Gegeben seien die Kurse einer Aktie:

$$r_1(t)=\{1,\frac{3}{2},2\}$$

Die (tägliche) Rendite ermittelt sich aus

$$ror(t_n)=\frac{r_1(t_n)-r_1(t_{n-1})}{r_1(t_{n-1})}$$

Aus den Kursen ergeben sich die Renditen:

$$ror_1(tn)=\frac{\frac{3}{2}-1}{1}=\frac{1}{2}$$ und

$$ror_1(tn+1)=\frac{2-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}$$

bzw. als Zeitreihe:

$$ror_1(t)=\{\frac{1}{2},\frac{1}{3}\}$$

Der Mittelwert ergibt ich allgemein als:

$$\bar{R}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}R_i$$

$$R\bar{O}R_1=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})=\frac{1}{2}(\frac{3}{6}+\frac{2}{6})=\frac{5}{12}$$

Für die Standardabweichung S bzw. deren Quadrat die Stichprobenvarianz V gilt allgemein:

$$V=S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(R_i-\bar{R})^2$$

für die Reihe der Renditen ergibt sich die Varianz:

$$S^2=\frac{1}{2}[(\frac{1}{2}-\frac{5}{12})^2+(\frac{1}{3}-\frac{5}{12})^2]=(\frac{1}{12})^2=\frac{1}{144}$$

Gegeben seien die Kurse einer 2. Aktie

$$r_2(t)=\{2,\frac{3}{2},1\}$$

Die Renditen an den beiden Tagen sind dann:

$$ror_2(tn)=\frac{\frac{3}{2}-2}{2}=-(\frac{1}{4}) \quad \text{und} \quad ror_2(tn+1)=\frac{1-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}=-(\frac{1}{3})$$

bzw. als Zeitreihe für die Renditen der 2. Aktie:

$$ror_2(t)=\{-\frac{1}{4},-\frac{1}{3}\}$$

Der Mittelwert der Renditen der 2. Aktien ist damit

$$R\bar{O}R_2=\frac{1}{2}(-\frac{1}{4}-\frac{1}{3})=-\frac{7}{24}$$

Die Varianz der 2. Aktie ergibt sich zu:

$$S^2=\frac{1}{2}[(-\frac{1}{4}+\frac{7}{24})^2+(-\frac{1}{3}+\frac{7}{24})^2]=(\frac{1}{24})^2$$

Die Stichprobenkovarianz zweier Reihen ergibt sich allgemein

$$V_{i,j}=S_{i,j}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(R_i-\bar{R}_j)(R_j-\bar{R}_j) \quad \text{bzw. die Korrelation} \quad r_{i,j}=\frac{S_{i,j}^2}{S_i S_j}$$

Die Kovarianz der beiden Aktien ergibt sich so zu:

$$S_{i,j}^2=\frac{1}{2}[(\frac{1}{2}-\frac{5}{12})(-\frac{1}{4}+\frac{7}{24})+(\frac{1}{3}-\frac{5}{12})(-\frac{1}{3}+\frac{7}{24})]=\frac{1}{2}[(\frac{1}{12})(\frac{1}{24})+(-\frac{1}{12})(-\frac{1}{24})]=\frac{1}{(12)\cdot(24)}$$

und die Korrelation der beiden Aktien ist damit:

$$r_{i,j}=\frac{(\frac{1}{(12)\cdot(24)})}{(\frac{1}{\sqrt{144}})\cdot(\frac{1}{24})}=1$$

Varianz bzw. Standardabweichung für ein Portfolio aus beiden Aktien ergeben sich zu:

$$V_p=S_p{}^2=\sum_{i=1}^{n}W_i^2\cdot S_i^2+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}W_i W_j S_{i,j} \quad \text{mit W als Gewichtung der Aktien}$$

sei die Gewichtung für die beiden Aktien:

$$W_i=\{\frac{1}{3},\frac{2}{3}\}$$

Dann ergibt sich die Varianz des Portfolios aus beiden zu:

$$V_p=S_p{}^2=[(\frac{1}{9})(\frac{1}{144})+(\frac{4}{9})(\frac{1}{(24\cdot 24)})]+2[(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})(\frac{1}{12\cdot 24})]=\frac{1}{(9)\cdot(36)}$$

***<u>Achtung:</u>* Das Minimum der Varianz sagt nichts über die Rendite aus, dauerhafte konstante Verluste bei minimaler Varianz sind kein wirtschaftlich erstrebenswerter Zustand! Im Beispiel verursacht Aktie 2 Verluste. Eine solche Auswahl wäre generell unsinnig und dient hier nur zu Rechenzwecken.**

Das Minimum der Varianz des Portfolios wird angestrebt, gesucht wird die Gewichtung der Aktien, für die dieses erreicht wird. Lokale Minima und Maxima einer Funktion von mehreren Variablen sind möglich wenn die partiellen Ableitungen nach allen Variablen verschwinden.

$$\frac{\partial V_p}{\partial W_i}!=0=min(V_p(W_i))$$

In unserem Fall der Risikominimierung ergibt sich zusätzlich die Nebenbedingung:

$$g=\sum_{i=1}^{n} W_i=1$$

Damit lässt sich die Lagrange Funktion für die Optimierungsaufgabe aufstellen:

