Кратки записки на първите 6 упражнения по ДАА (гр. I)

Това са кратки записки на първите 6 упражнения по ДАА на гр. I. Въпреки, че пише „кратки“, някои задачи са решени подробно. Също така е възможно е някои от разгледаните тук примери да не са били разглеждани на упражнение.

Упражнение I

Def: Ще казваме, че функцията $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ е *асимптотично неотрицателна*, ако:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : f(n) \geq 0$$

Ако неравенството е строго, ще казваме, че f е *асимптотично положителна.*

Def: Нека g е асимптотично неотрицателна фукция. Въвеждаме следните класове от функции (ще ги наричаме *асимптотични нотации*):

$$\mathrm{O}(g) = \{f \mid \exists c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c.g(n)\}$$

$\mathrm{O}(g)$ е множеството от всички функции, които растят *асимптотично не по-бързо* от g. Ще записваме това като $f \in \mathrm{O}(g)$, $f = \mathrm{O}(g)$ или $f \preccurlyeq g$.

$$\Omega(g) = \{f \mid \exists c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : 0 \leq c.g(n) \leq f(n)\}$$

$\Omega(g)$ е множеството от всички функции, които растят *асимптотично не по-бавно* от g. Ще записваме това като $f \in \Omega(g), f = \Omega(g)$ или $f \succcurlyeq g$.

$$o(g) = \{f \mid \forall c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) < c.g(n)\}$$

$o(g)$ е множеството от всички функции, които растят *асимптотично по-бавно* от g. Ще записваме това като $f \in o(g), f = o(g)$ или $f \prec g$.

$$\omega(g) = \{f \mid \forall c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : 0 \leq c.g(n) < f(n)\}$$

$\omega(g)$ е множеството от всички функции, които растят *асимптотично по-бързо* от g. Ще записваме това като $f \in \omega(g), f = \omega(g)$ или $f \succ g$.

$$\Theta(g) = \{f \mid \exists c_1 > 0\ \exists c_2 > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : 0 \leq c_1.g(n) \leq f(n) \leq c_2.g(n)\}$$

$\Theta(g)$ е множеството от всички функции, които растят *асимптотично еднакво* с g. Ще записваме това като $f \in \Theta(g)$, $f = \Theta(g)$ или $f \asymp g$.

Някои основни свойства на асимптотичните нотации:

Свойство 1: Всички са транзитивни: Ако $f\ \sigma\ g$ и $g\ \sigma\ h$, то $f\ \sigma\ h$, за $\sigma \in \{\prec, \succ, \preccurlyeq, \succcurlyeq, \asymp\}$

Свойство 2: Θ, O и Ω са рефлексивни: $f\ \sigma\ f$ за $\sigma \in \{\preccurlyeq, \succcurlyeq, \asymp\}$

Свойство 3: $f \succcurlyeq g$ и $g \succcurlyeq f \Leftrightarrow f \asymp g$

Свойство 4: Θ е симетрична: $f \asymp g \Rightarrow g \asymp f$

Свойство 5: $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow g \succcurlyeq f$ и $f \prec g \Leftrightarrow g \succ f$

Доказателствата на горните свойства са директно от дефинициите.

Свойство 6: $\max\{f, g\} \asymp f + g$

Доказателство:

Ясно е, че за достатъчно големи n:

$$\frac{1}{2}f(n) + \frac{1}{2}g(n) \leq \max\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n) \Rightarrow \max\{f, g\} \asymp f + g$$

Свойство 7: За асимптотично положителни f и g е вярно, че:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \Leftrightarrow f = o(g)$$

Доказателство:

За произволно $\varepsilon > 0$ и достатъчно големи n имаме:

$$-\varepsilon < \frac{f(n)}{g(n)} < \varepsilon \Leftrightarrow 0 \leq f(n) < \varepsilon. g(n)$$

, което е достатъчно за еквивалентността.

Свойство 8: За асимптотично положителни f и g е вярно, че:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c > 0 \Rightarrow f = \Theta(g)$$

Доказателство:

За фиксирано $c > \varepsilon > 0$, и достатъчно големи n имаме:

$$c - \varepsilon < \frac{f(n)}{g(n)} < c + \varepsilon \Rightarrow 0 \leq (c - \varepsilon). g(n) \leq f(n) \leq (c + \varepsilon). g(n)$$

, което е достатъчно за свойството.

Забележка: Обратната посока на твърдението не е вярна.

Нека $f(n) = (2 + \sin n).n$, а $g(n) = n$

Очевидно $\forall n \geq 1 \colon n \leq (2 + \sin n).n \leq 3n \;\Rightarrow\; f = \Theta(g)$, но от друга страна границата:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2 + \sin n).n}{n}$$

изобщо не съществува.

Означение 1: Със символът $\lg n$ ще обозначаваме двоичен логаритъм, а не десетичен!

Означение 2: Тъй като $\log_a n$ и $\log_b n$ за $a, b > 1$ се различават само с положителна константа:

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

, много често няма да обозначаваме основата. Например: $\Theta(\lg n) = \Theta(\log n)$.

