考试相关

30 分填空，一共五个题目，每个题目两个空格

70 分作业题，每道题 10 分

平时作业认真看看

基本公式要背，比如三个点差分公式，simpson 公式，欧拉公式，每个章节基本公式都要。微分方程到欧拉为止，积分到组合积分，梯形，微分就三点、五点，不会七个点，多项式拟合最小二乘法、拉格朗日内插多项式、牛顿迭代、雅可比迭代、高斯-塞德尔迭代、不动点迭代、对分搜索法。

考试一定要带计算器，看清楚每个题目保留有效位数

历年卷

1、牛顿法解方程 做三次迭代 给出结果

x0 为某值能否作为初值条件 为什么

条件是 f 二阶连续，p_0 是 p 的近似值，且 $f'(p_0)\neq 0$

迭代公式为 $p_n = p_{n-1} - \dfrac{f\left(p_{n-1}\right)}{f'\left(p_{n-1}\right)}$

2、2 阶拉格朗日近似 求 a b c 给 3 个点

$$L_{n,k}(x) = \frac{\left(x-x_0\right)\cdots\left(x-x_{k-1}\right)\left(x-x_{k+1}\right)\cdots\left(x-x_n\right)}{\left(x_k-x_0\right)\cdots\left(x_k-x_{k-1}\right)\left(x_k-x_{k+1}\right)\cdots\left(x_k-x_n\right)} = \prod_{i=0,i\neq k}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

$$P(x) = f\left(x_0\right)L_{n,0}(x)+\cdots+f\left(x_n\right)L_{n,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(x_k\right)L_{n,k}(x)$$

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\cdots\left(x-x_n\right)$$

3、(15')4 个未知数的方程组

（1）高斯赛德尔方法 迭代矩阵

（2）雅可比法 迭代矩阵

（3）两种方法能否收敛？如果都收敛，哪种更快？

前者快，但是并不是所有线性系统前者都可以收敛，而后者必定收敛。

4、runge-kutta 法解方程 证明截断误差为 O(h^3)

二阶的话应该是 O(h^2)，证明太难战略性放弃

5、设计一个算法求矩阵最小的特征值和与之对应的特征根

应该是求逆矩阵然后用幂法，逆矩阵的特征值是对应矩阵特征值的倒数

6、最小二乘法 W=a t^s 给出 W t 求 a s

我没做错的话应该是取对数变成线性 所以就是线性最小二乘法

7、证明∫(-1,1)|x|f(x)dx = 1/4 * (f(-1) + 2f(0) + f(1))对于不高于 3 阶的多项式 f(x)

绝对正确

给出辛普森法则公式

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]-\frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$$

由余项易得

8、欧拉法解常微分方程 给出 h 近似一个点

$$\begin{aligned} &w_0 = \alpha(\text{给定的初值}) \\ &w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) \end{aligned}$$

9、(15')(1)推导五点中值差分 O(h^4)的式子

由拉格朗日多项式求导

$$f'(x_j) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)L_k'(x_j) + \frac{f^{(n+1)}(\xi(x_j))}{(n+1)!}\prod_{k=0,k\neq j}^{n}(x_j - x_k)$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}\left[f(x_0-2h)-8f(x_0-h)+8f(x_0+h)-f(x_0+2h)\right]+\frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi)$$

(2)用此式子求 cos(1)的导数

(3)舍入误差为 5*10^(-8)时 h=0.05 是否是误差最小的？如果不是 应该取多少？

$$\left|f'(x_0)-\frac{\tilde{f}(x_0+h)-\tilde{f}(x_0-h)}{2h}\right|=\left|\frac{e(x_0+h)-e(x_0-h)}{2h}-\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)\right|\le\frac{\epsilon}{h}+\frac{h^2}{6}M$$

由此推广五个点时误差边界为 $\frac{3\varepsilon}{2h}+\frac{h^4}{30}M$，代入舍入误差和 M 最大值得到 h

填空题

1、收敛矩阵

我们称矩阵 A 是收敛的，如果 $\lim_{k\to\infty}\left(A^k\right)_{ij}=0$

以下表达是等价的：

① A is a convergent matrix.

② $\lim_{n\to\infty}\left\|A^n\right\|=0, \textit{for some natural norm.}$

③ $\lim_{n\to\infty}\left\|A^n\right\|=0, \textit{for all natural norms.}$

④ $\rho(A)<1$

⑤ $\lim_{n\to\infty}A^n\mathbf{x}=\mathbf{0}, \textit{for every } \mathbf{x}$

2、矩阵范数

3、牛顿法迭代求根

4、数值修约规则

填空题还考了相似矩阵之间的特征值和特征向量关系

特征值相同而特征向量不同

大题

1、拉格朗日内插多项式

2、证明严格对角主导矩阵一定可逆

3、线性最小二乘法及其误差

4、欧拉方法求解微分方程

5、分别用 Jacobi 和 Gauss-seidel 求矩阵谱半径，再用 Gauss-seidel 求解方程组

6、用 Trapezoidal 和 Simpson's Rule 求积分

7、用 N（h）、N(h/3)和 N(h/9)表示 M 的 O(h^6)的近似值(Richardson's Extrapolation)

