 por unidad de choclos, alfalfa, porotos y trigo, pero que para llegar a él debe pagar un costo por transporte que le cuesta \$500 el viaje y que en cada viaje puede llevar o 200 choclos o 150 alfalfas o 150 porotos o 75 unidades de trigo, o una combinación que mantenga esta proporción, por ejemplo 100 choclos y 75 alfalfas? Añada esta nueva condición al modelo primitivo.

1.21 School Board

El school board de una cierta ciudad en Estados Unidos ha tomado la decisión de cerrar uno de sus middle schools (estos colegios imparten los niveles de sexto, séptimo y octavo básico) al final del presente año, y re-asignar TODOS los estudiantes a los 3 restantes colegios de este tipo en la ciudad. El distrito de la ciudad provee servicio de transporte escolar a los estudiantes que deben viajar más de una milla para llegar a su colegio. El board quiere re-asignar a los estudiantes de modo de minimizar el costo total de transporte. En la Tabla 16 se incluye el número de estudiantes del colegio que se cerrará, en cada una de las áreas residenciales de la ciudad, y también el porcentaje de éstos que corresponden a cada uno de los niveles; además se incluye el costo anual de transporte por estudiante desde cada una de las 6 áreas residenciales a cada colegio (cero indica que el bus no es requerido y "*" indica que se trata de una asignación infactible).

		% por curso			Costo Transporte		
Area	**N^o de Estudiantes**	**6to**	**7vo**	**8vo**	**1**	**2**	**3**
1	450	32	38	30	300	0	700
2	600	37	28	35	*	400	500
3	550	30	32	38	600	300	200
4	350	28	40	32	200	500	*
5	500	39	34	27	0	*	400
6	450	34	28	38	500	300	0

Table 16: School Board

El school board ha impuesto además la restricción que, en relación al total de alumnos trasladados a un colegio, cada nivel $(6, 7, 8)$ debe representar entre un 30 y un 35% del total. El cupo total disponible en cada colegio para aceptar nuevos alumnos es de 900, 1.100 y 1.000 respectivamente. Usted ha sido contratado como un consultor en Investigación de Operaciones para asesorar al school board en la solución de este problema. Formule el problema como un modelo de programación lineal.

Hint: Para desarrollar su formulación puede pensar en forma paramétrica, es decir, definir c_{ij} como el costo anual de transporte de un estudiante del área i al colegio j.

SOLUCIÓN

Comenzaremos definiendo algunos parámetros tales como:

$$\begin{aligned} n_i &: \text{ Número de estudiantes que viven en área } i \\ c_{ij} &: \text{ Costo de transporte desde área } i \text{ hasta el colegio } j \\ r_{ik} &: \text{ Porcentaje de alumnos del área } i \text{ en curso } k \text{ (1:sexto; 2:séptimo; 3:octavo)} \\ m_j &: \text{ Cupo disponible en colegio } j \text{ para aceptar nuevos alumnos} \end{aligned}$$

y la variable de decisión:

x_{ijk} : Número de estudiantes del área i que son trasladados al colegio j al curso k.

El objetivo de este problema es encontrar una asignación de alumnos que minimice los costos de transporte. De esta forma obtenemos la siguiente función objetivo:

$$P) \quad Min \quad \sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} c_{ij}x_{ijk}$$

Dentro de las restricción impuestas para esta asignación encontramos las siguientes:

$$\begin{aligned} 0.30\sum_{i=1}^{6}\sum_{k=1}^{3} x_{ijk} &\leq \sum_{i=1}^{6} x_{ijk} \leq 0.35\sum_{i=1}^{6}\sum_{k=1}^{3} x_{ijk} \qquad \forall k, j && (7) \\ \sum_{i=1}^{6}\sum_{k=1}^{3} x_{ijk} &\leq m_j \qquad \forall j && (8) \\ \sum_{j=1}^{3} x_{ijk} &= r_{ik}n_i \qquad \forall i, k && (9) \end{aligned}$$

donde la restricción (7) asegura que en cada curso de cada colegio haya entre un 30% y un 35% de los alumnos reasignados, la restricción (8) se preocupa de no sobre asignar en colegios que no haya cupo, mientras que la restricción (9) reasigna a todos los alumnos del colegio que está cerrando.

Finalmente, hay tres asignaciones que no pueden ser consideradas, indicadas con "$*$" en la Tabla 16. Así, junto a las restricciones naturales de no negatividad, consideramos también lo siguiente:

$$\begin{aligned} x_{21k}, x_{52k}, x_{43k} &= 0 \qquad \forall k \\ x_{ijk} &\geq 0 \qquad \forall i, j, k. \end{aligned}$$

Temporada	Tasa por h.h	Máx. de hh a contratar
2	US$ 2	400
3	US$ 4	300
4	US$ 1	600
5	US$ 10	1000

Table 17: Requerimientos de Producción

	Precio por Unidad	
Temporada	**Producto 1**	**Producto 2**
2	US$ 20	US$ 45
3	US$ 25	US$ 40
4	US$ 30	US$ 40
5	US$ 15	US$ 30

Table 18: Precio de Venta de Productos

1.22 Planificación de Producción y Ventas

Un fabricante cuenta con un permiso para operar su planta durante 5 temporadas. Él puede fabricar sus productos durante las primeras 4 temporadas; en la quinta temporada sólo puede vender productos sobrantes de las temporadas anteriores. Este fabricante posee dos tipos de productos. Una unidad del producto 1 requiere 5 horas-hombre ($h.h$) del taller de preparación y 3 horas-hombre del taller de terminado. Para el producto 2 estos requerimientos son 6 y 1 respectivamente. En cada temporada se dispone de a lo sumo 12.000 horas-hombre en el taller de preparación y de 15.000 en el taller de terminado (sólo durante las primeras 4 temporadas).

Un producto que es manufacturado en cierta temporada puede ser vendido en cualquier temporada a partir de la siguiente. Sin embargo, la venta requiere de ciertos esfuerzos de marketing; se sabe que se requieren 0.1 horas-hombre de marketing para vender 10 unidades del producto 1, y 0.2 horas-hombre para vender 10 unidades del producto 2. Las horas-hombre de marketing pueden contratarse a los precios indicados en la Tabla 17.

Si una unidad de un producto está disponible para ser vendida durante una cierta temporada, pero no se vende en esa temporada, el fabricante debe pagar un costo de almacenaje de $US\$2$ por unidad para ponerla en venta en la siguiente temporada (y así sucesivamente si decide postergar la venta para temporadas posteriores). Los precios de venta de los productos se presentan en la Tabla 18.

Formule un modelo que permita encontrar el plan óptimo de producción y ventas.

SOLUCIÓN

Queremos conocer cuánto debe ser la producción y venta en cada periodo. Además, tenemos la posibilidad de almacenar productos, lo cual depende de las decisiones que se tomen, así que debe ser considerado como una variable. De esta forma, las variables de decisión son:

x_{it} : cantidad producida de i en el periodo t.

y_{it} : cantidad vendida de i en el periodo t.

I_{it} : cantidad de producto i que se almacena al final del periodo t.

Dado que sería largo escribir el modelo con todos los números, resumiremos la Tabla 17 y Tabla 18 en los siguientes parámetros:

c_t : costo de h.h. de marketing en el periodo t.

	Soya	Maíz	Trigo
Horas requeridas (invierno y primavera)	1.0	0.9	0.6
Horas requeridas (verano y otoño)	1.4	1.2	0.7
Flujo neto (US$)	70	60	40

Table 19: Requerimientos de Cada Plantación

h_t : máximo de horas a contratar en marketing en el periodo t.

p_{it} : precio de venta del producto i en el periodo t.

El modelo queda entonces:

$$\max \sum_t \sum_i p_{it} y_{it} - \sum_t \sum_i 2I_{it} - \sum_t (\frac{y_{1t}}{100} + \frac{y_{2t}}{50}) c_t$$

s.a.

$$\begin{array}{rcll} 5x_{1t} + 6x_{2t} & \leq & 12.000 & \forall t \\ 3x_{1t} + x_{2t} & \leq & 15.000 & \forall t \\ I_{i,t-1} + x_{it} - y_{it} & = & I_{it} & \forall i, t \\ \sum_i y_{it} & \leq & h_t & \forall t \\ y_{i1} & = & 0 & \forall i \\ x_{it}, y_{it}, I_{it} & \geq & 0 & \forall i, t \end{array}$$

1.23 Administración de Fundo Familiar

Un fundo de tipo familiar tiene una extensión de 640 hectáreas. Los miembros de la familia pueden generar un total de 4.000 horas de trabajo durante los meses de invierno y primavera y 4.500 horas durante los meses de verano y otoño. Si algunas de estas horas no son requeridas, los miembros más jóvenes de la familia pueden trabajar en un predio vecino a $US\$5$ la hora en invierno y primavera y a $US\$5.50$ durante el verano y el otoño.

El fundo mantiene dos tipos de crianzas: vacas y gallinas y 3 tipos de cultivos: soya, maíz y trigo (todos estos cultivos pueden venderse en el mercado, pero también deben utilizarse para alimentar las vacas y las gallinas; el maíz se utiliza para las vacas y el trigo para las gallinas). Los cultivos se cosechan durante el verano y el otoño. Durante los meses de invierno se deben tomar las decisiones del tamaño de las crianzas y de las plantaciones para el próximo año. En la actualidad, la familia ha tenido un buen año y ha acumulado un fondo de $US\$20.000$ que puede usarse para comprar más animales para la crianza (existen otros fondos disponibles para los gastos de operación del campo, lo que incluye las próximas plantaciones de cultivos). La familia tiene en la actualidad 30 vacas, las que se valoran en $US\$35.000$ y 2.000 gallinas que se valoran en $US\$5.000$. Ellos quieren mantener estas cantidades de animales y eventualmente adquirir más. Cada vaca nueva cuesta $US\$1.500$ y cada gallina $US\$3$. Después de un año, el valor de una vaca decrece en un 10% y el de una gallina en un 25%, debido a envejecimiento. Cada vaca requerirá 2 hectáreas de terreno y 10 horas de trabajo al mes, y generará un flujo neto de caja de $US\$850$ para la familia. Para el caso de las gallinas, las cifras son las siguientes: 0 utilización de terreno; 0.05 horas de trabajo mensuales; y un flujo neto de $US\$4.25$. El gallinero del fundo puede acomodar 5.000 gallinas y el establo de las vacas puede acomodar un máximo de 42 vacas. La Tabla 19 indica los requerimientos de cada una de las plantaciones (por hectárea) y el flujo neto de cada una:

Para proveer de suficiente alimento para los animales, la familia ha decidido plantar al menos una hectárea de maiz por cada vaca y 0.05 hectáreas de trigo por cada gallina.

La familia desea determinar cuántas hectáreas plantar de cada cultivo y cuántas vacas y gallinas poseer en el próximo año de modo de maximizar el valor monetario de la familia al final del siguiente año. Este valor monetario incluye: el flujo neto obtenido de los animales; el valor neto obtenido de las cosechas; el remanente del fondo de inversión disponible inicialmente; el valor remanente de los animales al final del año; a todo lo que hay que restar US$40.000 en gastos corrientes de la familia.

Formule el problema como uno de Programación Lineal.

SOLUCIÓN

En este caso, se debe decidir cuánto plantar de cada tipo y cuántos animales adquirir. Por lo tanto, usaremos las siguientes variables:

x_i: hectáreas a plantar del cultivo i, con $i \in \{\text{soya, maíz,trigo}\}$.

y_i: cantidad de animales tipo i a adquirir, con $i \in \{\text{vacas, gallinas}\}$.

Así, la cantidad de animales totales serán $(30+y_1)$ y $(2000+y_2)$ para las vacas y gallinas respectivamente. Se tienen las siguientes restricciones para el problema:

- No se puede sobrepasar la cantidad máxima de horas de trabajo para cada una de las dos temporadas. Cabe destacar que cada temporada tiene seis meses.

$$x_1 + 0.9x_2 + 0.6x_3 + 6 \cdot 10 \cdot (30 + y_1) + 6 \cdot 0.05 \cdot (2000 + y_2) \leq 4000$$

$$1.4x_1 + 1.2x_2 + 0.7x_3 + 6 \cdot 10 \cdot (30 + y_1) + 6 \cdot 0.05 \cdot (2000 + y_2) \leq 4500$$

- Existe una cantidad máxima de animales que se puede albergar:

$$30 + y_1 \leq 42$$

$$2000 + y_2 \leq 5000$$

- El terreno tiene una capacidad limitada:

$$x_1 + x_2 + x_3 + 2(30 + y_1) \leq 640$$

- Hay requerimientos mínimos de algunos cultivos según la cantidad de animales:

$$x_2 \geq 30 + y_1$$

$$x_3 \geq 0.05(2000 + y_2)$$

- Todas las variables son no negativas:

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \geq 0$$

Por último, lo que se quiere maximizar es la ganancia total. Existe un costo de oportunidad por las horas de trabajo de los integrantes de la familia, un flujo neto de caja por cada cultivo y animal, y un valor remanente de los animales que queden. Así, la función objetivo es:

$$\max 20000 - 5(x_1 + 0.9x_2 + 0.6x_3 + 6 \cdot 10 \cdot (30 + y_1) + 6 \cdot 0.05 \cdot (2000 + y_2)) - 5.5(1.4x_1 + 1.2x_2 + 0.7x_3 + 6 \cdot 10 \cdot (30 + y_1) + 6 \cdot 0.05 \cdot (2000 + y_2))$$

$$+850(30 + y_1) + 4.25(2000 + y_2) + 70x_1 + 60x_2 + 40x_3 + 0.9(35000 + 1500y_1) + 0.75(5000 + 3y_2)$$

Problemas Propuestos

La estimaciones anteriores de rendimiento de las cosechas asumen que se darán buenas condiciones metereológicas. Condiciones adversas podrían dañar las plantaciones y reducir drásticamente los beneficios. Los escenarios más temidos por la familia son: sequía; inundaciones; caída de una helada; sequía y caída de una helada; inundaciones y caída de una helada. Los flujos netos en cada uno de estos escenarios se presentan en la Tabla 20.

1. Encuentre la solución óptima al problema para cada uno de los 5 escenarios mencionados (para ello haga los ajustes que estime necesarios en su modelo original).

2. Considere ahora las 6 soluciones encontradas (incluyendo la solución encontrada en la parte a); indique cómo calcularía, para cada una de esas soluciones el valor monetario de la familia si cada uno de los otros 5 escenarios hubiera ocurrido.

Escenario	Soya	Maiz	Trigo
Sequía	-10	-15	0
Inundaciones	15	20	10
Helada	50	40	30
Sequía y Helada	-15	-20	-10
Inundación y Helada	10	10	5

Table 20: Escenarios Adversos

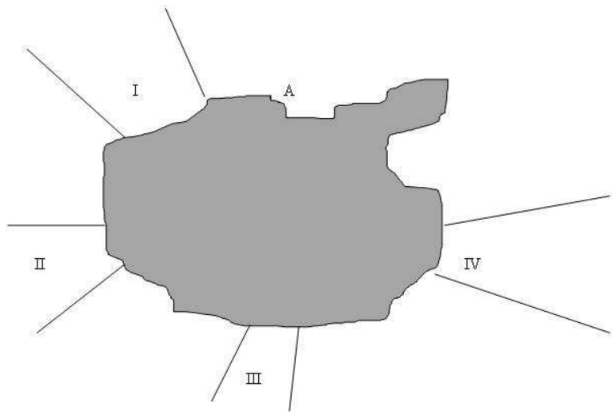


Figure 1: Itinerario Empresa Pesquera

1.24 Itinerario Empresa Pesquera

Usted trabaja en una empresa pesquera y se le ha pedido que optimice el recorrido de un barco específico en su itinerario de pesca alrededor de una isla. En la Figura 1 se observa la isla, el barco debe comenzar y terminar su itinerario en el punto A. En su recorrido deberá pasar por cuatro sectores (I, II, III y IV) que son puntos de interés pesquero debido a la alta densidad de peces.

El barco tiene una velocidad máxima de 15 Km/hr y una velocidad mínima de 10 Km/hr. Su rendimiento (en Km/lt) puede estimarse como $1/Velocidad$, cuando la velocidad se expresa en Km/hr. El barco tiene una capacidad de 5.000 toneladas de carga de pago (sólo los peces) y de 430 lts de combustible.

Para simplificar el problema suponga que los sectores pueden modelarse como puntos en los cuales se pesca y que las distancias entre sectores es $A-I$: $8Kms$, $I-II$: $10Kms$, $II-III$: $5Kms$, $III-IV$: $7Kms$, $IV-A$: $9Kms$. Suponga también que cuando el barco está en un sector, no consume combustible.

En cada uno de los sectores se encuentran cuatro tipos de peces en distintas proporciones, cada uno de esos peces tiene un peso promedio distinto. Ambas informaciones se presentan en la Tabla 21.

En cada sector la velocidad de pesca se estima en 60 peces por minuto. El viaje debe iniciarse a las 8:00 hrs. y debe concluir a las 18:00 hrs no importando la hora en que pase por cada sector. Por último, se conoce el costo de procesar cada uno de estos peces y el precio de venta del kilo de pez faenado. Esta información se encuentra en la Tabla 22.

	% de Pesca según sector				Peso promedio
Tipo de pez	I	II	III	IV	por pez
Atún	12	15	32	43	3 Kgs
Sardina	38	27	18	22	2 Kgs
Jurel	24	33	38	17	2.5 Kgs
Merluza	26	25	12	18	1.5 Kgs

Table 21: Pocentaje Promedio de Pesca y Peso por Pez

Head	Costo de proceso	Porcentaje de pescado útil	Precio de venta del pez
Atún	\$100/pez	80%	\$600/Kg
Sardina	\$125/pez	90%	\$400/Kg
Jurel	\$90/pez	75%	\$200/Kg
Merluza	\$85/pez	85%	\$250/Kg

Table 22: Costo, Precio y Porcentaje de cada Pez

El costo del combustible es \$150 el litro y existe un costo fijo de realizar la operación equivalente a cinco millones de pesos.

Usted debe escribir un modelo de optimización que maximize las utilidades de este viaje por medio de una adecuada programación de los tiempos que se queda el barco en cada sector.

SOLUCIÓN

El objetivo del problema es determinar la forma de realizar la pesca de modo de maximizar los beneficios del proceso. Esto significa determinar el tiempo de pesca en cada sector y el tiempo a usar para ir entre un sector y otro (notar que éste ultimo implica conocer la velocidad, ya que se conoce la distancia para cada trayecto), mientras que la cantidad de combustible a utilizar queda determinada por la ecuación de rendimiento. De esta manera emplearemos las siguietes variables de decisión:

t_k = Tiempo (en horas) que el barco permanece detenido en el sector k, $k = I, II, III, IV$
x_{ij} = Tiempo (en horas) de trayecto entre el sector i y el sector j,
$i = A, I, II, III, IV \quad j = I, II, III, IV, A$

Además, por comodidad, definiremos las siguientes variables dependientes:

v_{ij} = Velocidad entre el sector i y el sector j.
l_{ij} = Litros de combustible gastados entre el sector i y el sector j.

Además, emplearemos notación agregada para referirnos a algunos de los datos dados, de tal manera que:
d_{ij} = Distancia (en kilómetros) entre el sector i y el sector j.
p_{lk} = Porcentaje de pesca del pez l en el sector k, $l = \{1 : \text{Atún}, 2 : \text{Sardina}, 3 : \text{Jurel}, 4 : \text{Merluza}\}$
p_l = Peso promedio del pez $l \quad l = \{1, 2, 3, 4\}$
c_l = Costo de proceso (por pez) del pez l.
u_l = Porcentaje de pescado útil del pez l.
s_l = Precio de venta del pescado l.

Ahora bien, la velocidad será igual a la distancia recorrida dividida por el tiempo utilizado en recorrerla (ver (10)), mientras que los litros de combustibles gastados corresponden al número de kilómetros recorridos multiplicado por el rendimiento (inverso de la velocidad) como se aprecia en (11).

$$v_{ij} = \frac{d_{ij}}{x_{ij}} \tag{10}$$

$$l_{ij} = d_{ij}\frac{x_{ij}}{d_{ij}} = x_{ij} \tag{11}$$

El ingreso que reporta la extracción de cada tipo de pez, se obtiene empleando la relación dada en (12).

$$Ingreso\ Pez\ l = s_l \cdot p_l \cdot u_l \cdot \sum_k p_{lk} \cdot 3.600 \cdot t_k \tag{12}$$

El costo de extracción y procesamiento del pescado se obtiene empleando la relación dada en (13).

$$Costo\ de\ Procesar\ el\ pez\ l = c_l \cdot \sum_k p_{lk} \cdot 3.600 \cdot t_k \tag{13}$$

Además, existe un costo fijo por realizar el circuito y un costo de combustible consumido, el que se expresa en (14).

$$Otros\ Costos = 150(x_{A-I} + x_{I-II} + x_{II-III} + x_{III-IV} + x_{IV-A}) + 5.000.000 \tag{14}$$

Ahora bien, el objetivo del problema es maximizar la utilidad de la empresa, esto es la diferencia entre los ingresos percibidos y los costos incurridos, lo que de acuerdo a lo expresado anteriormente es equivalente a:

$$\sum_l \sum_k p_{lk} \cdot 3.600 \cdot t_k(s_l \cdot p_l \cdot u_l - c_l) - 150(x_{A-I} + x_{I-II} + x_{II-III} + x_{III-IV} + x_{IV-A}) - 5.000.000 \tag{15}$$

Por otro lado, el modelo debe considerar las restricciones de velocidad máxima y mínima, capacidad del barco (en cuánto a carga de pago y combustible) y el tiempo máximo de viaje, además de la no negatividad de las variables (nótese que no es necesario agregar restricciones de signo para x_{ij}, ya que éstas se encuentran acotadas). Considerando esto, y las relaciones dadas en (10), (11) y (15), se obtiene el siguiente modelo de optimización:

$$Máx \quad \sum_l \sum_k p_{lk} \cdot 3.600 \cdot t_k(s_l \cdot p_l \cdot u_l - c_l) - 150(x_{A-I} + x_{I-II} + x_{II-III} + x_{III-IV} + x_{IV-A}) - 5.000.000$$

$$\begin{array}{rcll}
\frac{d_{ij}}{15} & \leq & x_{ij} \leq \frac{d_{ij}}{10} & \forall i,j \\
\sum_l p_l \sum_k p_{lk} \cdot 3.600 \cdot t_k & \leq & 5.000.000 & \\
x_{A-I} + x_{I-II} + x_{II-III} + x_{III-IV} + x_{IV-A} & \leq & 430 & \\
\sum_{k=I}^{IV} t_k + x_{A-I} + x_{I-II} + x_{II-III} + x_{III-IV} + x_{IV-A} & \leq & 12 & \\
t_k & \geq & 0 & \forall k
\end{array}$$

Problemas Propuestos

1. ¿Qué cambiaría en el modelo si los sectores de pesca no fueran ya puntos y uno siguiera viajando por ellos, gastando combustible y recorriendo así los sectores de pesca?

2. ¿Que pasaría si el costo fijo de 5.000.000 fuera ahora dependiente del tiempo de viaje? ¿Y si ahora lo que queremos optimizar es el tiempo de viaje, pero queremos percibir un beneficio neto de 5.000.000?

3. ¿Que ocurriría si se sabe que la demanda por atún es 1.000 pescados, por sardina 1.250, por jurel 640 y por merluza de 980?

4. ¿Cómo debemos arreglar el modelo si ahora se nos pide hacer una programación anual para la pesca, donde se nos entregan temporadas de pesca, temporadas de veda, etc? Considere además que mensualmente variarán los porcentajes extraídos en cada zona, por pez. Además, considere que en invierno existen en promedio dos días a la semana en que no se podrá pescar debido al clima, pero de todas maneras se deberá cancelar el sueldo de la tripulación, que corresponde al 20% del costo total de cada viaje.

5. ¿Que pasaría si para hacer la extracción se nos ofrecen dos tipos de barcos, con diferentes precios, pero con diferentes porcentajes de extracción por sector y cantidad de pesca por minuto?

1.25 Proceso Productivo

Una empresa produce tres productos: A, B, y C. Para esto dispone de tres máquinas: 1, 2 y 3, además de 3 tipos de personal: a, b y c y 2 insumos base e y f. El proceso de producción de cada uno de estos tres productos es el siguiente:

Para producir una unidad de A, un funcionario tipo a toma 100 gramos de e y los procesa por 20 minutos. Luego, lo deja en la máquina 1 por 40 minutos. A continuación lo toma nuevamente el funcionario tipo a y lo entrega en la sala donde trabajan los hombres tipo b, esto le toma 5 minutos. Allí, se procesa el producto en la máquina 2 y se le agregan 20 cm^3 de insumo f, demorando el paso por el taller 45 minutos (de uso intensivo de hombre y máquina), trabajando en una unidad 2 funcionarios simultáneamente todo el tiempo. Así, se obtiene una unidad de tipo A que se vende en el mercado a \$150 cada una.

Para producir una unidad de B, un funcionario tipo a toma 100 gramos de e, 50 cm^3 de insumo f y dos unidades de A. Los mezcla bien durante 25 minutos y lo pasa a la sala donde trabajan los individuos tipo c. Allí, estos hombres mediante 50 minutos de la máquina 3 dejan listo una unidad de tipo B que se vende en el mercado a \$400 cada una.

Para producir una unidad de C, un funcionario tipo a junto a uno de tipo c toman tres unidades de A y una unidad de B, agregan 25 cm^3 de insumo f y lo trabajan por 40 minutos en una máquina 2. De este modo se obtiene una unidad de tipo C que se vende en el mercado a \$2.500 cada una.

En este momento en la empresa trabajan 10 operarios de cada tipo, trabajando cada uno de ellos 40 horas semanales (una semana se considera de cinco días hábiles y un mes de 20 días hábiles). Supondremos que en el corto plazo estos funcionarios no son modificables. Actualmente existe disposición ilimitada de insumo e, pero sólo 25.000 cm^3 diarios de insumo f.

El sueldo de los operarios es M\$250, M\$400 y M\$450 al mes para los tipos a, b y c respectivamente. El costo del insumo e es \$30 cada 100 gramos y del insumo f es \$50 el litro. Suponga que por efectos de arriendo de las máquinas la empresa debe pagar \$1.000, \$1.200 y \$1.500 diarios respectivamente. En el corto plazo, la estructura de las máquinas no puede modificarse, es decir no se puede devolver una máquina ni arrendar más de una adicional.

Además la empresa tiene otros costos en administración, ventas, marketing, arriendo y otros equivalente a \$12.000 diarios.

Cree un modelo de optimización que maximice las utilidades de esta empresa en el corto plazo considerando las características aquí expuestas.

SOLUCION

Dada la forma en que se presenta el problema, el primer paso será identificar y organizar los datos entregados. Note que la siguiente información es conocida:

- Cantidades específicas para la producción de cada producto en cuanto a insumos (e y f), máquinas $(1, 2$ y 3) y personal $(a, b$ y $c)$.
- Sueldos de cada funcionario $(a, b$ y $c)$ y costos de mantención de maquinaria (costos fijos).
- Precio de los insumos e y f, y precio de venta de los productos A, B y C.
- Detalles relacionados con la forma de trabajo de los obreros a, b y c.
- Gasto fijo por otros conceptos,de 12.000 diarios.

Esta información se presenta organizada y resumida en las Tablas 23 y 24.

Notemos que lo único que varía son aquellos parámetros que dependen de la producción. Es decir, nuestra variable de decisión debe ser la cantidad a producir de cada uno de los productos, el problema es que el sistema se retroalimenta, esto es para producir B utiliza A y para producir C utiliza A y B. Una primera formulación del problema considera la cantidad que la empresa produce de cada elemento, incluidos aquellos que se utilizan para la producción de otro. Se podría hacer un modelo alternativo utilizando como variable la

	A	**B**	**C**
a (minutos)	25	25	40
b (minutos)	2*45		
c (minutos)		50	40
e (gramos)	100	100	
f (cm^3)	20	50	25
1 (minutos)	40		
2 (minutos)	45		40
3 (minutos)		50	
A (unidades)		2	3
B (unidades)			1
C (unidades)			
Precio ($)	150	400	2500

Table 23: Datos del Problema Proceso Productivo

	Costo ($)	**Tiempo Disponible (minutos)**	**Cantidad Mensual**
a	$\frac{250000}{mes \cdot funcionario}$	$\frac{40 \cdot 4 \cdot 60}{mes \cdot funcionario}$	10
b	$\frac{400000}{mes \cdot funcionario}$	$\frac{40 \cdot 4 \cdot 60}{mes \cdot funcionario}$	10
c	$\frac{450000}{mes \cdot funcionario}$	$\frac{40 \cdot 4 \cdot 60}{mes \cdot funcionario}$	10
e	$\frac{0.3}{gr}$		∞
f	$\frac{0.05}{cm^3}$		$250000 \cdot 20\ cm^3$
1	$\frac{20 \cdot 1000}{mes}$	$\frac{40 \cdot 4 \cdot 60}{mes \cdot máquina}$	1
2	$\frac{20 \cdot 1200}{mes}$	$\frac{40 \cdot 4 \cdot 60}{mes \cdot máquina}$	1
3	$\frac{20 \cdot 1500}{mes}$	$\frac{40 \cdot 4 \cdot 60}{mes \cdot máquina}$	1
Otros	$\frac{20 \cdot 12000}{mes}$		

Table 24: Datos del Problema Proceso Productivo

cantidad de producto que sale desde la fábrica, esto requiere sólo un cambio de variable al primer modelo, el cual especificaremos posteriormente.

Luego, las variables de decisión a emplear son:
$A =$ Cantidad producida del elemento "A"
$B =$ Cantidad producida del elemento "B"
$C =$ Cantidad producida del elemento "C"

Como notación consideraremos:

$e =$ Gramos consumidos del insumo "e"
$f = cm^3$ consumidos del insumo "f"

El objetivo del modelo es maximizar las utilidades por concepto de venta de los productos, ahora bien, de acuerdo a las variables de decisión escogidas la cantidad que se vende del producto A corresponde en realidad a $A - 2B - 3C$, de la misma manera lo que se vende de B es $B - C$, mientras que el producto C es destinado completamente para la venta. Por otro lado la función objetivo debe considerar los costos variables por insumo (e y f), y los costos fijos por máquinas, operarios y otros.

Las restricciones del modelo deben considerar las restricciones de tiempo para los operarios y máquinas (ver Tabla 24), las restricciones de stock para los insumos, la equivalencia de e y f en términos de A, B y C y el hecho de que las cantidades que se venden y que se producen de cada producto deben ser no negativas.

De acuerdo a las consideraciones anteriores, el modelo de optimización resulta ser:

$$P) \quad Max \quad 150(A - 2B - 3c) + 400(B - C) + 2.500C - 0.3e - 0.05f -$$
$$[20(1.000 + 1.200 + 1.500)] + [10(250.000 + 400.000 + 450.000)] + (20 \cdot 12.000)$$

$$\begin{aligned}
25A + 25B + 40C &\leq 9.600 \\
2 \cdot 45A &\leq 9.600 \\
50B + 40C &\leq 9.600 \\
40A &\leq 9.600 \\
45A + 40C &\leq 9.600 \\
50B &\leq 9.600 \\
100A + 100B &= e \\
20A + 50B + 25C &= f \\
25.000 \cdot 20 &\geq f \\
A - 2B - 3C &\geq 0 \\
B - C &\geq 0 \\
A, B, C &\geq 0
\end{aligned}$$

Eliminando la notación de e y f y simplificando expresiones, el modelo anterior es equivalente a:

$$P) \quad Max \quad 119A + 67.5B + 1648.75C - 10.814.000$$

$$\begin{aligned}
25A + 25B + 40C &\leq 9.600\\
90A &\leq 9.600\\
50B + 40C &\leq 9.600\\
40A &\leq 9.600\\
45A + 40C &\leq 9.600\\
50B &\leq 9.600\\
20A + 50B + 25C &\leq 500.000\\
A - 2B - 3C &\geq 0\\
B - C &\geq 0\\
A, B, C &\geq 0
\end{aligned}$$

Además, como se mencionó anteriormente existe la posibilidad de modificar el modelo planteado, utilizando como variables de decisión las cantidades que se venden (o salen al mercado) de cada producto, esto es A', B' y C'. Para eso basta emplear el cambio de variables dado en (16) en el modelo anterior.

$$\begin{aligned}
A^{'} &= A - 2B - 3C\\
B^{'} &= B - C\\
C^{'} &= C
\end{aligned} \tag{16}$$

Problemas Propuestos

1. ¿Como modificaría el modelo para el caso en que se pudiera contratar o despedir a operarios? Considere además que la oferta máxima de operarios en el mercado es de 25 de tipo A, 15 de tipo B y 20 de tipo C.

2. Considere ahora, además de lo anterior, que tiene la posibilidad de comprar más maquinaria, a un precio de \$12.000 la máquina 1, \$8.000 la máquina 2, y \$10.000 la máquina 3. Le ofrecen sólo dos máquinas 1, tres máquinas 2 y una máquina 1. Considere el caso en que las máquinas pueden comprarse por unidad, el caso en que se deben comprar todas las máquinas de un tipo, y un tercer caso en que el paquete de venta esta conformado por las seis máquinas.

3. Suponga que le ofrecen una tecnología con la cual puede producir insumo f, a partir del insumo e, mediante un proceso que consume 50 gramos de e, y produce 1 litro de f, en un plazo de diez minutos mediante el uso de agua, con un costo que se considera despreciable. Para esto debe adquirir la maquinaria necesaria, cuyo costo asciende a \$15.000. Considere que debe pagarle a un operario extra de tipo d, el que recibe un sueldo de \$1.500 por hora trabajada.

1.26 Mantención de Equipos

Una empresa debe programar el calendario de la mantención preventiva de cinco de sus equipos esenciales; este calendario debe extenderse por un periodo de 8 semanas. La cantidad de semanas-hombre que requiere cada equipo se resume en el parámetro h_i. Además, la semana más temprana en que puede empezar la mantención de cada equipo se indica en el parámetro e_{it}, en donde vale 1 si el equipo i recién puede comenzar a repararse en la semana t.

Suponga que la máxima cantidad de mano de obra disponible en la semana t es L_t; formule un modelo solo con variables continuas que permita encontrar un calendario factible (esto es, determinar la semana en que debe comenzar la mantención de cada equipo)

SOLUCIÓN

La variable de decisión que necesitamos es:

Alternativa	**Cortes**	**Pérdida (cm)**
1	3 rollos de 30 cm	10
2	1 rollo de 30 cm y 1 rollo de 45 cm	25
3	2 rollos de 45 cm	10
4	1 rollo de 45 cm y 1 rollo de 50 cm	5
5	2 rollos de 50 cm	0
6	1 rollo de 30 cm y 1 rollo de 50 cm	20

Table 25: Fábrica de Papel

x_{it}: cantidad de semanas-hombre destinadas al equipo i en la semana t.

Como solo queremos encontrar una asignación factible, no interesa el valor de la función objetivo, por lo que puede ser una constante. El problema de optimización queda:

$$\min 1$$

s.a.

$$\begin{aligned}
\sum_i x_{it} &\leq L_t \qquad \forall t \\
\sum_t x_{it} &\geq h_i \qquad \forall i \\
x_{it} &\leq M \cdot \sum_{k=1}^{t} e_{ik} \qquad \forall i, t \\
x_{it} &\geq 0 \qquad \forall i, t
\end{aligned}$$

La tercera restricción asegura de que no se empiece a reparar antes de lo debido. La expresión de la derecha está multiplicada por M para relajar la restricción en caso de que ya se pueda empezar a reparar el equipo.

Problemas Propuestos:

1. Suponga que la empresa desea minimizar la suma de las fluctuaciones semanales de utilización de mano de obra (en valor absoluto); formule un modelo para estos efectos

2. Suponga que la empresa desea minimizar la máxima cantidad de mano de obra utilizada en alguna de los 8 semanas; formule un modelo para estos efectos.

1.27 Fábrica de Papel

Una industria que fabrica papel y lo distribuye en rollos debe determinar la mejor forma de realizar el proceso de corte. Los rollos de papel que se producen tienen un ancho de 100 cm, sin embargo, los clientes demandan rollos de 30, 45 y 50 cm de ancho. Por lo tanto, al cortar los rollos de 100 cm se incurre en una pérdida de material que depende de la forma en que se corten los rolllos originales. Se desea determinar la forma de efectuar el corte de manera que se satisfaga la demanda y se minimice la pérdida total del material. Se tiene un pedido de 800 rollos de 30 cm, 500 de 45 cm y 1.000 de 50 cm.

SOLUCIÓN

Antes de plantear el modelo es necesario conocer las alternativas de corte para el rollo de 100 cm, ls que de acuerdo a las dimensiones dadas se resumen en la Tabla 25.

Ahora bien, la idea es determinar la forma de efectuar los cortes, esto es el número de rollos a cortar con cada alternativa, luego la variable de decisión a emplear será:

x_i = número de rollos de 100 cm a cortar con la alternativa i, $i = 1, ..., 6$

El objetivo del problema es minimizar la pérdida total de material, considerando las restricciones de satisfacer la demanda por cada tipo de rollo y de no negatividad para las variables; esto se expresa a través del siguiente modelo:

$$P) \quad Min \quad 10x_1 + 25x_2 + 10x_3 + 5x_4 + 20x_6$$

$$\begin{array}{rcll} 3x_1 + x_2 + x_6 & = & 800 & \\ x_2 + 2x_3 + x_4 & = & 500 & \\ x_4 + 2x_5 + x_6 & = & 1.000 & \\ x_i & \geq & 0 & \forall i \end{array}$$

1.28 Bienestar en el Caribe

Considere que el gobierno de un país del Caribe implementará algunas medidas que buscan aumentar el bienestar global del país. Para ello, ha deflnido las siguientes medidas posibles: 1) modiflcar el presupuesto de una ciudad (subirlo o bajarlo); 2) hacer desfles alegóricos desde una ciudad a otra; 3) transportar basura desde una ciudad a otra mediante camiones.
Asuma que si aumentamos (disminuimos) en una unidad de presupuesto a la ciudad i produce un aumento (disminución) de b_i unidades de bienestar global, la realización de un desfile desde la ciudad i a la ciudad j produce $h_{ij} \geq 0$ unidades de bienestar global y, finalmente, un camión que transporta basura desde la ciudad i a la ciudad j genera una pérdida de bienestar global de $k_{ij} \geq 0$ unidades.
El gobierno debe cumplir una sola condición que debe cumplir cada par de ciudades (i, j) que produzca alteraciones en el bienestar global del país. Esta es la condición: la diferencia entre la modificación presupuestaria de la ciudad i y la ciudad j, más el número total de desfiles y menos el total de camiones transportando basura que salen de la ciudad i a la ciudad j, debe ser igual a un parámetro preestablecido igual a $r_{ij} \geq 0$.
Asuma que el gobierno puede modiflcar tanto como quiera (aumentando o disminuyendo) el presupuesto de cada ciudad y, que puede realizar todos los deflles alegóricos que desee y, que puede contar con todos los camiones que necesite para transportar la basura. Asuma también que en el conjunto A se encuentran todos los pares (i, j) tales que existe una ruta desde i hasta j.

Formule un modelo de programación lineal con variables continuas que permita al gobierno deflnir qué medidas tomar con tal de maximizar el bienestar global del pa'is. Asuma que los valores de estas variables pueden ser fraccionarios.

SOLUCIÓN[15]

Sean las siguientes variables:

x_i: cambio en el presupuesto en la ciudad i.

y_{ij}: cantidad de desflles que van desde la ciudad i a la ciudad j.

z_{ij}: cantidad de camiones con basura que van desde la ciudad i a la ciudad j.

El modelo queda:

$$\max \sum_i b_i x_i + \sum_{(i,j)\in A} h_{ij} y_{ij} - \sum_{(i,j)\in A} k_{ij} z_{ij}$$

s.a.

$$\begin{array}{rcll} x_i - x_j + y_{ij} - z_{ij} & = & r_{ij} & \forall (i,j) \in A \\ y_{ij}, z_{ij} & \geq & 0 & \forall (i,j) \in A \end{array}$$

[15]Interrogación 3, 2010'2

1.29 Empresa Química de Aditivos Líquidos

Una empresa química produce N tipos de aditivos líquidos, los cuales se fabrican mezclando j componentes líquidos básicos. Por cada litro de aditivo i fabricado se emplean c_{ij} litros de componente j. La empresa posee K plantas productoras que funcionan con tecnologías distintas, esto significa que los costos de producción (sin incluir los costos de los componentes) son distintos en cada planta, donde CF_{ik} es el costo de fabricar un litro de producto i en la planta k y TF_{ik} es el tiempo en horas que se mantiene ocupada la planta k fabricando un litro de producto i (una planta no puede fabricar dos productos distintos simultáneamente). El costo de los componentes básicos varía según la planta, siendo CB_{jk} el costo de un litro de componente j en la planta k.

El proceso productivo genera L tipos de contaminantes. Por cada litro de aditivo i fabricado en la planta k se producen CO_{ikl} litros de contaminante l ($l = 1...L$). La empresa está sujeta a regulaciones ambientales mediante las cuales en un lapso de 24 horas no puede verter más de CM_l litros de contaminante l al ambiente.

Adicionalmente, se tiene que por cada litro de aditivo 1 fabricado, la empresa debe producir 2 litros de aditivo 3. Además, por cada litro de aditivo 2 fabricado la empresa debe producir 2 litros de aditivo 5. Plantee un Problema de Programación Lineal que permita satisfacer una demanda de D_i litros de aditivo i en un lapso de 24 horas a mínimo costo considerando que no existe ningún stock inicial de aditivos.

SOLUCIÓN

La idea del problema es obtener una política de producción diaria que permita satisfacer la demanda.Para ello se debe determinar la cantidad de litros de cada aditivo que se debe fabricar en cada una de las plantas, luego la variable de decisión del modelo será:

x_{ik} = Litros de aditivo i a fabricar en la planta k en un lapso de 24 horas,

El objetivo del problema es minizar los costos involucrados en la fabricación de los distintos tipos de aditivos, los que incluyen los costos de fabricación propiamente tal así como los costos de las materias primas necesarias. El modelo debe considerar además, las restricciones de satisfacer la demanda, de la regulación ambiental por la generación de contaminantes, del tiempo máximo de producción y de la relación entre la cantidad de aditivos producidos. Esto permite plantear el siguiente modelo:

$$Min \quad \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} CF_{ik}x_{ik} + \sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} CB_{jk}c_{ij}x_{ik}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{K} x_{ik} &= D_i && \forall i \\
\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{K} CO_{ikl}x_{ik} &\leq CM_l && \forall l \\
\sum_{i=1}^{N} TF_{ik}x_{ik} &\leq 24 && \forall k \\
2\sum_{k=1}^{K} x_{1k} &\leq \sum_{k=1}^{K} X_{3k} \\
2\sum_{k=1}^{K} x_{2k} &\leq \sum_{k=1}^{K} X_{5k} \\
x_{ik} &\geq 0 && \forall i, k
\end{aligned}$$

1.30 Productora de celulosa

Una empresa productora de celulosa produce I diferentes productos. Esta empresa cuenta con un proceso productivo que tiene un costo de c_i^t pesos por cada unidad del producto i que se produce hasta las primeras

U_i unidades(primer nivel de costo), y de g_i^t por cada unidad del producto i que se produzca por sobre este límite (segundo nivel de costo). Se sabe que para un mismo producto y período $c_i^t \geq g_i^t$.

Se sabe que la empresa debe satisfacer diariamente la demanda, que es conocida e igual a d_i^t por cada uno de los i productos y para los próximos T períodos. Para ello, la empresa cuenta con Q_i unidades del producto i al inicio de este horizonte ($t = 0$).

Construya un modelo de programación lineal mixto que permita determinar la cantidad de producto i que se debe producir en cada período al primer y al segundo nivel de costos, de manera que la empresa minimice sus costos totales.

SOLUCIÓN[16]

Variables: Se debe poder decidir cuánto producir de cada producto en cada periodo, además de cuánto se almacena. Sin embargo, no basta una sola variable para modelar la producción, sino que el costo cambia según la cantidad. Por lo tanto, dos variables representarán la producción, uno para cada nivel de costos. Y será necesario agregar una variable binaria para modelar la relación entre estas variables. Así, queda:

x_i^t: cantidad a producir del producto i en el período t en primer nivel de costos.

y_i^t: cantidad a producir del producto i en el período t en segundo nivel de costos.

I_i^t: cantidad de producto i almacenado desde el período t al $t+1$.

α_i^t: variable binaria que toma valor 1 si se puede producir en segundo nivel de costos el producto i en el período t.

Función objetivo : representa la suma de los costos totales de la producción, donde en el primer término se obtiene el costo total de producción al primer nivel de costos y el segundo término entrega el costo total de la producción al segundo nivel de costos.

$$\min \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{I} c_i^t x_i^t + \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{I} g_i^t y_i^t$$

Restricciones

1. Restricción de conservación de flujo y satisfacción de la demanda, considerando que para ello se tiene la posibilidad de producir, de utilizar producto guardado desde el día anterior y de dejar las unidades sobrantes como producto guardado para el día siguiente.

$$x_i^t + y_i^t + I_i^{t-1} - I_i^t = d_i^t\,, \quad \text{para } i = 1, \ldots, I\,,\ \ t = 1, \ldots, T\,.$$

2. Restricción que incluye en la variable de inventario la cantidad que se tiene para cada producto al inicio del horizonte de planificación.

$$I_i^0 = Q_i\,, \quad \text{para } i = 1, \ldots, I.$$

3. Restricción que asegura que no se producirá al segundo nivel de costos (que es más barato) mientras no se llegue al límite de unidades producidas para el nivel de costos anterior.

$$y_i^t \leq M\alpha_i^t\,, \quad \text{para } i = 1, \ldots, I\,,\ \ t = 1, \ldots, T\,.$$

4. Restricción que permite que la variable binaria que permite producir al nivel 2 de costos se active solamente si ya se ha producido el límite U_i de unidades del producto i.

$$\alpha_i^t \leq 1 - \left(\frac{U_i - x_i^t}{U_i}\right)\,, \quad \text{para } i = 1, \ldots, I\,,\ \ t = 1, \ldots, T\,.$$

[16] Interrogación 1, 2011'1

5. Restricción que asegura que no se producirá más de U_i unidades del producto i en el primer nivel de costos.

$$x_i^t \leq U_i\,, \qquad \text{para } i = 1, \ldots, I\,,\ \ t = 1, \ldots, T\,.$$

6. Restricción de naturaleza de variables.

   $x_i^t \geq 0$, para $i = 1, \ldots, I$ y para todo $t = 1, \ldots, T$.
   $y_i^t \geq 0$, para $i = 1, \ldots, I$ y para todo $t = 1, \ldots, T$.
   $I_i^t \geq 0$, para $i = 1, \ldots, I$ y para todo $t = 1, \ldots, T$.
   $\alpha_i^t \in \{0, 1\}$, para $i = 1, \ldots, I$ y para todo $t = 1, \ldots, T$.

1.31 Antiviral para una epidemia

La agencia de respuesta a epidemias de un cierto país necesita planificar la distribución de una medicina antiviral para hacer frente a una epidemia de influenza. Usted está en la primera semana, de un total de T semanas, para las cuales se debe implementar un plan de abastecimiento de dicho antiviral. La zona afectada está atendida por m consultorios los cuales son abastecidos desde n bodegas especiales. Antes de la epidemia, la bodega i dispone de un stock igual a C_i unidades del antiviral. Se ha estimado que en el consultorio j habrá una demanda igual a d_j^t unidades de antiviral en la semana t. Si bien la misión de la agencia es cubrir las necesidades de combate de la enfermedad, también debe ser eficiente en costos. Suponga que c_{ij}^t es el costo unitario de transporte desde la bodega i hasta el consultorio j en la semana t. Asuma que el transporte se realiza en unas pocas horas y para efectos del modelo puede ser considerado instant'aneo. Sin embargo, existe una capacidad limitada de transporte semana a semana. Más específicamente, en la semana t, se pueden transportar a lo más L^t unidades de antiviral en total, considerando todos los pares bodega-consultorio. Los consultorios pueden acumular unidades de antiviral en inventario, de una semana para otra, pero en ese caso deben incurrir en un costo por almacenamiento en condiciones de temperatura y humedad controlada (no hay stock inicial de antiviral en los consultorios). Ese costo semanal es de g_j por unidad, para el consultorio j (este costo no lo incurren las bodegas ya que tiene todos sus productos en condiciones controladas y el antiviral no genera costos extras). Asuma que la capacidad total de transporte sobre las T semanas es suficiente para satisfacer la demanda total durante estas T semanas, y que la disponibilidad inicial del antiviral es también suficiente para enfrentar toda la epidemia.

Construya un modelo de Programación Lineal que permita definir la planificación de envíos de antiviral desde las bodegas, semana a semana, de modo que se satisfaga la demanda y las otras restricciones, y el costo total incurrido por el sistema sea lo menor posible.

SOLUCIÓN[17]

Se definen las variables, la función objetivo y las restricciones.

Variables: Definamos las siguientes variables:

x_{ij}^t**:** cantidad transportada de la bodega i al consultorio j en la semana t.

Y_i^t**:** stock disponible de antiviral en la bodega i al final de la semana t.

I_j^t**:** inventario de antiviral en el consultorio j al final de la semana t.

Función objetivo : Se debe minimizar el costo total del plan de abastecimiento del antiviral.

$$\min \sum_{t=1}^{T} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}^t x_{ij}^t + \sum_{j=1}^{n} g_j I_j^t \right\}$$

[17]Interrogación 1, 2012'1

Restricciones:

R1) Inventario en bodega.

$$Y_i^t = Y_i^{t-1} - \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^t \qquad \forall\ i = 1,\dots,m; t = 1,\dots,T$$

R2) Inventario en consultorio.

$$I_j^t = I_j^{t-1} + \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^t - d_{jt} \qquad \forall\ j = 1,\dots,n; t = 1,\dots,T$$

R3) Cantidad máxima de antivirales a transportar semanalmente.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^t \leq L^t \qquad \forall\ t = 1,\dots,T$$

R4) Inventario inicial en bodega y consultorio.

$$Y_i^0 = C_i; \quad I_j^0 = 0, \qquad \forall\ i = 1,\dots,m; j = 1,\dots,n$$

R5) Restricción de naturaleza de variables.

$$\begin{aligned}
&x_{ij}^t \geq 0, \quad \forall\ i = 1,\dots,m; j = 1,\dots,n; t = 1,\dots,T\\
&Y_i^t \geq 0, \quad \forall\ i = 1,\dots,m; t = 1,\dots,T\\
&I_j^t \geq 0, \quad \forall\ j = 1,\dots,n; t = 1,\dots,T
\end{aligned}$$

Ejercicio Propuesto

Suponga ahora que se le informa que el operador logístico que usa la agencia impone como restricción que si en una semana cualquiera se debe enviar alguna cantidad de antiviral desde alguna bodega a algún consultorio, entonces la cantidad enviada debe ser igual al menos a una cantidad Q definida a priori (lote mínimo). Escriba las extensiones que debe hacer a su modelo de la parte a) para representar esta situaci'on.

1.32 Carga en naviera

Una empresa naviera se dedica al transporte de carga, y para ello cuenta con una flota de S barcos, todos iguales. Cada uno de los barcos posee 3 tipos de compartimientos: A, B y C. Las capacidades de carga de cada compartimiento son de b_i toneladas ($i = A, B, C$).

Por razones técnicas, los compartimientos de cada barco (independientemente por barco) deben ser utilizados en el mismo porcentaje de su capacidad, en términos del peso contenido en cada uno de ellos. A la empresa naviera se le ofrece transportar N cargamentos, donde el peso total del cargamento j es de p_j toneladas, $j = 1,\dots,N$, y genera una utilidad de q_j US$/tonelada, $j = 1,\dots,N$. El transporte de un cargamento puede ser fraccionado en diferentes barcos, y no es necesario transportar la totalidad de la carga de cada uno de ellos.

Basándose en la información anterior, construya un modelo de optimización que ayude a la naviera a decidir cómo transportar los cargamentos.

SOLUCIÓN[18]

[18]Interrogación 1, 2013'2

- Variables:
  - x_{ij}^s: toneladas del cargamento i, con $i = 1, \dots, N$, que son transportadas en el compartimiento j, con $j \in \{A, B, C\}$, del barco s, con $s = 1, \dots, S$.
- Función objetivo:

$$\max \sum_{s=1}^{S} \sum_{j \in \{A,B,C\}} \sum_{i=1}^{N} q_j x_{ij}^s$$

- Restricciones
  - Respetar capacidad de carga de cada compartimiento-barco.

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij}^s \leq b_i, \ \forall s = 1, \dots, S; j \in \{A, B, C\}.$$

  - No se debe transportar más carga de la que posee cada cargamento.

$$\sum_{s=1}^{S} \sum_{j \in \{A,B,C\}} x_{ij}^s \leq p_j, \ \forall i = 1, \dots, N.$$

  - Restricción técnica sobre carga de compartimientos.

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} x_{ij}^s}{\sum\limits_{i=1}^{N} x_{ik}^s} = \frac{b_j}{b_k}, \ \forall s = 1, \dots, S; j \in \{A, B, C\}; k \in \{A, B, C\} : j \neq k.$$

  que linealmente queda:

$$b_k \sum_{i=1}^{N} x_{ij}^s = b_j \sum_{i=1}^{N} x_{ik}^s, \ \forall s = 1, \dots, S; j \in \{A, B, C\}; k \in \{A, B, C\} : j \neq k.$$

  - Naturaleza de las variables.

$$x_{ij}^s \geq 0, \ \forall s = 1, \dots, S; i =, \dots, N; j \in \{A, B, C\}.$$

1.33 Tratamiento de aguas servidas

A una planta de tratamiento de aguas servidas llegan requerimientos por tratamiento, de un conjunto E de empresas diferentes sobre un horizonte de T períodos de tiempo. Sea Q_{it} [litros] el requerimiento de la empresa $i \in E$, en el período t, $t = 1, ..., T$.
Para tratar aguas, la planta puede combinar varios procesos, y definiremos el conjunto P de los procesos. Estas combinaciones las llamaremos "protocolos", y se ha definido un conjunto R de protocolos. Un protocolo está conformado por un conjunto de procesos que deben ser realizados en secuencia. De este modo, el protocolo r realiza un conjunto $K_r \subset P$ de procesos. Se sabe que cualquiera de los procesos demora exactamente un período de tiempo en ser realizado, y que se puede procesar simultáneamente hasta un máximo de W_p litros de aguas en el proceso $p \in P$. También se conoce el orden en el que son realizados los procesos para un protocolo específico, y eso está indicado por un parámetro α_{pj}^r que toma valor 1 si el proceso j se realiza en el período inmediatamente anterior al del proceso p, en el protocolo r. Es importante destacar que un requerimiento cualquiera puede ser dividido en diferentes protocolos. Un requerimiento por procesamiento de una empresa, que ha sido colocado en el período t, debe ser satisfecho a más tardar en el período $t + 2$. De no ser posible, la planta de tratamiento debe contratar un servicio externo de tratamiento de aguas servidas para poder procesar la cantidad que no alcanza a cubrir.

Construya un modelo de programación lineal que permita determinar cómo atender la totalidad de requerimientos que recibirá esta planta en los T períodos de tiempo, considerando que el objetivo de la empresa es minimizar la cantidad total de agua que debe ser enviada al servicio externo de tratamiento.

SOLUCIÓN[19]

Tenemos las siguientes variables de decisión:

y_{it}^{rl}: cantidad del requerimiento de la empresa i arribado en el período t que comenzará el protocolo r durante el período l
f_{it}^{rpl}: cantidad del requerimiento de la empresa i arribado en el período t que utilizando el protocolo r realiza el proceso p durante el período l.

La función objetivo consiste en minimizar la cantidad total de agua que debe ser enviada al servicio externo de tratamiento:

$$\min \sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in E} (Q_{it} - \sum_{l=t}^{t+2} \sum_{r \in R} y_{it}^{rl})$$

Sujeto a las siguintes restricciones:

$$\begin{aligned}
\sum_{l=t}^{t+2} \sum_{r \in R} y_{it}^{rl} &\leq Q_{it} && \forall i \in E, t \leq T-2 \\
y_{it}^{rl} &= f_{it}^{rpl} && \forall i \in E, l = 1, .., T, r \in R, p \in K_r : \sum_{j \in K_r} \alpha_{pj}^{r} = 0 \\
f_{it}^{rjl} &= f_{it}^{rpl+1} && \forall i \in E, t = 1, .., T, l = 1, .., T-1, r \in R, p \in K_r : \alpha_{pj}^{r} = 1 \\
\sum_{t=1}^{T} \sum_{i \in E} \sum_{l=t}^{T} \sum_{r \in R} f_{it}^{rpl} &\leq W_p && \forall p \in P
\end{aligned}$$

La primera restricción asegura que no se debe asignar más del requerimiento total de cada empresa en cada período. La segunda restricción relaciona variables. La tercera asegura la conservación de flujo entre procesos en las asignaciones de cada protocolo. La cuarta restricción asegura que se respete la capacidad máxima de litros que puede procesar un proceso en un mismo periodo. Además, todas las variables son no negativas.

[19] Interrogación 3, 2015'1

2 Modelos de Programación No-lineal

Continuando dentro del modelamiento continuo, hay una gran cantidad de situaciones en que la no linealidad se hace presente. En el área de modelamiento económico por ejemplo, se ha encontrado que un cierto grado de no linealidad es la regla, y no la excepción. Algunos ejemplos de estos problemas son: *i*) Problema de mezcla de productos con elasticidad en los precios; *ii*) Problema de transporte con descuentos por volumen en los precios de embarque; *iii*) Selección de una cartera de inversiones riesgosas.

A diferencia de los problemas lineales, para los no lineales no existe un algoritmo que sirva para resolver todos los problemas específicos, y es por esto que se han desarrollado diversos métodos muy eficientes pero solo para ciertas estructuras particulares. Por esta razón es que es importante conocer aquellas estructuras para tenerlas en mente al momento de modelar, y así asegurar o facilitar la posterior resolución del problema.

2.1 Publicidad en Televisión

La compañía SAT hace publicidad en telenovelas y programas de fútbol. Cada comercial en una telenovela cuesta $50.000um.$ y cada comercial en un programa de fútbol $100.000um.$ Si se compran s comerciales en telenovelas serán vistos por $5\sqrt{s}$ hombres y por $20\sqrt{s}$ mujeres (los datos vienen en millones de espectadores). Si se compran f comerciales en programas de fútbol, serán vistos por $17\sqrt{f}$ hombres y por $7\sqrt{f}$ mujeres. SAT quiere que por lo menos 40 millones de hombres y por lo menos 60 millones de mujeres vean sus comerciales. Formule un modelo que minimice el costo de SAT para alcanzar suficientes espectadores.

SOLUCION[20]

La idea del problema es determinar el número de comerciales en telenovela y de comerciales en partidos de fútbol de manera de alcanzar el número suficiente de espectadores a un mínimo costo, de manera que emplearemos como variables de decisión:

$s =$ Número de comerciales en televisión
$f =$ Número de comerciales en partidos de fútbol

El objetivo del modelo es minimizar los costos incurridos con la contratación de publicidad satisfaciendo las restricciones de que la publicidad llegue al menos a 40 millones de hombres y a 60 millones de mujeres, lo que junto con la restricción de no negatividad de las variables nos permite plantear el siguiente modelo de optimización.

$$P) \quad Min \quad 50.000s + 100.000f$$

$$\begin{aligned} 5\sqrt{s} + 17\sqrt{f} &\geq 40 \\ 20\sqrt{s} + 7\sqrt{f} &\geq 60 \\ s, f &\geq 0 \end{aligned}$$

2.2 Políticas de Producción y de Precios en una Panadería

Se quiere instalar una panadería que elabore 3 clases de pan: hallulla corriente, hallulla especial y marraqueta. Se necesita determinar el precio de venta p_i de cada uno de los tres tipos de pan, de modo de maximizar las ventas de la panadería. Para esto se deberá tener en cuenta el precio promedio de venta de cada tipo de pan de otras panaderías del sector (c_i), el cual no podrá ser excedido. La demanda (en kilos) $d_i(p_i)$ de cada tipo de pan es una función conocida (obtenida a través de un estudio de mercado), y responde a un determinado nivel de precio. Estas funciones son estrictamente decrecientes con el precio. Para simplificar el problema, se supondrá que el stock de materias primas es suficiente para empezar a producir. De todas formas habrá que considerar que la producción máxima diaria es de M kilos de pan, la cual está determinada por la capacidad de maquinaria y de mano de obra.

[20] Jorge Vera, Profesor Ing. Industrial PUC

SOLUCIÓN[21]

Se necesita determinar el precio de cada uno de los tres tipos de pan, luego la variable de decisión del modelo será:

p_i = Precio del kilo de pan del tipo i,
$i = \{1 : \text{hallulla corriente}, 2 : \text{hallulla especial}, 3 : \text{marraqueta}\}$.

El objetivo del modelo es maximizar las ventas, satisfaciendo las restricciones de capacidad que introducen una cota para la producción, las restricciones de los precios, que no pueden superar a los de la competencia, y que dada la formulación del problema las variables deben ser no negativas. Considerando lo anterior el modelo resulta ser:

$$P) \quad Max \quad \sum_{i=1}^{3} p_i d_i(p_i)$$

$$\begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{3} d_i(p_i) & \leq & M & \\ p_i & \leq & c_i & \forall i \\ p_i & \geq & 0 & \forall i \end{array}$$

Problemas Propuestos:

1. ¿Cómo cambia el problema si no existiera un límite máximo de producción (i.e., $M \to \infty$)?
2. Después de un tiempo de instalada la panadería, se puede observar que la demanda (d_i) que arrojó el estudio para cada tipo de pan es un promedio de la demanda de Lunes a Viernes, pero que los días Sábados ésta crece en forma equitativa para cada clase de pan en un 20%, y los días Domingo en un 30%. Replantee el problema de tal manera de lograr satisfacer la demanda de pan durante el fin de semana.

2.3 Elaboración de un Helado de Gusto Masivo

Se quiere elaborar un helado que sea del gusto de la mayor cantidad de personas posible. Para esto, se realizó un estudio que midió la aceptación del público, en una escala de 1 a 10, de 5 tipos de ingredientes: helado de vainilla (v), trozos de chocolate (c), jarabe (j), licor (l) y toppings (t). Los resultados del estudio fueron entregados en función de la proporción de cada ingrediente (que varía de 0 a 1), es decir, a través de funciones del tipo $f(q) = p$, donde q es la proporción del ingrediente y p la puntuación que éste recibe. Asi se obtuvo:

$$\begin{array}{rcl} f_v(v) & = & 6 \\ f_c(c) & = & 7(e^{-2\pi(c-\frac{1}{2})^2} - e^{\frac{-\pi}{2}}) \\ f_j(j) & = & 5j \\ f_l(l) & = & 4e^{-2\pi(4l-1)^2} \\ f_t(t) & = & 5e^{-2\pi(6t-\frac{21}{10})^2} \end{array}$$

Por otra parte, la fábrica posee sus propias relaciones entre los ingredientes, con éxito ya probado. La primera es que la proporción de helado de vainilla debe ser entre un 25% y un 75% del helado, y que debe ser mayor a cada uno de los 4 ingredientes restantes. Además por un problema de costo, la cantidad de toppings y de licor debe ser menor al 50%, y los otros 2 ingredientes pueden moverse libremente entre el 0% y el 100%.

SOLUCIÓN[22]

[21] Mariela Silva, Priscila Hidalgo. Optimización 1^{er} Semestre 1996.
[22] Andrés Flores M., Michael Riddell H.. Optimización 1^{er} Semestre 1996.

La idea del problema es encontrar la mejor combinación de ingredientes de manera de elaborar el helado de mayor gusto, para esto emplearemos como variables de decisión la proporción de cada ingrediente a emplear, esto es:

$v =$ Proporción de helado de vainilla.
$c =$ Proporción de trozos de chocolate.
$j =$ Proporción de jarabe.
$l =$ Proporción de licor.
$t =$ Proporción de toppings.

El objetivo del modelo es maximizar la puntuación del helado (como la suma de las funciones obtenidas en el estudio) sujeto a las restricciones de elaboración de la fábrica, esto es que el helado de vainilla debe ser entre un 25% y un 75% del total del helado y mayor que todos los otros componentes, y que los ingredientes más caros no deben superar el 50% de dicho total. Además, se debe considerar que la suma de las proporciones de todos los ingredientes debe ser igual a 1, y que las variables de decisión son no negativas. De esta manera se obtiene el siguiente problema de optimización:

$$P) \quad Max \quad \{6 + 7(e^{-2\pi(c-\frac{1}{2})^2} - e^{\frac{-\pi}{2}}) + 5j + 4e^{-2\pi(4l-1)^2} + 5e^{-2\pi(6t-\frac{21}{10})^2}\}$$

$$\begin{aligned} 0.25 &\leq v \leq 0.75 \\ v &\geq c, j, l, t \\ 0 &\leq l \leq 0.5 \\ 0 &\leq t \leq 0.5 \\ v + c + j + l + t &= 1 \\ v, c, j, l, t &\geq 0 \end{aligned}$$

Problemas Propuestos:

1. Plantee el problema para el caso en que se agregue un nuevo ingrediente, helado de frutilla (f),el cuál tiene una puntuación de 5 en el estudio de aceptación del público, y según la fábrica, debe someterse a las mismas restricciones que el helado de vainilla. Además la relación entre ambos debe ser tal que $0.7v \leq f \leq v$.

2. Un nuevo estudió mostró que la combinación de toppings y licor no gustaba en el público, por lo que utilizando los datos entregados anteriormente, la fábrica deberá elegir con cuál de los 2 ingredientes quedarse para la elaboración de su nuevo helado. Plantee el problema para cada uno de los casos e indique cuál de los dos ingredientes es el que le conviene elegir a la fábrica de helado.

2.4 Planta de Revisión Técnica

El Ministerio de Transportes y Telecomunicaciones ha lanzado un proceso de licitación por plantas de revisión técnica para la región Metropolitana. La licitación es por un plazo de un año. Quien gane deberá satisfacer todos los requerimientos técnicos descritos en las bases y de este modo proveer una planta que sea capaz de atender vehículos de seis tipos: A, B, C, D, E y F. La empresa ganadora deberá indicar el monto a cobrar a cada uno de los vehículos y se adjudicará la licitación aquella empresa que se comprometa a cobrar una tarifa ponderada menor. El modo de calcular la tarifa ponderada se describe a continuación:

$$\begin{aligned} T_1 &= 0.5 \cdot T_A + 0.5 \cdot T_B \\ T_2 &= 0.6 \cdot T_E + 0.4 \cdot T_F \\ Tarifa\ Ponderada &= 0.3 \cdot T_1 + 0.7 \cdot T_2 \end{aligned}$$

La tarifa T_C no puede exceder a 0.75 T_A y la tarifa T_D podrá ser como máximo igual a T_1.

Se le ha encargado definir el modo en que su empresa se presentará a este concurso. Usted estima que los costos totales que incurrirá durante el año en que operará la planta son de $75 millones, como usted cree que el proceso de licitación será sumamente competitivo (muchas empresas han solicitado las bases), piensa presentarse con una combinación de tarifas que signifiquen una utilidad no inferior a $5 millones.

Para estimar la demanda ha realizado un estudio que arroja los siguientes resultados:

- El número de vehículos tipo A que solicitarán revisión técnica son entre 1800 y 2200 vehículos, dependiendo de la tarifa que se cobre. En ese rango puede asumirse la siguiente función:

$$Q_A = 2.200 - 0.2 \cdot T_A$$

- El número de vehículos tipo B que solicitarán revisión técnica son un 20% de los vehículos tipo A que la soliciten.
- El número de vehículos tipo C que soliciten revisión técnica será igual a 300.
- El número de vehículos tipo D que solicitarán revisión técnica son entre 600 y 1000 vehículos, dependiendo de la tarifa que se cobre. En ese rango puede asumirse la siguiente función:

$$Q_D = 1.400 - 0.3 \cdot T_D$$

- El número de vehículos tipo E que solicitarán revisión técnica son un 30% de los vehículos tipo D que la soliciten.
- El número de vehículos tipo F que soliciten revisión técnica será igual a 500.

Cree un modelo que entregue el esquema tarifario óptimo para presentarse a la licitación (tener la mejor posibilidad de ganar), de modo que si gana, las ganancias de la empresa sean al menos las previamente estipuladas.

