# Минимален покриващ кръг

## I. Постановка на задачата

Считам, че читателят е запознат на интуитивно ниво с понятия от Евклидовата геометрия като точка, окръжност, кръг, отсечка, разстояние между точки и други.

Ще използвам нотация: $C_1 \prec C_2 \overset{\text{def}}{\equiv}$ Кръгът $C_1$ е с по-малък радиус от кръга $C_2$. Аналогично за $\preccurlyeq, \succ, \succcurlyeq, \asymp$ .

Кръг $C$ наричаме *покриващ* за крайно множество от точки $V$, ако $\forall v \in V: v \in C$.

**Условие на задачата:**

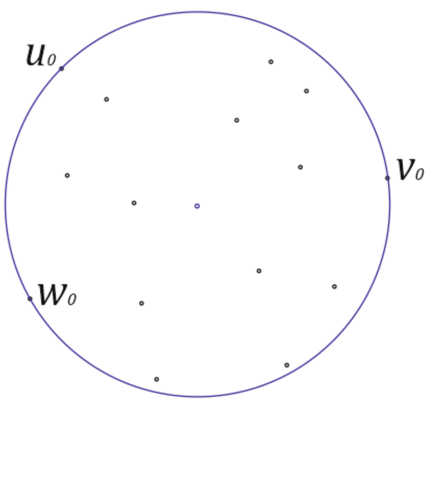
За дадено крайно множество от поне 2 точки в Евклидовата равнина, се търси покриващ кръг с най-малък радиус (минимален покриващ кръг или МПК).

**Твърдение:** *(без доказателство)*

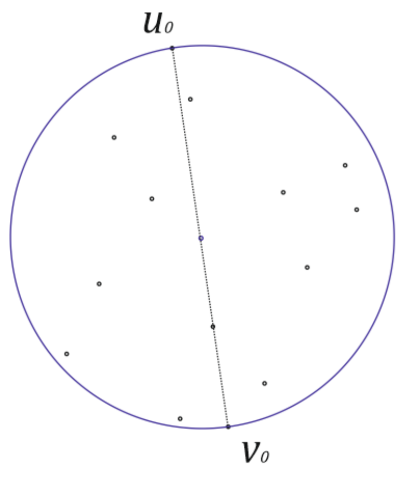
Нека $C_V$ е минимален покриващ кръг за множество от точки $V$. Тогава едно от следните е в сила:

1. Съществуват 3 различни точки $u_0, v_0, w_0 \in V$ такива, че $C_V = C_{\{u_0,v_0,w_0\}}$ и тези точки определят остроъгълен триъгълник.
2. Съществуват 2 различни точки $u_0, v_0 \in V$ такива, че $C_V = C_{\{u_0,v_0,\}}$ и отсечката межу тях е диаметър за $C_V$.

Тези точки ще наричаме *носители* за $V$. Те се намират по окръжността, определена от $C_V$. Тъй като носителите еднозначно определят единствен кръг, то $C_V$ е единствен.




*Фиг. 1 Множество с носители* $u_0$, $v_0$ *и* $w_0$




*Фиг. 2 Множество с носители* $u_0$ *и* $v_0$

**Лема:**

Нека $V$ е множество от поне 3 точки, а $C_V$ е минималният покриващ кръг за $V$. Ако $v \in V$ не е носител за $C_V$, то $C_{V\setminus\{v\}} = C_V$.

*Доказателство*:

Тъй като $v$ не е носител за $C_V$, $V \setminus \{v\}$ съдържа всички носители, но $C_V$ е покриващ за $V \setminus \{v\}$, така че $C_{V\setminus\{v\}} \preccurlyeq C_V$. Ако допуснем, че $C_{V\setminus\{v\}} \prec C_V$, то $C_{V\setminus\{v\}}$ е по-малък кръг, покриващ носителите, което е противоречие с факта, че $C_V$ е минималният такъв. В такъв случай $C_{V\setminus\{v\}} \asymp C_V$, но $C_V$ е единственият кръг с този радиус, покриващ носителите, така че $C_{V\setminus\{v\}} = C_V$.

**Следствие от лемата:**

Нека $V$ е множество от поне 2 точки, $C_V$ е минималният покриващ кръг за $V$ и $u \notin C_V$. Тогава $u$ е носител за $C_{V\cup\{u\}}$.

*Доказателство*:

В частност $u \notin V$, така че $V = (V \cup \{u\}) \setminus \{u\}$.

Нека $u$ не е носител за $C_{V\cup\{u\}}$. От лемата имаме, че $C_V = C_{(V\cup\{u\})\setminus\{u\}} = C_{V\cup\{u\}}$, което е противоречие с $u \notin C_V$.

## II. Алгоритъм за минимален покриващ кръг

***function*** c2 (point $u$, point $v$) // *МПК за 2 точки*

{

***return*** a disk with center $x = \left(\frac{u_x+v_x}{2}, \frac{u_y+v_y}{2}\right)$ and radius $r = dist(x,u)$

}

***function*** c3 (point $u$, point $v$, point $w$) // *МПК за 3 точки, образуващи остроъгълен триъгълник*

{

$D = 2[u_x(v_y - w_y) + v_x(w_y - u_y) + w_x(u_y - v_y)]$

$o_x = \left[(u_x^2 + u_y^2)(v_y - w_y) + (v_x^2 + v_y^2)(w_y - u_y) + (w_x^2 + w_y^2)(u_y - v_y)\right]/D$

$o_y = \left[(u_x^2 + u_y^2)(w_x - v_x) + (v_x^2 + v_y^2)(u_x - w_x) + (w_x^2 + w_y^2)(v_x - u_x)\right]/D$

***return*** a disk with center $x = (o_x, o_y)$ and radius $r = dist(x,u)$

}

Горните функции се изчисляват за константно време. Оставям на читателя да докаже коректността им!