Свойство 9: Нека f и g са асимптотично положителни и $a > 1$. (Това се ползва много!)

Ако $f \prec g$ и g расте неограничено, то $a^f \prec a^g$

Ако $\log_a f \prec \log_a g$ и g расте неограничено, то $f \prec g$

Доказателство:

Ключовото наблюдение за първото твърдение е, че $g - f$ е неограничена:

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{g(n) - f(n) + f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{g(n) - f(n)}{g(n)} + \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$

, откъдето:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n) - f(n)}{g(n)} = 1$$

Сега:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{f(n)}}{a^{g(n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{g(n)-f(n)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a^{g(n)}} = 0$$

Второто свойство следва от първото.

Забележка: Тук е от особено значение, че g расте неограничено! Да разгледаме следния пример:

$$f(n) = \frac{1}{n}, \qquad g(n) = 1 - \frac{1}{n}$$

Лесно се проверява, че: $f \prec g$, но $2^f \asymp 2^g$.

Свойство 10:

$$\forall a > 1\ \forall t > 0\ \forall \varepsilon > 0: \log_a^t n \prec n^{\varepsilon}$$

Доказателство:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^{\frac{\varepsilon}{t}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x^{\frac{\varepsilon}{t}}}$$

От правилото на Лопитал имаме:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x^{\frac{\varepsilon}{t}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x \ln a \frac{\varepsilon}{t} x^{\frac{\varepsilon}{t}-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{t}{\varepsilon \ln a\, x^{\frac{\varepsilon}{t}}} = 0$$

Сега:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\log_a n}{n^{\frac{\varepsilon}{t}}}\right)^t = 0^t = 0 \ \Rightarrow\ \log_a^t n \prec n^{\varepsilon}$$

Пример 1:

Нека $p(x) = \alpha_0 x^k + \alpha_1 x^{k-1} + \ \dots + \alpha_k$ е полином от степен k с $a_0 > 0$. Тогава $p(n) \asymp n^k$.

Доказателство:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \ \dots + \frac{\alpha_k}{n^k} = \alpha_0 > 0 \ \Rightarrow\ p(n) \asymp n^k$$

Пример 2:

За фиксирано $k \in \mathbb{N}$ е вярно, че:

$$\binom{n}{k} \asymp n^k$$

Доказателство:

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} . \frac{1}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n.(n-1)\dots(n-k+1)}{k!.n^k} = \lim_{n\to\infty} 1.\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).\frac{1}{k!} = \frac{1}{k!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \binom{n}{k} \asymp n^k$$

Пример 3:

$(n+1)^n \asymp n^n$

Доказателство:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \ \Rightarrow\ (n+1)^n \asymp n^n$$

Пример 4:

Не всеки две асимптотично неотрицателни функции са асимптотично сравними.

Доказателство:

Нека:

$$g(n) = n, \qquad f(n) = \begin{cases} 1 & , n \text{ е четно} \\ n^2 & , n \text{ е нечетно} \end{cases}$$

Ако допуснем, че $f = O(g)$, ще имаме:

$$\exists c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq c.g(n)$$

, което не е вярно за нечетни $n > c$ $(0 \leq n^2 \leq c.n)$.

Ако допуснем, че $g = O(f)$, ще имаме:

$$\exists c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : 0 \leq g(n) \leq c.f(n)$$

, което не е вярно за четни $n > c$ $(0 \leq n \leq c)$.

Щом f и g са несравними по O, те не са сравними изобщо.

Пример 5:

Възможно е $f = O(g)$, без да е вярно нито едно от $f = o(g)$ и $f = \Theta(g)$.

Доказателство:

Нека:

$$g(n) = n, \qquad f(n) = \begin{cases} n & ,n \text{ е четно} \\ \dfrac{1}{n} & ,n \text{ е нечетно} \end{cases}$$

Вярно е, че $f = O(g)$, тъй като $\forall n \geq 1 : 0 \leq f(n) \leq g(n)$

Ако допуснем, че $f = o(g)$, ще имаме:

$$\forall c > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) < c.g(n)$$

, което не е вярно за четни n и $c \leq 1$ $(0 \leq n < c.n)$.

Ако допуснем, че $f = \Theta(g)$, ще имаме:

$$\exists c_1 > 0\ \exists c_2 > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : 0 \leq c_1.g(n) \leq f(n) \leq c_2.g(n)$$

, което не е вярно за нечетни $n > \frac{1}{\sqrt{c_1}}$ $(0 \leq c_1.n \leq \frac{1}{n})$.