SOLUCIÓN

Como se trata de planificar el proyecto que debe presentar la empresa, es evidente que las variables de decisión a emplear en el modelo deben ser el monto de las tarifas a presentar en el proyecto, esto es:

$T_i =$ Tarifa a cobrar por vehículo de tipo i, $i = A, B, C, D, E, F$

Además, emplearemos la notación dada en el enunciado para definir el número de vehículos que empleará cada servicio, de tal manera que:

$Q_i =$ Número de vehículos del tipo i que utilizarán el servicio.

Ahora bien, el objetivo del modelo es minimizar la tarifa ponderada, de manera de ganar la licitación, pero la propuesta debe estar sujeta a las restricciones de que la tarifa de los vehículos C no puede exceder a 0.75 veces la tarifa de los vehículos A, que la tarifa de los vehículos D debe ser inferior a la tarifa T_1 dada en el enunciado del problema, que los ingresos producidos por la tarificación deben considerar los costos en que se debe incurrir y la utilidad deseada, además de las restricciones arrojadas por el estudio de mercado y las de no negatividad de las variables. Con estas consideraciones se obtiene el siguiente modelo de optimización.

$$P) \quad Min \quad 0.15T_A + 0.15T_B + 0.42T_A + 0.28T_F$$

$$
\begin{aligned}
T_C &\leq 0.75T_A \\
T_D &\leq 0.5\,(T_A + T_B) \\
\sum_{i=A}^{F} Q_i T_i &\geq 80.000.000 \\
Q_A &= 2.200 - 0.2 \cdot T_A \\
Q_B &= 0.2 Q_A \\
Q_C &= 300 \\
Q_D &= 1.400 - 0.3 \cdot T_D \\
Q_E &= 0.3 Q_D \\
Q_F &= 500 \\
1800 &\leq Q_A \leq 2.200 \\
600 &\leq Q_D \leq 1.000 \\
Q_i, T_i &\geq 0 \qquad\qquad \forall i
\end{aligned}
$$

Nótese que es posible expresar el modelo anterior con sólo 6 variables (T_i) reemplazando todos los Q_i por sus equivalencias respectivas en T_i.

Problemas Propuestos

1. Considere ahora el caso en que Ud. forma parte del cómite del estado, y lo que debe decidir es cuánto se debe subsidiar a la empresa ganadora de la licitación, de manera de que el bienestar social sea lo mejor posible. Para esto Ud. conoce una función de bienestar social asociada a la cantidad demandada por patentes, estos es, la cantidad utilizada de autos, la cual está dada por $B(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6)$. Además Ud. conoce una función de oferta de las empresas por la licitación, la que, en función del número de autos, entrega la cantidad que está dispuesto a percibir la empresa.

2. Considere ahora el caso en que Ud. tiene una empresa asociada que vende autos, a un precio P_i (precio del auto tipo i), y sabe que la demanda por dichos autos está dada, entre otras cosas por el precio de las patentes según la función $F_i(Q_i)$. Considere que para tener opción de ganar la licitación debe tener una tarifa ponderada a lo más igual a 1.000 y que la diferencia se pondera en un 25% en consideración de los beneficios de la empresa y que los beneficios por venta de autos se consideran como un 75% en consideración de lo mismo.

2.5 Venta de Ropa

Una tienda de departamentos va a ofrecer una nueva colección de prendas de vestir de la marca "Ennio", aprovechando la gran popularidad de la moda italiana. Esta colección incluye diversos ítems (blusas, pantalones, etc.). La demanda por un ítem depende de muchos factores, pero uno de los principales es el precio. Específicamente, supondremos que la demanda por el ítem j en la semana t está dada por una expresión de la forma $d_{jt} = \alpha_j + \beta_j p_{jt}$, donde p_{jt} es el precio del ítem j en la semana t, y α_j, β_j son parámetros conocidos, con $\beta_j < 0$. En cada semana, la tienda compra de los distintos artículos a su proveedor mayorista y también puede cambiar el precio al que lo ofrece. El costo para la tienda del artículo j en la semana t es c_{jt} y, además cada vez que se ordena del artículo j se incurre en un costo fijo administrativo igual a K_j. Los artículos que no se vendan en una semana, quedan en inventario para las siguientes, y hay un costo h_j por cada unidad del ítem j que queda en inventario de una semana a la siguiente. Suponga adicionalmente que el artículo j ocupa un volumen físico igual a a_j y todo lo que se ordena y despacha a la tienda en una semana se transporta en un camión cuya capacidad total es un volumen V. La tienda tiene que planificar sus ordenamientos semanales sobre un horizonte de T semanas, y a que precio ofrecer cada item en cada semana. Es política de la tienda no dejar demanda insatisfecha. Obviamente el inventario inicial de los items es cero.

1. Construya un modelo de optimización que le permita determinar cuánto ordenar de cada item y a qué precio venderlos, semanalmente, de modo de maximizar la ganancia. El ingreso por ventas es igual a la cantidad vendida multiplicada por el precio de venta, esto semana a semana.

2. Suponga ahora que esta tienda tiene la característica de que cuando el inventario semanal total de los artículos disminuye, entonces la demanda aumenta (esto suena raro, pero es la forma en que se comportan algunas tiendas que hacen el "juego de la escasez", un ejemplo de esas es la cadena Zara). Esto se manifiesta en que el parámetro α_j de la función de demanda en función del precio, ahora varía semanalmente. Suponga que α_j aumenta o disminuye en el periodo t en una fracción g correspondiente a un 30% de la fracción de aumento o disminución del inventario total de una semana a la siguiente. Si el inventario en una semana quedara en cero, entonces α_j toma un valor $\bar{\alpha}_j$ conocido. Modele esta situación e indique cuáles son las modificaciones que deben hacerse a modelo de i) para esto.

SOLUCIÓN[23]

1. Sea x_{jt} la cantidad a ordenar del item j en la semana t y sea I_{jt} el inventario del item j al final de la semana t. La otra variable del problema es el precio, p_{jt}. Una escritura del modelo es la siguiente:

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{t=1}^{T} \left\{ \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j + \beta_j p_{jt}) p_{jt} - \sum_{j=1}^{n} c_{jt} x_{jt} - \sum_{j=1}^{n} h_j I_{jt} - \sum_{j=1}^{n} K_j z_{jt} \right\} \\ s.a. & I_{jt} = I_{j,t-1} + x_{jt} - d_{jt}, j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \\ & \sum_{j=1}^{n} a_j x_{jt} \le V, t = 1, \dots T \\ & x_{jt} \le M z_{jt}, j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \\ & z_{jt} \in \{0,1\}, x_{jt} \ge 0, I_{jt} \ge 0, p_{jt} \ge 0, j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T \end{array}$$

con $I_{j0} = 0$.

2. En este caso, el parámetro α debe ser α_{jt} y pasa a ser una nueva variables del problema, y debe depender del tiempo. El cambio relativo del inventario es

$$\frac{I_{jt}}{I_{j,t-1}}$$

así que en primera instancia la restricción que define el cambio de α es:

$$\alpha_{jt} = \alpha_{j,t-1} \left(1 + \left(\frac{I_{jt}}{I_{j,t-1}} - 1 \right) \right), t = 2, \dots, T.$$

Hay que, eso sí, tomar en cuenta el caso en que $I_{jt} = 0$ y eso lo hacemos con una variables binaria adicional $y_{jt} \in \{0,1\}$ que nos indique cuando el inventario es cero, y para eso consideramos la siguiente escritura:

$$y_{jt} \le I_{jt};\ I_{jt} \le M(1 - y_{jt}), j = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T$$

lo cual es razonable si consideramos que los items son unitarios. Agregamos adicionalmente:

$$\alpha_{jt} = (1 - y_{j,t-1}) \alpha_{j,t-1} \left(1 + \left(\frac{I_{jt}}{I_{j,t-1}} - 1 \right) \right) + y_{j,t-1} \bar{\alpha}_{jt}, t = 2, \dots, T.$$

Además de lo anterior, la función objetivo debe ser modificada en el término de la venta:

$$(\alpha_{jt} + \beta_j p_{jt}) p_{jt}$$

y se debe poner en las especificaciones que $\alpha_{jt} \ge 0$, ya que ahora es una variable del problema.

[23] Examen, 2013'2

Período	**Influjo**		**Desc. min**		% de energía anual a
t	z_{1t}	z_{2t}	d_{1t}	d_{2t}	entregar a cliente 1, r_t
1	547	2.616	200	304	10
2	1.471	2.335	200	578	12
3	982	1.231	200	975	15
4	146	731	200	1.495	32
5	32	411	200	558	21
6	159	497	200	392	10

Table 26: Central Hidroeléctrica

2.6 Central Hidroeléctrica

Una compañía hidroeléctrica controla la operación de dos embalses, cada uno con su planta de generación asociada. El horizonte de planificación de la compañía es de 1 año, dividido en 6 períodos. El primer embalse tiene capacidad para almacenar 3.500 kilo-hectárea-metro y el segundo 5.500 kilo-hectárea-metro. Si cualquier embalse está a plena capacidad, en cualquier instante en el tiempo, cualquier influjo adicional de agua debe derramarse por una salida especial que tiene cada embalse; esta agua que se pierde no produce electricidad.

En cada período, existe una mínima cantidad de agua que debe ser descargada de cada embalse para satisfacer requerimientos de recreación y de regadío, aguas abajo. No existe un límite superior a la cantidad de agua que puede descargarse en cada embalse. Cualquier cantidad de agua que no se descarga en un periodo puede almacenarse (respetando la capacidad máxima del embalse) y puede descargarse en periodos posteriores. Todo el agua que se descargue, incluyendo la que se utiliza para fines recreacionales y de regadío, produce electricidad. Se puede asumir que en cada periodo, el ingreso y la salida de agua se produce a tasa constante. Además, una hectárea-metro que se descarga produce $310KWH$ en el primer embalse y produce $420KWH$ en el segundo embalse.

Al principio del año, el primer embalse contiene 1.800 kilo-hectárea-metro y el segundo 2.500. Las mismas cantidades de agua deben quedar en cada embalse al final del año. La electricidad producida puede venderse a una firma local (denominada cliente tipo 1) o a otro tipo de clientes (clientes tipo 2). El cliente tipo 1 compra electricidad sobre una base anual, y requiere que porcentajes específicos de esta compra anual sean suministrados en cada período; este cliente paga $US\$10/1.000KWH$. Los clientes tipo 2 compran electricidad período a período, y están dispuestos a comprar cualquier cantidad a $US\$5/1.000KWH$. Los datos del problema se presentan en la Tabla 26. Escriba un modelo lineal que permita maximizar los ingresos totales anuales de la compañía.

SOLUCIÓN

Las variables de decisión de este problema son la cantidad de $(1.000KWH)$ que se le venderán a cada cliente. En el caso del cliente de tipo 1, x_1 representará su compra total anual, mientras que para el cliente de tipo 2, x_{2t} representará la compra en el periodo t. Además, y_{it} representará la descarga de agua de cada embalse para cada periodo. En la Tabla 26 hemos definido algunos parámetros como el influjo a cada embalse en cada periodo (z_{it}), la descarga mínima en cada embalse en cada periodo (d_{it}), y el porcentaje a entregar a cliente de tipo 1 en cada periodo (r_t).

De esta manera podemos establecer el objetivo de maximizar los ingresos de la siguiente forma:

$$P) \quad Max \quad 10x_1 + 5\sum_{t=1}^{6} x_{2t}$$

La cantidad de agua en los embalses hay que manejarla como un sistema de inventario, donde en cada periodo hay ingreso (influjo) y egreso (descarga) de agua. Las siguientes condiciones se encargan de los niveles de agua en cada embalse:

$$\begin{array}{cc} I_{10} = 1.800 & I_{20} = 2.500 \\ I_{1t} = \min\left\{I_{1(t-1)} + z_{1t} - y_{1t} \;; 3.500\right\} & I_{1t} = \min\left\{I_{1(t-1)} + z_{1t} - y_{1t} \;; 5.500\right\} \\ I_{16} = 1.800 & I_{26} = 2.500 \end{array}$$

donde I_{it} corresponde al nivel de inventario en el embalse i al final del periodo t. Es importante agregar las resticciones de no-negatividad de los inventarios $I_{it} \geq 0$ para todos los periodos en ambos embalses. Debido a que en cada periodo debe haber una descarga mínima de agua, hay que satisfacer también

$$y_{it} \geq d_{it} \qquad \forall i, t.$$

Respecto a la generación de electricidad, establecemos la siguiente relación entre el agua descargada y la energía producida para ser vendida:

$$310y_{1t} + 420y_{2t} = r_t x_1 + x_{2t}.$$

Finalmente es importante considerar la restricción de no-negatividad de las variables de decision, es decir:

$$x_1, x_{2t} \geq 0 \qquad \forall t.$$

2.7 Iluminación de Plazas

En un parque existen N plazas distribuidas espacialmente, las que deben ser iluminadas en base a J focos de iluminación que existen instalados en el parque. La intensidad de luz que el foco j ejerce sobre la plaza i está dada por $I_{ij} = a_{ij}P_j$ donde P_j representa la potencia del foco j y a_{ij} es una constante que depende de la ubicación relativa de la plaza i respecto al foco j. La intensidad total que recibe una plaza es la suma de las intensidades recibidas de cada uno de los focos. El problema consiste en definir las potencias P_j de cada foco de modo que la intensidad en todas las plazas difiera lo menos posible de valores pre-establecidos I_i^*. Formule un modelo de optimización que permita resolver este problema.

SOLUCIÓN

Las variables de decisión son P_j correspondientes a la potencia de cada foco. Dado que el objetivo es minimizar las diferencias de las intensidades, establecemos la siguiente función objetivo:

$$P) \quad Min \quad \sum_{i=1}^{N} |I_i^* - I_i|$$

sujeto a las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} I_i &= \sum_{j=1}^{J} a_{ij} P_j && \forall i = 1, ..., N \\ P_j &\geq 0 && \forall j = 1, ..., J. \end{aligned}$$

Problema Propuesto

1. ¿Se puede observar que la función objetivo contiene un valor absoluto, lo que no es lineal y diferenciable. Reescriba el modelo de forma que quede completamente lineal. Para ello, puede agregar las variables que estime convenientes.

2.8 Maximizando ingresos de publicidad

Un canal de TV desea establecer precios competitivos y rentables para su tiempo de avisaje. Asuma que existen 3 tipos de tiempos de avisaje distintos: horario diurno y nocturno de día de semana, y horario de fin de semana. Sean p_1, p_2, p_3 los precios respectivos por minuto de avisaje. El canal vende tiempo de avisaje a K empresas; se sabe que la empresa k desea adquirir un paquete que consiste en a_{1k}, a_{2k}, a_{3k} minutos en cada uno de los tiempos disponibles, y que está dispuesta a pagar a lo sumo A_k por este paquete (de lo contrario no compra nada). Formule el problema de manera que los ingresos sean maximizados.

SOLUCIÓN

Además de determinar los precios óptimos en este problema, hay que determinar las empresas que comprarán finalmente el paquete, es decir, las variables de decisión son los precios p_i y los indicadores x_k. De esta forma el modelo queda:

$$P) \quad Max \quad \sum_{k=1}^{K} x_k \sum_{i=1}^{3} p_i a_{ik}$$

$$\begin{array}{rcll} x_k \sum_{i=1}^{3} p_i a_{ik} & \leq & A_k & \forall k \\ p_i & \geq & 0 & \forall i \\ x_k & \in & \{0,1\} & \forall k. \end{array}$$

2.9 Endesa y Operación de Central Hidroeléctrica

La empresa ENDESA administra la operación del lago Laja, para la generación de energía hidroeléctrica; en particular, debe decidir cuánta agua debe evacuar del lago en los próximos 12 meses. Al comienzo del primer mes, el nivel del lago está a 150 mm bajo su nivel máximo (si ese nivel máximo se sobrepasa, se produce un derrame forzado de agua). La central asociada al lago puede procesar hasta un máximo de agua equivalente a 20 mm del nivel del lago en cada mes. Sin embargo, hay que considerar el efecto de precipitaciones y de la evaporación natural de agua. El clima en la zona del lago es altamente variable, por lo que las condiciones de precipitaciones y evaporación natural varían de mes a mes. Suponga que N_t representa la variación del nivel del lago, en mm, durante el mes t, por efectos del clima (un valor positivo de N_t representa un incremento del nivel del lago y un valor negativo un decremento).

Si se produce un derrame forzado, se producen daños de diverso tipo en la región colindante al lago, que se estiman en $US\$10.000$ por cada mm de derrame del lago. Si en un mes el nivel del lago es muy bajo, es necesario generar energía con otras fuentes alternativas más caras, y se estima un costo de $US\$5.000$ por cada mm en que el lago se encuentre a más de 250 mm bajo su nivel máximo.

Escriba un modelo que permita minimizar los costos totales.

SOLUCIÓN

Consideraremos como punto de referencia el mínimo nivel del lago, es decir, el máximo está a 250 mm sobre la referencia, y el nivel inicial $I_0 = 100$. Las variables de decisión corresponden a la cantidad de milímetros de agua a evacuar en cada mes, y la llamaremos x_t. El nivel de agua al final de cada mes lo denominaremos I_t. De esta forma podemos formular el siguiente modelo de optimización para resolver este problema:

$$P) \quad Min \quad 10.000 \sum_{t=1}^{12} \max\{I_t - 250; 0\} + 5.000 \sum_{t=1}^{12} \max\{-I_t; 0\}$$

sujeto a las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{rcll} I_t & = & I_{t-1} + N_t - x_t & \forall t \\ I_0 & = & 100 & \\ 0 & \leq & x_t \leq 20 & \forall t. \end{array}$$

Problema Propuesto

1. ¿Se puede observar que la función objetivo contiene la función máximo, término que no es lineal. Reescriba el modelo de forma que quede completamente lineal. Para ello, puede agregar las variables que estime convenientes.

2.10 Planificación de la Producción

Una extensión de los problemas de planificación de la producción considera descuentos por volumen. Suponga que una empresa produce un conjunto J de productos a partir de otro conjunto I de materias primas, para un conjunto K de clientes.

Los ingresos de la empresa provienen de la venta de los productos a sus clientes. La demanda del cliente $k \in K$ por el producto $j \in J$ en el periodo $t = 1, \dots, T$ pertenece al intervalo $[d_{jk}^t, e_{jk}^t]$, donde d_{jk}^t representa la demanda mínima a satisfacer, y e_{jk}^t la demanda máxima del cliente cuando se produce algún tipo de descuento en el precio del producto. La política de precios de la empresa es cobrarle a sus clientes $a_j - \left(\frac{b_j}{q}\right)^{\beta_j}$ unidades monetarias por cada unidad vendida del producto $j \in J$, donde a_j, b_j y β_j son parámetros conocidos y q es la cantidad vendida al cliente ese periodo.

Por otra parte, la empresa incurre, para cada producto terminado $j \in J$, y en cada periodo $t \in 1, \dots, T$, en un costo de mantención de inventario, que denotamos h_j^t, y en un costo de producción, que denotamos c_j^t.

Se dispone de m_i unidades de la materia prima $i \in I$ al comienzo de cada periodo, y su consumo depende del volumen a producir de cada producto. Se conocen las funciones $g_{ij}(p)$, las cuales establecen cuántas unidades de la materia prima $i \in I$ se consumen debido a la fabricación de una unidad del producto $j \in J$, si la producción en el periodo en consideración es de p unidades.

Establezca un modelo no lineal que determine el plan conjunto de producción y ventas de la empresa en el horizonte de planificación que maximice su utilidad total.

SOLUCIÓN[24]

- Variables:
  - X_j^t: unidades producidas del producto $j \in J$ el periodo $t = 1, \dots, T$.
  - I_j^t: inventario del producto $j \in J$ al término del periodo $t = 1, \dots, T$.
  - Y_{jk}^t: unidades vendidas del producto $j \in J$ al cliente $k \in K$ el periodo $t = 1, \dots, T$.
- Función objetivo:

$$\max \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{t=1}^{T} \left(a_j - \left(\frac{b_j}{Y_{jk}^t} \right)^{\beta_j} \right) Y_{jk}^t - \sum_{j \in J} \sum_{t=1}^{T} h_j^t I_j^t - \sum_{j \in J} \sum_{t=1}^{T} c_j^t X_j^t$$

- Restricciones
  - Balance de inventarios.

$$I_j^t = I_j^{t-1} + X_j^t - \sum_{k \in K} Y_{jk}^t, \ \forall j \in J, \ \forall t = 1, \dots, T.$$

    Donde los I_j^0 son parámetros del modelo.
  - Disponibilidad de materias primas.

$$\sum_{j \in J} g_{ij} \left(X_j^t \right) \leq m_i, \ \forall i \in I, \ \forall t = 1, \dots, T.$$

  - Satisfacción de demanda.

$$d_{jk}^t \leq Y_{jk}^t \leq e_{jk}^t, \ \forall j \in J, \ \forall k \in K, \ \forall t = 1, \dots, T.$$

  - Naturaleza de las variables.

$$X_j^t \geq 0, \ \forall j \in J, \ \forall t = 1, \dots, T.$$
$$Y_{jk}^t \geq 0, \ \forall j \in J, \ \forall k \in K, \ \forall t = 1, \dots, T.$$

[24]Interrogación 1, 2013'2

2.11 Semaforización de una Rotonda

Se quiere instalar un semáforo en cada una de las 5 calles que concurren a una rotonda con el fin de maximizar el ingreso de autos desde cada calle a ella. Para esto es necesario calcular cuál es el tiempo (t_i) que cada semáforo debe permanecer en luz verde, teniendo en cuenta que éste no debe ser inferior a s segundos. Por otro lado, el tiempo máximo de espera (i.e. el tiempo que transcurre hasta que se vuelve a dar la luz verde) no debe ser superior a r segundos. También es importante considerar el problema de la congestión, para lo que se sugiere que la cantidad de autos que no alcanzan a pasar durante una luz verde a la rotonda, sea menor que el 5% de la cantidad total de autos que ingresaron a la calle en ese tiempo. Con el fin de conocer una cifra aproximada del número de autos que concurren a la rotonda, se realizó un estudio para obtener los datos promedio del flujo (f_i) y la velocidad de entrada (v_i) por cada arteria., obteniéndose la relación dada en (17).

$$\text{Número de autos que entran a la rotonda} = v_i t_i e^{\frac{t_i}{23}} \tag{17}$$

SOLUCIÓN[25]

Se debe decidir cuál es el tiempo que cada uno de los 5 semáforos de la rotonda debe permanecer en luz verde maximizando el ingreso de autos a ella, luego la variable a utilizar en el modelo será:
t_i = Tiempo de luz verde en el semáforo i, $i = 1, ..., 5$

El objetivo del modelo es maximizar el número de autos que entran a la rotonda, considerando como restricciones que el tiempo mínimo que cada semáforo puede permanecer en luz verde es igual a s, que el tiempo entre luces verdes no debe superar los r segundos (o lo que es lo mismo, que la suma de luz verde de todos los semáforos debe ser menor o igual a r) y que la cantidad de autos que no alcanzen a pasar con luz verde sea menor al 5%, lo que es equivalente a decir que la diferencia entre el flujo de entrada a la calle $f_i t_i$ y el flujo de entrada a la rotonda en (17), sea menor a dicho porcentaje. Esto, junto con las restricciones de no negatividad de las variables permiten plantear el siguiente modelo:

$$P) \quad Max \quad \sum_{i=1}^{5} v_i t_i e^{\frac{t_i}{23}}$$

$$\begin{array}{rcll}
t_i & \geq & s & \forall i \\
\sum_{i=1}^{5} t_i & \leq & r & \\
f_i t_i - v_i t_i e^{\frac{t_i}{23}} & \leq & 0.05 f_i t_i & \forall i \\
t_i & \geq & 0 & \forall i
\end{array}$$

Problemas Propuestos:

1. Si un valor razonable para los parámetros r y s, fuera de 100 y 15 segundos respectivamente. ¿Cuál será el máximo de calles que podrán concurrir a una rotonda cualquiera para que se pueda aplicar este modelo?¿Y cuál será el número óptimo de calles?

2. Si el flujo promedio de autos fuera el mismo para cada una de las calles, ¿Serán iguales los tiempos t_i?

2.12 Traslado de aceites

La empresa RED se ubica en el rubro de venta de aceites y acaba de firmar un contrato con la empresa BLUE para vender muchos barriles de aceite. Sin embargo, RED no posee los barriles para poder transportar su producto, por lo que tendrá que mandarlos a hacer a la empresa GREEN, indicando las medidas de los barriles (largo, radio). Puede asumir que un barril es un cilindro perfecto con base circular.

[25] Fernando Concha Fueyo. Optimización 1^{er} semestre 1996.

RED sabe que debe transportar V_i litros de cada aceite $i \in I$, y obviamente no puede mezclar distintos aceites dentro de un mismo barril. El costo del material de los cilindros es $C\frac{\$}{m^2}$. Por razones desconocidas de la empresa GREEN, todos los barriles que mande a confeccionar deben ser iguales (es decir, el mismo largo y el mismo radio).

Confeccione un modelo de optimización que permita saber cómo mandar a hacer los barriles para transportar todo el aceite de manera de minimizar el costo total.

SOLUCIÓN[26]

Se debe decidir el tamaño del cilindro que se usará (largo y radio de la circunferencia). Además, teniendo esas medidas, se debe saber cuántos barriles serán necesarios por tipo de aceite. Así, el modelo queda:

- Variables de decisión
  x_i: cantidad de barriles a ocupar para el aceite i.
  y: largo del barril.
  z: radio del barril.

- Función objetivo: minimizar el costo total.

$$\min C \cdot (2\pi \cdot z^2 + 2\pi zy) \cdot \sum_{i \in I} x_i$$

- Restricciones: debo cumplir con el requisito del volumen para cada tipo de aceite.

$$\begin{array}{rcll} x_i \cdot \pi z^2 y & \geq & V_i & \forall i \in I \\ y, z & \geq & 0 & \\ x_i & \in & \mathbb{Z}^+ & \forall i \in I \end{array}$$

2.13 Diseño Óptimo de Caja

Usted debe definir las dimensiones de una caja de cartón de 1 m^3 de volumen, de modo que su costo sea mínimo. Para eso, debe emplear el diseño básico dado en la Figura 2

El costo de cada cm^3 de cartón es c y el costo de cada cm lineal de pegamento es p. Considere que al pegar dos lados, no se necesita pestaña y que se debe aplicar el pegamento en ambos lados.

SOLUCION

Para modelar el problema se emplearan como variables de decisión las dimensiones de la caja, esto es:

$x =$ Largo de la caja (cm).
$y =$ Ancho de la caja (cm).
$z =$ Altura de la caja (cm)

El objetivo del problema es definir las dimensiones de la caja, de manera que el costo sea mínimo, sujeto a las restricciones del volumen deseado y a las de no negativiad de las variables. Considerando lo anterior, se obtiene el siguiente modelo de optimización:

$$P) \quad Min \quad (8z + 4x + 2y)p + (2xy + 2xz + 2Yz)c$$

$$\begin{array}{rcl} xyz & = & 1.000.000 \\ x, y, z & \geq & 0 \end{array}$$

[26]Tarea 1, 2017'1

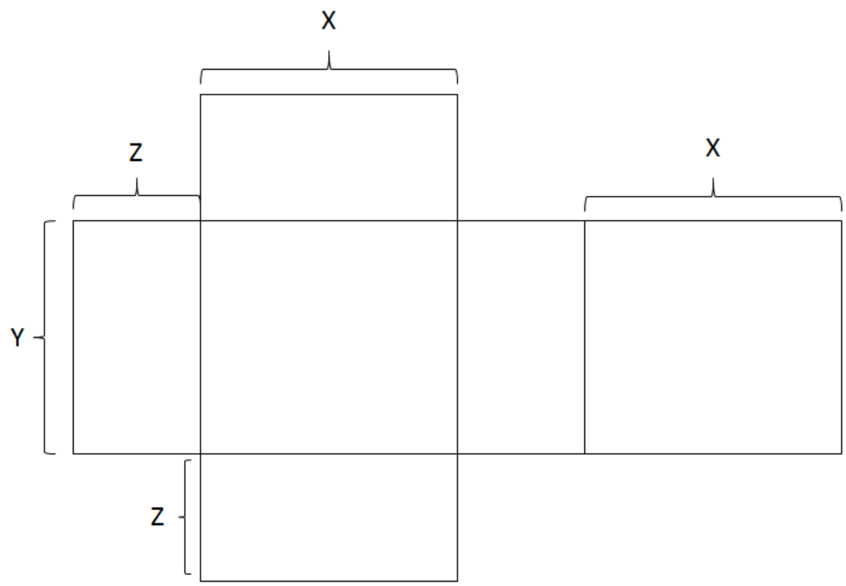


Figure 2: Diseño de Caja

Nótese que el volumen de 1 m^3 se expresó como 1 millón de cm^3 para ser consecuentes con la definición de variables del modelo.

Problemas Propuestos

1. ¿Que ocurriría si se obliga incluir pestañas en las uniones de los trozos de cartón? Considere para el problema las pestañas como rectángulos de ancho 1 cm.

2. ¿Que ocurriría si ahora la tapa es de otro material, con costo \$d por cm^2, y las paredes y el fondo del mismo antiguo? Considere el problema sin y con pestañas. Notar que se debe considerar el costo de pegar la tapa por sus cuatro lados.

3. Considere que además del pegamento, para asegurar las junturas hay que poner tachuelas cada 3 cm lineales en la tapa y en el fondo, de manera que no queden 5 cm de borde sin una tachuela en él.

2.14 Diseño de un Edificio Sujeto a las Normativas Vigentes

Se quiere construir un edificio que cumpla con todas las normativas de construcción vigentes y que maximice el ingreso de la empresa constructora, asumiendo que mientras más metros cuadrados se construyan más se gana. En este caso, se cuenta con un terreno rectangular de 66 metros de frente y 24 metros de profundidad. Sólo uno de sus lados colinda con otros sitios, los otros 3 dan a calles. Las normativas de construcción vigentes indican que debe haber al menos 7 metros de antejardín hacia todas las calles, y 6 metros de distancia hacia otros sitios, que la rasante debe ser de 70° y que los metros cuadrados construídos no deben exceder el 40% del sitio. Por otra parte, en la zona donde será construído, sólo se permiten edificios "terrazas", es decir, el edificio para cumplir con la rasante podrá enangostarse a lo más dos veces. Y habrá que tener en cuenta, además, que el último piso debe tener más de 6 metros de ancho para que pueda hacerse un departamento ahí. Con estos antecedentes, se pide calcular el número de pisos (x_i) que cada "peldaño" de la terraza debe tener, y la profundidad del angostamiento (y_i), tal como se indica en la Figura 3.

SOLUCIÓN[27]

[27] Martin Valdes J., Francisco Irarrazabal M.. Optimización 1^{er} Semestre 1996.

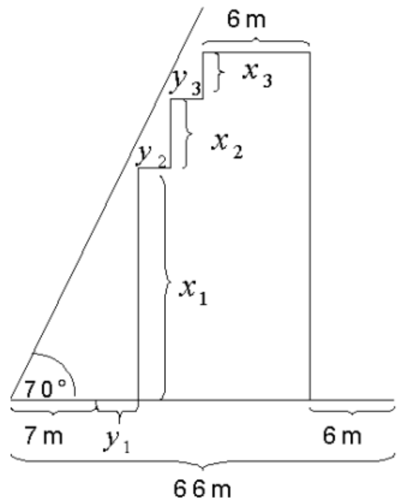


Figure 3: Diseño de Caja

El objetivo del modelo es maximizar el ingreso al construir un edificio, cumpliendo con todas las normativas vigentes. Estas normativas tienen relación con el número de pisos y la profundidad del edificio tipo terraza, de modo que emplearemos como variables de decisión:

x_i = Cantidad de pisos que tiene el "peldaño" de la terraza i.
y_i = Profundidad de la terraza i.

Como se debe maximizar la cantidad de metros cuadrados construidos, se debe calcular cada una de las 3 plantas y multiplicarlas por su respectiva altura. Así por ejemplo, la primera planta posee un largo de : $(66 - 7 - 6 - y_1)$, un ancho de: $(24 - 7 - 7)$ y una altura x_1, lo que nos permite obtener la función objetivo dada en (18).

El modelo debe considerar además, que ninguno de los "peldaños" podrá quedar fuera de la rasante (plano de 70° con respecto a la horizontal), que el total de metros construídos no podrá ser superior al 40% del terreno, que el último piso (o última planta) deberá tener un ancho mínimo de 6 metros, para poder construir un departamento ahí, y que tanto la cantidad de pisos, como la profundidad del angostamiento deberán ser mayor o igual a cero.

Según las consideraciones anteriores, el modelo resulta ser:

$$P) \quad Max \quad 10x_1(53 - y_1) + 10x_2(53 - y_1 - y_2) + 10x_3(53 - y_1 - y_2 - y_3) \tag{18}$$

$$\begin{array}{rcll}
53 - y_1 - y_2 - y_3 & \geq & 6 & \\
\dfrac{x_1}{7 + y_1} & \leq & \tan(70^\circ) & \\
\dfrac{x_1 + x_2}{7 + y_1 + y_2} & \leq & \tan(70^\circ) & \\
\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{7 + y_1 + y_2 + y_3} & \leq & \tan(70^\circ) & \\
\dfrac{(53 - y_1)(10)}{1.584} & \leq & \dfrac{2}{5} & \\
x_i, y_i & \geq & 0 & \qquad \forall i
\end{array}$$

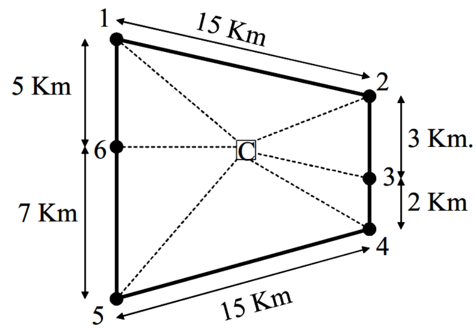


Figure 4: Parque Nacional

Nótese que como x_i representa el número de pisos, y no estamos agregando la restricción de que los x_i sean enteros, estamos planteando en realidad el problema relajado asociado.

Problemas Propuestos:

1. Plantee el mismo problema, pero esta vez considerando que el edificio puede enangostarse sólo una vez (i.e. las variables x_3 e y_3 ya no existen). ¿Qué tipo de edificio entregará mayor utilidad a la empresa constructura?

2. Si en vez de la restricción de rasante, existiera sólo una restricción de altura máxima (M), ¿Cómo sería el nuevo modelo? ¿Cómo cambian los valores de las variables de decisión y de la función objetivo?

2.15 Ubicación de una Zona de Camping

Una parque nacional de aproximadamente 124 km^2 cuyas principales atracciones son un volcán (1) y un lago (5), desea encontrar el lugar óptimo para ubicar su zona de camping (C). Se sabe que los campistas prefieren quedar lo más cerca posible de estos lugares, así como de los servicios públicos: baños (4), enfermería (6), almacén (2) y teléfonos (3), estos últimos ubicados en la entrada del parque. La distribución de estos lugares se muestra en la Figura 4. El objetivo de la administración es ubicar la zona de camping de tal manera de minimizar la distancia (x_i) que los campistas recorren diariamente. El itinerario promedio consiste en visitar una vez al día cada lugar, con excepción del baño que sería visitado 3 veces. Por esto, se pide que la distancia hacia los servicios de baño sea menor que todas las otras, y que la distancia a los servicios de teléfonos, enfermería y almacén sea menor que a los centros de atracción, ya que por lo general estos lugares son visitados cuando los campistas ya están cansados. Por último, por geometría del lugar, ninguna distancia debe ser superior a los 10 km. Para facilitar el problema, considere que el campista, cada vez que visita un lugar vuelve al camping.

Hint: Considere la fórmula del área de un triángulo de lados a,b,c (19),donde el semiperímetro del triángulo corresponde a $sp = \frac{a+b+c}{2}$.

$$A = \sqrt{sp(sp-a)(sp-b)(sp-c)} \tag{19}$$

SOLUCIÓN[28]

El objetivo del modelo es minimizar la distancia total que recorre cada campista, luego, consideraremos como variables de decisión la distancia desde el camping a cada uno de los lugares de interés:

x_i = Distancia desde el camping al lugar i,

[28] Andrea Ibaceta G.,Miguel Ravelo N.. Optimización 1^{er} Semestre 2003.

$i = \{1: volcán, 2: almacén, 3: teléfonos, 4: baños, 5: lago, 6: enfermería\}$

La función objetivo del modelo corresponde a la suma de las distancias que recorre cada el día campista, la cual está sujeta a que la distancia desde el camping al baño sea menor que a todos los otros lugares, que por cansancio los campistas prefieren una distancia menor a las zonas de servicios y que por geometría del lugar ninguna distancia puede ser superior a los 10 km ni menor a 0 km. Por otro lado, la suma de las áreas de los 6 triángulos que se forman (ver Figura 4) debe ser igual a la superficie total del parque, que es de 124 km^2. Cada una de estas superficies se puede calcular empleando en (19). Con todas estas consideraciones, obtenemos el siguiente modelo de optimización:

$$P) \quad Min \quad 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6) + 6x_4$$

$$\begin{array}{rcll}
x_4 & \leq & x_1, x_2, x_3, x_5, x_6 & \\
x_2, x_3, x_4, x_6 & \leq & x_1, x_5 & \\
x_i & \leq & 10 & \forall i \\
S_1 & = & \sqrt{sp_1(sp_1 - x_1)(sp_1 - x_2)(sp_1 - 15)} & \\
S_2 & = & \sqrt{sp_2(sp_2 - x_2)(sp_2 - x_3)(sp_2 - 3)} & \\
S_3 & = & \sqrt{sp_3(sp_3 - x_3)(sp_3 - x_4)(sp_3 - 2)} & \\
S_4 & = & \sqrt{sp_4(sp_4 - x_4)(sp_4 - x_5)(sp_4 - 15)} & \\
S_5 & = & \sqrt{sp_5(sp_5 - x_5)(sp_5 - x_6)(sp_5 - 7)} & \\
S_6 & = & \sqrt{sp_6(sp_6 - x_6)(sp_6 - x_1)(sp_6 - 5)} & \\
\sum_{i=1}^{6} S_i & = & 124 & \\
x_i & \geq & 0 & \forall i
\end{array}$$

Problemas Propuestos:

1. Considere el mismo parque, pero esta vez con una distribución de lugares rectangular. Para eso, simule que la distancia entre la enfermería (6) y el volcán (1) es de 2 km. Y que entre la enfermería (6) y el lago (5) es de 3 km. Replantee el problema.

2. Analice las variaciones del problema si:

   (a) La ida diaria a la enfermería no es parte del itinerario.

   (b) Si las visitas al baño, en promedio, son sólo dos.

2.16 Estrategia de Escape de la Prisión

Usted ha caído preso y hace años permanece en prisión. Son las 22:00 hrs del 6/7/2018 y usted ha tenido la oportunidad de escapar. No duda y la aprovecha. En este momento usted está en un terreno colindante al edificio de la prisión. Sin embargo este terreno está rodeado de guardias. Para escapar definitivamente usted deberá definir una estrategia. Para esto, considera la siguiente información.

- La Figura 5 ilustra el sector en que usted está ubicado.
- Hay guardias vigilando los escapes posibles del terreno. Por cada una de las Avenidas 1, 2, 4, 5 y por la rotonda hay un guardia que va y viene vigilando su calle. Por la Avenida 3 hay dos guardias que van de lado a lado y se cruzan en el punto medio.
- Nadie se ha percatado aún de su huída.

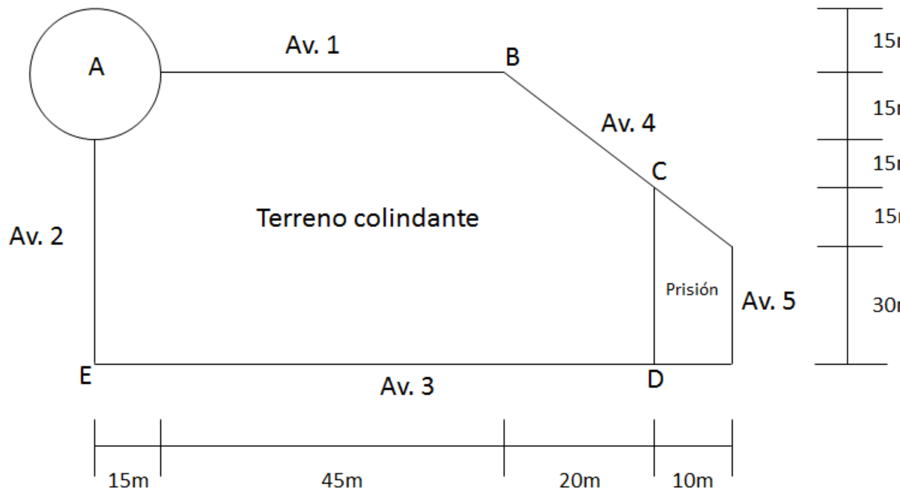


Figure 5: Terreno Colindante a la Prisión

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
Potencia (W)	1000	300	500	500	300
Altura (mts)	20	10	10	10	10

Table 27: Datos Estrategia de Escape de la Prisión

- Usted solo puede ser visto desde las torres de vigilancia en C y D.
- La velocidad del viento es de 15 Km/hr y usted supone que se mantendrá así toda la noche. La temperatura es de 9 grados y descenderá linealmente hasta los 3 grados a las 6:30 AM cuando salga el sol.
- Hay un relevo de guardias a las 5:00 AM.

Hay cinco focos que iluminan el terreno donde usted está. Están marcados con las letras A, B, C, D, E en la Figura 5. La altura de los postes y la potencia de los focos se entregan en la Tabla 27.

- El terreno tiene un declive tal que sube 1 m cada 50 m lineales en la dirección norte.
- Usted considera que la intensidad lumínica que usted recibe se comporta de acuerdo a (20), es decir, la luminosidad que usted recibe cuando se ubica en el punto j es proporcional a la potencia del foco i e inversamente proporcional a la distancia entre su ubicación j y el foco i. Usted considera que la intensidad lumínica producto de dos focos es la suma de ambos.

$$LUZ_j = \frac{k \cdot POT_i}{d_{ij}} \tag{20}$$

- Usted considera peligroso ubicarse demasiado cerca de las torres, por lo que mantendrá una distancia de al menos 20 metros con ellas.

Con esta información opta por la siguiente estrategia: Buscar el punto menos iluminado y situarse ahí, esperar hasta las 4:15 AM en que usted supone que los guardias estarán aburridos y somnolientos y recién entonces intentar salir definitivamente del sitio. Su objetivo en este momento es encontrar el punto donde esconderse.

Punto	**Coordenadas**
A	$(0, 75, 0)$
B	$(60, 75, 1.2)$
C	$(80, 45, 1.6)$
D	$(80, 0, 1.6)$
E	$(0, 0, 0,)$

Table 28: Coordenadas de Puntos

Foco	**Coordenadas**
F_A	$(0, 75, 20)$
F_B	$(60, 75, 11.2)$
F_C	$(80, 45, 11.6)$
F_D	$(80, 0, 11.6)$
F_E	$(0, 0, 10)$

Table 29: Coordenadas Focos

Modele el problema considerando las restricciones relevantes, de modo que usted esté lo menos visible posible entre las 10:00 y las 4:15 AM.

SOLUCIÓN

El objetivo del modelo es determinar el punto i al interior del terreno con menor luminosidad, por lo que conviene definir como variables de decisión las coordenadas de dicho punto, esto es:

$(x, y, z) =$ Coordenadas de punto buscado

De acuerdo a las coordenas definidas para modelar, podemos identificar como datos del problemas los puntos dados en la Tabla 28. Note que para el cálculo de las coordenadas de cada punto se consideró que el terreno sube 1 m de altura cada 50 m lineales en dirección norte, que en este caso es la dirección del eje x.

La función objetivo corresponde a la minimización de la luminosidad total, o lo que es lo mismo, a la suma de la contribución de luz de cada uno de los focos en el punto buscado. Ahora bien, para poder usar la expresión dada en (20) necesitamos definir la distancia entre el punto buscado y cada uno de los focos. Empleando los datos de la Tabla 28 (coordenadas de los puntos) y la altura dada en la Tabla 27 obtenemos las coordenadas de cada foco (ver Tabla 29) y con estas las distancias deseadas.

$$
\begin{aligned}
d_A &= \sqrt{x^2 + (y-75)^2 + (z-20)^2} \\
d_B &= \sqrt{(x-60)^2 + (y-75)^2 + (z-11.2)^2} \\
d_C &= \sqrt{(x-80)^2 + (y-45)^2 + (z-11.6)^2} \\
d_D &= \sqrt{(x-80)^2 + y^2 + (z-11.6)^2} \\
d_E &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z-10)^2}
\end{aligned}
$$

Empleando los d_i y la expresión dada en (20), la función objetivo del modelo viene dada por (21).

$$
\begin{aligned}
Min \quad & k\left(\frac{1000}{d_A} + \frac{300}{d_B} + \frac{500}{d_C} + \frac{500}{d_D} + \frac{300}{d_E}\right) \\
Min \quad & k\left(\begin{array}{c} \frac{1000}{\sqrt{x^2+(y-75)^2+(z-20)^2}} + \frac{300}{\sqrt{(x-60)^2+(y-75)^2+(z-11.2)^2}} \\ \frac{500}{\sqrt{(x-80)^2+(y-45)^2+(z-11.6)^2}} + \frac{500}{\sqrt{(x-80)^2+y^2+(z-11.6)^2}} \\ \frac{300}{\sqrt{x^2+y^2+(z-10)^2}} \end{array}\right)
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Para las restricciones del modelo debemos considerar el hecho de permanecer en el interior del terreno, esto es, estar entre E y D en un rango de 80 m y entre E y A en un rango de 75 m. No se puede estar a menos de 15 m de radio de A (por la rotonda) y no se puede cruzar la Avenida 4, esto eso, no se puede pasar el plano formado por los puntos B y C. Además, hay que incluir la inclinación del suelo y considerar que el individuo no puede ubicarse a menos de 20 m de las bases de las torres C y D, esto es, no ubicarse el interior de los círculos con centro en C y D y radio de 20 m.

De acuerdo a las consideraciones anteriores, el modelo del problema resulta ser:

$$P) \quad Min \quad k \left(\begin{array}{c} \frac{1000}{\sqrt{x^2+(y-75)^2+(z-20)^2}} + \frac{300}{\sqrt{(x-60)^2+(y-75)^2+(z-11.2)^2}} \\ \frac{500}{\sqrt{(x-80)^2+(y-45)^2+(z-11.6)^2}} + \frac{500}{\sqrt{(x-80)^2+y^2+(z-11.6)^2}} \\ \frac{300}{\sqrt{x^2+y^2+(z-10)^2}} \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leq & x \leq 80 \\ 0 & \leq & y \leq 75 \\ x^2+(y-75)^2 & \geq & 225 \\ 3x+2y & \leq & 330 \\ 50z & = & x \\ (x-80)^2+(y-45)^2+(z-1.6)^2 & \geq & 20 \\ (x-80)^2+y^2+(z-1.6)^2 & \geq & 20 \\ x, y, z & \in & \mathbb{R} \end{array}$$

Problemas Propuestos

1. ¿Cómo se modificaría nuestro problema si cada uno de los guardias contara con un perro guardián, considerando que este perro puede llegar a olerlo a Ud. a una distancia máxima de 15 metros?

2. Considere que en el punto (X_0,Y_0) se ubica un estanque. Este estanque alberga una familia de murciélagos, los cuáles, al verlo pueden hacer ruido y descubrirlo ante los guardias. Asuma que todos los murciélagos se hallan en el pozo y que la distancia máxima que ellos ven es de 15 metros. Notar que ellos no ven, sino que a través de un mecanismo similar a un radar, determinan su presencia, por lo tanto la obscuridad no es un problema para ellos.

3. Asuma ahora que Ud. sabe que las temperaturas más bajas se dan a las cuatro de la mañana. Ud. sabe que la temperatura más baja de un punto (históricamente) está dada, en Celsius, por la función $F = F(X,Y)$. Considere que un ser humano en sus condiciones no sobrevivirá a temperaturas inferiores a 0^oC. Modifique el modelo para este nuevo caso.

2.17 Círculo de Mayor Área Inscrito en Polígono

Modele un problema que permmita encontrar el círculo de mayor área inscrito en el siguiente polígono:

$$\begin{array}{rrcl} L_1) & 3x+4y & \leq & 24 \\ L_2) & 5x-2y & \leq & 30 \\ L_3) & y+4 & \geq & 0 \\ L_4) & 5y-3x & \leq & 15 \end{array}$$

SOLUCIÓN

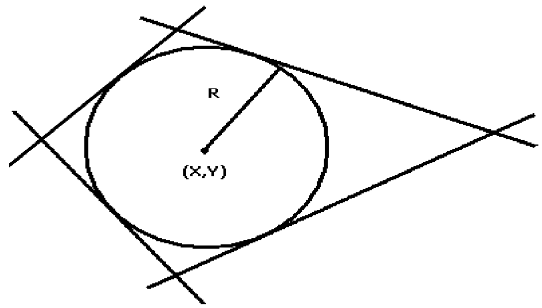


Figure 6: Círculo Inscrito en Polígono

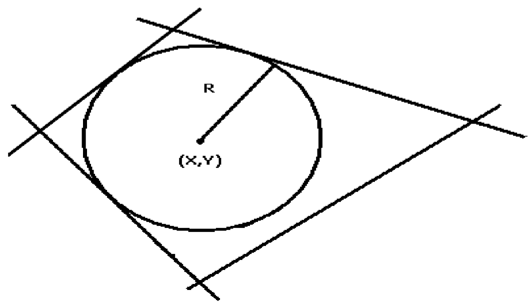


Figure 7: Círculo Inscrito en Polígono

El objetivo del modelo es maximizar el área de un circulo inscrito en el poliedro definido por las rectas dadas. Ahora bien, como para determinar una circunferencia es necesario conocer su centro y su radio, se definen las siguientes variables del modelo:

(x_0, y_0) = Coordenadas del centro de la circunferencia
R = Radio de la circunferencia

La Figura 6 muestra en términos generales la situación deseada, sin embargo hay que notar que no necesariamente las cuatro rectas deben ser tangentes a la circunferencia, como se aprecia en la Figura 7.

Ahora bien, no importando cuáles sean las rectas, el centro de la circunferencia buscada debe estar dentro del dominio definido originalmente por las desigualdades, y el radio debe ser, a lo más, igual a la distancia entre el centro de la circunferencia y cada una de las rectas. Para encontrar esta distancia mínima empleamos

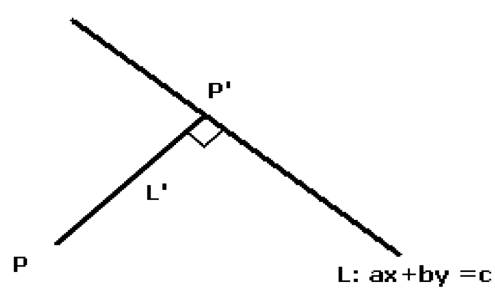


Figure 8: Distancia entre P y P'

el hecho que la menor distancia entre un punto y una recta esta dada por la proyección perpendicular del punto sobre la recta. Empleando la Figura 8, expresamos la mínima distancia entre P y P' por (22), y con ella encontramos la distancia desde el centro de la circunferencia a cada una de las rectas que forman el polígono.

$$d\left((x_0, y_0)\,(x_p, y_p)\right) = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{22}$$

Si no recuerda la expresión dada en (22) la puede deducir encontrando el punto de intersección de las rectas perpendiculares (Figura 8) y luego aplicando la definición de distancia euclidiana entre P y P'.

Recordemos que el objetivo del problema es maximizar el área del circulo de radio R, sujeto a las restricciones de que su centro se encuentre al interior del poligono y que el radio no supere la distancia desde el centro a cada una de las rectas. Esto nos permite obtener el siguiente modelo de optimización:

$$P) \quad Max \quad \pi R^2$$

$$\begin{array}{rcl}
3x_0 + 4y_0 & \leq & 24 \\
5x_0 - 2y_0 & \leq & 30 \\
y_0 + 4 & \geq & 0 \\
-3x_0 + 5y_0 & \leq & 15 \\
\dfrac{|3x_0 + 4y_0 - 24|}{5} & \geq & R \\
\dfrac{|5x_0 - 2y_0 - 30|}{\sqrt{29}} & \geq & R \\
|y_0 + 4| & \geq & R \\
\dfrac{|-3x_0 + 5y_0 - 15|}{\sqrt{34}} & \geq & R \\
x_0, y_0 & \in & \mathbb{R} \\
R & \geq & 0
\end{array}$$

Problemas Propuestos

1. ¿Cómo modificaría el modelo si ahora se le pide encontrar las esfera de mayor volumen dentro de un poliedro acotado por cuatro planos?

2. Considere ahora el caso en que lo que se desea encontrar es el polígono regular de mayor área entre estas cuatro rectas. Además debe cumplirse que el número de lados de éste polígono debe ser a lo más 20 y a lo menos 3.

2.18 Instalación de Pozo en Granja Agrícola

La señora Bernardita vive en una granja en Olmué (esta granja es rectangular y mide 200 metros por 180 metros). Para subsistir, desde hace años ha mantenido en la granja algunos cultivos y algunos animales. Ella tiene un huerto en que cultiva hortalizas, legumbres y algunos cereales. Además tiene un sector avícola con pollos y patos, tiene una chanchería, unos pocos caballos y algunas vacas. Todos ellos tienen su lugar bien definido en la granja, pues Bernardita es sumamente prolija y ordenada. Además en la granja hay dos casas, la de ella y una cabaña de invitados que la usan sus nietos cuando la visitan en verano.

Actualmente la macrozona central de Chile se ha visto afectada por una cruda sequía. Por este motivo, la granja de Bernardita se ha visto en serios aprietos pues su principal fuente de agua se ha visto muy reducida y es posible que en las próximas semanas llegue a cortarse. Afortunadamente, para evitar esta catástrofe, ella siempre ha sabido que bajo su predio existe una napa freática con agua suficiente para no tener que depender

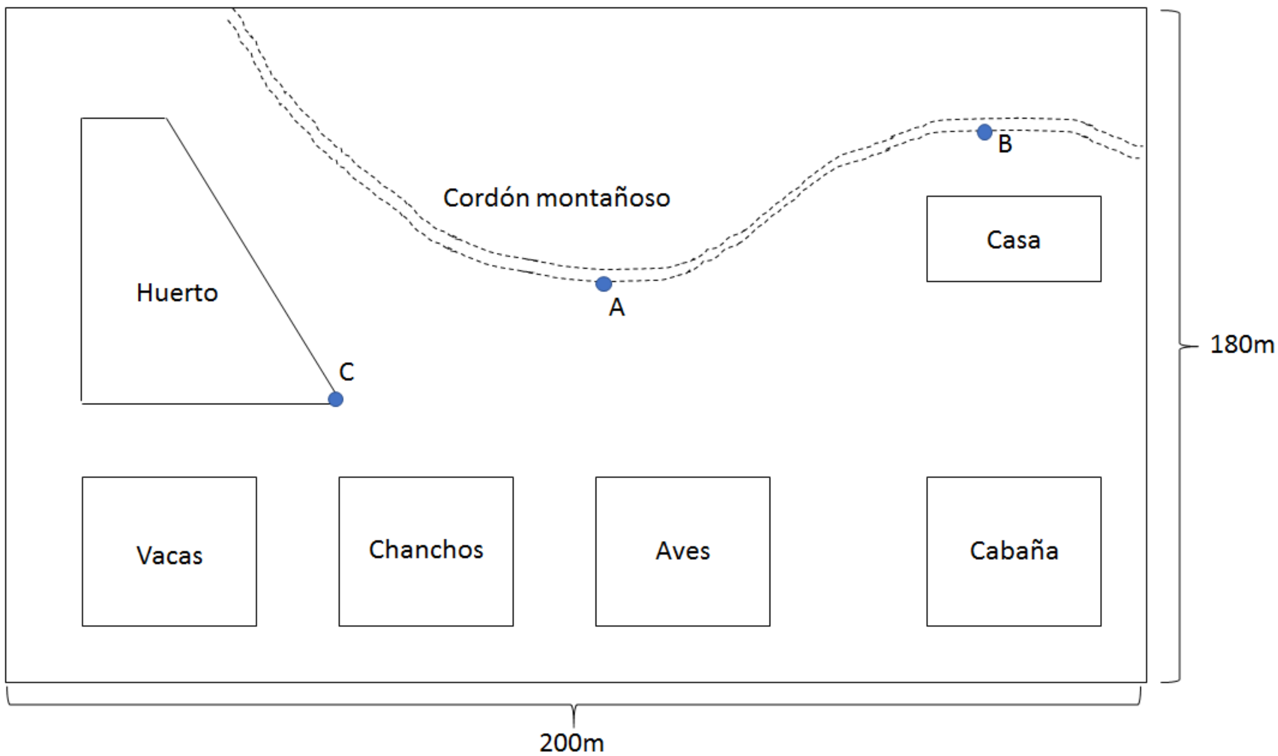


Figure 9: Plano de la Granja

del antiguo suministro. Ella tiene dos nietos que podrían ayudarle a solucionar su problema, uno experto en geografía e hidrología y el segundo (usted) experto en investigación operativa. El primer nieto ya ha hecho su trabajo y ha determinado que efectivamente la napa existe y que para los requerimientos de la granja, el pozo debiera ubicarse a una distancia no mayor que 45 metros del centro de la napa. El centro de la napa está a 150 metros del límite oeste y a 70 metros del límite sur. Afortunadamente en ese sector no hay construcciones.

La Figura 9 muestra un plano de la granja.

Observe que al norte del terreno útil la granja limita con un sector montañoso que se introduce en el predio (el límite pasa por los puntos A y B). El pozo no puede ser instalado en ese sector.

Cuando no había problemas de sequía, el agua llegaba por pequeños arroyos y canales a cada sector que lo requería. Ahora, cuando se instale el pozo, el agua deberá ser trasladada a mano hasta cada sector (hasta los animales, las casas, y el huerto). Para el huerto agrícola se utilizará un sistema automático de regadío por goteo mediante una bomba instalada en el punto C. Es por este motivo que su abuela Bernardita le pide que decida dónde cavar el pozo, pero de modo que la caminata total diaria (promedio en el año) sea mínima.

Ella le informa a usted que los chanchos requerirán 20 *lts* en la mañana de cada día, que las aves requerirán 10 *lts* en la mañana y 5 en la tarde, las vacas y caballos requieren 70 en verano y 50 en el resto del año. La casa de ella requeriría rellenar 150 *lts* cada día (a distintas horas) y la cabaña de los invitados 80 *lts* durante enero y febrero. Para el huerto se requieren 200 *lts* diarios.

Además ella le cuenta que para este traslado ella utiliza un balde de 5 *lts*, es decir en cada viaje puede transportar como máximo 5 *lts*.

La ubicación del bebedero de cada tipo de animal, la ubicación de las casas y de tres puntos que pueden ser de utilidad, se entregan en la Tabla 30, en referencia a su distancia con el límite oeste y sur de la granja.

Escriba un problema de optimización que permita determinar dónde ubicar el pozo, de acuerdo a la petición de su abuela y acorde a las restricciones expresadas. Haga todos los supuestos que estime convenientes.

SOLUCIÓN

	Oeste	Sur
Vacas	60	40
Chanchos	120	35
Aves	150	35
Casa	190	110
Cabaña	190	10
A	120	60
B	190	130
C	100	60

Table 30: Ubicación en la Granja

	Lts/Año (cálculo)	Lts/Año (resultado)	N^o de viajes
Vacas	$30 \cdot (70 \cdot 3 + 50 \cdot 9)$	19.800	3.960
Chanchos	$30 \cdot 12 \cdot 20$	7.200	1.440
Aves	$30 \cdot 12 \cdot (10 + 5)$	5.400	1.080
Casa	$30 \cdot 12 \cdot 150$	54.000	11.880
Cabaña	$30 \cdot 2 \cdot 80$	4.800	960
A			
B			
C (huerto)	$30 \cdot 12 \cdot 200$	72.000	14.400

Table 31: Litros Anuales

El objetivo del modelo es determinar la ubicación del pozo, de modo de minimizar el transporte de agua que debe hacerse para satisfacer los requerimientos anuales promedio de la granja, por lo que emplearemos como variables de decisión las coordenadas de dicho punto, esto es:

$x =$ Distancia al costado Oeste de la granja, del pozo, en metros
$y =$ Distancia al costado Sur de la granja, del pozo, en metros

Para estimar la cantidad de agua anual se supondrán todos los meses de 30 días y que el verano dura exactamente tres meses, por otro lado supondremos que el punto C recibe el agua destinada al huerto, la cual desde ahí se reparte hacie el resto de la plantación. Se supone además que cada en cada viaje se llevará el valde lleno (5 lts) y que los viajes son directos, esto es, no se reparte el agua transportada entre dos lugares.

Empleando los datos del problema y los supuestos establecidos, podemos calcular los requerimientos anuales de agua a cada uno de los puntos de interés, en litros, además del número de viajes asociados a satisfacer cada necesidad de la granja, considerando que traslada 5 lts en cada viaje. Estos valores se presentan en la Tabla 31..

Por otro lado para estimar la ecuación del monte, notámos que tiene un cambio de convexidad dentro del predio por lo que resulta razonable aproximarlo por un polinomio cúbico, sabemos además que los puntos A(120,60) y B(190,130) pertenecen a la curva, y que ésta alcanza en ellos su mínimo y máximo respectivamente. Sea $y(x)$ la función buscada, e $y'(x)$ su derivada (expresiones (23) y (24)) reemplazando los puntos conocidos obtenemos el sistema de 4 ecuaciones y 4 incógnitas dado en (25) cuya solución nos permite expresar la ecuación del monte dada en (26).

$$y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \tag{23}$$
$$y'(x) = 3ax^2 + 2bx^{'} + c \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
y(120) &= a120^3 + b120^2 + c120 + d = 60 \\
y(190) &= a190^3 + b190^2 + c190 + d = 130 \\
y'(120) &= 3a120^2 + 2b120 + c = 0 \\
y'(190) &= 3a190^2 + 2b190 + c = 0 \qquad (25)
\end{aligned}$$

$$y + 4,0816 \cdot 10^{-4}x^3 - 0,1898x^2 + 27,9184x - 1.382,449 = 0 \qquad (26)$$

Ahora bien, el objetivo del modelo es minimizar el traslado total de agua, por lo que la función objetivo corresponde a la minimización de la suma de la distancia del pozo a cada lugar requerido multiplicado por el número de viajes necesarios a dicho lugar. Esta función objetivo estará sujeta a las restricciones de que el pozo debe estar en un radio menor a 50 m alrededor de la napa ubicada en (150,70), que el pozo no se puede ubicar en el monte, lo que es equivalente a decir que el pozo debe quedar en el mismo semiplano en que se encuentra el origen, de acuerdo a la ecuación del monte dada en (26) y que el pozo debe estar al interior del predio.

De acuerdo a lo anterior, obtenemos el siguiente modelo de optimización:

$$\begin{aligned}
P) \quad Min \quad & 3960\sqrt{(x-60)^2+(y-40)^2} + 1440\sqrt{(x-120)^2+(y-35)^2} + \\
& 1080\sqrt{(x-150)^2+(y-35)^2} + 11880\sqrt{(x-190)^2+(y-110)^2} + \\
& 960\sqrt{(x-190)^2+(y-10)^2} + 14400\sqrt{(x-100)^2+(y-60)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-150)^2+(y-70)^2} &\leq 50 \\
y + 4,0816 \cdot 10^{-4}x^3 - 0,1898x^2 + 27,9184x - 1.382,449 &\leq 0 \\
0 &\leq x \leq 200 \\
0 &\leq y \leq 180
\end{aligned}$$

Problemas Propuestos

1. Considere el caso en que puede instalar más de un pozo, pero por problemas de dinero, puede instalar como máximo tres. Decida la ubicación de esos pozos, su número, y la forma de llevar el agua a cada lugar.

2. Considere que se le entrega una nueva tecnología cuyo costo por llevar un litro de agua esta dado por la función $f(d) = d^2 - 35d$ donde d es la distancia de traslado. Considere que Ud cuenta con los medios para adquirirla sin problema, así que su problema es decidir en que partes del traslado es útil (notar que no siempre $f(d)$ es mayor que el costo normal). Suponga que esta tecnología sólo puede utilizarse para distancias mayores que 35 metros.

2.19 Campo Eléctrico al Interior de una Esfera

Suponga que al interior de una esfera de un metro de radio hay n partículas ubicadas en puntos que usted conoce y cada una con una carga eléctrica q_i. Estas cargas pueden ser negativas o positivas. Usted está interesado en conocer el punto al interior de la esfera en que el campo eléctrico resultante es de menor intensidad. El punto que usted escoja, debe estar alejado de cada una de las cargas por lo menos 5 centímetros. Formule un modelo de optimización que pueda ser utilizado para resolver este problema. Comente acerca de la convexidad del problema modelado.

Hint: La ley de Coulomb dice que la interacción eléctrica entre dos partículas cargadas en reposo, o con un movimiento relativo muy lento, es proporcional a sus cargas y al inverso del cuadrado de la distancia entre ellas, y su dirección se halla a lo largo de la línea que une las dos cargas.

Es decir, la ley de Coulomb puede expresarse como

$$F_{ij} = K\frac{q_i q_j}{r_{ij^2}}$$

Donde k es una constante de valor $9{\cdot}10^9$ aproximadamente. Decimos que existe un campo eléctrico en cualquier región donde una carga eléctrica experimente una fuerza. La fuerza se debe a la presencia de otras cargas $q_1, q_2, q_3 ... q_n$ en dicha región. Por ejemplo, una carga q colocada en una región donde hay otras cargas, experimenta una fuerza que es la suma de las fuerzas asociadas a cada carga y decimos que en la región existe un campo eléctrico producido por las cargas $q_1, q_2, q_3 ... q_n$. Puesto que la fuerza que cada carga $q_1, q_2, q_3 ... q_n$ produce sobre la carga q es proporcional a ésta, la fuerza resultante también es proporcional a la carga q. Así, la fuerza sobre una partícula colocada en un campo eléctrico es proporcional a la carga de la partícula.

La intensidad del campo eléctrico e en un punto es igual a la fuerza por unidad de carga en dicho punto. Por tanto, $E = \frac{F}{q}$

Note que tanto la fuerza como el campo eléctrico son vectores.

SOLUCION

Para efectos de modelación se considerará la esfera en un sistema rectangular centrada en el origen, y en función de este sistema , emplearemos la siguiente notación para los datos del problema:

$R =$ Radio de la esfera
$(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0) =$ Coordenadas del centro de la esfera
$(x_i, y_i, z_i) =$ Coordenadas de la partícula i, $i = 1, ..., n$
$q_i =$ Carga de la partícula i.

El objetivo del modelo es determinar el punto de la esfera con un campo eléctrico de menor intensidad, para ello se emplearan como variables de decisión las coordenadas de dicho punto, esto es:

$(x, y, z) =$ Coordenadas del punto buscado

Es necesario expresar el campo eléctrico E en función de las coordenadas (variables) definidas. Considerando la definición de campo eléctrico y que la distancia (módulo y dirección) entre el punto buscado y la partícula i se obtienen empleando (27), el campo eléctrico corresponde a la expresión dada en (28).

$$\begin{aligned} |r_{ij}| &= \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2} \qquad (27) \\ \hat{r}_i &= \frac{(x-x_i) + (y-y_i) + (z-z_i)}{|r_{ij}|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{F}{q_j} = \frac{kq_iq_j}{r_{ij^2}} \cdot \frac{1}{q_j} \cdot \widehat{r}_{ij} = \frac{kq_i}{r_{ij^2}}\widehat{r}_{ij} \\ E_i(x,y,z) &= \frac{kq_i}{\left(\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}\right)^2} \cdot \widehat{r}_i \\ E_i(x,y,z) &= \frac{kq_i\left((x-x_i)\widehat{i} + (y-y_i)\widehat{j} + (z-z_i)\widehat{k}\right)}{\left((x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2\right)^{3/2}} \qquad (28) \end{aligned}$$

El objetivo del modelo es minimizar la suma de los módulos de todos los E_i, como se aprecia en la expresión (29), donde se a empleado la notación $r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$. Esta función objetivo debe estar sujeta a las restricciones de que el punto debe estar alejado de cada una de las cargas en por lo menos 5 cm (es decir, distancia entre x y x_i mayor o igual a 0.05 m) y que el punto debe estar al interior de la esfera (de radio 1 m). Con estas consideraciones se obtiene el siguiente modelo de optimización:

	Producción (hrs. hombre / unidad)			Trabajadores	
	Refrigerador	Lavadora	Cocina	Cantidad	Sueldo ($)
Trabajador tipo 1	2	2	4	150	200.000
Trabajador tipo 2	1	2	0	70	300.000
Trabajador tipo 3	3	4	2	150	150.000
Trabajador tipo 4	5	2	2	200	150.000

Table 32: Datos Negociacion Colectiva

$$P) \quad Min \quad \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{kq_i(x-x_i)^2}{r_{i^3}}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{kq_i(y-y_i)^2}{r_{i^3}}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{kq_i(z-z_i)^2}{r_{i^3}}\right)^2 \tag{29}$$

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &\leq 1 \\ (x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2 &\geq 0.05^2 \quad \forall i \end{aligned}$$

Se puede notar que las restricciones definen como dominio a una esfera con ”huecos” dentro, que es un dominio claramente no convexo ya que es fácil elegir dos puntos cuya combinación lineal corresponda a un ”hueco”.