***function*** shuffle (array $a$, int $i$) // *разбърква първите $i$ елемента на масива $a$*

{

***for*** $(j = i; j > 0; j = j - 1)$

{

$k =$ random integer from $0$ to $j - 1$

swap($a[j-1]$, $a[k]$)

}

}

Разбъркването на елементи отнема време $O(i)$

```
function SEC (array a of n ≥ 2 points)
{
        shuffle(a, n)
        C = c2(a[0], a[1])

        for (i = 2; i < n; i = i + 1) if (a[i] ∉ C) // loop1
        {
                shuffle(a, i)
                C = c2(a[i], a[0])

                for (j = 1; j < i; j = j + 1) if (a[j] ∉ C) // loop2
                {
                        shuffle(a, j)
                        C = c2(a[i], a[j])

                        for (k = 0; k < j; k = k + 1) if (a[k] ∉ C) C = c3(a[i], a[j], a[k]) // loop3
                }
        }

        return C
}
```

## III. Анализ на коректност и сложност на алгоритъма

1. Инвариантата на *loop3* е:
   *На всяка стъпка от цикъла, $C$ е МПК за точките $a[0] \dots a[k-1]$ и носители $a[i]$ и $a[j]$.*
   Сложността му е $\Theta(j)$.

2. Инвариантата на *loop2* е:
   *На всяка стъпка от цикъла, $C$ е МПК за точките $a[0] \dots a[j-1]$ и носител $a[i]$.*

   Нека $C$ е МПК за точките $a[0] \dots a[j-1]$ и носител $a[i]$.
   Нека $D$ е МПК за $a[0] \dots a[j]$ и носител $a[i]$.

   Ако $a[j] \notin C$, от лемата имаме, че тя е носител за $D$. Вероятността за това е

   $$\frac{1}{j+1}, \text{ ако } D \text{ има 2 носителя и}$$

   $$\frac{2}{j+1}, \text{ ако } D \text{ има 3 носителя}$$

   Все пак $a[i]$ е фиксиран носител.

   В първия случай сложността на тази итерация е:

   $$\frac{1}{j+1}\Theta(j) + \frac{(j+1)-1}{j+1}\Theta(1) = \Theta(1)$$

   , а във втория:

   $$\frac{2}{j+1}\Theta(j) + \frac{(j+1)-2}{j+1}\Theta(1) = \Theta(1)$$

И в двата случая имаме сложност $\Theta(1)$, откъдето очакваната сложност на *loop2* е:

$$\sum_{j=1}^{i-1} \Theta(1) = \Theta(i)$$

3. Инвариантата на *loop1* е:
*На всяка стъпка от цикъла, $C$ е МПК за точките $a[0] \dots a[i-1]$.*

Нека $C$ е МПК за точките $a[0] \dots a[i-1]$.
Нека $D$ е МПК за $a[0] \dots a[i]$.

Ако $a[i] \notin C$, от лемата имаме, че тя е носител за $D$. Вероятността за това е

$$\frac{2}{i+1}, \text{ ако } D \text{ има 2 носителя и}$$

$$\frac{3}{i+1}, \text{ ако } D \text{ има 3 носителя}$$

В първия случай сложността на тази итерация е:

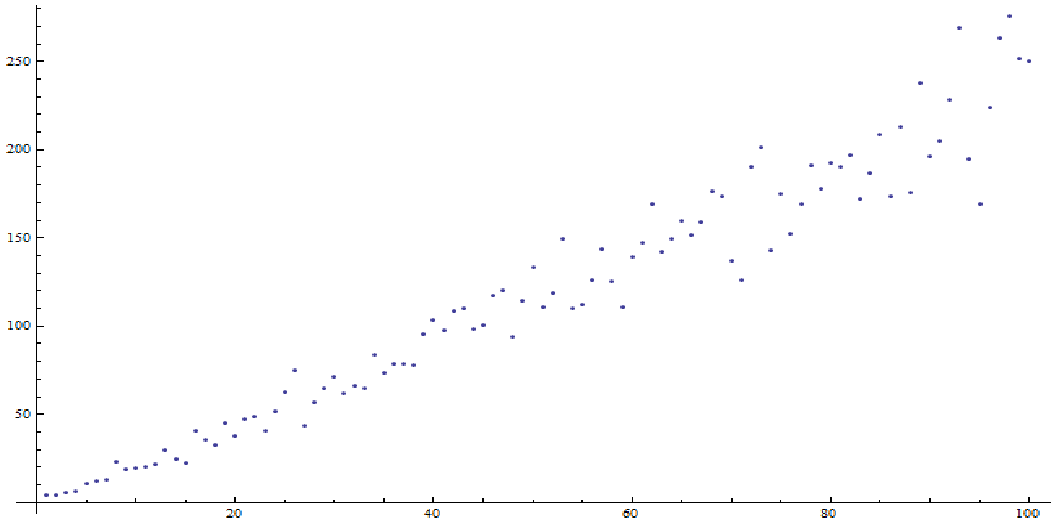
$$\frac{2}{i+1}\Theta(i) + \frac{(i+1)-2}{i+1}\Theta(1) = \Theta(1)$$

, а във втория:

$$\frac{3}{i+1}\Theta(i) + \frac{(i+1)-3}{i+1}\Theta(1) = \Theta(1)$$

И в двата случая имаме сложност $\Theta(1)$, откъдето очакваната сложност на *loop1* е:

$$\sum_{i=2}^{n-1} \Theta(1) = \Theta(n)$$




*Фиг. 3 Резултати от тестовете (хиляди точки - ms)*