

## Расчетно-графическая работа №1

### «Преобразования координат»

#### *«Преобразование пространственных прямоугольных координат»*

Положение точек непосредственно на физической поверхности Земли или в околоземном пространстве, а также на поверхности земного эллипсоида могут определяться в различных как прямолинейных, так и криволинейных системах координат. Пространственное положение объекта на земной поверхности может задаваться 3-мя типами координат:

1. пространственные прямоугольные декартовы координаты –  $X, Y, Z$ ;
2. криволинейные эллипсоидальные геодезические координаты –  $B, L, H$ ;
3. системы плоских прямоугольных декартовых координат –  $x, y$ .

Пространственная прямоугольная система координат по положению начала системы координат является либо геоцентрической, либо топоцентрической. Также, по способу становления системы координат, она либо общеземная, либо референсная. На рисунке 1.1 изображена общеземная геоцентрическая система координат, оси которой направлены:

- Ось  $X$  – в точку пересечения плоскости экватора и исходного (нулевого меридиана);
- Ось  $Z$  – направлена в точку обычного земного полюса;
- Ось  $Y$  – завершает правостороннюю систему координат.

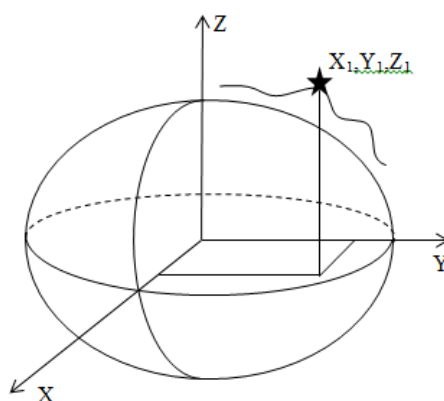


Рисунок 1.1 – Пространственная прямоугольная система координат

Преобразования пространственных прямоугольных координат осуществляется переносом центра системы координат, разворотом её осей, а также изменением масштабного коэффициента. Данный метод

преобразования называется «Преобразованием координат по Гельмерту», а также 7-параметрическим преобразованием, или Евклидовым преобразованием подобия. Связь двух прямоугольных систем координат представлена на рисунке 1.2.

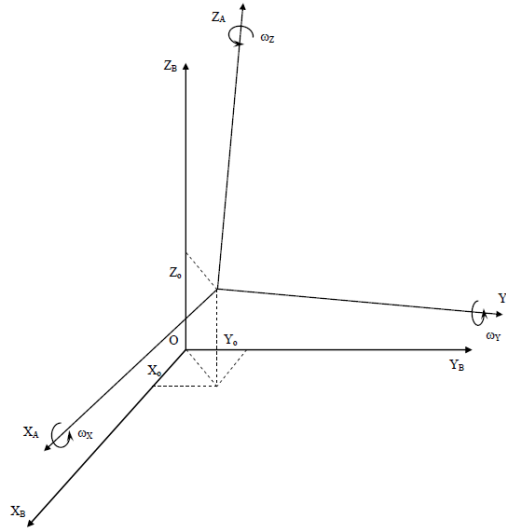


Рисунок 1.2 – Связь двух систем координат

Рассматривая переход от одной системы координат к другой, получим выражение в формульном виде [1]:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CK2} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CK1} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu & \omega_Z & -\omega_Y \\ -\omega_Z & \mu & \omega_X \\ \omega_Y & -\omega_X & \mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{CK1}, \quad (1.1)$$

где:

- $\Delta X; \Delta Y; \Delta Z$  - линейные элементы трансформирования систем координат при переходе из системы 1 в систему 2, м;
- $\omega_X; \omega_Y; \omega_Z$  - угловые элементы трансформирования систем координат при переходе из системы 1 в систему 2, рад;
- $\mu$  - масштабный элемент трансформирования систем координат при переходе из системы 1 в систему 2.