Упражнение II

Апроксимация на Стирлинг:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Пример 1:

$\lg n! \asymp n \lg n$

Доказателство:

От апроксимацията на Стирлинг имаме:

$$\lg n! \approx \lg\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right) = \lg\sqrt{2\pi n} + n\lg n - n\lg e \asymp n\lg n$$

Пример 2:

$$\binom{2n}{n} \asymp \frac{4^n}{\sqrt{n}}$$

Доказателство:

От апроксимацията на Стирлинг имаме:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \approx \frac{\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \sqrt{\frac{1}{\pi n}}\,4^n \asymp \frac{4^n}{\sqrt{n}}$$

Задача 1: Докажете, че $1 \prec \lg\lg n \prec \lg n \prec n \prec n\lg n \prec n^2 \prec n^3 \prec 2^n \prec n! \prec n^n$

1.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lg\lg n} = 0 \ \Rightarrow\ 1 \prec \lg\lg n$$

2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg\lg n}{\lg n} = \lim_{x\to\infty}\frac{\lg\lg x}{\lg x}$$

От правилото на Лопитал имаме:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\lg\lg x}{\lg x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\lg x}.\frac{(\lg x)'}{(\lg x)'} = 0 \ \Rightarrow\ \lg\lg n \prec \lg n$$

3.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n} = \lim_{x\to\infty}\frac{\lg x}{x}$$

От правилото на Лопитал имаме:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\lg x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0 \ \Rightarrow\ \lg n \prec n$$

4.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\lg n}=0\ \Rightarrow\ n\prec n\lg n$$

5.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\lg n}{n^2}=0\ \Rightarrow\ n\lg n\prec n^2$$

6.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3}=0\ \Rightarrow\ n^2\prec n^3$$

7.

Тъй като $\lg(n^3)=3\lg n\prec n\lg 2=\lg(2^n)$, то $n^3\prec 2^n$

8.

Тъй като $\lg(2^n)=n\lg 2\prec n\lg n\asymp\lg(n!)$, то $2^n\prec n!$

9.

Тъй като $\forall n\in\mathbb{N}: 0<n!\le n^{n-1}$, то:

$$\forall n\in\mathbb{N}: 0<\frac{n!}{n^n}\le\frac{1}{n}$$

От лемата за „двамата полицаи“ имаме:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0\ \Rightarrow\ n!\prec n^n$$

Задача 2: Докажете, че $\sqrt[n]{n}\asymp 1$

Доказателство:

Използваме следната лема:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=a>0\ \Leftrightarrow\ \lim_{x\to\infty}\ln f(x)=\ln a$$

Сега имаме:

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{1}=e^0=1\ \Rightarrow\ \sqrt[n]{n}\asymp 1$$

Задача 3: Подредете в асимптотично нарастващ ред функциите:

$$\sqrt{2}^{\lg n},\quad n^3,\quad n!,\quad (\lg n)!,\quad \lg^2 n,\quad \lg n!,\quad 2^{2^n},\quad n^{\frac{1}{\lg n}},\quad \ln\ln n,\quad \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$n.2^n,\quad 4^{\lg n},\quad (n+1)!,\quad \sqrt{\lg n},\quad 2^{\sqrt{2.\lg n}},\quad n^{\lg\lg n},\quad \ln n,\quad 2^{\lg n},\quad (\lg n)^{\lg n}$$

Правилният ред е:

$$n^{\frac{1}{\lg n}}\prec\ln\ln n\prec\sqrt{\lg n}\prec\ln n\prec\lg^2 n\prec 2^{\sqrt{2.\lg n}}\prec\sqrt{2}^{\lg n}\prec 2^{\lg n}\prec\lg n!\prec 4^{\lg n}\prec n^3\prec(\lg n)!\prec$$

$$\prec(\lg n)^{\lg n}\asymp n^{\lg\lg n}\prec\left(\frac{3}{2}\right)^n\prec n.2^n\prec n!\prec(n+1)!\prec 2^{2^n}$$

Решение:

1.

$$n^{\frac{1}{\lg n}} = n^{\log_n 2} = 2 \prec \ln \ln n$$

2.

$$\ln \ln n \prec \sqrt{\lg n}$$

, тъй като $\sqrt{\lg n} \asymp \sqrt{\ln n}$ и $\ln \ln n \prec \sqrt{\ln n}$, подобно на $\ln n \prec \sqrt{n}$

3.

$$\sqrt{\lg n} \asymp \sqrt{\ln n} \prec \ln n, \text{ тъй като } 1 \prec \sqrt{\ln n}$$

4.

$$\ln n \prec \lg^2 n, \text{ тъй като } \ln n \prec \ln^2 n \asymp \lg^2 n$$

5.

$$\lg^2 n \prec 2^{\sqrt{2.\lg n}}$$

Тъй като $\lg(\lg^2 n) = 2 \lg \lg n \prec \sqrt{2.\lg n} \lg 2 = \lg\left(2^{\sqrt{2.\lg n}}\right)$, то $\lg^2 n \prec 2^{\sqrt{2.\lg n}}$

6.

$$2^{\sqrt{2.\lg n}} \prec \sqrt{2}^{\lg n}$$

Тъй като $\lg\left(2^{\sqrt{2.\lg n}}\right) = \sqrt{2.\lg n} \lg 2 \prec \frac{1}{2} \lg n = \lg\left(\sqrt{n}\right) = \lg \sqrt{2}^{\lg n}$, то $2^{\sqrt{2.\lg n}} \prec \sqrt{2}^{\lg n}$

