Gegeben seien die Kurse einer Aktie:

$$r_1(t)=\{1,\frac{3}{2},2\}$$

Die (tägliche) Rendite ermittelt sich aus

$$rof(t_n)=\frac{r_1(t_n)-r_1(t_{n-1})}{r_1(t_{n-1})}$$

Aus den Kursen ergeben sich die Renditen:

$$rof_1(tn)=\frac{\frac{3}{2}-1}{1}=\frac{1}{2} \quad \text{und}$$

$$rof_1(t\,n+1)=\frac{2-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}$$

bzw. als Zeitreihe:

$$rof_1(t)=\{\frac{1}{2},\frac{1}{3}\}$$

Der Mittelwert ergibt ich allgemein als:

$$\bar{R}_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}R_i$$

$$R\bar{O}F_1=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})=\frac{1}{2}(\frac{3}{6}+\frac{2}{6})=\frac{5}{12}$$

Für die Standardabweichung S bzw. deren Quadrat die Stichprobenvarianz V gilt allgemein:

$$V=S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(R_i-\bar{R})^2$$

für die Reihe der Renditen ergibt sich die Varianz:

$$S^2=\frac{1}{2}[(\frac{1}{2}-\frac{5}{12})^2+(\frac{1}{3}-\frac{5}{12})^2]=(\frac{1}{12})^2=\frac{1}{144}$$

Gegeben seien die Kurse einer 2. Aktie

$$r_2(t)=\{2,\frac{3}{2},1\}$$

Die Renditen an den beiden Tagen sind dann:

$$rof_2(tn)=\frac{\frac{3}{2}-2}{2}=-(\frac{1}{4}) \quad \text{und} \quad rof_2(tn+1)=\frac{1-\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}=-(\frac{1}{3})$$

bzw. als Zeitreihe für die Renditen der 2. Aktie:

$$rof_2(t)=\{-\frac{1}{4},-\frac{1}{3}\}$$

Der Mittelwert der Renditen der 2. Aktien ist damit

$$R\bar{O}F_2=\frac{1}{2}(-\frac{1}{4}-\frac{1}{3})=-\frac{7}{24}$$

Die Varianz der 2. Aktie ergibt sich zu:

$$S^2=\frac{1}{2}[(-\frac{1}{4}+\frac{7}{24})^2+(-\frac{1}{3}+\frac{7}{24})^2]=(\frac{1}{24})^2$$

Die Stichprobenkovarianz zweier Reihen ergibt sich allgemein

$$V_{i,j}=S_{i,j}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(R_i-\bar{R}_i)(R_j-\bar{R}_j) \quad \text{bzw. die Korrelation} \quad r_{i,j}=\frac{S_{i,j}^2}{S_i S_j}$$

Die Kovarianz der beiden Aktien ergibt sich so zu:

$$S_{i,j}^2=\frac{1}{2}[(\frac{1}{2}-\frac{5}{12})(-\frac{1}{4}+\frac{7}{24})+(\frac{1}{3}-\frac{5}{12})(-\frac{1}{3}+\frac{7}{24})]=\frac{1}{2}[(\frac{1}{12})(\frac{1}{24})+(-\frac{1}{12})(-\frac{1}{24})]=\frac{1}{(12)\cdot(24)}$$

und die Korrelation der beiden Aktien ist damit:

$$r_{i,j}=\frac{(\frac{1}{(12)\cdot(24)})}{(\frac{1}{\sqrt{144}})\cdot(\frac{1}{24})}=1$$

Varianz bzw. Standardabweichung für ein Portfolio aus beiden Aktien ergeben sich zu:

$$V_p=S_p{}^2=\sum_{i=1}^{n}W_i^2\cdot S_i^2+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}W_iW_jS_{i,j} \quad \text{mit W als Gewichtung der Aktien}$$

sei die Gewichtung für die beiden Aktien:

$$W_i=\{\frac{1}{3},\frac{2}{3}\}$$

Dann ergibt sich die Varianz des Portfolios aus beiden zu:

$$V_p = S_p{}^2 = [(\frac{1}{9})(\frac{1}{144}) + (\frac{4}{9})(\frac{1}{(24 \cdot 24)})] + 2[(\frac{1}{3})(\frac{2}{3})(\frac{1}{12 \cdot 24})] = \frac{1}{(9) \cdot (36)}$$

Das Minimum der Varianz des Portfolios wird angestrebt, gesucht wird die Gewichtung der Aktien, für die dieses erreicht wird. Das Minimum kann durch Trial and Error angenähert werden, in dem für Zufallskombinationen von W probiert wird.

$$\frac{\partial V_p}{\partial W_p} ! = 0 = min(V_p(W_i))$$