Данную формулу можем сократить до первоначального вида:

$$R_{CK2} = \Delta R + (1 + \mu) \cdot E \cdot R_{CK1}, \quad (1.2)$$

где  $E$  - матрица поворота, основанная на углах Кардано (рисунок 2.3).

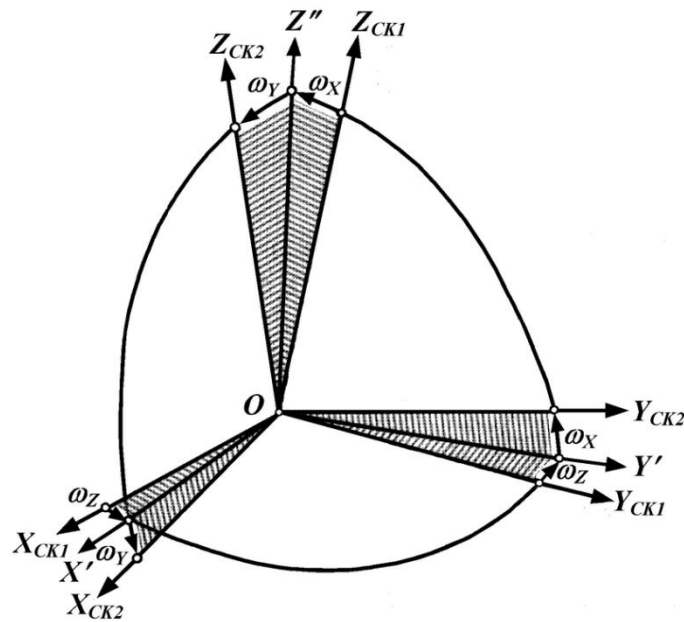


Рисунок 1.3 – Углы Кардано

Преобразования с углами Кардано,  $\omega_X; \omega_Y; \omega_Z$  образующими вектор малого вращения, производится через три последовательных вращения

$$E = R_1(\omega_X) R_2(\omega_Y) R_3(\omega_Z). \quad (1.3)$$

При повороте вокруг оси абсцисс матрица вращения имеет вид:

$$R_1(\omega_X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega_X & \sin \omega_X \\ 0 & -\sin \omega_X & \cos \omega_X \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

При повороте вокруг оси ординат матрица вращения имеет вид:

$$R_2(\omega_Y) = \begin{pmatrix} \cos \omega_Y & 0 & -\sin \omega_Y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \omega_Y & 0 & \cos \omega_Y \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

При повороте вокруг оси аппликат матрица вращения имеет вид:

$$R_3(\omega_Z) = \begin{pmatrix} \cos \omega_Z & \sin \omega_Z & 0 \\ -\sin \omega_Z & \cos \omega_Z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Перемножая матрицы последовательных переводов исходного репера базисных единичных векторов, получаем общую матрицу:

$$E = R_1(\omega_X)R_2(\omega_Y)R_3(\omega_Z) = \begin{pmatrix} \cos \omega_Y \cos \omega_Z & \cos \omega_Y \sin \omega_Z & -\sin \omega_Y \\ \sin \omega_X \sin \omega_Y \cos \omega_Z - \cos \omega_X \sin \omega_Z & \sin \omega_X \sin \omega_Y \sin \omega_Z + \cos \omega_X \cos \omega_Z & \sin \omega_X \cos \omega_Y \\ \cos \omega_X \sin \omega_Y \cos \omega_Z + \sin \omega_X \sin \omega_Z & \cos \omega_X \sin \omega_Y \sin \omega_Z - \sin \omega_X \cos \omega_Z & \cos \omega_X \cos \omega_Y \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Так как в геодезической практике углы  $\omega_X; \omega_Y; \omega_Z$  очень малы и редко превышают  $5''$  ( $2 \cdot 10^{-5}$  рад), их можно принять равными:

$$\sin \omega \approx \omega$$

$$\cos \omega \approx 1$$

$$\sin \omega * \sin \omega \approx 0.$$

А сокращённая матрица преобразования  $E$  примет вид, как в формуле 1.1:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \omega_Z & -\omega_Y \\ -\omega_Z & 1 & \omega_X \\ \omega_Y & -\omega_X & 1 \end{pmatrix}.$$