7.

$$\sqrt{2}^{\lg n} = \sqrt{n} \prec n = 2^{\lg n}$$

8.

$$2^{\lg n} = n \prec n \lg n \asymp \lg n!$$

9.

$$\lg n! \asymp n \lg n \prec n^2 = 4^{\lg n}$$

10.

$$4^{\lg n} = n^2 \prec n^3$$

11.

$$n^3 \prec (\lg n)!$$

Тъй като $\lg n^3 = 3 \lg n \prec \lg n \lg \lg n \asymp \lg(\lg n)!$, то $n^3 \prec (\lg n)!$

12.

$$(\lg n)! \prec (\lg n)^{\lg n}, \text{ подобно на } n! \prec n^n$$

13.

$$(\lg n)^{\lg n} = n^{\lg \lg n}$$

Това е заради свойството на логаритъма: $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

14.

$$n^{\lg \lg n} \prec \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Тъй като $\lg\left(n^{\lg \lg n}\right) = \lg \lg n \,.\, \lg n \prec \lg^2 n \prec n \lg \frac{3}{2} = \lg\left(\frac{3}{2}\right)^n$, то $n^{\lg \lg n} \prec \left(\frac{3}{2}\right)^n$

15.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \prec 2^n \prec n.2^n$$

16.

$$n.2^n \prec n!$$

Тъй като $\lg n.2^n = \lg n + n \lg 2 \prec n \lg n \asymp \lg(n!)$, то $n.2^n \prec n!$

17.

$$n! \prec (n+1)!$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \;\Rightarrow\; n! \prec (n+1)!$$

18.

$$(n+1)! \prec 2^{2^n}$$

Тъй като $\lg(n+1)! \asymp (n+1).\lg(n+1) \prec 2^n \lg 2 = \lg\left(2^{2^n}\right)$, то $(n+1)! \prec 2^{2^n}$

Упражнение III

Пример 1: Даденият алгоритъм връща 2^n:

```
Alg1(int n)
{
      int s = 1;
l:    for (int i = 0; i < n; i++) s = s * 2;
      return s;
}
```

Инварианта на цикъла: При всяко k-то достигане на ред l: $s = 2^{k-1}$.

Доказателство:
<u>База</u>: При първото достигане: $i = 0$, $s = 2^0 = 1$ - вярно.

<u>Поддръжка</u>: Нека е вярно за някое k-то достигане, което не е последното:
$i = k - 1$, $s = 2^{k-1}$

В тялото на цикъла имаме `s = s * 2`, така че на $k + 1$-вото достигане ще имаме: $i = k$, $s = 2^{k-1}.2 = 2^k$ - твърдението отново е вярно.

<u>Терминация</u>: При $n + 1$-вото достигане имаме: $i = n$, $s = 2^n$.
В този момент цикълът приключва.

След цикъла имаме `return s`, което връща стойността на s или 2^n.

Пример 2: Даденият алгоритъм връща сумата на елементите на масива $a[n]$:

```
Alg2(int a[n])
{
      int s = 0;
      for (int i = 0; i < n; i++) s = s + a[i];
      return s;
}
```

Инварианта на цикъла:
В началото на всяка итерация на цикъла s съдържа $a[0] + \ldots + a[i-1]$.

Пример 3: Коректност на Selection Sort

```
Selection_sort(int a[n])
{
      for (int i = 0; i < n - 1; i++)
      {
            int m = i;
            for (int j = i + 1; j < n; j++) if (a[j] < a[m]) m = j;
            swap(a[i], a[j]);
      }
}
```

Инварианта на вътрешния цикъл:
В началото на всяка итерация на вътрешния цикъл $a[m] = \min\{ a[i], \ldots, a[j-1] \}$.

Инварианта на външния цикъл:

В началото на всяка итерация на външния цикъл елементите $a[0], \dots, a[i-1]$ са сортирани и в тях се съдържат i-тите най-малки елементи на масива.

Пример 4: Бързо вдигане на степен

```
int exp_by_sqr(int x, int n)
{
	if (n == 0) return 1;
	if (n is even) return exp_by_sqr(x * x, n / 2);
	return x * exp_by_sqr(x * x, n / 2);
}
```

Твърдение: Алгоритъмът връща x^n.

Проверява се непосредствено като се разлгедат всички случай.

Пример 5: Една задача на Кралчев.

Дадена е кутия с 53 сини и 42 жълти пьонки. Извън кутията има неограничен запас от жълти пьонки. Разглеждаме следния алгоритъм:

```
Alg()
{
	Докато (не остане само 1 пьонка в кутията)
	{
		Извади 2 случайни пьонки.
		Ако са с еднакъв цвят – добави 1 жълта, иначе върни синята.
	}
}
```

Какъв ще е цветът на последната пьонка в кутията?

Инварианта на цикъла:

В началото на всяка k-та итерация на цикъла броят пьонки в кутията е $95 - k + 1$, като броят на сините пьонки е нечетен.