8、Cubic Spline Interpolant

1、给出初始值，函数，求牛顿迭代法三次以后的结果

2、给出四个点，函数，求拉格朗日插值多项式；计算这个多项式在某个点的值；计算这个多项式的误差界

3、给出一个线性方程组（三个未知数，三个方程），求雅克比迭代和高斯赛德迭代矩阵的谱半径；用这两种迭代解方程；比较两种迭代的收敛速度

4、用欧拉方法解微分方程，初值已给出

5、证明属于不同特征值的特征向量线性无关

6、用梯形法则和辛普森法则计算一个函数的数值积分

7、给定四组（x,y），求线性最小二乘函数

8、求五点数值微分中间点的公式；给出该公式舍入误差和截断误差之和取最小值时，h 的取值，其中已给出五次导数的界为 M

基本介绍 Basic introduction

1. 二进制浮点数

Double 类型 $(-1)^s 2^{c-1023}(1+f)$

其中小数部分二进制转换是乘以 2^-f（若 f 为二进制）

2. 十进制浮点数

截断法 Chopping：保留 k 位，剩余截断

四舍五入法 Round-off：加上 $5\times10^{n-(k+1)}$ 然后保留 k 位截断

3. 误差和有效位数 Errors and Significant Digits

绝对误差：$\left|p-p^*\right|$

相对误差：$\left|p-p^*\right|/|p|$

有效位数：保留 t 位有效数字 $\frac{\left|p-p^*\right|}{|p|}\le 5\times10^{-t}$

4. 算法

稳定性：初始值的小改变对最终结果也只产生小改变，否则不稳定。

5. 函数收敛速率（序列类似）

对两个函数 $\lim\limits_{h\to0}G(h)=0$ and $\lim\limits_{h\to0}F(h)=L$

$|F(h)-L|\le K|G(h)|,\quad$ for sufficiently small h

写作 $F(h)=L+O(G(h))$，通常 $G(h)=h^p$

单变量方程解 Solutions of Equations in One Variable

1. 寻根问题 The Root-Finding Problem

罗尔定理：f 在[a，b]上连续，且可导，如果 f 在 a，b 上的值相同，区间内一定存在一个点 c 使得 f(c)的导数为 0。

中值定理：f 在[a，b]上连续，且可导，区间内一定存在一个点 c 使得 $f^{'}(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

介值定理：f 在[a，b]上连续，K 位于 f(a)和 f(b)之间，则区间上一定存在一个点 c 使得 $f(c)=K$

寻根问题：对于形式为 $f(x)=0$ 方程的求解问题

2. 二分法 Bisection Method

取 a 和 b 的中点 p

若 f(p)与 f(a)同号，考虑[p,b]区间

若 f(p)与 f(b)同号，考虑[a,p]区间

重复以上过程直到足够近似解 x

该方法生成了序列{p_n}，并且$\left|p_n-p\right|\leq\frac{b-a}{2^n},\quad when\quad n\geq 1$

因此该序列可写为 $p_n=p+O\left(\frac{1}{2^n}\right)$，收敛速率$O\left(\frac{1}{2^n}\right)$

该方法缺点在于收敛速度慢，一个好且快速的近似结果可能会被不经意间丢弃。好处在于无论如何它总能提供一个解，因此常被用来给定用于其他更快收敛方法的初始值。

3. 不动点问题 Fixed-Point Problem

方程形式如下 $p=g(p)$，可从寻根问题建立一个不动点问题且形式不唯一

如果 g 在[a,b]上连续且 g(x)也属于[a,b]，则该闭区间上存在一个不动点。

进一步，满足以上条件情况下，如果 g 在[a,b]上可导，且导数的绝对值小于 1，则该闭区间上存在唯一一个不动点。

4. 不动点迭代 Fixed-point Iteration

构建序列$\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$， $p_n = g(p_{n-1})$

如果 g 满足在闭区间上有唯一不动点，则该序列会收敛至唯一解 p。

其收敛速率为$O(\frac{k^n}{1-k})$？，利用中值定理易得$|p_n - p| \le \frac{k^n}{1-k}|p_1 - p_0|$

4. 牛顿迭代法 Newton's Method

条件是 f 二阶连续，p_0 是 p 的近似值，且 $f'(p_0) \neq 0$

迭代公式为 $p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$

算法终止条件可以是$\begin{matrix} |p_N - p_{N-1}| < \epsilon \\ \frac{|p_N - p_{N-1}|}{p_N} < \epsilon, \quad p_N \neq 0 \\ |f(p_N)| < \epsilon \end{matrix}$，但是都给不出真实误差$|p_N - p|$

牛顿迭代法的缺点是需要求导数，而求导很困难

5. 迭代方法的误差分析

收敛阶数：如果存在正常数λ和α使得$\lim_{n\to\infty}\frac{|p_{n+1}-p|}{|p_n - p|^{\alpha}} = \lambda$，则α为收敛阶数，λ为渐近误差常数。α为 1 表示线性收敛，α为 2 表示二次收敛。

不动点迭代是线性收敛的，$\lim_{n\to\infty}\frac{p_{n+1}-p}{p_n - p} = \lim_{n\to\infty} g'(\xi_n) = g'(p)$

牛顿迭代至少是二次收敛的，$|p_{n+1} - p| < \frac{M}{2}|p_n - p|^2$，其中 M 是 g 的二阶导数在开区间内的最大值，g'(p) 假定为 0。