*«Преобразование пространственных прямоугольных в геодезические координаты»*

**Геодезической широтой** точки  $M$  называется угол  $B$ , образованный нормалью к поверхности эллипсоида, проходящей через данную точку, и плоскостью экватора. Широта отсчитывается от экватора к северу и югу от  $0^\circ$  до  $90^\circ$  и называется северной или южной. Северную широту считают положительной, а южную - отрицательной.

**Геодезической долготой** точки  $M$  называется двугранный угол  $L$ , образованный плоскостями начального (гринвичского) геодезического меридиана и геодезического меридиана данной точки. Долготы отсчитывают от начального меридиана в пределах от  $0^\circ$  до  $360^\circ$  на восток, или от  $0^\circ$  до  $180^\circ$  на восток (положительные) и от  $0^\circ$  до  $180^\circ$  на запад (отрицательные).

**Геодезической высотой** точки М является ее высота Н над поверхностью земного эллипсоида.

Преобразование геодезических координат в прямоугольные пространственные координаты осуществляется по формулам:

$$\begin{aligned}X &= (N + H) \cos B \cos L; \\Y &= (N + H) \cos B \sin L; \\Z &= (N(1 - e^2) + H) \sin B.\end{aligned}\tag{1.8}$$

В данных формулах:

$e$  – первый эксцентриситет меридианного эллипса, который находится из соотношения большой ( $a$ ) и малой ( $b$ ) полуосей эллипсоида:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},\tag{1.9}$$

а его квадрат также можно вычислить из следующей разницы:

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2,\tag{1.10}$$

где  $\alpha$  – сжатие эллипсоида, найденное по формуле:

$$\alpha = \frac{a - b}{a},\tag{1.11}$$

$N$  – радиус кривизны первого вертикала, отрезок нормали от поверхности эллипсоида до пересечения с осью вращения, который находится как:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} = \frac{a}{W},\tag{1.12}$$

где  $W$  – первая основная сфероидическая функция.

При обратном переходе из прямоугольных геоцентрических координат в эллипсоидальные невозможно точно вычислить значение широты  $B$ . Ее можно найти двумя способами:

### **1. Итеративный процесс.**

Последовательными приближениями находится значение широты  $B$ . Количество итераций зависит от требуемой точности.

В первом приближении широта В вычисляется по формуле:

$$B_1 = \arctg \left( \frac{Z}{Q * (1 - e^2)} \right), \quad (1.13)$$

где  $Q$  – радиус параллели:

$$Q = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (1.14)$$

Во втором и последующих приближениях широта В равна:

$$B_i = \arctg \left( \frac{Z}{Q * \left( 1 - \frac{Ne^2}{N + H} \right)} \right), \quad (1.15)$$

где геодезическая высота Н находится по формуле:

$$H = \frac{Q}{\cos(B_{i-1})} - N \quad (1.16)$$

и радиус кривизны первого вертикала N как:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 * \sin^2(B_{i-1})}}; \quad (1.17)$$

Долготу  $L$ , можно найти как:

$$L_0 = \left| \arctg \frac{Y}{X} \right| = \left| a \cos \frac{X}{Q} \right| = \left| a \sin \frac{Y}{Q} \right|, \quad (1.18)$$

Так как долгота отсчитывается до  $360^\circ$  то необходимо привести её к необходимому значению за четверть:

$$\begin{aligned} Y < 0, X > 0, \text{ то } L &= 2\pi - L_0 \\ Y < 0, X < 0, \text{ то } L &= \pi + L_0 \\ Y > 0, X < 0, \text{ то } L &= \pi - L_0 \\ Y > 0, X > 0, \text{ то } L &= L_0 \\ Y = 0, X > 0, \text{ то } L &= 0 \\ Y = 0, X < 0, \text{ то } L &= \pi. \end{aligned} \quad (1.19)$$

