Коректност на метода на характеристичното уравнение за решаване на линейно-рекурентни уравнения

Стефан Фотев

Пиша този файл, тъй като не успях да намеря в интернет кратко и ясно обяснение на коректността на този метод. Това ме мотивира да изведа сам тези резултати.

Основната ми цел е достъпен и разбираем за запознати читатели текст.

Задача:

Дадено е следното рекурентно уравнение:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k} + \alpha_1^n P_1(n) + \dots + \alpha_s^n P_s(n),$$

където $c_1, \dots, c_k$, са комплексни числа, $c_k \neq 0$, $P_1, \dots, P_s$ са комплексни полиноми, от степени съответно $\delta_1, \dots, \delta_s$, а коефицентите $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ са различни помежду си, ненулеви комплексни числа.

Дадени са начални условия: $a_0 = b_0, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}$.

Изразът $x^k - c_1 x^{k-1} - \dots - c_k$ наричаме *характеристичен полином* на рекурентното уравнение. Изразът $c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k}$ наричаме *хомогенна част*, а $\alpha_1^n P_1(n) + \dots + \alpha_s^n P_s(n)$ - съответно *нехомогенна*.

Нека M е мулти-множество, съставено от корените на характеристичния полином със съответната кратност и константите $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ с кратности съответно $\delta_1 + 1, \dots, \delta_s + 1$.

Тогава решението на рекурентното уравнение има общ вид:

$$\sigma_1^n Q_1(n) + \dots + \sigma_t^n Q_t(n),$$

където $\sigma_1, \dots, \sigma_t$ са различните елементи на M, а $Q_1, \dots, Q_t$ са полиноми от степени, ненадвишаващи броя срещания на $\sigma_1, \dots, \sigma_t$ в M минус единица.

Пример:

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 2^n(n^2 + 5n - 6) + 3^n(4n^2 + 3),$$

$$a_0 = 2,\ a_1 = 166$$

Корените на характеристичния полином $x^2 - 3x + 2$ са 1 и 2.

Мулти-множеството M е съставено от $\{1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3\}$.

В такъв случай общият вид на решението изглежда така:

$$a_n = 1^n \lambda_0 + 2^n(\lambda_1 + \lambda_2 n + \lambda_3 n^2 + \lambda_4 n^3) + 3^n(\lambda_5 + \lambda_6 n + \lambda_7 n^2)$$

Точното решение се намира, след решаване на система линейни уравнения за коефицентите. Тя се получава, чрез оценяване на първите няколко стойности на a_n (началните и евентуално някои допълнителни).

I. Рекурентни уравнения, съдържащи само хомогенна част

Цялата коректност на метода се базира на два тривиални резултата. Ще ги кръстя съответно P-лема и Δ-лема.

***P*-лема:** Нека $P(x)$ е комплексен полином. Тогава за $s \geq 1$:

$$r \text{ е корен на } P \text{ с кратност поне } s \Leftrightarrow P(r) = P'(r) = P''(r) = \dots = P^{(s-1)}(r) = 0$$

Доказателство:

Нека $P(x) = (x-r)Q(x)$, където Q е полином от степен с една по-малко от степента на P. Тогава $P^{(k)}(x) = k.Q^{(k-1)}(x) + (x-r)Q^{(k)}(x)$, откъдето $P^{(k)}(r) = k.Q^{(k-1)}(r)$.

Останалата част от доказателството оставям на читателя за упражнение.

■

Δ-лема: Нека $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ е комплексен полином от степен $n \geq 1$.

Дефинираме рекурсивно оператор Δ_P^k по следния начин:

$$\left| \begin{array}{l} \Delta_P^0(x) = P(x) \\ \Delta_P^{s+1}(x) = x.\left(\Delta_P^s(x)\right)' \end{array} \right.$$

Как изглежда Δ?

$$\Delta_P^1(x) = x.P'(x) = a_1 x + a_2 2x^2 + \dots + a_n n x^n$$

$$\Delta_P^2(x) = x.\left(\Delta_P^1(x)\right)' = a_1 x + a_2 2^2 x^2 + \dots + a_n n^2 x^n$$

$$\vdots$$

$$\Delta_P^s(x) = x.\left(\Delta_P^{s-1}(x)\right)' = a_1 1^s x^1 + a_2 2^s x^2 + \dots + a_n n^s x^n$$