Пример 6: Алгоритъм на Кадан за подмасив с максимална сума.

```
Kadane(int a[n])
{
	int c = 0, m = 0;
	for (int i = 0; i < n; i++)
	{
		if (a[i] + c > 0) c = a[i] + c; else c = 0;
		if (m > c) m = c;
	}
	return m;
}
```

Инварианта на цикъла:

В началото на всяка итерация на цикъла c съдържа най-голямата сума, на подмасив завършващ в $a[i-1]$, а m съдържа най-голямата сума сред тези, завършващи в $a[0], \dots, a[i-1]$.

Забележка: Този алгоритъм намира и празни подмасиви (ако всички елементи са отрицателни).

Може лесно да се модофицира да работи за непразни:

```
Kadane2(int a[n])
{
	int c = a[0], m = a[0];
	for (int i = 1; i < n; i++)
	{
		if (a[i] + c > a[i]) c = a[i] + c; else c = a[i];
		if (m > c) m = c;
	}
	return m;
}
```

Упражнение IV

Някои важни суми:

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n, \qquad \sum_{i=a}^{b} 1 = b - a + 1, \qquad \sum_{i=1, i=i+k}^{n} 1 = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \approx \frac{n}{k}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n^2), \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \Theta(n^3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^{\alpha} = \begin{cases} \Theta(n^{\alpha+1}) & , \alpha > -1 \\ \Theta(\log n) & , \alpha = -1 \\ \Theta(1) & , \alpha < -1 \end{cases}$$

Тези отношения могат да бъдат изведени по различни начини. Първите 5 могат да се докажат лесно по индукция или да се проверят непосредствено. Шестото е следствие от интегралния критерий за суми.

В следващите примери условието е да се намери сложността по време на дадения фрагмент.

Пример 1:

```
for (int i = 1; i <= n; i++) print("a");
```

Времето, за което се изпълнява цикълът може да се изрази със сумата:

$$\sum_{i=1}^{n} c = c \sum_{i=1}^{n} 1 = \Theta(n)$$

Идеята е, че той има n итерация като на всяка от тях извършва една и съща константна работа със сложност $c > 0$. В следващите примери ще отбелязваме това с 1, вместо с c, тъй като в този случай константата не оказва влияние на асимптотичното поведение на сумите.

Пример 2:

```
for (int i = 1; i <= n; i++)
      for (int j = 1; j <= n; j++) print("a");
```

Времето, за което се изпълняват циклите може да се изрази със сумата:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}1=\sum_{i=1}^{n}n=n^2=\Theta(n^2)$$

Пример 3:

```
for (int i = 1; i <= n; i++)
      for (int j = 1; j <= i; j++) print("a");
```

Времето, за което се изпълняват циклите може да се изрази със сумата:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}1=\sum_{i=1}^{n}i=\Theta(n^2)$$

Пример 4:

```
for (int i = 1; i <= n; i++)
      for (int j = 1; j <= n; j += i) print("a");
```

Времето, за което се изпълняват циклите може да се изрази със сумата:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j=j+i}^{n}1\approx\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{i}=n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}=\Theta(n\log n)$$

Пример 5:

```
for (int i = 1; i <= n; i++)
      for (int j = 1; j <= n; j++)
            if (i == j) for (int k = 1; k <= n; k++) print("a");
```

Първите два вложени цикъла определят време за изпълнение n^2. Третият цикъл се изпълнява само в случайте, когато $i=j$, а те са точно n на брой ($i=j=1, i=j=2$ и така нататък). Той от своя страна е с време n, така че за него имаме общо време n^2.

Цялото време на изпълнение се определя от времето на двата вложени цикъла и случаите, когато се изпълянва третият цикъл, т.е. $n^2+n^2=2n^2=\Theta(n^2)$.

Пример 6:

```
for (int i = 1; i <= n; i++)
      for (int j = 1; j <= n; j+=i)
            for (int k = 1; k <= n; k += i) print("a");
```

Времето, за което се изпълняват циклите може да се изрази със сумата:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j=j+i}^{n}\sum_{k=1,k=k+i}^{n}1 \approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j=j+i}^{n}\frac{n}{i} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n}{i}.\sum_{j=1,j=j+i}^{n}1\right) \approx \sum_{i=1}^{n}\frac{n^2}{i^2} = n^2.\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2} = \Theta(n^2)$$

Пример 7: Сложност на *BuildHeap*

Наблюдение: За $|x| < 1$ имаме:

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = x.\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

Следният израз описва най-лошия случай за $BuildHeap$ на пълна двойчна пирамида с височина h и $n = 2^{h+1} - 1$ елемента:

$$S(n) = \sum_{i=1}^{h}2^{h-i}.i = 2^h\sum_{i=1}^{h}\frac{i}{2^i} \le 2^h\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{2^i} = 2^h.2 = O(2^h) = O(n)$$

Сложността $O(n)$ в общия случай се съобразява от факта, че работата на алгоритъма в този случай е по-малка от работата за най-малката пълна двойчна пирамида с размер $\ge n$. Този размер е $s \le 2n$, а търсената работа е $O(s)$, която ненадвишава $O(2n) = O(n)$.