Problemas Propuestos

1. ¿Cómo modificaría la modelación si entre las ‘n’ partículas usted tiene la posibilidad de cambiar de lugar ‘m’ de ellas, manteniendo las otras fijas. Notar que las partículas que Ud. puede mover son fijas, esto es, Ud. no debe decidir cuáles partículas mover.
2. Considere ahora el caso contrario, esto es, si fijando un punto dentro de la esfera, usted debe ahora ubicar las ‘n’ partículas de tal modo que el campo eléctrico sea mínimo

2.20 Negociación Colectiva en Empresa de Armado de Línea Blanca

Usted trabaja en una empresa de armado de línea blanca que está a punto de enfrentar una negociación colectiva con el sindicato que agrupa a todos los empleados de la fábrica. El gerente general le ha designado como el encargado de representar los intereses del directorio en esta delicada instancia, y para eso, le ha entregado la siguiente información que él cree que podría serle útil para la negociación.

- Actualmente la empresa produce tres productos: refrigeradores, lavadoras y cocinas, y para esto se requieren cuatro tipos de trabajadores: 1, 2, 3 y 4. Además para producir una unidad de cada tipo de producto se requiere un cierto número de horas hombre de cada tipo (ver Tabla 32).
- El precio de venta de cada producto es \$800.000, \$200.000 y \$140.000 respectivamente.
- El costo de producción de cada unidad sin considerar sueldos de los trabajadores ni los costos administrativos, fijos y financieros de la empresa (sólo los insumos y costos variables directamente atribuibles a cada unidad) es de \$200.000, \$60.000 y \$50.000 respectivamente.
- El departamento de Marketing le informa que la demanda por los productos es aproximadamente plana durante el año (no hay estacionalidades) y se estima su valor máximo en 2.000 refrigeradores, 3.000 lavadoras y 4.000 cocinas mensuales.
- La jornada laboral actualmente es de diez horas diarias por turno, incluyendo una hora para colación (nueve horas netas de trabajo). Se trabaja de lunes a viernes, 52 semanas al año, pero cada trabajador tiene derecho a tres semanas de vacaciones. Además producto de los feriados debe descontarse una semana hábil adicional.

- El número actual de operadores se encuentra en la Tabla 32. Sin embargo la empresa está pensando reestudiar el número de trabajadores, pues no tiene seguridad de que el tamaño de planta sea óptimo. Como usted será el encargado de la negociación, podrá además definir el tamaño de planta óptimo de la empresa en los próximos años, si así lo requiriese.
- El sueldo mensual de los operadores se encuentra en la Tabla 32.
- La planta no está diseñada como para tener demasiados trabajadores, por lo que se estima que el número máximo de trabajadores de cada tipo que podrían trabajar simultáneamente está restringida por la capacidad de los galpones. El galpón donde trabajan los operadores tipo 1 tiene una capacidad para 200 operarios. El de los de tipo 2, para 100 operarios. Y los operarios de tipo 3 y tipo 4 trabajan juntos en un galpón para 450 operarios máximo.
- El costo fijo de la empresa (independiente de los trabajadores y de la producción, como por ejemplo arriendo, sueldo de administrativos, etc.) se estima en \$100.000.000 anuales.

Ha pasado un tiempo y usted ha encontrado una respuesta sumamente dura del sindicato. De hecho, las comunicaciones se han roto e incluso ha comenzado un paro que es muy costoso para la empresa.

Usted se reúne con el presidente del sindicato quien le señala que él también quisiera terminar con la huelga, pero que para detenerla necesita mostrar a sus compañeros algún tipo de logro de parte del sindicato para poder validarse como dirigente y no volver con las manos vacías. Específicamente le dice lo siguiente: "Dentro del pliego de peticiones que nosotros hemos hecho a la empresa, hay algunos ítems que son más fáciles de cumplir para ustedes, mientras que hay otros más difíciles. Yo no sé cuáles son los fáciles y cuáles los difíciles, porque no manejo toda la información, pero quiero ofrecer a mi gente al menos 25 puntos sindicales". Además le señala los siguientes requerimientos con sus respectivos puntos de popularidad en el sindicato.

1. Aumentar la hora de colación sin alargar la jornada de 10 horas. Por cada 10 minutos adicionales se considerarán 3 puntos sindicales.
2. Que se otorgue un bono de fin de año igual para cada trabajador. Por cada \$5.000 de bono por trabajador, se considerarán 2 puntos sindicales.
3. Mejorar la guardería infantil. Para esto se adjunta un presupuesto de mejora que indica que costaría \$5.000.000. Si se decide hacerlo, se considerarán 15 puntos sindicales.
4. Los trabajadores desean participar de las utilidades de la empresa. Por cada 1% de participación que se otorgue, se considerarán 20 puntos sindicales.

Usted comprende el punto de vista del presidente del sindicato y le indica que estudiará su oferta. Para esto modele el problema de modo de determinar la producción y tamaño de planta óptima satisfaciendo los requerimientos del presidente del sindicato de modo de que el beneficio sea lo más alto posible para la empresa. Su modelación debe ser muy clara y eficiente.

Hint: Puede ser clarificador modelar primero la optimización de la planta sin los requerimientos del sindicato y luego ver cómo incorporarlos.

SOLUCION

Consideremos las siguientes variables de decisión:
x_1 : Producción anual de refrigeradores
x_2 : Producción anual de lavadoras
x_3 : Producción anual de cocinas
y_j : Número de trabajadores del tipo j
z : Número de horas adicionales de colación
b : Número de bonos de \$5.000 por cada trabajador
g : Variable binaria para definir si se construye o no la guardería infantil
u : u% de las utilidades se repartirán a los empleadores

De esta forma podemos construir el siguiente modelo. La función objetivo es maximizar la siguiente utilidad:

$$\begin{aligned} Utilidad &= 600.000x_1 + 140.000x_2 + 90.000x_3 - \\ & \sum\nolimits_{j=1}^{4}(12s_j + 5.000b)y_j - \\ & 5.000.000g - 100.000.000 \end{aligned}$$

donde s_j denota el sueldo mensual por cada trabajador del tipo j. Debido a que la demanda anual es conocida no es conveniente producir lo que no se va vender. Así obtenemos las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_1 \leq 24.000 \\ 0 &\leq x_2 \leq 36.000 \\ 0 &\leq x_3 \leq 48.000 \end{aligned}$$

Las horas disponibles h_j de trabajadores tipo j están dadas por las horas netas por día (incluyendo tiempo adicional de colación requerido por el sindicato), los días de trabajo por semana, y las semanas de trabajo al año.

$$h_j = (10 - 1 - z) \cdot 5 \cdot (52 - 3 - 1)y_j \qquad \forall j = 1, \ldots, 4$$

Las horas requeridas para producción no deben superar las horas disponibles:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq h_1 \\ x_1 + 2x_2 &\leq h_2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq h_3 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq h_4 \end{aligned}$$

El personal requerido no puede exceder los límites de los galpones:

$$\begin{aligned} y_1 &\leq 200 \\ y_2 &\leq 100 \\ y_3 + y_4 &\leq 450 \end{aligned}$$

El sindicato debe obtener al menos 25 puntos sindicales:

$$18z + 2b + 15g + 20u \geq 25$$

Finalmente, las variables deben satisfacer la restricción de no-negatividad, y de integralidad en el caso de g:

$$\begin{aligned} x_i, y_j, x, b, u &\geq 0 \\ g &\in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Problema Propuesto

Cómo cambia el modelo si se incorpora un costo de despido y un costo de contrato para poder modificar la dotación de personal actual.

2.21 Planificación de Producción Agrícola

Sin duda que los acontecimientos ocurridos en este último tiempo en materia económica (pactos bilaterales, MERCOSUR, NAFTA, etc.) han provocado gran inquietud en el mundo agrícola. Esto se debe a que los agricultores pronostican un notable descenso de sus ingresos a futuro, ya que no podrán competir con los agricultores de países vecinos, por las enormes ventajas comparativas con que ellos cuentan (bajos costos de producción, subsidios estatales, grandes extensiones de terreno, condiciones naturales favorables, etc.). Debido a esto uno de los principales problemas a enfrentar es mejorar la productividad, para ello se debe comenzar por aplicar tecnología de punta que mejore los cultivos y que abarate los costos. Paralelamente a esto se deben optimizar los recursos con que cuenta cada agricultor según sus posibilidades.

Comúnmente los agricultores se ven enfrentados al problema de decidir como maximizar sus utilidades en un determinado negocio.

Consideremos un agricultor de la zona central de Chile el cual en una temporada determinada, va a efectuar una siembra. Para esto cuenta con un capital inicial, una extensión de terreno fija y cierto número de cultivos determinados por las condiciones naturales de la zona.

El problema consiste fundamentalmente en maximizar la utilidad de la siembra.

Por las condiciones naturales de la zona el agricultor ha elegido dentro de todas sus posibilidades 3 cultivos: papas, trigo y avena, pero desconoce el número de Hectáreas a sembrar de cada variedad, y cuánto fertilizante (kgs. por Hectárea) usar para obtener la mayor ganancia. Hemos supuesto que el fertilizante es una mezcla de distintos compuestos y se puede usar indistintamente en los tres tipos de cultivo.

Además hay que considerar lo siguiente:

- El agricultor dispone de un crédito por un máximo de $40.000.000, para efectuar el negocio, es decir todos los gastos involucrados desde la siembra hasta la comercialización de los productos.
- La superficie total a sembrar son 100 Hectáreas.
- La cantidad de fertilizante a usar por hectárea en cada cultivo tiene un rango dado por estudios agropecuarios. Para la papa se recomienda usar entre 700 y 3000 Kgs. de fertilizante por Hectárea. En el caso del trigo se debe usar entre 500 y 2500 Kgs. de fertilizante por Hectárea. Finalmente para la avena la cantidad de fertilizante deberá oscilar entre 600 y 2000 Kgs. por Hectárea.
- Por problemas de tiempo para el manejo de las siembras, el agricultor ha calculado que las hectáreas a sembrar por cada cultivo no pueden exceder, en el caso de la papa las 20 Hectáreas, 60 Hectáreas en trigo y para la avena las 50 Hectáreas.

También hay que considerar los siguientes aspectos:

Compra de fertilizante: La empresa encargada de vender el fertilizante posee una tabla de precios, la cual indica que, a mayor volúmen de compra el precio por unidad disminuye. Esta función la denominaremos F(x), donde x es la cantidad de kgs. a comprar.

Producción por Hectárea: Es lógico pensar que si incorporamos mayor cantidad de fertilizante a la tierra los rendimientos son mejores. Para ello hemos modelado esta característica mediante una función lineal y creciente. Para el caso de la papa esta función se puede escribir como: $F(Y_1) = 20Y_1 + 14000$. Para el trigo la función corresponde a: $G(Y_2) = 5Y_2 + 2000$. Finalmente la curva para la avena esta dada por: $H(Y_3) = \frac{20}{3}Y_3 + \frac{4000}{3}$. Estas funciones cumplen con el propósito dentro de los márgenes para el fertilizante de cada cultivo.

Precio de venta: El agricultor vende sus productos en un pequeño poblado cerca de su predio. El sabe, gracias a su experiencia, que el precio de venta disminuye con el aumento de la cantidad ofrecida de un producto. Para esto el supone que todo lo que produce, lo venderá. Además, ha determinado unas funciones que entregan el precio a cobrar dada la producción de ese año. Para el caso de la papa esta función corresponde a: $A(x) = -\frac{x}{54000} + 190$, teniendo presente que la recta Precio v/s Producción no puede sobrepasar el límite dado por el presupuesto de obtener una producción tal que se hubiese sembrado toda la superficie con un mismo cultivo (papas, trigo, avena). De la misma manera las funciones que representan la situación en el caso del trigo y la avena son: $B(x) = -\frac{x}{10000} + 98$; $C(x) = -\frac{x}{15000} + 79$ respectivamente. Notar que x corresponde a la cantidad producida de cada cultivo.

Gastos:

- Gastos variables: corresponden a maquinaria, mano de obra, transporte, manejo de cultivo, etc. Este tipo de gasto es por unidad de Hectárea y depende del tipo de cultivo.

Cultivo	Gasto Variable	Gasto Fijo
Papas	\$850.000	\$250.000
Trigo	\$220.000	\$100.000
Avena	\$150.000	\$100.000

Table 33: Gastos para cada Cultivo

- Gastos fijos: Son gastos independientes del número de Hectáreas sembradas de cada cultivo. En la Tabla 33 se presentan los gastos para cada cultivo.

SOLUCIÓN

El objetivo del problema es optimizar el proceso productivo del agricultor, para esto se debe determinar si sembrar o no cada cultivo, cuánto sembrar de cada cultivo y cuánto fertilizante poner en cada Hectárea de cultivo, por lo tanto, emplearemos las siguientes variables de decisión:

$x_i =$ Número de Hectáreas a sembrar del cultivo i, $i = \{1 : Papa, 2 : Trigo, 3 : Avena\}$
$y_i =$ Kilógramos de fertilizante con que se abonará cada Hectárea de cultivo i.
$z_i = \begin{cases} 1 & \text{si se siembra el cultivo } i \\ 0 & \text{si no se siembra el cultivo } i \end{cases}$
En ésta declaración queda claro que, por definición, las variables z_i y x_i son dependientes entre sí. La importancia de declarar z_i radica en que para incorporar en la función objetivo los costos fijos debo tener alguna forma de que ellos se incluyan sólo si el cultivo es sembrado.

El objetivo del modelo es maximizar la utilidad del agricultor, como la diferencia entre beneficios y costos. El único beneficio es el que recibe por concepto de ventas, y dado que todo lo que se produce se vende, éste es igual a lo dado en (30).

$$\left[190 - \frac{x_1}{54.000}\right] x_1 \left(20y_1 + 14.000\right) + \left[98 - \frac{x_2}{10.000}\right] x_2 \left(20y_2 + 2.000\right) + \left[79 - \frac{x_3}{15.000}\right] x_3 \left(\frac{20}{3}y_3 + \frac{400}{3}\right) \tag{30}$$

Por otro lado, los costos consideran costos fijos y costos variables por hectárea de cultivo (Tabla 33), además de los gastos por fertilizante. Éstos últimos se pueden expresar por la función $F(x)$, donde x será el total de fertilizante comprado. De esta forma, la función objetivo corresponde a lo expresado en (31), la cual estará sujeta a restricciones de presupuesto, de un máximo de hectáreas por cultivo, de cotas para la cantidad de fertilizante por hectárea, de superficie máxima de cultivo, de no negatividad de las variables y de una restricción que relacione las variables x_i e y_i, de modo que x_i siempre sea cero si se decide no sembrar ese tipo de cultivo.

Considerando lo anterior, el modelo resulta ser:

$$\begin{aligned} P) \quad Max \quad & \left[190 - \frac{x_1}{54.000}\right] x_1 \left(20y_1 + 14.000\right) + \left[98 - \frac{x_2}{10000}\right] x_2 \left(20y_2 + 2.000\right) + \\ & \left[79 - \frac{x_3}{15.000}\right] x_3 \left(\frac{20}{3}y_3 + \frac{400}{3}\right) - 850.000x_1 - 220.000x_2 - 150.000x_3 - \\ & 250.000z_1 - 100.000z_2 - 100.000z_3 - F(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{array}{rcll}
\left[\begin{array}{c} 850.000x_1 + 220.000x_2 + 150.000x_3 + 250.000z_1 + \\ 100.000z_2 + 100.000z_3 + F(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \end{array}\right] & \leq & 40.000.000 & \\
0 & \leq & x_1 \leq 20 & \\
0 & \leq & x_2 \leq 60 & \\
0 & \leq & x_3 \leq 50 & \\
700 & \leq & y_1 \leq 3.000 & \\
500 & \leq & y_2 \leq 2.500 & \\
600 & \leq & y_3 \leq 2.000 & \\
x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 100 & \\
x_i(z_i - 1) & = & 0 & \forall i \\
z_i & \in & \{0,1\} & \forall i
\end{array}$$

Problemas Propuestos

1. ¿Cómo se modificaría el modelo en el caso en que al agricultor se le ofrece un préstamo, con un interés de un 50% anual? Considere que el límite mínimo de éste préstamo es de \$1.000.000 y el máximo de \$24.000.000.

2. Considere ahora el caso de una planificación a más largo plazo. Suponga que las tierras que son usadas un año deben descansar un número dado de años, dependiendo del cultivo, antes de poder ser ocupadas de nuevo. Suponga que éste período es de dos años para el trigo, tres años para la avena y un año para las papas. Asuma un horizonte de planificación de los cultivos de 20 años.

2.22 Abastecimiento de una empresa petrolera

En una empresa petrolera, el transporte de crudo (petróleo) desde los pozos petrolíferos hasta las refinerías debe realizarse, en ocasiones, compartiendo el medio de transporte. Este transporte se hace mediante oleoductos. La convención en la industria es que el volumen de crudo se mida en barriles.

En esta oportunidad, se desea transportar crudo desde tres pozos; A y B (que al transportar a la refinería, mezclan sus crudos en un mismo oleoducto) y C (que transporta a la refinería por un oleoducto independiente), donde finalmente todo se mezcla para dar origen a dos productos comerciales X e Y, que se venden en el mercado a 9 y 15 dólares por barril (barril también es la unidad de medida del petróleo). Los costos totales (incluidos los de transporte) desde A, B y C a la refinería son de 6, 16 y 10 dólares, por barril, respectivamente. Uno de los problemas que se debe manejar es que el petróleo contiene azufre, y la ley establece límites a las cantidades que puede haber en los productos finales. Específicamente, el producto X no puede contener más de 2,5% de azufre y el producto Y no puede contener más de 1,5% de azufre. Por otro lado, la proporción de azufre en cada uno de los petróleos que vienen de A, B y C es de 3%, 1% y 2%, respectivamente. Adicionalmente a esto, se sabe que las demandas por los productos finales son X e Y son de 100 y 200 millones de barriles, respectivamente, y eso es lo que debe producir la refinería.

Por razones comerciales, las compras de crudo desde los pozos debe ser de a barriles completos, es decir, no se puede comprar medio barril. Considere que no existen limitantes de capacidad en el transporte de crudo desde los pozos a las refinerías.

Establezca un modelo de optimización que permita abastecer la refinería de tal forma de maximizar el "flujo de caja" (diferencia entre los ingresos y costos).

SOLUCIÓN[29]

- Variables:

[29] Interrogación 1, 2013'2

- X_A: Barriles provenientes del pozo A.
- X_B: Barriles provenientes del pozo B.
- X_C: Barriles provenientes del pozo C.
- X_{ABX}: Mezclas con destino a producir X, mezclando barriles del pozo A y B.
- X_{ABY}: Mezclas con destino a producir Y, mezclando barriles del pozo A y B.
- X_{CX}: Barriles provenientes del pozo C para producir X.
- X_{CY}: Barriles provenientes del pozo C para producir Y.

- Función objetivo:

$$\max\ 9(X_{ABX} + X_{CX}) + 15(X_{ABY} + X_{CY}) - 6(X_A + 16X_B + 10X_C)$$

- Restricciones
  - Conservación de masas (flujos).

$$X_A + X_B = X_{ABX} + X_{ABY}$$
$$X_C = X_{CX} + X_{CY}$$

  - Restricción sobre el azufre.

$$\frac{\frac{0.03X_A+0.01X_B}{(X_A+X_B)}X_{ABX} + 0.02X_C}{(X_{ABX} + X_{CX})} \leq 0.025$$
$$\frac{\frac{0.03X_A+0.01X_B}{(X_A+X_B)}X_{ABY} + 0.02X_C}{(X_{ABY} + X_{CY})} \leq 0.015$$

  que se puede reescribir como:

$$0.03X_AX_{ABX} + 0.01X_BX_{ABX} + 0.02X_AX_{CX} + 0.02XBX_{CX} \leq 0.025(X_{ABX} + X_{CX}) \cdot (X_A + X_B)$$
$$0.03X_AX_{ABY} + 0.01X_BX_{ABY} + 0.02X_AX_{CY} + 0.02XBX_{CY} \leq 0.015(X_{ABY} + X_{CY}) \cdot (X_A + X_B)$$

  - Satisfacción de demanda.

$$X_{ABX} + X_{CX} = 100.000.000$$
$$X_{ABY} + X_{CY} = 200.000.000$$

  - Naturaleza de las variables.

$$X_A, X_B, X_C \in \mathbb{N}$$
$$X_{ABX}, X_{ABY}, X_{CX}, X_{CY} \geq 0$$

3 Modelos de Programación Entera

En este capítulo queremos abordar problemas de naturaleza combinatorial, que requieren para su modelamiento el uso de variables enteras. En algunos casos, estas variables enteras son binarias (sólo toman valores 0 ó 1) y se utilizarán para representar situaciones en qué uno debe decidir si desarrollar o no una cierta actividad, por ejemplo, instalar o no una fábrica en una cierta localidad, construir o no un cierto camino, etc. En otros casos, las variables enteras serán de tipo general (generalmente valores no negativos) y se usarán para representar cantidades enteras que no pueden ser aproximadas por variables continuas, como por ejemplo, número de turnos en un programa de producción, o número de camiones a utilizar en un proceso logístico.

Habitualmente estas variables enteras se utilizarán para representar relaciones lógicas entre distintos elementos del problema en cuestión; por ejemplo, que para realizar un cierto proyecto se requiere que se lleven a cabo al menos dos sub-proyectos de un cierto conjunto. La modelación matemática de estas relaciones lógicas no es un proceso natural, como sí ocurre en muchos de los modelos de programación lineal continua. Por esto, el modelamiento en estos casos es un proceso más sofisticado y complejo.

En muchos de los ejemplos que se presentan a continuación los modelos también incorporarán variables continuas; estos modelos se denominan de programación entera mixta.

Aunque en este libro no abordamos cuestiones algorítmicas, conviene comentar que todos los modelos de programación entera que se resuelven en este capítulo, tienen una estructura lineal, debido a que los algoritmos más eficientes para resolverlos requieren de esta condición. En este sentido, pueden darse situaciones en que el aspecto del problema a abordar tiene una estructura no lineal, pero que debe ser formulada en base solamente a relaciones lineales entre las variables. Esto representará en algunos casos un esfuerzo de modelamiento no menor.

3.1 Servicio de Internet

Los proveedores de servicio de Internet (ISPs) han comenzado un proceso progresivo de migración hacia redes de datos usando fibra óptica para sus clientes domiciliarios y empresariales.

Como parece un buen negocio, una nueva empresa (Casta Broadband) quiere entrar en el mercado, diseñando su propia red de datos basada en fibra óptica.

La estructura de la red de Casta Broadband tendrá una conexión de fibra desde cada cliente $i \in C$, hasta un concentrador de conexiones j, cuyas ubicaciones deberán determinarse de entre un conjunto de lugares posibles L.

Puede instalarse más de un concentrador en cada ubicación, hasta un máximo de R_j concentradores en la ubicación $j \in L$.

El cliente $i \in C$ requiere manejar un ancho de banda B_i. Los concentradores tienen un ancho de banda máximo que pueden manejar desde los clientes, denotada K. Todos los clientes en C deben quedar conectados a un concentrador.

Todas las ubicaciones de concentradores estarán conectadas entre si, de instalarse al menos un concentrador y de existir un ducto que los comunique, para darle mayor confiabilidad al sistema. El conjunto de pares de ubicaciones para concentradores que están comunicados entre sí forman el conjunto $P \subset L \times L$.

Los datos viajarán por la red de comunicaciones formada por los enlaces cliente-concentrador, y entre concentradores, hasta un punto central, que tiene acceso a internet. La ruta de los datos en la red no son relevantes en esta etapa de la planificación.

La utilización de una ubicación $j \in L$ para concentradores implica un costo fijo F_j, mientras que la instalación de un concentrador tiene un costo unitario H. La conexión entre un cliente $i \in C$ y el concentrador ubicado en $j \in L$ tiene un costo c_{ij}. Por otra parte, la conexión de dos ubicaciones de concentradores en los lugares $k, m \in L : (k, m) \in P$ tiene un costo d_{km}.

Por último, se ha determinado que no pueden ubicarse concentradores muy cercanos entre sí. Por esto, se ha determinado un conjunto M de pares de ubicaciones donde no pueden ubicarse concentradores simultáneamente.

Formule un modelo de programación lineal entera que determine la ubicación y cantidad de los concentradores y las conexiones a realizar entre clientes y éstos, de tal forma de minimizar el costo total de instalación.

SOLUCIÓN[30]

Variables de decisión

- $W_{km} = \begin{cases} 1, \text{si se conectan las ubicaciones para concentradores } k \in L \text{ y } m \in L : (k,m) \in P \\ 0, \text{otro caso} \end{cases}$
- $X_{ij} = \begin{cases} 1, \text{si se conecta el cliente } i \in C \text{ con un concentrador ubicado en } j \in L \\ 0, \text{otro caso} \end{cases}$
- $Y_j = \begin{cases} 1, \text{si se localiza al menos un concentrador en la ubicación } j \in L \\ 0, \text{otro caso} \end{cases}$
- $Z_j =$ número de concentradores a instalar en la ubicación $j \in L$.

Función objetivo

$$\min \sum_{j \in L} F_j Y_j + \sum_{j \in L} H Z_j + \sum_{i \in C} \sum_{j \in L} c_{ij} X_{ij} + \sum_{(k,m) \in P} d_{km} W_{km}$$

Restricciones

- Asignación única de clientes a ubicaciones de concentradores.

$$\sum_{j \in L} X_{ij} = 1, \ \forall i \in C$$

- Cantidad de concentradores a localizar.

$$Z_j \leq R_j Y_j, \ \forall j \in L$$

- Capacidad de los concentradores instalados.

$$\sum_{i \in C} B_i X_{ij} \leq K Z_j, \ \forall j \in C$$

- Evitar conectar si no hay concentradores instalados.

$$W_{km} \leq Y_k, \ \forall (k,m) \in P$$

$$W_{km} \leq Y_m, \ \forall (k,m) \in P$$

- Conectar ubicaciones donde existan concentradores.

$$W_{km} \geq Y_k + Y_m - 1, \ \forall (k,m) \in P$$

- Ubicaciones prohibidas

$$Y_p + Y_q \leq 1, \ \forall (p,q) \in M$$

- Naturaleza de las variables de decisión.

$$W_{km} \in \{0,1\}, \ \forall (k,m) \in P$$

$$X_{ij} \in \{0,1\}, \ \forall i \in C, \ j \in L$$

$$Y_j \in \{0,1\}, \ \forall j \in L$$

$$Z_j \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, \ \forall j \in L$$

[30] Examen, 2012'2

3.2 Calendario de Roger Federer

Suponga que usted esta a cargo de la agenda de Roger Federer, tenista profesional, y quiere calendarizar su año de competencias en el circuito ATP (Asociación de Tenistas Profesionales) de manera de optimizar sus ganancias. En específico, usted quiere planificar qué realizará el jugador en cada una de las semanas del año (un año tiene 52 semanas). Existen diversos campeonatos a los cuales puede asistir, los cuales están contenidos en el conjunto J. Cada campeonato j tiene una duración L_j medida en semanas, y su inicio está marcado por el parámetro S_{jt}, igual a 1 si el campeonato j empieza en la semana t, 0 en caso contrario. También, debido a que no tiene las condiciones físicas de antes, no puede jugar dos campeonatos seguidos, es decir, debe dejar pasar al menos una semana entre un campeonato y otro.

Cada campeonato tiene un nivel de dificultad distinto y otorgan diferentes puntos para el ranking ATP. Debido a su experiencia, sabe que el campeonato j le otorgará P_j puntos si lo juega. Sabe también que hay algunos campeonatos que le pagarán una cierta cantidad de dinero, contenido en el parámetro H_j, sólo por el hecho de jugar ese campeonato.

Existen diversos patrocinadores asociados a los distintos campeonatos. El conjunto N contiene a todos los patrocinadores de la ATP, y usted debe decidir con cuáles patrocinadores firmará contrato. Para esto, puede hacerlo en cualquier momento del año. Por el hecho de firmar contrato, usted incurrirá en un gasto F_{it} por firmar contrato con el patrocinador i en la semana t. También sabe que para cada campeonato, si uno de sus patrocinadores (con el cual debe haber firmado contrato a esa altura) auspicia también al campeonato y Federer asiste, obtiene una bonificación extra de dinero, B_j. Para eso, cuenta con el parámetro D_{ij} que es igual a 1 si el patrocinador i auspicia el campeonato j, 0 en caso contrario.

También, a Federer le preocupa la popularidad que tenga con sus seguidores. Si llegan a pasar 3 semanas seguidas sin estar en un campeonato, deberá dar una conferencia de prensa en esa tercera semana sin campeonato dando las explicaciones pertinentes, lo cual tiene un costo de C_t para la semana t. Además, lo que tiene prohibido es que no puede pasar 4 semanas seguidas sin jugar un campeonato, pues perdería muchos fanáticos de todo el planeta y él no está dispuesto a tal situación

Se le pide que modele este problema como un modelo de programación lineal entero mixto que le ayude a decidir cómo organizar su calendario y qué patrocinadores adquirir (y en qué momento), respetando los requerimientos del jugador y obteniendo una cantidad mínima de puntos E en el ranking de modo de maximizar sus ganancias.

SOLUCIÓN[31]

Se debe decidir en qué campeonato participará Federer. Además, se necesitan variables que permitan saber cuándo dar una conferencia de prensa y cuándo firmar contratos con patrocinadores. Así, se plantean las siguientes variables de decisión:

[31] Tarea 1, 2017'1

$$x_{jt} = \begin{cases} 1 & \text{Si Federer está jugando el campeonato } j \text{ en la semana } t \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$y_{it} = \begin{cases} 1 & \text{Si se firma contrato con patrocinador } j \text{ en la semana } t \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$z_t = \begin{cases} 1 & \text{Si Federer debe dar conferencia de prensa en la semana } t \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$w_j = \begin{cases} 1 & \text{Si se recibe bonificación por el campeonato } j \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$\alpha_j = \begin{cases} 1 & \text{Si Federer asiste al campeonato } j \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

$$\beta_{it} = \begin{cases} 1 & \text{Si se cuenta con contrato firmado del patrocinador } i \text{ en la semana } t \\ 0 & \text{En otro caso} \end{cases}$$

En este caso, se observa que la variable β_{it} se modela como una igualdad en las restricciones, por lo que no es necesario definirla explícitamente.

Función Objetivo:

$$\max \sum_{j \in J} H_j \alpha_j + \sum_{j \in J} B_j w_j - \sum_{t=1}^{52} \sum_{i \in N} F_{it} y_{it} - \sum_{t=1}^{52} C_t z_t$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

- Cantidad de puntos mínima:

$$\sum_{j \in J} P_j \alpha_j \geq E$$

- Relación α_j y x_{jt}:

$$L_j \alpha_j S_{jt} \leq \sum_{s=t}^{t+L_j-1} x_{js} \qquad \forall j \in J, t \in \{1, ..., 52\}$$

- Popularidad y definición de variable z_t:

$$\sum_{j \in J} (x_{jt} + x_{jt-1} + x_{jt-2} + x_{jt-3}) \geq 1 \qquad t \in \{4, 5, ..., 52\}$$

$$\sum_{j \in J} (x_{jt} + x_{jt-1} + x_{jt-2}) \geq 1 - z_t \qquad t \in \{3, 4, 5, ..., 52\}$$

- Relación β_{it} e y_{it}:

$$\beta_{it} = \sum_{l=1}^{t} y_{il} \qquad \forall i \in N, t \in \{1, ..., 52\}$$

- Definición de la bonificación por campeonato (w_j):

$$\alpha_j \geq w_j \qquad \forall j \in J$$

$$\sum_{t=1}^{52} \sum_{i \in N} D_{ij} \beta_{it} S_{jt} \geq w_j \qquad \forall j \in J$$

- Solo se puede firmar contrato una vez con cada patrocinador:

$$\sum_{t=1}^{52} y_{it} \leq 1 \qquad \forall i \in N$$

- Solo se puede estar jugando un campeonato a la vez:

$$\sum_{j \in J} x_{jt} \leq 1 \qquad \forall t \in \{1, ..., 52\}$$

- No puede jugar dos campeonatos seguidos. Si está jugando un campeonato en una semana, a la semana siguiente no puede estar en otro campeonato:

$$x_{jt} + x_{kt+1} \leq 1 \qquad \forall t \in \{1, 2, ..., 51\}; j, k \in J, k \neq j$$

- Naturaleza de variables:

$$x_{jt}, y_{it}, z_t, w_j, \alpha_j, \beta_{it} \in \{0, 1\} \qquad \forall j, i, t$$

3.3 Director de Cine

El afamado director de cine, Joseph Tomacini, realizará un festival de cine durante las vacaciones de invierno venideras. Para este festival cuenta con un listado de P películas con derecho de exhibición, con un conjunto de S salas de cine, dispone de T días (consecutivos) y ha dividido cada uno de estos días en M módulos, de igual duración cada uno (imagine que en un día de 10 horas, se consideran 20 módulos de media hora cada uno).

Se conoce la duración de cada una de las películas que pueden ser exhibidas durante el festival, siendo L_p módulos la duración de la película p, para todo $p \in P$. También se conoce la demanda que enfrenta cada película, siendo D_p^t la cantidad de personas dispuestas a comprar una entrada para ver la película P, para todo $p \in P$, si esta película es exhibida el día t, para todo $t = 1, \ldots, T$. Se considera que la capacidad de cada sala es Q_s, para $s \in S$.

A modo de que el festival resulte exitoso, Joseph ha decidido que cada película puede ser exhibida a lo más una vez cada día en cada sala, y que cada película no puede estar siendo exhibida simultáneamente en dos o más salas. Obviamente, cada película es exhibida de manera continua y completa, si es que es exhibida.

Si el precio de las entradas se ha fijado en R_p pesos por una entrada para ver la película p, para todo $p \in P$, formule un modelo de programación lineal entera que ayude a Joseph Tomacini a recaudar la mayor cantidad de dinero durante la realización de su festival.

SOLUCIÓN[32]

Se necesita saber qué película se transmite en cada módulo y en qué sala. Para esto usaremos dos variables, la primera que permite saber cuándo parte, y la otra permite saber la asignación. Además, una variable que cuenta la cantidad de entradas.

VARIABLES:

x_{ps}^{tm}: Variable binaria que vale 1 si la película $P \in P$ comienza su exhibición en la sala $s \in S$ durante el día $t = 1, \ldots, T$ exactamente en el módulo $m = 1, \ldots, M$ y 0 si no.

y_{ps}^{tm}: Variable binaria que vale 1 si la película $P \in P$ se exhibe en la sala $s \in S$ durante el día $t = 1, \ldots, T$ en el módulo $m = 1, \ldots, M$ y 0 si no.

V_p^t: Variable discreta que indica la cantidad de entradas que son vendidas para ver la película $p \in P$ durante el día $t = 1, \ldots, T$.

[32] Interrogación 1, 2017'1

Función objetivo:

$$\text{Max} \sum_{p\in P} R_p \left(\sum_{t=1}^{t} V_p^t \right)$$

Restricciones: Para esto, es mejor darse cuenta

(R1): Exhibir a los más una vez una película en una misma sala cada día.

$$\sum_{m=1}^{M} x_{ps}^{tm} \leq 1 \qquad \forall p \in P, s \in S, t = 1, \ldots, T.$$

(R2): En un mismo módulo, día y sala se exhibe a lo más una película.

$$\sum_{p\in P} y_{ps}^{tm} \leq 1 \qquad \forall s \in S, t = 1, \ldots, T, m = 1, \ldots, M.$$

(R3): Relacionar las variables x_{ps}^{tm} e y_{ps}^{tm}.

$$1 - x_{ps}^{tm} \geq y_{qs}^{t\theta} \qquad \forall p \in P, q \in P : q \neq p, s \in S, t = 1, \ldots, T, m = 1, \ldots, M, \theta = m, \ldots, m + L_p - 1$$

$$\sum_{\theta=m-L_p+1}^{m} x_{ps}^{t\theta} = y_{ps}^{tm} \qquad \forall p \in P, s \in S, t = 1, \ldots, T, m = L_p, \ldots, M,$$

(R4): Asegurar que no se programan exhibiciones de películas que no pueden exhibirse completamente.

$$x_{ps}^{tm} = 0 \qquad \forall p \in P, s \in S, t = 1, \ldots, T, m = M - L_p + 2, \ldots, M.$$

(R5): No se exhibe una misma película de manera simultánea en las salas.

$$\sum_{s\in S} y_{ps}^{tm} \leq 1 \qquad \forall p \in P, t = 1, \ldots, T, m = 1, \ldots, M.$$

(R6): Asegurar que la venta es el mínimo entre la demanda y la capacidad de las salas asignadas a la exhibición de la película.

$$V_p^t \leq \sum_{s\in S} \left(Q_s \sum_{m=1}^{M} x_{ps}^{tm} \right) \qquad \forall p \in P, t = 1, \ldots, T.$$

$$V_p^t \leq D_p^t \qquad \forall p \in P, t = 1, \ldots, T.$$

(R7): Naturaleza de las variables:

$$x_{ps}^{tm}, y_{ps}^{tm} \in \{0, 1\} \qquad \forall p \in P, s \in S, t = 1, \ldots, T, m = 1, \ldots, M.$$

$$V_p^t \in \mathbb{Z}_0^+ \qquad \forall p \in P, t = 1, \ldots, T.$$

3.4 Tablero de fichas

Considere un tablero de 5×5 en que en cada casilla hay una ficha. Cada ficha tiene dos caras: una negra y una blanca. En el tablero, inicialmente lleno de fichas con la cara blanca hacia arriba, se puede jugar a dar vuelta todas las fichas de un tablero, de modo que queden todas negras. Para invertir una ficha de color, basta con darla vuelta, aunque esto tiene consecuencias. Si una ficha es invertida, también se debe invertir la ficha inmediatamente superior, la inmediatamente inferior, la inmediatamente a la izquierda y la inmediatamente a la derecha. Si se presiona una ficha de borde, se invierten solamente las fichas que están en el tablero (por

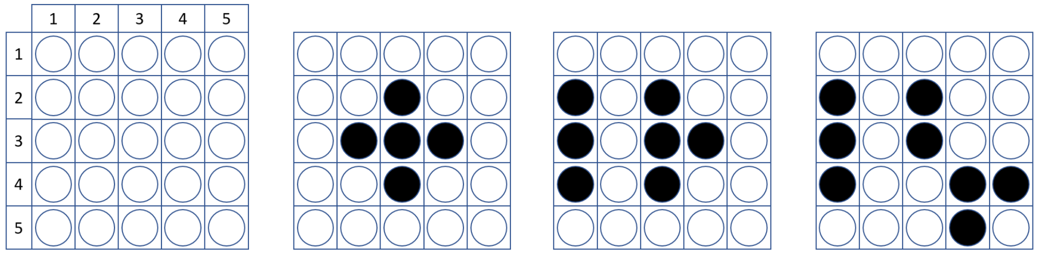


Figure 10: Ejemplo de la dinámica del juego

ejemplo, si se presiona la ficha de la esquina superior izquierda del tablero, solamente se invertirán esa, la de su derecha y la inferior). La acción de seleccionar una ficha para invertir la llamamos "presionar".

En el ejemplo de la Figura 10, primero se presiona la casilla (3,3), luego la (3,1) y luego la (4,4).

Se pide diseñar un modelo de programación lineal entero que permita determinar las fichas a presionar de forma que se presione la menor cantidad de fichas posibles.

SOLUCIÓN[33]

El modelo de optimización es atemporal, es decir, no importa cuándo una ficha fue apretada, si no que la cantidad de veces que fue apretada una de ellas o su vecina. Notemos que para que una ficha quede negra, debe ser invertida una cantidad impar de veces.

VARIABLES:

x_{ij}: Variable binaria que vale 1 si la casilla (i, j) fue presionada, y 0 si no.

y_{ij}: Variable entera para determinar si una casilla o sus vecinas fueron apretadas un número impar de veces.

FUNCIÓN OBJETIVO:

$$\min \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{5} x_{ij}$$

RESTRICCIONES:

(R1): Deseamos que la cantidad de veces que una casilla y sus vecinas han sido presionadas sea impar. Notemos que x es impar si existe un y entero tal que $x - 2y = 1$.

$$x_{ij} + x_{i,j+1} + x_{i,j-1} + x_{i+1,j} + x_{i-1,j} - 2y_{ij} = 1 \qquad \forall i, j = 1, \ldots, 5$$

Esta restricción se ajusta excluyendo las variables que se salen del tablero en los casos borde.

(R2): Para limitar la cantidad de valores que puede tomar y_{ij}. **Esta restricción no es necesaria**, pero podría ser útil al resolver el problema.

$$y_{ij} \leq 2 \qquad \forall i, j = 1, \ldots, 5$$

(R3): Naturaleza de las variables

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall i, j = 1, \ldots, 5$$
$$y_{ij} \in \mathbb{Z}_0^+ \qquad \forall i, j = 1, \ldots, 5$$

[33]Interrogación 1, 2017'1

3.5 Marketing en Cafetería

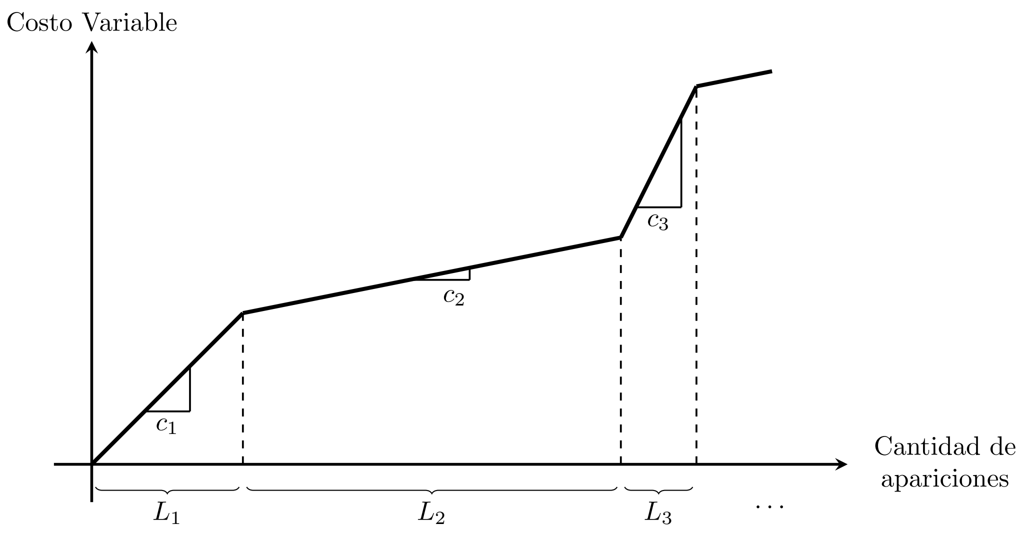
La exitosa empresa Nesclé requiere de asesoría para diseñar un plan de marketing para el próximo año. Dado que posee una gran lista I de productos, uno de sus principales intereses es reducir lo más posible el gasto en publicidad.

Nesclé tiene contactados a M medios de comunicación para publicitar sus productos. De esta manera, ella busca mantener a todos los productos en el "Top of the Mind" de los clientes, es decir, recordarles periódicamente su existencia para que estén siempre entre sus preferencias. Para ello, los consejeros del gerente le sugieren que cada producto i se promocione con un mínimo de A_i en total apariciones cada semana. Para ello, le sugirieron utilizar el conjunto $Lunes = \{1, 8, 15, 22, \ldots, T-6\}$ de todos los lunes en el horizonte de planificación de T días.

Eso sí, los consejeros le indican que si un producto aparece en demasiados medios de comunicación el mismo día, produce un efecto de "saturación" en los clientes que es contraproducente, por lo que le sugieren que ningún producto aparezca en más del q_t por ciento de los medios de comunicación disponibles en cada día t. También le sugieren tener cuidado con el efecto del "canibalismo". Este consiste en que, al hacer publicidad a uno de los productos, disminuyen las ventas del otro, por el efecto de sustitución. Para determinar el efecto, en el conjunto R se encuentran todos los pares (i, j) en los que hay canibalismo entre i y j. Para evitar eso, le sugirieron que evitara que haya publicidad en el mismo día y medio para dos productos entre los que hay canibalismo.

Debido a que los medios de comunicación también deben publicitar otras compañías, su capacidad de promoción para Nesclé es limitado. Por ende, cada medio m le ha dado un máximo de U_{mt} apariciones para el día t, el que considera todos los distintos productos de la empresa.

Cada uno de los medios de comunicación tiene un sistema de costos especial para cada producto en cada día. En particular, cada medio m posee un costo fijo CF_{mt} por el simple hecho de ser utilizado en el día t. Sin embargo, también posee un costo variable lineal a tramos para cada uno de los productos y períodos, con S_{imt} tramos en total. Para explicarle al gerente de Nesclé, usted le hizo este gráfico que representa el costo variable de publicidad de un producto i para un medio m y un período t en particular, en función de la cantidad de apariciones:



Considerando que el área de estimaciones indica que, por cada aparición del producto i en el medio m el día t, se obtiene un ingreso adicional a I_{imt}, se le pide escribir el modelo de programación **lineal** entera mixta que permita encontrar la estrategia de publicidad que maximice las utilidades de la empresa.

HINT: Intente escribir el costo variable del producto graficado en función de la cantidad de productos y los costos $c_1, c_2, \ldots$ para ayudarse a definir variables, y luego generalícelo. Ayúdese del gráfico y aproveche el parámetro L_{imkt} como el largo del tramo k del producto i para el medio m en el período t.

SOLUCIÓN[34]

[34]Interrogación 3, 2017'1

Índices:

i, j: productos

t, θ: días

m: medios de comunicación

k: tramos de costo variable

Variables:

x_{imt}: Variable binaria que vale 1 si se publicita el producto i en el medio m en el día t.

y_{imt}: Cantidad de apariciones del producto i en el medio m el día t.

z_{mt}: Variable binaria que vale 1 si se usa el medio m en el día t.

δ_{imkt}: Cantidad de productos i del tramo k que están promocionados en m el día t.

w_{imkt}: Variable binaria que vale 1 si δ_{imkt} está en su cota superior.

Función objetivo:

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{m=1}^{M} \sum_{t=1}^{T} I_{imt} y_{imt} - \sum_{m=1}^{M} \sum_{t=1}^{T} CF_{mt} z_{mt} - \sum_{i \in I} \sum_{m=1}^{M} \sum_{t=1}^{T} \sum_{k} c_{imkt} \delta_{imkt}$$

Restricciones:

R1) Si no se usa el medio, no se publicitan los productos.

$$x_{imt} \leq z_{mt} \qquad \forall i \in I \quad \forall m = 1, \ldots, M \quad \forall t = 1, \ldots, T$$

R2) Si no se publicita el producto, no hay apariciones de él.

$$y_{imt} \leq M x_{imt} \qquad \forall i \in I \quad \forall m = 1, \ldots, M \quad \forall t = 1, \ldots, T \quad M >> 0$$

R3) No saturar a los clientes.

$$\sum_{m=1}^{M} x_{imt} \leq M \cdot \frac{q_t}{100} \qquad \forall i \in I \quad \forall t = 1, \ldots, T$$

R4) Evitar canibalismo.

$$x_{imt} + x_{jmt} \leq 1 \qquad \forall (i, j) \in R \quad \forall m = 1, \ldots, M \quad \forall t = 1, \ldots, T$$

R5) No se puede superar el máximo de apariciones de cada medio.

$$\sum_{i \in I} y_{imt} \leq U_{mt} \qquad \forall m = 1, \ldots, M \quad \forall t = 1, \ldots, T$$

R6) Mantener a los productos en el "Top of the Mind".

$$\sum_{\theta=t}^{t+6} \sum_{m=1}^{M} y_{im\theta} \geq A_i \qquad \forall i \in I \quad \forall t \in Lunes$$

Candidatos	**U.M.**
Juan Pérez	120
Pedro Soto	500
María González	200
Luis Toro	100
Gloria Pérez	250

Table 34: Fiesta de Matrimonio

R7) Manejar las variables δ para respetar la función lineal por tramos.

$$L_{im1t} \cdot w_{im1t} \leq \delta_{im1t} \leq L_{im1t} \qquad \forall i \in I \qquad \forall m = 1, \ldots, M \quad \forall t = 1, \ldots, T$$

$$L_{imkt} \cdot w_{imkt} \leq \delta_{imkt} \leq L_{imkt} \cdot w_{im(k-1)t} \qquad \forall k = 2, \ldots, S_{imt} - 1 \qquad \forall i \qquad \forall m \quad \forall t$$

$$\delta_{imkt} \leq L_{imkt} \cdot w_{im(k-1)t} \qquad k = S_{imt} \quad \forall i \in I \qquad \forall m = 1, \ldots, M \quad \forall t = 1, \ldots, T$$

R8) Naturaleza variables

$$\begin{array}{rll} w_{imkt} & \in \{0,1\} & \forall i, m, k, t \\ x_{imt} & \in \{0,1\} & \forall i, m, t \\ z_{mt} & \in \{0,1\} & \forall m, t \\ y_{imt} & \geq 0 & \forall i, m, t \\ \delta_{imkt} & \geq 0 & \forall i, m, k, t \end{array}$$

3.6 Fiesta de Matrimonio

Usted está a cargo de seleccionar los invitados a su matrimonio, dada la problematica de la situación, usted y su pareja han decidido cuantificar el beneficio neto que aporta cada persona al asistir, es decir están considerados: la importancia que para ustedes tiene que esa persona asista, el costo de invitar a esa persona y el regalo que esperan recibir de ella. Los candidatos se indican en la Tabla 34, junto con la contribución neta que haríanan si asisten a su matrimonio, en miles de U.M. (unidades de matrimonio)

Juan Pérez no asitirá a menos que asista Luis Toro y tampoco asistirá si Pedro Soto y María Gonzalez van (ambos). Además, Pedro Soto no se lleva bien con Gloria Pérez y no asistirá a menos que María González y Luis Toro asistan juntos. Formule un modelo que permita seleccionar la lista de invitados maximizando la contribución total obtenida.

SOLUCIÓN

El objetivo del problema es definir la lista de invitados al matrimonio de manera de maximizar el beneficio percibido, en U.M. Para formular el modelo emplearemos la variable binaria que indica si la persona i es invitada o no al matrimonio, esto es:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{Si se invita a la persona } i \text{ al matrimonio} \\ 0 & \text{Si no se invita a la persona } i \text{ al matrimonio} \end{cases} \qquad \forall i$$

El objetivo del problema es maximizar el beneficio obtenido por la asistencia de invitados, sujeto a las retricciones debidas a los conflictos personales entre los asistentes y a la restricción de la naturaleza de las variables. Esto nos permite formular el siguiente modelo de programacion entera:

$$P) \quad Max \quad 120x_1 + 500x_2 + 200x_3 + 100x_4 + 250x_5$$

$$\begin{array}{rcll} x_1 & \leq & x_4 & \\ x_1 & \leq & 2 - (x_2 + x_3) & \\ x_2 & \leq & 1 - x_5 & \\ x_2 & \leq & x_3 & \\ x_2 & \leq & x_4 & \\ x_i & \in & \{0,1\} & \qquad \forall i \end{array}$$

	Comprar	Cocinar	Lavar Platos	Lavar Ropa
El	4.5	7.8	3.6	2.9
Ella	4.9	7.2	4.3	3.1

Table 35: Horas Semanales de Actividades

3.7 Tareas Semanales en Matrimonio

Un matrimonio debe distribuirse las tareas semanales del hogar. Las horas semanales que cada uno requiere para desarrollar las distintas actividades aparecen en la Tabla 35.

Usted debe asignar las tareas de modo que se realizen cada una de ellas en el menor tiempo posible; considerando además, que para que la distribución sea equitativa cada uno de ellos debe realizar dos tareas.

SOLUCIÓN

El objetivo del problema es decidir cuáles tareas debe realizar la esposa y cuáles el esposo de manera que el tiempo total dedicado a las actividades del hogar sea mínimo, por esta razón consideraremos las siguientes variables de decisión:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{Si el marido hace la actividad i} \\ 0 & \text{Si el marido no hace la actividad i} \end{cases}$$
$i = \{1 : \text{Comprar}, 2 : \text{Cocinar}, 3 : \text{Lavar Platos}, 4 : \text{Lavar Ropa}\}$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{Si la esposa hace la actividad i} \\ 0 & \text{Si la esposa no hace la actividad i} \end{cases}$$

El objetivo del problema es reducir el tiempo total dedicado a las tareas del hogar, considerando que una tarea no puede ser realizada por dos personas a la vez, y que tanto la esposa como el esposo deben realizar dos actividades. Si llamamos A_i al tiempo que requiere el esposo para hacer la tarea i, y B_i al tiempo requerido por la esposa para hacer la actividad i, el problema de asignación resulta ser:

$$P) \quad Min \quad \sum_{i=1}^{4} A_i x_i + \sum_{i=1}^{4} B_i y_i$$

$$\begin{aligned} x_i + y_i &= 1 \qquad \forall i \\ \sum_{i=1}^{4} x_i &= 2 \\ \sum_{i=1}^{4} y_i &= 2 \\ x_i, y_i &\in \{0,1\} \quad \forall i \end{aligned}$$

3.8 Planificación hospitalaria

Uno de los problemas principales que enfrenta un gran hospital complejo es la programación de las operaciones en los quirófanos. Suponga que quiere ayudar a un hospital a la programación semanal de operaciones, para lo cual debe asignar las operaciones que se realizarán diariamente, durante los siete días de la semana. No importa el orden en que se hacen las operaciones en un día particular ya que esa decisión se toma en un horizonte de tiempo más corto. Se tienen N quirófanos y cada quirófano está disponible Q_t horas en el día t. Se deben organizar durante la semana un total de P operaciones (todas deben hacerse) y la duración de la operación i es de w_i horas. Si bien en principio una operación puede hacerse en cualquiera de los quirófanos, existe un índice de preferencia que corresponde a un número R_{ij} asociado a la realización de la operación i en el quirófano j.

(a) Escriba un modelo de Programación Entera que permita determinar la asignación diaria de operaciones de cada quirófano de modo tal que en el total de la semana se maximice el índice de preferencia acumulado.

(b) Suponga ahora que cada operación puede ser realizada por algunos equipos médicos según la especialidad. Más específicamente, suponga que existen S equipos médicos y que el equipo médico k sólo puede realizar las operaciones del conjunto $O(k) \subset \{1, \ldots, P\}$. Además, la política del hospital establece que cada equipo médico no puede realizar más de tres operaciones en cada día de la semana. Escriba las variables y restricciones que debe agregar a su modelo de (a) para representar esta situación.

SOLUCIÓN[35]

(a) Para esto consideremos una variable x_{ijt} que vale 1 si la operación i se hace en el quirófano j en el día t. El modelo para la parte a) es bastante estándar y directo:

$$\begin{array}{lll}
\max & \sum_{t=1}^{7} \sum_{i=1}^{P} \sum_{j=1}^{N} R_{ij} x_{ijt} & \\
s.a. & \sum_{t=1}^{7} \sum_{j=1}^{N} x_{ijt} = 1, \ i = 1, \ldots, P & (1) \\
 & \sum_{i=1}^{P} \sum_{j=1}^{N} w_i x_{ijt} \leq Q_t, \ t = 1, \ldots, 7 & (2) \\
 & x_{ijt} \in \{0, 1\}, \ i = 1, \ldots, P; t = 1, \ldots, 7; j = 1, \ldots, N. & (3)
\end{array}$$

La restricción (1) establece que cada operación se debe hacer en algún quirófano algún día. La restricción (2) impone la limitante del tiempo diario.

(b) En este caso necesitamos una variable que nos relacione las operaciones con los equipos médicos. Sea y_{ikt} igual a 1 si la operación i es realizada por el equipo k en el día t.

$$\begin{array}{lll}
\sum_{j=1}^{N} x_{ijt} = \sum_{k: i \in O(k)} y_{ikt} & i = 1, \ldots, P; t = 1, \ldots, 7. & (1) \\
\sum_{i \in O(k)} y_{ikt} \leq 3 & k = 1, \ldots, S; t = 1, \ldots, 7 & (2) \\
y_{ikt} \in \{0, 1\} & i = 1, \ldots, P; k = 1, \ldots, K; t = 1, \ldots, 7. & (3)
\end{array}$$

La restricción (1) define y en función de x. La restricción (2) impone que un equipo no trabaje en tres operaciones durante un mismo día. La restricción (3) explícita la naturaleza de la variable y.

3.9 Decisión de Inversión

Un inversionista debe decidir cómo invertir un capital de 100 millones de dólares entre 7 proyectos disponibles. La Tabla 36 resume la ganancia neta que reporta cada proyecto y la inversión inicial necesaria en cada caso. Se debe considerar, además, que los proyectos 1 y 2 son mutuamente excluyentes, que para realizar el proyecto 3 es necesario realizar uno de los proyectos anteriores y que no es necesario invertir todo el capital.

SOLUCIÓN

El objetivo del problema es decidir que proyectos realizar, de manera de maximizar la ganancia total obtenida, por lo que resulta natural definir

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{Si escoge el proyecto i} \\ 0 & \text{Si no se escoge el proyecto i} \end{cases} \qquad i = 1, 2, ..., 7$$

[35] Interrogación 3, 2014'1

	Proyectos						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Ganancia	17	10	15	19	7	13	9
Capital	43	28	34	48	17	32	23

Table 36: Inversión Inicial y Ganancia (en MM de Dólares)

Llamemos, además:

$g_i =$ Ganancia que reporta el proyecto i
$c_i =$ Capital o inversión inicial que requiere el proyecto i

Considerando que el modelo debe maximizar la ganacia obtenida, cumpliendo las restricciones de que si se realiza el proyecto 1 no se puede realizar el proyecto 2 , que para realizar el proyecto 3 es necesario realizar los proyectos 1 y/o 2 antes y que no es necesario invertir todo el capital, obtenemos el siguiente problema de optimización:

$$P) \quad Max \quad \sum_{i=1}^{7} g_i x_i$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_3 &\leq x_1 + x_2 \\ \sum_{i=1}^{7} c_i x_i &\leq 100 \\ x_i &\in \{0,1\} \quad \forall i \end{aligned}$$

3.10 Planificación de Estudio para Exámenes

Un estudiante debe rendir exámenes en los cursos de Cálculo, Mecánica, Electrónica y Optimización. Para estudiar para estos cuatro exámenes dispone de solamente 20 horas. Con el propósito de asignar el tiempo dedicado a cada curso, el estudiante ha fraccionado su tiempo disponible en bloques de 4 horas cada uno. La nota que debe obtener en un examen determinado dependerá del número de bloques que dedique al estudio de este curso. Sea c_{ij} la nota que obtendrá en el curso i si le asigna j bloques de tiempo, $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Para aprobar el curso de mecánica necesita obtener al menos nota 4 en el examen y para aprobar el de optimización, al menos nota 3. Los otros dos cursos los aprueba con cualquier nota en el examen. Construya un modelo de optimización que permite determinar una asignación del tiempo disponible del estudiante que le permita aprobar los 4 cursos, obteniendo la máxima suma de notas en los exámenes.

SOLUCIÓN[36]

El objetivo del modelo es decidir cuánto tiempo se debe dedicar a cada ramo para que el estudiante apruebe los cursos y obtenga la máxima suma de notas en los exámenes. Para ello emplearemos la siguiente variable de decisión:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si se asignan j bloques de tiempo al ramo i,} \\ 0 & \text{Si no} \end{cases}$$
$$i = \{1 : \text{Cálculo}, 2 : \text{Mecánica}, 3 : \text{Electrónica}, 4 : \text{Optimización}\} \quad j = 0, 1..., 5$$

Si llamamos c_{ij} a la nota obtenida en el curso i cuando se le asignan j bloques de estudio, la función objetivo correspode a la máxima suma del producto entre x_{ij} y c_{ij}. El modelo debe considerar además que cada ramo debe recibir una asignación de bloques, que se aprueba Mecánica con nota igual o superior a 4.0

[36] Jorge Vera, Profesor Ing. Industrial PUC

Empresa	1	2	3	Precio por Tonelada
Norte	3	6	5	10
Sur	6	3	4	12

Table 37: Costos de Adquisición de Ripio y de Transporte

y Optimización con nota mayor o igual a 3.0, que se dispone de un total de 20 horas para estudiar, y la binariedad de la variable de decisión. De acuerdo a lo anterior el modelo resulta ser:

$$P) \quad Max \quad \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=0}^{5} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{array}{rcll}
\sum_{j=0}^{5} x_{ij} & = & 1 & \forall i \\
\sum_{j=0}^{5} c_{2j}x_{2j} & \geq & 4.0 & \\
\sum_{j=0}^{5} c_{4j}x_{4j} & \geq & 3.0 & \\
\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=0}^{5} jx_{ij} & \leq & 5 & \\
x_{ij} & \in & \{0,1\} & \forall i,j
\end{array}$$

3.11 Empresa Constructora

Una empresa constructora debe adquirir ripio para 3 obras que debe llevar a cabo; el ripio lo puede obtener desde dos empresas proveedoras, ubicada una al norte y otra al sur de la ciudad. Por razones de capacidad la primera empresa puede ofrecer hasta un máximo de 18 toneladas, mientras que la segunda sólo cuenta con un máximo de 14 toneladas. La obras requieren de 10, 5 y 10 toneladas, respectivamente. Para transportar el ripio, la empresa debe arrendar camiones, y cada camión solo puede ser usado desde una empresa proveedora a una obra. El costo de arrendamiento de un camión es de 5 dólares. Cada camión puede llevar hasta 5 toneladas, pero no es necesario que viaje a plena capacidad. La empresa debe pagar además un costo unitario por cada tonelada transportada (asociado al uso de combustible y otros insumos).
Los costos unitarios de adquisición del ripio y los costos unitarios de transporte desde cada empresa proveedora a cada obra se presentan en la Tabla 37. Desarrolle un modelo que permita encontrar la estrategia óptima de adquisición y transporte del ripio.

SOLUCIÓN

El modelo debe encontrar la estrategia óptima de adquisición y transporte del ripio desde cada empresa abastecedora a cada una de las obras, para ello emplearemos las siguientes variables de decisión:

n_{ij} = Número de camiones a arrendar para transportar ripio desde la empresa i a la obra j.
x_{ij} =Total de toneladas transportadas desde i a j, $i = \{1 : Norte, 2 : Sur\}$, $j = 1, 2, 3$

Los datos del problema los identificaremos por:

c_{ij} = Costo unitario de transportar ripio desde la empresa i a la obra j
p_i = Costo de adquisición de una tonelada de ripio desde la empresa i.

El objetivo del problema es minimizar los costos totales asociados al transporte, considerando la capacidad de cada camión, la máxima cantidad de ripio que puede ofrecer cada empresa y los requerimientos de ripio de cada obra. De esta manera el modelo queda expresado por:

$$P) \quad Min \quad \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} p_i x_{ij} + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} c_i x_{ij} + 5\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} n_{ij}$$

$$\begin{array}{rcll}
x_{ij} & \leq & 5n_{ij} & \forall i,j \\
\sum_{j=1}^{3} x_{1j} & \leq & 18 & \\
\sum_{j=1}^{3} x_{2j} & \leq & 14 & \\
\sum_{i=1}^{2} x_{i1} & = & 10 & \\
\sum_{i=1}^{2} x_{i2} & = & 5 & \\
\sum_{i=1}^{2} x_{i3} & = & 10 & \\
x_{ij} & \geq & 0, & \forall i,j \\
n_{ij} & \in & enteros & \forall i,j
\end{array}$$

3.12 Preparación de Paseo

Imagine que esta a cargo de organizar el paseo de fin de año de su empresa. Para ello, debe llevar una cierta cantidad de cosas, cada una de las cuales tiene un costo asociado. Sin embargo, si grupos completos de estos productos se incluyen en el paseo (por ejemplo botella y destapador) se obtiene un beneficio. Encuentre el conjunto de grupos completos óptimo que reporte la máxima utilidad.

SOLUCIÓN

El problema consiste en decidir que conjuntos de productos llevar al paseo de modo de obtener el máximo beneficio. Llamemos $i = 1, ..., N$ al número de productos, s a los diferentes conjuntos de productos, con $s \in S$ y B_s al beneficio que se logra al incluir el conjunto s y C_i al costo asociado al producto i. Es importante notar que no existe restricción de capacidad por lo que si el beneficio de un conjunto supera a la suma de los costos de los productos que lo componen, entonces todos los productos se deben llevar. Sin embargo, como un producto puede formar parte de varios conjuntos, puede valer la pena llevar conjuntos cuyo costo excede al beneficio. Esto se debe a que el costo de algunos productos se puede distribuir entre varios conjuntos, rentabilizando el grupo de conjuntos. Definamos, además:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{Si incluyo el producto i} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \qquad i = 1, ..., N$$

$$\delta_s = \begin{cases} 1 & \text{Si el conjunto s se completó} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \qquad s \in S$$

Luego el modelo consiste en maximizar la utilidad total, considerando que esta sólo se contabiliza cuando se lleva el conjunto completo de productos al paseo. De esta manera el problema resulta ser:

$$P) \quad Max \quad \sum_{s\in S} B_s\delta_s - \sum_{i\in N} C_i x_i$$

$$\begin{array}{rcll}
\delta_s & \leq & x_i & \forall s \in S,\ i \in s \\
x_i, \delta_s & \in & \{0,1\} & \forall i, \forall s \in S
\end{array}$$

A pesar de que este problema se parece al clásico problema de la mochila, su estructura matemática es distinta. De hecho, el problema de la mochila es NP-duro mientras este problema cuenta con algoritmos de solución polinomial (notar que en cada fila de la matriz de restricciones hay exactamente un 1 y un -1, por lo que la matriz implícita es totalmente unimodular) y es posible representarlo mediante un problema de flujo máximo en una red.

3.13 Programación de radio

Una estación de radio realiza transmisiones durante H horas al día. Para el día de hoy cuenta con N programas y debe seleccionar cuáles emitir durante todas esas horas (considere que la radio no puede dejar de transmitir en ningún momento de las H horas). Específicamente, el programa i tiene una duración de d_i horas (que es un número entero), $i = 1, \ldots, N$.

La audiencia potencial de cada hora ha sido estimada y es igual a a_h personas, $h = 1, \ldots, H$. También se ha estimado que fracción de la potencial audiencia escucharía el programa i en la hora h, siendo este valor b_{ih}, con $0 \leq b_{ih} \leq 1$. Un programa que es emitido, debe transmitirse en forma continua y sólo una vez en el día.

Por ejemplo, si hay un total de 7 programas cuyas duraciones son $d_1 = 10, d_2 = 5, d_3 = 5, d_4 = 12, d_5 = 6, d_7 = 6$, una posible programación que dura 22 horas consiste en transmitir el programa 1 seguido del 4, pero otra posible asignación transmite el programa 2 seguido del 3 del 5 y del 7. Como se observa, ambas asignaciones cubren las 22 horas pero pueden diferir en términos de la audiencia que captan según los valores b_{ih} de cada programa.

La estación le ha encargado a usted elaborar la programación del día de modo de cumplir con las especificaciones anteriores y llegar a la mayor audiencia posible. Para ello, formule un modelo de optimización lineal entero que permita hacer eso.

SOLUCIÓN[37]

El modelo asociado es:

Variables

x_{ih}: variable binaria que vale 1 si el programa i, con $i = 1, \ldots, N$, comienza a emitirse al inicio del período h, con $h = 1, \ldots, H$, y que vale 0 en otro caso.

y_{ih}: variable binaria que vale 1 si el programa i, con $i = 1, \ldots, N$, está emitiéndose al inicio del período h, con $h = 1, \ldots, H$, y que vale 0 en otro caso.

