

飛行体の空力安定微係数

(第1報)

銭 福 星

Aerodynamic Stability Derivatives of Flight Vehicles

By

Fu-Hsing TSIEN

Abstract: In recent years a great many investigators have studied aerodynamic problems of low aspect-ratio wing-body combinations such as missiles. This is a report on the problems with which the author has concerned for several years under the tuition of Prof. Ryuma Kawamura.

The report is put emphasis on the lift and center of pressure of low aspect-ratio wing-body combinations at subsonic, transonic, and supersonic speeds. The problems of large aspect-ratio wing-body combinations, very low aspect-ratio wing-body combinations, and wing-body-tail combinations are treated additionally, and useful relations between the results for low and very low aspect-ratio wing-body combinations are derived from practical points of view.

The problems of wing-body combinations at hypersonic speeds and very high supersonic speeds over all limits are treated appendantly to complete the discussion.

概 要

ここでは主としてロケット飛翔体のように縦横比の小さい翼胴結合体の揚力、モーメント、安定微係数を求める問題を扱った。ロケット飛翔体は使命遂行のための消耗品で、高度においてもまた速度やその他の動力学的な運動においても従来の飛行機よりも多くの問題をもっている。構造的には飛翔体は飛行機よりも細長く、胴体と比較して小さい翼をもつ傾向にある。しかし例外も沢山あり、また飛行機の速度の増大と共に両者の構造的な相違も狭くなっている。したがって飛翔体の空気力学の多くは直接飛行機にも使える。

胴体は細長物体の理論によって扱えば実用的に十分間に合うので、ここでは主として翼胴結合体の問題を取り上げた。亜音速、遷音速、超音速における翼胴結合体を中心問題として論じ、附録的に極超音速および極限マッハ数における翼胴結合体の問題を扱った。縦揺れモーメントは揚力と圧力中心位置がわかれば求まる。また全機の重心位置と翼胴結合部との距離が翼弦長に比してある程度大きければ縦揺れ減衰モーメントも近似的に揚力と圧力中心位置を知ることによって計算できる。したがって本報告は主として揚力、圧力中心を求めることに重点をおく。

全部で5章に分け、第1章にて亜音速における翼胴結合体の問題を取り上げる。ここでは附随的に縦横比の大きい翼胴結合体に触れる程度で、重点を縦横比の小さい翼胴結合体においている。しかし縦横比の非常に小さい翼胴結合体の問題は細長物体理論に基づいているので可成り簡単に、しかも簡潔な形で解を得ることができる。ある適当な表現形式を採用すれば細長物体理論の結果を揚力面理論に基づいた縦横比の小さい翼胴結合体の結果と結びつけることができ、実用的に有益な局面が展開され得る。第2章で超音速の問題を論じ、亜音速と超音速との中間をつなぎ合わせるために第3章で遷音速翼胴結合体を取り上げた。議論を首尾一貫させるために附録的に第4章で極超音速における翼胴結合体、第5章で極限マッハ数における翼胴結合体の問題に触れた。

まえがき

飛行体は翼と胴体の結合から成っていて、その推進機構や速度範囲によりいろいろの特徴をもっている。飛行体がプロペラ推進によって飛んでいたいわゆる飛行機の時代では、速度が比較的少く、亜音速でしかも空気の圧縮性はほとんど問題にならなかった。また胴体直径に比しての翼の翼幅が非常に大きいので胴体におよぼす翼の影響または翼におよぼす胴体の影響はあまり重要ではなかった。この様な飛行機に用いられる翼の縦横比は8から10位までの所である。ところがこういう低速飛行機の解析でよく使われている翼胴干渉についての仮定の多くは高速機を解析する場合著しくその有用性を失ってしまう。例えば翼胴結合体の揚力曲線傾斜を胴体を突き抜けた仮想的な翼だけの揚力曲線傾斜で代用するという従来しばしば使われている仮定に対しては胴体直径/翼幅が1/10またはそれ以下ならば誤差5%、この比が1/3ならば誤差20%程度となる。翼胴干渉効果を推定する精度を上げるためにはもっと複雑な、労力と時間を要する計算が必要となるので実用設計の立場からすれば工学者が気持よく計画するような着想ではない。しかし健全な物理的根拠に基づいた大ざっぱな近似や仮定はしばしば多くの実用目的に対して満足すべき結果を与えるので、事態は我々が初めに考えたほど悲観すべきものではない。例えば翼胴結合体の全揚力を推定する場合、干渉効果が揚力の30%に達するとすれば、それを推定する際の誤差が20%あったとしても全体で6%の誤差にしかならず実用的には我慢できる。線型化された翼理論のわく内といえども翼胴結合問題の厳密解はほとんどない。大抵の翼胴干渉理論は翼だけの色々な理論の中でなされた仮定のほかに更に仮定や近似を含んでいる。実用設計のために精度ある簡便な解析法を確立するには翼胴干渉の本質的な物理的内容を把握すると同時に、役に立つ近似理論の基本仮定や限界およびそれら相互の関係を知る必要がある。

本報告はできるだけ実用設計の観点に立って役に立つ理論およびその最近の拡張や新しい展開について、系統的に翼胴結合体の空気力学を解説し、これを基礎にして亜音速、遷音速、超音速、極超音速、更にマッハ数が非常に大きくなった極限等における縦横比の小さい翼胴結合体の揚力、モーメント、安定微係数を求める厳密計算法、近似計算法、簡易計算法を系統的に記述し、これと風洞実験結果との比較検討を行ない、ロケット、誘導飛翔体全般の空気力学的設計に対する基礎を確立せんとするものである。