## 2. Метод Боуринга

Рассмотрим 2 метода Боуринга:

Можно найти геодезическую широту по формуле :

$$B = \operatorname{atg}\left(\frac{Z}{Q} * \frac{r^3 + be'^2 Z^2}{r^3 - be^2(1-e^2)p^2}\right), \quad (1.20)$$

где:  $e'$  – второй эксцентриситет получаемый по формуле:

$$e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2}, \quad (1.21)$$

$b$  – малая полуось эллипсоида; а  $r$  находится по формуле:

$$r = \sqrt{Z^2 + (X^2 + Y^2)(1-e^2)}. \quad (1.22)$$

Во втором, её можно найти используя приведенную широту.

Если между меридианным эллипсом и осью вращения эллипсоида уложить отрезок длиной  $a$ , то с плоскостью экватора образуется угол приведенной широты  $U$ . Более точно определение гласит, что приведенной широтой точки  $P_1$  называют геоцентрическую широту точки  $P'$ , являющейся проекцией точки  $P_1$  на вспомогательную сферу радиуса  $a$  нормалью к плоскости экватора – рисунок 1.3.

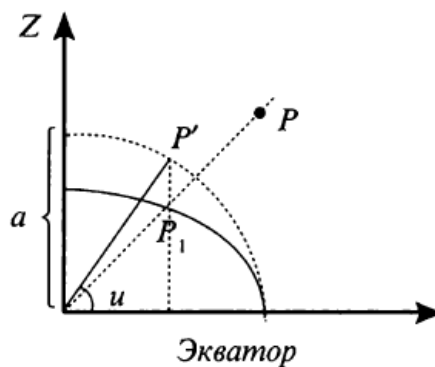


Рисунок 1.3 – Приведенная широта

Приведенную широту вычисляют по формуле:

$$U = \operatorname{atg}\left(\frac{Z}{Q\sqrt{1-e^2}}\right). \quad (1.23)$$

И далее, найдя  $U$ , найдём геодезическую широту:

$$B = \operatorname{atg}\left(\frac{Z + \frac{e^2 a \sin^3 U}{\sqrt{1-e^2}}}{Q - e^2 a \cos^3 U}\right). \quad (1.24)$$

Геодезическую высоту  $H$  можно вычислить по формулам:

$$H = \frac{Q}{\cos B} - N, \quad (1.25)$$

$$H = Q \cos B + Z \sin B - a\sqrt{(1-e^2 \sin^2 B)}. \quad (1.26)$$

#### *«Вычисление координат в системах СК-42 и СК-95»*

В России используются государственные системы координат СК-42 и СК-95, тогда как координаты векторов баз получаются из обработки GPS данных в системе WGS-84. Необходимы процедуры нахождения параметров преобразования между системами отсчета.

$$B; L; H_{WGS-84} \rightarrow X; Y; Z_{WGS-84} \rightarrow X; Y; Z_{ПЗ-90} \rightarrow \begin{matrix} X; Y; Z_{СК-42} \rightarrow B; L; H_{СК-42} \\ X; Y; Z_{СК-95} \rightarrow B; L; H_{СК-95} \end{matrix}$$

Переход от одной прямоугольной системы координат к другой при переносе начала системы и повороте осей выполняют по ранее приведённой формуле Гельмерта:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_B = (1 + m) * \begin{bmatrix} 1 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 1 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_A + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}, \quad (1.27)$$



Параметры преобразования выбираются из **ГОСТ 32453-2013** «Глобальная навигационная спутниковая система. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек»

Используются системы WGS-84 и ПЗ-90.