Función objetivo Maximizar la potencial audiencia de la emisora:

$$\max \sum_{h=1}^{H} a_i \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} b_{ih} y_{ih}$$

Restricciones

R1) En todas las horas se debe estar emitiendo exactamente un programa.

$$\sum_{i=1}^{N} y_{ih} = 1 \qquad \text{para } h = 1, \ldots, H.$$

R2) Los programas pueden emitirse a lo más una vez al día.

$$\sum_{h=1}^{H} x_{ih} \leq 1 \qquad \text{para } i = 1, \ldots, N.$$

[37] Interrogación 1, 2014'2

R3) Continuidad del programa según su duración y emisión (condición 1).

$$d_i x_{ih} \leq \sum_{k=h}^{h+d_i-1} y_{ik} \qquad \text{para } i = 1, \ldots, N; h = 1, \ldots, H - d_i + 1.$$

R4) Continuidad del programa según su duración y emisión (condición 2).

$$y_{ih} = \sum_{k=h-d_i}^{h} x_{ik} \qquad \text{para } i = 1, \ldots, N; h = d_i + 1, \ldots, H.$$

R5) Naturaleza de las variables

$x_{ih} \in \{0, 1\}$, para $i = 1, \ldots, N; h = 1, \ldots, H$.
$y_{ih} \in \{0, 1\}$, para $i = 1, \ldots, N; h = 1, \ldots, H$.

3.14 Asignación de pacientes por diálisis

Un hospital enfrenta un serio problema para asignar correctamente las horas de atención de pacientes que requieren tratamientos de diálisis. Existen n pacientes que deben ser atendidos usando m máquinas de diálisis ($n > m$). La atención del paciente j requiere p_j horas (hay diferencias debido a la condición de cada paciente), independiente de la máquina que use. La unidad de diálisis funciona durante T horas en un d?́a particular e interesa aprovecharla al máximo ya que si algún paciente no puede ser atendido en el d?́a en el hospital, debe subcontratarse el servicio en una entidad privada.

a) Formule un modelo de optimización que permita asignar la mayor cantidad posible de pacientes a las máquinas de diálisis, dentro de las T horas de funcionamiento del centro de diálisis.

b) Suponga que ahora se le indica que existe un cierto grupo de pacientes, identificados en un conjunto $J \subset \{1, ..., n\}$ tales que todos ellos deben ser atendidos dentro del día en el hospital. ¿Qué modificación tendría que hacer al modelo de (a) para considerar esta situación?

SOLUCIÓN[38]

a) Definimos la variable x_{ij} igual a 1 si el paciente j es asignado a la máquina i, 0 en otro caso. El modelo es:

$$\begin{array}{ll} \max & \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} \\ s.a. & \sum\limits_{j=1}^{n} p_i x_{ij} \leq T \qquad \forall i = 1, ..., m \\ & \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} \leq 1 \qquad \forall j = 1, ..., n \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall i = 1, ..., m; j = 1, ..., n \end{array}$$

Se busca maximizar la cantidad de pacientes asignados a máquinas. La primera restricción asegura de que en ninguna máquina se sobrepase el tiempo máximo. La segunda restricción indica que un paciente debe ser asignado a lo más a una máquina. No se pide que todos sean asignados, de hecho ese es el punto: los que no sean asignados serán enviados a otra unidad pero el modelo tratará de maximizar el número de asignaciones que cumplan con el tiempo.

b) En este caso, basta agregar la siguiente restricción:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad \forall j \in J$$

Ahora, esta restricción asegura que todos los pacientes del conjunto J serán asignados exactamente a una máquina.

[38] Examen, 2015'1

3.15 Ubicación de Grifos de Incendio

Considere una red de calles de una ciudad, en que los arcos son segmentos de calles y los nodos sus intersecciones; se debe encontrar un subconjunto de nodos en los cuales ubicar grifos de incendio de modo que cada segmento de calle cuente con al menos un grifo (en alguno de los 2 nodos que la definen). Suponga que la red tiene N nodos y que el costo de instalar un grifo en el nodo j es c_j. Formule un modelo que permita decidir donde instalar los grifos, de modo de minimizar el costo total.

SOLUCIÓN

El problema consiste en decidir en qué nodos o esquinas de la ciudad instalar cada uno de los grifos. Llamaremos A al conjunto de arcos de la red, y emplearemos la siguiente variable de decisión:

$$x_i = \begin{cases} 1 \text{ Si se instala un grifo en el nodo } i \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases} \qquad i = 1, ..., N$$

De esta manera, el problema consiste en minimizar el costo total de instalación de grifos, cumpliendo la restricción de que cada calle cuente con al menos uno de ellos. De acuerdo a lo anterior, el modelo resulta ser:

$$P) \quad Min \quad \sum_{i=1}^{N} c_j x_j$$

$$\begin{array}{rcll} X_i + X_j & \geq & 1 & \forall \; arco \; (i,j) \in A \\ X_i & \in & \{0,1\} & \forall i \end{array}$$

3.16 Planificación de Producción

Una empresa desea determinar cuánto producir mensualmente de un producto, sobre un horizonte de T meses, con la posibilidad de dejar alguna cantidad en inventario. Existe un costo fijo de producción por mes, f_t, un costo unitario de inventario h_t por mes, y un costo unitario de producción c_t por mes. Sea d_t la demanda del mes t. Sea x_t la cantidad a producir en el mes t y sea s_t la cantidad de inventario disponible al final del periodo t. Formule un modelo que permita definir el programa de producción óptima.

SOLUCIÓN[39]

El objetivo del problema es definir una política de producción e inventario sobre un horizonte de T meses. Para ello definiremos las siguientes variables:

x_t = Cantidad a producir en el mes t.
s_t = Inventario disponible al final del mes (después de satisfacer la demanda del mes t).

$$z_t = \begin{cases} 1 & \text{Si se produce en el mes } t \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Además, los siguientes son datos del problema:

f_t = Costo fijo de producción en el mes t.
h_t = Costo unitario de inventario en el mes t.
c_t = Costo unitario de producción en el mes t.
d_t = Demanda durante el mes t.
s_0 = Inventario disponible al inicio del mes 1 (final del mes 0).

[39] Jorge Vera, Profesor Ing. Industrial PUC

El objetivo del problema es minimizar los costos totales de producción e inventario, sujeto a las restricciones de nivel de inventario y a la restricción de carga que liga x_t y z_t, con M una constante suficientemente grande. Considerando lo anterior el modelo resulta ser:

$$P) \quad Min \quad \sum_{t=1}^{T} f_t z_t + \sum_{t=1}^{T} h_t \frac{(s_{t-1}+s_t)}{2} + \sum_{t=1}^{T} c_t x_t$$

$$\begin{aligned} s_{t-1} + x_t - d_t &= s_t && \forall t \\ x_t &\leq M z_t && \forall t \\ s_t, x_t &\geq 0 && \forall t \end{aligned}$$

Notése que en la función objetivo anterior se asume que el costo de inventario en un periodo es proporcional al inventario promedio en ese periodo.

3.17 Explotación Forestal

Una empresa forestal posee un total de N rodales (regiones de bosque) que pueden ser explotados el próximo año. Para cada rodal j se ha estimado la cantidad a_j, $j = 1, \ldots, N$ de madera que contiene. La empresa desea decidir que rodales cortar con el objetivo de extraer la mayor cantidad de madera posible. Sin embargo, la legislación vigente establece que si se corta un rodal no se puede cortar ninguno de los rodales adyacentes a él. Esto se debe hacer para preservar el hábitat de la fauna silvestre. Suponga, entonces, que para cada rodal j se tiene una lista $A(j)$ que especifica los rodales adyacentes a él. Construya un modelo de programación matemática que permita decidir qué rodales conviene cortar el próximo año.

SOLUCIÓN

La decisión que debe tomar la empresa es que rodales cortar, con el objetivo de extraer la mayor cantidad de madera. Por lo que resulta conveniente definir como variable del modelo:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{Si se corta el rodal } j, \ j = 1, \ldots, N \\ 0 & \text{Si no} \end{cases} \qquad j = 1, ..., N$$

De esta manera el objetivo es maximizar la cantidad de madera extraida, considerando que si cortamos un rodal no podemos cortar ninguno adyacente a él (restricción (32) si se corta el rodal j y restricción (33) si no se corta el rodal j) De esta manera, el modelo resulta ser:

$$P) \quad Max \quad \sum_{j}^{N} a_j x_j$$

$$\begin{aligned} x_i + x_j &\leq 1 && \forall i \in A(j), \forall j && (32) \\ x_j + \sum_{i \in A(j)} x_i &\leq Card(A(j)) && \forall j && (33) \\ x_j &\in \{0,1\} && \forall j \end{aligned}$$

3.18 Sistema de Transporte Público

En la licitación pública de uso de vías de la ciudad de Santiago, para la prestación de servicios urbanos de transporte público remunerado de pasajeros, se contempla adjudicar 15 unidades de negocio en forma simultánea. De estas 5 son unidades troncales y 10 alimentadoras. Si bien cada empresa puede postular a cuantas unidades quiera, podrá adjudicarse un máximo de cuatro unidades de las cuales a lo más dos podrán ser troncales. En esta licitación las empresas deben presentar para cada unidad de negocio el monto que requerirán percibir por prestar los servicios. En el caso de las unidades troncales, este cobro se realiza por bus-km recorrido, mientras en el caso de las unidades alimentadoras por pasajero transportado. La tarifa esperada en el sistema, una vez adjudicadas las unidades, se estima como una combinación lineal de los cobros de las empresas ganadoras. Los coeficientes de esta combinación son conocidos. El Estado ha decidido adjudicar estas 15 unidades simultáneamente de modo que esta tarifa total esperada en el sistema sea mínima. Formule un problema de optimización para resolver este problema.

SOLUCION

El objetivo del problema es determinar a quién adjudicar cada una de las unidades troncales y alimentadoras, por lo que definiremos las siguientes variables de desición:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si se adjudica la unidad troncal } j \text{ al oferente } i \\ 0 & \text{i no} \end{cases} \qquad j = 1, ..., 5$$

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si se adjudica la unidad alimentadora } j \text{ al oferente } i \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \qquad j = 1, ..., 10$$

Además llamaremos:

I_j al conjunto de oferentes en la unidad troncal j.
K_j al conjunto de oferentes en la unidad alimentadora j.
O_{ij} = la oferta del oferente i por la unidad troncal j (en \$/bus-km),
Q_{ij} = la oferta del oferente i por la unidad alimentadora j (en \$/pax-transp),
B_j= Buses-km esperados que el adjudicatario de la unidad troncal j recorrería en un año,
P_j= Pasajeros que el adjudicatario de la unidad alimentadora j transportaría en un año,

Por lo tanto, como el objetivo del modelo es minimizar la tarifa total, y se deben considerar las restricciones del número máximo de unidades alimentadoras y troncales que un licitante se puede adjudicar, así como que todas las unidades deben adjudicarse, la formulación del modelo resulta ser:

$$P) \quad Min \quad \sum_{j=1}^{5} \sum_{i \in I_j} B_j O_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{10} \sum_{i \in K_j} P_j Q_{ij} y_{ij}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{5} x_{ij} + \sum_{j=1}^{10} y_{ij} &\leq 4 && \forall i \\ \sum_{j=1}^{5} x_{ij} &\leq 2 && \forall i \\ \sum_{i \in I_j} x_{ij} &= 1 && \forall j \\ \sum_{i \in K_j} y_{ij} &= 1 && \forall j \\ x_{ij}, y_{ij} &\in \{0, 1\} && \forall i, j \end{aligned}$$

Problema Propuesto

1. Suponga que ante un eventual empate en la tarifa total se considera la asignación de unidades que manteniendo la tarifga mínima minimiza la antigüedad promedio de la flota. Suponga que como segundo mecanismo de desempate se considera aquella asignación que minimiza las emisiones esperadas de material particulado a la atmósfera. Formule modelos que le permitan resolver estas eventuales instancias de empate.

3.19 Consurso Revista "Don Balón"

La revista deportiva "Don Balón" ha organizado un concurso. Para esto, semana a semana, la revista evaluará a los jugadores (se supone que los equipos juegan una vez a la semana) con una nota en una escala de uno a siete. El campeonato cuenta con 16 equipos. Contando con esta calificación se podría elegir, al final del mes, los mejores jugadores del mes. El concurso consiste en que los lectores se anticipen y apuesten por los mejores jugadores. Para esto deberán crear un equipo ficticio (cada equipo de fútbol cuenta con 11 jugadores), considerando que:

- Cada equipo ficticio propuesto no puede incluir más de dos jugadores de un mismo equipo real.
- El equipo tendrá una formación 4-4-2, esto es tendrá 4 defensas, 4 mediocampistas y 2 delanteros, además del arquero, por supuesto.
- El equipo debe incluir como máximo 4 jugadores extranjeros.

Para esto se dispone de la información de todos los jugadores de cada club, la posición en que juegan, (un jugador no puede realizar distintas funciones en el equipo) y si son chilenos o extranjeros.

El objetivo de este problema es buscar cuál hubiese sido el mejor equipo ficticio válido que un lector hubiese podido crear. Para esto conocemos las calificaciones promedio del mes para todos los jugadores.

SOLUCIÓN

El objetivo del problema es encontrar el equipo con la mayor suma de notas, sujeto a las restricciones del concurso. De este modo, la decisión a tomar es si incluir o no a cada jugador en el equipo ideal, por lo que conviene definir las variables de decisión:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el jugador número } i \text{ del equipo } j \text{ es incluido en el equipo ideal} \\ 0 & \text{Si el jugador número } i \text{ del equipo } j \text{ no es incluido en el equipo ideal} \end{cases}$$

Por simplicidad se supondrá que cada equipo real cuenta con 22 jugadores, incluyendo sus reservas. Además debemos codificar de alguna manera los datos del problema, esto es, las notas, el puesto del jugador y si es o no extranjero. Esta codificación debe ser coherente con la elección de variables. Una buena forma para identificar el puesto de un jugador es decir si es o no defensa, o si es o no arquero, etc. Una forma de codificar esto es utilizar un valor binario, que valga uno si el jugador es arquero y cero si no. De esta manera, definimos:

n_{ij} = Nota promedio obtenida por el jugador i del equipo j en el mes que pasó.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el jugador número } i \text{ del equipo } j \text{ es arquero} \\ 0 & \text{Si el jugador número } i \text{ del equipo } j \text{ no es arquero} \end{cases}$$

$$d_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el jugador número } i \text{ del equipo } j \text{ es defensa} \\ 0 & \text{Si el jugador número } i \text{ del equipo } j \text{ no es defensa} \end{cases}$$

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el jugador número } i \text{ del equipo } j \text{ es mediocampista} \\ 0 & \text{Si el jugador número } i \text{ del equipo } j \text{ no es mediocampista} \end{cases}$$

$$t_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el jugador número } i \text{ del equipo } j \text{ es atacante} \\ 0 & \text{Si el jugador número } i \text{ del equipo } j \text{ no es atacante} \end{cases}$$

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el jugador número } i \text{ del equipo } j \text{ es extranjero} \\ 0 & \text{Si el jugador número } i \text{ del equipo } j \text{ es chileno} \end{cases}$$

Ahora cómo lo que se desea es obtener la mayor nota posible total, la función objetivo corresponde a maximizar la suma de las notas de los integrantes del equipo, esto es lo mismo que maximizar para todos los jugadores del campeonato, la suma de x_{ij} multiplicada por n_{ij}. El modelo debe considerar además que se cumplan las normas del concurso, esto es que no haya más de dos jugadores de un mismo equipo en el equipo ficticio y que existan a lo más 4 extranjeros en el equipo ideal; que se cumpla la formación (1 arquero, 4 defensas, 4 mediocampistas y 2 defensas) y que la variable x_{ij} sea binaria.

Considerando lo anterior, el modelo de optimización resulta ser:

$$P) \quad Max \quad \sum_{i=1}^{22}\sum_{j=1}^{16} n_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{array}{rcll}
\sum_{i=1}^{22} x_{ij} & \leq & 2 & \forall j \\
\sum_{i=1}^{22}\sum_{j=1}^{16} x_{ij}e_{ij} & \leq & 4 & \\
\sum_{i=1}^{22}\sum_{j=1}^{16} x_{ij}a_{ij} & = & 1 & \\
\sum_{i=1}^{22}\sum_{j=1}^{16} x_{ij}d_{ij} & = & 4 & \\
\sum_{i=1}^{22}\sum_{j=1}^{16} x_{ij}m_{ij} & = & 4 & \\
\sum_{i=1}^{22}\sum_{j=1}^{16} x_{ij}t_{ij} & = & 2 & \\
x_{ij} & \in & \{0,1\} & \forall i,j
\end{array}$$

Problemas Propuestos

1. Considere el caso en que a Ud. se le entregan, además, los precios de los jugadores y el sueldo que ellos cobran, y se le dice que cuenta con una cantidad de 20 millones de dólares para armar el equipo y con medio millón mensual para mantenerlo. Modifique el modelo para esta nueva condición.

2. Cómo modificaría el modelo si ahora Ud. debe conformar un equipo de 16 jugadores, donde 11 son titulares y 5 reservas. Estos reservas deben ser un arquero, un defensa, dos mediocampistas y un delantero. Considere que las notas de los reservas de su equipo son ponderadas por 0,8 para obtener la suma total de las notas del equipo.

3.20 Aumento de Capacidad de Plantas de CMPC

La Compañía Manufacturera de Papeles y Cartones (CMPC) ha decidido ampliar la capacidad de una de sus plantas, en un horizonte de 6 períodos de tiempo (cada período corresponde a 3 meses). Suponga que esta planta produce un solo producto. El propósito de la empresa es maximizar la capacidad productiva de la planta al final del sexto período. Para realizar esta expansión la empresa dispone de un capital inicial y de los recursos que obtenga por la venta de su único producto.
Suponga que la producción de una unidad de este producto requiere de d dólares (para la compra de materias primas y el pago de salarios) y de una unidad de capacidad de la planta; además genera una utilidad neta de r dólares que están disponibles al principio del período siguiente.
En cada período la empresa dispone de dos tecnologías constructivas para ampliar su planta; cada una de ellas requiere de efectivo durante el período de expansión y difieren en el tiempo requerido para llevar a cabo dicha expansión. Específicamente, construir una unidad de capacidad adicional usando la tecnología 1 requiere de b dólares al inicio de la construcción y genera la capacidad adicional al principio del período siguiente. Por otra parte, construir una unidad adicional de capacidad usando la tecnología 2 requiere de c dólares al inicio de la construcción y genera la capacidad adicional en el período subsiguiente. Sin embargo, por limitaciones de la empresa no se pueden instalar las dos tecnologías en un mismo periodo de tiempo
Al principio del horizonte de análisis, la compañía cuenta con un capital de D dólares para financiar su producción y expansión; no se contemplan otros recursos externos para financiar la operación y expansión durante los 6 periodos (salvo los recursos adicionales generados por la venta del producto). La capacidad de la planta al inicio del periodo 1 es K. Formule un modelo que permita maximizar la capacidad de la planta al final del periodo 6.

SOLUCIÓN

El problema consiste en decidir la forma de maximizar la capacidad de la planta, esto es, en que periodo realizar la expansión y con que tipo de tecnología. Definiremos las siguientes variables de decisión:

z_i = # de unidades de expansión llevadas a cabo en el periodo i usando la tecnología 1
w_i = # de unidades de expansión llevadas a cabo en el periodo i usando la tecnología 2
$x_i = \begin{cases} 1 \text{ si se usa la tecnología 1 para aumentar la capacidad de la planta en periodo } i \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$
$y_i = \begin{cases} 1 \text{ si se usa la tecnología 2 para aumentar la capacidad de la planta en periodo } i \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$

Consideremos además, las variables ligadas:

K_i = capacidad de la planta al principio del periodo i.
D_i = capital disponible al principio del periodo i.
u_i = producción en el periodo i.

Donde $D_1 = D$ y $K_1 = K$ son datos del problema.

EL objetivo del problema es maximizar la capacidad de la planta al final del perido i (que es lo mismo que maximizar K_7) considerando que la producción en el periodo 1 esta limitado por la capacidad inicial K, que no se pueden instalar las dos tecnologías en un mismo periodo, la restricción de carga que liga las variables z_i y w_i con x_i y y_i respectivamente (donde se considera una constante M lo suficientemente grande) y las restricciones que relacionan el capital, la capacidad y la producción entre un periodo y otro. De acuerdo a lo anterior, el modelo resulta ser:

$$P) \quad Max \quad K_7$$

$$\begin{array}{rcll}
u_1 & \leq & K & \\
x_i + y_i & \leq & 1 & \forall i \\
z_i & \leq & Mx_i & \forall i \\
w_i & \leq & My_i & \forall i \\
D_i & = & D_{i-1} - bz_{i-1} - cw_{i-1} - du_{i-1} & \forall i \\
K_i & = & K_{i-1} + z_{i-1} + w_{i-2} & \forall i \\
D_i & \geq & bz_i + cw_i + du_i & \forall i \\
D_1 & = & D & \\
K_1 & = & K & \\
x_i, Y_i & \in & \{0,1\} & \\
z_i, w_i, x_i, K_i, D_i, u_i & \in & enteros & \forall i
\end{array}$$

3.21 Instalación de Estaciones de Bomberos

Se acaba de inaugurar una nueva comuna en un país vecino; una de las decisiones que se deben tomar es dónde instalar las dos estaciones de bomberos necesarias. La comuna ha sido dividida en 5 distritos distintos, y no se puede localizar más de una bomba en cada distrito. Cada bomba debe atender los incendios del distrito donde esté instalada, así como los incendios que se le asignen de otros distritos. Las decisiones involucradas son: en qué distrito instalar las estaciones, y las asignaciones de los restantes distritos a las estaciones. El objetivo es minimizar el tiempo promedio de respuesta a todos los incendios. La Tabla 38 muestra los tiempos promedios de respuesta a un incendio por cada distrito y ubicación posible de una estación; además de incluir el número

	Incendio en Distrito				
Estación ubicada en	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	5	12	30	20	15
2	20	4	15	10	25
3	15	20	6	15	12
4	25	15	25	4	10
5	10	25	15	12	5
Promedio Incendios	2	1	3	1	3

Table 38: Tiempos de Respuesta a Incendios y Promedio de Incendios

promedio de incendios diarios en cada uno de ellos. Formule un modelo de programación lineal entera para resolver este problema.

SOLUCIÓN

Se debe formular un modelo que permita determinar en que distritos instalar las bombas y como asignar los restanes distritos a estas estaciones. Para ello definiremos las siguientes variables:

$$x_i = \begin{cases} 1 \text{ Si se instala una bomba en el distrito } i \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases} \qquad i = \{1,2,3,4,5\}$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ Si el distrito } j \text{ es atendido por la bomba ubicada en el distrito } i \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases} \qquad i \neq j$$

Identifiquemos los datos del problema como:

t_{ij} = Tiempo de respuesta desde la bomba ubicada en el distrito i a un incendio en el distrito j.
n_j = Número promedio de incendios del distrito j.

El objetivo del problema es minimizar el tiempo de respuesta a todos los incendios, considerando que solo se pueden instalar dos bombas, que cada distrito debe ser atendido por una bomba y que si en el distrito i no se ha instalado ninguna bomba no es posible atender a ningun otro distrito desde ahí. Considerando lo anterior formualmos el siguiente modelo:

$$P) \quad Min \quad \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} n_j t_{ij} z_{ij}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{5} x_i &= 2 \\ x_j + \sum_{i=1, i\neq j}^{5} z_{ij} &= 1 \qquad \forall j \\ z_{ij} &\leq x_i \qquad \forall i \neq j \\ z_{ij}, x_i &\in \{0,1\} \quad \forall i,j \end{aligned}$$

3.22 Localización de Fábricas

Existen n ciudades de una región que requieren de cierto producto; la demanda anual del producto en la ciudad i es de d_i unidades. La empresa que producirá este producto ha decidido instalar a lo sumo m fábricas en la región para satisfacer estas demandas. Asuma que sólo se puede instalar a lo más una fábrica en cada ciudad. El costo fijo de instalar una fábrica en la ciudad i es f_i y la capacidad máxima de producción anual de esa fábrica es de k_i unidades. También es necesario construir las rutas para transportar los productos de las fábricas a las otras ciudades; el costo fijo de construcción del camino entre la ciudad i la ciudad j es f_{ij} y tiene una capacidad anual de transporte de $k_{i,j}$ unidades. El costo unitario de transporte entre la ciudad i y la ciudad j es de c_{ij}. Formule un modelo que permita encontrar la localización óptima de las fábricas, los caminos que deben construirse y los flujos de productos de modo de minimizar los costos totales.

SOLUCIÓN

Debemos plantear un modelo que permita identificar la localización óptima de las fábricas, los caminos que deben construirse para atender cada ciudad y los flujos de productos entre fabricas y ciudades, para ello definiremos:

$$x_i = \begin{cases} 1 \text{ Si se instala una fábrica en la ciudad } i \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases} \qquad i = 1, ..., n$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ Si la demanda de la ciudad } j \text{ es atendida por una fábrica ubicada en la ciudad } i \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

Nótese que no fue necesario definir una variable para encontrar el flujo de productos, ya que este corresponde al producto entre z_{ij} y d_j.

El objetivo del problema es minimizar el costo de satisfacer las demandas de cada ciudad, considerando que a lo más se pueden instalar m fábricas, que si no se instala una fábrica en i no puede existir una ruta asociada a ella, que todas las ciudades deben ser atendidas, que las fábricas y las rutas tienen una capacidad máxima de producción y transporte anual, respectivamente, Considerando lo anterior obtenemos la siguiente formulación:

$$P) \quad Min \quad \sum_{i=1}^{n} x_i f_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, i \neq j}^{n} z_{ij} f_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, i \neq j}^{n} c_{ij} d_j$$

$$\begin{array}{rcll} \sum_{i=1}^{n} x_i & \leq & m & \\ z_{ij} & \leq & x_i & \forall j \neq i \\ x_j + \sum_{i=1, i \neq j}^{n} z_{ij} & = & 1 & \forall j \\ x_i d_i + \sum_{j=1, i \neq j}^{n} z_{ij} d_j & \leq & k_i & \forall i \\ z_{ij} d_j & \leq & k_{ij} & \forall i, j \\ z_{ij}, x_i & \in & \{0,1\} & \forall i, j \end{array}$$

3.23 Maratón de Programas Infantiles

Para cuidar de su sobrino este sábado, un tío se propone llevar a cabo una maratón de programas infantiles. Para ello, este tío se ha preocupado de listar los programas en un conjunto, que ha llamado J (que son los programas que ve el sobrino). Además, ha averiguado la cantidad de capítulos que existen, y que son N_j para el programa j, y la duración en minutos de cada capítulo, que es T_j (todos los capítulos de un mismo programa tienen la misma duración), con $j \in J$.

Los padres del sobrino, enterados del plan del tío, le han puesto tres exigencias a esta maratón: (1) como máximo puede durar W minutos, (2) todo capítulo que será visto debe ser visto íntegramente, y (3) si el programa j forma parte de la maratón, entonces se deben ver al menos l_j capítulos de ese programa, con $j \in J$.

(a) Basándose en la información anterior, construya un modelo de programación lineal entera que permita a este tío diseñar la maratón de programas infantiles de manera de maximizar su duración.
Note que todos los capítulos de un programa son iguales desde el punto de vista del tío ya que duran lo mismo.

(b) Como era de esperar, este tío no tiene ningún programa infantil en su casa, por lo que deberá arrendarlos a su operador de cable (que se encargará de emitir los programas/capítulos escogidos). El arriendo de cualquier capítulo del programa j, con $j \in J$, cuesta g_j pesos, mientras que el arriendo de todos los capítulos de ese mismo programa cuesta c_j pesos (asuma que $c_j \leq N_j g_j$). Considere la nueva información para modificar el modelo de la parte (a) de manera de asegurar que la maratón no le costará al tío más de R pesos. Tenga en cuenta que todo capítulo arrendado es visto íntegramente.

(c) El cable operador informa al tío que existe un tiempo de preparación cuando se pasa de la emisión de un capítulo de un programa a la emisión de un capítulo de un programa diferente (este tiempo se conoce como tiempo de preparación). Específicamente, este tiempo está calculado en f_{ij} minutos cuando se pasa de la emisión de un capítulo del programa j a la emisión de un capítulo del programa i. Dado lo anterior, el tío ha decidido que todos los capítulos que verán de un mismo programa los verán consecutivamente[40]. Incorpore esta nueva información al modelo de la parte (b) de manera que el tiempo total de preparación sea a lo más de H minutos.

SOLUCIÓN[41]

(a) **Variables de decisión**

- x_j: 1, si el programa $j \in J$ es parte de la maratón de programas infantiles; 0, en otro caso.
- y_j: cantidad de capítulos del programa $j \in J$ que serán vistos durante la maratón de programas infantiles.

Función objetivo

$$Z = \max \sum_{j \in J} T_j y_j \tag{34}$$

Restricciones

- *No programar más de los capítulos que existen para cada programa si el programa forma parte de la maratón.*
$$y_j \leq N_j x_j, \ \forall j \in J. \tag{35}$$
- *Si un programa forma parte de la maratón, entonces se debe ver una cantidad mínima de capítulos de ese programa.*
$$y_j \geq l_j x_j, \ \forall j \in J. \tag{36}$$
- *La totalidad de programas/capítulos que forman parte de la maratón deben ajustarse a las W horas establecidas por los padres.*
$$\sum_{j \in J} T_j y_j \leq W. \tag{37}$$
- *Naturaleza de las variables de decisión*
$$\begin{aligned} x_j &\in \{0,1\}, \ \forall j \in J. \\ y_j &\geq 0, \text{enteras } \forall j \in J. \end{aligned} \tag{38}$$

(b) Las modificaciones a la parte (a) son:

Nuevas variables de decisión

- α_j: 1, si el tío arrienda todos los capítulos del programa $j \in J$; 0, en otro caso.

[40] Por ejemplo, si el tío decide que vean 4 capítulos del programa 1 y 2 capítulos del programa 2, los verán de una de las siguientes formas: los 4 capítulo del programa 1 primero y luego los 2 capítulos del programa 2, o los 2 capítulos del programa 2 primero y luego los 4 capítulos del programa 1.

[41] Interrogación 3, 2014'2

- h_j: costo variable si el tío no arrienda la totalidad de los capítulos del programa $j \in J$.

Nuevas restricciones

- *No superar el presupuesto establecido para la maratón.*

$$\sum_{j \in J} c_j \alpha_j + \sum_{j \in J} h_j \leq R. \tag{39}$$

- *Construcción de la variable h_j.*

$$h_j \geq g_j y_j - M\alpha_j, \ \forall j \in J. \tag{40}$$

con $M >> 0$.

- *Primera relación entre α_j e y_j: si se arriendan todos los capítulos de un programa entonces se debe cancelar el costo correspondiente c_j.*

$$(y_j - N_j) + 1 \leq \alpha_j, \ \forall j \in J. \tag{41}$$

- *Segunda relación entre α_j e y_j: si no se arriendan todos los capítulos de un programa entonces no se debe cancelar el costo correspondiente c_j.*

$$1 - \frac{N_j - y_j}{N_j} \geq \alpha_j, \ \forall j \in J. \tag{42}$$

- *Naturaleza de las variables de decisión*

$$\begin{array}{c} \alpha_j \in \{0,1\}, \ \forall j \in J. \\ h_j \geq 0, \text{enteras } \forall j \in J. \end{array} \tag{43}$$

(c) Las modificaciones a la parte (b) son:

Nueva variable de decisión

- β_{ij}: 1, si los capítulos del programa $j \in J$ se verán justo después de los capítulos del programa $i \in J$, con $i \neq j$; 0, en otro caso.

Nuevas restricciones

- *No superar el tiempo máximo de preparación permitido para la maratón.*

$$\sum_{j \in J} \sum_{j \in J: j \neq i} f_{ij} \beta_{ij} \leq H. \tag{44}$$

- *Si un programa es visto entonces posee a lo más un programa que lo antecede.*

$$\sum_{i \in J: i \neq j} \beta_{ij} \leq x_j, \ \forall j \in J. \tag{45}$$

- *Si un programa es visto entonces posee a lo más un programa que lo precede.*

$$\sum_{i \in J: i \neq j} \beta_{ji} \leq x_j, \ \forall j \in J. \tag{46}$$

- *La cantidad total de programas antecesores (o predecesores) se relaciona con la cantidad de programas que verán en la maratón.*

$$\sum_{j \in J} \sum_{i \in J: i \neq j} \beta_{ji} = \left(\sum_{j \in J} x_j \right) - 1. \tag{47}$$

- *Naturaleza de las variables de decisión*

$$\beta_{ij} \in \{0,1\}, \ \forall j \in J. \tag{48}$$

3.24 Instalación de Tiendas

En una región del país hay n ciudades y una empresa comercial desea instalar una tienda en k de estas ciudades, $k < n$. Si se instala una tienda en la ciudad i se genera un ingreso de a_i; $i = 1, \ldots, n$. Si se instala una tienda en la ciudad i y una tienda en la ciudad j, se incurre en un costo c_{ij} debido a las necesidades de comunicación entre esas oficinas (esto es válido para todo par de ciudades i, j con $i \neq j$). Formule un modelo de programación lineal entera que permita encontrar la localización óptima de las tiendas.

SOLUCIÓN

El problema cosiste en determinar en que ciudades deben ser instaladas las tiendas, por lo que emplearemos las siguientes variables para el modelo:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{Si se instala una tienda en la ciudad i} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \qquad \forall i$$

$$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si se instala una tienda en la ciudad } i \text{ y otra en la ciudad } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \qquad \forall i, j$$

El objetivo del modelo es maximizar la utilidad total percibida por la instalación de las tiendas, considerando como restricciones que se deben instalar k tiendas en total, y la relación existente entre las variables x_i y z_{ij}, esto es si $x_i = 1$ y $x_j = 1$ entonces necesariamente $z_{ij} = 1$. Considerando lo anterior formulamos el siguiente modelo de programación entera:

$$P) \quad Max \ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, i \neq j}^{n} c_i z_{ij}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_i &= k \\ z_{ij} &\geq x_i + x_j - 1 \quad \forall i \neq j \\ z_{ij}, x_i &\in \{0,1\} \qquad\quad \forall i, j \end{aligned}$$

3.25 Planificación de Vuelos Aéreos

LAN-CHILE desea planificar sus vuelos domésticos para el siguiente mes, por lo que debe asignar sus aviones a las distintas rutas. Existen n rutas disponibles y el número esperado de pasajeros que demandará un vuelo (one way trip) en la ruta j $(j = 1, ..., n)$ es b_j. Para simplificar el problema, asuma que si un pasajero se baja en alguna parada intermedia del vuelo, antes de llegar a su destino final, hay otro pasajero que se sube al avión en esa parada. Por esto asumiremos que la demanda representa trayectorias en una dirección (one way trip), desde el origen hasta el destino de la ruta. La empresa tiene m tipos distintos de aviones, y cuenta con a_i aviones del tipo i, $i = 1, ...m$. Un avión tipo i que vuela la ruta j puede llevar d_{ij} pasajeros y reporta una utilidad de p_{ij} por pasajero. Se desea determinar la asignación de aviones a las rutas de modo de maximizar las utilidades de la compañía en el próximo mes.

SOLUCIÓN

Se debe formular un modelo que permita determinar la asignación de aviones a las rutas, por lo que conviene emplear las siguientes variables de decisión:

x_{ij} = Número de aviones tipo i asignados a la ruta j.
z_{ij} = Total de pasajeros de la ruta j que serán transportados por avión tipo i.

El objetivo del problema es maximizar la utilidad de la línea aérea considerando que existe una disponibilidad máxima de aviones de cada tipo, que se debe cumplir la demanda esperada en cada ruta y que existe una cantidad máxima de pasajeros que puede transportar cada avión. Esto nos permite formular el siguiente modelo de optimización:

$$P) \quad Max \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}z_{ij}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} &\leq a_i && \forall i \\
\sum_{i=1}^{m} z_{ij} &= b_j && \forall j \\
z_{ij} &\leq x_{ij}d_{ij} && \forall i,j \\
z_{ij}, x_{ij} &\in enteros && \forall i,j
\end{aligned}$$

3.26 Mezcla de Pinturas

Un minorista de pinturas compra algunos colores básicos a sus proveedores y las mezcla para obtener las K tonalidades ($k = 1, \ldots, K$) que comercializa a sus clientes.

Esta empresa comercializadora de pinturas compra J colores básicos ($j = 1, \ldots, J$) a los I proveedores ($i = 1, \ldots, I$) con que trabaja. Al realizar un pedido al proveedor I se incurre en un costo fijo de valor f_i. Por cada color j que se incluye en el pedido a este proveedor se debe cancelar un costo fijo g_{ij}. Adicionalmente a estos costos fijos, se paga un costo variable c_{ij} por cada litro de color j comprado al proveedor i. Por política de la empresa, no se compra más de H_i colores básicos distintos al proveedor i.

Para obtener la tonalidad k, se deben combinar los colores básicos en proporciones bien definidas. En particular, para cada litro de color k se deben usar a_{jk} litros del color básico j.

Las pinturas que se comercializan deben respetar condiciones de densidad mínima y máxima. La densidad mínima aceptable para el color k es q_k [kg/l], mientras que la densidad máxima aceptable para ese mismo color es Q_k [kg/l]. La densidad de la pintura de color básico j del proveedor i es r_{ij}.

Considerando la información entregada, formule un modelo de programación lineal mixto que permita planificar la compra de insumos y las mezclas de manera de satisfacer demandas por un total de d_k litros de la tonalidad k ($k = 1, \ldots, K$) a costo total mínimo.

SOLUCIÓN[42]

Variables

x_{ijk}: litros de color básico j del proveedor i para hacer tonalidad k.

y_i: variable binaria que vale 1 si se compra algo al proveedor i.

z_{ij}: variable binaria que vale 1 si se compra color básico j al proveedor i.

Las variables binarias se necesitan pues existen costos fijos en los que se incurre solo por el hecho de comprar, independiente de la cantidad. Además, la variable x_{ijk} se modeló con todos los índices para simplificar las restricciones. Se podría haber modelado de otra forma, pero acá se presenta lo que se cree que resulta más simple.

Función objetivo La función objetivo consiste en minimizar los costos totales:

$$\min \sum_{i=1}^{I} f_i y_i + \sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} g_{ij}z_{ij} + \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} c_{ij}x_{ijk}$$

[42]Interrogación 1, 2011'1

Restricciones

1. Satisfacción de la demanda. Para cada tonalidad final k:

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} x_{ijk} = d_k \,.$$

2. Definición de variables binarias (restricciones tipo M-grande):

$$\sum_{k=1}^{K} x_{ijk} \leq M z_{ij}\,, \qquad \text{para } i = 1,\ldots,I\,,\;\; j = 1,\ldots,J\,.$$

   Aquí M se puede definir como la suma de todas las demandas $\sum_{k=1}^{K} d_k$. La definición del "menor M" posible es un poco más complicada.

$$\sum_{j=1}^{J} z_{ij} \leq H_i y_i\,, \qquad \text{para } i = 1,\ldots,I\,.$$

3. Receta, para cada color básico j y cada tonalidad k:

$$\sum_{i=1}^{I} x_{ijk} = a_{jk}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} x_{ijk}\,,$$

   o equivalentemente

$$\sum_{i=1}^{I} x_{ijk} = a_{jk} d_k\,.$$

4. Condiciones de densidad. Para tonalidad k:

$$q_k\left(\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} x_{ijk}\right) \leq \sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} r_{ij}x_{ijk} \leq Q_k\left(\sum_{k=1}^{K}\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} x_{ijk}\right)\,.$$

5. Naturaleza de las variables

   $x_{ijk} \geq 0$, para cada color básico $j = 1,\ldots,J$, para cada proveedor $i = 1,\ldots,I$ y para cada tonalidad $k = 1,\ldots,K$.

   $y_i \in \{0,1\}$, para cada proveedor $i = 1,\ldots,I$.

   $z_{ij} \in \{0,1\}$, para cada color básico $j = 1,\ldots,J$ y cada proveedor $i = 1,\ldots,I$.

3.27 Sello discográfico

Un reconocido cantante ha terminado de escribir nuevas canciones para su próximo disco, y las ha listado en orden alfabético en el conjunto N. La duración de cada canción es conocida, y se encuentra registrada en el parámetro t_i, que indica la duración en minutos de la canción i, para todo $i \in N$.

El sello discográfico de este cantante, luego de escuchar el material, ha decidido agrupar las canciones en diferentes discos, teniendo como requisitos que: cada canción debe ser incluida en un sólo disco, cada disco debe contener un mínimo de R canciones, y la duración de cada disco debe ser a lo más de T minutos. Considere que el nombre de los nuevos discos que se producirán con este nuevo material son conocidos y se encuentran listados en el conjunto D.

Para el diseño de los nuevos discos, se ha realizado un estudio del cual se ha concluido que la valoración que el mercado hará de cada disco –medida en probabilidad de compra– depende exclusivamente del orden en que las canciones son colocadas en cada disco. En consecuencia, se ha construido el parámetro B_{ij}, que indica la valoración que aporta a un disco el que la canción i esté justo antes que la canción j.

Con la información anterior, formule un modelo de programación lineal entera que permita diseñar los discos de manera que se maximice su valoración en el mercado.

SOLUCIÓN[43]

Variables

x_{ij}^d	variable binaria que vale 1 si la canción i está justo antes que la canción j en el disco d, y que toma valor 0 en cualquier otro caso.
y_i^d	variable binaria que vale 1 si la canción i es incluida en el disco d, y que toma valor 0 en cualquier otro caso.

Función Objetivo (2 puntos)

La función objetivo consiste en maximizar la valoración de mercado de los discos. Esto queda:

$$\max \sum_{j \in N} \sum_{i \in N: i \neq j} B_{ij} \left(\sum_{d \in D} x_{ij}^d \right)$$

Restricciones

1) Toda canción debe estar en un y sólo un disco. (1 punto)

$$\sum_{d \in D} y_i^d = 1 \qquad \forall\, i \in N.$$

2) Cada disco contiene al menos R canciones. (2 puntos)

$$\sum_{i \in N} y_i^d \geq R \qquad \forall\, d \in D.$$

3) Cada disco tiene una duración máxima de T minutos. (2 puntos)

$$\sum_{i \in N} t_i y_i^d \leq T \qquad \forall\, d \in D.$$

4) Primera relación entre las variables. (2 puntos)

$$\sum_{j \in N: j \neq i} x_{ij}^d + \sum_{j \in N: j \neq i} x_{ji}^d \geq y_i^d \qquad \forall\, i \in N; d \in D.$$

5) Segunda relación entre las variables. (1 punto)

$$\sum_{j \in N: j \neq i} x_{ij}^d + \sum_{j \in N: j \neq i} x_{ji}^d \leq 2 y_i^d \qquad \forall\, i \in N; d \in D.$$

6) Se necesita construir el orden de las canciones en cada disco, y que este orden tenga sentido. Primera restricción. (2 puntos)

$$\sum_{d \in D} \sum_{j \in N: j \neq i} x_{ij}^d \leq 1 \qquad \forall\, i \in N.$$

[43] Interrogación 2, 2013'2

7) Se necesita construir el orden de las canciones en cada disco, y que este orden tenga sentido. Segunda restricción. (1 punto)

$$\sum_{d \in D} \sum_{i \in N: i \neq j} x_{ij}^d \leq 1 \qquad \forall\, j \in N.$$

8) Se necesita construir el orden de las canciones en cada disco, y que este orden tenga sentido. Tercera restricción. (2 puntos)

$$\sum_{d \in D} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N: j \neq i} x_{ij}^d = Card(N) - Card(D)$$

9) Naturaleza de las variables. (1 punto)

$$x_{ij}^d \in \{0,1\} \qquad \forall\, i \in N; j \in N : i \neq j; d \in D.$$
$$y_i^d \in \{0,1\} \qquad \forall\, i \in N; d \in D.$$

3.28 Asignación de Becas Universitarias

La oficina de becas de una universidad americana debe entregar becas de arancel a n estudiantes. El estudiante número i requiere M_i dólares de beca; $i = 1, 2, \ldots .n$. La oficina cuenta con s becas; la beca número j consta de a_j dólares; $j = 1, \ldots, s$ (s>n). La oficina está abierta a la posibilidad de entregar más de una beca a un estudiante de modo de satisfacer su requerimiento, pero no puede reducir el monto de ninguna beca. Formule un modelo que permita satisfacer todos los requerimientos y que maximice la cantidad de dinero no distribuido en becas.

SOLUCIÓN

El problema consiste en asignar cada una de las becas a los estudiantes, por lo que conviene definir:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ Si la beca } j \text{ es asignada al estudiante } i \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

El objetivo del modelo es maximizar la cantidad de dinero no distribuido en becas, satisfaciendo los requerimientos de cada alumno y considerando que una beca no puede ser asignada a más de un estudiante. Esto permite formular el siguiente modelo:

$$P) \quad Max \quad \sum_{j=1}^{s} a_j - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{s} x_{ij} a_j$$

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\sum_{j=1}^{s} x_{ij} a_j & \geq & M_i & \forall i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} & \leq & 1 & \forall j \\ x_{ij} & \in & \{0,1\} & \forall i, j \end{array}$$

3.29 Organización de Campeonato ANFA

La Asociación Nacional de Fútbol de Amigos está organizando un campeonato nacional en el que participarán I equipos. Dada la alta cantidad de equipos inscritos, los organizadores del torneo se han convencido que no podrán jugar todos contra todos, así que han definido arbitrariamente los partidos que se jugarán. Esta información se encuentra disponible en el parámetro α_{ij}, que tiene valor 1 si el partido entre el equipo i y el equipo j se deberá jugar, y 0 en caso de que no sea así.

Este torneo se realizará en el complejo deportivo de la asociación durante T días seguidos en las próximas vacaciones de invierno. Se sabe que la capacidad de esas instalaciones permite disputar un máximo de Q partidos por día.

Los organizadores del torneo desean que éste posea equidad deportiva, la que consiste en que un equipo juega a lo más un partido por día y que, para todo día t, la cantidad de partidos que cada equipo tiene programados desde el día 1 al día t, nunca tiene una diferencia de más de dos partidos con la cantidad de partidos programados hasta ese mismo día para cualquier otro equipo.

Basándose en la información anterior, construya un modelo de programación lineal entera que permita a los organizadores del torneo programar todos los partidos que se jugarán dentro de esos T días. Esta programación debe asegurar que se respetan todas las condiciones antes descritas con el menor número de días sin ningún partido programado.

SOLUCIÓN[44]

Se definen las siguientes variables:
x_{ijt}: es igual a 1 si se programa el partido entre los equipos i y j en el día t, 0 en otro caso.
z_{it}: variable entera que indica la cantidad de partidos que se han programado para el equipo i hasta el día t.
y_t: es igual a 1 si en el día t no hay partidos programados.

La función consiste en minimizar la cantidad de días sin partidos:

$$\min \sum_{t=1}^{T} y_t$$

Restricciones:

Cada partido que se debe jugar se debe programar en exactamente una fecha. Dada la definición de la variable se necesita ver el caso en que i es local o j es local (asumiendo que $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$):

$$\sum_{t=1}^{T} x_{ijt} + \sum_{t=1}^{T} x_{jit} = \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{2} \qquad \forall i, j \in I : i \neq j$$

No asignar más partidos a un día que la capacidad del complejo deportivo:

$$\sum_{i,j \in I : i \neq j} x_{ijt} \leq Q \qquad \forall t = 1, ..., T$$

Calcular la cantidad de partidos que programados para cada equipo hasta el día t (inclusive):

$$z_{it} = \sum_{r=1}^{t} \sum_{j \in I : i \neq j} (x_{ijr} + x_{jir}) \qquad \forall i \in I, t = 1, ..., T$$

Garantizar que la diferencia de la cantidad de partidos programados hasta ese mismo día para cualquier par de equipos nunca es de más de dos partidos:

$$z_{it} - z_{jt} \leq 2 \qquad \forall i, j \in I, i \neq j; t = 1, ..., T$$

$$z_{it} - z_{jt} \geq -2 \qquad \forall i, j \in I, i \neq j; t = 1, ..., T$$

Construcción de variable:

$$y_t \geq \frac{\sum_{i,j \in I : i \neq j} x_{ijt}}{M} \qquad \forall t = 1, ..., T$$

$$y_t \leq \sum_{i,j \in I : i \neq j} x_{ijt} \qquad \forall t = 1, ..., T$$

[44] Examen, 2016'1

con M muy grande.

Asegurar que cada partido que se debe jugar se programe a lo más una vez en los T días:

$$\sum_{j \in I: i \neq j} (x_{ijt} + x_{jit}) \leq 1 \qquad \forall i \in I, t = 1, ..., T$$

Por último, la naturaleza de las variables:

$$x_{ijt}, y_t \in \{0, 1\} \qquad \forall i, j \in I, i \neq j; t = 1, ..., T$$
$$z_{it} \in \mathbb{Z}_0^+ \qquad \forall i \in I, t = 1, ..., T$$

3.30 Brote de enfermedad contagiosa

Un brote de una enfermedad contagiosa ha sido descubierto en un conjunto N de ubicaciones. Existe un conjunto M de equipos capaces de investigar estos brotes. El equipo $i \in M$ puede concluir su investigación sobre el brote en la ubicación $j \in N$ en t_{ij} horas. Cada equipo puede investigar cero, uno o dos brotes. Si un equipo investiga dos brotes, debe entonces viajar de una ubicación a la siguiente. El tiempo de viaje desde la ubicación $j_1 \in N$ a la ubicación $j_2 \in N$ es $2d_{j_1 j_2}$. Asuma que el tiempo de traslado desde el centro de control a cualquiera de las ubicaciones $j \in N$, y desde las ubicaciones al centro de control, es despreciable, y que todos los equipos comenzarán a trabajar en sus asignaciones desde la hora cero ($t = 0$).

Una vez que todos los brotes han sido investigados, un centro de control de enfermedades puede tomar acción para combatir el brote. Así, se requiere completar la investigación en todas las ubicaciones en una cantidad de tiempo mínima y, para ello, se les pide modelar la situación con un modelo de programación lineal entera.

SOLUCIÓN[45]

Para que el modelo sea lineal, es necesario definir dos conjuntos de variables:
Variables:

x_{ij}: Variable binaria que vale 1 si el equipo $i \in M$ investiga el brote en la ubicación $j \in N$, y 0 si no.

$w_{ij_1j_2}$: Variable binaria que representa la expresión $x_{ij_1} \cdot x_{ij_2}$.

θ: Tiempo en que termina la última investigación en terminar.

Función objetivo:

$$\min \theta$$

Restricciones:

(R1): cada ubicación debe ser cubierta por exactamente un equipo de investigación.

$$\sum_{i \in M} x_{ij} = 1 \qquad \forall j \in N$$

(R2): Cada equipo puede investigar como máximo dos ubicaciones.

$$\sum_{j \in N} x_{ij} \leq 2 \qquad \forall i \in M$$

(R3): Construir la variable $w_{ij_1j_2}$.

$$w_{ij_1j_2} \leq x_{ij_1}$$
$$w_{ij_1j_2} \leq x_{ij_2}$$
$$w_{ij_1j_2} \geq x_{ij_1} + x_{ij_2} - 1$$

[45] Interrogación 1, 2017'1

(R4): Determinación de θ. Notar que, para cada equipo i, $d_{j_1j_2}$ tomará valor solamente si el equipo i visita tanto j_1 como j_2.

$$\sum_{j\in N} t_{ij}x_{ij} + \sum_{j_1\in N}\sum_{j_2\in N: j_1\neq j_2} d_{j_1j_2}w_{ij_1j_2} \leq \theta \qquad \forall i\in M$$

(R5): Naturaleza de las variables:

$$\theta \geq 0$$
$$x_{ij}\in\{0,1\} \qquad \forall i\in M \qquad \forall j\in N$$
$$w_{ij_1j_2}\in\{0,1\} \qquad \forall i\in M, \qquad \forall j_1,j_2\in N$$

3.31 Despacho de Pedidos

La compañía Siempre Rápido S.A. debe hacer entregas a 10 clientes cuyos pedidos tienen un volumen de $d_1,\ldots,d_{10}$. La empresa posee cuatro camiones cuyas capacidades (en volumen) son L_k, $k=1,\ldots,4$. El costo de operación del camión k es c_k. Un camión no puede entregar a más de cinco clientes en su viaje y los siguientes conjuntos de clientes NO pueden ser atendidos en un mismo viaje por un mismo camión: (1,7), (2,6) y (2,9). Formule un modelo para determinar qué camiones utilizar y qué clientes asignar a cada camión, de modo que se minimicen los costos totales de operación.

SOLUCIÓN[46]

Como debemos determinar que camiones utilizar y que clientes asignar a cada camión, emplearemos la siguientes variables de decisión para el modelo:

$$x_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{Si el cliente } i \text{ es asignado al camión } k \\ 0 & \text{Si no} \end{cases}$$
$$y_k = \begin{cases} 1 & \text{Si utilizo el camión } k \\ 0 & \text{Si no} \end{cases}$$

Ahora bien, el objetivo del modelo es minimizar los costos totales de operación, considerando que todos los clientes deben ser atendidos, que cada camión tiene un limite de capacidad, que un camión no puede atender a más de 5 clientes en su viaje y que existen clientes que no pueden ser atendidos en un mismo viaje por un mismo camión. Considerando lo anterior y la naturaleza de las variables, obtenemos el siguiente modelo:

$$P) \quad Min \quad \sum_{k=1}^{4} c_k y_k$$

$$\begin{array}{rcll}
\sum_{k=1}^{4} x_{ik} & = & 1 & \forall i \\
\sum_{i=1}^{10} d_i x_{ik} & \leq & L_k & \forall k \\
\sum_{i=1}^{10} x_{ik} & \leq & 5y_k & \forall k \\
x_{1k}+x_{7k} & \leq & 1 & \forall k \\
x_{2k}+x_{6k} & \leq & 1 & \forall k \\
x_{2k}+x_{9k} & \leq & 1 & \forall k \\
x_{ik}, y_k & \in & \{0,1\} & \forall i,k
\end{array}$$

[46] Jorge Vera, Profesor Ing. Industrial PUC

3.32 Planificación de Producción y Almacenamiento

Se desea decidir respecto a producción e inventario para un horizonte de planificación de T períodos. Para cada período t existe una demanda conocida por cada uno de los K productos involucrados, D_{tk}. El costo fijo de producción es FPC_{kt}, y el costo variable unitario de producción es VPC_{kt}, para cada período t y para cada producto k. En cada período existe una disponibilidad de horas de producción H_t. Además es posible contratar HE_t horas extras en cada período a un costo fijo CHE_t. Cada producto k consume TC_k horas por unidad producida. Además existe una capacidad de almacenamiento HC_t, existiendo nuevamente la posibilidad de contratar un espacio de bodega ES_t, a un costo fijo FSC_t. El costo unitario de almacenamiento en ambos casos (con y sin espacio extra de almacenamiento) es CUH_{kt}. Cada producto k utiliza un espacio RS_k por unidad almacenada. Formule un problema entero mixto, que permita decidir sobre producción, almacenamiento, horas extras de producción y espacio extra para almacenamiento en cada uno de los períodos involucrados.

SOLUCIÓN[47]

Debemos formular un modelo que permita establecer una política de producción y almacenamiento, y que decida si contratar horas extras y espacio de bodega en cada periodo de tiempo. Para ello definiremos las siguientes variables de decisión:

x_{kt} = Cantidad de producto k que se produce en t.
h_{kt} = Nivel de inventario del producto k en el periodo t.

$$\delta_{kt} = \begin{cases} 1 \text{ Si se produce producto } k \text{ en periodo } t \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

$$\alpha_t = \begin{cases} 1 \text{ Si se emplean horas extras en el periodo } t \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

$$\beta_t = \begin{cases} 1 \text{ Si se contrata espacio de bodega en el periodo } t \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

El objetivo del problema es minimizar los costos totales de producción y almacenamiento, sujeto a las restricciones de nivel de inventario, de capacidad máxima de horas disponibles de producción, de capacidad máxima de espacio de almacenamiento y la restricción de carga que liga x_{kt} y δ_{kt}, con M una constante suficientemente grande. Considerando el inventario inicial de cada producto en 0, obtenemos el siguiente modelo de optimización:

$$P) \quad Min \quad \sum_{t=1}^{T}\sum_{k=1}^{K}(FPC_{kt}\delta_{kt} + VPC_{kt}x_{kt} + CUH_{kt}h_{kt}) + \sum_{t=1}^{N}(CHE_t\alpha_t + FSC_t\beta_t)$$

$$\begin{array}{rcll} h_{kt} & = & h_{k,t-1} + x_{kt} - D_{kt} & \forall k, \forall t \\ h_{0k} & = & 0 & \forall k \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{K} TC_{kt}x_{kt} & \leq & H_t + \alpha_t HE_t & \forall t \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{K} RS_k h_{kt} & \leq & HC_t + \beta_t ES_t & \forall t \\ x_{kt} & \leq & M\delta_{kt} & \forall k, \forall t \\ x_{kt}, h_{kt} & \geq & 0 & \forall k, \forall t \\ \delta_{kt}, \alpha_t, \beta_t & \in & \{0,1\} & \forall k, \forall t \end{array}$$

[47] Jorge Vera, Profesor Ing. Industrial PUC

3.33 Maximizando horario de atención

El profesor de un curso de la Escuela quiere definir sus horas de atención de alumnos, de modo que la mayor cantidad de éstos tenga disponibilidad horaria para asistir a al menos uno de dichos módulos. Suponga que en cada día de Lunes a Sábado hay M módulos horarios y que el curso cuenta con N alumnos. Para cada alumno se dispone de información de su carga académica, de modo que se conocen los módulos horarios en que cada uno tiene clases. Por lo tanto, en esos módulos el alumno no podría asistir al horario de atención de alumnos establecido por este profesor. Suponga que esta información está registrada en base al siguiente parámetro:

$$\alpha_{ijk} \quad : \quad \begin{cases} 1 & \text{si el alumno } i = 1, \ldots, N \text{ tiene libre el módulo } j = 1, \ldots, M \text{ del día } k = 1, \ldots, 6. \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por otro lado, el profesor tiene destinados algunos módulos horarios para desarrollar su investigación, por lo que en esos módulos no podrá atender alumnos. Esta información se encuentra registrada en el siguiente parámetro:

$$\beta_{jk} \quad : \quad \begin{cases} 1 & \text{si el profesor tiene libre el módulo } j = 1, \ldots, M \text{ del día } k = 1, \ldots, 6. \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

El desea destinar Q módulos horarios para la atención de alumnos durante esta semana, de modo de maximizar el número de alumnos que tiene libre al menos uno de esos módulos. Además, la asignación debe asegurar que la carga durante la semana es balanceada. Para ello, la cantidad de módulos asignados durante los tres primeros días (Lunes a Miércoles) no puede tener más de γ unidades de diferencia con la cantidad de módulos asignados para los últimos tres días (Jueves a Sábado).

a) Formule el problema que enfrenta el profesor como un modelo de programación lineal.

Mirando la solución que le entrega el modelo formulado en la parte a), este profesor tiene algunas consideraciones que desea incorporar en la confección de estos horarios de atención. Quiere que el calendario final de atenciones no tenga más de 3 módulos consecutivos de atención de alumnos (lo que le permite evitar posibles dolores de cabeza). Además, quiere que en aquellos casos en que tenga que atender alumnos durante 3 módulos consecutivos, los dos módulos inmediatamente siguientes no deberán ser asignados a atención de alumnos (esto incluso si estos módulos son los últimos de un día y los primeros del día siguiente). También tiene como regla que si atiende alumnos en el último módulo de un día no atenderá en el penúltimo módulo de ese mismo día.

b) Considerando las nuevas consideraciones realizadas por este profesor, modifique el modelo formulado en la parte a).

SOLUCIÓN[48]

a) El modelo de la parte a) es:

Variables

x_{jk}: binaria que vale 1 si se destina para atención de alumnos el modulo j, con $j = 1, \ldots, M$, del día k, con $k = 1, \ldots, 6$.

y_i: binaria que vale 1 si el alumno i, con $i = 1, \ldots, N$, puede asistir a algún modulo dispuesto por el profesor.

Función objetivo La función objetivo consiste en maximizar la cantidad de alumnos que podrán asistir a al menos uno de los módulos de atención de alumnos dispuesto por el profesor:

$$\max \quad \sum_{i=1}^{N} y_i$$

[48] Interrogación 3, 2011'2

Restricciones

R1) Construir variable y_i en función de la calendarización de módulos de atención de alumnos y la disponibilidad del alumno.

$$y_i \leq \sum_{k=1}^{6}\sum_{j=1}^{M} x_{jk} \cdot \alpha_{ijk} \quad \forall\, i = 1, \ldots, N.$$

R2) Posibilitar la elección de módulos por parte del profesor sólo en aquellos en que tiene disponibilidad.

$$x_{jk} \leq \beta_{jk} \quad \forall\, j = 1, \ldots, M; \quad \forall\, k = 1, \ldots, 6.$$

R3) Asignar todos los módulos deseados.

$$\sum_{k=1}^{6}\sum_{j=1}^{M} x_{jk} = Q$$

R4) Asegurar que la asignación respete la condición de balanceo dentro de la semana.

$$\sum_{k\in\{L,Ma,Mi\}}\sum_{j=1}^{M} x_{jk} - \sum_{k\in\{J,V,S\}}\sum_{j=1}^{M} x_{jk} \leq \gamma$$

$$\sum_{k\in\{J,V,S\}}\sum_{j=1}^{M} x_{jk} - \sum_{k\in\{L,Ma,Mi\}}\sum_{j=1}^{M} x_{jk} \leq \gamma$$

R5) Naturaleza de las variables.

$x_{jk} \in \{0, 1\}$, para módulo horario $j = 1, \ldots, M$ y día $k = 1, \ldots, 6$.
$y_i \in \{0, 1\}$, para alumno $i = 1, \ldots, N$.

b) Al modelo de la parte a) se le deben agregar las siguientes restricciones.

R6) Asegurar que no serán asignados más de 3 días consecutivos.

$$\sum_{j=m}^{m+3} x_{jk} \leq 3 \quad \forall\, m = 1, \ldots, M-3; \quad \forall\, k = 1, \ldots, 6.$$

$$\left(\sum_{j=M-2}^{M} x_{jk}\right) + x_{1(k+1)} \leq 3 \quad \forall\, k = 1, \ldots, 5.$$

$$\left(\sum_{j=M-1}^{M} x_{jk}\right) + \sum_{j=1}^{2} x_{j(k+1)} \leq 3 \quad \forall\, k = 1, \ldots, 5.$$

$$x_{Mk} + \sum_{j=1}^{3} x_{j(k+1)} \leq 3 \quad \forall\, k = 1, \ldots, 5.$$

R7) Asegurar que si se calendarizan 3 módulos seguidos, los siguientes 2 estén libres (en realidad bastaría sólo con asegurar solamente el segundo día libre).

$$2 \cdot \left(3 - \sum_{j=m}^{m+2} x_{jk}\right) \geq x_{(m+3)k} + x_{(m+4)k} \quad \forall\, m = 1, \ldots, M-4; \quad \forall\, k = 1, \ldots, 6.$$

	Proteína	Carbohidratos	Vitaminas	Grasas	Otros
Producto A	30 %	30 %	20 %	10 %	10 %
Producto B	15 %			65 %	20 %
Producto C		6 %	24 %	60 %	10 %

Table 39: Proporciones de Nutrientes

	Precio Kg ($)	Disponible (Kgs)
Proteínas	60	600
Carbohidratos	25	250
Vitaminas	40	400
Grasas	15	150
Producto A	30	300
Producto B	20	200
Producto C	15	150

Table 40: Precio de Productos

$$2 \cdot \left(3 - \left(\sum_{j=M-1}^{M} x_{jk}\right) + x_{1(k+1)}\right) \geq x_{2(k+1)} + x_{3(k+1)} \quad \forall\, k = 1, \ldots, 5.$$

$$2 \cdot \left(3 - x_{Mk} + \sum_{j=1}^{2} x_{j(k+1)}\right) \geq x_{3(k+1)} + x_{4(k+1)} \quad \forall\, k = 1, \ldots, 5.$$

R8) Asegurar que no se asignan el penúltimo y el último módulo.

$$x_{(M-1)k} + x_{Mk} \leq 1 \quad \forall\, k = 1, \ldots, 6.$$

3.34 Empresa de Alimentos de Gatos y Perros

Una empresa productora de alimentos para gatos y para perros está interesada en optimizar su sistema productivo. Estos productos se venden a $1.200 y a $1.400 el kilo respectivamente. Los alimentos deben tener una cierta proporción en peso de los nutrientes exigidos por la normativa vigente. En particular el alimento para gatos debe tener al menos un 3% de proteínas, a lo más un 30% de carbohidratos, exactamente un 13% de vitaminas y no más de un 20% de grasas. Por otro lado el alimento para perros debe tener al menos un 5% de proteínas, a lo más un 25% de carbohidratos, exactamente un 8% de vitaminas y no más de un 30% de grasas. Se asume que ambos tipos de alimentos no contienen otros productos.

Para conseguir los nutrientes, la empresa puede adquirirlos comprándolos puros o bien por medio de procesar alimentos que se venden en el mercado. Estos alimentos que se venden y que podrían procesarse los denominaremos A, B y C. Al descomponerlos, podrían obtenerse las proporciones de los nutrientes requeridos indicados en la Tabla 39. El costo de cada uno de los productos y su disponibilidad en el mercado se presenta en la Tabla 40.

Por último, considere que si se determina procesar un determinado alimento para obtener así los nutrientes se deberá comprar la máquina procesadora asociada al alimento (sólo si se decide hacerlo). El costo de la máquina se presenta en la Tabla 41.

Determine un modelo de programación matemática que optimice la producción de la empresa maximizando la utilidad. Note que todos los porcentajes de este problema se refieren al peso de los productos.

	Producto A	Producto B	Producto C
Precio de la Máquina	10.000	15.000	12.000

Table 41: Máquina Procesadora

SOLUCIÓN

El objetivo del problema es optimizar el proceso productivo de la empresa, maximizando su utilidad. Para ello se debe decidir la forma de conseguir los insumos y la manera de distribuirlos para fabricar los productos. En cuánto a la forma se pueden conseguir puros o a través de la compra de los productos A, B y C, y si se opta por esta última opción se deben adquirir las máquinas necesarias para el procesamiento; con respecto a la manera de distribuir los insumos se debe decidir la cantidad de insumo a emplear en cada producto. De acuerdo a esto conviene definir las siguientes variables:

w_i = Cantidad de insumo i comprada pura.
$i = \{1$:Proteínas, 2 : Carbohidratos, 3 :Vitaminas, 4 : Grasas$\}$
n_{ij} = Cantidad de insumo i utilizado en la producción del alimento j, $j = \{1$: Gatos, 2 : Perros$\}$
p_k = Cantidad comprada del producto tipo k. $k = \{A, B, C\}$

$$m_k = \begin{cases} 1 & \text{si se compra la máquina k} \\ 0 & \text{si no se compra la máquina k} \end{cases}$$

Además, definiremos la variable dependiente q_j como la sumatoria de los nutrientes empleados en el alimento respectivo.

q_j = Cantidad producida de alimento j.

El objetivo del modelo es maximizar las utilidades de la empresa, considerando que todo lo que se produce se vende y que los costos sólo incluyen los gastos por insumos y por las máquinas necesarias para procesarlos, se obtiene la función objetivo dada en (49). Las restricciones del modelo incluyen las especificaciones de composición de los productos, la disponibilidad de los insumos, la consistencia entre los insumos utilizados y los adquiridos, la dependencia de las variables dependientes y las propiedades de las variables de decisión.