第 I 章 亜音速における翼胴結合体の安定微係数

1. 緒 言

翼と胴体の干渉についての計算は Lennertz [1] によって初めて取り扱われ、その後多くの人々によって研究されて来た。特に航空機の高速化に伴って翼が段々小さくなり、翼と胴体との間の干渉は実用設計において無視できない問題の一つとなっている。ここでは主として揚力、縦揺れモーメントの安定微係数を求める問題に注意を集中する積りである。

一般に翼胴結合体まわりの流れは翼だけのまわりの流れと胴体だけのまわりの流れとの重ね合わせによっては得られず必ず干渉を伴うものである。この翼胴体干渉問題に対する一般的厳密解を得ることは非常に困難である。それ故多少なりとも解析的取り扱いができるように問題を限定して単純化を行なうのが適当である。このために翼理論において一般的に認められている分類すなわち揚力線理論、揚力面理論および細長翼理論と並行して縦横比の大きい翼胴結合体 ($A=4\sim\infty$)、縦横比の小さい翼胴結合体 ($A=0.5\sim4$)、縦横比の非常に小さい翼胴結合体 ($A=0\sim0.5$) およびそれらの後翼におよぼす影響というように問題を区分して取り扱うことにした。また胴体は無限に長い円柱であると考える。

2. 縦横比の大きい翼胴結合体

Lennertz [1] は始めて揚力線理論に基づいて最小誘導抵抗および翼幅方向循環分布一定の翼胴結合体に対する揚力を計算した。彼は円形断面の無限長円柱に翼を取り付け、翼を 1 本の揚力線でおきかえ、Trefftz 面の胴体内に像渦を考えて翼胴結合体の干渉問題を取り扱った。Lennertz の解法は Pepper [2] により任意断面形胴体の翼胴結合体に一般化された。Flax [3] はグリーンの定理を利用して翼胴結合体に関する逆流定理を導いている。この定理に基づいて翼、胴体およびその結合体にかかる揚力やモーメント間の関係を得ることができる。揚力線理論ではこの関係は非常に簡単になるがそれでも翼幅方向にわたる翼上の揚力分布を仮定しなければならない。揚力線理論に従って翼胴結合体の全揚力を求める変分法が Flax and Treanor [4] によって与えられている。変分方程式は Rayleigh-Ritz 法により単位翼幅揚力に対する二項近似を使って解かれる。この場合一項近似を使えばその結果は Lennertz [1] および Spreiter [5] の結果と一致する。この変分法により色々の縦横比、先細比および胴体直径/翼幅に対する一連の翼胴結合体の揚力が文献 [4] で計算されている。

Multhopp [6] は胴体を迎角 α_B の無限長柱とし、翼を迎角 α_W でその空力中心を通り対称面に垂直な 1 本の揚力線でおきかえ、更に後流渦線が柱状胴体の母線に平行であるという三つの仮定に基づいて縦横比の大きい翼胴結合体に対して実用的に可成りよい近似解析法を提案している。これによって翼、胴体上の翼幅方向揚力分布が計算され、またマッハ数の影響をも考慮に入れることができる。Lawrence and Flax [7] は Multhopp の線に沿って任意断面形無限長柱状胴体に取り付けられた揚力面の問題を数式化し、これに基づいて統一した観点から縦横比の大きい翼胴結合体、縦横比の小さい翼胴結合体および縦横比の非常に小

さい翼胴結合体に対する近似解を導いている。彼等はまたこれを Weissinger-type の翼理論 [10] と組み合わせ、更に後退翼胴結合体の問題に触れている。Weber, Kirby and Kettle [8] は Multhopp の方法を拡張して縦横比の小さいまたは後退している翼胴結合体の問題を扱った。

3. 縦横比の小さい翼胴結合体

縦横比が 0.5~4 の間の小さい翼胴結合体では、胴体の近くで胴体の吹き上げによる迎角の変化が急激であるために第2節で述べた揚力線による方法も、また第4節で述べる細長物体理論による方法もいずれもよい近似を与えることができない。しかもロケット、誘導飛翔体の形状がすべてこの範囲にはいっているばかりでなく、ジェット飛行機の形状もまたこの範囲にはいる傾向にある。以下にこの種の形状の空力特性を計算する方法を紹介し、実験結果との比較検討を行なう。

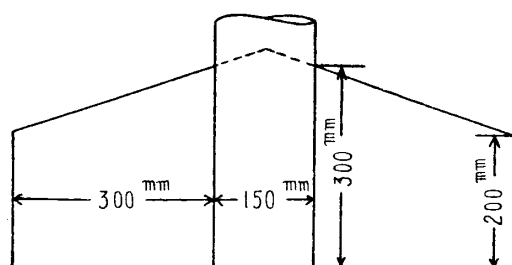
3.1. 単純計算法

縦横比の小さい翼胴結合体の揚力係数傾斜、縦揺れモーメント係数傾斜は幾何学的に相似な形状の翼を用いた場合大体翼面積と翼の位置に関するものと思われる。翼面積は胴体に覆われた部分をも含めてとるものとする。したがって

$$\left. \begin{aligned} (C_{La})_{\text{eff}} &= C_{La} \cdot (\text{胴体断面積} / \text{翼面積}), \\ (C_{Ma})_{\text{eff}} &= C_{Ma} \cdot (\text{胴体断面積} / \text{翼面積}) (\text{模型全長} / \text{有効腕長}) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

で定義される $(C_{La})_{\text{eff}}$, $(C_{Ma})_{\text{eff}}$ を求めておけば、これらは大体翼の形状だけに関するものと思われる。ここで C_{La} , C_{Ma} は胴体断面積、全長を基準にした係数で有効腕長は三角翼ならば模型前端から重心点までの距離、矩形翼ならば模型前端から 25% 翼弦までの長さをとるものとする。