Самата Δ-лема се изразява в следното твърдение:

За $r \neq 0$ и произволно s е вярно:

$$\Delta_P^0(r) = \Delta_P^1(r) = \dots = \Delta_P^{s-1}(r) = 0 \Leftrightarrow P(r) = P'(r) = P''(r) = \dots = P^{(s-1)}(r) = 0$$

Доказателство:

Разглеждаме следната таблица S:

	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	1	3	1			
4	1	7	6	1		
5	1	15	25	10	1	
6	1	..	..	..	..	1

Общата ѝ формула е: $S(i,j) = S(i-1,j-1) + j.S(i-1,j)$

Много лесно с индукция по $s > 0$ се проверява следното твърдение:

$$\Delta_P^s(x) = \sum_{k=1}^{s} S(s,k).x^k.P^{(k)}(x)$$

Сега доказателството на лемата е тривиално и в двете посоки - оставям го на читателя за упражнение.

Забележка: В литературата числата $S(n,m)$ са известни като числа на Стирлинг от втори род.

Следствие: Δ-лемата може да се формулира и така:

$$\Delta_P^0(r) = \Delta_P^1(r) = \ \dots = \Delta_P^{s-1}(r) = 0 \Leftrightarrow r \text{ е корен на } P \text{ с кратност поне } s$$

Това идва директно от еквивалентността в P-лемата.

■

Сега да преминем към коректността на метода. Първо разглеждаме рекурентни уравнения, съдържащи само хомогенна част и оставяме настрана началните условия:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \ \dots + c_k a_{n-k}$$

Свойство 1: Ако редиците $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ са решения на уравнението, то редицата $\{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}$ също е решение.

Свойство 2: Ако редицата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е решение на уравнението и $c \in \mathbb{C}$, то редицата $\{ca_n\}_{n=0}^{\infty}$ също е решение.

Тези две свойства се проверяват непосредствено. Директно следствие от тях е, че решенията на уравнението образуват линейно пространство относно комплексните числа.

Свойство 3: Ако r е корен на характеристичния полином с кратност s, то редиците:

$$\{r^n\}_{n=0}^{\infty}, \{nr^n\}_{n=0}^{\infty}, \dots, \{n^{s-1}r^n\}_{n=0}^{\infty}$$

са решения на уравнението.

Доказателство:

Нека r е корен с кратност s на характеристичния полином, тоест:

$$x^k - c_1 x^{k-1} - \ \dots - c_k = (x-r)^s Q(x),$$

където $Q(x)$ е полином от степен $k - s$, без корен r.

За произволно $n \geq k$ имаме:

$$x^n - c_1 x^{n-1} - \ \dots - c_k x^{n-k} = x^{n-k}(x-r)^s Q(x)$$

Следователно r е корен с кратност s на $P_n(x) = x^n - c_1 x^{n-1} - \ \dots - c_k x^{n-k}$. Очевидно е, че $r \neq 0$, така че можем да приложим следствието от Δ-лемата.

$$\Delta^0_{P_n}(r) = r^n - c_1 r^{n-1} - \dots - c_k r^{n-k} = 0,$$

откъдето $r^n = c_1 r^{n-1} + \dots + c_k r^{n-k}$, но това е за произволно $n \geq k$, така че редицата $\{r^n\}_{n=0}^{\infty}$ е решение на рекурентното уравнение.

Абсолютно аналогично е за $t = 1, \dots, s-1$:

$$\Delta^t_{P_n}(r) = n^t r^n - (n-1)^t c_1 r^{n-1} - \dots - (n-k)^t c_k r^{n-k} = 0,$$

откъдето $n^t r^n = (n-1)^t c_1 r^{n-1} + \dots + (n-k)^t c_k r^{n-k}$, но това е за произволно $n \geq k$, така че редицата $\{n^t r^n\}_{n=0}^{\infty}$ е решение на рекурентното уравнение.