De acuerdo a las consideraciones anteriores, obtenemos el siguiente modelo de optimización:

$$\begin{aligned} &P) \quad Max \quad 1200q_A + 1400q_B - 60w_1 - 25w_2 - 40w_3 - 15w_4 - \\ &30p_A - 20p_B - 15p_C - 10.000m_A - 15.000m_B - 12.000m_C \end{aligned} \tag{49}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{n_{1A}}{q_A} &\geq 0.03 \\
\frac{n_{2A}}{q_A} &\leq 0.3 \\
\frac{n_{3A}}{q_A} &= 0.13 \\
\frac{n_{4A}}{q_A} &\leq 0.2 \\
\frac{n_{1B}}{q_B} &\geq 0.05 \\
\frac{n_{2B}}{q_B} &\leq 0.25 \\
\frac{n_{3B}}{q_B} &= 0.08 \\
\frac{n_{4B}}{q_B} &\leq 0.3 \\
0 &\leq w_1 \leq 600 \\
0 &\leq w_2 \leq 250 \\
0 &\leq w_3 \leq 400 \\
0 &\leq w_4 \leq 150 \\
0 &\leq p_A \leq 300 \\
0 &\leq p_B \leq 200 \\
0 &\leq p_C \leq 150 \\
w_1 + 0.3p_A + 0.15p_B &\geq n_{1A} + n_{1B} \\
w_2 + 0.3p_A + 0.06p_C &\geq n_{2A} + n_{2B} \\
w_3 + 0.2p_A + 0.24p_C &\geq n_{3A} + n_{3B} \\
w_4 + 0.1P_A + 0.65p_B + 0.6p_C &\geq n_{4A} + n_{4B} \\
n_{1A} + n_{2A} + n_{3A} + n_{4A} &= q_A \\
n_{1B} + n_{2B} + n_{3B} + n_{4B} &= q_B \\
p_A \cdot (1 - m_A) &= 0 \\
p_B \cdot (1 - m_B) &= 0 \\
p_C \cdot (1 - m_C) &= 0 \\
n_{ij}, q_i, w_i, p_k &\geq 0 \quad \forall i, j, k \\
m_k &\in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

Problemas Propuestos

1. Cómo se modificaría el modelo si el precio que se puede cobrar por el alimento para gatos es función de la cantidad de alimento para gatos y perros que produce la fábrica, según $g(ap, ag)$ y $p(ag, ap)$ donde ap es la cantidad de alimento para perros y ag la cantidad de alimento para gatos. Considere una función análoga por el precio del alimento para perros. Considere además que los precios que se le cobran por los insumos A, B y C también varían según la cantidad consumida total de estos insumos según las funciones $PA(CA+CB+CC)$, $PB(CA+CB+CC)$, $PC(CA+CB+CC)$, donde CA, CB y CC son las cantidades consumidas de los productos A, B y C, y PA, PB, y PC son los precios que le cobran por los productos A, B y C.

2. ¿Cómo modificaría su modelo si la cantidad demandada de cada alimento está dada en función de los porcentajes de proteínas, carbohidratos, vitaminas y grasas, según las funciones $dg(P, C, V, G)$ y $dp(P, C, V, G)$, que representan, respectivamente, la cantidad demandada de alimento para gatos y alimento para perros, donde P, C, V y G representan los porcentajes en el alimento de proteínas, carbohidratos, vitaminas y grasas, respectivamente?

3.35 Festival de cortometrajes

Se está por realizar el festival de cine de cortometrajes de Santiago, y la comisión organizadora ha recibido N cortometrajes, cada uno de los cuales tiene una duración de t_n minutos. La realización de este festival se llevará a cabo durante un solo día, considerándose un máximo de T minutos de sala de para las proyecciones, teniéndose que $\sum_{n=1}^{N} t_n > T$. Dado esto, la comisión organizadora ha decidido que puede no pasar un cortometraje, lo que tiene un costo social valorizado en C_n si es que el cortometraje n no se proyecta. Para los cortometrajes que serán proyectados, la comisión puede editarlos de manera de reducir la duración del mismo. Sin embargo, para que la trama de un cortometraje se entienda deben ser proyectados al menos r_n minutos de éste (ese tiempo basta para que la edición sea adecuada), información conocida para todo $n = 1, ..., N$. La comisión valora en B_n el beneficio social de proyectar la versión original del cortometraje n con $n = 1, ..., N$, y en caso de proyectar la edición de ese cortometraje el beneficio es proporcional a la duración de la edición.

Además, la comisión sabe que en caso de proyectar menos de K cortometrajes se generará un costo social valorizado en G, y que existe un conjunto de cortometrajes que son incompatibles de ser proyectados en el mismo festival producto de rencillas entre los productores de éstos. En consecuencia, se conoce que si se proyecta el cortometraje n (ya sea de manera completa o editada), no se pueden proyectar los cortometrajes incluidos en el conjunto S_n. Considerando que no existe tiempo entre proyecciones sucesivas de cortometrajes, construya un modelo de Programación Lineal Mixta que permita a la comisión organizadora del evento maximizar el beneficio social producido por la realización del festival.

SOLUCIÓN[49]

Se definen las siguientes variables:
x_n: es igual a 1 si se proyecta el cortometraje n.
α: es igual a 1 si se proyectan menos de K cortometrajes.
y_n: duración de la proyección del cortometraje n.

Se debe maximizar el beneficio social total del festival. Por lo tanto, la función objetivo queda:

$$\max(\sum_{n=1}^{N} B_n \frac{y_n}{t_n}) - (\sum_{n=1}^{n} C_n(1 - x_n)) - G\alpha$$

Además, se deben cumplir las condiciones mencionadas:
Asegurar que si se proyecta un cortometraje su duración es a los más la duración completa del cortometraje, y por lo menos la duración mínima establecida:

$$r_n x_n \leq y_n \leq t_n x_n \qquad \forall n = 1, ..., N$$

Duración máxima del festival:

$$\sum_{n=1}^{N} y_n \leq T$$

Costo social por no proyectar K cortometrajes:

$$\alpha \geq \frac{K - \sum_{n=1}^{N} x_n}{N}$$

No se proyectarán cortometrajes de productores con conflicto:

$$N(1 - x_n) \geq \sum_{m \in S_n} x_m \qquad \forall n = 1, ..., N$$

Naturaleza de variables:

$$x_n, \alpha \in \{0, 1\}, \qquad \forall n = 1, ..., N$$
$$y_n \geq 0 \qquad \forall n = 1, ..., N$$

[49]Interrogación 1, 2011'2

3.36 Asignación de Cajeros

El gerente de un supermercado de la cadena *Dumbo* está preocupado por el nivel de servicio entregado a los clientes en las cajas del local. Los turnos de los cajeros se han asignado *al ojo* y sin relación directa con las necesidades de atención. En algunos momentos del día existe más personal que el necesario para atender a los clientes (ocio), mientras que en otros momentos del día se generan colas debido a la escasez de cajeros. Producto de esto último se generan pérdidas en venta por clientes que se aburren y se van a la competencia.

Como experto en modelación matemática, el gerente lo ha contratado para recomendarle cómo asignar a los N cajeros del supermercado para las siguientes cuatro semanas. Considere que el día en el supermercado se ha dividido en tres turnos posibles: Mañana, Intermedio y Tarde. Suponga que la cantidad necesaria de cajeros durante el turno t en el día d es $D_{d,t} \in \mathbb{Z}_+$ y que por cada persona que falte para cumplir esta demanda se generará una pérdida de venta dada por \$ $PV_{d,t}$. La ley laboral señala que cada trabajador puede realizar como máximo un turno al día y debe tener un día libre por semana.

Adicionalmente el presidente del sindicato le ha solicitado gentilmente que cumpla una lista de peticiones sindicales. Si usted no cumple con sus exigencias, los trabajadores podrían ir a huelga, por lo que no puede dejar de considerarlas. La lista es la siguiente:

1. Para asegurar el descanso entre turnos de los trabajadores, nadie que tenga un turno de tarde puede ser asignado al día siguiente en un turno de mañana.
2. Es sabido que los turnos de mañana son los preferidos. Con el fin de crear *justicia*, ningún trabajador puede tener asignado más del doble de turnos de mañana que otro.

Plantee el modelo de Programación Lineal Entera que permita recomendar diaramente los turnos de los cajeros de *Dumbo* durante los próximos 28 días a mínima pérdida de venta. Es decir, el modelo debe ayudarlo a definir en qué días y en qué turno trabajará cada cajero en el horizonte de planificación.

SOLUCIÓN[50]

Para minimizar las pérdidas, debemos encontrar una asignación de cajeros a cada turno en cada día. Además, una variable que permita saber esta información no será suficiente para caracterizar la función objetivo, que se relaciona con las pérdidas. Así, se definen las siguientes variables:

x_{idt}: es igual a 1 si se asigna el cajero i durante el día d en el turno t, 0 en otro caso.
y_{dt}: déficit de personal durante el día d en el turno t.

La función objetivo consiste en minimizar la pérdida de venta:

$$\min \sum_{d=1}^{28} \sum_{t=1}^{3} y_{dt} PV_{dt}$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

Cumplimiento de la demanda:

$$y_{dt} + \sum_{i=1}^{N} x_{idt} = D_{dt} \qquad \forall d = 1, ..., 28, t = 1, ..., 3$$

Un turno diario:

$$\sum_{t=1}^{3} x_{idt} \leq 1 \qquad \forall d = 1, ..., 28, i = 1, ..., N$$

Un día libre a la semana:

$$\sum_{d=7(s-1)+1}^{7s} \sum_{t=1}^{3} x_{idt} \leq 1 \qquad \forall i = 1, ..., N, s = 1, ..., 4$$

[50]Examen, 2012'1

Condiciones sindicales:

$$x_{id1} + x_{id-1,3} \leq 1 \qquad \forall d = 2, ..., 28, i = 1, ..., N$$

$$\sum_{d=1}^{28} x_{id1} \leq 2 \sum_{d=1}^{28} x_{jd1} \qquad \forall i, j = 1, ..., N : i \neq j$$

Naturaleza de las variables:

$$x_{idt} \in \{0, 1\}, \qquad \forall i, d, t$$

$$y_{dt} \geq 0, \qquad \forall d, t$$

3.37 Planificación de Abastecimiento en Botillería

Botillería Paula es una microempresa del sector de La Granja que se dedica a la compraventa de productos bebestibles. La señora Paula en su negocio maneja múltiples tipos de gaseosas y cervezas, pero para efectos de este problema, es posible agruparlos en exactamente esos dos rubros. Supondremos que ella vende las gaseosas de dos litros en \$450 y la cerveza en \$400. Ella dispone de una capacidad para manejar simultáneamente 200 botellas y se abastece de tres formas diferentes; una primera forma es ir a comprar en taxi colectivo que le cuesta \$500 ida y vuelta a un supermercado cercano y puede traer en la maleta del auto 25 unidades de cualquier tipo (tiene un compadre que maneja un taxi y que pasa por su negocio y por el supermercado). En el supermercado venden las gaseosas a \$400 y las cervezas a \$350. Pierde 40 minutos en el trámite. Una segunda forma es arrendar la camioneta de un vecino que por \$3.000 la lleva a un mercado más lejos (mayorista) en que puede optar a precios mejores. En la camioneta le cabe la capacidad completa del local. En este local le venden las gaseosas a \$320 y las cervezas a \$250. Pierde 40 minutos en el trámite. Por último, los lunes a primera hora un camión repartidor le vende en su local lo que necesite al mismo precio que el mercado mayorista.

Ella hace los viajes en cualquier momento del día, pero siempre a horas de atención de público ya que a esas horas atienden sus abastecedores. En la semana que viene ella supone que le vendrán a comprar 50 gaseosas y 40 cervezas cada día. Es decir en total 350 gaseosas y 280 cervezas. Suponga que todos los compradores traen su envase vacío para realizar la compra. Ella puede atender 8 horas diarias, sin embargo cuando está comprando cierra el local y pierde las ventas que llegan. Puede asumirse así, que el número de ventas es proporcional al tiempo en que el local está abierto (lineal).

Su objetivo es crear un modelo que le indique a Paula cómo establecer sus compras (cuántas veces ir a cada destino) de modo de satisfacer su demanda. Observe que usted no debe decir cuándo ir a comprar a cada lugar, sino sólo cuántas veces en la semana. No es necesario mantener un stock definido al final de su semana de planificación. Suponga que el domingo antes de comenzar la semana no hay nada más para vender.

SOLUCIÓN

El objetivo del problema es establecer una política de abastecimiento, que maximize las utilidades de la botillería. Para ello se debe decidir cuántas bebidas y cervezas comprar, y de qué forma realizar la compra, decisión que está estrechamente vinculada con el número de viajes que se deben realizar para transportar las botellas, de esta manera definiremos las siguientes variables de decisión:

n_{ij} = Número de botellas del tipo i compradas según la forma j
$i = \{a$:gaseosa, b :cerveza$\}, j = \{1$: supermercado, 2 : Mayorista, 3 : Camión$\}$
v_j = número de viajes realizados a comprar según la forma j

Consideraremos que la demanda es fija, de 350 gaseosas y 280 cervezas semanales, las que se reparten linealmente en los 3.360 minutos semanales de atención. Así, las horas en que se deja de antender público por ir a comprar se considerarán como demanda perdida, y por lo tanto, como costo.

La función objetivo considera como ingresos la venta de toda la demanda de cervezas y gaseosas, y como costos, los gastos en viajes, el costo de la mercadería y la pérdida de ventas por ir a comprar; éste último se calcula para cada tipo de compra como el total de los ingresos multiplicado por la razón entre el tiempo consumido en la compra y el tiempo total de atención. Por otro lado, las restricciones del modelo incluyen la de capacidad en cada tipo de viaje, la necesidad de satisfacer las demandas de gaseosas y cervezas, y que las variables sean no negativas y enteras. Nótese que si bien la compra al camión no tiene restricción, a éste no se le puede comprar más que la capacidad del local.

De acuerdo a las consideraciones anteriores, el problema se puede modelar como sigue.

$$P) \quad Max \quad 269.500 - \frac{11.125}{3}v_1 - \frac{18.625}{3}v_2 - 400n_{a1} - 350n_{b1} - 320(n_{a2}+n_{a3}) - 250(n_{b2}+n_{b3})$$

$$\begin{array}{rcll}
n_{a1}+n_{b1} & \leq & 25v_1 & \\
n_{a2}+n_{b2} & \leq & 200v_2 & \\
n_{a3}+n_{b3} & \leq & 200 & \\
n_{a1}+n_{a2}+n_{a3} & \geq & 350 & \\
n_{b1}+n_{b2}+n_{b3} & \geq & 280 & \\
v_j, n_{ij} & \geq & 0 & \forall i,j \\
v_j, n_{ij} & \in & enteros & \forall i,j
\end{array}$$

Problemas Propuestos

1. Modifique su modelo, si ahora la demanda ya no es plana, sino que es de 50 gaseosas y 40 cervezas de Lunes a Viernes, y luego sube a 90 gaseosas y 75 cervezas el Sábado y el Domingo. Note que nuevamente no se le pregunta cuándo ir a comprar a cada lugar, sino sólo cuántas veces en la semana.

2. ¿Que ocurriría si a la señora Paula le ofrecieran una bodega donde pudiera almacenar más botellas, al precio de $\$p$ la botella? ¿Cuál sería el máximo valor que estaría dispuesta a pagar por botella?

3.38 La Gran Final

Para la gran final de un programa de televisión, dos equipos se enfrentan en una competencia en la que el equipo que logra recorrer una mayor distancia en T horas es el ganador.

Usted es el capitán de uno de los equipos, integrado por $i = 1, \ldots, n$ participantes. La velocidad máxima a la que cada integrante de su equipo puede desplazarse está dada por v_{it} kilómetros por hora, donde t representa cada una de las T horas de competencia con $t = 0, \ldots, T-1$. Al comienzo de cada hora, cada integrante puede consumir una lata de bebida energética, lo que amplifica su velocidad máxima en α para la hora donde es consumida (es decir, v_{it} pasa a ser αv_{it} durante esa hora). La velocidad a la que un individuo i se desplaza en la hora t se puede asumir constante durante toda esa hora, y no puede superar la velocidad máxima de esa hora.

Por motivos de salud, cada integrante i no puede consumir más de A_i latas de bebida durante la competencia, ni puede consumir bebidas al comienzo de dos horas consecutivas. Su equipo cuenta con B latas de bebida al comienzo de la competencia, las que puede distribuir como prefiera entre los integrantes de su equipo. Además de estas B latas, es posible acceder a un máximo de C latas adicionales, por las que se incurre en una penalidad de β kilómetros por cada lata extra consumida.

La distancia total recorrida por el equipo queda determinada por la posición del integrante del equipo que se encuentra más atrás al completarse las T horas. A esta distancia total se le debe descontar la penalidad total en la que haya incurrido el equipo. Adicionalmente, se exige que en ningún momento el participante que va a la cabeza del equipo se aleje del que va al final en más de D kilómetros (notar que para que esta condición se cumpla en cualquier momento, basta con que se cumpla al comienzo de cada período).

Construya un modelo lineal mixto que permita determinar la estrategia que optimiza el desempeño de su equipo medido en la distancia total recorrida por el mismo.

SOLUCIÓN[51]

[51]Interrogación 1, 2014'1

- Variables:
  - δ_{it}: variable binaria que indica si el individuo i, con $i = 1, \ldots, n$, consume una lata en el comienzo de la hora t, con $t = 1, \ldots, T$.
  - x_{it}: variable continua que representa la distancia recorrida por el individuo i, $i = 1, \ldots, n$, al comienzo de la hora t, con $t = 1, \ldots, T$.
  - y_{it}: variable continua que representa la velocidad del individuo i, $i = 1, \ldots, n$, en la hora t, con $t = 1, \ldots, T$.
  - z: variable entera que representa el número de latas adicionales que serán consumidas.
  - μ: variable continua que representa la distancia recorrida por el integrante del equipo que se encuentra más atrás al finalizar el período.
- Función objetivo:
$$\max \ \mu - \beta z$$
- Restricciones
  - Distancia recorrida al comienzo del horizonte.
$$x_{i0} = 0, \ \forall i = 1, \ldots, n.$$
  - Construir la variable μ..
$$x_{iT} \geq \mu, \ \forall i = 1, \ldots, n.$$
  - Determinar la distancia recorrida hasta el comienzo de la hora t.
$$x_{it} = \sum_{r=0}^{t-1} y_{ir}, \ \forall i = 1, \ldots, n, \ \forall t = 1, \ldots, T.$$
  - Determinación de la cota superior de velocidad en cada hora.
$$y_{it} \leq v_{it} + \delta_{it} \left(\alpha - 1\right) v_{it}, \ \forall i = 1, \ldots, n, \ \forall t = 1, \ldots, T.$$
  - Cota superior de latas que puede consumir el participante i.
$$\sum_{t=0}^{T-1} \delta_{it} \leq A_i, \ \forall i = 1, \ldots, n.$$
  - Restringir la posibilidad de que un participante tome bebida en dos períodos consecutivos.
$$\delta_{it} + \delta_{it+1} \leq 1, \ \forall i = 1, \ldots, n, \ \forall t = 0, \ldots, T-1.$$
  - Primera construcción de la variable z.
$$z \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{t=0}^{T-1} \delta_{it} \right) - B$$
  - Segunda construcción de la variable z.
$$z \geq B - \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{t=0}^{T-1} \delta_{it} \right)$$
  - Acotar la variable z.
$$z \leq C$$

– Asegurar que la distancia entre el participante que va a la cabeza del equipo y el que va al final sea a lo más de D kilómetros.

$$x_{it} - x_{jt} \leq D, \ \forall i = 1, \ldots, n, \ \forall j = 1, \ldots, n : j \neq i, \ \forall t = 0, \ldots, T-1.$$

– Naturaleza de las variables.

$$\begin{gathered} \delta_{it} \in \{0,1\}, \ \forall i = 1, \ldots, n, \ \forall t = 0, \ldots, T-1. \\ x_{it}, y_{it} \geq 0, \ \forall i = 1, \ldots, n, \ \forall t = 0, \ldots, T-1. \\ z \in \mathbb{Z}_0^+, \ \forall i = 1, \ldots, n, \ \forall t = 0, \ldots, T-1. \\ \mu \in \{0,1\} \end{gathered}$$

3.39 Turnos de Enfermeras

Un hospital organiza los turnos de trabajo de sus enfermeras en un horizonte de 2 semanas. Existen 3 turnos: mañana, tarde y noche. En cada turno deben haber al menos 3 enfermeras. El staff incluye 9 enfermeras, y cada una trabaja 5 turnos a la semana. Un calendario de trabajo para una enfermera es un esquema que especifica los 10 turnos en que debe trabajar, de los 42 turnos posibles (14 días por 3 turnos diarios).

Para cada enfermera se genera una lista de 30 posibles calendarios; estas listas pueden ser diferentes para las distintas enfermeras. Antes de que comiencen las dos semanas, cada enfermera entrega un rating de deseabilidad asociado a cada uno de los turnos de su lista. Sea d_{ij} el índice de deseabilidad para el calendario número j, $j = 1$,...,30, de la enfermera número i, $i = 1, ..., 9$.

Formule un modelo que permita seleccionar un calendario para cada enfermera de modo de satisfacer los requerimientos en los distintos turnos y de maximizar la suma de los índices de deseabilidad de los calendarios seleccionados.

SOLUCIÓN

Debemos formular un modelo que permita seleccionar un calendario para cada enfermera. Para ello definamos la variable:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si se selecciona el calendario } j \text{ de la enfermera } i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Considerando que tenemos como dato la siguiente información:

$$a_{ijl} = \begin{cases} 1 & \text{Si en el calendario } j \text{ de la enfermera } i \text{ se incluye el turno } l \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Lo que nos permite formular el siguiente modelo:

$$P) \quad Max \quad \sum_i \sum_j d_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\sum_{j=1}^{30} x_{ij} & = & 1 & \forall i \\ \displaystyle\sum_i \sum_j a_{ijl} x_{ij} & \geq & 3 & \forall l \\ x_{ij} & \in & \{0,1\} & \end{array}$$

3.40 Programación de Partidos de Fútbol

Considere el torneo de fútbol profesional de Chile en que veinte equipos deben enfrentarse todos contra todos. Suponga que cada par de equipos deberá enfrentarse 2 veces durante el torneo (una vez en la cancha de cada equipo). Así, es necesario definir qué partidos se jugarán en 38 fin de semana sucesivos. Suponga que usted tiene una estimación de la asistencia que tendría cada partido si se jugara en una determinada semana. Determine una asignación que permita maximizar la asistencia total del sistema de fútbol chileno. Suponga que en las semanas 20 a la 38 se repiten los partidos jugados en las semanas 1 a la 19, sólo modificando la cancha donde se juega el partido.

SOLUCIÓN

Emplearemos las siguientes variables de decisión:

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{Si el primer partido entre los equipos } i \text{ y } j \text{ se agenda} \\ & \quad \text{para la semana } k \text{ en la cancha del equipo } i \\ 0 & \text{En caso contrario} \end{cases}$$

Además denominemos p_{ij}^k al público esperado del partido entre los equipos i y j en la cancha del equipo i durante la semana k más el público esperado del partido entre los equipos i y j en la cancha del equipo j durante la semana $k+19$.

El problema puede formularse del siguiente modo:

$$P) \quad Max \sum_{i=1}^{20} \sum_{i=1, i\neq j}^{20} \sum_{k=1}^{19} p_{ij}^k x_{ij}^k$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1,i\neq j}^{20} x_{ij}^k + x_{ji}^k &= 1 && \forall\ k = 1, ..., 19; j = 1..20 \\ x_{ij}^k &\in \{0,1\} && \forall\ i,j \in \{1,...20\}, i \neq j, k \in \{1,...19\} \end{aligned}$$

Problema Propuesto

Considere además las siguientes condiciones al problema:

- Ciertos partidos no pueden jugarse en determinadas semanas (por ejemplo, los equipos A y B no pueden enfrentarse en la tercera semana)
- Ciertos partidos deben jugarse en determinadas semanas (por ejemplo, los equipos C y D deben enfrentarse en la segunda semana)
- Condiciones de orden (por ejemplo el partido entre los equipos A y C debe ocurrir después que el partido entre los equipos B y C)
- Condiciones de exclusión (por ejemplo el partido entre los equipos E y A no puede ocurrir en la misma semana que el partido entre B y F)

3.41 Codelchi y su evaluación de empleados

Al terminar el año laboral, la empresa *Codelchi Ltda.* somete a sus empleados a una evaluación. Los empleados son clasificados por la compañía como: tipo A y tipo B. Actualmente la empresa cuenta con I trabajadores tipo A y J trabajadores tipo B (puede utilizar los parámetros I y J como conjunto y como número total de trabajadores de cada tipo).

Para la evaluación de este año la empresa decidió tomar 3 tests a cada empleado. Para efectos prácticos, la empresa determinó que la totalidad de los empleados deberá rendir estos 3 test durante los próximos 5 días, y que cada día dispondrá de 4 módulos de evaluación. Estos 4 módulos de evaluación no se intersectan entre sí y cubren toda la jornada laboral. Se debe tener en cuenta que un empleado puede rendir solo un test por módulo.

Codelchi Ltda. realizará los tests de manera de que sus empleados tipo A no realicen más de 2 tests un mismo día, imponiendo además que si uno de estos empleados tipo A realiza 2 tests durante un mismo día, estos dos tests debe realizarlos en módulos seguidos. Por otra parte, para que los empleados tipo B realicen sus tests se les debe dar todo un día libre.

Las evaluaciones serán tomadas en una sala que tiene capacidad para que Q empleados están simultáneamente siendo evaluados, y a cada empleado se le consultó los días y módulos en que prefiere rendir sus evaluaciones. Esta última información se encuentra en el parámetro δ_{pmd} que tiene valor 1 si el módulo m del día d es preferido por el empleado p, tanto para empleados tipo A como tipo B. Finalmente, la empresa quiere asegurar que en todo módulo cuenta con al menos R empleados en sus funciones diarias de trabajo.

Basado en la información anterior, construya un modelo de programación lineal que permita a la empresa *Codelchi Ltda.* planificar la evaluación de este año, considerando en lo posible maximizar la cantidad de tests que son tomados en módulos-días de preferencia de los empleados.

SOLUCIÓN[52]

Variables

x_{jd} : binaria que toma valor 1 si el empleado $j \in J$ rendirá sus test el día d.

w_{jmd} : binaria que toma valor 1 si el empleado $j \in J$ rendirá un test durante el módulo m del día d.

y_{imd} : binaria que toma valor 1 si el empleado $i \in I$ rendirá un test durante el módulo m del día d.

Restricciones:

1) Asignar un sólo día libre a empleados tipo B.

$$\sum_{d=1}^{5} x_{jd} = 1 \qquad \forall\ j \in J.$$

2) Asignar 3 módulos de ese día libre para rendir test para empleados tipo B.

$$\sum_{m=1}^{4} w_{jmd} = 3 \cdot x_{jd} \qquad \forall\ j \in J,\ d = 1, ..., 5.$$

3) Asignar 3 módulos a empleados tipo A.

$$\sum_{d=1}^{5} \sum_{m=1}^{4} y_{imd} = 3 \qquad \forall\ i \in I.$$

4) Empleados tipo A no rinden más de 2 evaluaciones por día.

$$\sum_{m=1}^{4} y_{imd} \leq 2 \qquad \forall\ i \in I,\ d = 1, ..., 5.$$

[52]Interrogación 3, 2010'2

5) Obligar a que si un empleado tipo A rinde 2 tests el mismo día, estos sean continuados.

$$y_{imd} + y_{ind} \leq 1 \qquad \forall\ i \in I,\ d = 1,...,5,\ m = 1,...,2,\ n = m+2,...,4.$$

6) Respetar la capacidad de la sala de evaluación.

$$\sum_{j=1}^{J} w_{jmd} + \sum_{i=1}^{I} y_{imd} \leq Q \qquad \forall\ d = 1,...,5,\ m = 1,...,4.$$

7) Respetar los requerimientos por fuerza laboral.

$$\left(J - \sum_{j=1}^{J} x_{jd}\right) + \left(I - \sum_{i=1}^{I} y_{imd}\right) \geq R \qquad \forall\ d = 1,...,5,\ m = 1,...,4.$$

8) Naturaleza de las variables.

$$\begin{array}{rcll} x_{jd} & \in & \{0,1\} & \forall\ j \in J,\ d = 1,...,5. \\ w_{jmd} & \in & \{0,1\} & \forall\ j \in J,\ d = 1,...,5,\ m = 1,...,4. \\ y_{imd} & \in & \{0,1\} & \forall\ i \in I,\ d = 1,...,5,\ m = 1,...,4. \end{array}$$

Función Objetivo:

$$\max z = \sum_{i=1}^{I}\sum_{m=1}^{4}\sum_{d=1}^{5} \delta_{imd} \cdot y_{imd} + \sum_{j=1}^{J}\sum_{m=1}^{4}\sum_{d=1}^{5} \delta_{jmd} \cdot w_{jmd}$$

3.42 Armado de mesas de matrmionio

Al organizar un matrimonio, es importante "armar las mesas" de buena forma, para que todos estén a gusto. Suponga que tiene I invitados, y dispone de T mesas con L lugares cada una. Para cada invitado $i \in 1, \ldots, I$, se conoce su edad E_i. Existe una serie de reglas que le han entregado los novios para que usted los ayude a organizar los invitados:

- En una misma mesa no se deberán sentar personas con más de D años de diferencia entre sí.
- Sea N el subconjunto de los invitados que corresponde a niños entre 5 y 12 años. Estos tienen que sentarse todos juntos en las mismas mesas, sin otros adultos.
- Las parejas, almacenadas en el conjunto P de pares de invitados (Suponga que P se compone de pares (p_1, p_2) con $p_1 < p_2$), se deben sentar en una misma mesa.
- De igual forma, para cada persona i se conocen las personas que deben estar sí o sí en su misma mesa, esta información se encuentra registrada en un conjunto B_i asociado a cada persona (Donde obviamente $|B_i| \leq L - 1$.)
- Los niños menores a 5 años deberán sentarse en la misma mesa que sus madres. Para esto se cuenta con un conjunto R de pares (madre, hijo/a de 5 o menos años).
- Sean H y M los conjuntos de hombres y mujeres mayores de 12 años invitados. Para favorecer (de cierta forma) el baile después de la comida, en cada mesa no puede haber más de un $\alpha\%$ (con $50 \leq \alpha \leq 100$) de personas mayores de 12 años del mismo género.
- Finalmente, para cada par de invitados $(i, j) : i < j$ se conoce la afinidad que hay entre ellos si están sentados en la misma mesa, la cual denotaremos con el número A_{ij}.

Escriba un modelo de programación lineal binaria que determine la asignación de personas a mesas que entregue la máxima afinidad total.

SOLUCIÓN[53]

Variables de decisión

- X_{it}: 1, si el invitado $i \in 1,\ldots,I$ está sentado en la mesa $t \in 1,\ldots,T$; 0, en otro caso.
- Y_{ijt}: 1, si los invitados $i, j \in 1,\ldots,I : i < j$ están sentados en la mesa $t \in 1,\ldots,T$; 0, en otro caso.

Función objetivo

$$Z = \max \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=i+1}^{I} A_{ij} Y_{ijt} \tag{50}$$

Restricciones

- *Relación entre Y y X*

$$Y_{ijt} \leq X_{it},\ \forall i, j \in 1,\ldots,I,\ t \in 1,\ldots,T : i < j \tag{51}$$

$$Y_{ijt} \geq X_{it} + X_{jt} - 1,\ \forall i, j \in 1,\ldots,I,\ t \in 1,\ldots,T : i < j \tag{52}$$

- *Asignación de cada persona a una mesa.*

$$\sum_{t=1}^{T} X_{it} = 1,\ \forall i \in 1,\ldots,I \tag{53}$$

- *Capacidad de las mesas.*

$$\sum_{i=1}^{I} X_{it} \leq L,\ \forall t \in 1,\ldots,T \tag{54}$$

- *Diferencia de edad menor a D años.*

$$Y_{ijm} = 0,\ \forall i, j \in 1,\ldots,I,\ t \in 1,\ldots,T : i < j,\ |E_i - E_j| > D \tag{55}$$

- *Sólo niños entre 5 y 12 años en sus mesas.*

$$Y_{ijm} = 0,\ \forall i, j \in 1,\ldots,I,\ t \in 1,\ldots,T : i < j,\ (i \in N, j \notin N) \text{ ó } (i \notin N, j \in N) \tag{56}$$

- *Parejas sentadas en la misma mesa.*

$$\sum_{t=1}^{T} Y_{ijt} = 1,\ \forall (i,j) \in P \tag{57}$$

- *Los que deben estar sentados en la misma mesa.*

$$\sum_{t=1}^{T} Y_{ijt} = 1,\ \forall i, j \in 1,\ldots,I,\ t \in 1,\ldots,T : i < j,\ i \in S_j \text{ ó } j \in S_i \tag{58}$$

- *Niños menores de 5 años con sus madres.*

$$\sum_{t=1}^{T} Y_{ijt} = 1,\ \forall i, j \in 1,\ldots,I,\ t \in 1,\ldots,T : i < j,\ (i,j) \in R \text{ ó } (j,i) \in R \tag{59}$$

[53] Interrogación 2, 2014'2

- *Distribución de los mayores de 12 años por género.*

$$\begin{aligned}\sum_{i\in H} X_{it} \leq \frac{\alpha}{100}\sum_{i\in H\cup M} X_{jt},\ \forall t\in 1,\ldots,T\\ \sum_{i\in M} X_{it} \leq \frac{\alpha}{100}\sum_{i\in H\cup M} X_{jt},\ \forall t\in 1,\ldots,T\end{aligned} \tag{60}$$

- *Naturaleza de las variables de decisión*

$$\begin{aligned}X_{it} \in \{0,1\}\,,\ \forall i\in 1,\ldots,I,\ t\in 1,\ldots,T\\ Y_{ijt} \in \{0,1\}\,,\ \forall i,j\in 1,\ldots,I,\ t\in 1,\ldots,T : i<j\end{aligned} \tag{61}$$

3.43 Asignación de Salas de Clases en Escuela de Ingeniería

Estamos interesados en resolver a optimalidad el problema de asignación de salas de clase a las clases impartidas en la Escuela de Ingeniería. Para esto, inicialmente debemos modelar el problema, aspecto que hemos delegado a usted.

Inicialmente considere que el problema consiste en clases que los profesores deben dictar a una cantidad conocida de alumnos, y que cada una de las salas (número conocido y fijo) tiene una capacidad dada de alumnos sentados.

Suponga inicialmente también, que a los profesores y a los alumnos no les molesta cualquier horario que se les asigne. Los módulos disponibles son seis cada día y se dictan clases de lunes a jueves con el sistema actual en que las clases se dictan o martes y jueves o lunes y miércoles a un mismo horario y en una misma sala. Para el desarrollo del problema suponga que cada profesor corresponde a un sólo curso.

1. Su objetivo es minimizar el número de alumnos que se quedan sin asiento, asumiendo que todos los alumnos efectivamente asisten a clases.

2. Suponga que se resolvió el modelo del caso a) y se pudo asignar todas las clases sin ningún problema de alumnos sin asiento. Entonces, se sabe que hay ciertos profesores que no están dispuestos a hacer su clase en algunos horarios específicos. Para eso se le preguntó a ellos en qué horario estarían dispuestos a hacer cada clase. ¿Cómo incorporaría esta característica a su modelo, sin perder su objetivo original, esto es, manteniendo la optimalidad del problema anterior?.

3. Suponga que se resolvió el modelo del caso b) y se pudo asignar todas las clases sin ningún problema de alumnos sin asiento y con todos los profesores satisfechos. Entonces, se pregunta a los alumnos los tres horarios en que más les gusta asistir a clase (de entre los seis disponibles, se asume que no hay diferencia entre los días de la semana). Usted tiene el número de alumnos que optó por cada alternativa, cómo haría para incorporar la preferencia de ellos a su modelo, nuevamente sin perder la optimalidad conseguida en el problema anterior.

SOLUCIÓN

1) El objetivo del problema es minimizar la cantidad de alumnos que quedarán sin asiento, al asignar los cursos a las salas. Este tipo de problema se denomina generalmente como problema de asignación de recursos a costo mínimo.

Si consideramos que existen m cursos y n salas, para modelar el problema disponemos de la siguiente información

a_i = Número de alumnos con que cuenta el curso i. $i = 1...n$
q_k = Capacidad máxima de alumnos para la sala k. $k = 1...m$

Además, dado que las clases que se hacen el lunes se repiten en la misma sala el miercoles, y ocurre lo mismo para martes y jueves, modemos identificar 12 módulos de clases, los que numeraremos como aparece en la Tabla 42.

Módulo	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes
1	1	7	1	7	
2	2	8	2	8	
3	3	9	3	9	
4	4	10	4	10	
5	5	11	5	11	
6	6	12	6	12	

Table 42: Módulos de Clases

Lo que debemos hacer es decidir si se hará la clase i en el módulo j en la sala k, por lo que definiremos la siguiente variable de desición:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{Si se asigna el curso } i \text{ a la sala } k \text{ en el módulo } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Ahora bien, la función objetivo debe minimizar el número de alumnos que queda sin asiento en cada clase (recordando que a los alumnos sin asiento de un curso no les sirve que en otra sala sobren asientos), para ello debemos multiplicar x_{ijk} por una función que sea cero si $a_i - q_i$ es negativo, y que sea igual a la diferencia entre alumnos y capacidad si $a_i - q_i$ es positivo. Asi empleando la notación dada en (62) obtenemos la función objetivo del modelo, que se presenta en (63).

$$x^+ = \begin{cases} x & \forall x \geq 0 \\ 0 & \forall x \leq 0 \end{cases} \tag{62}$$

Las restricciones del modelo incluyen que a una sala no se le puede asignar más de un curso durante un mismo módulo (64) y que todo curso debe ser asignado (65). Considerando lo anterior, el problema se puede modelas como sigue:

$$Min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{12}\sum_{k=1}^{m}(a_i - q_i)^+ x_{ijk} \tag{63}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ijk} \leq 1 \quad \forall j,k \tag{64}$$

$$\sum_{j=1}^{12}\sum_{k=1}^{m} x_{ijk} = 1 \quad \forall i \tag{65}$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \tag{66}$$

2) En este caso supondremos que cada curso tiene asignado un profesor, así habrá n cursos, con el profesor i dictando la clase i, y por lo tanto ahora disponemos de la información de p_{ij}, donde p_{ij} es:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el profesor del curso } i \text{ está dispuesto a dictar la clase en el módulo } j \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Ahora el problema consiste en, manteniendo la optimalidad del problema a), minimizar el número de profesores que no sean asignados en horarios preferidos por ellos. Al hablar de optimilidad en la parte a) nos referimos a que ningún alumno quedó sin asiento, o lo que es lo mismo que la función objetivo tiene valor cero.

Emplearemos las mismas variables de desición definidas en a). Ahora bien, como el objetivo del problema es minimizar el número de profesores descontentos, debemos buscar una función que combine las variables x_{ijk} con los datos p_{ij} de manera que la función tome el valor 0 cuando el profesor es asignado a un módulo que le agrada, y 1 en caso contrario, además, en los módulos que no son asignados la función debe tomar el valor cero, ya que ellos no influyen en el descontento de los profesores; esto lo podemos expresar a través de la relación dada en (67). La función objetivo se expresa entonces como la minimización de la suma, en todas las variables, de dicha función.

Las restricciones del modelo, corresponden a las mismas dadas en (64) a (66), siendo necesario agregar que la función objetivo de la parte a) se encuentre en su óptimo. De esta manera el modelo de optimización resulta ser:

$$Min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{12}\sum_{k=1}^{m} x_{ijk}(1-p_{ij}) \tag{67}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{12}\sum_{k=1}^{m}(a_i-q_i)^+ x_{ijk} &= 0 && (68)\\
\sum_{i=1}^{n} x_{ijk} &\leq 1 \quad \forall j,k && (69)\\
\sum_{j=1}^{12}\sum_{k=1}^{m} x_{ijk} &= 1 \quad \forall i && (70)\\
x_{ijk} &\in \{0,1\} && (71)
\end{aligned}$$

3) Si llamamos v_j a la cantidad de votos por el módulo j y T al total de votantes, podemos determinar el porcentaje de alumnos r_j que prefiere cada módulo (72). Además, recuerde que como cada alumno prefiere 3 módulos la suma de los porcentajes no será igual a 100, sino a 300.

$$r_j = \frac{v_j}{T} \tag{72}$$

Si suponemos que la cantidad de alumnos que quedan felices con el módulo j del curso i es el número de alumnos del curso, multiplicados por el porcentaje total de alumnos que prefieren ese módulo en la escuela, el objetivo de maximizar la cantidad de alumnos que quedan con sus módulos preferidos se puede espresar como (73). Ahora el modelo quedará completo considerando las restricciones dadas en (68) a (71) además de la restricción de alcazar la optimalidad de la parte b). Considerando lo anterior el modelo de optimización resulta ser:

$$Max \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{12}\sum_{k=1}^{m} r_j a_i x_{ijk} \tag{73}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{12}\sum_{k=1}^{m} x_{ijk}(1-p_{ij}) &= 0\\
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{12}\sum_{k=1}^{m}(a_i-q_i)^+ x_{ijk} &= 0\\
\sum_{i=1}^{n} x_{ijk} &\leq 1 \quad \forall j,k\\
\sum_{j=1}^{12}\sum_{k=1}^{m} x_{ijk} &= 1 \quad \forall i\\
x_{ijk} &\in \{0,1\}
\end{aligned}$$

Note que estos problemas parecen sencillos de resolver (de hecho uno prácticamente podría formularlos como un problema de flujo en redes a mínimo costo), sin embargo el problema real de asignación de clases es complejo de resolver. Esto se debe a que adicionalmente a las restricciones aquí expuestas, existen otras restricciones que se debe satisfacer como por ejemplo, que ciertos cursos no pueden ofrecerse al mismo horario pues un conjunto de alumnos debe tomar ambos cursos.

Problemas Propuestos

Figure 11: Lanzamiento de Proyectiles

1. ¿Cómo se modificaría el modelo en el primer, segundo y tercer caso, si ahora cada profesor (o por lo menos uno) tiene más de un curso, y nosotros queremos que sus cursos no coincidan en horario?

2. ¿Que ocurriría si en el segundo caso, el problema se interpretara como que, respetando a los profesores su opción por módulos específicos, intentáramos conseguir la asignación óptima de los cursos de manera que quede la menor cantidad posible de alumnos sin asiento?

3. ¿Que ocurriría en el tercer caso si los alumnos ordenaran sus preferencias al votar, esto es el módulo más preferido, el segundo más preferido, y el tercer más preferido?

4. ¿Cómo modificaría su modelo si ahora no todos los cursos ocupan dos módulos a la semana, sino que este número varía entre uno (cursos optativos), hasta cinco módulos a la semana? ¿Cómo incluiría esta nueva característica en su modelo?

5. Formule un modelo que contemple que ciertos cursos no se pueden dar a un mismo horario.

3.44 Lanzamiento de Proyectiles

Usted está encargado de lanzar una serie de proyectiles desde un punto central a unos objetivos dispersos en un plano XY. Cada uno de esos objetivos tiene una posición (x_i, y_i) asociada. Usted dispone de tantos proyectiles y lanzadores como objetivos. Cada lanzador tiene un rango propio de velocidades y un rango propio de ángulo de inclinación en que puede dispararse el proyectil. El espacio en que está ubicado este sistema tiene un techo de H metros de altura. Asigne los lanzadores a los objetivos de modo que el error total sea lo menor posible. Para esto, suponga que cada destino tiene un ponderador de importancia P_i que pondera los metros de diferencia entre el punto de caída del proyectil y el objetivo.

Hint: Supongamos que un proyectil es lanzado a una velocidad V y en un ángulo de inclinación ϕ (Figura 11). En su componente vertical, el proyectil se mueve a velocidad $V \sin\phi$, y se mueve atraído a la tierra por la fuerza de gravedad g. En su componente horizontal, el cuerpo se mueve a velocidad constante $V \cos\phi$.

Si un cuerpo es soltado (desde el reposo) desde una determinada altura y al caer alcanza una velocidad V, entonces la altura desde la que fue soltado el cuerpo y el tiempo que tardó en caer son:

$$\begin{aligned} h &= \frac{V^2}{2g} \\ t &= \frac{V}{g} \end{aligned}$$

Si un cuerpo se mueve a velocidad constante V durante un tiempo t, entonces la distancia que alcanza es:

$$d = Vt$$

SOLUCIÓN

De acuerdo al enunciado del problema, podemos identificar los siguientes datos del modelo:

$V^i_{\min}$ = Velocidad mínima del lanzador i, $i = 1, ..., n$

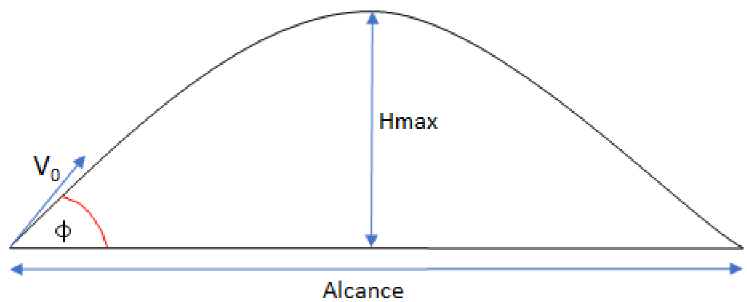


Figure 12: Lanzamiento de Proyectiles

$V^i_{\max}$ = Velocidad máxima del lanzador i.
$\phi^i_{\min}$ = Angulo mínimo de inclinación del lanzador i.
$\phi^i_{\max}$ = Angulo máximo de inclinación del lanzador i.
(x^j, y^j) = Coordenadas del blanco j, $j = 1, ..., n$
(x^o, y^o) = Coordenadas del punto central, que por simplicidad supondremos en (0,0).
P_j = Ponderador de importancia del blanco j.

El objetivo del modelo es ubicar los lanzadores de manera de minimizar el error ponderado en los blancos. Se entiende por error ponderado, al producto entre el cometido al lanzar el proyectil (distancia entre blanco y lugar donde cae el proyectil) y el ponderador correspondiente.

Un esquema de la trayectoria del proyectil se presenta en la Figura 12, donde se aprecia que podemos separar el movimiento del proyectil (eje x y eje y). En el eje y, se trata de un movimiento vertical hacia arriba seguido de una caida libre, luego el tiempo que demora en caer será igual a 2 veces el tiempo que demora en llegar a su altura máxima, esto es:

$$t_{total} = 2 \cdot t_{H\max} = 2\frac{V_o \cdot sen(\phi)}{g}$$

Por otro lado, para obtener el alcance debemos multiplicar la velocidad horizontal de movimiento por el tiempo que demora en caer, asi:

$$Alcance = V_o \cdot \cos(\phi) \cdot \frac{2V_o \cdot sen(\phi)}{g} = \frac{2V_o^2 \cdot sen(\phi)\cos(\phi)}{g}$$

donde la altura máxima que pueden alcanzar los proyectiles viene dada por

$$H_{\max} = \frac{(V_o \cdot sen(\phi))^2}{2g}$$

Una vez identificados los datos del modelo y las relaciones útiles del movimiento, es necesario asignar los lanzadores a cada blanco . Para esto utilizaremos la siguiente variable de decisión:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el lanzador } i \text{ se asigna al blanco } j \\ 0 & \text{Si el lanzador } i \text{ no se asigna al blanco } j \end{cases}$$

Lo que agrega características del "problema de asignación" al modelo, y nos hace recordar que a cada blanco se le debe asignar sólo un lanzador, y que cada lanzador debe ser asignado a un sólo blanco (restricciones (75) y (76)).

Además de la variable δ_{ij} debemos considerar que cada lanzador puede optar por la velocidad y el ángulo con que lanza, por lo tanto debemos definir dos variables de este tipo por cada lanzador, esto es:

V^i = Velocidad con que lanzará su proyectil el lanzador i.
ϕ^i = Angulo con que lanzará su proyectil el lanzador i.

El objetivo del problema es minimizar el error, el que se puede expresar como la ponderación por la distancia entre el blanco y el lugar donde cae el proyectil (dado por (74)). El modelo debe estar sujeto a que los lanzadores no pueden superar el límite de altura, a que existen rasgos específicos de operación para cada lanzador y que existen restricciones asociadas al 'problema de asignación'. Considerando lo anterior, se obtiene el siguiente modelo de optimización:

$$P) \quad Min \quad \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j = \sum_{j=1}^{n} P_j \left\| \sqrt{\left(x^j\right)^2 + \left(y^j\right)^2} - \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} \left(\frac{2\left(V^i\right)^2 \cdot sen(\phi^i)\cos(\phi^i)}{g} \right) \right\| \tag{74}$$

$$\begin{array}{rcll}
\dfrac{\left(V^j\right)^2 \cdot sen^2(\phi^j)}{2g} & \leq & H & \forall j \\
\phi^i_{\min} & \leq & \phi^i \leq \phi^i_{\max} & \forall i \\
V^i_{\min} & \leq & V^i \leq V^i_{\max} & \forall i \\
\sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} & = & 1 & \forall j \qquad (75) \\
\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} & = & 1 & \forall i \qquad (76) \\
\delta_{ij} & \in & \{0,1\} & \forall i,j
\end{array}$$

Problemas Propuestos

1. ¿Qué modificaciones habría que hacer al modelo si hubiera más blancos que cañones? ¿Y qué modificación si ahora los cañones superan a los blancos?

2. ¿Que ocurriría con nuestro modelo si se nos pide considerar capacidades destructivas de cada cañón y se nos entrega una tabla con los tamaños de cada blanco, para emparejar capacidades destructivas con tamaño? ¿Podría ser posible la asignación de más de un cañón a un mismo blanco?

3. ¿Que ocurre con nuestro modelo si incluimos la existencia de controladores de estos cañones, de manera que cada cañón requiere una cantidad específica de tiempo que debe dedicarle el encargado de éste, tiempo durante el cual no puede operar otros cañones? Modélelo para el caso en que los tiempo son constantes y para el caso en que cada cañón tiene una cantidad específica de tiempo a dedicarle. Suponga la existencia de sólo "q" controladores.

3.45 Calendario de Trabajos

Suponga un proceso que requiere un cierto número de operarios trabajando durante cada hora del día; n_i representa el número de operarios requeridos durante la hora i, $i = 1, ..., 24$. Cada operario debe trabajar en un turno; un turno empieza en cualquier hora del día e incluye una hora de descanso luego de 3, 4 o 5 horas de trabajo, después de lo cual re-inicia su trabajo hasta completar un total de 8 horas trabajadas. Incluyendo el descanso, cada turno tiene entonces una duración de 9 horas, c_i representa el costo de un operario que inicia su turno en la hora i. Formule un modelo que permita obtener un calendario de costo mínimo que especifique la cantidad de operarios que debe trabajar y en que horarios de modo de satisfacer la demanda horaria de operarios.

SOLUCIÓN

Debemos formular un modelo que permita especificar la cantidad de operarios a trabajar en cada turno. Para ello definiremos las variables:

x_{i1} = Número de operarios que empiezan su turno durante la hora i y trabajan inicialmente 3 horas, continuan con descanso de 1 hora y luego trabajan 5 horas adicionales.
x_{i2} = Número de operarios que empiezan su turno durante la hora i y trabajan inicialmente 4 horas, continuan con descanso de 1 hora y luego trabajan 4 horas adicionales.
x_{i3} = Número de operarios que empiezan su turno durante la hora i y trabajan inicialmente 5 horas, continuan con descanso de 1 hora y luego trabajan 3 horas adicionales.
z_i = Número de operarios disponibles durante la hora i.

Además, son datos del problema:

n_i = Número de operarios requeridos durante la hora i.
c_i = Costo de un operario que inicia su turno en la hora i.

Luego, el problema cosnsiste en minimizar los costos asociados a los operarios, considerando que el número de operarios disponibles en la hora i debe igualar a z_i, y que este valor debe ser mayor o igual a n_i. Considerando lo anterior, podemos formular el siguiente modelo, donde las variables x_{ij} en que $i < 0$, toman el valor 0.

$$P) \quad Min \quad \sum_{i=1}^{24} C_i(x_{i1} + x_{i2} + x_{i3})$$

$$\begin{array}{rcll}
z_i & = & x_{i-8,1} + x_{i-8,2} + x_{i-8,3} + & \\
 & & x_{i-7,1} + x_{i-7,2} + x_{i-7,3} + & \\
 & & x_{i-6,1} + x_{i-6,2} + x_{i-6,3} + & \\
 & & x_{i-5,1} + x_{i-5,2} + & \\
 & & x_{i-4,1} + x_{i-4,3} + & \forall i \\
 & & x_{i-3,2} + x_{i-3,3} + & \\
 & & x_{i-2,1} + x_{i-2,2} + x_{i-2,3} + & \\
 & & x_{i-1,1} + x_{i-1,2} + x_{i-1,3} + & \\
 & & x_{i,1} + x_{i,2} + x_{i,3} & \\
z_i & \geq & n_i & \forall i \\
x_{i1}, x_{i2}, x_{i,3} & \geq & 0 & \forall i \\
x_{i1}, x_{i2}, x_{i,3} & \in & enteros & \forall i
\end{array}$$

3.46 Planificación de Tareas

Una compañía industrial debe ejecutar un total de J tareas diferentes sobre un horizonte de N semanas. Cada tarea esta compuesta por un número dado de etapas semanales que utilizan una cierta cantidad de mano de obra disponible. Para la tarea $j = 1, \ldots, J$, sea p_j el número de etapas que componen la tarea. Sea h_{jk} la cantidad de horas hombres necesarias para ejecutar la k-ésima etapa de la tarea j, $k = 1, \ldots, p_j$. Sea L_t el número total de horas hombres disponibles para la semana t, $t = 1, \ldots, N$. Sea c_t el costo unitario de la mano de obra en la semana t. Es requisito del sistema productivo que una tarea se ejecute de modo que todas sus etapas se hagan en semanas consecutivas. Dos o más tareas pueden efectuarse simultáneamente, pero la mano de obra total que se ocupe no puede superar lo disponible. Formule un modelo de programación lineal entera mixta que encuentre un programa de trabajo (es decir, cuando debe realizar cada tarea) tal que minimice el costo total de mano de obra empleada.

SOLUCIÓN[54]

[54] Jorge Vera, Profesor Ing. Industrial PUC

Debemos formular un modelo que permita establecer un programa trabajo, esto es, decidir cuando se debe realizar cada tarea. Para ello emplearemos la siguiente variable de decisión:

$$x_{jkt} = \begin{cases} 1 \text{ Si se realiza la } k\text{-ésima etapa de la tarea } j \text{ en la semana } t \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

El objetivo del problema es minimizar el costo total de mano de obra empleada, considerando las restricciones de número total de horas hombres disponibles, de que cada etapa debe realizarse y sólo una vez, que en cada semana se debe realizar a lo más una de las etapas de cada trabajo y que existe consecutividad de las etapas. Esto nos permite formular el siguiente modelo:

$$P) \quad Min \quad \sum_{t=1}^{N}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{p_j} h_{jk}x_{jkt}c_t$$

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{p_j} h_{jk}x_{jkt} & \leq & L_t & \forall t \\ \displaystyle\sum_{t=1}^{N} x_{jkt} & = & 1 & \forall j, \forall k \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p_j} x_{jkt} & \leq & 1 & \forall j, \forall t \\ x_{jkt} & = & x_{j,k+1,t+1} & \forall j, k = 1, \ldots, p_j - 1, t = 1, \ldots, N-1 \\ x_{jkt} & \in & \{0, 1\} & \forall j, k, t \end{array}$$

3.47 Cadena de Abastecimiento

Bilevel Linear Programming es un tipo de modelos de programación matemática que en sus restricciones tiene otro problema de optimización. También son conocidos como problemas con restricciones de equilibrio. Este tipo de modelos aparecen cuando hay jerarquías en las tomas de decisiones; ejemplos aplicados hay en el área de planificación agrícola, tarificación de peajes, modelos de duopolios económicos (duopolio de Stackelberg) y en problemas de asignación de recursos bancarios.

Suponga un mercado donde un distribuidor dominante agrupa a I proveedores pequeños a los cuales les cobrará una comisión. El problema es que mientras más alta sea la comisión menos productos desearán vender los distribuidores y por lo mismo menos ganancia obtendrá el distribuidor; por otro lado si la comisión es muy baja, los proveedores estarán incentivados a vender mucha mercadería pero la utilidad marginal del distribuidor será muy pequeña. Usted debe determinar la comisión que debe cobrar el distribuidor dominante a cada proveedor i, $i = 1, ..., I$ para el artículo j, $j = 1, ..., J$, y la cantidad a vender del producto j por el proveedor i. Considere como datos del problema la demanda D_j del producto j que debe satisfacer el distribuidor dominante, $j = 1, ..., J$, Q_i la cantidad total de productos que por lo menos desea vender cada proveedor i y P_{ij}el precio neto (precio de mercado menos costos) que tiene cada proveedor i para el producto j.

SOLUCIÓN[55]

Se debe formular un modelo que permita determinar la comisión que se debe cobrar cada proveedor i y la cantidad de producto j que debe vender cada proveedor i. Para ello consideraremos las siguientes variables:

x_{ij} = Comisión que debe cobrar el distribuidor dominante a cada proveedor i para el artículo j.
q_{ij} = Cantidad a vender del producto j por el proveedor i.

[55]Jorge Vera, Profesor Ing. Industrial PUC

El objetivo del problema es maximizar la comisión recibida por el distribuidor mayorista, considerando que la demanda de cada producto debe ser satisfecha y que se deben maximizar las ganancias de los proveedores. Este último corresponde a otro problema de optimización que debe considerar la restricción de cantidad mínima de productos que cada proveedor desea vender. De acuerdo a lo anterior el modelo resulta ser:

$$P) \quad Max_{x_{ij}} \quad \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} q_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\sum_{i=1}^{I} q_{ij} & \leq & D_j & \forall j \end{array}$$

$$P_1) \quad Max_{q_{ij},x_{ij}} \quad \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} q_{ij}(P_{ij} - x_{ij})$$

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\sum_{j=1}^{J} q_{ij} & \geq & Q_i & \forall i \\ x_{ij} & \geq & 0 & \forall i,j \\ q_{ij} & \in & enteros & \forall i,j \end{array}$$

3.48 Rey de Constantinopla

El rey de Constantinopla y usted han acordado la realización de un torneo en que se correrán Q carreras de caballos. En cada una de estas carreras deberá competir un caballo del rey y uno suyo, no permitiéndose que un caballo corra dos o más carreras. El rey, confiado en la capacidad de sus caballos, le ha dejado a usted la libertad para definir qué caballos de él competirán contra qué caballos suyos.

Para poder realizar este "emparejamiento", usted ha construido los conjuntos R -donde listó los Q caballos del rey- y U -donde listó sus Q caballos-. Además, y gracias a sus años de experiencia en competencias de este tipo, usted ha podido construir el parámetro C_r que indica la capacidad corredora del caballo r del rey, y el parámetro W_u que indica la capacidad corredora de su caballo u. Usted tiene completa certeza de que el ganador de cada carrera será el caballo que tenga la mayor capacidad corredora de entre los dos que compiten. En caso de que la capacidad corredora de ambos caballos sea la misma, la carrera se empatará, con lo cual no se considerará ganada ni perdida, tanto para el rey como para usted. Adicionalmente, sabe que si su caballo u gana la carrera en que participa, usted recibirá G_u monedas de oro, pero si pierde o empata, usted deberá cancelar P_u.

Por último, usted ha averiguado que el rey tiene por norma volver a invitar para el año siguiente a aquellos competidores que no le ganen más de B_2 carreras, pero que no pierdan más de B_1 de las carreras programadas.

a) Basándose en esta información, construya un modelo de P.L. que le permita determinar el "emparejamiento" adecuado para conseguir la mayor cantidad de monedas de oro del torneo, y que asegure su participación en el torneo del próximo año.

b) ¿Cómo se modifica el modelo propuesto en la parte a) si los empates se cuentan como media carrera ganada y media carrera perdida?

c) ¿Cómo modificaría el problema de la parte a) si, adicional a las ganancias ya descritas, usted gana H_r monedas de oro si vence al caballo r del rey, y debe pagar D_r si pierde o empata con este mismo caballo?

SOLUCIÓN[56]

[56]Interrogación 1, 2010'2

a) Para modelar este problema, necesitamos una variable que permita relacionar cada caballo propio con cada caballo del rey. Además, el hecho de que un caballo gane, empate o pierda quedará definido según la asignación, por lo que también debe ser considerado como una variable. Por lo tanto, las variables de decisión de este modelo son:

$$x_{ru} \quad : \quad \begin{cases} 1 \text{ si caballo } r \text{ del rey compite con su caballo } u \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

$$y_{u} \quad : \quad \begin{cases} 1 \text{ si su caballo } u \text{ gana su carrera} \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

$$z_{u} \quad : \quad \begin{cases} 1 \text{ si su caballo } u \text{ pierde su carrera} \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

Para las restricciones es importante destacar que es posible, dependiendo del modelamiento, que la información C_r y W_u se puede manejar en parámetros f_{ru} y H_{ru} definidos como sigue:

$$F_{ru} \quad : \quad \begin{cases} 1 \text{ si capacidad de caballo del rey } r \text{ es menor que la su caballo } u\ (C_r < W_u) \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

$$S_{ru} \quad : \quad \begin{cases} 1 \text{ si capacidad de caballo del rey } r \text{ es mayor que la su caballo } u\ (C_r > W_u) \\ 0 \text{ si no} \end{cases}$$

Las restricciones asociadas al problema son:

(a) Todo caballo suyo debe competir en exactamente una carrera.

$$\sum_{r \in R} x_{ru} = 1 \qquad \forall\ u \in U.$$

(b) Todo caballo del rey debe competir en exactamente una carrera.

$$\sum_{u \in U} x_{ru} = 1 \qquad \forall\ r \in R.$$

(c) Construir la variable que indica si el caballo u gana.

$$\sum_{r \in R : C_r < W_u} x_{ru} = y_u \qquad \forall\ u \in U.$$

o con la utilización de los parámetros definidos:

$$\sum_{r \in R} F_{ru} x_{ru} = y_u \qquad \forall\ u \in U.$$

(d) Construir la variable que indica si el caballo u pierde.

$$\sum_{r \in R : C_r > W_u} x_{ru} = z_u \qquad \forall\ u \in U.$$

o con la utilización de los parámetros definidos:

$$\sum_{r \in R} S_{ru} x_{ru} = z_u \qquad \forall\ u \in U.$$

(e) Condicionar máximo de carreras perdidas.

$$\sum_{u \in U} z_u \leq B_1$$

(f) Condicionar máximo de carreras ganadas.

$$\sum_{u \in U} y_u \leq B_2$$

(g) Naturaleza de las variables.

$$\begin{array}{lcll} x_{ru} & \in & \{0{,}1\} & \forall r \in R; u \in U. \\ y_u & \in & \{0{,}1\} & \forall u \in U. \\ z_u & \in & \{0{,}1\} & \forall u \in U. \end{array}$$

Función Objetivo:

$$\text{Máx Monedas de Oro} = \sum_{u\in U} G_u y_u - \sum_{u\in U} P_u(1-y_u)$$

b) En este caso, las restricciones (v) y (vi) se deben modificar, quedando:

(v) Condicionar máximo de carreras perdidas.

$$\sum_{u\in U} z_u + \left(\frac{Q - \sum_{u\in U} z_u - \sum_{u\in U} y_u}{2} \right) \leq B_1$$

(vi) Condicionar máximo de carreras ganadas.

$$\sum_{u\in U} y_u + \left(\frac{Q - \sum_{u\in U} z_u - \sum_{u\in U} y_u}{2} \right) \leq B_2$$

c) En este caso, se debe definir una variable binaria que indique si el caballo r del rey gana o no gana (pierde o empata) una carrera. Esta variable es:

$$\alpha_r \quad : \quad \begin{cases} 1 & \text{si le gano al caballo } r \text{ del rey} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Se debe agregar la restricción que indica si le gano al caballo r del rey, quedando:

$$\sum_{u\in U: C_r < W_u} x_{ru} = \alpha_r \qquad \forall\ r \in R.$$

o con la utilización de los parámetros definidos:

$$\sum_{u\in U} F_{ru} x_{ru} = \alpha_r \qquad \forall\ r \in R.$$

y la restricción de la naturaleza de la nueva variable, que queda:

$$\alpha_r \quad \in \quad \{0{,}1\} \qquad \forall r \in R.$$

Finalmente, la función objetivo también se modifica quedando:

$$\text{Máx Monedas de Oro} = \sum_{u\in U} G_u y_u - \sum_{u\in U} P_u(1-y_u) + \sum_{r\in R} H_r \alpha_r - \sum_{r\in R} D_r(1-\alpha_r)$$

3.49 Producción de Televisores

La empresa TVNew ha decidido producir televisores. Específicamente, la empresa desea producir P televisores, todos distintos entre sí. Esto último se asegura si dos televisores cualquiera difieren en al menos una de las alternativas que los componen.

La dirección de la empresa sabe que un televisor se construye en base a I componentes. A través de una investigación en el mercado de los proveedores de componentes se ha logrado construir el conjunto $J(i)$, para todo $i \in I$, que contiene la lista de todas las alternativas existentes para la selección de la componente i de un televisor. También se ha obtenido la información del costo que tiene cada una de estas alternativas de componente, construyéndose el parámetro c_{ji} que indica el costo en pesos que tiene la alternativa j para la componente i.

Adicionalmente, TVNew sabe que existe un descuento asociado a cada combinación alternativa-componente. Este descuento está asociado a la cantidad de televisores que utilizarán la alternativa j como selección para la componente i: si al menos M_{ji} de los P televisores de TVNew usan la alternativa j para su componente i, la empresa recibir'a un descuento de d_{ji} pesos.

Por último, el gobierno ha creado un bono para incentivar el uso de tecnologías ecológicas. Este bono consiste en subsidiar el 50% del costo de composición de aquellos televisores que poseen al menos 2 componentes ecológicas en su composición. La información de cuáles de las alternativas de componentes son ecológicas se encuentra en el parámetro R_{ji}, que toma valor 1 si la alternativa j para la componente i es ecológica y 0 sino. Esta información está disponible para toda combinación $i \in I$ y $j \in J(i)$.

Con la información anterior, construya un modelo de programación lineal en variables enteras/continuas que permita a TVNew determinar la composición de los P televisores que debe producir de manera de minimizar el costo total en el que debe incurrir.

SOLUCIÓN[57]

Variables

x_{ji}^p: variable binaria que vale 1 si la alternativa j de la componente i es usada para confeccionar el televisor p.

y_{ji}: variable binaria que vale 1 se tendrá el descuento d_{ji}.

α^p: variable binaria que vale 1 si se tendrá el bono del 50% por la composición del televisor p.

w_i^{pk}: variable binaria que vale 1 entre los televisores p y k la componente i usa la misma alternativa.

g^p: cantidad del bono recibido por la composición del televisor p.

Función objetivo La función objetivo consiste en minimizar los costos totales:

$$\min \sum_{p=1}^{P} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J(i)} c_{ji} x_{ji}^p - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J(i)} d_{ji} y_{ji} - \sum_{p=1}^{P} g_p$$

Restricciones

1. Asegurar que cada televisor será confeccionado con exactamente 1 alternativa para cada componente:

$$\sum_{j \in J(i)} x_{ji}^p = 1 \qquad \text{para } i \in I\,,\ \ p = 1, \ldots, P\,.$$

2. Asegurar que los televisores p y k son distintos:

$$\sum_{i \in I} w_j^{pk} \leq I - 1\,, \qquad \text{para } p = 1, \ldots, P-1\,,\ \ k = p+1, \ldots, P\,.$$

[57] Interrogación 2, 2011'1

3. Construir la variable w_i^{pk}:

$$x_{ji}^p + x_{ji}^k \leq 1 + w_i^{pk}\,, \quad \text{para } i \in I\,,\ j \in J(i)\,,\ p = 1, \ldots, P-1\,,\ k = p+1, \ldots, P\,.$$

4. Construir la variable y_{ji} que asigna el descuento d_{ji}:

$$\sum_{p=1}^{P} x_{ji}^p \geq M_{ji} y_{ji}\,, \quad \text{para } i \in I\,,\ j \in J(i)\,,\ .$$

5. Construir la variable α^{ji} que asigna el bono de gobierno:

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J(i)} R_{ji} x_{ji}^p \geq 2\alpha^p\,, \quad \text{para } p = 1, \ldots, P\,.$$

6. Relación del total del bono g^p obtenido por la composición del televisor p (50% del costo) y la variable α^p:

$$g^p \leq M\alpha^p\,, \quad \text{para } p = 1, \ldots, P\,.$$

Con $M >> 0$.

7. Cota superior para g^p:

$$g^p \leq 0.5 \cdot \sum_{i \in I} \sum_{j \in J(i)} c_{ji} x_{ji}^p\,, \quad \text{para } p = 1, \ldots, P\,.$$

8. Naturaleza de las variables.

$x_{ji}^p \in \{0, 1\}\,, \quad$ para $i \in I\,,\ j \in J(i)\,,\ p = 1, \ldots, P\,.$
$y_{ji} \in \{0, 1\}\,, \quad$ para $i \in I\,,\ j \in J(i).$
$\alpha^p \in \{0, 1\}\,, \quad$ para $p = 1, \ldots, P\,.$
$w_i^{pk} \in \{0, 1\}\,, \quad$ para $i \in I\,,\ p = 1, \ldots, P-1\,,\ k = p+1, \ldots, P\,.$
$g^p \geq 0\,, \quad$ para $p = 1, \ldots, P\,.$

3.50 El malvado Halej

En un pueblo existe un único orfanato, que es administrado por el malvado Halej. En este momento acaban de llegar nuevos huérfanos, y sus nombres se encuentran listados en el conjunto I. Estos nuevos huérfanos serán asignados a alguna de las 7 habitaciones dispuestas para ello. El orfanato cuenta con Q_j camas individuales en la habitación j, con $j = 1, \ldots, 7$.