非线性系统解 Solutions of Nonlinear Systems

1. 矢量范数

定义在$\mathbb{R}^n$上的矢量范数是一个从$\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}$函数。

满足以下特征：

① $\|\mathbf{x}\| \geq 0 \text{for all} \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

② $\|\mathbf{x}\| = 0 \text{iff} \mathbf{x} = 0$

③ $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\| \text{ for all} \alpha \in \mathbb{R} \text{and} \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

④ $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \text{ for all} \|\mathbf{x}\|, \|\mathbf{y}\| \in \mathbb{R}^n$

L_1 范数：$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ 各元素绝对值累加和

L_2 范数：$\|\mathbf{x}\|_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right\}^{1/2}$ 各元素平方累加和的开方

L_∞ 范数：$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ 各元素绝对值最大值

2. 矢量之间的距离

假设 x 和 y 为 n 维矢量，则其 L_2 范数距离和 L_∞ 范数距离定义为

$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - y_i \right)^2 \right\}^{1/2}$ 和 $\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$

矢量序列的极限：给定 $\left\{ \mathbf{X}^{(k)} \right\}_{k=1}^{\infty}$，$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\| < \epsilon$, 对所有 $k \geq N_\epsilon$，称 $\left\{ \mathbf{X}^{(k)} \right\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛至 $\mathbf{x}$

L_∞ 范数收敛条件：当且仅当 $\lim_{k \to \infty} x_i^{(k)} = x_i$ ，L_∞ 范数下 $\left\{ \mathbf{X}^{(k)} \right\}_{k=1}^{\infty}$ 才收敛至 $\mathbf{x}$。

不等式：$\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_2 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{x}\|_\infty$，将所有式子平方易证

不等式：
$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(\mathbf{k})} - \mathbf{x}_\infty < \varepsilon \Rightarrow \mathbf{x}^{(\mathbf{k})} - \mathbf{x}_2 < \sqrt{\mathbf{n}} \varepsilon \\ \mathbf{x}^{(\mathbf{k})} - \mathbf{x}_2 < \varepsilon \Rightarrow \mathbf{x}^{(\mathbf{k})} - \mathbf{x}_\infty < \varepsilon \end{aligned}$$

3. 多变量函数不动点问题

基本与单变量的不动点问题一致 $\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{p}_\infty \leq \frac{K^k}{1-K} \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}{}_\infty$

将非线性系统的多个方程依次构造成每个变量的不动点问题，迭代即可。

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{3}\cos\left(x_2^{(k-1)}x_3^{(k-1)}\right) + \frac{1}{6}$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{9}\sqrt{\left(x_1^{(k)}\right)^2 + \sin x_3^{(k-1)} + 1.06} - 0.1$$

$$x_3^{(k)} = -\frac{1}{20}e^{-x_1^{(k)}x_2^{(k)}} - \frac{10\pi - 3}{60}$$

更快速的办法是已有的 $x_i^{(k)}$也直接代入当前第 k 次迭代要用的函数中。

4. 非线性系统的牛顿迭代法

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{X}^{(k-1)} - \mathbf{J}\left(\mathbf{x}^{(k-1)}\right)^{-1}\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(k-1)}\right)$$

其中 $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ 是雅可比矩阵 $J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$

计算中求逆很困难，通常找一个矢量 y，y 满足 $\mathbf{J}\left(\mathbf{x}^{(k-1)}\right)\mathbf{y} = -\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(k-1)}\right)$。每次迭代加上 y 即可。

5. 梯度下降技巧

对非线性系统 $\begin{array}{c} f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0 \\ f_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0 \\ \vdots \\ f_n\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0 \end{array}$ 有解则 $g\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} f_i^2\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ 存在最小值 0。

最陡下降法指的是为 g 寻找一个局部最小值。

首先代入初始值 $x^{(0)}$，根据 $x^{(0)}$得到 g 下降的方向，沿着这个方向移动合适的距离得到 $x^{(1)}$，重复步骤即可。

g 的梯度为$\nabla g(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \frac{\partial g}{\partial x_2}(\mathbf{x}), \cdots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right)^t$

公式表达为 $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} - \alpha\nabla\mathbf{g}\left(\mathbf{x}^{(k-1)}\right)$，α为步长

线性方程组解 Solutions of Linear Systems

1. 高斯消元法

矩阵 A 中的 a_{kk} 被用来消除 a_{pk}，则该元素被称为第 k 个主元素，对应的第 k 行被称为主行。

主元法可避免 a_{kk} 为 0 的情况，且可减少舍入误差。

部分主元高斯消元法指的是每次将与要作为主元的同一列的所有元素进行比较，选择其中最大的元素作为新的主元，该行作为新的主行，然后进行高斯消元法。

该方法也可能失败，例如同一列的所有备选元素都小于 1。

放缩主元高斯消元法指的是在以上方法的基础上，对每一行进行放缩，确保每一行中最大的元素相对幅值为 1。

高斯消元法的时间复杂度为 $O\left(n^3\right)$，其中消元部分为 $O\left(n^3\right)$，逆向代会求解部分为 $O\left(n^2\right)$