Согласно **ГОСТ 32453-2013** для получения плоских прямоугольных координат в принятой на территории РФ проекции Гаусса-Крюгера используют геодезические координаты на эллипсоиде Красовского.

Плоские прямоугольные координаты с погрешностью не более 0,001 м вычисляют по формулам ( $B, L, H_{СК-42, СК-95} \rightarrow x, y_{СК-42, СК-95}$ ) :

$$\begin{aligned} x = & 6367558,4968 \cdot B^{pad} - \sin 2B(16002,89 + 66,9607 \sin^2 B + 0,3515 \sin^4 B) \\ & + l^2 \sin 2B(1594561,25 + 5336,535 \sin^2 B + 26,790 \sin^4 B + 0,149 \sin^6 B) \\ & + l^4 \sin 2B(672483,4 - 811219 \sin^2 B + 5420,0 \sin^4 B - 16010 \sin^6 B) \\ & + l^8 \sin 2B(109500 - 574700 \sin^2 B + 863700 \sin^4 B - 398600 \sin^6 B); \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\begin{aligned} y = & (5 + 10 \cdot n) \cdot 10^5 + \\ & l \cos B(6378245 + 21346,1415 \sin^2 B + 107,159 \sin^4 B + 0,5977 \sin^6 B) + \\ & l^3 \cos B(1070204,16 - 2136826,66 \sin^2 B + 17,98 \sin^4 B - 11,99 \sin^6 B) + \\ & l^5 \cos B(270806 - 1523417 \sin^2 B + 1327645 \sin^4 B - 21701 \sin^6 B) + \\ & l^7 \cos B(79690 - 866190 \sin^2 B + 1730360 \sin^4 B - 945460 \sin^6 B), \end{aligned} \quad (1.29)$$

$l$  – расстояние от определяемой точки до осевого меридиана зоны, выраженное в радианной мере и вычисляемое по формуле:

$$l = \{L - [3 + 6(n-1)]\} / 57,29577951, \quad (1.30)$$

$n$  – номер шестиградусной зоны в проекции Гаусса-Крюгера, вычисляемые по формуле:

$$n = E[(6 + L) / 6], \quad (1.31)$$

$E[\dots]$  – целая часть выражения, заключенного в квадратные скобки.

Состав задания:

1. Используя пространственные прямоугольные координаты из таблицы № 1,3 и параметры преобразования из таблицы 2 получить пространственные прямоугольные координаты в системе СК2.
2. Используя пространственные прямоугольные координаты системы СК2, преобразовать их в геодезические координаты 3 методами: методом итераций и 2мя методами Боуринга. Сравнить точность полученных широт. Выполнить проверку, получив пространственные прямоугольные координаты. Использовать эллипсоид WGS-84.
3. Используя геодезические координаты, выполнить следующую цепочку преобразований

$$B; L; H_{WGS-84} \rightarrow X; Y; Z_{WGS-84} \rightarrow X; Y; Z_{ПЗ-90} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} & X; Y; Z_{СК-42} \rightarrow B; L; H_{СК-42} \rightarrow x, y_{СК42_{Гauss-Крюгера}} \\ \rightarrow & X; Y; Z_{СК-95} \rightarrow B; L; H_{СК-95} \rightarrow x, y_{СК95_{Гauss-Крюгера}} \end{aligned}$$

Параметры переходов брать из **ГОСТ 32453-2013** «Глобальная навигационная спутниковая система. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек». Использовать систему WGS-84 и ПЗ-90.

Таблица №1. Исходные координаты в системе координат СК1.