Halej, luego de años de administración del orfanato, ha entendido que la felicidad de un huérfano depende de si es asignado en una habitación en la que se encuentre al menos uno de sus mejores amigos. Es por ello que este odiado administrador ha preguntado a cada huérfano (y por temor le han dicho la verdad) por quiénes son sus amigos dentro del grupo de huérfanos recién llegados. Esta información se encuentra en el subconjunto A_i, $\forall i \in I$ (que contiene el nombre de los cinco mejores amigos del huérfano).

Los años le han entregado a Halej el conocimiento de que un huérfano feliz llorará durante cada noche por a_i minutos, mientras que un huérfano infeliz lo haría durante $b_i > a_i$ minutos. Un extraño sentido de justicia impide a Halej aceptar una asignación de huérfanos a habitaciones si el total de minutos que se llora en la habitación que más minutos se llora es más del doble de los minutos totales que se llora en la habitación que menos se llora.

Con la información anterior formule un modelo de programación lineal que permita a Halej tomar las decisiones que le permitan maximizar la cantidad de nuevos huérfanos del orfanato que son infelices. Para ello, recuerde que un huérfano es infeliz si no tiene al menos uno de sus mejores amigos en su misma habitación.

SOLUCIÓN[58]

[58]Examen, 2011'2

Variables de Decisión:

x_{ij} : variable binaria que vale 1 si se destina al huérfano i, con $i \in I$, a la habitación j, con $j = 1, \ldots, 7$.

y_{ij} : variable binaria que vale 1 si el huérfano i, con $i \in I$, que está en la habitación j, con $j = 1, \ldots, 7$ es infeliz.

Restricciones:

1. Asegurar que todo huérfano es asignado a exactamente una habitación.

$$\sum_{j=1}^{7} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in I$$

2. Asegurar que la asignación de huérfanos a habitaciones respete la capacidad de cada una de ellas.

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \leq Q_j \qquad \forall j = 1, \ldots, 7$$

3. Relación entre las variables

$$y_{ij} \leq x_{ij} \qquad \forall i \in I \qquad \forall j = 1, \ldots, 7$$

4. Construcción de la variable que cuenta a los huérfanos infelices.

$$1 - y_{ij} \geq \frac{\sum_{k \in A_i} x_{kj}}{Card(A_i)} \qquad \forall i \in I \qquad \forall j = 1, \ldots, 7$$

5. Asegurar que el llanto total entre las piezas respeta la diferencia máxima impuesta por Halej.

$$\sum_{i \in I} (a_i x_{ij} + (b_i - a_i) y_{ij}) \geq 2 \cdot \sum_{i \in I} (a_i x_{il} + (b_i - a_i) y_{il}) \qquad \forall j = 1, \ldots, 7 \qquad \forall l = 1, \ldots, 7 : l \neq j.$$

6. Naturaleza de las variables.

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in I \qquad \forall j = 1, \ldots, 7$$
$$y_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in I \qquad \forall j = 1, \ldots, 7$$

Función Objetivo: Se quiere maximizar la cantidad de niños infelices:

$$\max z = \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{7} y_{ij}$$

3.51 Mudanza

Considere que su familia enfrenta una difícil tarea: la mudanza. Para realizarla debe planificar el embalaje de los N artículos que posee en el hogar, en un máximo de N cajas de cartón. Es decir, una caja por artículo en el peor de los casos. Cada caja es indivisible, soporta un peso de W [kg] y un volumen máximo de V [m^3]. Por otro lado, cada artículo posee un peso w_i [Kg] y volumen v_i [m^3] conocidos para todo $i = 1, .., N$. Como dato se sabe que $w_i < W$ [Kg] y además que $v_i < V$ [m^3]. Si usted no embala el artículo i (para todo $i = 1, \ldots, N$), entonces debe reemplazarlo en su nuevo hogar comprándolo a un costo $\$p_i$ una vez que termine la mudanza. Sin embargo, existen artículos que debe llevar, pues tienen carácter de *irremplazables* para usted. Denotemos este último conjunto como $I \subset 1, \ldots, N$.

Cada caja con artículos ya embalados debe ser cargada en uno de los T camiones disponibles. Cada uno tiene una capacidad de E_k cajas donde $k = 1, \ldots, T$. Interesa racionar el uso de camiones, pues arrendarlo posee un costo $\$C_k$.

Sin embargo, dado el alto costo de arriendo usted decide negociar con el dueño de los camiones y ha conseguido un descuento por volumen de camiones arrendados. Específicamente, si arrienda más de F_1 camiones se le hará un descuento por $\$B_1$, y si el número sobrepasa los F_2 camiones arrendados, con $F_2 > F_1$, el descuento será de $\$B_2$ (que es mayor al descuento anterior).

a) (12 puntos) Construya un modelo de programación lineal que le permita tomar las decisiones de la mudanza minimizando el costo total en el que deba incurrir.

b) (8 puntos) Ahora considere que al camión que lleve la carga más valiosa (costo de compra $\$p_i$) se le colocará un chip de seguridad. Este chip posee un costo que depende del camión y que corresponde a $\$S_k$.

   Considerando la nueva información, modifique el modelo propuesto en la parte a) de manera de que las decisiones consideren este nuevo costo.

SOLUCIÓN[59]

a) Se definen las siguientes variables.

Variables

x_{ij}: binaria que vale 1 si se carga el artículo i, con $i = 1, \ldots, N$, en la caja j, con $j = 1, \ldots, N$.

y_{jk}: binaria que vale 1 si se carga la caja j, con $j = 1, \ldots, N$, en el camión k, con $k = 1, \ldots, T$.

z_k: binaria que vale 1 si se utiliza el camión k, con $k = 1, \ldots, T$.

D_1: se alcanzó el primer nivel de descuento.

D_2: se alcanzó el segundo nivel de descuento.

Función objetivo La función objetivo consiste en minimizar el costo total de la mudanza.

$$\min \quad \sum_{i=1}^{N} p_i \left(1 - \sum_{j=1}^{N} x_{ij}\right) + \sum_{k=1}^{T} c_k z_k - B_1 D_1 - B_2 D_2$$

Restricciones

R1) Cada artículo debe ser cargado en a lo más una caja.

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} \leq 1\,, \quad \forall\, i = 1, \ldots, N.$$

R2) Los artículos irremplazables deben ser llevados.

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1\,, \quad \forall\, i = 1, \ldots, N : i \in I.$$

R3) Las cajas son cargadas en a lo más un solo camión.

$$\sum_{k=1}^{T} y_{jk} \leq 1\,, \quad \forall\, j = 1, \ldots, N.$$

[59] Interrogación 2, 2011'2

R4) Respetar la capacidad en volumen de las cajas.

$$\sum_{i=1}^{N} v_i x_{ij} \leq V \sum_{k=1}^{T} y_{jk}\,, \quad \forall\, j = 1, \ldots, N.$$

R5) Respetar la capacidad en peso de las cajas.

$$\sum_{i=1}^{N} w_i x_{ij} \leq W \sum_{k=1}^{T} y_{jk}\,, \quad \forall\, j = 1, \ldots, N.$$

R6) Respetar la capacidad en cajas de los camiones.

$$\sum_{j=1}^{N} y_{jk} \leq E_k z_k\,, \quad \forall\, k = 1, \ldots, T.$$

R7) Se puede estar a lo más en un tramo de descuento.

$$D_1 + D_2 \leq 1$$

R8) Activación variable de primer tramo de descuento.

$$F_2(D_1 + D_2) \leq \sum_{k=1}^{T} z_k$$

R9) Activación variable de segundo tramo de descuento.

$$F_2 D_2 \leq \sum_{k=1}^{T} z_k$$

R10) Naturaleza de las variables.

$x_{ij} \in \{0, 1\}$, para artículo $i = 1, \ldots, N$ y caja $j = 1, \ldots, N$.
$y_{jk} \in \{0, 1\}$, para caja $j = 1, \ldots, N$ y camión $k = 1, \ldots, T$.
$z_k \in \{0, 1\}$, para camión $k = 1, \ldots, T$.
$D_1, D_2 \in \{0, 1\}$.

b) La modificación debe incluir las siguientes variables adicionales.

Variables

γ_k: binaria que vale 1 si el camión k, con $k = 1, \ldots, T$, es el cargamento más valioso.

α_{kh}: binaria que vale 1 si el camión k, con $k = 1, \ldots, T$, en más valioso que el camión h, con $h = 1, \ldots, T$ y $k <> h$.

β_{ijk}: binaria que vale 1 si el artículo i, con $i = 1, \ldots, N$ cargado en la caja j, con $j = 1, \ldots, N$, va en el camión k, con $k = 1, \ldots, T$.

La función objetivo queda modificada de la siguiente manera:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{N} p_i \left(1 - \sum_{j=1}^{N} x_{ij}\right) + \sum_{k=1}^{T} c_k z_k - B_1 D_1 - B_2 D_2 + \sum_{k=1}^{T} S_k \gamma_k$$

Y finalmente, se deben agregar las siguientes restricciones:

R11) Construcción de variable β_{ijk}

$$\frac{x_{ij} + y_{jk}}{2} \geq \beta_{ijk} \geq x_{ij} + y_{jk} - 1\,, \quad \forall\, i = 1, \ldots, N; \forall\, j = 1, \ldots, N; \forall\, k = 1, \ldots, T.$$

R12) Construcción de variable α_{kh}

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^{N} p_i \sum_{j=1}^{N} \beta_{ijk}\right) - \left(\sum_{i=1}^{N} p_i \sum_{j=1}^{N} \beta_{ijh}\right)}{\sum_{i=1}^{N} p_i} \leq \alpha_{kh}\,, \quad \forall\, k = 1, \ldots, T; \forall\, h = 1, \ldots, T \text{ con } k <> h.$$

R13) Construcción de variable γ_{kh}

$$\gamma_k \geq \left(\sum_{h=1}^{T} \alpha_{kh}\right) - (T-1)\,, \quad \forall\, k = 1, \ldots, T.$$

R14) Debe haber un camión con cargamento más valioso.

$$\sum_{k=1}^{T} \gamma_k = 1$$

R15) Naturaleza de las variables nuevas.

$\gamma_k \in \{0, 1\}$, para camión $k = 1, \ldots, T$.

$\alpha_{kh} \in \{0, 1\}$, para camión $k = 1, \ldots, T$ y camión $h = 1, \ldots, T$ con $k <> h$.

$\beta_{ijk} \in \{0, 1\}$, para artículo $i = 1, \ldots, N$, caja $j = 1, \ldots, N$ y camión $k = 1, \ldots, T$.

3.52 Libro de fotos

Una fotógrafa ha decidido confeccionar un libro con sus mejores fotos. Ella cuenta con R fotos y desea que su libro tenga exactamente N páginas (donde $R > 2N$), que cada página no tenga más de dos fotos (claramente tampoco pueden haber páginas sin fotos) y que cada foto se use a lo más una vez en el libro.

La editorial que ha aceptado publicar este libro le impuso como condición que a lo más W páginas (con $W < N$) contengan exactamente dos fotos. Además, le ha indicado que el atractivo que tendrá el libro corresponde a la suma de los atractivos individuales de cada página, y que el atractivo de cada página depende de las fotos que en ella se coloquen. Es así como si en una página se coloca la foto r junto a la foto i, el atractivo de la página será $B_{ri} > 0$ (obviamente $B_{ri} = B_{ir}$).

Por último, existe una línea editorial que ha analizado los potenciales emparejamientos de las R fotos, y le ha comunicado a la fotógrafa que la foto r no puede ser colocada en la misma página que las fotos que se encuentran en el conjunto $V(r)$, conjunto definido para todo $r = 1, \ldots, R$.

a) Con la información anterior formule un modelo de programación lineal entera que permita a la fotógrafa confeccionar su libro, respetando sus propios deseos y los requerimientos de la editorial, y que le permita maximizar el atractivo total del libro.

Antes de tener decidida la confección del libro, la editorial le comunica a la fotógrafa que se debe seleccionar una de las páginas para que sea la página destacada. Para ello, se le ha pedido que esa página tenga sólo una fotografía y que para destacarla, tanto la página anterior como la posterior deben ser páginas con dos fotografías.

b) Considere la nueva información para reformular el modelo de programación lineal entera construido en la parte a).

SOLUCIÓN[60]

a) Se definen las siguientes variables.

Variables

$$x_r^n \colon \begin{cases} 1 & \text{si la foto } r, \text{ con } r = 1, \ldots, R, \text{ es colocada en la página } n, \text{ con } n = 1, \ldots, N. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$y_{ri}^n \colon \begin{cases} 1 & \text{si la foto } r, \text{ con } r = 1, \ldots, R \text{ y la foto } i = 1, \ldots, R \text{ están en la página } n = 1, \ldots, N. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para representar que dos fotos estén en la misma página, no basta con la primera variable. Se podría haber hecho así, pero se forzaba un modelo no lineal. En cambio, agregando la segunda variable y las restricciones adecuadas, se puede modelar la situación de forma lineal.

Función objetivo La función objetivo consiste en maximizar el atractivo del libro.

$$\max \quad \sum_{n=1}^{N} \sum_{r=1}^{R} \sum_{i=1}^{R} B_{ri} \cdot y_{ri}^n$$

Restricciones

R1) Asegurar que cada página tiene el mínimo y máximo de fotos deseado por la fotógrafa.

$$1 \leq \sum_{r=1}^{R} x_r^n \leq 2 \quad \forall\, n = 1, \ldots, N.$$

R2) Asegurar que cada foto es usada a lo más una vez.

$$\sum_{n=1}^{N} x_r^n \leq 1 \quad \forall\, r = 1, \ldots, R.$$

R3) Construir la variable de atractivo (y_{ri}^n).

$$x_r^n + x_i^n \geq 2 \cdot y_{ri}^n \quad \forall\, r = 1, \ldots, R; \quad \forall\, i = r+1, \ldots, R; \quad \forall\, n = 1, \ldots, N.$$

donde se debe asegurar que:

$$y_{ri}^n = 0 \quad \forall\, r = 1, \ldots, R; \quad \forall\, i = 1, \ldots, r-1; \quad \forall\, n = 1, \ldots, N.$$

R4) Asegurar que no hay más de W páginas que contengan dos fotografías.

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{r=1}^{R} \sum_{i=1}^{R} y_{ri}^n \leq W$$

R5) Asegurar que la foto r no es colocada en la misma página con alguna foto del conjunto $V(r)$.

$$x_r^n + x_i^n \leq 1 \quad \forall\, r = 1, \ldots, R; \quad \forall\, i \in V(r); \quad \forall\, n = 1, \ldots, N.$$

que también puede escribirse como:

$$x_r^n + \frac{\sum\limits_{i \in V(r)} x_i^n}{M} \leq 1 \quad \forall\, r = 1, \ldots, R; \quad \forall \quad \forall\, n = 1, \ldots, N.$$

donde $M >>> 0$, y que en este caso particular puede ser $M = R - 1$.

[60] Interrogación 2, 2012'1

R6) Naturaleza de las variables.

$x_r^n \in \{0,1\}$, para foto $r = 1,\dots,R$ y página $n = 1,\dots,N$.
$y_{ri}^n \in \{0,1\}$, para fotos $r = 1,\dots,R$ e $i = 1,\dots,R$ y página $n = 1,\dots,N$.

b) Se define la siguiente variable adicional.

Variables

$$\beta_i^n: \begin{cases} 1 & \text{si la página } n\text{, con } n = 1,\dots,N\text{, que tiene la fotografía } i = 1\text{, con } i = 1,\dots,R, \\ & \text{será la página destacada.} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Función objetivo La función objetivo se modifica quedando como sigue:

$$\max \quad \sum_{n=1}^{N}\sum_{r=1}^{R}\sum_{i=1}^{R} B_{ri}\cdot y_{ri}^n + \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{R} P_i^n \cdot \beta_i^n$$

R1A) Asegurar que exactamente una página es la destacada.

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{R}\beta_i^n = 1$$

R2A) Asegurar que la página destacada contiene sólo una fotografía.

$$\beta_i^n \leq \left(1 - \sum_{r=i+1}^{R} y_{ir}^n\right) \qquad \forall\, n = 1,\dots,N; \quad \forall\, i = 1,\dots,R.$$

R3A) Asegurar que tanto la página anterior como la posterior son páginas con dos fotografías.

$$2\cdot\sum_{i=1}^{R}\beta_i^n \leq \sum_{r=1}^{R}\sum_{i=1}^{R}\left(y_{ir}^{n+1} + y_{ir}^{n-1}\right) \qquad \forall\, n = 2,\dots,N-1.$$

la primera y la última página no pueden ser seleccionadas, entonces:

$$\beta_i^n = 0 \quad \forall\, n \in \{1, N\}; \quad \forall\, i = 1,\dots,R.$$

R4A) Naturaleza de la variable nueva.

$\beta_i^n \in \{0,1\}$, para la página $n = 1,\dots,N$ que contiene la fotografía $i = 1,\dots,R$.

3.53 Fábrica de maderas

Una empresa productora de muebles que posee N sucursales debe diseñar su red de distribución para los próximos T años. Cada año debe ser capaz de abastecer sus sucursales con madera para fabricar muebles. Esta madera puede provenir de M aserraderos con los cuales posee convenio. La cantidad máxima de madera que puede entregar el aserradero i en el período t es A_{it}. El requerimiento mínimo en el año t de cada sucursal k es P_{kt}. La empresa debe instalar bodegas donde se reciba la madera proveniente de los aserraderos. Actualmente, no tiene bodegas instaladas y debe decidir dónde localizarlas, estimándose que a lo más se deben instalar S bodegas, las cuales pueden ubicarse en L lugares posibles ($L \geq S$). Estas bodegas pueden ser instaladas en cualquier momento durante los T años, y se asume inmediato su funcionamiento.

Las bodegas a instalar pueden ser de dos tipos; pequeñas o grandes, teniendo las pequeñas la opción de ampliarse posteriormente a un costo de AM_{jt}, correspondiente a una bodega en el lugar j en el año t. Se considera que si la bodega es pequeña su capacidad máxima es de a y si es grande, su capacidad es de b.

En cada sitio factible j puede instalarse a lo más una bodega de cualquier tipo y el costo de instalación es de F_j. El costo de trasladar la madera desde i hasta j por la red de distribución es de c_{ij} unidades monetarias. Por convenio con la compañía constructora encargada de las instalaciones y ampliaciones, si en un período se realiza alguno de estos trabajos, entonces en los δ periodos siguientes se deberá realizar al menos una ampliación. No asegurar esto hace que la empresa caiga en una violación de contrato, lo que está asociado a una multa millonaria que la empresa no está en condiciones de pagar.

Considerando la información anterior, formule un modelo de programación lineal entero mixto que ayude a la empresa productora de muebles a tomar las decisiones de manera de minimizar el costo total.

SOLUCIÓN[61]

Variables de decisión

- $x^1_{jt} = \begin{cases} 1, & \text{si se instala una bodega de capacidad } a \text{ en el sitio } j = 1, ..., L \text{ en el periodo } t = 1, ..., T \\ 0, & \text{o.c.} \end{cases}$

- $x^2_{jt} = \begin{cases} 1, & \text{si se instala una bodega de capacidad } b \text{ en el sitio } j = 1, ..., L \text{ en el periodo } t = 1, ..., T \\ 0, & \text{o.c.} \end{cases}$

- $w_{jt} = \begin{cases} 1, & \text{si una bodega de capacidad } a \text{ en el sitio } j \text{ se amplia a capacidad } b \\ 0, & \text{o.c.} \end{cases}$

- y_{ijt} : cantidad de madera a mover desde el aserradero $i = 1, ..., M$ a la bodega $j = 1, ..., L$ en el periodo t.

- z_{jkt} = cantidad de madera a mover desde la bodega $j = 1, ..., L$ a la sucursal $k = 1, ..., N$ en el periodo t.

La función objetivo se arma de forma de minimizar los costos totales:

$$\min \sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{j=1}^{L} F_j(x^1_{jt} + x^2_{jt}) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{L} c_{ij} y_{ijt} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{L} c_{jk} z_{jkt} + \sum_{j=1}^{L} AM_{jt} w_{jt} \right)$$

Las restricciones son las siguientes:

- Se debe satisfacer la demanda:

$$\sum_{j=1}^{L} z_{jkt} = P_{kt} \qquad \forall k = 1, ..., K; \forall t = 1, ..., T$$

- Balance de flujo en las bodegas:

$$\sum_{i=1}^{M} y_{ijt} = \sum_{k=1}^{N} z_{jkt} \qquad \forall j = 1, ..., L; \forall t = 1, ..., T$$

- Cantidad máxima de bodegas:

$$\sum_{t=1}^{T} y_{ijt} \sum_{j=1}^{L} (x^1_{jt} + x^2_{jt}) \leq S$$

[61] Interrogación 3, 2012'2

- Instalación de bodegas de una sola capacidad por periodo y sitio:

$$x_{jt}^1 + x_{jt}^2 \leq 1 \qquad \forall j = 1, ..., L; \forall t = 1, ..., T$$

- Instalación de bodegas en un sitio en un solo periodo:

$$\sum_{t=1}^{T} x_{jt}^1 \leq 1 \qquad \forall j = 1, ..., L; \forall t = 1, ..., T$$

$$\sum_{t=1}^{T} x_{jt}^2 \leq 1 \qquad \forall j = 1, ..., L; \forall t = 1, ..., T$$

- Ampliación de bodegas solo si previamente hay una bodega pequeña instalada en ese sitio:

$$\sum_{h=1}^{t-1} x_{jt}^1 \geq w_{jt} \qquad \forall j = 1, ..., L; \forall t = 1, ..., T$$

- Determinación de capacidad de bodega por periodo:

$$\sum_{i=1}^{M} y_{ijt} \leq a \cdot \sum_{h=1}^{T} x_{jt}^1 + b \cdot \sum_{h=1}^{T} x_{jt}^2 + (b-a) \cdot \sum_{h=1}^{T} w_{jt} \qquad \forall j = 1, ..., L; \forall t = 1, ..., T$$

- Asegurar condición que evita la multa:

$$\sum_{j=1}^{L} (x_{jt}^1 + x_{jt}^2 + w_{jt} \leq 3 \cdot L \cdot \sum_{h=t+1}^{t+\delta} \sum_{j=1}^{L} w_{jh} \qquad \forall t = 1, ..., T$$

- Naturaleza de las variables:

$$x_{jt}^1, x_{jt}^2, w_{jt} \in \{0, 1\} \qquad \forall j = 1, ..., L; \forall t = 1, ..., T$$

$$y_{ijt}, z_{jkt} \geq 0 \qquad \forall j = 1, ..., L; \forall k = 1, ..., N; \forall t = 1, ..., T$$

3.54 Transporte de cajas

Una empresa de productos de alto consumo ha visto crecer de manera importante sus costos de distribución debido al aumento del costo del combustible. Al mismo tiempo, la Compañía ha cambiado su estrategia de distribución, ya que antes sólo vendía sus productos a grandes clientes como cadenas de supermercados o distribuidores mayoristas. Actualmente ha comenzado a vender directamente a supermercados de tamaño mediano que antes le compraban sus productos a los distribuidores.

Esto ha generado un desafío logístico, dado que ahora se envían desde el mismo centro de distribución pedidos pequeños y grandes a los clientes, los que pertenecen a un conjunto C. Cada pedido puede ser enviado directamente al cliente $c \in C$ de destino, o en caso contrario, se puede dejar en una plataforma de *cross-docking* $p \in P$(punto de transferencia), desde donde una empresa externa lo repartirá. No siempre es trivial decidir si un pedido debe ser enviado de manera directa o mediante una plataforma de *cross-docking*, ya que depende de cuales de los otros pedidos deben ser enviados ese día.

La idea es asignar todos los pedidos despachados por la Compañía en un día particular a alguno de los camiones disponibles. Cada camión $k \in K$ posee una capacidad diferente en términos de volumen y peso, denotadas V_k y P_k, respectivamente.

Para cada cliente que realizó un pedido ese día, se conoce su número de cliente, el volumen del pedido v_c, el peso del pedido w_c, el número de cajas del pedido $CAJAS_c$, y la ruta a la que pertenece (que permite conocer el costo estimado de asignarlo a cada tipo de camión).

La distancia exacta entre los clientes no es conocida, y por lo tanto su modelo no debe decidir el orden exacto en que se visitan los clientes. Sin embargo, pedidos para clientes ubicados en ciudades lejanas entre sí, no deberían ser asignadas al mismo camión. Para modelar esto, se utiliza información de las zonas a las que pertenecen los clientes. Los clientes se asocian a las zonas dependiendo de la ciudad en que se ubican. Las ciudades grandes pueden incluir múltiples zonas. Estas zonas se combinan en macro-zonas más grandes, para las que a su vez se conoce la información de qué otras macro-zonas pueden ser combinadas al asignar clientes a un mismo camión. El conjunto de macro-zonas que pueden ser combinadas se denota Z. Se establece que un camión asignado a una macro-zona $z \in Z$ tiene un número máximo de paradas permitidas ($PARADAS_z$).

Además, los pedidos asignados a un mismo camión deben cumplir algunos requerimientos especiales. Unos pocos clientes requieren que sus entregas se realicen en ventanas de tiempo específicas; este aspecto se modela evitando que algunos pares de clientes sean asignados a un mismo camión. Los pares de clientes no permitidos se almacenan en el conjunto T.

Los costos de transporte asociados al problema son:

- $CTD_{c,z}^k$: costo (por caja) de transporte en el camión $k \in K$ al enviar el pedido del cliente $c \in C$ perteneciente a la macro-zona $z \in Z$ en forma directa.

- $CTCD_{c,z,p}^k$: costo (por caja) de transporte en el camión $k \in K$ hacia la plataforma $p \in P$ que envía pedidos de clientes $c \in C$ a la macro-zona $z \in Z$ en forma directa.

- $CE_{p,c}$: costo (por caja) de la empresa externa para entregar los pedidos del cliente $c \in C$ desde la plataforma $p \in P$.

Formule un Modelo de Programación Lineal Entera que determine la forma de entregar los pedidos de los clientes, para minimizar el costo total de distribución de todos los pedidos, considerando envíos directos y envíos a través de plataformas de cross-docking.

SOLUCIÓN[62]

Variables de decisión

- $x_{c,z}^k = \begin{cases} 1, & \text{si el camión } k \in K \text{ visita al cliente } c \in C \text{, ubicado en la macrozona } z \in Z \\ & \text{en forma directa.} \\ 0, & \text{o.c.} \end{cases}$

- $y_{c,z,p}^k = \begin{cases} 1, & \text{si el camión } k \in K \text{ va a dejar el pedido del cliente } c \in C \text{, ubicado en la} \\ & \text{macrozona } z \in Z \text{ a la plataforma } p \in P \\ 0, & \text{o.c.} \end{cases}$

- $u_z^k = \begin{cases} 1, & \text{si el camión } k \in K \text{ visita la macrozona } z \in Z \\ 0, & \text{o.c.} \end{cases}$

- $m_{z,p}^k = \begin{cases} 1, & \text{si el camión } k \in K \text{ visita la plataforma } p \in P \text{ con pedidos de uno o varios} \\ & \text{clientes de la macrozona } z \in Z \\ 0, & \text{o.c.} \end{cases}$

Función objetivo

$$\min \sum_{k\in K}\sum_{c\in C}\sum_{z\in Z}\left(CAJAS_c \cdot CTD_{c,z}^k\right) x_{c,z}^k + \sum_{k\in K}\sum_{c\in C}\sum_{p\in P}\left(CAJAS_c \cdot CTCD_{z,p}^k\right) m_{z,p}^k +$$
$$+ \sum_{c\in C}\sum_{z\in Z}\sum_{p\in P}\sum_{k\in K}\left(CE_{p,c} CAJAS_c\right) y_{c,z,p}^k$$

Restricciones

[62] Interrogación 2, 2012'2

1. Todos los pedidos deben ser entregados.

$$\sum_{z\in Z}\sum_{k\in K} x_{c,z}^k + \sum_{z\in Z}\sum_{k\in K}\sum_{p\in P} y_{c,z,p} \geq 1,\ \forall c \in C$$

2. Se debe respetar la capacidad volumétrica de los camiones.

$$\sum_{c\in C}\sum_{z\in Z} v_c x_{c,z}^k + \sum_{c\in C}\sum_{z\in Z}\sum_{p\in P} v_c y_{c,z,p}^k \leq V^k,\ \forall k \in K$$

3. Se debe respetar la capacidad másica de los camiones.

$$\sum_{c\in C}\sum_{z\in Z} w_c x_{c,z}^k + \sum_{c\in C}\sum_{z\in Z}\sum_{p\in P} w_c y_{c,z,p}^k \leq W^k,\ \forall k \in K$$

4. Un camión puede visitar como máximo una macrozona.

$$\sum_{z\in Z} u_z^k \leq 1,\ \forall k \in K$$

5. Si un pedido de un cliente se envía de forma directa, entonces se debe visitar la macrozona.

$$x_{c,z}^k \leq u_z^k,\ \forall k \in K,\ z \in Z,\ c \in C$$

6. Si un pedido de una macrozona se asigna a un camión para entrega por plataforma, se debe visitar la macrozona.

$$y_{c,z,p}^k \leq m_{z,p}^k,\ \forall k \in K,\ z \in Z,\ p \in P,\ c \in C$$

7. Se debe respetar el número máximo de paradas permitidas en una macrozona.

$$\sum_{c\in C} x_{c,z}^k + \sum_{p\in P} m_{z,p}^k \leq PARADAS_z,\quad \forall z \in Z$$

8. Se debe respetar la lista tabú.

$$\sum_{z\in Z} x_{c,z}^k + \sum_{z\in Z} x_{i,z}^k + \sum_{z\in Z}\sum_{p\in P} y_{c,z,p}^k + \sum_{z\in Z}\sum_{p\in P} y_{i,z,p}^k \leq 1,\ \forall c \in C, \forall k \in K, \forall \{i,c\} \in T:\ i \in C$$

9. Naturaleza de las variables de decisión.

$$x_{c,z}^k \in \{0,1\},\ \forall c \in C, \forall z \in Z, \forall k \in K$$

$$y_{c,z,p}^k \in \{0,1\},\ \forall c \in C, \forall z \in Z, \forall p \in P, \forall k \in K$$

$$u_z^k \in \{0,1\},\ \forall k \in K, \forall z \in Z$$

$$m_{z,p}^k \in \{0,1\},\ \forall z \in Z, \forall p \in P, \forall k \in K$$

3.55 Barras bravas

Usted ha recibido una llamada desde la Asociación Nacional de Fútbol Profesional (ANFP) para que les ayude a solucionar el siguiente problema. Pronto se jugará la final del campeonato nacional, a la que asistirán las barras de los N equipos participantes. Dada la rivalidad entre las barras, se ha dividido el estadio en N zonas, donde la zona $k \in \{1, \ldots, N\}$ tiene A_k asientos disponibles. La idea es que cada equipo quede asignado a una de estas zonas, donde se conoce, para cada zona k (con $k \in \{1, \ldots, N\}$), el conjunto de zonas vecinas V_k. La ANFP cree que si se coloca a la barra del equipo j (con $j \in \{1, \ldots, N\}$) en una zona vecina a la barra del equipo i (con $i \in \{1, \ldots, N : i \neq j\}$) se tendrá un número de heridos igual a M_{ji} personas. Por otra parte, la venta de entradas se hará en la sede de cada equipo y se venderá solamente a los socios de dicho club, sabiendo que d_j socios del equipo j (con $j \in \{1, \ldots, N\}$) comprarán entrada para el partido. Obviamente, la cantidad de entradas que se venderán en cada sede dependerá de la cantidad de asientos disponibles en la zona que sea asignada esa barra. Por lo tanto, es posible que queden socios sin entradas. Cada socio del club j (con $j \in \{1, \ldots, N\}$) que queda sin entradas genera un perjuicio igual al de $B_j > 0$ personas heridas en el estadio.

a) Con la información, construya un modelo de programación lineal entera mixta que permita determinar la mejor asignación de las zonas, de manera que la cantidad de heridos en el partido sea mínima.

Se le ha pedido resolver otro problema, considerando la misma información de la parte a). La administración del estadio cuenta con presupuesto para la instalación de p cámaras de vigilancia para instalarlas en el centro de cada una de las zonas en las que se encuentra dividido el estadio. Debido a su capacidad de enfoque, al localizar una cámara en la zona k (con $k \in \{1, \ldots, N\}$), también se pueden vigilar las zonas vecinas.

b) Considerando la nueva situación, formule un modelo de programación lineal entera que determina la mejor ubicación de las cámaras, para maximizar la cantidad de asientos vigilados por las cámaras.

SOLUCIÓN[63]

a) **Variables de decisión**

$$x_{jk} : \begin{cases} 1, & \text{si la barra del club } j \text{ se asigna a la zona } k. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$y_{ji} : \begin{cases} 1, & \text{si la barra del club } j \text{ es asignada a una zona vecina a la barra del club } i, i > j. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

α_j : número de socios del club j que quedan sin entrada, dada la capacidad de la zona asignada a su club.

Restricciones

R1) Todas las barras son asignadas a una zona.

$$\sum_{k=1}^{N} x_{jk} = 1, \ \forall j = 1, \ldots, N$$

R2) A cada zona se le debe asignar una única barra.

$$\sum_{j=1}^{N} x_{jk} = 1, \ \forall k = 1, \ldots, N$$

[63] Interrogación 1, 2012'2

R3) Capacidad de la zona asignada a cada barra y la cantidad de socios que quedarán sin asiento.

$$\sum_{k=1}^{N} A_k x_{jk} \geq d_j - \alpha_j, \ \forall j = 1, \ldots, N$$

R4) Hacer que la variable y_{ji} tome el valor 1 ó 0 cuando corresponda.

$$\left(x_{jk} + \sum_{m \in V_k} x_{im} \right) - 1 \leq y_{ji}, \ \forall j = 1, \ldots, N, \ i = 1, \ldots, N : i > j, \ k = 1, \ldots, N$$

R5) Naturaleza de las variables.

$$x_{jk} \in \{0, 1\}, \ \forall j = 1, \ldots, N, \ k = 1, \ldots, N$$

$$y_{ji} \in \{0, 1\}, \ \forall j = 1, \ldots, N, \ i = 1, \ldots, N : i > j$$

$$\alpha_j \geq 0, \ \forall j = 1, \ldots, N$$

Función objetivo

Minimizar la cantidad de heridos.

$$\min \sum_{k=1}^{N} B_j \alpha_j + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1:i>j}^{N} M_{ji} y_{ji}$$

b) **Variables de decisión**

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{si se localiza una cámara en la zona } i. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$z_k = \begin{cases} 1, & \text{si la zona } k \text{ es cubierta por al menos una cámara.} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Restricciones

R1) Cantidad de cámaras.

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = p$$

R2) Restricción de cobertura.

$$y_k + \sum_{i \in V_k} y_i \geq z_k, \ \forall k \in \{1, \ldots, N\}$$

R3) Naturaleza de las variables.

$$y_i \in \{0, 1\}, \ \forall i \in \{1, \ldots, N\}$$

$$z_k \in \{0, 1\}, \ \forall k \in \{1, \ldots, N\}$$

Función objetivo

Maximizar la cantidad de asientos vigilados.

$$\max \sum_{k=1}^{N} A_k z_k$$

3.56 Elecciones presidenciales

Machales es un pequeño país que enfrenta elecciones presidenciales dentro de una semana. Ramón Romualdo es uno de los $N+1$ candidatos (para todos los efectos asumiremos que de 1 a N son los rivales de Ramón Romualdo) que busca ganar la presidencia de esta nación que cuenta con M votantes. Las reglas electorales de esta nación indican que los dos candidatos que obtengan mayor votación pasarán a una segunda vuelta.

La encuesta del día de hoy –que es 100% confiable– dice que R votantes ya han escogido a Ramón Romualdo como su candidato y votarán por él, y que M_i votantes que al final han escogido al candidato i, con $i = 1, \ldots, N$, y votarán por éste. Esta encuesta también indica un total de Q votantes se están indecisos (entonces $R + \sum\limits_{i=1}^{N} M_i + Q = M$).

Al día de hoy, todos los candidatos, salvo Ramón Romualdo, han gastado la totalidad de su presupuesto de campaña. Al candidato Ramón Romualdo aún le quedan P unidades presupuestarias, las que espera utilizar durante esta semana que falta para las votaciones. Para ello, él sabe que deberá gastar C unidades presupuestarias para lograr que uno de los votantes indecisos voté por él en las próximas elecciones. También sabe que para hacer que uno de los votantes del candidato i cambie su decisión y el día de las votaciones voté por él (por Ramón Romualdo), deberá gastar S_i unidades presupuestarias.

a) Asumiendo que los votantes que lleguen indecisos al día de la votación votarán en blanco y que no existen votos nulos, construya un modelo de programación lineal que ayude a Ramón Romualdo a tomar las decisiones que le aseguren pasar a la segunda vuelta, ojalá con la primera mayoría. Suponga que Ramón Romualdo no irá segunda vuelta en caso de empatar en el segundo lugar con otro(s) candidato(s).

b) Ahora asuma que los votantes indecisos sí votarán por algún candidato el día de la elección, pero esa información no se conoce. Modifique el modelo planteado en la parte a) para que bajo esta nueva condición se siga asegurando que el candidato Ramón Romualdo pasa a segunda vuelta.

SOLUCIÓN[64]

a) El modelo es el siguiente,

(a) Variables de decisión

- V: cantidad de votos del candidato A.
- V_i: cantidad de votos del candidato i.
- G_i: variable binaria que toma valor 1 si el candidato A obtiene más votos que el candidato i, 0 en otro caso.
- W_i: cantidad de votantes del candidato i que A logra que cambien su decisión y voten por él.
- X: cantidad de votantes indecisos que A logra que voten por él.

(b) Función objetivo

$$Z = \max \sum_{i=1}^{N} G_i$$

(c) Restricciones

- Respetar el presupuesto disponible.

$$CX + \sum_{i=1}^{N} S_i W_i \leq P$$

[64] Interrogación 3, 2013'1

- Contar los votos del candidato A.

$$V = R + X + \sum_{i=1}^{N} W_i$$

- Contar los votos de los demás candidatos

$$V_i = N_i - W_i \qquad \forall\, i = 1, \ldots, N.$$

- Acotar por abajo la variable G_i.

$$G_i \geq \frac{V - V_i}{N} \qquad \forall\, i = 1, \ldots, N.$$

- Acotar por arriba la variable G_i.

$$G_i \leq 1 - \frac{V_i + 1 - V}{N} \qquad \forall\, i = 1, \ldots, N.$$

- Asegurar que va a segunda vuelta.

$$1 - \frac{N - 2 - \sum_{i=1}^{N} G_i}{N} \geq 1$$

- Naturaleza de las variables

$$G_i \in \{0,1\} \;\; \forall i = 1, \ldots, N.$$
$$V \geq 0, \text{ entero}$$
$$V_i \geq 0, \text{ enteros } \forall i = 1, \ldots, N.$$
$$W_i \geq 0, \text{ enteros } \forall i = 1, \ldots, N.$$
$$X \geq 0, \text{ entero}$$

b) Las modificaciones se deben a que se debe considerar el peor caso. Este peor caso corresponde a estar primero y que el segundo y tercero recibieran los votos indecisos necesarios para pasarlo, o que estando segundo, el que esta tercero recibiera los votos de indecisos necesarios para pasarlo. Al considerar el peor caso también estamos asumiendo que él no recibe votos de los indecisos que queden al momento de las votaciones.

(a) Variables de decisión adicionales.

- α: variable binaria que toma valor 1 si Ramón Romualdo está en primer lugar antes de que se realice la votación, 0 en otro caso.
- β: variable binaria que toma valor 1 si Ramón Romualdo está en segundo lugar antes de que se realice la votación, 0 en otro caso.
- δ_1: cantidad de votos que tiene el candidato con más votos de entre los $i = 1, \ldots, N$.
- δ_2: cantidad de votos que tiene el segundo candidato con más votos de entre los $i = 1, \ldots, N$.
- γ_i: variable binaria que indica si el candidato i es el que tiene más votos de entre los candidatos $i = 1, \ldots, N$.

(b) Se deben agregar las siguientes restricciones:

- Construcción de variables α:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} G_i - (N-1)}{N} \leq \alpha \leq \frac{\sum_{i=1}^{N} G_i}{N}$$

- Construcción de variables β:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} G_i - (N-2)}{(N-1)} - N\alpha \leq \beta \leq \frac{\sum_{i=1}^{N} G_i}{N-1} + N\alpha$$

- Condición que dice que no puede ser primero y segundo a la vez:

$$\alpha + \beta \leq 1$$

- Condición para asegurar ir a segunda vuelta si iba primero antes de las votaciones:

$$Q - X \leq 2V - \delta_1 - \delta_2 + M(1-\alpha)$$

- Condición para asegurar ir a segunda vuelta si iba segundo antes de las votaciones:

$$Q - X \leq V - \delta_2 + M(1-\beta)$$

- Construcción de δ_1:

$$\delta_1 \geq V_i \qquad \forall i = 1, \ldots, N.$$

- Construcción de δ_2:

$$\delta_2 \geq V_i - M\gamma_i \qquad \forall i = 1, \ldots, N.$$

- Construcción de γ_i:

$$\frac{V_i - \delta_1 + 1}{M} \leq \gamma_i \qquad \forall i = 1, \ldots, N.$$

- Naturaleza de las variables

$$\alpha, \beta \in \{0,1\}$$

$$\delta_1, \delta_2 \geq 0$$

$$\gamma_i \in \{0,1\} \qquad \forall i = 1, \ldots, N.$$

3.57 Planificación de cursos universitarios

La universidad debe impartir un conjunto I de asignaturas en el año, las cuales pertenecen a un conjunto H de programas académicos o "carreras". Dependiendo del programa, estas carreras tienen una duración de ocho, diez o doce semestres. Asociado a cada asignatura, se tiene la información del número de clases C_i que la componen, el semestre académico en que se dicta (dentro de un conjunto T de semestres académicos) y la carrera a la que pertenece. La información anterior se puede resumir en un parámetro AS_{ith} que toma el valor 1 cuando la asignatura i pertenece al semestre académico t de la carrera h. Su tarea es programar las clases de cada asignatura en un conjunto D de días, considerando que cada día está dividido en un conjunto K de bloques horarios (puede asumir que estos dos conjuntos se encuentran ordenados numéricamente).

Existen dos tipos de asignaturas, las asignaturas de especialidad (propias de cada programa o carrera) y las asignaturas transversales (correspondientes a asignaturas en común entre distintos programas de estudio). Es importante señalar que asignaturas de una misma carrera y un mismo semestre no pueden generar tope de horario y que las clases deben ser ordenadas de tal manera que la primera clase se dicta antes que la segunda, la segunda antes que la tercera, y así sucesivamente hasta la última clase.

a) Formule un problema de programación lineal que resuelva el problema mencionado anteriormente, considerando que existe un beneficio B_{mi}^{kd} de asignar la clase m de la asignatura i al modulo k del día d.

b) Cómo cambia el modelo si se exige que cuando el número de clases de una asignatura $i \in I$ es 2, entonces estas clases deben ser asignadas de forma consecutiva en el mismo día.

SOLUCIÓN[65]

1. El modelo es el siguiente,

   (a) Variables de decisión

   - X_{mi}^{kd}: 1, si se asigna la clase m de la asignatura i al módulo k del día d; 0, en otro caso.

   (b) Función objetivo

$$Z = \max \sum_{d\in D}\sum_{k\in K}\sum_{i\in I}\sum_{m=1}^{C_i} B_{mi}^{kd} X_{mi}^{kd}$$

   (c) Restricciones

   - Cada clase de una asignatura debe estar asignada a un único módulo de un único día.

$$\sum_{d\in D}\sum_{k\in K} X_{mi}^{kd} = 1,\ \forall i \in I, m = 1, \ldots, C_i.$$

   - Las clases deben ser programadas respetando el orden secuencial.

     a) Caso $d, k > 1$:

$$\sum_{f=1}^{d-1}\sum_{l\in K} X_{mi}^{lf} + \sum_{l=1}^{k-1} X_{mi}^{ld} \geq x_{(m+1)i}^{kd},\ \forall i \in I, m = 1, \ldots, C_i - 1, k \in K : k > 1, d \in D : d > 1.$$

     b) Caso $d = 1$ y $k > 1$:

$$\sum_{l=1}^{k-1} X_{mi}^{l1} \geq x_{(m+1)i}^{k1},\ \forall i \in I, m = 1, \ldots, C_i - 1, k \in K : k > 1.$$

     c) Caso $d > 1$ y $k = 1$:

$$\sum_{f=1}^{d-1}\sum_{l\in K} X_{mi}^{lf} \geq x_{(m+1)i}^{1d},\ \forall i \in I, m = 1, \ldots, C_i - 1, d \in D : d > 1.$$

   - Para cada plan de estudios, no puede existir tope de horario entre asignaturas de un mismo semestre.

$$X_{mi}^{kd} + \sum_{\substack{j \in I: \\ j \neq i,\ AS_{jth} = 1}} \sum_{e=1}^{C_j} X_{ej}^{kd} \leq 1,\ \forall k \in K, d \in D, m = 1, \ldots, C_i, t \in T, h \in H, i \in I : AS_{ith} = 1$$

   - Naturaleza de las variables

$$X_{mi}^{kd} \in \{0, 1\},\ \forall i \in I, m = 1, \ldots, C_i, k \in K, d \in D$$

2. Los cambios son los siguientes,

   - Variables de decisión adicionales
     - W_i^{kd}: 1, si se asigna la primera de las dos clases de la asignatura i: $C_i = 2$, al bloque horario k del día d; 0, en otro caso.
   - Restricciones

[65] Interrogación 2, 2013'1

– Para las asignaturas con $C_i = 2$ se debe escoger un día y bloque para que se dicte su primera clase.

$$\sum_{d \in D} \sum_{k=1}^{K-1} W_i^{kd} = 1, \ \forall i \in I : C_i = 2$$

– Para las asignaturas con $C_i = 2$ se deben dictar sus clases consecutivamente el mismo día.

$$2W_i^{kd} \leq X_{1i}^{kd} + X_{2i}^{(k+1)d}, \ \forall i \in I : C_i = 2, k \in K : k \leq K - 1, d \in D$$

– Naturaleza de la nueva variable

$$W_i^{kd} \in \{0, 1\}, \ \forall i \in I, k \in K, d \in D$$

3.58 Programación Eliminatorias 2018

Un fanático de fútbol vive en Santiago y está pensando en asistir a las eliminatorias de "La Roja" en su camino a Rusia 2018. Se jugarán N partidos (con N par), conociéndose la programación de éstos desde ya. Las eliminatorias están organizadas en "fechas dobles", que constan de un primer partido el primer viernes de cada mes y el lunes siguiente a ese viernes. Es decir, el partido 1 se juega el primer viernes del primer mes, el 2 el lunes siguiente, el 3 el primer viernes del segundo mes, y así sucesivamente. Cada partido puede ser de local o visita, lo que está descrito por el parámetro A_n, que vale 1 si el partido n se juega fuera de Chile, y 0 si se juega de local (la localía es siempre en Santiago).

Si este hincha asiste a los dos partidos de una fecha doble en que "La Roja" juega ambos de visita, viajará de Santiago a la ciudad del primer partido, luego a la ciudad en la que se juega el segundo partido (de la fecha doble) y luego regresa a Santiago. Si sólo uno de los partidos es de visita, va y vuelve a la ciudad de ese partido, y si ambos son en Santiago, obviamente no tiene que viajar a ningún lado.

El precio de la entrada al partido n es C_n unidades monetarias. El costo del pasaje desde Santiago a la ciudad donde se jugará el partido n es de H_n unidades monetarias, y el pasaje de retorno a Santiago desde la ciudad donde se juega el partido n tiene un costo de K_n unidades monetarias. El costo del pasaje desde la ciudad donde se realiza el partido n a la ciudad donde se jugará el partido $n+1$ es de G_n unidades monetarias. Recuerde que ésto sólo se considera en una fecha doble con dos partidos de visita para Chile.

A este hincha, asistir al partido n le genera una felicidad valorada en B_n unidades de felicidad. Además, cuenta con un presupuesto de R unidades monetarias.

Basándose en la información anterior, formule un modelo de programación lineal entera binario, que permita a este esforzado hincha tomar las decisiones para maximizar su felicidad, sin superar el presupuesto del que dispone.

SOLUCIÓN[66]

Para esta pauta, existen dos opciones que se presentan al lector. En la primera de ellas se define un parámetro adicional (que se puede obtener a partir de información conocida), lo que permite una simplificación del resto del modelo.

Pauta Opción A: Esta respuesta es válida solamente si se define el parámetro adicional.
Primero definimos un nuevo conjunto y un nuevo parámetro con base en la información entregada:

Conjunto Nuevo

NI: conjunto de partidos que son comienzo de fecha doble, y entonces, con $n = 1, 3, 5, \dots, N - 1$.

[66]Examen, 2014'1

Parámetros Nuevo

α_n: parámetro binario que vale 1 si $A_n \cdot A_{n+1} = 1$, y que vale 0 en cualquier otro caso.

considerando esto, y asumiendo que existen los costos de todos los desplazamientos, incluso Santiago-Santiago, pero que éste pasaje y/o descuenta toma valor 0. Con esto se tiene:

Variables

x_n: variable binaria que vale 1 si este fanático asistirá al partido n, y que vale 0 en cualquier otro caso.

y_n: variable binaria que vale 1 si este fanático asistirá a los dos partidos de una fecha doble que comienza con el partido $n \in NI$, y que vale 0 en cualquier otro caso.

Función objetivo Maximizar la felicidad de este hincha:

$$\max \sum_{n=1}^{N} B_n x_n$$

R1) Debe respetarse el presupuesto.

$$\sum_{n=1}^{N} C_n x_n + \sum_{n=1}^{N} (H_n + K_n) x_n + \sum_{n \in NI} (G_n - H_{n+1} - K_n) y_n \alpha_n \leq R$$

R2) Primera relación entre las variables.

$$y_n \geq x_n + x_{n+1} - 1 \qquad \text{para } n \in NI.$$

R2) Segunda relación entre las variables.

$$2y_n \leq x_n + x_{n+1} \qquad \text{para } n \in NI.$$

R4) Naturaleza de la variable

$x_n \in \{0, 1\}$, para $n = 1, \ldots, N$.
$y_n \in \{0, 1\}$, para $n \in NI$.

Pauta Opción B.

Variables

x_n: variable binaria que vale 1 si este fanático asistirá al partido n, y que vale 0 en cualquier otro caso.

y_n: variable binaria que vale 1 si este fanático asistirá a la fecha doble que parte en el partido n, y vale 0 en otro caso.

z_n: variable binaria que vale 1 si este fanático asistirá sólo al primer partido de una fecha doble que parte en el partido n, y vale 0 en otro caso.

u_n: variable binaria que vale 1 este fanático si asistirá sólo al segundo partido de una fecha doble que parte en el partido n, y vale 0 en otro caso.

w_n: variable binaria que vale 1 este fanático si no asistirá a ambos partidos de una fecha doble que parte en el partido n, y vale 0 en otro caso.

Función objetivo Maximizar la felicidad de este hincha:

$$\max \sum_{n=1}^{N} B_n x_n$$

Restricciones

R1) Debe respetarse el presupuesto.

$$\sum_{n=1}^{N} C_n x_n + \sum_{n=1:\text{n es impar}}^{N-1} (G_n + H_n + K_{n+1}) y_n A_n A_{n+1} + \sum_{n=1}^{N-1} (H_n + K_n) y_n A_n (1 - A_{n+1})$$

$$\sum_{n=1}^{N-1} (H_{n+1} + K_{n+1}) y_n (1 - A_n) A_{n+1} + \sum_{n=1}^{N} (H_n + K_n) z_n A_n$$

$$\sum_{n=1}^{N-1} (H_{n+1} + K_{n+1}) u_n A_{n+1} \leq R$$

R2) Fijar en 0 todas las variables que no son comienzo de fecha doble (para n par):

$$y_n + z_n + u_n + w_n = 0 \qquad \text{para } n = 2, 4, 6, \ldots, N.$$

R3) En cada fecha doble debe escoger un tipo de asistencia al par de partidos:

$$y_n + z_n + u_n + w_n = 1 \qquad \text{para } n = 1, 2, 5, \ldots, N-1.$$

R4) Construir variable y_n, cota inferior.

$$y_n \geq x_n + x_{n+1} - 1 \qquad \text{para } n = 1, 3, 5, \ldots, N-1.$$

R5) Construir variable y_n, cota superior.

$$2y_n \leq x_n + x_{n+1} \qquad \text{para } n = 1, 3, 5, \ldots, N-1.$$

R6) Construir variable z_n, cota inferior.

$$z_n \geq x_n - x_{n+1} \qquad \text{para } n = 1, 3, 5, \ldots, N-1.$$

R7) Construir variable z_n, cota superior.

$$z_n \leq x_n \qquad \text{para } n = 1, 3, 5, \ldots, N-1.$$

R8) Construir variable u_n, cota inferior.

$$u_n \geq x_{n+1} - x_n \qquad \text{para } n = 1, 3, 5, \ldots, N-1.$$

R9) Construir variable u_n, cota superior.

$$u_n \leq x_{n+1} \qquad \text{para } n = 1, 3, 5, \ldots, N-1.$$

R10) Naturaleza de las variables

$x_n \in \{0, 1\}$, para $n = 1, \ldots, N$.
$y_n \in \{0, 1\}$, para $n = 1, \ldots, N$.
$z_n \in \{0, 1\}$, para $n = 1, \ldots, N$.
$u_n \in \{0, 1\}$, para $n = 1, \ldots, N$.
$w_n \in \{0, 1\}$, para $n = 1, \ldots, N$.

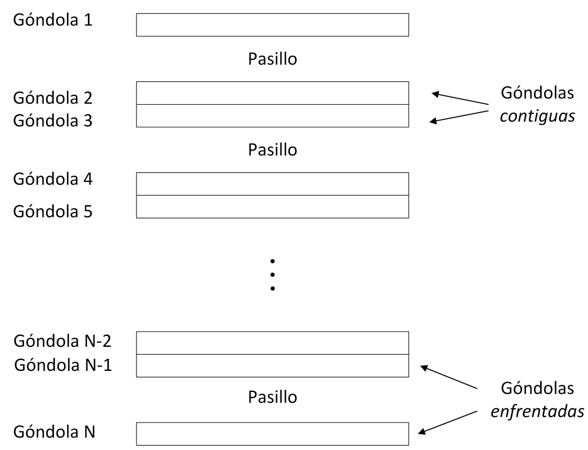


Figure 13: Esquema de las góndolas

3.59 Asignación de Góndolas

Una cadena de supermercados está diseñando un nuevo local, para lo cual debe definir la configuración de las góndolas y la distribución de los productos en éstas.

Específicamente, esta cadena debe tomar decisiones para un conjunto de C categorías de productos (conservas, aceites, licores, bebidas, etc.). Se sabe que la categoría c está compuesta por un conjunto P_c de productos (por ejemplo, "conservas" está formado por "atún marca océano", "atún marca chancho", "duraznos marca rico", etc.). Vamos a denotar por $P = \cup_{c \in C} P_c$, el conjunto de todos los productos que se pueden vender en el supermercado, donde cada producto pertenece a una única categoría.

Estas categorías deben ser dispuestas en G góndolas (con G par) destinadas para ello y se busca que los productos de una categoría sean colocados todos en las góndolas asignadas a esa categoría. Considere que todas las góndolas son iguales y que poseen una capacidad para exhibir L unidades individuales de productos (ignoraremos temas relativos al espacio físico que ocupan los productos individuales).

Como se muestra en la Figura 13, las góndolas están numeradas consecutivamente y vienen de a pares unidas mirando a dos pasillos consecutivos (góndolas contiguas) o enfrentadas mirando un mismo pasillo (góndolas enfrentadas).

Las condiciones que la administración del supermercado debe cumplir para el diseño del nuevo local son:

- Cada góndola es asignada a una única categoría de productos.
- Cada categoría c debe utilizar entre n_c y N_c góndolas completas.
- Para cada categoría c existe un conjunto V_c de categorías incompatibles. Esto quiere decir que la categoría c y la categoría $\hat{c} \in V_c$ no deben estar asignadas a góndolas contiguas.
- Para cada categoría c existe un conjunto H_c de categorías incompatibles. Esto quiere decir que la categoría c y la categoría $\hat{c} \in H_c$ no deben estar asignadas a góndolas enfrentadas.
- Cada producto p, si es que es exhibido en góndola, debe tener una cantidades mínimas (q_p) y una cantidad máxima (Q_p) de unidades a exhibir.
- Todas las unidades de un mismo producto deben ser exhibidas en la misma góndola.
- Para cada producto p existe un conjunto F_p de productos que deben estar exhibidos en la misma góndola. Esto quiere decir que si el producto p y el producto $\hat{p} \in F_p$ son exhibidos, todas las unidades de ambos productos deben estar exhibidos en la misma góndola.

Los beneficios obtenidos son función de las unidades de cada producto asignadas a la góndola. Específicamente, se sabe que si se exhibe una unidad del producto p en la góndola g se obtiene un beneficio igual a B_{pg}.

Considerando la información entregada, formule un modelo de programación lineal entera que permita decidir a la administración del supermercado la ubicación de categorías en las góndolas y la selección de productos de cada categoría que deben ser exhibidos de manera de maximizar el beneficio total.

SOLUCIÓN[67]

El problema puede modelarse de la siguiente manera,
Variables de decisión

- X_{cg}: 1, si la categoría $c \in 1, \ldots, C$ tiene asignada la góngola $g \in 1, \ldots, G$; 0, en otro caso.
- Y_{pg}: 1, si el producto $p \in P$ está en la góndola $g \in 1, \ldots, G$; 0, en otro caso.
- Z_{pg}: cantidad del producto $p \in P$ a exhibir en la góndola $g \in 1, \ldots, G$.

Función objetivo

$$\max \sum_{p \in P} \sum_{g=1}^{G} B_{pg} Z_{pg}$$

Restricciones

- Asignación de categorías de productos a góndolas.

$$\sum_{c=1}^{C} X_{cg} \leq 1, \ \forall g \in 1, \ldots, G$$

- Cantidad de góndolas a asignar a cada categoría.

$$\begin{aligned} \sum_{g=1}^{G} X_{cg} &\leq N_c, \ \forall c \in 1, \ldots, C \\ \sum_{g=1}^{G} X_{cg} &\geq n_c, \ \forall c \in 1, \ldots, C \end{aligned}$$

- Categorías incompatibles en góndolas contiguas.

$$X_{c,2g} + X_{c,2g+1} \leq 1, \ \forall c \in 1, \ldots, C, \ \forall \hat{c} \in V_c, \ \forall g \in 1, \ldots, \frac{G-2}{2}$$

- Categorías incompatibles en góndolas enfrentadas.

$$X_{c,2g-1} + X_{c,2g} \leq 1, \ \forall c \in 1, \ldots, C, \ \forall \hat{c} \in H_c, \ \forall g \in 1, \ldots, \frac{G}{2}$$

  en estas últimas restricciones alguien podría mas bien definir los conjuntos de góndolas consecutivas y de góndolas enfrentadas y escribir las restricciones con ellos, lo cual está evidentemente bien.

- Cantidad a exhibir de cada producto.

$$\begin{aligned} Z_{pg} &\leq Q_p Y_{pg}, \ \forall p \in P \\ Z_{pg} &\geq q_p Y_{pg}, \ \forall p \in P \end{aligned}$$

[67] Examen, 2014'2

- Asignación de cada producto a lo más a una góndola.

$$\sum_{g=1}^{G} Y_{pg} \leq 1, \ \forall p \in P$$

- Productos que deben ser exhibidos juntos.

$$Y_{pg} \leq Y_{\hat{p}g}, \ \forall p \in P, \ \forall \hat{p} \in F_p, \ \forall g \in 1, \ldots, G$$

- Relación entre las categorías en cada góndolas y los productos respectivos.

$$Y_{pg} \leq X_{cg}, \ \forall p \in P, \ \forall g \in 1, \ldots, G, \ \forall c \in 1, \ldots, C : p \in P_c$$

- Capacidad de las góndolas.

$$\sum_{p \in P} Z_{pg} \leq L, \ \forall g \in 1, \ldots, G$$

- Dominio de las variables de decisión.

$$\begin{aligned} X_{cg} &\in \{0,1\}, & \forall c \in 1, \ldots, C, & \quad \forall g \in 1, \ldots, G \\ Y_{pg} &\in \{0,1\}, & \forall p \in P, & \quad \forall g \in 1, \ldots, G \\ Z_{pg} &\in \mathbb{Z}_0^+, & \forall p \in P, & \quad \forall g \in 1, \ldots, G \end{aligned}$$

3.60 Piloto de Carreras

El gran piloto Roderick lo ha contratado como asesor en la planificación de la carrera de las 500 millas de Indianapolis con el fin de obtener el mejor resultado posible en la carrera, o sea completar el total de vueltas en el menor tiempo posible. Para ello, Roderick le solicita que le indique cuál debiese ser su velocidad promedio en cada una de las 500 vueltas del circuito, considerando el consumo de combustible y desgaste de los neumáticos. Los especialistas le han informado que utilizando una velocidad promedio de i km/hr en una vuelta al circuito, el consumo de combustible del automóvil sería de GB_i litros, generando un desgaste en los neumáticos de DN_i milímetros en cada uno y demorando un total de T_i segundos en completar la vuelta. Considere que existe un conjunto de $I = 0, 1, 2, \ldots, V$ velocidades alcanzables (todas enteras no negativas consecutivas).

Adicionalmente, le informan que la aceleración necesaria del motor para aumentar en 1 km/hr la velocidad promedio del automóvil en una vuelta es de GA litros de combustible. Por otro lado, usted conoce que el desgaste de cada uno de los 4 neumáticos corresponde a DN_i milímetros por vuelta en caso de que el automóvil se encuentre con una velocidad promedio de i kms/hora. Además, los especialistas le han indicado que la fricción generada en los neumáticos para reducir la velocidad promedio del automóvil en 1 km/hr en una vuelta equivale a un desgaste de GR milímetros en cada uno de los 4 neumáticos del automóvil.

Debido a lo extenso de la competencia, usted también debe planificar los momentos en los que se realizará el ingreso a pits, sector donde podrá reabastecerse de combustible y realizar cambios de neumáticos por unos nuevos. Sin embargo, debido a exigencias de seguridad impuestas por la competición, se le indica que la velocidad promedio del automóvil en la última vuelta, previo al ingreso a pits, debe ser a lo más de α km/hr.

Sus mecánicos le han informado que sin importar el trabajo a realizar en pits, existe un tiempo mínimo de detención de TP segundos. Por otro lado le informan que por cada litro de bencina a rellenar en el automóvil se requiere de TB segundos, y por cada rueda a cambiar se requiere de CR segundos. Como información adicional se le informa que la capacidad máxima en litros del estanque del automóvil es de $B_[max]$, y el grosor de cada neumático nuevo es de $R_[max]$. Afortunadamente, la destreza de sus mecánicos garantiza que se puede trabajar en el cambio de neumáticos y llenado de combustible simultáneamente, por lo que el tiempo total de detención en pits corresponderá al mayor tiempo utilizado entre el llenado de combustible, cambio de ruedas o tiempo fijo de detención (note entonces que se puede ingresar a pits solo a cambiar neumáticos, solo a llenar combustible o a ambas cosas).

Utilizando toda la información anteriormente entregada, genere un modelo de programación lineal que le permita generar una estrategia para finalizar el circuito en el menor tiempo posible, asegurándose de no quedar sin combustible ni pinchar un neumático producto del desgaste total de algún neumático (lo que sucedería si el grosor del neumático fuera menor a un grosor β). A modo de simplicidad del modelo, asuma que la velocidad es medida en unidades enteras, todos los neumáticos se encuentran con su grosor máximo al inicio de la carrera, la salida de pits se realizará a exactamente la misma velocidad promedio con la que realizó el ingreso a éstos, y que el sector de pits se encuentra justo al inicio de cada vuelta.

SOLUCIÓN[68]

ÍNDICES:

i: unidades de velocidad

t: vueltas

j: ruedas

PARÁMETROS:

V_i: Velocidad i

T_i: Tiempo utilizado en dar una vuelta con velocidad promedio i

TM: Tiempo mínimo de permanencia en pits.

TR: Tiempo necesario para cambiar 1 rueda del automóvil.

TB: Tiempo necesario para rellenar 1 litro de combustible al automóvil.

R_{max}: Grosor de ruedas nuevas.

B_{max}: Capacidad máxima del estanque de combustible.

GA: Consumo adicional de combustible por aumentar 1 km/hr la velocidad promedio del automóvil.

GR: Desgaste adicional del grosor de las ruedas por disminuir 1 km/hra la velocidad promedio del automóvil.

GB_i: Consumo de bencina al utilizar una velocidad promedio del automóvil de i km/hr.

DN_i: Desgaste de neumáticos al utilizar una velocidad promedio del automóvil de i km/hr.

M_1: Valor auxiliar grande (velocidad máxima automóvil).

VARIABLES:

X_{ti}: Variable binaria con valor 1 si el automóvil utiliza velocidad promedio i durante la vuelta t, 0 en otro caso.

B_t: Cantidad de bencina al término de la vuelta t del circuito.

R_{tj}: Grosor de la rueda j al término de la vuelta t del circuito.

P_t: Variable binaria con valor 1 si se decide ingresar a pits al comienzo de la vuelta t, 0 en otro caso.

TP_t: Tiempo total en pits durante la vuelta t.

G_t: Cantidad de bencina rellenada en pits durante la vuelta t.

[68]Examen, 2017'1

CR_{tj}: Variable binaria con valor 1 si la rueda j es cambiada en pits durante la vuelta t, 0 en otro caso.

S_{tj}: Variable auxiliar para la recuperación de grosor de neumáticos.

W_t: Aumento de la velocidad promedio del automóvil durante la vuelta t.

Y_t: Disminución de la velocidad promedio del automóvil durante la vuelta t.

Función objetivo:

$$\min \sum_{t,i} T_i X_{ti} + \sum_t TP_t$$

Restricciones:

R1) Inventario de velocidad promedio del automóvil

$$\sum_i V_i X_i = \sum_i V_i X_{t-1,i} + W_t - Y_t \quad \forall t = 1, \ldots, T$$

R2) Escoger solo 1 velocidad promedio por vuelta y velocidad inicial

$$\sum_i X_{ti} = 1 \quad \forall t$$

$$X_{00} = 1$$

R3) Inventario de combustible y valores máximos

$$B_t = B_{t-1} + G_t - GA \cdot W_t - \sum_i GB_i X_{ti} \qquad \forall t$$

$$B_t \leq B_{max} \qquad \forall t$$

R3) Inventario de grosor de neumáticos y valores máximos

$$R_{tj} = R_{t-1,j} + S_{tj} - GR \cdot Y_t - \sum_i DN_i X_{ti} \qquad \forall t$$

$$R_{tj} \leq R_{max} \qquad \forall t, j$$

R5) Garantizar que no pinchará neumáticos.

$$R_{tj} \leq \beta \qquad \forall t, j$$

R5) Velocidad máxima ingreso a pits.

$$\sum_i V_i X_{ti} \leq \alpha + M(1 - P_t) \quad \forall t$$

R6) No cambiar ruedas a menos de estar en pits y medición de aumento de grosor de neumáticos

$$CR_{tj} \leq P_t \quad \forall t, j$$

$$S_{tj} \leq R_{max} \cdot CR_{tj} \quad \forall t, j$$

R7) No rellenar bencina a menos de estar en pits

$$G_t \leq B_{max} \cdot P_t \quad \forall t, j$$

R8) Tiempo de estadía en pits, menor entre los 3 valores

$$TM \cdot P_t \leq TP_t \quad \forall t$$

$$\sum_j TR \cdot CR_{tj} \leq TP_t \quad \forall t$$

$$TB \cdot B_t \leq TP_t \quad \forall t$$

R9) Naturaleza variables

$$\begin{array}{lll} X_{ti} & \in \{0,1\} & \forall t, i \\ CR_{ti} & \in \{0,1\} & \forall t, i \\ P_t & \in \{0,1\} & \forall t \\ G_t & \geq 0 & \forall t \\ S_{ti} & \geq 0 & \forall t, i \\ B_t & \geq 0 & \forall t \\ W_t & \geq 0 & \forall t \\ Y_t & \geq 0 & \forall t \end{array}$$

3.61 Programación de Trabajos en Máquinas

En un taller de manufactura existen M máquinas y N trabajos que deben ser procesados. Cada trabajo debe ser procesado en un subconjunto (conocido) de las M máquinas, en una secuencia pre-establecida. Si el trabajo número i debe procesarse en la máquina k, entonces t_{ik} representa su tiempo de proceso en esa máquina. Cada máquina puede procesar un solo trabajo a la vez, y una vez que comienza el procesamiento de un trabajo no puede interrumpirse. Se desea programar los trabajos de modo de minimizar el tiempo total requerido para procesarlos todos.