Долната граница $\Omega(n)$ идва от факта, че трябва да разгледаме всички елементи на пирамидата.

Упражнение V

Условието на всички примери е да се намери сложността на рекурентното уравнение.

Ще считаме, че за достатъчно малки n, $T(n)$ се изпълнява за константно време.

Пример 1:

$$T(n) = 4T(n-2) + n.2^n + 4.3^n$$

От хомогенната част на това уравнение имаме:

$$x^2 - 4 = 0, x = \pm 2 \Rightarrow \{2, -2\}_m$$

От нехомогенната част имаме $\{2,2\}_m$ от $n.2^n$ и $\{3\}_m$ от 4.3^n

Общото решение има вида:

$$T(n) = c_1 3^n + c_2 2^n + c_3 n 2^n + c_4 n^2 2^n + c_5(-2^n) = \Theta(3^n), \text{ където } c_1 > 0$$

Пример 2:

$$T(n) = 2T(n-1) - T(n-2)$$

От хомогенната част на това уравнение имаме:

$$x^2 - 2x + 1 = 0, x_{1,2} = 1 \Rightarrow \{1,1\}_m$$

Общото решение има вида:

$$T(n) = c_1 1^n + c_2 n.1^n = \Theta(n), \text{ където } c_2 > 0$$

Пример 3:

$$T(n) = T(n-1) + 1$$

С разписване изразите за $T(n)$ получаваме: $T(n) = T(0) + n = \Theta(n)$

Пример 4:

$$T(n) = T(n-1) + \frac{1}{n}$$

С разписване на изразите за $T(n)$ получаваме:

$$T(n) = T(0) + \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \ \dots + \frac{1}{1} = T(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \Theta(\ln n)$$

Пример 5:

$$T(n) = 2T(n-1) + \frac{1}{n}$$

С разписване на изразите за $T(n)$ получаваме:

$$T(n) = 2^n T(0) + \frac{1}{n} + \frac{2}{n-1} + \frac{4}{n-2} + \ \dots + \frac{2^{n-1}}{1} = 2^n.T(0) + 2^n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i.2^i} = \Theta(2^n)$$

, тъй като:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i.2^i} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1 \Rightarrow 2^n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i.2^i} \leq 2^n$$

Пример 6:

$$T(n) = \frac{n}{n+1} T(n-1) + 1$$

С разписване на изразите за $T(n)$ получаваме:

$$T(n) = \frac{1}{n+1} T(0) + 1 + \frac{n}{n+1} + \frac{n-1}{n+1} + \ \dots + \frac{2}{n+1} = \frac{1}{n+1}.T(0) + \frac{1}{n+1} \sum_{i=2}^{n+1} i =$$

$$= \frac{1}{n+1}.T(0) + \frac{1}{n+1} \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 \right) = \Theta(n)$$

Пример 7: Анализ на средния случай на *QuickSort*

$$Q(n) = \frac{1}{n}.\sum_{i=0}^{n-1}[Q(i) + Q(n-1-i)] + c.n = \frac{2}{n}.\sum_{i=0}^{n-1}Q(i) + c.n$$

Оттук получаваме:

$$n.Q(n) = 2.\sum_{i=0}^{n-1}Q(i) + c.n^2$$

, откъдето

$$(n-1).Q(n-1) = 2.\sum_{i=0}^{n-2}Q(i) + c.(n-1)^2$$

Изваждаме двата израза и получаваме:

$$Q(n) = \frac{n+1}{n}Q(n-1) + 2c - \frac{c}{n}$$

С разписване на изразите за $Q(n)$ получаваме:

$$Q(n) = (n+1)Q(0) + 2c(n+1).\sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{i} - c(n+1).\sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{i.(i-1)}$$

, откъдето

$$Q(n) = (n+1)Q(0) + 2c(n+1)\sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{i} - cn = \Theta(n\log n)$$

Пример 8:

$$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + 1$$

Представяме n във вида 2^{2^m} ($m = \lg\lg n$)

Сега имаме:

$$S(m) = T\left(2^{2^m}\right) = 2T\left(2^{2^{m-1}}\right) + 1 \text{ или } S(m) = 2S(m-1) + 1$$

Сложността на това уравнение е $\Theta(2^m)$, което спрямо n е $\Theta\left(2^{\lg\lg n}\right) = \Theta(\lg n)$

Какво става, ако n няма вида 2^{2^m} за цяло число m?