$L_p(W_i, \lambda)=V_p+\lambda g(W_i)$ Notwendiges Kriterium für ein Minimum oder Maximum ist:

$$\frac{\partial L_p}{\partial W_i}!=0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial L_p}{\partial \lambda}!=0$$

Die partiellen linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung lösen sich durch das nachstehende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
&2W_1S_1^2+2W_2S_{1,2}+2W_3S_{1,3}+\ldots+\lambda=0\\
&2W_1S_{2,1}+2W_2S_2^2+2W_3S_{2,3}+\ldots+\lambda=0\\
&2W_1S_{3,1}+2W_2S_{3,2}+2W_3S_3^2+\ldots+\lambda=0
\end{aligned}$$

...

$$W_1+W_2+W_3\ldots-\lambda=0$$

bzw. in Matrizen-Schreibweise:

$$\begin{matrix} S_1^2 & S_{1,2} & S_{1,3} & \ldots & 1 \\ S_{2,1} & S_2^2 & S_{2,3} & \ldots & 1 \\ S_{3,1} & S_{3,3} & S_3^2 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \end{matrix} * \begin{matrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \ldots \\ \lambda \end{matrix} = \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{matrix}$$

Die Lösung des Gleichungssystem ist mittels einfacher Verfahren wie z.B Gauß-Jordan-Algorithmus oder Bibliotheken für lineare Algebra wie z.B. JaMa einfach möglich.

Parameter der Matrix sind Varianzen und Kovarianzen. Zu obigem mathematischen Modell zur Risiko-Optimierung eines Aktien-Portfolios ist anzumerken:

Für die Kovarianzen sollte gelten

$$S_{i,j}=S_{j,i}$$

Dies wird dann nicht mehr zwingend gegeben sein, wenn die Handelstage der Zeitreihen der Aktie ungleich sind (z.B aus DAX und DOW). Die Abweichungen werden aber sicherlich vernachlässigbar sein, ob man dann $S_{i,j} \, oder \, S_{j,i}$ heranzieht ist zufällig.

Die Lösung der Matrix ist rein formal ein notwendiges, aber kein hinreichendes Kriterium für ein Minimum. Nachteil der Lagrange Methode ist, das die Bestimmung ob tatsächlich ein Minimum gegeben ist, nicht mehr einfach über die Hesse Matrix (als Analogon zur zweiten Ableitung einer Funktion) gehandhabt werden kann. Es wird davon ausgegangen, das diese Typen von Funktionsgraphen immer (nur) den MVP-Punkt (Minimum-Varianz-Portfolio) besitzen. Es gibt also neben diesem weder Sattelpunkte noch Maxima.

Der MVP Punkt wird mathematisch ermittelt und liefert den Gewichtsvektor der Aktien. Die Zusammenstellung, welche Aktien ins Portfolio kommen erfolgt manuell, auf Basis der Varianz der Aktien, deren Rendite und deren Dividenden, d.h. ebenfalls nach Kriterien die sich aus den Zeitreihen direkt ergeben. Diese Auswahl wird immer auch die Anlagestrategie implizieren. Diese muss nicht zwingend auch Risiko eliminierend sein. Sie kann genauso gut auch Profit orientiert ausgerichtet sein. Verlustbehaftete Papiere wird man ausschließen (zumindest wenn man nicht mit negativen Gewichten, d.h. Optionen arbeitet).

Das System schließt Leerverkäufe nicht aus. In diesem Fall sind die Gewichte dann < 0, d.h. negativ. Will man diese nicht realisieren (was vermutlich immer der Fall sein wird), so muss man diese Aktien aus dem Portfolio löschen und die Gewichte erneut berechnen lassen. Mindestgebühren (z.B. 1% bzw. mindestens 35 Euro) machen zu kleine Gewichte auch ineffizient, so dass man auch diese manuell entfernen wird.

Rate of Return des Portfolios:

geg. Portfolio mit 2 Aktion (mit den Anfangs und Endkursen) mit $W_i = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$

1. x_1 = 20 Euro und x_2 = 25 Euro Wechselkurs
2. y_1 = 30 US$ und y_2 = 40 US$ Wechselkurs EUR/US$ → $exr(t_1)=1.2$ bzw. $exr(t_2)=1.125$

$$ror = \frac{((x_2 * w_1 + y_2 * w_2 * exr(t_2)) - (x_1 * w_1 + y_1 * w_2 * exr(t_1)))}{((x_1 * w_1 + y_1 * w_2 * exr(t_1)))} = \frac{(falsch - richtig)}{richtig}$$

$$richtig = 20 * (\frac{1}{3}) + 30 (\frac{2}{3}) * (\frac{5}{6}) = (\frac{20}{3}) + (\frac{50}{3}) = \frac{70}{3} = 23\frac{1}{3}$$

$$falsch = 25 * (\frac{1}{3}) + 40 (\frac{2}{3}) * (\frac{8}{9}) = (\frac{25}{3}) + (\frac{640}{27}) = \frac{825}{27}$$

$$ror = \frac{((\frac{865}{27}) - (\frac{70}{3}))}{(\frac{70}{3})} = \frac{((\frac{865}{27}) - (\frac{630}{27}))}{(\frac{70}{3})} = \frac{(235 * 3)}{(27 * 70)} = \frac{235}{(70 * 9)} = \frac{47}{(14 * 9)}$$

M.Q.