SOLUCIÓN

El objetivo del problema es minimizar el tiempo total requerido para procesar todos los trabajos. Para ello, sabemos que el trabajo i debe ser procesado en un subconjunto M_i de máquinas, en un orden preestablecido. Además,llamemos t_{ik} al tiempo necesario para procesar el trabajo i en la máquina j, y:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el trabajo } i \text{ debe ser procesado en la máquina } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$b_{ij1j2} = \begin{cases} 1 & \text{Si el trabajo } i \text{ debe ser procesado en las máquinas } j_1 \text{ y } j_2 \text{ secuencialmente} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Como variables de desición emplearemos:

$$y_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{Si el trabajo } i \text{ comienza antes que el trabajo } j \text{ en la máquina } k \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

x_{ik} = Instante en que se inicia el procesamiento del trabajo i en la máquina k

z = Tiempo requerido para procesar el último trabajo

Luego el problema consiste en minimizar z, considerando la situación en que i y j deben ser procesados en la misma máquina (restricción con M suficientemente grande), además de seguir la secuencia de máquinas para los diferentes trabajos y que el tiempo para procesar el último trabajo en cada máquina sea menor o igual a z (considerando j_i como la última máquina en que debe ser procesado el trabajo i). Lo anterior nos permite formular el siguiente modelo:

$$P) \quad Min \quad z$$

$$
\begin{array}{rcll}
My_{ijk} + x_{ik} & \geq & (x_{jk} + t_{jk})\, a_{ik} a_{jk} & \forall i,j,k \\
M(1 - y_{ijk}) + x_{jk} & \geq & (x_{ik} + t_{ik})\, a_{ik} a_{jk} & \forall i,j,k \\
x_{ij2} & \geq & (x_{ij1} + t_{ij1})\, b_{i,j1,j2} & \forall i, j_1, j_2 \\
x_{ij1} + t_{ij1} & \leq & z & \forall k \\
z, x_{ik} & \geq & 0 & \forall i,j,k \\
y_{ijk} & \in & \{0,1\} & \forall i,j,k
\end{array}
$$

Problema Propuesto

Suponga ahora que se define el tiempo de flujo de un trabajo como el tiempo requerido para que sea completado; formule un modelo que permita minimizar el tiempo promedio de flujo, considerando todos los trabajos.

3.62 Lector aficionado

Halej ha decidido emprender un viaje que le permita comprar y leer la mayor cantidad de libros posibles. Para estos efectos ha confeccionado una lista con los L libros que desea leer. Cada uno de estos libros se encuentra solamente en algunas N ciudades del país, siendo $M_i \subset L$ el subconjunto de los libros que se encuentra a la venta en la ciudad i (con $i = 1, \ldots, N$). Como algunos de estos libros son parte de una trilogía, Halej ha construido el subconjunto $W^l \subset L$, subconjunto que contiene los libros que están relacionados como trilogía con el libro l (con $l = 1, \ldots, L$), y ha decidido que de comprar un libro de una trilogía comprará la trilogía completa. El precio de compra del libro l (con $l = 1, \ldots, L$) en la ciudad i (con $j = 1, \ldots, N$) es C_i^l unidades monetarias (precio que existe solamente para los libros disponibles en cada ciudad). La compra de cada libro le reporta una satisfacción lectora a Halej, siendo B^l las unidades de satisfacción lectora que percibe Halej por la compra del libro l (con $l = 1, \ldots, L$).

Para realizar este viaje, Halej ha confeccionado un total de R rutas posibles, de las cuales escogerá una para esta travesía literaria. Cada ruta comienza y termina en el hogar de Halej, e indica las ciudades que serán visitadas indicando el orden en que lo serán. Esta información se encuentra en los parámetros binarios A_{ij}^r que toma valor 1 si la ciudad i (con $i = 1, \ldots, N$) es visitada justo antes de la ciudad j (con $j = 1, \ldots, N : j \neq i$) en la ruta r (con $r = 1, \ldots, R$) y E_{ij}^r que toma valor 1 si la ciudad i (con $i = 1, \ldots, N$) es visitada antes (no necesariamente justo antes) de la ciudad j (con $j = 1, \ldots, N : j \neq i$) en la ruta r (con $r = 1, \ldots, R$). Además, se conoce el tiempo de desplazamiento, en minutos, entre todas las ciudades (el hogar de Halej es la ciudad 1 y también se pueden comprar libros) siendo T_{ij} el tiempo que toma al bus (único medio de transporte aceptado por Halej) ir desde la ciudad i (con $i = 1, \ldots, N$) a la ciudad j (con $j = 1, \ldots, N : j \neq i$). El costo del pasaje en bus desde la ciudad i (con $i = 1, \ldots, N$) a la ciudad j (con $j = 1, \ldots, N : j \neq i$) es P_{ij} unidades monetarias.

Como Halej reconoce su pasión por la lectura, destinará el tiempo de desplazamiento entre cada par de ciudades para leer un libro. Esto quiere decir que en cada tramo del viaje escogerá uno de los libros -excepto los que sean parte de una trilogía- y deberá leerlo completamente antes de que termine ese tramo del viaje. Él sabe que leer el libro l (con $l = 1, \ldots, L$) durante el viaje le reportará una satisfacción lectora de H^l unidades (obviamente una segunda lectura del mismo libro no traerá satisfacción alguna para Halej) y que le tomará t^l minutos.

Dada la información anterior, formule un modelo de programación lineal que le permita a Halej maximizar la satisfacción lectora que puede obtener con un presupuesto de P unidades monetarias.

SOLUCIÓN[69]

Variables de decisión

Para este problema, Halej tiene tres tipos de decisiones, que son los libros que compra en cada ciudad, decidir si lee libros en cada viaje, y las rutas que escoge. Por lo tanto, las variables de decisión son:

$$
x_i^l = \begin{cases} 1, & \text{si compra el libro } l \text{ en la ciudad } i. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}
$$

[69] Interrogación 1, 2012'2

$$y_{ij}^l = \begin{cases} 1, & \text{si leerá el libro } l \text{ en el viaje entre la ciudad } i \text{ y la ciudad } j : i \neq j. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\alpha^r = \begin{cases} 1, & \text{si escoge la ruta } r. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Restricciones

R1) Comprar a lo más una vez cada libro.

$$\sum_{i \in N} x_i^l \leq 1, \ \forall l \in L.$$

R2) No comprar un libro en una ciudad donde no se encuentra.

$$x_i^l = 0, \ \forall i \in N, \ \forall l \notin M_i.$$

R3) Condición de compra de trilogías.

$$\sum_{i \in N} x_i^l = \sum_{i \in N} x_i^\theta, \ \forall l \in L, \ \theta \in W^l.$$

R4) Escoger una única ruta para el viaje literario.

$$\sum_{r \in R} \alpha^r = 1$$

R5) Comprar libros en ciudades que sean visitadas por la ruta escogida.

$$x_i^l \leq \sum_{r \in R} \alpha^r \sum_{j \in N : j \neq i} A_{ij}^r, \ \forall i \in N, \ \forall l \in L.$$

R6) Escoger un libro para leer en trayecto siempre que ese trayecto pertenezca a la ruta escogida.

$$\sum_{l \in L} y_{ij}^l = \sum_{r \in R} A_{ij}^r \alpha^r, \ \forall i \in N, \ \forall l \in L.$$

R7) Escoger un libro para leer en trayecto siempre que la duración del trayecto lo permita.

$$t^l y_{ij}^l \leq T_{ij}, \ \forall i \in N, \ \forall j \in N : i \neq j, \ \forall l \in L.$$

R8) Escoger un libro para leer en trayecto siempre que ya haya sido comprado en alguna ciudad anterior durante el viaje.

$$y_{ij}^l \leq \sum_{r \in R} \sum_{k \in N : E_{kj}^r = 1} x_k^l, \ \forall i \in N, \ \forall j \in N : j \neq i, \ \forall l \in L.$$

R9) No leer libros de las trilogías durante el viaje.

$$y_{ij}^l = 0, \ \forall i \in N, \ \forall j \in N : j \neq i, \ \forall l \in W^l.$$

R10) Respetar el presupuesto disponible.

$$\sum_{i \in N : i \neq j} \sum_{j \in N} P_{ij} \sum_{r \in R} A_{ij}^r \alpha^r + \sum_{i \in N} \sum_{l \in L} C_i^l x_i^l \leq P$$

R11) Leer a lo más un libro en cada tramo.

$$\sum_{l \in L} y_{ij}^{l} \leq 1 \ \forall i \in N, \ \forall j \in N : j \neq i.$$

R12) Se lee cada libro a lo más una vez durante el viaje.

$$\sum_{i \in N : i \neq j} \sum_{j \in N} y_{ij}^{l} \leq 1 \ \forall j \in L.$$

R13) Naturaleza de las variables.

$$x_i^l \in \{0,1\}\,, \ \forall i \in N, \ \forall l \in L.$$

$$y_{ij}^l \in \{0,1\}\,, \ \forall i \in N, \ \forall j \in N : j \neq i, \ \forall l \in L.$$

$$\alpha^r \in \{0,1\}\,, \ \forall r \in R.$$

Función objetivo
Maximizar la satisfacción lectora.

$$\max \left(\sum_{l \in L} H^l \sum_{i \in N : i \neq j} \sum_{j \in N} y_{ij}^l \right) + \left(\sum_{l \in L} B^l \sum_{i \in I} x_i^l \right)$$

3.63 Distribución de estanterías

Una bibliotecaria desea organizar una partida de N libros recibidos de una compra reciente y para ello utilizará una nueva área en la biblioteca. Existen dos factores limitantes para el acondicionamiento de los libros en los estantes: la altura del libro y la longitud del estante. Para cada libro i, se conoce su altura h_i y su espesor w_i (ambas medidas en centímetros). Naturalmente, un libro sólo puede ser guardado en un estante cuya altura sea mayor o igual a la del libro. Los libros no pueden ser colocados uno encima del otro. No existe limitación de espacio físico, es decir pueden ser construidas tantas estanterías como sea necesario; sin embargo, el presupuesto para el desarrollo de las actividades de la biblioteca es limitado por lo que se desea minimizar el gasto incurrido al comprar las estanterías.

La longitud de cada estantería es fija e igual a L metros. Los estantes son fijados en las estanterías de tal forma que se pueden obtener diferentes alturas para cada uno de ellos. La altura máxima de cada estantería (conjunto de estantes) es de S metros, siendo despreciable el espesor de los estantes. El espacio no utilizado en un estante es considerado desperdiciado. En la Figura 14 se muestra un ejemplo de la distribución de estantes en las estanterías.

Considere que el costo de montar una nueva estantería es de E pesos (paredes laterales, fijación, etc.) y que la construcción de cada estante tiene un costo de R pesos. Con estos antecedentes, proponga un modelo de programación LINEAL entera que ayude a la bibliotecaria a decidir qué tipo de estanterías montar para clasificar los libros de manera de minimizar el costo total.

SOLUCIÓN[70]

Primero debemos definir un par de parámetros. El número de estanterías a comprar. Para ello, definamos K como este valor (que puede ser la cantidad de libros, y entonces N). Además, definamos el número máximo de estanterías que se pueden colocar en una estantería. Definamos M como este número (que puede ser la cantidad de libros más uno, y entonces $N + 1$).

[70] Interrogación 1, 2011'1

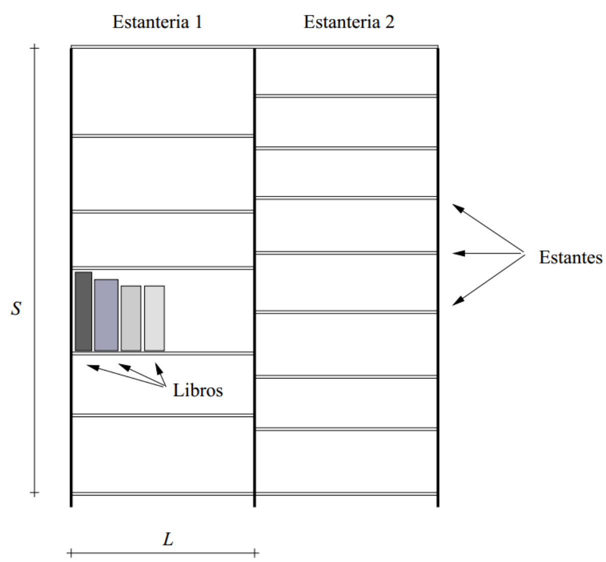


Figure 14: Diseño de Estantes

Variables

x_{ijk}: $\begin{cases} 1 & \text{si el libro } i \text{ es ubicado en el estante } j \text{ de la estantería } k. \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$

y_{ik}: $\begin{cases} 1 & \text{si el estante } j \text{ de la estantería } k \text{ es ocupado con algún libro.} \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$

u_k: $\begin{cases} 1 & \text{si algún estante de la estantería } k \text{ es ocupado por algún libro.} \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$

z_{jk}: altura a la que se monta el estante j de la estantería k.

Función objetivo : Se debe minimizar el costos total de la construcción de las estanterías y los estantes.

$$\min \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{M} R y_{ik} + \sum_{k=1}^{K} E u_k$$

Restricciones

i) Cada libro debe ser ubicado en exactamente un estante.

$$\sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{K} x_{ijk} = 1\,, \qquad \text{para todo } i = 1, \ldots, N.$$

ii) Los estantes, en cada estantería, se ordenan de abajo para arriba.

$$z_{j+1,k} \geq z_{jk}\,, \qquad \text{para todo } j = 1, \ldots, M-1; \;\; \text{para todo } k = 1, \ldots, K.$$

iii) Límite de altura de las estanterías.

$$z_{Mk} \leq S\,, \qquad \text{para todo } k = 1, \ldots, K.$$

iv) Relacionar variables x con y.

$$x_{ijk} \leq y_{jk}\,, \qquad \text{para todo } i = 1,\ldots,N\,,\ \ j = 1,\ldots,M\,,\ \ k = 1,\ldots,K\,.$$

v) Si un libro es colocado en un estante, su altura debe ser menor o igual a la distancia al estante inmediatamente superior.

$$h_i x_{ijk} \leq z_{j+1,k} - z_{jk}\,, \qquad \text{para todo } i = 1,\ldots,N\,,\ \ j = 1,\ldots,M\,,\ \ k = 1,\ldots,K\,.$$

vi) El espesor de todos los libros colocados en una estantería de un estante no supera la longitud del estante.

$$\sum_{i=1}^{N} w_i x_{ijk} \leq L\,, \qquad \text{para todo } j = 1,\ldots,M\,,\ \ k = 1,\ldots,K\,.$$

vii) Se puede utilizar una estantería solamente si se ha ocupado la inferior.

$$y_{jk} \geq y_{j+1,k}\,, \qquad \text{para todo } j = 1,\ldots,M-1\,,\ \ k = 1,\ldots,K\,.$$

viii) Se monta una estantería solamente si la anterior fue montada.

$$u_k \geq u_{k+1}\,, \qquad \text{para todo } k = 1,\ldots,K-1\,.$$

ix) Se construye una estantería si se colocará algún estante en ella.

$$\sum_{j=1}^{M} y_{jk} \leq M u_k\,, \qquad \text{para todo } k = 1,\ldots,K\,.$$

x) Restricción de naturaleza de variables.

$x_{ijk} \in \{0,1\}$, para todo $i = 1,\ldots,N$ para todo $j = 1,\ldots,M$, y para todo $k = 1,\ldots,K$.
$y_{jk} \in \{0,1\}$, para todo $j = 1,\ldots,M$, y para todo $k = 1,\ldots,K$.
$u_k \in \{0,1\}$, para todo $k = 1,\ldots,K$.
$z_{jk} \geq 0$, para todo $j = 1,\ldots,M$, y para todo $k = 1,\ldots,K$.

3.64 Planificación en Restaurante

En el restaurante "El Ciervito", su dueño Jaimito tiene la difícil decisión de planificar el menú a ofrecer para los próximos T días. Para ello, Jaimito debe escoger para cada una de sus categorías dos alternativas entre las J diferentes opciones existentes en cada categoría. Considere que existen C categorías a considerar (para que tenga una idea, algunas categorías son: entrada, plato de fondo, postre).

A su vez, la preparación de cada plato conlleva a la utilización de insumos básicos descritos en el parámetro a_{ij}, que indica la cantidad de insumo i que consume la preparación de un plato j. Para abastecerse, Jaimito realiza sus compras de insumos mediante un sistema de despacho, el cual se entrega en cajas de K_i unidades del insumo i a un precio c_i por caja. Como son productos de origen animal y vegetal, estos poseen fechas de vencimiento establecidas, las cuales siempre corresponden a TE_i días posteriores a la compra del producto i (asuma que los productos son entregados en el mismo período que se realizó la compra). Adicionalmente, una vez que un insumo ha superado su fecha de expiración, estos no pueden ser utilizados en la preparación de alimentos.

Jaimito conoce el menú que prepararán en el restaurante rival "La Hiena" para cada uno de los siguientes T días. Para ello construyó el parámetro PR_{tj}, el cuál indica con valor 1 si en el día t el restaurante rival preparará el plato j y 0 en caso contrario (considere que los platos que pueden realizar ambos restaurantes son los mismos y son idénticos en todo sentido). Para tener éxito, Jaimito sabe que en cada día debe al menos tener un plato en común en al menos dos categorías diferentes con el restaurante rival. A su vez, se conoce que el plato j tendrá una demanda máxima de d_{jt} unidades en el día t, y que lo puede vender a un precio de PV_j. En aquellos días en que el plato preparado en "El Ciervito" coincida con un plato ofrecido en el restaurante rival, Jaimito deberá venderlo a mitad de precio (considere este descuento como descuento *plato rival*).

Por último Jaimito sabe que si ofrece más de dos días de manera consecutiva en su restaurante un mismo plato, éste debe ser vendido con un descuento del DR_j pesos en su precio final (aplica posterior al descuento *plato rival*).

Plantee un modelo de optimización lineal, con variables continuas y/o enteras, que le permita al restaurante "El Ciervito" maximizar sus utilidades en el horizonte de los próximos T días.

SOLUCIÓN[71]

ÍNDICES:

- i: insumos
- t: días
- j: preparación
- w: dias para expiración
- c: categorías platos

VARIABLES:

Y_{it}: Cantidad de cajas del insumo i comprados en el día t.

Z_{jt}: Variable binaria que indica con valor 1 si se ofrece el plato j en el día t.

X_{tiwj}: Variable entera que indica la cantidad utilizada del insumo i, que tiene w dias para expirar, para la preparación de un plato j durante el día t.

W_{jt}: Variable entera que indica la cantidad de platos j preparados en el día t.

I_{iwt}: Variable entera que indica la cantidad de insumos i con w dias de días para expirar al término del día t.

U_{jt}: Variable binaria que indica con valor 1 si en el día $t-1$ y t se preparó el plato j, 0 en caso contrario.

V_{jt}: Variable entera que indica la cantidad de platos j preparados en el día t, cuando en el día $t-1$ también se ofreció el mismo plato j en el menú.

α_{tc}: Variable binaria que indica con valor 1 si en el día t tenemos al menos 1 plato en común para la categoría c con el restaurante rival, 0 en otro caso.

PARÁMETROS:

PV_j: Precio de venta del plato j en el día t.

PD_{jt}: Valor de descuento en el precio del plato j en el día t debido a competencia.

c_i: Costo de adquisición de una caja del insumo i.

K_i: Cantidad de unidades de insumo i en cada caja comprada.

DR_j: Valor de descuento en el precio del plato j producto de repetir el plato de un día para otro.

a_{ij}: Cantidad de insumo i necesario para la preparación de 1 plato j.

PR_{jt}: Valor 1 cuando el restaurante rival ofrece el plato j en el día t, 0 en otro caso.

[71] Interrogación 2, 2017'1

PC_{jc}: Valor 1 cuando el plato j pertenece a la categoría c, 0 en otro caso. Se construye de manera directa con la información entregada en la interrogación.

TE_i: Cantidad de días iniciales de expiración del insumo i.

Función objetivo:

$$\text{Max} \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{C \cdot J} (PV_j - PD_{jt}) W_{jt} - \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{I} c_i Y_{it} - \sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{C \cdot J} DR_j V_{jt}$$

Restricciones

R1) Cantidad de platos j preparados en el día t deben corresponderse al uso de insumos.

$$W_{jt} \leq \sum_{w=1}^{TE_i} \frac{X_{tiwj}}{a_{ij}} \qquad \forall j = 1, \ldots, C \cdot J; t = 1, \ldots, T; i = 1, \ldots, I.$$

R2) Restricciones de inventario de acuerdo a tiempos de perecibilidad restantes.

$$I_{iwt} = K_i Y_i - \sum_{j=1}^{C \cdot J} X_{tiwj} \qquad \forall i = 1, \ldots, I; t = 1, \ldots, T; w = TE_i.$$

$$I_{iwt} = I_{i(w+1)(t-1)} - \sum_{j=1}^{C \cdot J} X_{tiwj} \qquad \forall i = 1, \ldots, I; t = 1, \ldots, T; w = 2, \ldots, TE_i - 1.$$

$$I_{iwt} \geq I_{i(w+1)(t-1)} - \sum_{j=1}^{C \cdot J} X_{tiwj} \qquad \forall i = 1, \ldots, I; t = 1, \ldots, T; w = 1.$$

$$I_{iwt} = 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, I; w = 1, \ldots, TE_i; t = 1.$$

R3) Restricción demanda.

$$W_{jt} \leq d_{jt} \qquad \forall j = 1, \ldots, C \cdot J; t = 1, \ldots, T.$$

R4) Activación platos.

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{w=1}^{TE_i} X_{tiwj} \leq M Z_{jt} \qquad \forall j = 1, \ldots, C \cdot J; t = 1, \ldots, T.$$

$$W_{jt} \leq M Z_{jt} \qquad \forall j = 1, \ldots, C \cdot J; t = 1, \ldots, T.$$

R5) Elección de platos por categoría.

$$\sum_{j=(c-1) \cdot J+1}^{c \cdot J} Z_{jt} = 2 \qquad \forall t = 1, \ldots, T; c = 1, \ldots, C.$$

R6) Platos en común restaurante rival por categoría.

$$\alpha_{tc} \leq \sum_{j=(c-1) \cdot J+1}^{c \cdot J} PR_{jt} Z_{jt} \qquad \forall t = 1, \ldots, T; c = 1, \ldots, C.$$

$$\sum_{c=1}^{C} \alpha_{tc} \geq 2 \qquad \forall t = 1, \ldots, T.$$

R7) Dias consecutivos platos

$$Z_{j(t-1)} + Z_{jt} \leq 1 + U_{jt} \qquad \forall j = 1, \ldots, C \cdot J; t = 1, \ldots, T : t \geq 1$$

$$W_{jt} \leq V_{jt} + M(1 - U_{jt}) \qquad \forall j = 1, \ldots, C \cdot J; t = 1, \ldots, T.$$

R8) Naturaleza variables

$$X_{tiwj}, W_{jt}, V_{jt}, Y_{it}, I_{iwt} \in Z_0^+$$

$$Z_{jt}, U_{jt} \in \{0, 1\}$$

$$\alpha_{tc} \in \{0, 1\}$$

3.65 Cadenas de máquinas

Una empresa hace su producción diaria con dos máquinas. Se sabe que han llegado I trabajos a comienzos del día (asumamos instante 0) y todos éstos deben pasar primero por la máquina uno y después por la máquina dos. Sean U_i y D_i los tiempos que requiere el trabajo i en las máquinas 1 y 2 respectivamente. El gerente de la empresa ha decidido que la jornada laboral terminará cuando se hayan realizado los I trabajos del día.

a) Con la información anterior desarrolle un modelo de programación lineal con variables continuas y/o enteras que permita a la empresa determinar la secuencia en que se deben procesar los I trabajos, de modo de que la jornada laboral termine lo antes posible.

b) ¿Cómo cambia el modelo formulado en la parte a) si la empresa ha comprado una tercera máquina que usará para compartir los trabajo de la máquina 2? Asuma que la máquina 3 demora T_i unidades de tiempo en realizar el trabajo i.

SOLUCIÓN[72]

a) Las variables de decisión de este modelo son:

$$\begin{array}{lcl} \alpha_{ij}^k & : & \begin{cases} 1 & \text{si el trabajo } i \text{ es procesado exactamente antes que el trabajo } j \text{ en la máquina k} \\ 0 & \text{sino} \end{cases} \\ te_i & : & \text{tiempo en que el trabajo } i \text{ entra a la máquina 1.} \\ ts_i & : & \text{tiempo en que el trabajo } i \text{ sale a la máquina 1.} \\ le_i & : & \text{tiempo en que el trabajo } i \text{ entra a la máquina 2.} \\ ls_i & : & \text{tiempo en que el trabajo } i \text{ sale a la máquina 2.} \\ \eta & : & \text{máximo tiempo de salida de la máquina 2.} \end{array}$$

Las restricciones asociadas al problema son:

i) Cada trabajo tiene a lo más un sucesor en la secuencia para cada máquina.

$$\sum_{j \in I : i \neq j} \alpha_{ij}^k \leq 1 \qquad \forall\, i \in I,\ \forall\, k \in K$$

ii) Todos los trabajos deben pasar por todas las máquinas, que es lo mismo que decir que deben haber exactamente $I - 1$ sucesores para formar la secuencia.

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in I : j \neq i} \alpha_{ij}^k = I - 1 \qquad \forall\, k \in K$$

[72] Interrogación 2, 2010'2

iii) Instante en que el trabajo i entra en la máquina 1. Para que esto pase debe haber desocupado la máquina 1 el trabajo que está antes que el i en la secuencia de la máquina 1.

$$te_i \geq ts_j - M(1-\alpha^1_{ij}) \qquad \forall\, i \in I; \forall\, j \in I : j \neq i.$$

con

$$M = \sum_{i \in I} U_i$$

iv) Instante en que el trabajo i sale de la máquina 1.

$$ts_i = te_i + U_i \qquad \forall\, i \in I$$

v) Instante en que el trabajo i entra en la máquina 2. Para que esto pase debe haber desocupado la máquina 2 el trabajo que está antes que el i en la secuencia de la máquina 2.

$$le_i \geq ls_j - G(1-\alpha^2_{ij}) \qquad \forall\, i \in I; \forall\, j \in I : j \neq i.$$

con

$$G = \sum_{i \in I} U_i + D_i$$

vi) Instante en que el trabajo i sale de la máquina 2.

$$ls_i = le_i + D_i \qquad \forall\, i \in I$$

vii) Un trabajo i cualquiera debe salir primero de la máquina 1 y después puede entrar a la máquina 2.

$$le_i \geq ts_i \qquad \forall\, i \in I$$

viii) Construir el máximo tiempo de salida, que debe ser más grande o igual que el tiempo de salida de los I trabajos de la máquina 2.

$$\eta \geq ls_i \qquad \forall\, i \in I$$

ix) Naturaleza de las variables.

$$\alpha^k_{ij} \in \{0,1\} \qquad \forall\, i,j \in I,\;\; \forall\, k \in K$$

$$te_i, ts_i, le_i, ls_i \geq 0 \qquad \forall\, i \in I$$

$$\eta \geq 0$$

Función Objetivo:

$$\text{Mín Instante de Término} = \eta$$

b) Se deben agregar las siguientes variables de decisión (que entregarán información temporal sobre trabajos y máquina 3):

we_i	:	tiempo en que el trabajo i entra a la máquina 3.
ws_i	:	tiempo en que el trabajo i sale a la máquina 3.
η	:	máximo tiempo de salida de la máquina 2-3.

La restricciones nuevas o modificadas son:

ii-a) Todos los trabajos deben pasar por la máquina 1, que es lo mismo que decir que deben haber exactamente $I-1$ sucesores para formar la secuencia de esa máquina.

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in I : j \neq i} \alpha^1_{ij} = I - 1$$

ii-b) Todos los trabajos deben pasar o por la máquina 2 o la máquina 3, que es lo mismo que decir que deben haber exactamente $I-2$ sucesores entre ambas máquinas para formar las respectivas secuencias.

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in I:j\neq i}\alpha_{ij}^2+\alpha_{ij}^3=I-2$$

vi-m) Instante en que el trabajo i sale de la máquina 2, que debe existir solo si entra a la máquina 2.

$$ls_i=le_i+D_i\left(\sum_{j\in I:j\neq i}\alpha_{ij}^2\right)\qquad\forall\, i\in I$$

vii-m) Un trabajo i cualquiera debe primero salir de la máquina 1 y después puede entrar a la máquina 2, siempre que deba entrar a la máquina 2.

$$le_i+H\left(1-\sum_{j\in I:j\neq i}\alpha_{ij}^2\right)\geq ts_i\qquad\forall\, i\in I$$

con

$$H=\sum_{i\in I}U_i+D_i+T_i$$

viii-m) Construir el máximo tiempo de salida, que debe ser más grande o igual que el tiempo de salida de los I trabajos desde la máquina 2 o la máquina 3.

$$\eta\geq ls_i\qquad\forall\, i\in I$$

$$\eta\geq ws_i\qquad\forall\, i\in I$$

ix-m) Naturaleza de las variables.

$$\alpha_{ij}^k\in\{0,1\}\qquad\forall\, i,j\in I,\ \forall\, k\in K$$

$$te_i,ts_i,le_i,ls_i,we_i,ws_i\geq 0\qquad\forall\, i\in I$$

$$\eta\geq 0$$

x) Instante en que el trabajo i sale de la máquina 3, que debe existir solo si entra a la máquina 3.

$$ws_i=we_i+T_i\left(\sum_{j\in I:j\neq i}\alpha_{ij}^3\right)\qquad\forall\, i\in I$$

xi) Un trabajo i cualquiera debe primero salir de la máquina 1 y después puede entrar a la máquina 3, siempre que deba entrar a la máquina 3.

$$we_i+H\left(1-\sum_{j\in I:j\neq i}\alpha_{ij}^3\right)\geq ts_i\qquad\forall\, i\in I$$

4 Modelos de Flujo en Redes

Algunos problemas de programación entera tienen la propiedad que aún relajando toda restricción de integralidad, al menos una solución óptima a este problema relajado satisface la condición de integralidad. Esta propiedad es muy deseable pues permite convertir un problema de programación entera en uno de programación continua simplificando dramáticamente su complejidad. Por este motivo interesa identificar aquellos modelos que cumplen con esta propiedad.

La familia más grande y estudiada de estos problemas es la denominada problemas de asignación de flujo en redes. En estos problemas se tiene una red (estructura compuesta de un conjunto N de nodos y un conjunto A de arcos) tal que en cada nodo se observa un exceso o un déficit de una determinada entidad (e.g. electrones, volumen líquido, vehículos, señales telefónicas, etc.). El objetivo es identificar la forma de conducir los excesos de entidades a los nodos de déficit a través de la red de forma óptima. Encontrar el camino más rápido para un vehículo entre un par de puntos en una ciudad, encontrar la asignación de mínimo costo de productos desde sus plantas productoras a sus puntos de consumo, o determinar la capacidad máxima de una red de agua potable constituyen ejemplos típicos de este tipo de problemas. Sin embargo, existen muchos otros que sin parecer inmediatamente como un problema de asignación de flujo en redes pueden modelarse usando su estructura.

En los problemas de asignación de flujo en redes, la variable central del modelo es el flujo que transcurre por cada arco de la red. Típicamente resulta conveniente identificar los arcos de acuerdo a sus nodos de origen y término. Así, el flujo por el arco que va del nodo i al nodo j queda representado por una variable que llamaremos x_{ij}. Existirán tantas variables como arcos en la red.

Cualquier solución al problema de asignación de flujo en redes debe satisfacer la propiedad de conservación de entidades, esto es que en ninguna parte de la red se creen o se destruyan entidades. En estos problemas, todo nodo se puede clasificar como nodo generador de flujo, atractor de flujo o neutro. Los nodos generadores son aquéllos en que se origina un flujo desde fuera de la red. En esos nodos debe cumplirse que todo lo que entra al nodo (desde dentro de la red) más la generación de flujo debe igualar a lo que sale del nodo. Esta condición se puede escribir matemáticamente para los nodos generadores del siguiente modo:

$$\sum_{i \in N} x_{ij} + g_j = \sum_{i \in N} x_{ji}$$

Por otro lado, los nodos atractores son aquéllos que se reciben flujo desde la red. En esos nodos debe cumplirse que todo lo que entra al nodo menos el flujo atraído debe igualar a lo que sale del nodo, o lo que es lo mismo:

$$\sum_{i \in N} x_{ij} - a_j = \sum_{i \in N} x_{ji}$$

El nodo neutro es aquel en que todo lo que entra al nodo, sale de él, esto es:

$$\sum_{i \in N} x_{ij} = \sum_{i \in N} x_{ji}$$

De este modo, cualquier asignación en la red debe satisfacer estas restricciones (tantas como nodos en la red). Si redefinimos las generaciones y atracciones en los nodos a través de un vector h tal que:

$$\begin{aligned} h_i &= g_i \text{ si } i \text{ es generador} \\ h_i &= -a_i \text{ si } i \text{ es atractor} \\ h_i &= 0 \text{ si } i \text{ es neutro} \end{aligned}$$

Entonces las N restricciones pueden agregarse como:

$$\sum_{i \in N} x_{ij} - \sum_{i \in N} x_{ji} = h_j \quad \forall j \in N$$

Estas restricciones junto a las restricciones de no negatividad en las variables constituyen las restricciones básicas para determinar una asignación factible en una red. Se ha demostrado que problemas cuyo dominio pueda quedar expresado bajo este formato y en que el vector h es también entero, gozan de una solución óptima entera aún cuando esta no se exija como restricción adicional.

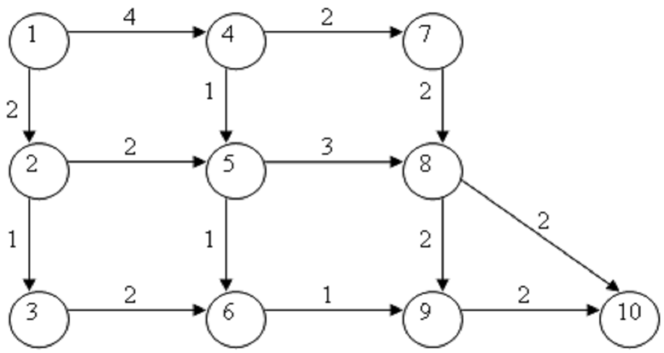


Figure 15: Red de 10 nodos

4.1 Ruta a Costo Mínimo en Red de Nodos

Considere la siguiente red de 10 nodos en que se entrega el costo de moverse por cada arco en la figura 15.

1. (a) Formule el problema de encontrar la ruta de costo mínimo desde el nodo 1 al nodo 10
   (b) Formule el problema de encontrar la ruta de costo mínimo desde el nodo 1 a todos los demás nodos.
   (c) Considere que los valores asignados a cada arco constituyen capacidad en vez de costo. Formule el problema de encontrar el máximo de flujo que puede enviar del nodo 1 al nodo 10.

SOLUCIÓN

1. (a) Para encontrar la ruta de costo mínimo desde el nodo 1 al 10, llamaremos C_{ij} al costo asociado a ir desde el nodo i al nodo j, y definiremos como variable de decisión a:
   $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si la ruta de costo mínimo recorre el arco } (i,j) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$
   Como el objetivo es encontrar la ruta de costo mínimo, la función objetivo corresponde a la suma de los productos entre x_{ij} y C_{ij}. El problema debe considerar como restricciones que necesariamente tenemos que salir de 1 y llegar a 10, y que el resto son nodos intermedios, esto es, que si llegamos a ellos debemos partir desde ellos. Por lo tanto, para la red dada el problema resulta ser:

$$P) \quad Min \quad \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10} x_{ij}C_{ij}$$

$$\begin{aligned}
x_{1,2} + x_{1,4} &= 1 \\
x_{8,10} + x_{9,10} &= 1 \\
x_{1,2} - x_{2,5} - x_{2,3} &= 0 \\
x_{2,3} - x_{3,6} &= 0 \\
x_{1,4} - x_{4,5} - x_{4,7} &= 0 \\
x_{4,5} + x_{2,5} - x_{5,6} - x_{5,8} &= 0 \\
x_{5,6} + x_{3,6} - x_{6,9} &= 0 \\
x_{4,7} - x_{7,8} &= 0 \\
x_{7,8} + x_{5,8} - x_{8,9} - x_{8,10} &= 0 \\
x_{6,9} + x_{8,9} - x_{9,10} &= 0 \\
x_{ij} &\in \{0,1\} \qquad \forall i,j
\end{aligned}$$

El problema de encontrar la ruta de costo mínimo entre los puntos s y f sobre una red compuesta por un conjunto N de nodos y un conjunto A de arcos se puede plantar en forma genérica, como sigue. Esta formulación se sustenta en una variable x_{ij} por cada arco en A:

$$P) \quad Min \quad \sum_i \sum_j x_{ij} C_{ij}$$

$$\begin{aligned} \sum_j x_{sj} &= 1 \\ \sum_i x_{if} &= 1 \\ \sum_i x_{ij} - \sum_i x_{ji} &= 0 \qquad \forall i \neq s, f \\ x_{ij} &\in \{0,1\} \qquad \forall i, j \end{aligned}$$

(b) Debemos encontrar la ruta simultánea desde el nodo 1 al resto de los nodos, minimizando el costo asociado. Debiera ser claro, que la solución a este problema consiste en la superposición de las rutas mínimas desde el nodo fuente a cada uno de los demás nodos de la red. Es decir el problema eventualmente se podría separar en tantos problemas como nodos de destino tiene la red. Sin embargo, el problema también se puede abordar directamente mediante la siguientes variables:

x_{ij} = Flujo que circula por el arco (i, j).

Lo que nos permite plantear el siguiente modelo:

$$P) \quad Min \quad \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{10} x_{1j} &= 9 \qquad (77) \\ \sum_i x_{ij} - \sum_k x_{jk} &= 1 \qquad \forall j \neq 1 \qquad (78) \\ x_{ij} &\in \{0,1\} \qquad \forall i, j \end{aligned}$$

La restricción (77) obliga a que exista una ruta desde 1 a los 9 nodos restantes de la red, mientras que (78) permite que cada uno de los 9 nodos restantes sea un destino.Análogamente, en una red compuesta por un conjunto N de nodos y un conjunto A de arcos, el problema de encontrar la ruta de costo mínimo desde un nodo fuente s a todos los demás nodos de la red se puede plantar en forma genérica, como sigue:

$$P) \quad Min \quad \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N} x_{sj} &= n - 1 \\ \sum_{i \in N} x_{ij} - \sum_{k \in N} x_{ki} &= -1 \qquad \forall i \in N,\ i \neq s \\ x_{ij} &\in \{0,1\} \qquad \forall (i,j) \in A \end{aligned}$$

(c) Ahora llamemos μ_{ij} a la capacidad del arco (i, j), y consideremos las variables de decisión:

x_{ij} = Flujo que circula entre los nodos i y j.

F = Flujo total que circula desde el nodo 1 al nodo 10.

El objetivo del problema es maximizar F, considerando que este flujo debe partir desde 1 y llegar hasta 10, empleando los nodos restantes como nodos de paso o neutros. El problema debe considerar además las restricciones de capacidad de cada arco y la naturaleza de las variables definidas, lo que nos permite plantear el siguiente modelo de optimización:

$$P) \quad Max \quad F$$

$$\begin{aligned}
x_{1,2} + x_{1,4} &= F \\
x_{8,10} + x_{9,10} &= F \\
x_{2,3} + x_{2,5} - x_{1,2} &= 0 \\
x_{3,6} - x_{2,3} &= 0 \\
x_{4,5} + x_{4,7} - x_{1,4} &= 0 \\
x_{5,6} + x_{5,8} - x_{2,5} - x_{4,5} &= 0 \\
x_{6,9} - x_{5,6} - x_{3,6} &= 0 \\
x_{7,8} - x_{4,7} &= 0 \\
x_{8,9} + x_{8,10} - x_{7,8} - x_{5,8} &= 0 \\
x_{9,10} - x_{8,9} - x_{6,9} &= 0 \\
x_{1,2} &\leq 2 \\
0 &\leq x_{2,3} \leq 1 \\
0 &\leq x_{1,4} \leq 4 \\
0 &\leq x_{2,5} \leq 2 \\
0 &\leq x_{3,6} \leq 2 \\
0 &\leq x_{4,7} \leq 2 \\
0 &\leq x_{5,8} \leq 3 \\
0 &\leq x_{6,9} \leq 1 \\
0 &\leq x_{4,5} \leq 1 \\
0 &\leq x_{5,6} \leq 1 \\
0 &\leq x_{7,8} \leq 2 \\
0 &\leq x_{8,9} \leq 2 \\
0 &\leq x_{8,10} \leq 3 \\
0 &\leq x_{9,10} \leq 2
\end{aligned}$$

El problema de encontrar el flujo máximo entre los puntos r y s se puede plantar en forma genérica, como sigue:

$$P) \quad Max \quad F$$

$$\begin{aligned}
\sum_j x_{ij} - \sum_k x_{ki} &= \begin{cases} F & i = r \\ 0 & i \neq r, s \\ -F & i = s \end{cases} \\
0 &\leq x_{ij} \leq \mu_{ij} \qquad \forall i, j
\end{aligned}$$

Note que todos los problemas anteriormente presentados en este ejemplo contienen un conjunto de restricciones linealmente dependiente. En estos casos, cualquiera de las restricciones puede expresarse como una combinación lineal de las demás. Por este motivo, una cualquiera de las restricciones de continuidad de flujo puede elminarse manteniendo la rigurosidad del modelo.

Problema Propuesto

1. Explique porqué el siguiente modelo es incorrecto para el problema 5.1b, en que se consideran las siguientes variables de decisión:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si la ruta de costo mínimo recorre el arco (i,j)} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \qquad i = 1, ..., 10 \;\; j = 1, ..., 10$$

f_{ij} = Flujo que circula entre los nodos i y j, $i = 1, ..., 10 \;\; j = 1, ..., 10$

El modelo se plantea del siguiente modo:

$$P) \quad Min \quad \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10} x_{ij}C_{ij}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{10} f_{1j} &= 9 && (79) \\ f_{ij} &\leq Mx_{ij} \qquad \forall i,j && (80) \\ \sum_i f_{ij} - \sum_k f_{jk} &= 1 \qquad \forall j \neq 1 && (81) \\ x_{ij} &\in \{0,1\} \qquad \forall i,j \end{aligned}$$

En que la restricción (79) obligaría a que exista una ruta desde 1 a los 9 nodos restantes de la red, mientras que (81) permitiría que cada uno de los 9 nodos restantes sea un destino. Por último, las restricciones (80) relacionarían las variables de flujo con las de existencia de ruta, obligando a recorrer el arco (i,j) si es que existe flujo a través de él; nótese que el valor de M debe ser suficientemente grande para no limitar el valor de f_{ij} y en este caso basta que $M \geq 9$.

4.2 Puntos para clasificar

El sistema de puntos de la clasificatoria del mundial de fútbol Brasil 2014, establece que un equipo de fútbol obtiene 0 puntos si pierde, 1 punto si empata, 3 puntos si gana un partido. Se estima que un equipo clasifica al mundial con 25 puntos, de los cuales la selección chilena ha ganado a la fecha 12 puntos. Dado que la selección chilena se encuentra en una situación INCÓMODA en la Tabla de Posiciones ("con la calculadora en la mano"), se desea saber cuál es el número mínimo de partidos para que la selección pueda obtener exactamente 13 puntos (y no más) para asistir al mundial Brasil 2014.

Modele el problema como un problema de flujo en redes. Explique detalladamente que representan los nodos y arcos de la red, así como los costos de los arcos.

SOLUCIÓN[73]

El problema corresponde al problema de la ruta más corta. Considere una red con nodos que van del 0 al 13, que corresponden a los puntajes obtenidos por la selección. Los arcos de la red tienen costo igual a 1 y corresponden a una jugada factible, por lo que desde cada nodo i salen dos arcos (excepto el nodo 11 y 12): un arco que avanza un nodo (1 punto) y uno que avanza tres nodos (3 puntos). La red considerada se expone en la Figura 16:

Se observa que la solución de la ruta más corta corresponde a 5 partidos (4 ganados y 1 empate) que son el mínimo necesario para alcanzar los 13 puntos requeridos.

[73] Interrogación 3, 2012'2

Figure 16: Grafo para modelar puntos para clasificar

4.3 Jugadores al Barcelona

El director deportivo de un prestigioso club de fútbol tiene la siguiente tarea: asegurar que todos los jugadores del equipo lleguen a Barcelona. El nombre de cada uno de los jugadores del club se encuentra listado en el conjunto K. Una vez que este director deportivo cotizó todas las opciones de viaje que tiene para el plantel, construyó una red $D = (N, A)$, en la que cada nodo en $N = \{1, ..., n\}$ representa una ciudad: de origen-Santiago (1), de transbordo $(2, ..., n-1)$ y de destino-Barcelona (n). Cada arco de la red representa un trayecto en avión que es posible de realizar entre esas ciudades. El costo unitario del pasaje para cada trayecto está dado por el parámetro c_{ij} (pesos), para todo arco $(i, j) \in A$, y la cantidad máxima de pasajes que se pueden adquirir en ese trayecto está registrada en el parámetro μ_{ij} (pasajes), para todo arco $(i, j) \in A$. De manera de mantener la cordialidad entre los integrantes del plantel, se encuestó a cada uno de ellos de manera de saber con qué compañero tiene problemas para compartir parte o la totalidad del viaje. En este sentido, se sabe que el conjunto $V(k)$ contiene el listado de los jugadores con los que no debe realizar ningún tramo del viaje el jugador k, esto para todo $k \in K$. Del mismo modo, el conjunto $R(k)$ contiene la lista de todos los jugadores con los que el jugador k no debe realizar más de M tramos de viaje, esto para todo $k \in K$. Con la información anterior, construya un modelo de programación lineal entera que le permita al director deportivo decidir cómo trasladar a todos los jugadores del equipo desde Santiago a Barcelona al menor costo total posible.

SOLUCIÓN[74]

Variables de decisión:

x_{ijk}: variable binaria que toma el valor 1 si el jugador k viaja a través del arco (i, j), 0 en otro caso.

y_{ijkl}: variable binaria que toma el valor 1 si el jugador k y el jugador l viajan juntos a través del arco (i, j), 0 en otro caso.

La función objetivo consiste en minimizar el costo total de las decisiones de traslado:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} \sum_{k\in K} x_{ijk}$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

Conservación de flujo en cada nodo:

$$\sum_{j\in N} x_{ijk} - \sum_{j\in N} x_{jik} = \begin{cases} 1 \text{ si i} = 1 \\ -1 \text{ si i} = \text{n} \\ 0 \text{ si i} = 2,...,\text{n-1} \end{cases} \qquad \forall i \in N, k \in K$$

Se debe respetar la cantidad máxima de pasajes en cada tramo:

$$\sum_{k\in K} x_{ijk} \leq \mu_{ij} \qquad \forall (i, j) \in A.$$

[74]Interrogación 3, 2015'2

Día	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
N^o de Manteles	60	90	80	50	100	50	60	80	70	50

Table 43: Necesidad Diaria de Manteles

Respetar la condición asociada al conjunto $V(k)$:

$$x_{ijk} + x_{ijl} \leq 1 \qquad \forall (i,j) \in A, k, l \in K, k \neq l, l \in V(k)$$

Relación entre variables:

$$x_{ijk} + x_{ijl} - 1 \leq y_{ijkl} \qquad \forall (i,j) \in A, k, l \in K, k \neq l,$$

$$x_{ijk} + x_{ijl} \geq 2y_{ijkl} \qquad \forall (i,j) \in A, k, l \in K, k \neq l,$$

Respetar condición sobre $R(k)$:

$$\sum_{(i,j)\in A} y_{ijkl} \leq M \qquad \forall (i,j) \in A, k, l \in K : l \in R(k)$$

Naturaleza de las variables.

4.4 Empresa de Banquetes

Considere un banquetero que debe proveer cenas en 10 días seguidos. Para cada una de estas cenas, necesita el número de manteles limpios dado en la Tabla 43.

Para satisfacer esta necesidad, el banquetero puede comprar manteles (por \$1000 cada uno) o lavar manteles ya usados. La lavandería provee un servicio rápido de dos días a \$350 por mantel y un servicio lento de cuatro días a \$150 por mantel. Al comienzo del día 1 el banquetero posee una cantidad inicial de 70 manteles.

Formule un problema de optimización que minimice el costo de proveer manteles para estas diez cenas. Asuma que al final del día 10 todos los manteles se donan a beneficencia.

SOLUCIÓN

Consideremos la red de la Figura 17 donde el nodo T representa la cantidad inicial de manteles que posee el banquetero, el nodo C la posibilidad de comprar manteles, D los manteles que se donan y los nodos origen y destino 1 al 10 representan cada una de las fiestas. Cuando el nodo corresponde a un destino, representa la necesidad de manteles limpios inmediatamente antes de que la fiesta se inicie. Cuando el nodo corresponde a un origen, representa la oferta de manteles sucios inmediatamente después de que la fiesta ha concluido. Los arcos corresponden a las alternativas en que los manteles pueden ser provistos para cada fiesta o donación. Cada nodo de origen tiene asociada una oferta y cada nodo de destino, una demanda, las que se resumen en la Tabla 44. Es importante notar que en esta tabla la oferta total y la demanda total están balanceadas y que M representa un número suficientemente grande de manteles como para eventualmente satisfacer todos los banquetes. Cada arco tiene asociado un costo, que puede tomar uno de cuatro valores: \$0, \$1.000, \$350 ó \$150, dependiendo si se trata de manteles limpios disponibles, manteles recién comprados, manteles lavados en forma expresa, o manteles lavados en forma regular respectivamente, tal y como se aprecia en la Tabla 45.

De esta manera podemos formular el problema como uno de transporte, para cual llamaremos c_{ij} al costo asociado al arco (i,j), o_i a la oferta del nodo i, d_j a la demanda del nodo j y definiremos la variable:

x_{ij} = flujo de manteles entre los nodos i y j.

Como el objetivo del problema es minimizar los costos de abastacemiento, satisfaciendo estrictamente todas las restricciones de oferta y demanda, además de la naturaleza de las variables, podemos formular el siguiente modelo:

$$Min \quad \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

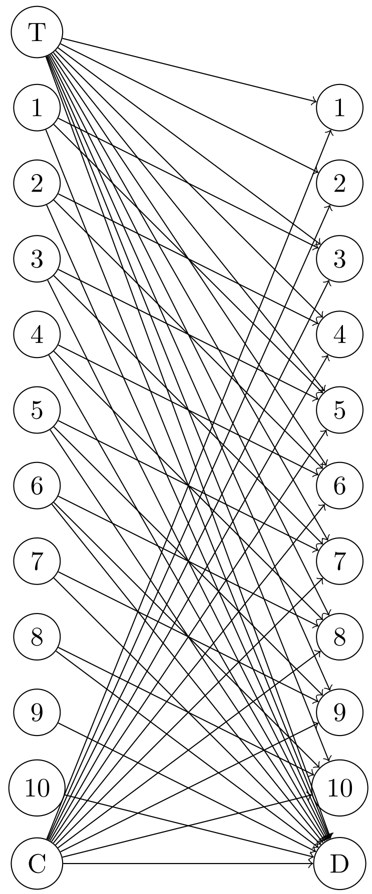


Figure 17: Red Empresa de Banquetes

Nodo Origen	**Oferta**	**Nodo Destino**	**Demanda**
T	70	1	60
C	M	2	90
1	60	3	80
2	90	4	50
3	80	5	100
4	50	6	50
5	100	7	60
6	50	8	80
7	60	9	70
8	80	10	50
9	70	D	$M + 70$
10	50		

Table 44: Oferta y Demanda

Nodo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**D**
T	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000	0
1			350		150						0
2				350		150					0
3					350		150				0
4						350		150			0
5							350		150		0
6								350		150	0
7									350		0
8										350	0
9											0
10											0

Table 45: Costos Asociados a Cada Arco

$$\begin{aligned}
\sum_j x_{ij} &= o_i & \forall\ i \in \{1,..,10,C,T\} \\
\sum_i x_{ij} &= d_j & \forall\ j \in \{1,..,10,D\} \\
x_{ij} &\in \{0,1\} & \forall i,j
\end{aligned}$$

Problema Propuesto
Cómo modificaría el problema si los manteles usados (limpios o sucios) pueden venderse a $20 cada uno?

4.5 Problema del Cartero Chino

El siguiente es conocido como el problema del ´cartero chino'. Dada una red no dirigida, en que los arcos representan calles y los nodos las intersecciones respectivas, este cartero debe recorrer todas las calles recorriendo la menor distancia posible (puede pasar por una calle más de una vez si es necesario). Formule el problema como uno de programación lineal entera.

SOLUCIÓN

El objetivo del problema es que el cartero recorra todas las calles caminando la menor distancia posible. Para formular el modelo llamaremos N al conjunto de nodos (intersecciones de las calles), A al conjunto de arcos (calles), d_{ij} a la distancia entre los nodos i y j, $(i,j) \in A$ y definiremos las siguientes variables de decisión:

x_{ij} = Número de veces que el cartero recorre el arco (i,j) en dirección $i \Rightarrow j$, $(i,j) \in A$

El problema consiste en minimizar la distancia recorrida por el cartero, considerando que todas las calles deben ser recorridas al menos una vez en alguna dirección y que si se llega a un nodo necesariamente se debe salir de él. esto nos permite formular el siguiente modelo

$$P) \quad Min \quad \sum_{i(i,j)\in A} \sum_{j, i\neq j} d_{ij}\,(x_{ij} + x_{ji})$$

$$\begin{aligned}
x_{ij} + x_{ji} &\geq 1 & \forall (i,j) \in A \\
\sum_{j\neq i,(i,j)\in A} x_{ij} &= \sum_{j\neq i,(i,j)\in A} x_{ji} & \forall i \\
x_{ij} &\geq 0 & \forall i,j \\
x_{ij} &\in enteros & \forall i,j
\end{aligned}$$

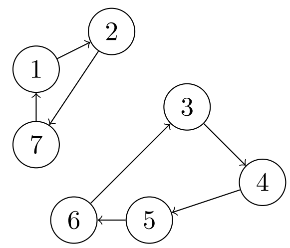


Figure 18: Solución con subcircuito

4.6 El cartero y el semaforero

Considere una red de calles ortogonal de una ciudad en que en cada esquina existe un semáforo. Tenemos dos amigos: uno de ellos es cartero y el otro revisa la red de semáforos. En el día de hoy cada uno deberá organizar un tour por la ciudad. El primero desea visitar todas las calles de la ciudad caminando de modo de repartir sus cartas. El semaforero desea visitar todos los semáforos de la red. Modele estos problemas de modo de obtener rutas de largo mínimo para cada uno.

SOLUCIÓN

En este caso tenemos que plantear dos modelos, uno para el cartero y uno para el semaforero. Si modelamos cada esquina como un nodo de una red, y cada calle como un arco entre nodos con peso igual a la distancia entre las intersecciones, el primer problema consiste en encontrar la menor ruta que permite pasar por todos los arcos, mientras que el segundo debe encontrar la menor ruta que permite recorrer todos los nodos. El primer modelo se conoce como el Problema del Cartero Chino, y el segundo como el Problema del Vendedo Viajero. Consideraremos que existen n esquinas en la ciudad y que se conocen las distancias entre cada esquina, a las que llamaremos d_{ij}.

Para el problema del semaforero (Vendedor Viajero) cosideraremos la variable:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si desde la esquina } i \text{ voy a la esquina } j \\ 0 & \text{Si no} \end{cases} \qquad i = 1, ..., n \quad j = 1, ..., n$$

Debemos minimizar la distancia recorrida por el semaforero, considerando que todas las esquinas serán visitadas una y sólo una vez y que no se formarán subcircuitos (un ejemplo de solución con subcircuitos se presenta en la Figura 18), para asegurar que se recorrerán todos los semáforos. De acuerdo a lo anterior el modelo resulta ser:

$$Min \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} d_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= 1 \quad \forall i, j \neq i && (82)\\
\sum_{i=1}^{n} x_{ij} &= 1 \quad \forall j, i \neq j && (83)\\
\sum_{i,j\in S}^{n} x_{ij} &\leq Card(S) - 1 \quad \forall\ S \subseteq \{1, ..., n\}, |S| \leq n-1 && (84)\\
x_{ij} &\in \{0,1\} \quad \forall i, j
\end{aligned}$$

Las restricciones (82) y (83) exigen que cada esquina sea visitado exactamente una vez. La familia de restricciones (84) corresponde a que para cualquier conjunto de esquinas, el total de viajes entre dos sucesivas esquinas de ese conjunto debe ser inferior al número de esquinas en el conjunto. De otro modo se estaría permitiendo un subcircuito en dicho conjunto de esquinas. Es importante notar que esta última familia de restricciones crece exponencialmente con el tamaño del problema. Esto dificulta enormemente la resolución del problema del Vendedor Viajero convirtiéndolo en un problema NP- completo.

Una modelación alternativa a este problema consiste en asignar a cada esquina el orden en que cada esquina es visitada. Para eso se considera la siguiente variable adicional:

$t_i =$ posición relativa de la esquina i en la ruta del semaforero; $i = 1, ..., n$

Incorporando esta variable en el modelo se logra romper los ciclos. Consideremos el siguiente modelo:

$$Min \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} d_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} & = & 1 & \forall i, j \neq i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} & = & 1 & \forall j, i \neq j \\ t_i + 1 - t_j & \leq & M(1 - x_{ij}) & \forall i, j \\ x_{ij} & \in & \{0, 1\} & \forall i, j \\ t_i & \geq & 0 & \forall i \end{array}$$

La nueva restricción que permite romper los subcircuitos, pues exige que si el semaforero se dirige de la esquina i a la esquina j (por lo tanto $x_{ij} = 1$), entonces t_j deberá ser al menos $t_i + 1$; si alternativamente el semaforero no se dirige de la esquina i a la esquina j (por lo tanto $x_{ij} = 0$), entonces no se impone ninguna restricción que vincule directamente las variables t_i y t_j (para esto M debe tomar un valor sufientemente grande).

Para el problema del cartero (Cartero Chino) vea el Problema 4.17 en el Capítulo 4.

Problemas Propuestos

1. ¿Cómo modifica el primer problema si el cartero viaja en bicicleta y debe respetar el sentido de las calles? ¿Cómo cambia si debe visitar cada calle dos veces (una en cada sentido)?

2. ¿Cómo cambia el segundo problema si el semaforero es parte de un equipo en que la estadía en cada semáforo es conocida y en que se debe llegar a cada semáforo dentro de una ventana de tiempo preestablecida y en que el propósito es minimizar el número de semaforeros involucrados?

4.7 Pokemon GO en la Universidad

Los profesores han sucumbido ante el juego PokemonGo. Juntos han enlistado en un conjunto I a los —I— Pokemones de las comunas cercanas al campus, según los radares analizados. La ambición del juego entra en acción, y entre ellos ha comenzado una competencia para determinar quién se convierte primero en un maestro Pokemon (considerando los Pokemones cercanos al campus).

Usted desea sugerirles a los profesores cómo distribuirse los distintos Pokemones con tal de que ninguno salga perdiendo. De esta manera, plantean el problema de dividir los Pokemones en 7 grupos (un grupo para cada uno de los 7 profesores) para que ellos vayan en busca de atrapar solamente a los correspondientes a su lista. Ustedes conocen la lista de completa I de Pokemones, y asocian una utilidad de u_i al hecho de atrapar el Pokemon $i \in I$. Por otro lado, dadas las características de la aplicación para atrapar a los

Pokemones, los distintos profesores se deben trasladar físicamente por las comunas, lo que genera cierta des-utilidad asociada al tiempo invertido en ello. Así, ustedes también conocen la des-utilidad que genera moverse desde la ubicación de un Pok´emon $i \in I$ a la de otro Pokemon $j \in I$, la que denotan como $d_{ij} = d_{ji}$. Además, se considera la des-utilidad de moverse desde la universidad (denotada s) a un Pokemon $i \in I$, denotada como $d_{si} = d_{is}$. Tanto las utilidades y desutilidades no varían de profesor en profesor. Asuma que no existen los tramos $a \to a, \forall a \in I \cup \{s\}$, que si a un profesor le corresponde el Pokemon $i \in I$, entonces es seguro que lo atrapará, y que $\sum\limits_{i \in I \cup \{s\}} \sum\limits_{j \in I \cup \{s\}} d_{ij} < \sum\limits_{i \in I} u_i$. Así, su deber es determinar la forma de dividir los Pokemones entre los profesores e identificar cuál es la ruta que debe seguir cada profesor para atrapar todos los Pokemones asociados a su lista (por determinar), de modo que se maximice el beneficio conjunto (de todos los profesores). Para ello, considere que cada profesor solo puede salir y volver a la Universidad una vez, para que así pueda seguir con sus deberes académicos, y que a cada profesor se le asignarán al menos 2 Pokemones. Además, quiere asegurarse de que aquel profesor que obtiene la menor utilidad entre todos no tenga menos que el 70 % de la utilidad del profesor que más utilidad logró.

Desarrolle un modelo de programación lineal entera que le sirva para determinar la situación anterior.

SOLUCIÓN[75]

El problema que se busca resolver es básicamente maximizar la utilidad de siete vendedores viajeros en conjunto. Dado que es necesario conocer qué Pokemon se asocia a qué profesor, además del orden en que cada uno visita a los Pokeones de sus listas, el modelo tendría las siguientes variables:

x_{ijk}: es igual a 1 si el profesor k viajará desde el Pokemon i (o desde la Universidad) inmediatamente hacia el Pokemon j (o hacia la Universidad), 0 en otro caso.

y_{ik}: es igual a 1 si el profesor k atrapará al Pokemon i, 0 en otro caso.

La función objetivo queda entonces:

$$\max \sum_{k=1}^{7} \left(\sum_{i \in I} u_i y_{ik} - \sum_{i \in I \cup \{s\}} \sum_{j \in I \cup \{s\}} x_{ijk} d_{ij} \right)$$

Y las restricciones son las siguientes:

- Cada Pokemon debe ser atrapado por un solo profesor. Para ello, un profesor de su ubicación una sola vez:

$$\sum_{k=1}^{7} y_{ik} = 1 \qquad \forall i \in I$$

- En cada ubicación de Pokemon hay una sola llegada a esa ubicación:

$$\sum_{k=1}^{7} \sum_{i \in I} x_{ijk} = 1 \qquad \forall j \in I$$

- En cada ubicación de Pokemon hay una sola salida de esa ubicación:

$$\sum_{k=1}^{7} \sum_{j \in I} x_{ijk} = 1 \qquad \forall i \in I$$

- Todos los profesores salen y llegan a la Universidad. En otras palabras, hay 7 salidas y entradas desde la Universidad:

$$\sum_{k=1}^{7} \sum_{i \in I} x_{isk} = 7$$

[75] Interrogación 1, 2016'2

$$\sum_{k=1}^{7}\sum_{i\in I} x_{sik} = 7$$

- Un profesor no puede llegar ni salir de una ubicación si el Pokemon no le fue asignado:

$$x_{ijk} \leq y_{ik} \qquad \forall i,j \in I : j \neq i, \forall k = 1,...,7$$

$$x_{jik} \leq y_{ik} \qquad \forall i,j \in I : j \neq i, \forall k = 1,...,7$$

- Evitar sub-tours dentro de sus Pokemones asignados:

$$\sum_{i\in U}\sum_{l\in U} x_{ilk} \leq |U|-1+M(|U|+1-\sum_{i\in U} y_{ik}-y_{jk}) \qquad \forall U : 2 \leq |U| \leq |I|-2, \forall j \in I\backslash U, \forall k = 1,...,7, M >> 0$$

- Balanceo del nivel de beneficio entre distintos profesores:

$$0.7\left(\sum_{i\in I} u_i y_{ik} - \sum_{i\in I\cup\{s\}}\sum_{j\in I\cup\{s\}} x_{ijk}d_{ij}\right) \leq \sum_{i\in I\cup\{s\}} u_i y_{ih} \sum_{i\in I\cup\{s\}}\sum_{j\in I\cup\{s\}} x_{ijh}d_{ij} \qquad \forall k,h = 1,...,7$$

- Al menos 2 Pokemones por profesor:

$$\sum_{i\in I} y_{ik} \geq 2$$

- Naturaleza de las variables

$$x_{ijk}, y_{ik} \in \{0,1\} \qquad \forall i,j \in I\cup\{s\}, \forall k = 1,...,7$$

4.8 Comprador viajero

El problema de comprador viajero (TPP, por sus iniciales en inglés) es una generalización interesante del problema del vendedor viajero (TSP). Puede definirse sobre un grafo dirigido $G(N, A)$, donde el conjunto de nodos N corresponde a la casa del comprador y los mercados que el comprador puede visitar, mientras que el conjunto de arcos A representa los caminos directos entre estos lugares.

Se busca encontrar el recorrido de costo total mínimo, que un único comprador debe realizar para adquirir m productos distintos de entre $n = |N|(\geq m)$ mercados posibles, empezando y terminando en su casa, que se ubica en el nodo O del grafo.

El costo total se divide en los costos de transporte y de compra. Los de transporte se representan mediante c_{ij}, que corresponde al costo de moverse desde $i \in N$ a $j \in N$, con $(i, j) \in A$. Los de compra dependen del mercado. Sean B^k el conjunto de los mercados donde se encuentra el producto $k \in 1,\ldots,m$, y P_i^k el precio del producto $k \in 1,\ldots,m$ en el mercado $i \in B^k$.

Formule el TPP como un modelo de programación lineal entera, indicando claramente la definición de variables, función objetivo y cada uno de los grupos de restricciones.

SOLUCIÓN[76]

Para lograr modelar este problema, se definen dos grupos de variables, relacionados con la compra y transporte respectivamente:

y_{ik}: es igual a 1 si se compra el producto k en el mercado $i \in B^k$, 0 en otro caso.
x_{ij}: es igual a 1 si el comprador se mueve directamente desde i a j, con $(i, j) \in A$.

[76] Examen, 2013'1

Se quiere lograr minimizar el costo total. Así, la función objetivo es:

$$\min \sum_{k=1}^{m} \sum_{i \in B^k} P_i^k y_{ik} + \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

Sujeto a las siguientes restricciones:
Deben comprarse todos los productos:

$$\sum_{i \in B^k} y_{ik} = 1 \qquad \forall k = 1, ..., m$$

Se debe salir de la casa:

$$\sum_{j \in N} x_{Oj} = 1$$

Se debe llegar a la casa:

$$\sum_{i \in N} x_{iO} = 1$$

Mantener flujo en el resto de los nodos:

$$\sum_{j \in N} x_{ij} - \sum_{j \in N} x_{ji} = 0 \qquad \forall i \in N$$

Si se compra en un mercado, se debe llegar y salir de él:

$$\sum_{j \in N} x_{ij} \geq y_{ik} \qquad \forall k = 1, ..., m, i \in B^k$$

$$\sum_{j \in N} x_{ji} \geq y_{ik} \qquad \forall k = 1, ..., m, i \in B^k$$

Si no se compra en un mercado, no se llega si se sale de él:

$$\sum_{j \in N} x_{ij} \leq \sum_{k : i \in B} y_{ik} \qquad \forall i \in N \setminus \{O\}$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} \leq \sum_{k : i \in B} y_{ik} \qquad \forall i \in N \setminus \{O\}$$

Además, se debe incluir las restricciones de evitar subtours (típica de Vendedor Viajero) y naturaleza de variables.

4.9 Sistema de Distribución

Considere un problema de diseño de un sistema de distribución, para la operación durante un año completo. En este sistema existen n lugares que representan tanto fábricas que despachan un cierto producto, clientes que lo requieren, y bodegas de "cross docking", es decir, que sólo sirven de punto de transferencia y no almacenan nada. Sea d_i la oferta (si es mayor que 0) o demanda anual (si es menor que 0) del lugar i (si $di = 0$ es una bodega de cross docking). El problema consiste en decidir qué rutas de transporte deben ser contratadas para el año entre cada par de lugares. Si se decide contratar transporte entre el lugar i y el lugar j, se incurre en un costo fijo f_{ij}, además existe un costo variable c_{ij} por cada unidad transportada entre el lugar i y el lugar j. El servicio de transporte contratado tiene una capacidad limitada, con $u_{ij} > 0$ la capacidad de transporte anual entre el lugar i y el j.