№	X(метры)	Y(метры)	Z(метры)	№	X(метры)	Y(метры)	Z(метры)
1	5477872.032	523720.607	3214357.755	31	-4983837.337	2288391.971	3246027.843
2	5364847.987	990195.794	3293681.934	32	-5138038.249	1842398.327	3288861.122
3	5185014.470	1443112.695	3411422.272	33	-5209821.824	1338550.849	3416247.449
4	4978271.271	1848809.368	3521087.804	34	-5243866.511	862943.602	3515260.711
5	4738168.458	2259033.567	3611371.081	35	-5226754.927	395418.511	3622037.183
6	4449632.297	2652078.832	3709065.291	36	-5199180.684	-43308.611	3682108.345
7	4182935.870	3015991.318	3740993.144	37	-5116898.478	-467951.707	3766377.917
8	3853495.992	3292318.222	3859361.852	38	-4975137.741	-911978.898	3872880.760
9	3490282.139	3558893.181	3966049.223	39	-4818466.571	-1343229.831	3944155.279
10	3148903.153	3807250.969	4020472.438	40	-4604952.192	-1727375.799	4047677.506
11	2745372.822	4016010.026	4111485.266	41	-4406946.791	-2079505.032	4101762.101
12	2349290.957	4190788.373	4181379.900	42	-4124823.990	-2441793.316	4193736.919
13	1956394.081	4308339.269	4262782.314	43	-3840465.740	-2757162.551	4267288.821
14	1562019.507	4375934.016	4355115.297	44	-3529485.706	-3009838.931	4363361.270

15	1147663.101	4419780.018	4438318.344	45	-3177713.321	-3264526.038	4449105.365
16	732628.458	4445412.753	4499836.076	46	-2846742.079	-3456111.842	4527301.626
17	328268.053	4393062.987	4597151.199	47	-2511260.125	-3614903.730	4600728.461
18	-19648.943	4322106.731	4674909.317	48	-2129703.812	-3719438.908	4707811.226
19	-401259.675	4213206.611	4755947.587	49	-1777263.668	-3868705.915	4733534.526
20	-744894.041	4088357.359	4822582.433	50	-1409688.785	-3913635.955	4819041.401
21	-1090583.664	3920329.150	4895241.852	51	-1010187.418	-3974915.327	4868550.000
22	-1409954.815	3726222.822	4964341.484	52	-646921.557	-3904349.109	4985359.297
23	-1672118.253	3491712.265	5052021.342	53	-311787.556	-3896937.749	5022925.064
24	-1944984.432	3267807.660	5103611.218	54	37526.759	-3811356.651	5097051.137
25	-2171479.115	3013826.064	5167699.543	55	358517.732	-3681727.113	5178751.292
26	-2350951.685	2763520.187	5228278.192	56	666112.087	-3550905.592	5238835.488
27	-2500821.200	2443724.262	5316647.062	57	925804.933	-3389646.444	5305288.619
28	-2651256.236	2161395.139	5365452.782	58	1192439.772	-3210742.539	5362743.313
29	-2724739.126	1864963.316	5438881.818	59	1457560.367	-3029639.756	5402149.153
30	-2837324.210	1596247.082	5466556.810	60	1648581.139	-2815147.076	5462481.802

Таблица №2. Параметры преобразования координат в систему координат СК2.