縦横比の小さい翼胴結合体の翼効率の計算に対する最も簡単な近似は、胴体に覆われた部分をも翼面積に入れて、これに縦横比の小さい翼の揚力問題に関する Lawrence の理論 [9] を適用することである。この近似法による揚力、モーメントの計算結果は 10% の範囲内で実験と合うことがわかった。縦横比の小さい翼の揚力については Weissinger [10] が独立に Lawrence とは異なる小縦横比に対する近似を使って求めている。その結果は Lawrence のものとはほとんど同じである。Lawrence は翼弦方向の揚力分布を求めているが、Weissinger は翼幅方向の揚力分布を求めている。この問題についての De Young [11] の取り扱いもある。



第1図 代表的ロケットの翼胴結合体。

いま代表的ロケットの翼胴結合体の1例として第1図のような形状の揚力係数傾斜(exposed wing area 基準で考える)に対する単純計算法の結果と実験結果とを比較してみると、exposed wing ($A = 2.4$) の C_{La} は Lawrence の方法にて 2.59 で実験値の 3.53 よりも 27% 小さい。胴体を突き抜けた翼の部分を考慮して、単純計算法で求めた結果が

3.9 で実験値よりも 10.5 % 大きい. 第 1 図の形状を翼胴結合体として干渉を考慮に入れた計算については次節で述べる積りである.

次に全長 892 mm, 胴体直径 50 mm で (a) 翼幅 250 mm (basic wing), $A=2$ の三角翼, (b) 翼幅 192 mm, $A=2$ の三角翼, (c) 翼幅 150 mm, $A=1.5$ の矩形翼, (d) 翼幅 120

mm, $A=1.7$ の矩形翼の 4 種類の翼胴結合体の計算値と実験値とを第 1 表に示す. 計算ではいずれも胴体部 $C_{La}=2$ (胴体断面積基準) を勘定に入れている. 第 1 表から明らかなように誤差は高々 10 % 程度である. なお以上の実験はすべて東大航研口径 2 メートル低速風洞によって得られた結果である.

第 1 表

Case		a	b	c	d
$(C_{La})_{eff}$	理 論	2.29	2.36	2.16	2.47
	実 験	2.16	2.23	2.04	2.21
$(C_{Ma})_{eff}$	理 論	2.17	2.21	1.91	1.96
	実 験	2.17	2.02	1.91	1.84

3.2. 翼, 胴体相互の干渉を考慮した計算

干渉を考慮して縦横比の小さい翼胴結合体の空力特性を求める問題が Lawrence [12] によって扱われている. Prandtl-Glauert 変換を行なえばこの方法に従って圧縮性の影響を勘定に入れることができる. ここでは Lawrence の方法について以後の展開に必要な部分だけを取り上げることとする.

後縁が流れに直角な縦横比の小さい翼と無限に長い円形断面の円柱胴体とをともに迎角 α で結合した時の翼胴結合体まわりの流れの速度ポテンシャルは胴体だけによるポテンシャル ϕ_0 と翼があるために生ずる擾乱速度ポテンシャル $U\phi$ とに分けて考える. ϕ が満足する微分方程式および境界条件は次のようになる.

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0, \quad (\text{流れ場の中}) \quad (1.2)$$

$$\phi_z = -\alpha(1 + a^2/y^2), \quad (\text{翼面上}) \quad (1.3)$$

$$\phi_r = 0, \quad (\text{胴体面上}) \quad (1.4)$$

$$\phi = 0. \quad (x = -\infty) \quad (1.5)$$

ここで x は胴体軸上における流れ方向の座標, y は翼の面の上で x 軸に直角な翼幅方向の座標, z は x, y 軸に垂直な上向きの座標で右手系をなしている. a は胴体半径で, また $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ である. 圧力分布は Bernoulli の線型化された式によって得られる. 本来圧力の計算では ϕ_0 をも考慮せねばならないが今の場合これによる揚力への貢献は 0 である.

(1.2)~(1.5) および Kutta の条件によりこの境界値問題は一義的に定まる. 以上の微分方程式や境界条件を満足する ϕ に対して次のように未定関数 $u(x, y)$ を含む表現を行なう.

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\infty} \frac{zu(\xi, \eta)}{(y-\eta)^2 + z^2} \left\{ 1 + \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} \right\} d\xi d\eta. \quad (1.6)$$

(1.6) の ϕ が (1.2) および (1.5) を満足することは明らかである. 積分は $z=0$ の全領域にわたるが実際には翼面 (R_w) および胴体を突き抜けた翼の部分 (R_B) にわたって行なえばよい. (1.6) を x で微分すれば $z \rightarrow \pm 0$ では $\phi_x(x, y, +0) = u(x, y)$, $\phi_x(x, y, -0) = -u(x, y)$ となる. したがって線型化された Bernoulli の式から, 翼面上単位面積当り揚力 $l(x, y)$ は

$$l(x, y) = 2\rho U^2 u(x, y). \quad (1.7)$$

ゆえに翼に働く単位翼弦長当りの揚力 $L_W'(x)$ は

$$L_W'(x) = 4\rho U^2 \int_a^{b(x)} u(x, y) dy. \quad (1.8)$$

ここで $b(x)$ は局所半翼幅である。単位翼弦長当りの胴体に働く揚力 $L_B'(x)$ は

$$L_B'(x) = \rho U^2 \int_0^{2\pi} d\theta a \cos \theta \phi_x(x, a, \theta). \quad (1.9)$$