2. 矩阵分解法

思路如下

$$
\begin{aligned}
A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
A &= LU \\
L\mathbf{y} &= \mathbf{b} \\
U\mathbf{x} &= \mathbf{y}
\end{aligned}
$$

如果 A 能够在不进行行变换的情况下被高斯消元法解得，则一定可以分解成一个上三角矩阵 U 和一个下三角矩阵 L。其中 U 和 L 是通过高斯消元法分别自上而下消除和自下而上（最下面为主行）得到的。再求解两次线性方程组即可。

该方法前部分复杂度仍为 $O\left(n^3\right)$，但在某些情况可以降低总的复杂度。

3. 对角矩阵和严格对角矩阵

前者为 $\left|a_{ii}\right| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n}\left|a_{ij}\right|$，后者为 $\left|a_{ii}\right| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n}\left|a_{ij}\right|$

一个严格对角矩阵是非奇异的（行列式值不为 0），同时高斯消元法一定可以在不进行行变换的情况下完成。

4. 矩阵范数

与矢量范数类似需要满足以下条件

① $\| A \| \geq 0$

② $\| A \| = 0, \text{iff} A \text{is} O, \text{the matrix with all0entries}$

③ $\| \alpha A \| = | \alpha | \| A \|$

④ $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \|$

⑤ $\| AB \| \leq \| A \| \| B \|$ *

n x n 矩阵 A 和 B 的距离定义为 $\| A - B \|$

F 范数：$\| A \|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2}$ 各元素平方和开根号

p 范数：$\| A \|_p = \sup_{\mathbf{x}\neq 0} A\left(\dfrac{\mathbf{x}}{\| \mathbf{x} \|_p}\right)_p = \max_{\|\mathbf{x}\|_p = 1} \| A\mathbf{x} \|_p$

通过矢量范数定义的矩阵范数被称为自然或引导范数，形式为 $\| A \| = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \| A\mathbf{x} \|$

在自然范数下描述了该矩阵是如何相对矢量范数**拉伸**的。

简单的形式为 $\| A \|_\infty = \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty = 1} \| A\mathbf{x} \|_\infty$ 和 $\| A \|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2 = 1} \| A\mathbf{x} \|_2$

根据定义证明可得 $\| A \|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|$

5. 特征值和特征向量

$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ 对矩阵 A，存在常数λ和矢量 x 满足该方程，则常数λ为特征值，x 为特征向量。

x 矢量具有旋转不变性。(如果 x 矢量中有元素为复数，则不存在非零矢量 x 使得 Ax 平行于 x。)

特征多项式 $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ det 指行列式的值

谱半径 Spectral Radius $\rho(A) = \max |\lambda|$，其中λ为特征值，对复数特征值 $|\lambda| = \left(\alpha^2 + \beta^2\right)^{1/2}$

相关理论：

① $\|\mathbf{A}\|_2 = \left[\rho\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right)\right]^{1/2}$

② $\rho(\mathbf{A}) \le \|\mathbf{A}\|$, for any natural norm $\|.\|$

6. 收敛矩阵

我们称矩阵 A 是收敛的，如果 $\lim_{k\to\infty}\left(A^k\right)_{ij} = 0$

以下表达是等价的：

⑥ A is a convergent matrix.

⑦ $\lim_{n\to\infty}\left\|A^n\right\| = 0$, *for some natural norm.*

⑧ $\lim_{n\to\infty}\left\|A^n\right\| = 0$, *for all natural norms.*

⑨ $\rho(A) < 1$

⑩ $\lim_{n\to\infty} A^n\mathbf{x} = \mathbf{0}$, *for every* $\mathbf{x}$

7. 迭代技巧

解决 n x n 线性系统 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 问题

将该问题转换为 $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$ 形式，并利用 $\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}$ 进行迭代

8. 雅可比迭代法

$$
\begin{aligned}
E_1 &: 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\
E_2 &: -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25 \\
E_3 &: 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11 \\
E_4 &: 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1}{10}x_2^{(0)} - \frac{1}{5}x_3^{(0)} + \frac{3}{5} = 0.6000 \\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{11}x_1^{(0)} + \frac{1}{11}x_3^{(0)} - \frac{3}{11}x_4^{(0)} + \frac{25}{11} = 2.2727 \\
x_3^{(1)} &= -\frac{1}{5}x_1^{(0)} + \frac{1}{10}x_2^{(0)} + \frac{1}{10}x_4^{(0)} - \frac{11}{10} = -1.1000 \\
x_4^{(1)} &= -\frac{3}{8}x_2^{(0)} + \frac{1}{8}x_3^{(0)} + \frac{15}{8} = 1.8750
\end{aligned}
$$

9. 高斯-塞德尔迭代

$$
\begin{aligned}
10x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\
-x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25 \\
2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 &= -11 \\
3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 15
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= \frac{1}{10}x_2^{(k-1)} - \frac{1}{5}x_3^{(k-1)} + \frac{3}{5} \\
x_2^{(k)} &= \frac{1}{11}x_1^{(k)} + \frac{1}{11}x_3^{(k-1)} - \frac{3}{11}x_4^{(k-1)} + \frac{25}{11} \\
x_3^{(k)} &= -\frac{1}{5}x_1^{(k)} + \frac{1}{10}x_2^{(k)} + \frac{1}{10}x_4^{(k-1)} - \frac{11}{10} \\
x_4^{(k)} &= -\frac{3}{8}x_2^{(k)} + \frac{1}{8}x_3^{(k)} + \frac{15}{8}.
\end{aligned}
$$