№	Масштабный коэффициент	Смещения			Развороты		
		dX(метр)	dY(метр)	dZ(метр)	wX(сек.)	wY(сек.)	wZ(сек.)
1	0.00000312	164.23	-128.028	-2.513	-18.459	16.148	-7.666
2	0.00000140	9.035	25.175	-205.967	30.320	-12.856	-51.269
3	0.00000091	21.41	-207.065	-88.633	-28.465	-6.998	-12.937
4	0.00000229	-19.34	-71.31	103.2	2.310	-19.106	-0.291
5	-0.00000316	-73.979	172.023	14.683	2.333	31.412	-7.305
6	0.00000178	3.447	65.159	-57.098	2.621	30.224	13.549
7	0.00000436	-170.859	102.086	-68.642	-8.494	23.126	-33.345
8	-0.00000135	-43.336	78.741	-41.244	6.038	-13.478	31.763
9	0.00000337	-65.68	98.369	-19.317	-12.521	-20.197	12.936
10	0.00000328	-40.479	62.05	41.386	-20.942	41.244	21.33
11	0.00000046	-41.787	-20.62	-69.76	34.920	10.076	-54.748
12	0.00000344	25.199	-104.116	103.513	14.806	4.866	17.519
13	-0.00000144	5.683	-28.586	72.638	14.110	28.656	-7.94
14	-0.00000081	78.647	-0.669	133.701	1.872	20.614	-10.464
15	0.00000179	159.605	99.92	222.528	7.674	6.04	26.525
16	0.00000458	-225.831	99.455	-92.436	-3.246	-6.648	19.744
17	-0.00000304	2.743	-127.354	-320.666	19.898	-7.475	-62.329
18	0.00000402	-33.038	264.459	103.435	-2.705	28.524	-14.181
19	-0.00000015	102.176	-20.558	-41.461	-8.152	-2.901	-28.75
20	-0.00000019	-30.424	131.69	-54.63	-0.331	-8.782	-21.577
21	0.00000018	-220.221	-11.096	-145.051	-27.615	-1.938	-33.593
22	0.00000211	11.689	-16.774	21.504	55.677	15.867	-31.302

23	0.00000244	62.961	-113.025	39.94	-13.913	20.585	-15.083
24	0.00000104	-163.498	-113.447	30.945	28.528	-1.025	-3.659
25	0.00000352	-75.232	-11.327	57.703	51.467	20.847	-11.658
26	0.00000053	7.408	-66.575	-33.888	20.865	-11.385	-20.337
27	0.00000239	-159.524	76.436	-44.913	-7.814	17.083	-9.955
28	0.00000287	130.498	-86.634	-160.293	-9.828	25.406	15.584
29	0.00000096	-32.626	-70.798	17.838	5.428	19.906	-14.49
30	0.00000206	12.043	149.555	113.374	-37.779	-10.558	11.805

Таблица №3. Варианты точек из таблицы 1, для каждой группы.

№	Группа №1	Группа №2	Группа №3
1	1, 10, 20	1, 60, 15	5, 55, 25
2	2, 11, 21	2, 59, 16	6, 54, 26
3	3, 12, 22	3, 58, 17	7, 53, 27
4	4, 13, 23	4, 57, 18	8, 52, 28
5	5, 14, 24	5, 56, 19	9, 51, 29
6	6, 15, 25	6, 55, 20	10, 50, 30
7	7, 16, 26	7, 54, 21	11, 49, 31
8	8, 17, 27	8, 53, 22	12, 48, 32
9	9, 18, 28	9, 52, 23	13, 47, 33
10	10, 19, 29	10, 51, 24	14, 46, 34
11	11, 20, 30	11, 50, 25	15, 45, 35
12	12, 21, 31	12, 49, 26	16, 44, 36
13	13, 22, 32	13, 48, 27	17, 43, 37
14	14, 23, 33	14, 47, 28	18, 42, 38
15	15, 24, 34	15, 46, 29	19, 41, 39
16	16, 25, 35	16, 45, 30	20, 40, 1
17	17, 26, 36	17, 44, 31	21, 39, 41
18	18, 27, 37	18, 43, 32	22, 38, 42
19	19, 28, 38	19, 42, 33	23, 37, 43
20	20, 29, 39	20, 41, 34	24, 36, 44
21	21, 30, 40	21, 40, 35	25, 35, 45
22	22, 31, 41	22, 39, 36	26, 34, 46
23	23, 32, 42	23, 38, 37	27, 33, 47
24	24, 33, 43	24, 37, 38	28, 32, 48
25	25, 34, 44	25, 36, 39	29, 31, 49
26	26, 35, 45	26, 35, 40	30, 30, 50
27	27, 36, 46	27, 34, 41	31, 29, 51
28	28, 37, 47	28, 33, 42	32, 28, 52
29	29, 38, 48	29, 32, 43	33, 27, 53
30	30, 39, 49	30, 31, 44	34, 26, 54