ただし胴体上では $z = a \cos \theta$, $y = z \sin \theta$ である。

境界条件 (1.4) を考える場合、翼胴結合体を細長いと考え、それに応じた近似を行なえば Lennertz [1] の翼胴結合体に対する翼渦と像渦の関係に類似した $\phi(x, y)$ についての次の関係式を導くことができる。

$$\phi(x, y) = 0, \quad (|y| < a^2/b) \quad \text{および} \quad \phi(x, a^2/y) = \phi(x, y), \quad (a^2/b < |y| < b). \quad (1.10)$$

(1.10) を使えば (1.9) は近似的に次のようになる,

$$L_B'(x) = 4\rho U^2 \int_n^{b(x)} \frac{a^2}{\eta^2} u(x, \eta) d\eta. \quad (1.11)$$

(1.8) と (1.11) により単位翼弦長当りの翼胴結合体の揚力を $2\rho U^2 g'(x)$ とすれば

$$g'(x) = 2 \int_a^{b(x)} u(x, \eta) \left(1 + \frac{a^2}{\eta^2}\right) d\eta. \quad (1.12)$$

境界条件 (1.3) を書きなおして

$$\alpha \left(1 + \frac{a^2}{y^2}\right) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \iint_{RW+RB} \frac{d\xi d\eta u(\xi, \eta)}{y - \eta} \left\{1 + \frac{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}{x - \xi}\right\}. \quad (1.13)$$

再び (1.10) の関係式を使い、また単一変数の積分方程式を得るために細長い翼胴結合体に関する荷重関数 $\sqrt{(b + a^2/b)^2 - (y + a^2/y)^2}$ を (1.13) の両辺にかけて翼幅にわたって積分し、縦横比の小さい翼に対する Lawrence の近似 [9] を適用すれば次の結果が得られる、

$$f(x) = \frac{1}{2} g(x) + \frac{1}{4} \int_{-c}^c d\xi g'(\xi) \left\{1 + \frac{\sqrt{(x - \xi)^2 + (b - a)^2}}{x - \xi}\right\}. \quad (1.14)$$

ただし

$$f(x) = \int_{-b}^{-a} + \int_a^b dy \alpha \left(1 + \frac{a^2}{y^2}\right) \sqrt{\left(b + \frac{a^2}{b}\right)^2 - \left(y + \frac{a^2}{y}\right)^2}. \quad (1.15)$$

以上が縦横比の小さい翼胴結合体の空力特性を求めるために Lawrence によって展開された方法である。(1.14) の右辺第2項の積分は翼付根の前縁から後縁までの範囲である。積分方程式 (1.14) を数値的に解けば揚力、モーメント、圧力中心等を求めることができる。この積分方程式の数値計算に関しては翼だけの場合について文献 [9] で述べられた方法を少し修正すればよい。

この方法によって求めた第1図の形状に対する $C_{L\alpha}$ の計算値は exposed wing area 基準にして 3.77 となり実験値よりも 6.8% 大きい。なお一連の三角翼胴結合体の揚力、モーメントについての計算結果が第8、第9図に示されており、そこで細長物体理論の結果や風洞実験結果と比較されている。翼胴結合体の圧力中心は exposed wing の圧力中心よりも付

根翼弦長基準にして数パーセント前方へ移動する。この値は翼形状や胴体直径/最大翼幅の値によってきまる。例えば $A=2$ の三角翼の圧力中心は前縁から 57% の所にあるが、これと胴体とが結合した場合、胴体直径/最大翼幅=0.3 では 53% となる。

(1.14) において $a \rightarrow 0$ ならば

$$\lim_{a \rightarrow 0} f(x) = \int_{-b(x)}^{b(x)} \alpha(x, y) \sqrt{b(x)^2 - y^2} dy$$

となり、これは翼だけの空力特性を求める問題となる。特に矩形翼胴結合体では exposed wing alone から得た $C_{L\alpha}$ に $(1+a/b)^2(1-a/b)$ なる係数をかければその結合体の $C_{L\alpha}$ (胴体を突き抜けた basic wing area 基準) となることが示され得る。

操舵翼胴結合体すなわち胴体迎角 0 で、翼だけ迎角 δ の場合には (1.14) の $f(x)$ は次のようになる、

$$f(x) = \int_{-b}^{-a} + \int_a^b \delta \sqrt{(b+a^2/b)^2 - (y+a^2/y)^2} dy$$

$$= \frac{\pi}{2} b^2 \delta \left\{ 1 + \frac{a^4}{b^4} - \frac{2}{\pi} \frac{a}{b} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) - \frac{1}{\pi} \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2 \sin^{-1} \left(\frac{2a/b}{1+a^2/b^2} \right) \right\}.$$

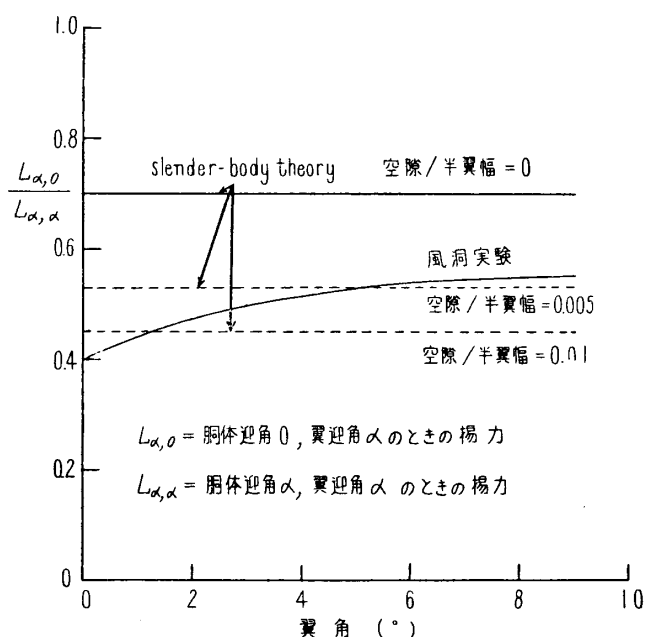
特に矩形操舵翼胴結合体では exposed wing alone の揚力係数に

$$\left\{ 1 + \frac{a^4}{b^4} - \frac{2}{\pi} \frac{a}{b} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) - \frac{1}{\pi} \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2 \sin^{-1} \left(\frac{2a/b}{1+a^2/b^2} \right) \right\} / \left(1 - \frac{a}{b} \right)$$

