

Gegeben seien die Kurse einer Aktie:

$$r_1(t) = \{1, \frac{3}{2}, 2\}$$

Die (tägliche) Rendite ermittelt sich aus

$$rof(t_n) = \frac{r_1(t_n) - r_1(t_{n-1})}{r_1(t_{n-1})}$$

Aus den Kursen ergeben sich die Renditen:

$$rof_1(tn) = \frac{\frac{3}{2} - 1}{1} = \frac{1}{2} \quad \text{und}$$

$$rof_1(tn+1) = \frac{2 - \frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

bzw. als Zeitreihe:

$$rof_1(t) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$$

Der Mittelwert ergibt sich allgemein als:

$$\bar{R}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i$$

$$R\bar{O}F_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{6} + \frac{2}{6} \right) = \frac{5}{12}$$

Für die Standardabweichung S bzw. deren Quadrat die Stichprobenvarianz V gilt allgemein:

$$V = S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2$$

für die Reihe der Renditen ergibt sich die Varianz:

$$S^2 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{5}{12} \right)^2 + \left( \frac{1}{3} - \frac{5}{12} \right)^2 \right] = \left( \frac{1}{12} \right)^2 = \frac{1}{144}$$

Gegeben seien die Kurse einer 2. Aktie

$$r_2(t) = \{2, \frac{3}{2}, 1\}$$

Die Renditen an den beiden Tagen sind dann:

$$rof_2(tn) = \frac{\frac{3}{2} - 2}{2} = -\left(\frac{1}{4}\right) \quad \text{und} \quad rof_2(tn+1) = \frac{1 - \frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = -\left(\frac{1}{3}\right)$$

bzw. als Zeitreihe für die Renditen der 2. Aktie:

$$rof_2(t) = \left\{-\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}\right\}$$

Der Mittelwert der Renditen der 2. Aktien ist damit

$$R\bar{O}F_2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{7}{24}$$

Die Varianz der 2. Aktie ergibt sich zu:

$$S^2 = \frac{1}{2} \left[ \left(-\frac{1}{4} + \frac{7}{24}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} + \frac{7}{24}\right)^2 \right] = \left(\frac{1}{24}\right)^2$$

Die Stichprobenkovarianz zweier Reihen ergibt sich allgemein

$$V_{i,j} = S_{i,j}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R}_j)(R_j - \bar{R}_j) \quad \text{bzw. die Korrelation} \quad r_{i,j} = \frac{S_{i,j}^2}{S_i S_j}$$

Die Kovarianz der beiden Aktien ergibt sich so zu:

$$S_{i,j}^2 = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{12}\right) \left(-\frac{1}{4} + \frac{7}{24}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{12}\right) \left(-\frac{1}{3} + \frac{7}{24}\right) \right] = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{1}{12}\right) \left(\frac{1}{24}\right) + \left(-\frac{1}{12}\right) \left(-\frac{1}{24}\right) \right] = \frac{1}{(12) \cdot (24)}$$

und die Korrelation der beiden Aktien ist damit:

$$r_{i,j} = \frac{\left(\frac{1}{(12) \cdot (24)}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{144}}\right) \cdot \left(\frac{1}{24}\right)} = 1$$