Наблюдението е, че рекурентното уравнение за T е растящо.
За достатъчно големи m, нека $x \in [m, m+1]$.
Сега:

$$\frac{1}{2}.c_1.2^x \le \frac{1}{2}c_1.2^{m+1} = c_1.2^m \le T\left(2^{2^m}\right) \le T\left(2^{2^x}\right) \le T\left(2^{2^{m+1}}\right) \le c_2.2^{m+1} = 2.c_2.2^m \le 2.c_2.2^x$$

, откъдето за достатъчно големи n:

$$\frac{1}{2}.c_1.\lg n \le T(n) \le 2.c_2\lg n$$

Пример 9:

$$T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$$

Представяме n във вида 2^{2^m} $(m = \lg \lg n)$

Сега имаме:

$$S(m) = T(2^{2^m}) = T(2^{2^{m-1}}) + 1 \text{ или } S(m) = S(m-1) + 1$$

Сложността на това уравнение е $\Theta(m)$, което спрямо n е $\Theta(\lg \lg n)$

Пример 10: Да се намери сложността на следната рекурсивна програма:

```
A(int n)
{
    int s = 0;
    for (int i = 1; i < n; i++) s = s + 2 * A(i) + 1;
    return s;
}
```

Решение:

На всяка итерация на цикъла, програмата се обръща към себе си с по-малък аргумент. Умножението с 2 приемаме за константа операция, така че реално програмата върши само веднъж работата за този по-малък аргумент, а не два пъти!

Ако изразът беше `s = s + a(i) + a(i) + 1`, то резултатът щеше да е същият, но сложността щеше да е друга, тъй като в този случай програмата реално щеше да върши два пъти работата за по-малкия аргумент!

Сложността може да се опише със следното рекурентно уравнение:

$$T(n) = T(1) + c + T(2) + c + \ \dots + T(n-1) + c = \sum_{i=1}^{n-1} T(i) + (n-1)c$$

$c > 0$ показва допълнителната константна работа, която върши алгоритъмът.

Аналогично за $T(n-1)$ имаме:

$$T(n-1) = \sum_{i=1}^{n-2} T(i) + (n-2)c$$

, откъдето:

$$T(n) - T(n-1) = \sum_{i=1}^{n-1} T(i) + (n-1)c - \sum_{i=1}^{n-2} T(i) - (n-2)c = T(n-1) + c \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ T(n) = 2.T(n-1) + c$$

Това рекурентно уравнение има общо решение: $T(n) = c_1.2^n + c_2 = \Theta(2^n)$, където $c_1 > 0$

Упражнение VI

Теорема: (Мастър теорема)

За $a \geq 1$, $b > 1$ и $f(n)$ - положителна е дадено рекурентното уравнение:

$$T(n) = a.T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

Случай 1: Ако $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ за някое $\varepsilon > 0$, то $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$
Случай 2: Ако $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, то $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \lg n\right)$
Случай 3: Ако $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ за някое $\varepsilon > 0$ и

$$\exists c \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 \colon a.f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c.f(n)$$

, то $T(n) = \Theta\big(f(n)\big)$

Втората част от *Случай 3* се нарича *условие за регулярност.*

Доказателство можете да намерите на страници 97 - 106 от T. Cormen, C. Leiserson - Introduction to Algorithms, Third Edition.

Условието на следващите примери е да се намери сложността на рекурентното уравнение:

Пример 1:

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

Имаме: $n = O(n^{2-0.1}) = O\left(n^{\log_2 4 - 0.1}\right) \xRightarrow{MTh\ 1} T(n) = \Theta(n^2)$

Пример 2:

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right) + n^3$$

Имаме: $n^3 = O(n^{4-0.1}) = O\left(n^{\log_{\sqrt{2}} 4 - 0.1}\right) \xRightarrow{MTh\ 1} T(n) = \Theta(n^4)$

Пример 3:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

Имаме: $n = \Theta(n) = \Theta\left(n^{\log_2 2}\right) \xRightarrow{MTh\ 2} T(n) = \Theta(n \lg n)$

Пример 4:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 1$$

Имаме: $1 = \Theta(1) = \Theta\left(n^{\log_2 1}\right) \xRightarrow{MTh\ 2} T(n) = \Theta(\lg n)$

Пример 5:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{8}\right) + n$$

Имаме: $n = \Omega\left(\sqrt{n}\right) = \Omega\left(n^{\log_8 2 + \frac{1}{6}}\right)$

Освен това:

$$\forall n \geq 1: 2.\frac{n}{8} \leq \frac{1}{4}.n$$

От $MTh\,3 \Rightarrow T(n) = \Theta(n)$

Пример 6:

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{9}\right) + n\lg n$$

Имаме: $n\lg n = \Omega\left(n^{\frac{5}{6}}\right) = \Omega\left(n^{\log_9 3 + \frac{1}{3}}\right)$

Освен това:

$$\forall n \geq 1: 3.\frac{n}{9}.\lg\frac{n}{9} \leq \frac{1}{3}n\lg n$$

От $MTh\,3 \Rightarrow T(n) = \Theta(n\lg n)$

Пример 7:

$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{4}\right) + n\lg n$$

Имаме: $n\lg n = O\left(n^{\frac{3}{2} - 0.1}\right) = O\left(n^{\log_4 8 - 0.1}\right) \xrightarrow{MTh\,1} T(n) = \Theta\left(n^{\frac{3}{2}}\right)$