をかければ操舵翼胴結合体の揚力係数 (basic wing area 基準) が得られる。三角形操舵翼胴結合体や切り欠けた三角形操舵翼胴結合体に関しては上のような簡単な結果は得られないが上述の線に沿って数値計算を行えばよい。時間の都合で数値計算を遂行していないが一応第 2 図に操舵翼胴結合体についての風洞実験結果と細長物体理論結果との比較を示している。

しかし次節で強調されるように、比の形で表わすと細長物体理論結果は縦横比の小さい翼胴結合体の結果とほとんど一致する。ところが第 2 図の実験結果は胴体と翼との間に空隙があるので、適当な修

正を行なえば細長物体理論結果を実験結果に近づけることができる。フラップの場合には、それに対応して (1.15) の α を x, y の関数としてやれば干渉を考慮した計算を行なえる。



第 2 図 三角形操舵翼胴結合体の効き。
 $A=2$, 胴体直径/最大翼幅=0.3846.

3.2.1. 翼胴結合体における胴体部分の揚力

縦横比の大きい翼胴結合体の胴体部分の揚力については第2節で述べたような方法[1][2][3][6][7][8]によって求められ、また縦横比の非常に小さい翼胴結合体の胴体部分の揚力は細長物体理論によって得られる。しかし縦横比の小さい翼胴結合体ではこれらの方法はよい近似を与えることができない。ここでは無限長円柱に縦横比の小さい翼を流れに対して同じ迎角で取り付け、翼胴結合体に対する Lawrence [12] の揚力面理論と細長い翼胴結合体に対する複素ポテンシャルの荷重関数 [13] を使って縦横比の小さい翼胴結合体の胴体部分の揚力を求めた。この方法は矩形翼胴結合体ばかりでなく、三角翼胴結合体や後縁が流れに直角な一般平面形翼胴結合体にも適用できる。この結果は縦横比が 0~4 までの範囲でよい近似を与えると考えられ、また Prandtl-Glauert 変換を適用すれば圧縮性の影響を考慮に入れることができる。

一般に翼と胴体とが同じ迎角 α で結合されている時、その間に干渉が起こり、胴体のまわりの吹き上げのために翼は

$$\alpha_g = \alpha(1 + a^2/y^2) \quad (1.16)$$

なる幾何学的迎角で振れ、胴体は迎角 0 という問題になおすことができる。このように胴体の迎角が 0 で、翼だけ迎角がある翼胴結合体においてはもし翼の縦横比がほとんど 0 に等しいという非常に小さくなった極限ならば、流れ方向の加速度を省略して cross flow に関する二次元問題として取り扱うことができる。ところが縦横比が 0~4 の範囲にある小さい翼胴結合体では三次元的な吹き下しが誘起され、cross flow field に実質的な影響を与える。

したがって縦横比の小さい翼の幾何学的迎角を (1.16) に与えられているような α_g とすれば、胴体迎角 0 では cross flow field に上述の三次元誘導速度が重畳され、翼は空気力学的迎角

$$\alpha_a = \alpha_g - \alpha_i \quad (1.17)$$

で cross flow を受けると考えることができる。ここで α_a は空気力学的迎角、 α_i は三次元的な誘導吹き下しによる誘導迎角である。この誘導迎角 α_i は翼の縦横比が小さくなればなるほど 0 に近づく。したがってなんらかの方法でこの α_i が求められれば空気力学的迎角 α_a は (1.17) により得られる。

一方縦横比がほとんど 0 に近いような非常に小さい翼胴結合体において胴体の迎角 0、翼の微小翼幅 $\Delta\eta$ の chordwise strip だけが迎角 α を有し、翼の他の部分も迎角 0 の場合この翼胴結合体の横断面を単位円に写像して複素ポテンシャル関数を求めると次のごとく得られる。

$$F(x, \zeta) = \phi + i\psi, \quad \zeta = y + iz, \quad (1.18)$$

$$F(x, \zeta) = \frac{\alpha \Delta\eta}{2\pi} \log \left\{ \frac{H(\zeta) + H(\eta)}{H(\zeta) - H(\eta)} \right\}. \quad (1.19)$$

ここで ϕ は速度ポテンシャル、 ψ は流れ関数、また関数 H は

$$H(\zeta) = \sqrt{(b + a^2/b)^2 - (\zeta + a^2/\zeta)^2} \quad (1.20)$$

である。

縦横比の小さい翼胴結合体においては (1.19) に現われた関数

$$\log \left\{ \frac{H(\zeta) + H(\eta)}{H(\zeta) - H(\eta)} \right\}$$

を複素ポテンシャルに対する荷重関数と考え、(1.17) から得た空気力学的迎角 α_a を用い、翼が左右対称であることを考慮して複素ポテンシャル関数を次のごとく表わすことができる

$$\phi + i\psi = \frac{1}{\pi} \int_a^b d\eta \alpha_a(x, \eta) \log \left\{ \frac{H(\zeta) + H(\eta)}{H(\zeta) - H(\eta)} \right\}. \quad (1.21)$$