$\blacksquare$

Тривиално следствие от тези свойства:

Нека $a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k}$ е рекурентно уравнение от горния тип. Нека $r_1, \dots, r_m$ са корени на характеристичния му полином с кратности съответно $s_1, \dots, s_m$.

Тогава всяка линейна комбинация на редиците:

$$\begin{array}{cccc}
\{r_1^n\}_{n=0}^{\infty}, & \{n r_1^n\}_{n=0}^{\infty}, & \dots, & \{n^{s_1-1} r_1^n\}_{n=0}^{\infty}, \\
\{r_2^n\}_{n=0}^{\infty}, & \{n r_2^n\}_{n=0}^{\infty}, & \dots, & \{n^{s_2-1} r_2^n\}_{n=0}^{\infty}, \\
 & \vdots & & \\
\{r_m^n\}_{n=0}^{\infty}, & \{n r_m^n\}_{n=0}^{\infty}, & \dots, & \{n^{s_m-1} r_m^n\}_{n=0}^{\infty}
\end{array}$$

е решение на уравнението.

Голямата теорема:

Нека $a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k}$ е рекурентно уравнение от горния тип с начални условия $a_0 = b_0, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}$.

Нека $r_1, \dots, r_m$ са корени на характеристичния му полином с кратности съответно $s_1, \dots, s_m$.

Тогава решението на уравнението може да се представи като линейна комбинация на следните редици:

$$\begin{array}{cccc}
\{r_1^n\}_{n=0}^{\infty}, & \{n r_1^n\}_{n=0}^{\infty}, & \dots, & \{n^{s_1-1} r_1^n\}_{n=0}^{\infty}, \\
\{r_2^n\}_{n=0}^{\infty}, & \{n r_2^n\}_{n=0}^{\infty}, & \dots, & \{n^{s_2-1} r_2^n\}_{n=0}^{\infty}, \\
 & \vdots & & \\
\{r_m^n\}_{n=0}^{\infty}, & \{n r_m^n\}_{n=0}^{\infty}, & \dots, & \{n^{s_m-1} r_m^n\}_{n=0}^{\infty}
\end{array}$$

Доказателство:

Разглеждаме следната матрица:

$$M = \begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\
r_1 & \dots & r_1 & r_2 & \dots & r_m \\
r_1^2 & \dots & 2^{s_1-1} r_1^2 & r_2^2 & \dots & 2^{s_m-1} r_m^2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
r_1^{k-1} & \dots & (k-1)^{s_1-1} r_1^{k-1} & r_2^{k-1} & \dots & (k-1)^{s_m-1} r_m^{k-1}
\end{pmatrix}$$

Ключовото наблюдение е, че редовете ѝ са линейно независими.
Да допуснем, че са линейно зависими с коефиценти $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}$, поне един от които е ненулев.

Разглеждаме полинома $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{k-1} x^{k-1}$.
От линейната комбинация на редовете, имаме следното за стълбовете:

$$\begin{gathered}\Delta_f^0(r_1) = \dots = \Delta_f^{s_1-1}(r_1) = 0 \\ \Delta_f^0(r_2) = \dots = \Delta_f^{s_2-1}(r_2) = 0 \\ \vdots \\ \Delta_f^0(r_m) = \dots = \Delta_f^{s_m-1}(r_m) = 0\end{gathered}$$

Сега от Δ-лемата имаме:

$$\begin{gathered}f(r_1) = f'(r_1) = \dots = f^{(s_1-1)}(r_1) = 0 \\ f(r_2) = f'(r_2) = \dots = f^{(s_2-1)}(r_2) = 0 \\ \vdots \\ f(r_m) = f'(r_m) = \dots = f^{(s_m-1)}(r_m) = 0\end{gathered}$$

От P-лемата следва, че $f(x)$ има корени r_1 с кратност поне s_1, r_2 с кратност поне s_2 , ..., r_m с кратност поне s_m, което е невъзможно, тъй като f е нетривиален полином от степен $\leq k-1$, и няма как да има поне $s_1 + s_2 + \dots + s_m = k$ корена.

В такъв случай съответната детерминанта е ненулева, така че системата:

$$M. \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{k-1} \end{pmatrix}$$

има единствено решение за $\lambda_0, \dots, \lambda_{k-1}$.