Пример 8:

$$T(n) = 2\sqrt{2}T\left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right) + n^3$$

Имаме: $n^3 = \Theta(n^3) = \Theta\left(n^{\log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2}}\right) \xrightarrow{MTh\,2} T(n) = \Theta(n^3\lg n)$

Пример 9:

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2\sqrt{n}$$

Имаме: $n^2\sqrt{n} = \Omega\left(n^{2+0.1}\right) = \Omega\left(n^{\log_2 4 + 0.1}\right)$

Освен това:

$$\forall n \geq 1: 4.\frac{n^2\sqrt{n}}{4\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}n^2\sqrt{n}$$

От $MTh\,3 \Rightarrow T(n) = \Theta\left(n^2\sqrt{n}\right)$

Частен случай на Мастър теоремата:

За $a \geq 1$, $b > 1$ и $f(n)$ - положителна е дадено рекурентното уравнение:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

Ако $f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \lg^{t} n\right)$ за някое $t \geq 0$, то $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \lg^{t+1} n\right)$

Пример 11:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + 2\sqrt{n} \lg^3 n$$

Имаме:

$$2\sqrt{n} \lg^3 n = \Theta\left(\sqrt{n} \lg^3 n\right) = \Theta\left(n^{\log_4 2} \lg^3 n\right)$$

От частния случай $\Rightarrow$ $T(n) = \Theta\left(\sqrt{n} \lg^4 n\right)$

Пример 12:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \lg n$$

Имаме:

$$\lg n = \Theta(\lg n) = \Theta\left(n^{\log_2 1} \lg n\right)$$

От частния случай $\Rightarrow$ $T(n) = \Theta(\lg^2 n)$

Пример 13:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{1}{\lg n}$$

Тук не е приложим дори частният случай!

1. $\frac{1}{\lg n} \neq O(n^{-\varepsilon})$, тъй като $\frac{1}{\lg n} \succ n^{-\varepsilon}$ за $\varepsilon > 0$
2. $\frac{1}{\lg n} \neq \Theta(1)$, тъй като $\frac{1}{\lg n} \prec 1$
3. $\frac{1}{\lg n} \neq \Omega(n^{\varepsilon})$, тъй като $\frac{1}{\lg n} \prec n^{\varepsilon}$ за $\varepsilon > 0$
4. $\frac{1}{\lg n} = (\lg n)^{-1}$

Нека $n = 2^m$.

Сега имаме:

$$S(m) = T(2^m) = T(2^{m-1}) + \frac{1}{m} = S(m-1) + \frac{1}{m}$$

Сложността на $S(m)$ се изразява чрез сумата:

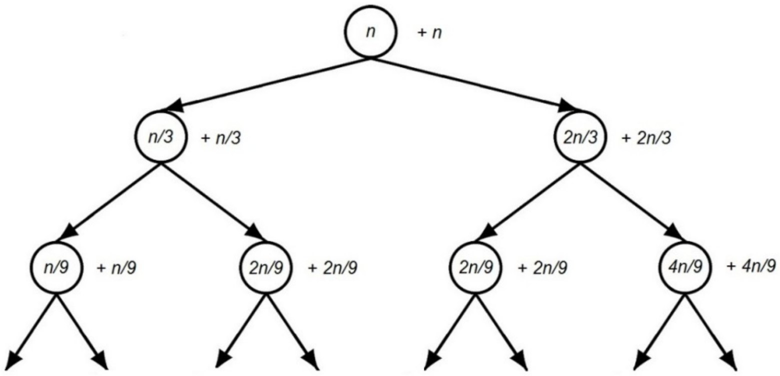
$$S(m) = S(0) + 1 + \frac{1}{2} + \ \dots \ + \frac{1}{m} = S(0) + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i} \asymp \ln m \asymp \lg m = \lg \lg n$$

Пример 14: Да се реши следното рекурентно уравнение:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n$$

Решение:

Да разгледаме фрагмент от дървото на извод за $T(n)$:



Върховете на това дърво представляват стойностите на n за съответното рекурсивно извикване. Отстрани е написана допълнителната работа към всеки връх.

Височината на най-лявото листо е $\log_3 n$. До тази височина дървото е пълно. На всяко ниво до тази височина включително имаме сумарна допълнителна работа n, откъдето получаваме долна граница за сложността на уравнението - $\Omega(n \log n)$.

Можем да докажем, че $\exists c \geq 10$, такова че за достатъчно големи n:

$$T(n) \leq c.n.\lg n$$

Това се проверява непосредствено прилагайки индукционната хипотеза:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + n \leq c.\frac{n}{3}.\lg\frac{n}{3} + c.\frac{2n}{3}.\lg\frac{2n}{3} + n = c.n.\lg n - cn\left(\lg 3 - \frac{1}{c} - \frac{2}{3}\right) \leq c.n.\lg n$$

В такъв случай $T(n) = \Omega(n \log n)$ и $T(n) = O(n \log n)$, откъдето $T(n) = \Theta(n \log n)$.