ここでポテンシャルは単位の一様流速に対して表わしている。(1.21) により速度ポテンシャル ϕ が求まれば胴体面上の圧力分布がわかり、単位翼弦長当りの胴体部分の揚力は次のようにして計算される。

$$\begin{aligned} L'_B(x) &= \rho U^2 \int_0^{2\pi} d\theta a \cos \theta \phi_x(x, a, \theta) \\ &= 4\rho U^2 \int_0^a \phi_x(x, y) dy. \end{aligned} \quad (1.22)$$

次に誘導迎角 α_i を求めることを考える。これについても Lawrence [12] によって以下のごとく得られている。条件式 (1.10) を適用することにより、空気力学的迎角の意味から考えて (1.13) は次のごとく書ける。

$$\alpha_a(x, y) = \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_a^b d\eta \phi(x, \eta) \left\{ \frac{y}{y^2 - \eta^2} + \frac{a^2}{\eta^2} \frac{y}{y^2 - (a^4/\eta^2)} \right\}. \quad (1.23)$$

誘導迎角を x のみの関数として扱い、(1.23) を書き直すと

$$\alpha_g(x, y) - \alpha_i(x) = \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_a^b d\eta \phi(x, \eta) \left\{ \frac{y}{y^2 - \eta^2} + \frac{a^2}{\eta^2} \frac{y}{y^2 - (a^4/\eta^2)} \right\}. \quad (1.24)$$

上式の両辺に $\sqrt{(b+a^2/b)^2 - (y+a^2/y)^2}$ をかけて半翼幅にわたって積分すれば

$$\alpha_i(x) = \frac{f(x) - g(x)}{(\pi/2)b^2\mu(a/b)}. \quad (1.25)$$

ここで

$$\begin{aligned} \mu(a/b) &= (4/\pi b^4) \int_a^b dy \sqrt{(b+a^2/b)^2 - (y+a^2/y)^2} \\ &= 1 + \frac{a^4}{b^4} - \frac{2}{\pi} \frac{a}{b} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) - \frac{1}{\pi} \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2 \sin^{-1} \left(\frac{2a/b}{1 + a^2/b^2} \right). \end{aligned} \quad (1.26)$$

(1.14) から近似的に $g(x)$ を求め、これを (1.25) に代入して誘導迎角 $\alpha_i(x)$ を求めることができる。翼胴結合体や操舵翼胴結合体に対する $\alpha_i(x)$ がわかれば上述の方法で胴体部分の揚力を計算できる。

矩形翼胴結合体では (1.15) から明らかなように b = 一定なるゆえ $f(x)$ は x に無関係である。また (1.21) より胴体面上 ($\zeta = ae^{i\theta}$, $y = a \sin \theta$) では

$$\phi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_a^b d\eta \alpha_a(x, \eta) \log \left\{ \frac{\sqrt{(b+a^2/b)^2 - 4y^2} + \sqrt{(b+a^2/b)^2 - (\eta+a^2/\eta)^2}}{\sqrt{(b+a^2/b)^2 - 4y^2} - \sqrt{(b+a^2/b)^2 - (\eta+a^2/\eta)^2}} \right\}. \quad (1.27)$$

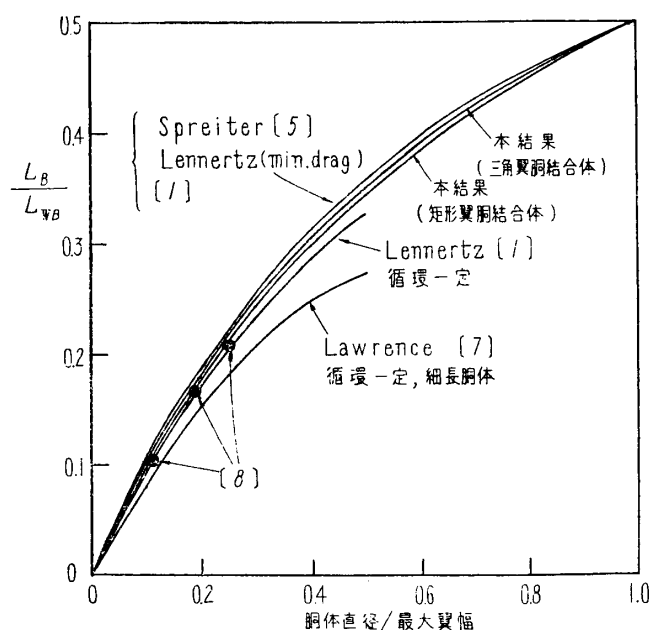
これを x で微分してから (1.22) に代入し、積分順序を変更すれば単位翼弦長当りの胴体部分の揚力は次のようになる。

$$L_B'(x) = \frac{8\rho U^2 g'(x)}{\pi^2 b^2 \mu(a/b)} \int_a^b P(\eta) d\eta. \quad (1.28)$$

ただし

$$P(\eta) = a \log \left\{ \frac{\sqrt{A^2 - a^2} + AB}{\sqrt{A^2 - a^2} - AB} \right\} + 2AB \sin^{-1} \frac{a}{A} - A \sqrt{1 - B^2} \log \left\{ \frac{\sqrt{(1 - B^2)(A^2 - a^2)} + Ba}{\sqrt{(1 - B^2)(A^2 - a^2)} - Ba} \right\},$$

$$A = \frac{1}{2} \left(b + \frac{a^2}{b} \right), \quad B = \sqrt{1 - \left(\frac{\eta + a^2/\eta}{b + a^2/b} \right)^2}.$$