Сега редицата с общ член:

$$c_n = \lambda_0 r_1^n + \lambda_1 n r_1^n + \dots + \lambda_{s_1-1} n^{s_1-1} r_1^n + \lambda_s r_2^n + \dots + \lambda_{k-1} n^{s_m-1} r_m^n$$

отговаря на началните условия и е линейна комбинация на редиците:

$$\begin{array}{cccc} \{r_1^n\}_{n=0}^{\infty}, & \{n r_1^n\}_{n=0}^{\infty}, & \dots, & \{n^{s_1-1} r_1^n\}_{n=0}^{\infty}, \\ \{r_2^n\}_{n=0}^{\infty}, & \{n r_2^n\}_{n=0}^{\infty}, & \dots, & \{n^{s_2-1} r_2^n\}_{n=0}^{\infty}, \\ & & \vdots & \\ \{r_m^n\}_{n=0}^{\infty}, & \{n r_m^n\}_{n=0}^{\infty}, & \dots, & \{n^{s_m-1} r_m^n\}_{n=0}^{\infty} \end{array}$$

Оттук директно следва, че тя е решение на рекурентното уравнение.

■

II. Рекурентни уравнения, съдържащи нехомогенна част

Дадено е рекурентно уравнение от горния тип:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k} + \alpha_1^n P_1(n) + \dots + \alpha_s^n P_s(n) \ ,$$

където $c_1, \dots, c_k$, са комплексни числа, $c_k \neq 0$, $P_1, \dots, P_s$ са комплексни полиноми, от степени съответно $\delta_1, \dots, \delta_s$, а коефицентите $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ са различни помежду си, ненулеви комплексни числа.

Ключовото наблюдение е следното:

Лема: Нека $P(x)$ е комплексен полином от степен $n \geq 1$ и $\alpha \neq \beta$ са ненулеви комплексни числа.

Тогава $\alpha P(x) - \alpha P(x-1)$ е полином от степен $n-1$, а $\alpha P(x) - \beta P(x-1)$ е полином отново от степен n.

Доказателство:

Проверява се непосредствено като се разпише полиномът.

■

Забележка: При $n = 0$, $\alpha P(x) - \alpha P(x-1) = 0$.

Къде се използва тази лема?

Да разгледаме изразите за a_n и a_{n-1}.

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k} + \alpha_1^n P_1(n) + \dots + \alpha_s^n P_s(n)$$

$$a_{n-1} = c_1 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k-1} + \alpha_1^{n-1} P_1(n-1) + \dots + \alpha_s^{n-1} P_s(n-1)$$

Умножаваме втория израз с α_1 и го вадим от първия. Получаваме:

$$a_n = (c_1 + \alpha_1) a_{n-1} + \dots + (c_k - \alpha_1 c_{k-1}) a_{n-k} - \alpha_1 c_k a_{n-k-1} + \alpha_1^n R_1(n) + \alpha_2^n Q_2(n) + \dots + \alpha_s^n Q_s(n)$$

От лемата имаме, че R_1 е полином от степен $\deg(P_1) - 1$, а $Q_2, \dots, Q_s$ са полиноми отново от степени съответно $\deg(P_2), \dots, \deg(P_s)$.

Непосредствено се проверява, че характеристичният полином на новата зависимост е:

$$(x^n - c_1 x^{n-1} - \dots - c_k)(x - \alpha_1)$$

Правим това $\delta_1 + 1$ пъти и получаваме рекурентно уравнение с характеристичен полином $(x^n - c_1 x^{n-1} - \dots - c_k)(x - \alpha_1)^{\delta_s + 1}$ и нехомогенна част, несъдържаща изрази с α_1^n.

Сега правим същото за α_2 и така нататък. В крайна сметка получаваме хомогенно рекурентно уравнение с характеристичен полином:

$$(x^n - c_1 x^{n-1} - \dots - c_k)(x - \alpha_1)^{\delta_1 + 1} \dots (x - \alpha_s)^{\delta_s + 1}$$

За него вече знаем какво да правим.

Техническите детайли относно горната конструкция оставям на читателя.