高斯-塞德尔方法基本总是比雅可比迭代法优越。

但确实有线性系统对高斯-塞德尔方法不收敛，仅对雅可比迭代法收敛。

10. 一般性迭代方法

收敛问题：对于定义为 $\mathbf{x}^{(k)} = T\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}$ 的序列 $\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}_{k=0}^{\infty}$ 收敛到唯一解 $\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c}$，当且仅当 $\rho(T) < 1$

误差边界：对满足以上条件的序列，

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)} \le \| T \|^k \ \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)} \le \frac{\| T \|^k}{1 - \| T \|} \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}$$

理论：如果 A 是严格对角矩阵，则对应的雅可比迭代和高斯-塞德尔迭代法一定收敛到方程解 Ax=b。

11. 误差边界

残余向量：$\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ 为近似解，则残余向量为 $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}}$

条件数：对一个非奇异矩阵 A，其条件数为 $K(A) = \| A \| \cdot \| A^{-1} \|$

良态：条件数接近 1

变态：条件数远大于 1

任何自然范数和非奇异矩阵的条件数都大于等于 1

$1 = \| I \| = \| A \cdot A^{-1} \| \leq \| A \| \cdot \| A^{-1} \| = K(A)$

插 值 和 多 项 式 近 似 Interpolation&Polynomial Approximation

1. 魏尔斯特拉斯近似理论

f 是定义在[a,b]上的连续函数，对任意 ε 大于 0，均存在多项式$|f(x)-P(x)|<\epsilon$

2. 泰勒多项式

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$$

$$P_n(x)=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{f''\left(x_0\right)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}$$

3. 拉格朗日插值多项式

通过给定的端点，在区间内使用多项式近似称为多项式插值。

n 维拉格朗日内插多项式：

$$\begin{aligned}L_{n,k}(x)&=\frac{\left(x-x_0\right)\cdots\left(x-x_{k-1}\right)\left(x-x_{k+1}\right)\cdots\left(x-x_n\right)}{\left(x_k-x_0\right)\cdots\left(x_k-x_{k-1}\right)\left(x_k-x_{k+1}\right)\cdots\left(x_k-x_n\right)}\\&=\prod_{i=0,i\neq k}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\end{aligned}$$

$$P(x)=f\left(x_0\right)L_{n,0}(x)+\cdots+f\left(x_n\right)L_{n,n}(x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(x_k\right)L_{n,k}(x)$$

理论误差边界：

$$f(x)=P(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\cdots\left(x-x_n\right)$$

其中$\xi(x)\in(a,b)$

4. 内维尔迭代法

k 个点$x_{m_1},x_{m_2},\cdots,x_{m_k}$构造的拉格朗日多项式记为$P_{m_1,m_2,\cdots,m_k}(x)$

在 k+1 个点上插值构造的 k 阶拉日朗日多项式为

$$P(x)=\frac{\left(x-x_j\right)P_{0,1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k}(x)-\left(x-x_i\right)P_{0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k}(x)}{\left(x_i-x_j\right)}$$

例如

$$P_{0,1}=\frac{1}{x_1-x_0}\left[\left(x-x_0\right)P_1-\left(x-x_1\right)P_0\right]$$

$$P_{1,2}=\frac{1}{x_2-x_1}\left[\left(x-x_1\right)P_2-\left(x-x_2\right)P_1\right]$$

$$P_{0,1,2}=\frac{1}{x_2-x_0}\left[\left(x-x_0\right)P_{1,2}-\left(x-x_2\right)P_{0,1}\right]$$

内维尔迭代表格如下

x_0	P_0				
x_1	P_1	$P_{0,1}$			
x_2	P_2	$P_{1,2}$	$P_{0,1,2}$		
x_3	P_3	$P_{2,3}$	$P_{1,2,3}$	$P_{0,1,2,3}$	
x_4	P_4	$P_{3,4}$	$P_{2,3,4}$	$P_{1,2,3,4}$	$P_{0,1,2,3,4}$

为方便还可引入 $Q_{i,j}=P_{i-j,i-j+1,\cdots,i-1,i.}$

x_0	$P_0=Q_{0,0}$				
x_1	$P_1=Q_{1,0}$	$P_{0,1}=Q_{1,1}$			
x_2	$P_2=Q_{2,0}$	$P_{1,2}=Q_{2,1}$	$P_{0,1,2}=Q_{2,2}$		
x_3	$P_3=Q_{3,0}$	$P_{2,3}=Q_{3,1}$	$P_{1,2,3}=Q_{3,2}$	$P_{0,1,2,3}=Q_{3,3}$	
x_4	$P_4=Q_{4,0}$	$P_{3,4}=Q_{4,1}$	$P_{2,3,4}=Q_{4,2}$	$P_{1,2,3,4}=Q_{4,3}$	$P_{0,\ldots,4}=Q_{4,4}$

其中 P0，P1，P2，P3，P4 就是函数值 f(x0), f(x1), f(x2), f(x3), f(x4)