第3図 翼胴結合体の胴体部分の揚力。

(1.28) から胴体部分の揚力を求めた結果が第3図に示されている。ここで $P(\eta)$ の式の右辺第1項と第3項が対数になっていることが注目される。 $\eta \rightarrow a$ の極限ではこれらの対数の括弧の中はいずれも分母が0となり特異性は互いに消し合い正則点になることが容易に示され得る。また $b \rightarrow a$ の極限では縦横比の非常に小さい翼胴結合体に相当するが、この場合胴体部分の揚力が結合体全揚力の丁度半分になることが (1.28) の極限值をとることにより示される。この結果は Spreiter [5] の結果と一致する。 $b \rightarrow \infty$ ならば (1.27)

に立ちかえり、この $\phi(x, y)$ に基づいて胴体部分の揚力を求め結合体の全揚力との比をとると0となる。これは従来の揚力線理論の結果と一定する。

三角翼胴結合体では b は x の関数となるので $f(x)$ は x に従って変化する。今便宜上翼弦長を2とし、翼胴体付根の前縁を $x = -1$ 、後縁を $x = 1$ とする。しかるとき (1.22) を x で積分して胴体部分の揚力を求めると

$$L_B = 4\rho U^2 \int_a^b [\phi(1, y) - \phi(-1, y)] dy. \quad (1.29)$$

ここで

$$\phi(\pm 1, y) = \frac{1}{\pi} \int_a^{b(\pm 1)} d\eta \alpha_a(\pm 1, \eta)$$

$$\times \log \left[\frac{\sqrt{\{b(\pm 1) + a^2/b(\pm 1)\}^2 - 4y^2} + \sqrt{\{b(\pm 1) + a^2/b(\pm 1)\}^2 - (\eta + a^2/\eta)^2}}{\sqrt{\{b(\pm 1) + a^2/b(\pm 1)\}^2 - 4y^2} - \sqrt{\{b(\pm 1) + a^2/b(\pm 1)\}^2 - (\eta + a^2/\eta)^2}} \right],$$

$$\alpha_a(\pm 1, \eta) = \alpha \left(1 + \frac{a^2}{\eta^2} \right) - \frac{f(\pm 1) - g(\pm 1)}{(\pi/2)b(\pm 1)^2 \mu\{a/b(\pm 1)\}}.$$

一般に $g(-1) = 0$ 、また三角翼胴結合体では $f(-1) = 0$ 、 $b(-1) = a$ である。したがって胴

体部分の揚力は (1.29) から

$$L_B = \frac{4\rho U^2}{\pi} \int_a^{b(1)} d\eta \left[\alpha \left(1 + \frac{a^2}{\eta^2} \right) - \frac{f(1) - g(1)}{(\pi/2)b(1)^2 \mu \{a/b(1)\}} \right] P(\eta). \quad (1.30)$$

ここで $P(\eta)$ は前に示した式と同じで、ただそこで b の代りに $b(1)$ を代入すればよい。

特に矩形翼胴結合体では $g(-1)=0$, $f(-1)=f(1)$, $b(-1)=b(1)=b$. したがって (1.29) より

$$L_B = \frac{8\rho U^2 g(1)}{\pi^2 b^2 \mu(a/b)} \int_a^b P(\eta) d\eta. \quad (1.31)$$

これは (1.28) と完全に一致する。

(1.30) から三角翼胴結合体の胴体部分の揚力を求めた結果が第 3 図に示されている。(1.30) において $\eta \rightarrow a$ なる時 $P(\eta)$ に対数的特異性がないことは前と同じである。また $b(1) \rightarrow a$ では胴体部分の揚力と結合体全揚力との比が $1/2$, $b(1) \rightarrow \infty$ の時その比が 0 となることも矩形翼胴結合体の場合と同じようにして証明される。

一般に翼後縁が流れに直角で局所半翼幅が流れの方向に対して減少しないならば胴体部分の揚力は (1.29) にしたがって計算することができる。この場合についての計算を行なわなかったが、胴体部分の揚力は矩形翼胴結合体と三角翼胴結合体の中間に来ることが予想される。また操舵翼胴結合体についても同じ線に沿って計算を進めることができる。

胴体直径/翼幅が小さい場合には揚力線理論は胴体部分揚力/結合体揚力に対してはよい近似を与え、この比が 1 に近くなると細長物体理論がよい結果を与える。第 3 図からわかるように揚力線理論は a/b が 1 に近づくと近似が悪い。ところが $a/b \div 1$ で正しいと思われる Spreiter の結果は $a/b \div 0$ でも揚力線理論による結果とよく合う。このことから胴体部分揚力/結合体揚力の形で表わす限り Spreiter の結果は a/b の全領域にわたってよい近似であると考えられる。本報告は矩形翼胴結合体、三角翼胴結合体の胴体部分揚力を揚力面理論によって求めているが、計算結果は Spreiter の曲線に非常に近い。しかも $a/b \div 0$ で揚力線の結果と一致し、 $a/b \div 1$ で Spreiter の結果と一致する。本報告の方法は縦横比の小さい翼の揚力面理論から出発している。しかもその結果が揚力線理論結果や細長物体理論結果よりもよい近似であることが実験的に証明されている。したがって本報告の結果は a/b の全領域にわたり Spreiter や揚力線理論よりもよい近似であるように思われる。特に縦横比の小さい翼胴結合体においてはよい近似であると考えられる。しかし比の形で表わすと本報告の結果は Spreiter の結果とよく合う。このことから実用的に次の重要な結論を引き出すことができる。すなわちなんらかの方法で揚力面理論に基づいて翼だけの揚力、または翼胴結合体全揚力を求めることができれば細長物体理論による比の値と等しいとおくことにより他の部分の揚力を求めることができる。このことを第 5 節で再び取り上げて風洞実験との比較検討を行なう積りである。