SOLUCIÓN[77]

[77]Jorge Vera, Profesor Ing. Industrial PUC

Fábrica	1	2	3
Stock	1.500	2.200	4.000

Table 46: Oferta de Trompos

Ciudad	Andacollo	Buin	Colchagua	Doñihue
Demanda	400	600	2.200	3.100

Table 47: Demanda de Trompos

El objetivo del problema consiste en determinar que rutas deben ser contratadas entre cada para de lugares. Este corresponde a un Problema de Diseño de Redes y para modelarlo emplearemos la siguiente variable de decisión:

x_{ij} = Flujo de producto entre i y j.
$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si se contrata la ruta entre } i \text{ y } j \\ 0 & \text{Si no} \end{cases}$$

El objetivo del problema es minimizar los costo de transporte, cumpliendo con las restricciones de oferta y demanda, además de una restricción de carga que relaciona las variables (restricción (85)). Considerando lo anterior el modelo resulta ser:

$$P) \quad Min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij}y_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{aligned}
\sum_j x_{ij} - \sum_l x_{li} &= \begin{cases} d_i & \text{nodo de oferta} \\ 0 & \text{nodo de cross docking} \\ -d_i & \text{nodo de demanda} \end{cases} & i = 1, ..., n \qquad (85)\\
x_{ij} &\leq u_{ij}y_{ij} & \forall i, \forall j\\
x_{ij} &\geq 0 & \forall i, \forall j\\
y_{ij} &\in \{0,1\} & \forall i, \forall j
\end{aligned}$$

4.10 Empresa de Trompos

Una empresa productora de trompos tiene tres fábricas productoras, y le ha pedido a usted que maneja una empresa de transportes que traslade los trompos que se requerirán en esta navidad en las fiestas típicas de las siguientes ciudades: Andacollo, Buin, Colchagua y Doñihue. Usted asume el compromiso de llevarlas a tiempo. Las fábricas han trabajado durante el año y manejan un stock acumulado que está disponible para ser trasladado a las fiestas típicas. Los trompos disponibles en cada fábrica se presentan en la Tabla 46, mientras que la Tabla 47 resume las demandas por trompos en cada fiesta. El costo de viaje y el tiempo de viaje entre cada fábrica y cada pueblo está dado en la Tabla 48. Los costos están indicados en miles de pesos por cada camioneta que viaja entre cada par, ida y vuelta. Los tiempos también están entregados entre cada par, para ida y vuelta.

	Costo			Tiempo		
	1	2	3	1	2	3
Andacollo	20	5	18	230	100	130
Buin	15	13	24	120	300	240
Colchagua	18	25	24	240	160	200
Doñihue		19	15		200	180

Table 48: Costos y Tiempos de Transporte

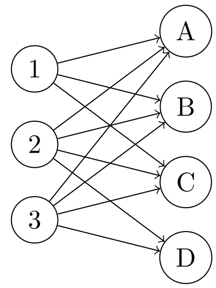


Figure 19: Empresa de Trompos

Cada camioneta puede trasladar a la vez 100 trompos. En cada fábrica hay una sola camioneta. Cada una de ellas corresponde a una sola fábrica, de manera que sólo puede ir y volver a la misma fábrica de la que salió, es decir no puede ser usada para transportar trompos desde otras fábricas.

Note que de la fábrica 1 no puede llevar trompos a Doñihue. Además, se le informa que desde la fábrica 3 se debe cubrir al menos la mitad de la demanda de Buin. En este momento usted está en una carrera contra el tiempo y debe satisfacer la demanda de modo de no demorarse más de 50 horas, es decir 3000 minutos. No es posible faltar a los compromisos asumidos. Usted cuenta con un vehículo desde cada fábrica.

Formule un problema de optimización equivalente que le permita resolver este problema de manera de minimizar sus costos.

SOLUCIÓN

El presente problema mantiene la estructura básica de los denominados problemas clásicos de transporte o de Hitchcock. Como tal, podemos modelarlo como una red con 3 nodos de origen (Fábricas 1, 2 y 3) y 4 de destino (Andacollo, Buin, Colchagua y Doñihue), como se aprecia en la Figura 19, donde a cada arco existe asociada una distancia en tiempo y costo. Consideraremos, además, que en cada viaje las camionetas transportarán su máxima capacidad (100 trompos) y que contamos con las mínimas distancias entre fábricas y destinos, esto es, no existe o no es relevante la posibilidad de pasar por una ciudad en el camino hacia otra.

Para resolver el problema debemos determinar el número total de trompos a llevar entra cada fábrica y cada ciudad, lo que está estrechamente relacionado con el número de viajes en camioneta a utilizar entre cada par. Por lo tanto emplearemos la siguiente variable de desición:

$x_{ij} =$ Viajes en camioneta desde la fábrica i a la ciudad j.
$i = \{1, 2, 3\} \quad j = \{A : Andacollo, B : Buin, C : Colchagua, D : Doñihue\}$

Ahora bien, el objetivo del problema es minimizar los costos de transporte, cumpliendo con las restricciones de oferta máxima (stock acumulado en cada fábrica), demanda en cada ciudad, trato especial con la fábrica 3 y tiempo máximo de transporte, además de la no negatividad e integralidad de las variables. Considerando lo anterior, podemos formular el siguiente modelo de optimización:

$$\begin{aligned} Min \quad & 20x_{1A} + 15x_{1B} + 18x_{1C} + 5x_{2A} + 13x_{2B} + \\ & 25x_{2C} + 19x_{2D} + 18x_{3A} + 24x_{3B} + 24x_{3C} + 15x_{3D} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
100 \cdot (x_{1A} + x_{1B} + x_{1C}) &\leq 1.500 \\
100 \cdot (x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} + x_{2D}) &\leq 2.200 \\
100 \cdot (x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} + x_{3D}) &\leq 4.000 \\
100 \cdot (x_{1A} + x_{2A} + x_{3A}) &\geq 400 \\
100 \cdot (x_{1B} + x_{2B} + x_{3B}) &\geq 600 \\
100 \cdot (x_{1C} + x_{2C} + x_{3C}) &\geq 2.200 \\
100 \cdot (x_{1D} + x_{2D} + x_{3D}) &\geq 3.100 \\
100x_{3B} &\geq \frac{600}{2} \\
230x_{1A} + 120x_{1B} + 240x_{1C} &\leq 3.000 \\
100x_{2A} + 300x_{2B} + 160x_{2C} + 200x_{2D} &\leq 3.000 \\
130x_{3A} + 240x_{3B} + 200x_{3C} + 180x_{3D} &\leq 3.000 \\
x_{ij} &\geq 0 \quad \forall i, j \\
x_{ij} &\in enteros
\end{aligned}
$$

Problemas Propuestos

1. ¿Que ocurriría si nos dicen que ahora tenemos la posibilidad de viajar entre una ciudad a la otra directamente? ¿De que manera afectaría esto a nuestro modelo? ¿Que costo deberían tener estos trayectos para ser considerados en el nuevo modelo? ¿Es necesario replantear la hipótesis de que cada camioneta lleva los cien trompos entre una fábrica y una ciudad directamente, sin dejar trompos en otra antes?

2. ¿Que ocurriría si ahora además de tener un tiempo tope, nos dicen que por cada minuto que ahorremos nos darán un bono de \$1000? Considere para este caso que se nos ha entregado un presupuesto máximo para toda la operación de \$5.000.000.

4.11 Fiesta

Considere una fiesta en que llegan dos grupos de personas. Al entrar, a cada uno se le entrega una tarjeta con los nombres de las personas del otro grupo de la fiesta. Cada persona le entrega a usted su tarjeta indicando con cuales de las personas posee compatibilidad. Usted debe encontrar una asignación de parejas que maximice las compatibilidades.

SOLUCIÓN

El problema consiste en asignar a las personas de manera de maximizar las compatibilidades entre ellos, para esto emplearemos la variable de decisión:

$$
x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si a la persona } i \text{ se le asigna la persona } j \\ 0 & \text{Si no} \end{cases}
$$

Y llamaremos:

A_{ij} = Matriz de compatibilidades

$$
a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si la persona } i \text{ compatibiliza con la persona } j\text{, y viceversa} \\ 0 & \text{Si no} \end{cases}
$$

Ahora bien, el objetivo del problema es maximizar las compatibilidades considerando que toda persona, o bien se le asigna alguien o queda solo, y que si a la persona i se le asigna la persona j, la persona j debe a su vez ser asignada solo a la persona i. De acuerdo a lo anterior el modelo resulta ser:

$$
P) \quad Max \quad \frac{1}{2} \sum_i \sum_j a_{ij} x_{ij}
$$

$$\begin{aligned}
\sum_j x_{ij} &\leq 1 && \forall i\\
\sum_i x_{ij} &\leq 1 && \forall j\\
x_{ij} &\leq x_{ji} && \forall i,j\\
x_{ij} &\in \{0,1\} && \forall i,j
\end{aligned}$$

Note, además, que el problema consiste en encontrar en una red un conjunto de arcos tal que ningún par de arcos tengan un mismo nodo como extremo. Este problema resulta sencillo de resolver (matching problem) pues existen algoritmos polinomiales para ello.

Problema Propuesto

¿Qué pasa si las tarjetas se entregan con un ranking del más al menos compatible y se busca una asignación que maximice el ranking promedio de cada pareja? ¿Cómo modificamos el modelo si el que recibe las tarjetas es uno de los participantes y quiere emparejarse con una persona en particular?

4.12 Transporte hacia la gran feria de la ciudad

Un municipio está organizando un gran sistema de transporte para trasladar a las personas que asistan a una gran feria de la ciudad. El recinto de la feria tiene una entrada y una salida y se supone que las personas se distribuirán dentro de la feria según diversos factores. Esto ha llevado a representa el sistema como una red $G = (V, A)$, donde V representa un conjunto de puntos específicos de tránsito y de intercambio de personas dentro de la feria (transbordo), y A representa el conjunto de conexiones, es decir, el arco (i, j) existe en A si alguien se puede transportar entre el nodo i y el nodo j. Existen dos nodos especiales: $r \in V$ representa la entrada a la feria, y $s \in V$ representa la salida. El concesionario de la feria recibirá un ingreso α por cada persona que entra y sale de la feria. El municipio, por otro lado, cobra al concesionario un costo c_{ij} por cada usuario que viaja entre el nodo i y el nodo j. Adicionalmente, en cada arco $(i, j) \in A$, el flujo no puede ser más grande que una cantidad u_{ij} conocida. Construya un modelo de optimización que permita conocer una configuración de modo de maximizar sus ingresos.

SOLUCIÓN[78]

Sea F el flujo de personas que entran (y salen) a la feria. Sea x_{ij} el flujo de personas que se mueven entre el punto i y el j. El modelo es:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \alpha F - \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}\\
s.a. \quad & \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{(k,i)\in A} x_{ki} = 0, i \neq r, s\\
& \sum_{(r,j)\in A} x_{rj} - \sum_{(k,r)\in A} x_{kr} = F\\
& \sum_{(s,j)\in A} x_{ij} - \sum_{(k,s)\in A} x_{ij} = -F\\
& 0 \leq x_{ij} \leq u_{ij}.\forall (i,j) \in A
\end{aligned}$$

4.13 Transporte de Carga

Usted trabaja en una empresa de transporte de carga. Su función es llevar productos desde las fábricas productoras de golosinas a los centros de venta mayorista. En particular, usted está interesado en transportar chocolates y mazapanes desde las fábricas Confites Dulzura, Mazapanes Santa Sara y Chocolates Paulita hasta los centros de venta ubicados al norte y al poniente de la ciudad.

La oferta máxima disponible en cada fábrica se presenta en la Tabla 49, mientrás que el costo de transportar un kilo de cualquier producto desde una fábrica a un centro de venta se presenta en la Tabla 51. Por otro lado, los centros de venta le han solicitado los productos detallados en la Tabla 50.

	Chocolates	**Mazapanes**
Dulzura	2000 Kgs	1000 Kgs
Santa Sara		1500 Kgs
Paulita	3000 Kgs	

Table 49: Oferta Máxima en cada Fábrica

	Chocolates	**Mazapanes**
Norte	1.800 Kgs	800 Kgs
Poniente	2300 Kgs	1200 Kgs

Table 50: Productos Solicitados por cada Centro

Formule un modelo lo más simple posible que minimice el costo de transporte.

SOLUCIÓN

Si consideramos cada origen y destino como un nodo, podemos formular la red de la Figura 20. Este problema que consiste en minimizar el costo de transporte (que crece linealmente con el flujo) satisfaciendo las restricciones de oferta y demanda por cada uno de los productos, determinando la cantidad a transportar de cada tipo de producto desde los diferentes orígenes a destinos, se denomina generalmente "Problema de Hitchcock" o "Problema Clásico de Transporte".

En este caso, la oferta total del sistema sobrepasa a la demanda total por lo que se busca satisfacer esta demanda a mínimo costo. Para esto emplearemos la siguiente variable de desición:

x_{ijk} = Kilos transportados del producto k desde i hasta j.
$i = \{1 : \text{Dulzura}, 2 : \text{Santa Sara}, 3 : \text{Paulita}\}, j = \{A : \text{Norte}, B : \text{Poniente}\}$
$k = \{C : \text{Chocolates}, D : \text{Mazapanes}\}$
Considerando lo anterior, el modelo resulta ser:

$$P) \quad Min \quad 0.5(x_{1AC} + x_{1AD}) + 0.8x_{2AD} + 0.6x_{3AC} + 0.7x_{2BD} + x_{3BC}$$

$$\begin{aligned}
x_{1AC} &\leq 2.000 \\
x_{1AD} &\leq 1.000 \\
x_{2AD} + x_{2BD} &\leq 1.500 \\
x_{3AC} + x_{3BC} &\leq 3.000 \\
x_{1AC} + x_{3AC} &= 1.800 \\
x_{1AD} + x_{2AD} &= 800 \\
x_{3BC} &= 2.300 \\
x_{2BD} &= 1.200 \\
x_{ijk} &\geq 0 \qquad \forall i, j, k \\
x_{2AC} &= x_{2BC} = x_{3BD} = 0 \\
x_{3AD} &= x_{1BC} = x_{1BD} = 0
\end{aligned}$$

[78] Interrogación 3, 2016'1

	Norte	**Poniente**
Dulzura	\$0.5 / Kg	
Santa Sara	\$0.8 / Kg	\$0.7 / Kg
Paulita	\$0.6 / Kg	\$1.0 / Kg

Table 51: Costos de Transporte

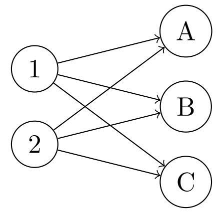


Figure 20: Red de Transporte de Carga

	Chocolates	**Mazapanes**
Norte	\$2 / Kg	\$3 / Kg
Poniente	\$3 / Kg	\$2.5 / Kg

Table 52: Pago Adicional

Para un caso general, si consideramos c_{ijk} el costo asociado a cada arco (i, j) por el producto k, y llamamos O_i las ofertas de los orígenes i y D_{jk} a las demandas por el producto k desde el destino j, podemos escribir un modelo genérico para el problema, como sigue:

$$P) \quad Min \quad \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{s} c_{ij}x_{ijk}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} x_{ijk} &= D_{jk} \quad \forall j,k \\ \sum_{j=0}^{m} x_{ijk} &\leq O_i. \quad \forall i,k \\ x_{ijk} &\geq 0 \qquad \forall i,j,k \end{aligned}$$

Tal como se mencionó en un comienzo, en este caso particular el problema no está equilibrado, esto es, todo lo que se oferta no es exactamente igual a lo que se demanda. Note que esta formulación responde a esta realidad (de hecho, si la demanda total fuera superior a la oferta, el modelo no admitiría solución factible). Sin embargo se puede modelar un problema semejante en que la demanda excediera a la oferta, en cuyo caso la pregunta del modelador es: qué demanda satisfacer a mínimo costo proveyendo todos los productos disponibles.

Problemas Propuestos

1. La empresa enfrenta ahora un nuevo desafío: los centros le han informado que de llevar más productos de la cantidad requerida, ellos le entregarán un pago adicional por kilo extra de producto a la empresa de transporte de acuerdo a la Tabla 52.

   La oferta máxima disponible en cada fábrica se debe seguir respetando. Usted debe ajustar el modelo a este nuevo escenario de negocio.

2. ¿Cómo modificaría el modelo si ahora se le ofrece llevar, desde los centros de venta a las fábricas, los envases de los productos, recibiendo \$1 peso por cada envase de chocolate y \$0,5 por cada envase de mazapán? Considere que cada centro de venta le entrega de vuelta mensualmente la cantidad previamente demandada, ahora en envases. Considere además que es indiferente a qué fábrica se los lleve de vuelta.

4.14 Flota Mínima en Sistema de Transporte Público

Considere un sistema de transporte público en que usted conoce todos los servicios que se deben ofrecer. Cada servicio tiene asociado un terminal y un instante en que se origina el servicio, así como un terminal y un instante en que se termina. Usted conoce además lo que tarda un vehículo en trasladarse vacío entre cada par de terminales. Formule un modelo que minimice el tamaño de la flota necesaria para ofrecer todos los servicios.

SOLUCIÓN

El objetivo del problema es minimizar el tamaño de la flota para ofrecer todos los servicios necesarios. Para ello llamemos I al conjunto de servicios a ofrecer, donde cada elemento de I representa un nodo en un grafo. Además, llamemos A al conjunto de arcos del grafo tal que el arco $(i,j) \in A$ si el servicio j puede recorrerse después del servicio i por el mismo vehículo (esto dependerá de los instantes de término del servicio, del comienzo del servicio j y del tiempo de viaje necesario para que un vehículo viaje una vez terminado i al punto de partida de j). Adicionalmente, agregemos un nodo fuente (f), un nodo de depósito (d) y un arco desde f a cada nodo en I y otro desde cada nodo en I a d.

Como variable de decisión definamos:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si un vehículo recorre el arco (i,j)} \\ 0 & \text{Si no} \end{cases} \qquad (i,j) \in A$$

Así, el modelo consiste en minimizar el número de vehículos que salen del nodo fuente sujeto a que todos los nodos sean visitados por algún vehículo. Es decir:

$$P) \quad Min \sum_{j \in I} x_{dj}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I \cup \{f\}} x_{ij} &= 1 && \forall i \in I \cup \{d\} \\ x_{ij} &\in \{0,1\} && \forall i \in I \cup \{d\}, i \in I \cup \{f\} \end{aligned}$$

Note que cada variable aparece sólo en una restricción, lo que significa que la matriz que define el conjunto de restricciones es totalmente unimodular y por tanto la integralidad de la solución está garantizada aun cuando se relaje esa condición.

Otra formulación del problema se obtiene al considerar un grafo equivalente en que cada servicio se representa con dos nodos: uno inicial (a_i) y otro final (b_i), y en que cada arco entre a_i y b_i tiene flujo mínimo y capacidad máxima igual a 1 (es decir se fuerza a algún vehículo a pasar por el arco (a_i,b_i)). La formulación de este nuevo problema es simple y el modelo resultante corresponde al modelo clásico de flujo en redes a costo mínimo.

Problemas Propuestos

1. Una vez determinada la flota mínima, identifique la asignación de vehículos a servicios que minimice los costos de traslado de los vehículos vacíos (asuma que el costo es proporcional al tiempo de traslado).
2. Resuelva el problema original asumiendo que existen dos tipos de buses y que algunos servicios sólo pueden ser servidos por un tipo específico de bus.
3. Resuelva el problema original restringiendo el número de buses estacionados en cada terminal o en puntos intermedios de almacenaje a una capacidad limitada.

Vuelo	Origen	Salida	Destino	Llegada	Disponibilidad	Precio
1	Lima	9:00	Miami	16:00	25	$ 250
2	Lima	10:00	Miami	17:00	90	$ 700
3	Lima	9:30	Caracas	13:30	70	$ 150
4	Caracas	15:30	Miami	19:30	90	$ 200
5	Lima	8:30	Caracas	12:30	50	$ 450
6	Lima	8:00	México D.F	14:00	70	$ 200
7	Lima	11:00	Los Angeles	18:00	30	$ 250
8	Los Angeles	18:30	Miami	23:30	25	$ 500
9	México D.F.	15:00	Los Angeles	17:30	40	$ 150
10	Los Angeles	19:00	Dallas	21:30	20	$ 300
11	Dallas	22:30	Miami	01:30	60	$ 300
12	México D.F.	16:00	Miami	21:00	10	$ 300
13	Caracas	13:30	Dallas	17:30	20	$ 300

Table 53: Re-Ruteo de Pasajeros en Línea Aérea

4.15 Re-Ruteo de Pasajeros en Línea Aérea

Usted trabaja en operaciones de una línea aérea líder en Latino America. Se ha cancelado el vuelo Lima-Miami con 220 pasajeros. Es necesario re-rutear esos pasajeros al mínimo costo con ciertas restricciones de servicio. La Tabla 53 resume los vuelos que están disponibles en su línea aérea y en la competencia. Para cada vuelo se entrega el costo para su empresa por pasajero y la capacidad disponible. Identifique cómo reasignar los pasajeros a mínimo costo. Por seguridad, se requiere al menos una hora en cada trasbordo entre la hora de llegada y la salida del siguiente vuelo.

El problema consiste en identificar que vuelos emplear de modo de reasignar todos los pasajeros a un mínimo costo. Para ello consideremos una red formada por un nodo L de origen, un nodo M de destino, y nodos i, $i = 1, ..., 26$ correspondientes a los origenes y destinos de cada uno de los trece vuelos presentados en la Tabla 53. Existen dos tipos de arco en la red: aquéllos que conectan los nodos origen y destino de un mismo vuelo, y aquéllos que conectan las combinaciones posibles de vuelos consecutivos para un mismo pasajero (es decir en que el origen de un vuelo coincida con el destino del que le precede). Los arcos del primer tipo tienen un costo unitario equivalente a la tarifa del vuelo respectivo y una capacidad acotada (ambos valores se entregan en la Tabla 53), mientras los arcos de segundo tipo tienen un costo cero (corresponden a estadías en aeropuerto esperando el siguiente vuelo) y no presentan restricciones de capacidad. Llamemos C_{ij} los costos entre cada uno de los nodos y μ_{ij} a las capacidades asociadas a cada arco. La red resultante se presenta en la Figura 21, la que incluye un flujo de entrada y de salida igual a 220 pasajeros. Esta formulación transforma el problema en uno de flujo a costo mínimo.

Sea:

f_{ij} = Flujo que circula por el arco (i,j), $i = L, M, 1, 2, ..., 26 \;\; j = L, M, 1, 2, ..., 2$

El problema consiste en minimizar el costo de transportar un flujo de 220 personas desde el nodo L al nodo M, considerando las capacidades de cada uno de los arcos, y que todos los nodos intermedios son nodos de paso, esto es todo el flujo que entra a ellos debe salir de ellos. Lo anterior nos permite formular el siguiente modelo:

$$P) \;\; Min \;\; \sum_i \sum_j f_{ij} C_{ij}$$

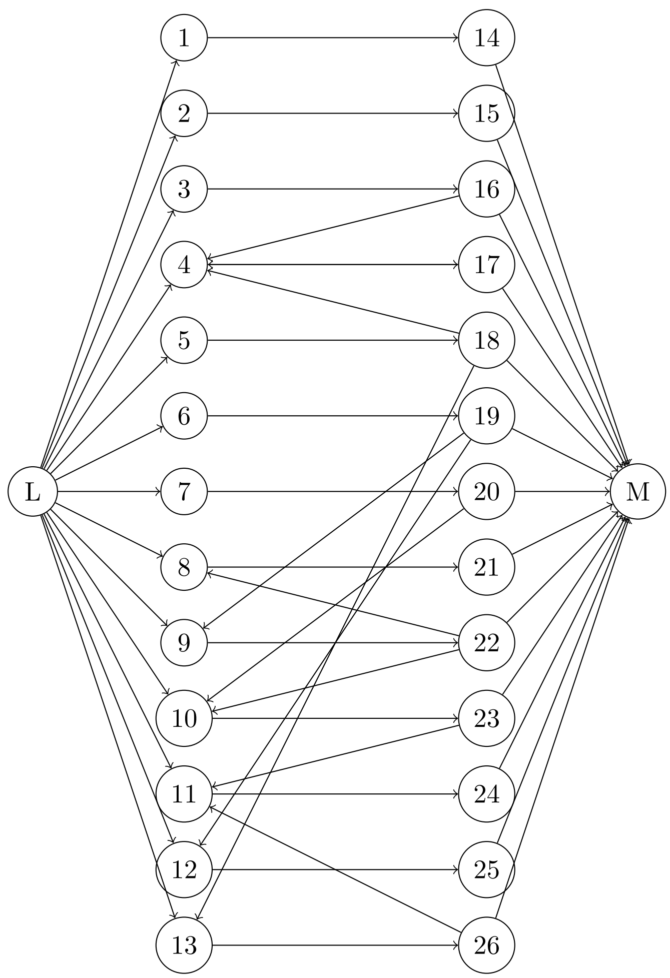


Figure 21: Re-ruteo de Pasajeros

$$\begin{array}{rcll} f_{ij} & \leq & u_{ij} & \forall i,j \\ \sum_j f_{Lj} & = & 220 & \\ \sum_i f_{iM} & = & 220 & \\ \sum_j f_{ij} - \sum_l f_{li} & = & 0 & \forall i \\ f_{ij} & \geq & 0 & \forall i,j \end{array}$$

Problemas Propuestos

1. Cómo cambia su modelo si se exige que nadie espere más de cuatro horas por una conexión y que se entregue \$20 de colación en los casos en que se espera más de dos horas?
2. Cómo cambia su modelo si se exige que al menos un 50% de los pasajeros llegue a Miami antes de las 24:00 hrs.
3. Usted tiene que llevar a cabo un proyecto que está definido por un conjunto de tareas que se deben desarrollar individualmente (cada tarea la desarrolla una sola persona). Cada tarea tiene un instante de comienzo y fin predeterminado y existe un tiempo de reasignación (o setup) entre cada par de tareas sucesivas desarrolladas por una misma persona Usted debe contratar gente para este proyecto. Formule un modelo que determine el mínimo número de personas que necesita para realizar este pryecto.
4. Suponga que determinó el mínimo número de personas y ahora desea asignar esa gente de modo de minimizar los tiempos de reasignación. ¿Cómo lo haría?
5. Suponga que el presupuesto le alcanza para contratar sólo **N** personas y debe escoger qué tareas realizar. Para eso, usted asume que cada tarea i le reporta un beneficio p_i. ¿Cuáles tareas se debieran escoger y quiénes las harían?

4.16 Sistema de Seguridad Policial

En un consejo municipal se discute el tema de seguridad del centro de la ciudad. Se decide proveer al centro de la ciudad con un sistema de seguridad basado en puntos fijos policiales. Un asesor municipal sugiere que los puntos policiales no estén en las esquinas sino a mitad de cuadra. Este asesor considera necesario que desde toda esquina de la red exista un punto policial a menos de una cuadra. Formule un modelo de optimización que minimice el número de puntos policiales necesarios para esta estrategia.

Otro asesor sugiere que los puntos policiales estén en las esquinas de la red. Este asesor considera necesario que en cualquier cuadra del centro debe existir un punto policial en alguna de sus esquinas. Formule un problema de optimización que minimice el número de puntos policiales necesarios para esta estrategia.

SOLUCIÓN

El objetivo del problema es proveer a la ciudad con un sisitema de seguridad, y se proponen dos alternativas para hacerlo. Llamemos N al conjunto de nodos (esquinas) en la red, A el conjunto de arcos (cuadras) y I_i al conjunto de arcos incidentes en el nodo i (que tienen algún extremo en el nodo).

El primer asesor considera necesario que desde toda esquina de la red exista un punto policial a menos de una cuadra. Para ello emplearemos la variable:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si se instala un policía en el arco } (i,j) \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \qquad (i,j) \in A$$

El objetivo es minimizar el número de policías considerando que desde toda esquina de la red debe existir al menos un punto policial a menos de una cuadra, esto es:

$$P) \quad Min \sum_{(i,j)\in A} x_{ij}$$

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\sum_{(i,j)\in I_i} x_{ij} & \geq & 1 & \forall i \in N \\ x_{ij} & \in & \{0,1\} & \forall (i,j) \in A \end{array}$$

El segundo asesor sugiere que los puntos policiales estén en las esquinas de la red. En este caso emplearemos la variable:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{Si se instala un policía en el nodo } i \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \qquad i \in N$$

En este caso debemos minimizar el número de puntos policiales considerando que en cualquier cuadra debe existir un punto policial en al menos 1 de sus esquinas. Esto nos permite formular el siguiente modelo:

$$P) \quad Min \sum_{i\in N} y_i$$

$$\begin{array}{rcll} y_i + y_j & \geq & 1, & \forall (i,j) \in A \\ y_i & \in & \{0,1\}, & \forall i \in N \end{array}$$

La primera estrategia corresponde a un problema de Minimum vertex cover, el que consiste en encontrar un conjunto mínimo de nodos en una red tal que todos los arcos de la red tengan un extremo en ese conjunto. Mientras que la segunda estrategia corresponde a un problema de Minimum edge cover, el cual consiste en encontrar un conjunto mínimo de arcos de una red tal que todos los nodos sean extremo de al menos un arco en ese conjunto. Los dos problemas parecen muy similares, sin embargo el primero es NP-completo mientras para el segundo se conocen algoritmos polinomiales de solución.

Es interesante observar que en el problema de asignación o edge cover se cumple la matriz totalmente unimodular en que en cada columna hay solo dos 1 mientras que en el vertex cover en cada fila hay dos unos no obteniéndose una matriz totalmente unimodular.

4.17 Equipo de Trabajo

Usted ha sido electo democráticamente en un cargo para dirigir un grupo de 60 personas. De entre ellos, usted debe elegir un equipo de asesores para ayudarlo en el cargo. Usted sabe que existen muchos vínculos de amistad dentro de estas 60 personas pero no todos son amigos con todos. Usted quiere que el equipo que lo asesorará sea lo más pequeño posible, pero que cada una de las 60 personas considere que al menos uno de los asesores escogidos es su amigo. Formule el problema. Este problema puede modelarse como un node cover problem.

SOLUCIÓN

El problema consiste en escoger a un equipo de asesores, lo más pequeño posible, de tal manera que cada uno de los miembros del grupo considere que alguno de los asesores es su amigo. Para ello consideremos una red donde cada persona i del grupo representa un nodo, con $i = 1, ..., 60$, y el conjunto de arcos (i, j) que une cada uno de esos nodos. Llamemos δ_{ij} al dato sobre las relaciones de amistad entre los miembros del grupo, donde δ_{ij} es igual a 1 si las personas i y j son amigos, y 0 en caso contrario.Emplearemos la siguiente variable de decisión:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{Si elijo a la persona } i \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \qquad i = 1, ..., 60$$

Como el objetivo del modelo es minimizar el tamaño del equipo, considerando las restricciones de amistad, el modelo queda expresado por:

$$P) \quad Min \quad \sum_{i=1}^{60} x_i$$

$$\begin{array}{rcll} \sum_{j=1}^{60} x_j \delta_{ij} & \geq & 1 & \forall i = 1, ..., 60 \\ x_i & \in & \{0, 1\} & \forall i = 1, ..., 60 \end{array}$$

Note que el problema puede formularse como un *node cover problem*, esto es un problema que consiste en escoger nodos de una red con un algún criterio, de modo que todos los arcos de la red tengan algún extremo entre los nodos escogidos. Para ello basta imaginar una red donde cada persona i del grupo representa un nodo, con $i = 1, ..., 60$, y en que el conjunto de arcos queda definido por arcos (i, j) que representan las relaciones de amistad entre las personas.

4.18 Tablero de Ajedrez

Suponga que tiene un tablero de ajedrez con algunas posiciones prohibidas. Encuentre el máximo número de dominos que se puede poner en el tablero sin cubrir ninguna posición prohibida.

SOLUCIÓN

El objetivo del problema es maximizar el número de dominós que se pueden poner en el tablero sin cubrir ninguna posición prohibida. Pensemos el problema como el de una red de 64 nodos en que cada borde entre dos posiciones adyacentes se representa como un arco entre los dos nodos involucrados (se escoge un sentido cualquiera para el arco); es decir inicialmente habrá 112 arcos. A continuación eliminamos los nodos correspondientes a las posiciones prohibidas y con ellos todos los arcos involucrados. Así, nos quedamos con un conjunto N de nodos (posiciones válidas) en la red, y un conjunto A de arcos. El problema consiste en escoger el mayor número de arcos de la red tal que no existan dos arcos de este conjunto que incidan en un mismo nodo (superposición de dominós). Para formular este problema denominamos I_i al conjunto de arcos incidentes en el nodo i, esto es que tienen algún extremo en el nodo i. A continuación definamos las variables:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si escojo el arco } (i, j) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \qquad (i, j) \in A$$

Por lo que el modelo resulta ser:

$$P) \quad Max \quad \sum_{(i,j) \in A} x_{ij}$$

$$\begin{array}{rcll} \sum_{(k,l) \in I_i} x_{kl} & \leq & 1 & \forall i \in N \\ x_{ij} & \in & \{0, 1\} & \forall (i, j) \in A \end{array}$$

4.19 Sistema Monetario

Considere que usted conoce todas las tasas de cambio de monedas de diferentes países que se transan en una agencia. Identifique si existe alguna oportunidad de arbitraje. En este caso, se entiende por arbitraje que por medio de cambios sucesivos de monedas, se obtenga más dinero que con el que se comenzó la operación.

SOLUCIÓN

Para realizar este problema consideraremos que la moneda inicial corresponde a Pesos. Luego \$1 se debe transformar en todas las monedas restantes hasta regresar nuevamente a pesos, de acuerdo a un factor de conversión f_{ij} que transforma el dinero en i a moneda j. Llamemos M al conjunto de monedas y definamos como variable de decisión:

x_{ij} = Flujo a convertir desde la moneda i a la moneda j
x_p =Flujo final en pesos

De esta manera el modelo resulta ser:

$$P) \quad Max \quad x_p$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in M-\{p\}} x_{pj} &= 1 & \\
\sum_{k \in M-\{j\}} x_{kj} f_{kj} &= \sum_{k \in M-\{j\}} x_{jk} & \forall j \in M \\
\sum_{k \in M-\{p\}} x_{kp} f_{kp} &= x_p & \\
x_{ij}, x_p &\geq 0 & \forall i, j \in M
\end{aligned}$$

La primera restricción indica que se cuenta con un peso para convertirlo en otras monedas. La siguiente familia de restricciones indica que todo lo que se convierte en una moneda multiplicado por los factores de conversión, debe ser invertido en otras monedas. Por último, se exige que todo vuelva a ser convertido en pesos nuevamente, que es lo que se pretende maximizar.Si el valor máximo alcanzado supera el peso con que se comenzó, entonces se dice que existen oportunidades de arbitraje.

4.20 Encuentro Internacional de Jóvenes

Los organizadores del Encuentro Internacional de Jóvenes realizado en 1998 en Chile tuvieron que formar las comisiones de discusión de los distintos temas. La idea es formar las comisiones privilegiando la interacción entre diversos países, y por ello cada comisión debe estar formada sólo por un delegado de cada país. Asuma que en el encuentro participan P países, y cada país ha enviado a_i delegados, $i = 1, \ldots.., P$. Se deben formar N comisiones y cada una de ellas debe tener n_j delegados, $j = 1, \ldots, N$. Formule este problema como uno de flujo máximo en una red apropiada.

SOLUCIÓN[79]

Para formular el problema como uno de flujo máximo, debemos primero identificar la red apropiada. Considerando cada país como un nodo, cada comisión como un nodo, un nodo fuente y un nodo destino, y el hecho de que cada comisión debe estar formada sólo por un delegado de cada país, se obtiene la red de la Figura 22.

$$\mu_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si } i \in P \text{ y } j \in N \\ \alpha_j & \text{Si } i = r \text{ y } j \in P \\ n_j & \text{Si } i \in N \text{ y } j = s \end{cases} \tag{86}$$

Ahora, si llamamos A al conjunto de arcos de la red, μ_{ij} a la capacidad de cada uno de estos arcos (con μ_{ij} dado en (86)) y empleando las variables de decisión:

x_{ij} = Flujo que circula entre los nodos i y j, $i = 1...P, j = 1...N$
F = Flujo total que circula desde el nodo r al nodo s.

[79] Jorge Vera, Profesor Ing. Industrial PUC

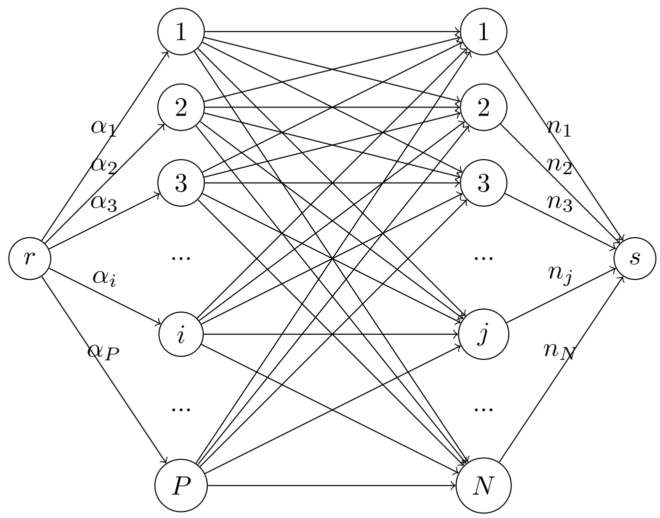


Figure 22: Red Encuentro Internacional

El modelo de optimización resulta ser el expresado a continuación:

$$P) \quad Max \quad F$$

$$\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{(k,i)\in A} x_{ki} \quad = \quad \begin{cases} F & i = r \\ 0 & i \neq r, s \\ -F & i = s \end{cases}$$

$$0 \quad \leq \quad x_{ij} \leq \mu_{ij}$$

4.21 Distribución de Productos

Una empresa desea diseñar la forma en que se abastecerá desde cierto número de bodegas a una cantidad de clientes, sobre un horizonte de planificación de un año. Para esto realiza contratos anuales con un transportista, en los que se especifícan las rutas que se utilizarán. El contrato se compone de un pago fijo según la ruta del transportista, y un pago variable según la cantidad de carga transportada por la ruta, existen un total de K productos diferentes. La representación se realiza en una red no dirigida $G = (V, A)$. Sean $O \subset V$ los nodos correspondientes a las bodegas, y $D \subset V$ los nodos correspondientes a los clientes. Sea d_i^k la demanda anual en el nodo $i \in D$ por el producto k. Sea b_i^k la oferta anual en el nodo $i \in O$ por el producto k. Considere que contratar la ruta (i, j) significa un costo fijo F_{ij} que se incurre a comienzos de año, y un costo variable c_{ij} por unidad transportada. Cada ruta (i, j) tiene una capacidad máxima a transportar de μ_{ij} unidades de todos los productos (asumiendo que los productos son relativamente homógeneos y las cantidades pueden ser sumadas). Usted debe determinar las rutas que deben ser contratadas y la cantidad a transportar por cada una de ellas.

SOLUCIÓN[80]

Como debemos determinar las rutas a ser contratadas y la cantidad a transportar por cada una de ellas, emplearemos las siguientes variables de decisión:

$f_{ij}^k =$ Flujo de producto k entre i y j, $\qquad (i, j) \in A \quad k = 1, ..., K$

$z_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si se contrata la ruta } (i, j) \\ 0 & \text{Si no} \end{cases} \qquad (i, j) \in A$

[80] Jorge Vera, Profesor Ing. Industrial PUC

El problema consiste en uno de diseño de redes, donde debemos minimizar el costo de satisfacer a los clientes, cumpliendo con las restricciones de oferta y demanda, además de una restricción de carga que relaciona las variables (87). Considerando lo anterior el modelo resulta ser:

$$P) \quad Min \quad \sum_{(i,j)\in A} F_{ij} z_{ij} + \sum_{k=1}^{K} \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} f_{ij}^k$$

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in A} f_{ij}^k - \sum_{(l,i)\in A} f_{li}^k &= b_i^k && i \in O, k = 1, ..., K \\
\sum_{(i,j)\in A} f_{ij}^k - \sum_{(l,i)\in A} f_{li}^k &= 0 && i \notin O \cup D, k = 1, ..., K \\
\sum_{(i,j)\in A} f_{ij}^k - \sum_{(l,i)\in A} f_{li}^k &= -d_i^k && i \in D, k = 1, ..., K \\
\sum_{k=1}^{K} f_{ij}^k &\leq \mu_{ij} z_{ij} && \forall (i,j) \in A \qquad (87) \\
f_{ij}^k &\geq 0 && \forall (i,j) \in A, k = 1, ..., K \\
z_{ij} &\in \{0,1\} && \forall (i,j) \in A
\end{aligned}$$

4.22 Envío de Contenedores

AKME es un gran fabricante de artículos para la captura de aves, que realiza el envío de sus pedidos mediante contenedores transportados por terceros y debe determinar qué transportistas usar para cada despacho.

La red de distribución de AKME se puede representar mediante un grafo $G = (N, A)$, donde N son las distintas localidades. El nodo 0 representa la planta de AKME, y el resto de los nodos corresponde a puntos de paso o ubicaciones de los clientes. Los arcos representan la posibilidad de transportar directamente un contenedor entre un par de puntos. AKME debe entregar un conjunto C de contenedores, a un conjunto $B \subseteq N - \{0\}$ de clientes. El **parámetro** D_c representa el nodo donde está el cliente que recibirá el contenedor $c \in C$.

Para realizar el transporte, AKME tiene un conjunto T de transportistas conocidos y confiables, pero no todos los transportistas operan sobre todas las zonas de la red. Por eso denotaremos por V^t, los tramos o arcos que puede operar el transportista $t \in T$. El transportista t le cobra M_{ij}^t [$] a AKME por llevar un contenedor desde i hasta j, donde $(i,j) \in V^t$. Además, se sabe que el transportista t puede trasladar a lo más A_{ij}^t contenedores desde i a j simultáneamente. Cada contenedor debe ser transportado por un único transportista.

Basándose en la información entregada, formule un problema de programación lineal entera que determine la forma de realizar el transporte de los pedidos de AKME a sus clientes mediante los transportistas existentes, a costo mínimo.

SOLUCIÓN[81]

Variables de decisión

- X^{ct}: 1, si el contenedor $c \in C$ es asignado al transportista $t \in T$; 0, en otro caso.
- Y_{ij}^{ct}: 1, si el contenedor $c \in C$, asignado al transportista $t \in T$, se mueve desde i a j, $(i,j) \in V^t$; 0, en otro caso.

Función objetivo

$$\min \sum_{t\in T} \sum_{c\in C} \sum_{(i,j)\in V^t} M_{ij}^t Y_{ij}^{ct} + \sum_{t\in T} \sum_{c\in C} \sum_{(i,j)\in V_t : i\neq 0} Q_i^t Y_{ij}^{ct}$$

[81] Interrogación 3, 2013'2

Para las restricciones, se presentan dos formas de hacerlo, que difieren ligeramente en algunas de las últimas restricciones.

Restricciones - Opción 1

- Asignación única de cada contenedor a un único transportista.

$$\sum_{t\in T} X^{ct} = 1,\ \forall c \in C$$

- Capacidad máxima del transportista en cada tramo.

$$\sum_{c\in C} Y_{ij}^{ct} \leq A_{ij}^{t},\ \forall t \in T,\ \forall (i,j) \in V^{t}$$

- Largo máximo de la ruta de despacho.

$$\sum_{(i,j)\in V^t} Y_{ij}^{ct} \leq P \cdot X^{ct},\ \forall c \in C,\ \forall t \in T$$

- Balance de contenedores.

$$\sum_{j\in N:(i,j)\in V^t} Y_{ij}^{ct} - \sum_{j\in N:(j,i)\in V^t} Y_{ji}^{ct} = \begin{cases} X^{ct}, & i = 0 \\ -X^{ct}, & i = D_c \\ 0, & \text{o.c.} \end{cases} \quad \forall i \in N,\ \forall c \in C,\ \forall t \in T$$

- Naturaleza de las variables.

$$X^{ct} \in \{0,1\},\ \forall c \in C,\ \forall t \in T$$

$$Y_{ij}^{ct} \in \{0,1\},\ \forall c \in C,\ \forall t \in T,\ \forall (i,j) \in V^{t}$$

Restricciones - Opción 2

- Asignación única de cada contenedor a un único transportista.

$$\sum_{t\in T} X^{ct} = 1,\ \forall c \in C$$

- Capacidad máxima del transportista en cada tramo.

$$\sum_{c\in C} Y_{ij}^{ct} \leq A_{ij}^{t},\ \forall t \in T,\ \forall (i,j) \in V^{t}$$

- Largo máximo de la ruta de despacho.

$$\sum_{(i,j)\in A^t} Y_{ij}^{ct} \leq P,\ \forall c \in C,\ \forall t \in T$$

- Evitar movimientos imposibles.

$$Y_{ij}^{ct} \leq X^{ct},\ \forall t \in T,\ \forall c \in C,\ \forall (i,j) \in V^{t}$$

- Balance de contenedores.

$$\sum_{t\in T} \sum_{j\in N:(i,j)\in V^t} Y_{ij}^{ct} - \sum_{t\in T} \sum_{j\in N:(j,i)\in V^t} Y_{ji}^{ct} = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ -1, & i = D_c \\ 0, & \text{o.c.} \end{cases} \quad \forall i \in N,\ \forall c \in C$$

- Naturaleza de las variables.

$$X^{ct} \in \{0,1\},\ \forall c \in C,\ \forall t \in T$$

$$Y_{ij}^{ct} \in \{0,1\},\ \forall c \in C,\ \forall t \in T,\ \forall (i,j) \in V^{t}$$

4.23 Reposición de Bicicletas

En la comuna de Bicilandia se ha dispuesto un exitoso programa de préstamo de bicicletas para fomentar su uso y combatir la congestión vehicular. Las bicicletas que se facilitan son de dos tipos: pisteras y de montaña. Los usuarios de las bicicletas deben recogerlas y retornarlas en uno de los n puntos que se han dispuesto para ello, sin que necesariamente deban regresarlas al lugar donde las recogieron. Los puntos están localizados en intersecciones de la ciudad. Al principio de cada día cada sitio i debe contar con p_i bicicletas pisteras y m_i bicicletas de montaña. Sin embargo, al final del día las bicicletas pueden quedar dispuestas en cantidades muy distintas por sitio a las que se requieren a la mañana siguiente. Esto exige desplazar algunas de ellas durante la noche de modo de retomar las cantidades con que debe comenzar el día en cada sitio. Suponga que al final del día cada sitio i tiene un descalce de dp_i bicicletas pisteras y dm_i bicicletas de montaña (que son positivos si sobran bicicletas y negativos si faltan respecto del número que se requiere para la mañana siguiente). Asuma que la suma de dp_i para todo i es cero, al igual que para dm_i. Considere que para llevar bicicletas de un sitio de exceso a uno de déficit se debe pasar por nodos (o intersecciones) en los cuales no hay sitios de arriendo.

Suponga que usted está a cargo de ordenar las bicicletas durante la noche. Para eso cuenta con un mapa de la comuna y conoce el costo que le significa recorrer cada arco de la red por bicicleta transportada, que corresponde a c_{ij} para el desplazamiento entre la intersección (o nodo) i y la intersección j. Cada arco de la red queda definido por dos intersecciones adyacentes. Suponga que el puente j queda definido en su red como el arco (a_j, b_j), para $j = 1, 2$. Considere que el costo de moverse por la comuna sin mover bicicletas es despreciable.

Suponga que durante el período en que usted debe mover las bicicletas, los dos puentes levadizos de la comuna están bastante congestionados (pasan embarcaciones fluviales bajo ellos) por lo que se le exige controlar el movimiento de bicicletas por los puentes. Para ello se le exige no pasar por cada puente j más que q_j bicicletas en total (en ambos sentidos).

a) Formule un modelo de optimización que indique cómo mover las bicicletas a través de la red de calles, desde los puntos de exceso a los puntos de deficit de bicicletas, de modo de minimizar el costo total de transporte.

b) La autoridad decide que la restricción de flujo máximo por puente no es suficiente por lo que decide tarificar el uso de los puentes. La tarifa a pagar en cada puente tiene dos partes. La primera parte consiste en que cada día se debe pagar Z_j si se decide usar el puente j para mover bicicletas en dicho día, independiente del número de bicicletas que se muevan (se paga Z_j sólo si se usa el puente para mover bicicletas). Adicionalmente se le exige pagar una tarifa, T_j, por cada bicicleta que pasa por uno de los puentes. Esta tarifa crece con el número de bicicletas a mover de acuerdo a la siguiente función $T_j = \alpha_j + \beta_j f_j$. En que α_j y β_j son parámetros conocidos, mientras f_j corresponde al número de bicicletas totales que se transportan por el puente j. Indique cómo cambia su modelo de la parte a) bajo este nuevo escenario.

SOLUCIÓN[82]

a) La red tiene un conjunto de intersecciones o nodos que denominamos N (algunos de ellos corresponden a los sitios) y un conjunto de calles o arcos que denominamos A. Se usarán los siguientes subíndices:

l: se usará para denotar los dos tipos de bicicletas.

m: se usará para denotar los dos puentes.

i, j, k: se usarán para denotar los nodos.

Se define la siguiente variable.

Variables

x_{ij}^l: número de bicicletas tipo l que se mueven en el arco (i, j).

[82] Interrogación 3, 2012'1

Función objetivo La función objetivo consiste en minimizar los costos totales.

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in A} \sum_{l=1}^{2} c_{ij} \cdot x_{ij}^{l}$$

Restricciones

R1) Conservación de flujo en cada uno de los N nodos de la red para las bicicletas pisteras.

$$\sum_{k:(k,i)\in A} x_{ki}^{l} - \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij}^{l} = dp_i \quad \forall\, i \in N.$$

R2) Conservación de flujo en cada uno de los N nodos de la red para las bicicletas de montaña.

$$\sum_{k:(k,i)\in A} x_{ki}^{l} - \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij}^{l} = dm_i \quad \forall\, i \in N.$$

R3) Respetar la capacidad de cada puente.

$$\sum_{l=1}^{2} x_{a_m,b_m}^{l} \leq q_m \quad \forall\, m \in \{1,2\}.$$

R4) Naturaleza de las variables.

$x_{ij}^{l} \in Z_0^{+}$, para todo arco $(i,j) \in A$ y tipo de bicicleta $l \in \{1,2\}$.

b) Se define la siguiente variable.

Variables

$$y_m\colon \begin{cases} 1 & \text{si el puente } m \text{ se usará.} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Función objetivo La función objetivo se debe modificar, quedando:

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in A} \sum_{l=1}^{2} c_{ij} \cdot x_{ij}^{l} + \sum_{m=1}^{2} Z_m y_m + \sum_{m=1}^{2} \left(\alpha_m + \beta_m \sum_{l=1}^{2} x_{a_m b_m}^{l} + \beta_m \sum_{l=1}^{2} x_{b_m a_m}^{l} \right) \left(\sum_{l=1}^{2} x_{a_m b_m}^{l} + \sum_{l=1}^{2} x_{b_m a_m}^{l} \right)$$

R5N) Carga fija de cada puente.

$$\sum_{l=1}^{2} x_{a_m b_m}^{l} + \sum_{l=1}^{2} x_{b_m a_m}^{l} \leq M y_m \quad \forall\, m \in \{1,2\}.$$

con $M >>> 0$.

R4N) Naturaleza de las variables.

$y_m \in \{0,1\}$, para todo puente $m \in \{1,2\}$.

4.24 Generación de Energía

Suponga que una compañía minera posee una cierta cantidad de puntos de generación, otros que son puntos de consumo, y otros puntos conectados que son en realidad subestaciones de energía. Todo esto puede ser representado mediante una red $G = (N, A)$, donde N es el conjunto de nodos correspondientes a puntos de generación, consumo y subestaciones, y A denota los arcos de la red, correspondientes a las líneas de alta tensión que unen los puntos. Para un horizonte de un año se sabe que en cada punto $i \in N$ existe una oferta (o demanda) anual b_i [GWh] (siguiendo la convención de que $b_i > 0$ corresponde a una oferta, $b_i < 0$ corresponde a una demanda). Para los puntos i que corresponden a las subestaciones eléctricas, $b_i = 0$. Debido a restricciones de capacidad en las líneas de transmisión, sólo es posible transportar hasta un máximo de u_{ij} [GWh] de energía por cada línea (i,j) anualmente. Adicionalmente, existen otras limitantes al flujo en la red: Existe una zona correspondiente a los nodos de un conjunto $J \subset N$ tal que la suma total de energía que fluye en todos los arcos que conectan puntos del conjunto J no puede ser mayor a K [GWh] al año. El costo de enviar energía por la red se modela con una función no lineal (debido a los efectos de pérdidas por transmisión). Más especíFIcamente, si v_{ij} es el flujo de energía en la línea (i,j), el costo de transmisión es $f_{ij}(v_{ij}) = c_{ij}v_{ij} + \alpha_{ij}(v_{ij})^{\beta_{ij}}$, donde $c_{ij} y \alpha_{ij}$ son constantes positivas, mientras que β_{ij} es una constante, también positiva, pero cuyo valor está entre 1,5 y 2,5. Con la información anterior escriba un modelo de optimización que permita determinar las cantidades óptimas de energía que deben circular por las líneas de la red, de modo tal que se cumplan las restricciones indicadas y el costo total de transmisión sea mínimo.

SOLUCIÓN[83]

Nos dan una pista sobre cuál es la variable de decisión:
v_{ij}: flujo de energía en la linea (i,j) $\quad \forall (i,j) \in A$.

De esta forma, nuestro objetivo es minimizar los costos totales respetando las condiciones impuestas en el enunciado:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} f_{ij}(v_{ij})$$

$$\sum_{j:(i,j)\in A} v_{ij} - \sum_{k:(k,i)\in A} v_{ki} = b_i \qquad \forall i \in N$$

$$\sum_{(i,j)\in A: i,j\in J} v_{ij} \leq K$$

$$0 \leq v_{ij} \leq u_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A$$

Problema Propuesto:

Olvide por un momento la existencia de ofertas y demandas en la red. Los gestores del sistema desean saber cuánta es la máxima cantidad de energía que se puede enviar desde un nodo de generación específico, $g \in N$, hasta un nodo de consumo específico, $s \in N$. Escriba un modelo de optimización que permita resolver este problema.

4.25 Arriendo de Casa de Verano

Usted tiene una casa que piensa arrendar por los meses de enero y febrero (del 01/01 al 28/02). Pone un aviso en un diario en que pide que los interesados le indiquen entre qué fechas quisieran arrendar su casa y cuánto estarían dispuestos a pagar. Usted recibe las ofertas descritas en la Tabla 54. ¿Cuáles ofertas debiera aceptar de modo de maximizar su ingreso?

SOLUCIÓN

Para modelar el problema construiremos una línea de tiempo con cada una de las alternativas de arriendo, como se aprecia en la Figura 23, donde se distingue el inicio y el término de cada oferta de arriendo, así como el pago asociado. Considere un grafo en que se asocia un nodo a cada fecha de inicio y término de una oferta

[83] Examen, 2011'1

Oferta	Inicio	Fin	Arriendo
1	01/01	31/01	$ 400
2	15/01	15/02	$ 450
3	01/01	28/02	$ 750
4	07/01	12/01	$ 130
5	20/01	26/01	$ 250
6	01/02	20/02	$ 500
7	01/02	15/02	$ 300
8	18/02	28/02	$ 170
9	01/02	28/02	$ 500
10	15/01	08/02	$ 500

Table 54: Ofertas Recibidas

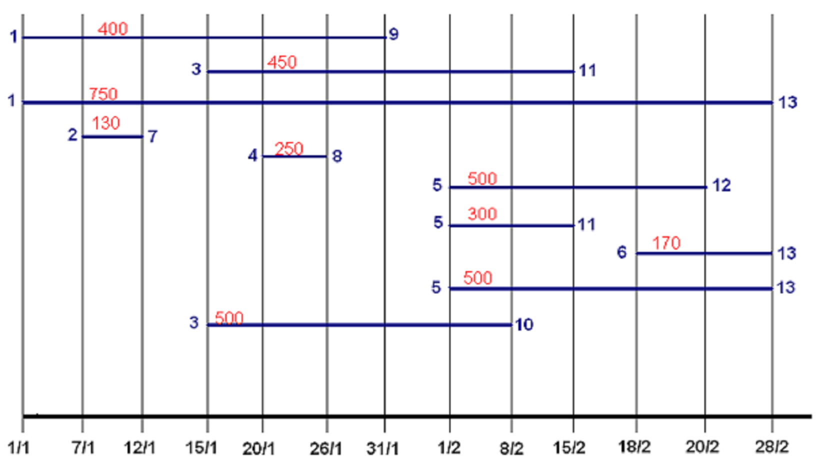


Figure 23: Línea de Tiempo

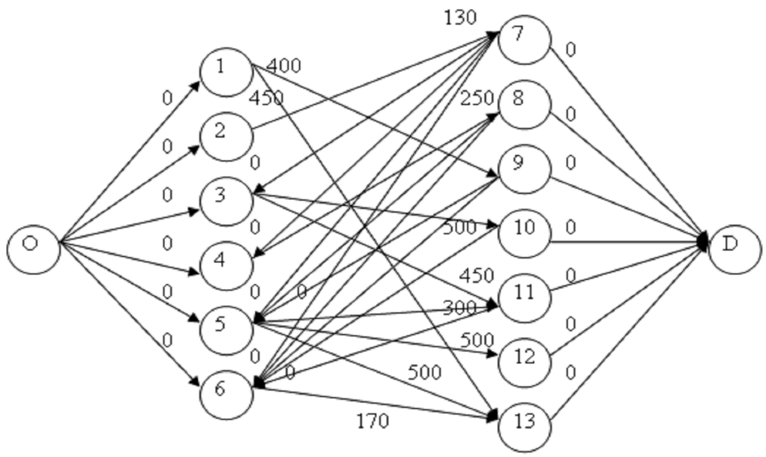


Figure 24: Red Arriendo de Casa de Verano

Nodo	**O**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**D**
O		0	0	0	0	0	0								
1										400				750	
2								130							
3											500	450			
4									250						
5												300	500	500	
6														170	
7				0	0										0
8						0	0								0
9															0
10							0								0
11							0								0
12															0
13															0
D															

Table 55: Costos Asociados

y un arco que los une con su pago asociado como único atributo. Asimismo, se agregan arcos que unan el nodo de término y el nodo de inicio de cada par de arriendos que pueda realizarse en forma consecutiva. Estos arcos representan los períodos en que la casa no está arrendada y por lo tanto llevan un pago asociado nulo. Por último, se incluyen un nodo de origen O y uno de destino D al que se unen arcos a todos los nodos de inicio y todos los nodos de término respectivamente. Estos arcos también llevan un pago asociado nulo. Así el problema se reduce a encontrar la ruta de pago máximo en la red que se presenta en la Figura 24.

Para modelar el problema llamemos p_{ij} al pago asociado a cada arco (i, j). Estos pagos están resumidos en la Tabla 55. El modelo empleará la siguiente variable de desición:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si la ruta de costo máximo emplea el arco (i,j)} \\ 0 & \text{Si no} \end{cases}$$

De esta manera el modelo resulta ser:

$$P) \quad Max \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_{ij}$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} x_{Oj} &= 1 \\
\sum_{i=1}^{n} x_{iD} &= 1 \\
\sum_{i=1}^{n} x_{ij} - \sum_{k=1}^{n} x_{jk} &= 0 \quad \forall j \neq O, D \\
x_{ij} &\in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

Al igual que los modelos del problema 5.1, estas restricciones son linealmente dependientes por lo que una de ellas se puede eliminar.

Es importante destacar que el problema de determinar una ruta de pago máximo resulta sencillo de modelar en este caso debido a que la red es acíclica. Si la red contuviera ciclos y nos interesara la ruta (acíclica) de pago máximo, la formulación fallaría pues no impediría una solución con ciclos. De hecho, este nuevo problema es mucho más complejo de modelar y resolver (NP-Completo).

Problema Propuesto
Considere la compra de una máquina que se necesita para un proceso productivo. Esta máquina tiene un precio (esperado) que varía con los años y costos operacionales que aumentan con los años de uso y precio de venta al final de su vida útil, la cual varía con los años de uso. Además la máquina entrega beneficios anuales. ¿Cuándo comprar la máquina? Note que este problema se puede modelar como un problema de ruta de costo mínimo.ransporte de Carga

4.26 Asignar Colores a Sistema de Transporte Público

Considere un sistema de transporte público sobre una red de transporte en que coexisten n servicios que usted conoce. Usted está encargado de asignar colores a los buses de los servicios y se le pide que por ningún paradero pasen dos servicios pintados del mismo color. Además se le dice que no abuse del arco iris pues la gente podría tener dificultad para distinguir dos servicios pintados de colores demasiado semejantes. Determine el número mínimo de colores que se requieren.

SOLUCIÓN

El problema consiste en asignar colores a los buses de los diferentes servicios, por lo que emplearemos las siguientes variables de decisión:

$$
x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el servicio } i \text{ es pintado del color } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad i \in I, j \in J
$$

$$
y_j = \begin{cases} 1 & \text{Si el el color } j \text{ es utilizado en algún servicio} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad j \in J
$$

Además, consideremos que existe el siguiente parámetro:

$$
\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{Si el servicio } i \text{ pasa por el paradero } k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad i \in I, k \in K
$$

Donde I es el conjunto de servicios, J el conjunto de colores (donde la cardinalidad de J es suficientemente grande) y K el conjunto de paraderos.

El problema consiste en minimizar los colores empleados, considerando la relación entre las variables y_j y x_{ij} (de modo que si algún x_{ij} toma el valor 1, también lo hace y_j), que a cada servicio se le debe asignar sólo un color y que por ningún paradero pasen dos servicios pintados del mismo color. Lo anterior nos permite obtener la siguiente formulación:

$$P) \quad Min \quad \sum_{j\in J} y_j$$

$$\begin{aligned}
y_j &\geq x_{ij} && \forall i \in I, \forall j \in J \\
\sum_{j\in J} x_{ij} &= 1 && \forall i \in I \\
\sum_{i\in I} x_{ij}\delta_{ik} &\leq 1 && \forall j \in J, \forall k \in K \\
x_{ij} &\in \{0,1\} && \forall i \in I, \forall j \in J \\
y_j &\geq 0 && \forall j \in J
\end{aligned}$$

Note que este problema consiste en identificar un conjunto máximo de nodos de una red tal que ningún arco de la red tenga ambos extremos en el conjunto. Este problema (independent set) es NP-completo y por tanto muy difícil de resolver. Un ejemplo clásico del independent set consiste en identificar el número mínimo de colores que se requiere para pintar un mapa de modo que ningún par de países continuos quede pintado del mismo color.

Problema Propuesto

1. Suponga que la solución anterior excede el número máximo de colores deseado (por ejemplo 10). Modele un nuevo problema que asigne colores a los servicios que minimice el número de veces que un pasajero que quiere tomar una línea cualquiera, observe otra pintada del mismo color en el mismo paradero.

4.27 Empresa de Telecomunicaciones

Una empresa de telecomunicaciones debe diseñar su red de transmisión de datos. Existen un conjunto $N = \{1, \ldots.., n\}$ de nodos entre algunos de los cuales se originan flujos de datos. Específicamente, existe un conjunto de pares $D = \{(r_i, s_i), i = 1, \ldots, q\}$, donde r_i y $s_i \in$ N. Entre cada uno de estos pares se genera un requerimiento de flujo. Sea d_i la demanda por flujo, en Mb (Megabyte), que debe transmitirse entre los elementos del par i, $i = 1, \ldots, q$, desde r_i hacia s_i (en algunos casos en D puede estar un par (r, s) y también el par (s, r), indicando esto que hay requerimiento de flujo en ambos sentidos). No todos los nodos del conjunto N corresponden a puntos entre los que se generan o reciben comunicaciones, pero pueden ser utilizados como nodos "de paso". Existe un costo fijo F_{ij} si se habilita una conexión de comunicación entre los nodos i y j, con i, $j \in$ N. Igualmente, existe un costo c_{ij} por cada Mb que se transmita a través de la conexión entre el nodo i y el nodo j. La empresa no esta dispuesta a incurrir en un costo variable total de flujo superior a C pesos. También, por diseño, la conexión $i - j$, si se habilita, tendrá una capacidad total de K_{ij} Mb. Formule un modelo de programación lineal entera mixta que permita decidir cuáles conexiones deben ser habilitadas (construidas) de modo que se satisfaga la demanda por flujo de comunicaciones, no se exceda el presupuesto por costo de flujo, y que el costo total de habilitación sea mínimo.

SOLUCIÓN[84]

El problema consiste en determinar que conexiones de la red deben ser habilitadas de modo de satisfacer la demanda por flujo de comunicaciones, por eso emplearemos las siguientes variables de decisión para el modelo:

x_{ijk} = Flujo en Mb que circula entre i y j, correspondiente al par origen destino k.

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si se habilita la conexión } (i, j) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

[84] Jorge Vera, Profesor Ing. Industrial PUC

LLamaremos además:

$d_k =$ Demanda por flujo que debe transmitirse por el par k
$F_{ij} =$ Costo de habilitar la conexión entre i y j
$c_{ij} =$ Costo unitario por transmitir entre i y j
$C =$ Máximo costo variable en que está dispuesta a incurrir la empresa
$K_{ij} =$ Capacidad total de la conexión (i, j)

Ahora bien, el objetivo del problema es que el costo total de habilitación y transmición sea mínimo, considerando que se debe satisfacer la demanda por flujo de comunicaciones (restricciones (88), (89) y (90)) y no se puede superar el presupuesto de costo de la empresa (restricción (91)). El modelo debe considerar además la naturaleza de las variables y la relacion existente entre ellas, de modo que no pueda existir flujo entre i y j si la conexión (i, j) no está habilitada (restricción (92)).

De acuerdo a lo anterior se obtiene la siguiente formulación:

$$P) \quad Min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{q} x_{ijk}c_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}F_{ij}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n} x_{lik} - \sum_{j=1}^{n} x_{ijk} &= 0 && \forall i \neq r_k, s_k, \forall k && (88)\\
\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} &= d_k && i = r_k, \forall k && (89)\\
\sum_{i=1}^{n} x_{ijk} &= d_k && j = s_k, \forall k && (90)\\
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{q} x_{ijk}c_{ij} &\leq C && && (91)\\
\sum_{k=1}^{q} x_{ijk} &\leq K_{ij}y_{ij} && \forall i, j && (92)\\
x_{ijk} &\geq 0 && \forall i, j, k &&\\
y_{ij} &\in \{0, 1\} && \forall i, j &&
\end{aligned}$$

4.28 Almacenamiento de Productos en Contenedores (Bin Packing Problem)

Imagine que se tienen contenedores de volumen fijo. Se tiene además productos (indivisibles) que deben guardarse en estos contenedores (cada uno con volumen menor a la capacidad del contenedor). Encuentre el menor número de contenedores necesarios si el volumen de cada producto excede (estrictamente) un tercio de la capacidad del contenedor. Note que este problema se puede modelarse como un edge cover problem.

SOLUCIÓN

El problema consiste en agrupar los productos de manera de emplear el menor número de contenedores posible. Como cada producto excede estrictamente un tercio de la capacidad del contenedor, cada contenedor puede almacenar a lo más dos productos. Consideremos una red donde cada nodo de la red representa un producto, y sea N el conjunto de todos los nodos; llamemos A al conjunto de todos los arcos (i, j) tal que los productos i y j pueden ser almacenados en el mismo contenedor (esto incluye a todos los arcos loop (i, i) de la red). Por último, sea I_i al conjunto de arcos incidentes en el nodo i (que tienen algún extremo en el nodo).

Sea:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si escojo el arco } (i,j) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad (i,j) \in A$$

Luego el problema consiste en minimizar el número de contenedores, considerando que cada nodo debe estar asociado a sólo un arco, esto es:

$$P) \quad Min \quad \sum_{(i,j)\in A} x_{ij}$$

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\sum_{(i,j)\in I_i} x_{ij} & = & 1 & \forall i \in N \\ x_{ij} & \in & \{0,1\} & \forall (i,j) \in A \end{array}$$

Note que el problema se formuló como un *edge cover problem*, esto es un problema que consiste en escoger arcos de una red con algún criterio, de modo que todos los nodos de la red sean extremo de algún arco escogido.