由于计算时有位数限制，所以得到的绝对误差可能会超过拉日朗日多项式的理论误差边界。

5. 牛顿均差内插多项式

前向差分：$\Delta p_n=p_{n+1}-p_n$，$\Delta^k p_n=\Delta\left(\Delta^{k-1}p_n\right),\quad for\quad k\geq 2$

零阶差分：记作 $f\left[x_i\right]$，代表的就是函数值 $f\left[x_i\right]=f\left(x_i\right)$

一阶差分：记作 $f\left[x_i,x_{i+1}\right]=\frac{f\left[x_{i+1}\right]-f\left[x_i\right]}{x_{i+1}-x_i}$

二阶差分：记作 $f\left[x_i,x_{i+1},x_{i+2}\right]=\dfrac{f\left[x_{i+1},x_{i+2}\right]-f\left[x_i,x_{i+1}\right]}{x_{i+2}-x_i}$

n 阶差分：记作 $f\left[x_0,x_1,\cdots,x_n\right]=\dfrac{f\left[x_1,x_2,\cdots,x_n\right]-f\left[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1}\right]}{x_n-x_0}$

因此，插值多项式为

$$P_n(x)=f\left[x_0\right]+f\left[x_0,x_1\right]\left(x-x_0\right)+a_2\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)+\cdots+a_n\left(x-x_0\right)\left(x-x_1\right)\cdots\left(x-x_{n-1}\right)$$

$$a_k=f\left[x_0,x_1,x_2,\cdots,x_k\right]$$

6. 分段多项式近似 Piecewise-linear interpolation

最常见的方法是三次样条曲线插值，它包含四个常数，可以保证不仅在区间内连续，也可以保证二次导数连续。

自然边界条件为 $S''\left(x_0\right)=S''\left(x_n\right)=0$

夹逼边界条件为 $S'\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)$和$S'\left(x_n\right)=f'\left(x_n\right)$

构造三次样条曲线的方法，非近似某个特定函数：

① 根据区间构造三次样条曲线多项式

例如在区间[1,2]上则构造为 $S_0(x)=a_0+b_0(x-1)+c_0(x-1)^2+d_0(x-1)^3$

在区间[2,3]上则构造为 $S_1(x)=a_1+b_1(x-2)+c_1(x-2)^2+d_1(x-2)^3$

② 代入函数值

③ 利用一阶导数和二阶导数在两个相邻区间的连续条件 $S_0'(2)=S_1'(2)$ 和 $S_0''(2)=S_1''(2)$

④ 利用自然边界条件或夹逼边界条件

自然三次样条曲线插值的存在性：如果 f 定义在 a=x0<x1<…<xn=b 上，那么 f 就有唯一的自然样条曲线 S，在 x0,x1,…,xn。

夹逼三次样条曲线插值的存在性：如果 f 定义在 a=x0<x1<…<xn=b 上，且在 a 和 b 点均可微，则 f 就有唯一的夹逼三次样条曲线 S，在 x0,x1,…,xn。

近似理论 Approximation Theory

1. 线性最小二乘法

线性最小二乘法即用一个线性函数 $y = a_1 x + a_0$ 来拟合多个数据点

要求每个数据点与该函数值差的平方和最小

即 $E_2\left(a_0, a_1\right) = \sum_{i=1}^{10}\left[y_i - \left(a_1 x_i + a_0\right)\right]^2$ 最小

$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0,$ 和 $\frac{\partial E}{\partial a_1} = 0$ 即可求得系数 a_0, a_1

2. 多项式最小二乘法

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

数值微分 Numerical Differentiation

1. 数值微分介绍

利用一阶拉日朗日多项式，可得到

$$f'\left(x_0\right) = \frac{f\left(x_0 + h\right) - f\left(x_0\right)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi)$$

这个公式可以近似 $f'\left(x_0\right)$，但带有边界为 $\frac{h}{2}\max|f''(\xi)|$ 的误差

当 h 大于 0 则为前向微分，当 h 小于 0 则为后向微分

2. 一般性导数近似公式

n+1 点导数近似公式：

$$f'\left(x_j\right) = \sum_{k=0}^{n} f\left(x_k\right) L_k'\left(x_j\right) + \frac{f^{(n+1)}\left(\xi\left(x_j\right)\right)}{(n+1)!} \prod_{k=0, k \neq j}^{n}\left(x_j - x_k\right)$$

一般使用三点或五点估计即可。

3. 三点公式

$$f'(x_j)=f(x_0)\left[\frac{2x_j-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\right]+f(x_1)\left[\frac{2x_j-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\right]$$
$$+f(x_2)\left[\frac{2x_j-x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\right]+\frac{1}{6}f^{(3)}(\xi(x_j))\prod_{k=0,k\neq j}^{2}(x_j-x_k)$$

假设三个点间距一致且均为 h

可得到起始点，中间点和终点的三个近似公式

$$f'(x_0)=\frac{1}{h}\left[-\frac{3}{2}f(x_0)+2f(x_0+h)-\frac{1}{2}f(x_0+2h)\right]+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_0)$$
$$f'(x_0+h)=\frac{1}{h}\left[-\frac{1}{2}f(x_0)+\frac{1}{2}f(x_0+2h)\right]-\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)$$
$$f'(x_0+2h)=\frac{1}{h}\left[\frac{1}{2}f(x_0)-2f(x_0+h)+\frac{3}{2}f(x_0+2h)\right]+\frac{h^2}{3}f^{(3)}(\xi_2)$$

其中中点公式误差边界最小，经常使用

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}\left[-f(x_0-h)+f(x_0+h)\right]-\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi_1)$$

其中 $\xi_1\in[x_0-h,x_0+h]$

4. 五点公式

五个点的中间点公式如下

$$f'(x_0)=\frac{1}{12h}\left[f(x_0-2h)-8f(x_0-h)+8f(x_0+h)-f(x_0+2h)\right]+\frac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi)$$

其中 $\xi_1\in[x_0-2h,x_0+2h]$

5. 高阶导数的数值近似

$$f''(x_0)=\frac{1}{h^2}\left[f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)\right]-\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)$$

其中 $\xi\in\left[x_0-h,x_0+h\right]$

6. 舍入误差不稳定性

$$\left|f'\left(x_0\right)-\frac{\tilde{f}\left(x_0+h\right)-\tilde{f}\left(x_0-h\right)}{2h}\right|=\left|\frac{e\left(x_0+h\right)-e\left(x_0-h\right)}{2h}-\frac{h^2}{6}f^{(3)}\left(\xi_1\right)\right|\leq\frac{\epsilon}{h}+\frac{h^2}{6}M$$

其中 ε 是单个点函数值误差$e\left(x_0\pm h\right)$的边界，M 为 f 三阶导数的边界

误差最小值存在于$h=\sqrt[3]{3\epsilon/M}$

差分近似是不稳定的，因为小的 h 会减小截断误差但却会增加舍入误差。

7. 理查森外推

$$M=N_1(h)+K_1h+K_2h^2+K_3h^3+\cdots$$

一个估计 M 的外推公式如上，N1(h)为 h 的函数用来近似 M，其余项为截断误差

通过代入 h 和 h/2 可以得到

$$M=N_1(h)+K_1h+K_2h^2+K_3h^3+\cdots$$
$$M=N_1\left(\frac{h}{2}\right)+K_1\frac{h}{2}+K_2\frac{h^2}{4}+K_3\frac{h^3}{8}+\cdots$$

后者乘以 2 相减得到

$$M=N_2(h)-\frac{K_2}{2}h^2-\frac{3K_3}{4}h^3-\cdots$$

$$N_2(h)=N_1\left(\frac{h}{2}\right)+\left[N_1\left(\frac{h}{2}\right)-N_1(h)\right]$$

截断误差变为 O(h^2)

同理可以外推出 O(h^n)的截断误差，依次消除低阶项即可，类似高斯消元法。

该方法显然适合前向差分公式$f'\left(x_0\right)=\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}-\frac{h}{2}f''(\xi)$

通过两个点 h 和 h/2 和公式$N_2(h)=N_1\left(\frac{h}{2}\right)+\left[N_1\left(\frac{h}{2}\right)-N_1(h)\right]$可得到截断误差为 O($h^2$)

的结果

数值积分 Numerical Integration

1. 数值积分

利用拉格朗日多项式，积分公式近似为

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f\left(x_i\right)$$

其中 $a_i = \int_a^b L_i(x)dx$

误差为 $E(f) = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^b \prod_{i=0}^{n}\left(x-x_i\right) f^{(n+1)}(\xi(x))dx$

2. 梯形法则 Trapezoidal Rule

梯形法则即二点数值积分

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\frac{\left(x-x_1\right)^2}{2\left(x_0-x_1\right)} f\left(x_0\right) + \frac{\left(x-x_0\right)^2}{2\left(x_1-x_0\right)} f\left(x_1\right)\right]_{x_0}^{x_1} - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

$$= \frac{\left(x_1-x_0\right)}{2}\left[f\left(x_0\right)+f\left(x_1\right)\right] - \frac{h^3}{12} f''(\xi)$$

上底加下底乘以高除以二，截断误差 $O(h^3)$

3. 辛普森法则 Simpson’s Rule

辛普森法则即三点数值积分，多加了一个中点

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f\left(x_0\right)+4f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)\right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi)$$

其中 $h=(b-a)/2$

辛普森法则是比梯形法则更优越的，它对于任何最高次不超过三次方的函数均没有误差，而梯形法则仅对任何线性函数没有误差。

精度：求积公式的准确度或精密度是最大的正整数 n，此时公式对于 x^n 是精确的。因此辛普森法则的精确度是三，梯形法则的精确度是一。

4. 组合数值积分 Composite Numerical Integration

将一个区间分成多个等间距子区间，分别使用辛普森法则或梯形法则

对于辛普森法则

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{j=1}^{n/2}\left\{\frac{h}{3}\left[f\left(x_{2j-2}\right)+4f\left(x_{2j-1}\right)+f\left(x_{2j}\right)\right]-\frac{h^5}{90}f^{(4)}\left(\xi_j\right)\right\}$$

其中 $h=(b-a)/n$， $x_j = a + jh$

误差项为 $E(f) = -\frac{h^5}{90}\sum_{j=1}^{n/2} f^{(4)}\left(\xi_j\right) = -\frac{h^5}{180} nf^{(4)}(\mu) = -\frac{(b-a)}{180}h^4 f^{(4)}(\mu)$

对于梯形法则

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{j=1}^{n-1} f\left(x_j\right)+f(b)\right]-\frac{b-a}{12}h^2 f''(\mu)$$

5. 舍入误差稳定性

使用组合法则得到的舍入误差并不受到计算区间数目的影响

$$f\left(x_i\right) = \tilde{f}\left(x_i\right)+e_i$$
$$e(h) \le \frac{h}{3}[\varepsilon + 2(n/2-1)\varepsilon + 4(n/2)\varepsilon + \varepsilon] = nh\varepsilon = (b-a)\varepsilon$$

6. 龙贝格积分 Romberg Integration

将理查森外推应用到组合梯形积分中

将区间数 n=1，2，4，8，16…得到的组合梯形积分结果标为 $R_{1,1}, R_{2,1}, R_{3,1}$

外推一次得到 O(h^4)的近似值标记为 $R_{2,2}, R_{3,2}, R_{4,2}$

$$R_{k,2} = R_{k,1} + \frac{1}{3}\left(R_{k,1} - R_{k-1,1}\right)$$

外推两次得到 O(h^6)的近似值标记为 $R_{3,3}, R_{4,3}, R_{5,3}$

$$R_{k,3} = R_{k,2} + \frac{1}{15}\left(R_{k,2} - R_{k-1,2}\right)$$

外推 j-1 次得到 O(h^{2j})的近似值为

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{1}{4^{j-1}-1}\left(R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}\right)$$

微分方程解 Solution of Differential Equations

1. 常微分方程初值问题

形式如 $\frac{dy}{dt}=f(t,y),\quad for\quad a\le t\le b$，给定初值 $y(a)=\alpha$

Lipschitz 条件：如果存在常数 L，无论任何 y1 和 y2，均满足 $\left|f\left(t,y_1\right)-f\left(t,y_2\right)\right|\le L\left|y_1-y_2\right|$

则称为 Lipschitz 连续

充分条件：如果 f(t,y)定义在一个凸集上，只要存在常数 L 对任意 t,y 满足 $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)\right|\le L$，则

该函数是 Lipschitz 连续的。

存在性和唯一性：如果 f 满足 Lipschitz 条件，那么该常微分初值问题存在唯一解。

良态问题定义：该常微分初值方程如果具有唯一解，且该解与真实解误差为线性则称为良态问题。至于后者可用 $\frac{dz}{dt}=z-t^2+1+\delta,\quad 0\le t\le 2,\quad z(0)=0.5+\delta_0$ 类似办法证明，z 为近似解，δ和δ0 均为误差常数。

良态问题理论：如果 f 是连续的，且满足 Lipschitz 条件，则它是良态的。

2. 欧拉公式

根据泰勒公式展开，设有 N+1 个等间隔区间，步长 $h=(b-a)/N$，每个点表示为 $t_i=a+ih$

则 $y\left(t_{i+1}\right)=y\left(t_i\right)+hf\left(t_i,y\left(t_i\right)\right)+\frac{h^2}{2}y''\left(\xi_i\right)$

忽略余项得到最终迭代公式

$$w_0=\alpha(\text{给定的初值})$$
$$w_{i+1}=w_i+hf\left(t_i,w_i\right)$$

误差边界为 $\left|y\left(t_i\right)-w_i\right|\le\frac{hM}{2L}\left[e^{L\left(t_i-a\right)}-1\right]$

考虑舍入误差，$\left|y\left(t_i\right)-u_i\right|\le\frac{1}{L}\left(\frac{hM}{2}+\frac{\delta}{h}\right)\left[e^{L\left(t_i-a\right)}-1\right]+\left|\delta_0\right|e^{L\left(t_i-a\right)}$

此时误差上界变成非线性的，并且当 h 接近 0 时达到无穷大。

欧拉公式的误差会随着迭代逐渐放大。

3. 局部截断误差

因为不知道真实值，我们把这一次迭代的结果与上一次迭代的结果作差除以步长 h 得到局部截断误差。

$$\tau_{i+1}(h)=\frac{y_{i+1}-\left(y_i+h\phi\left(t_i,y_i\right)\right)}{h}=\frac{y_{i+1}-y_i}{h}-\phi\left(t_i,y_i\right)$$

对欧拉公式来说，局部截断误差为

$\tau_{i+1}(h)=\frac{h}{2}y''\left(\xi_i\right)$，O(h)

4. 高阶泰勒公式

略

n 阶公式则局部阶段误差为 $O(h^n)$

5. 龙格-库塔法 Runge-Kutta Methods

使用二变量泰勒展开

中点法如下

$$w_0=\alpha$$
$$w_{i+1}=w_i+hf\left(t_i+\frac{h}{2},w_i+\frac{h}{2}f\left(t_i,w_i\right)\right)$$

Runge-Kutta 四阶公式

$$w_0=\alpha$$
$$k_1=hf\left(t_i,w_i\right)$$
$$k_2=hf\left(t_i+\frac{h}{2},w_i+\frac{1}{2}k_1\right)$$
$$k_3=hf\left(t_i+\frac{h}{2},w_i+\frac{1}{2}k_2\right)$$
$$k_4=hf\left(t_{i+1},w_i+k_3\right)$$
$$w_{i+1}=w_i+\frac{1}{6}\left(k_1+2k_2+2k_3+k_4\right)$$