3.2.2. 翼胴結合体における翼幅方向揚力分布

(1.21) から擾乱速度ポテンシャル ϕ が求まれば、これを x で微分することにより翼上および胴体上の圧力分布が得られる。この圧力分布を翼弦方向に積分してやれば翼幅方向揚力分布が求まる。また arm をかけて積分することによりモーメントが得られる。特に操舵

翼胴結合体の舵角による操舵トルクを計算したり、または強度上の観点から翼付根まわりのモーメントを算出するのに役立つ。

ここでは翼胴結合体の翼幅方向揚力分布および前縁まわりの翼部分によるモーメントについての計算結果を示す。これは浅井貞重 [14] によって得られたもので実質的には著者のすめと指導によって遂行されたものである。すなわち矩形翼胴結合体の翼幅方向揚力分布については翼上で

$$\begin{aligned} \frac{dL_w}{dy} = \frac{8\rho U^2 g(1)}{\pi^2 b^2 \mu(a/b)} & \left\{ \frac{A\sqrt{1-B^2}}{2} \log \left| \frac{\sqrt{(1-B^2)(A^2-4a^2)}+2aB}{\sqrt{(1-B^2)(A^2-4a^2)}-2aB} \right| \right. \\ & \left. + AB \left(\pi - \sin^{-1} \frac{2a}{A} \right) - a \log \left| \frac{B+\sqrt{1-(2a/A)^2}}{B-\sqrt{1-(2a/A)^2}} \right| \right\}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

胴体上で

$$\begin{aligned} \frac{dL_B}{dy} = \frac{8\rho U^2 g(1)}{\pi^2 b^2 \mu(a/b)} & \left\{ \frac{A\sqrt{1-C^2}}{2} \log \left| \frac{\sqrt{(1-C^2)(A^2-4a^2)}+2aC}{\sqrt{(1-C^2)(A^2-4a^2)}-2aC} \right| \right. \\ & \left. + AC \left(\pi - \sin^{-1} \frac{2a}{A} \right) - a \log \left| \frac{C+\sqrt{1-(2a/A)^2}}{C-\sqrt{1-(2a/A)^2}} \right| \right\}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

また三角翼胴体結合では

$$\begin{aligned} \frac{dL_w}{dy} = \frac{4\rho U^2}{\pi} & \left[\left\{ 2\alpha - \frac{f(1)-g(1)}{(\pi/2)b^2\mu(a/b)} \right\} \left\{ \frac{A\sqrt{1-B^2}}{2} \log \left| \frac{\sqrt{(1-B^2)(A^2-4a^2)}+2aB}{\sqrt{(1-B^2)(A^2-4a^2)}-2aB} \right| \right. \right. \\ & \left. + AB \left(\pi - \sin^{-1} \frac{2a}{A} \right) - a \log \left| \frac{B+\sqrt{1-(2a/A)^2}}{B-\sqrt{1-(2a/A)^2}} \right| \right. \\ & \left. - \alpha \left\{ A\sqrt{1-B^2} \log \left| \frac{\sqrt{(1-B^2)(A^2-4a^2)}+2aB}{\sqrt{(1-B^2)(A^2-4a^2)}-2aB} \right| \right. \right. \\ & \left. \left. + AB \left(\pi - 2 \sin^{-1} \frac{2a}{A} \right) - 2a \log \left| \frac{B+\sqrt{1-(2a/A)^2}}{B-\sqrt{1-(2a/A)^2}} \right| \right\} \right], \end{aligned} \quad (1.34)$$

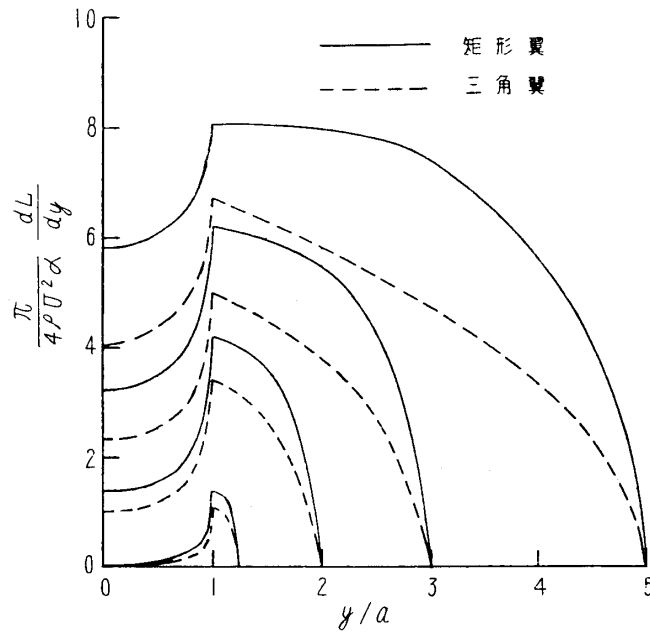
$$\begin{aligned} \frac{dL_B}{dy} = \frac{4\rho U^2}{\pi} & \left[\left\{ 2\alpha - \frac{f(1)-g(1)}{(\pi/2)b^2\mu(a/b)} \right\} \left\{ \frac{A\sqrt{1-C^2}}{2} \log \left| \frac{\sqrt{(1-C^2)(A^2-4a^2)}+2aC}{\sqrt{(1-C^2)(A^2-4a^2)}-2aC} \right| \right. \right. \\ & \left. + AC \left(\pi - \sin^{-1} \frac{2a}{A} - \frac{\pi A}{2} \right) \sqrt{\left(\frac{2a}{A} \right)^2 + C^2 - 1} - a \log \left| \frac{C+\sqrt{1-(2a/A)^2}}{C-\sqrt{1-(2a/A)^2}} \right| \right. \\ & \left. - \alpha \left\{ A\sqrt{1-C^2} \log \left| \frac{\sqrt{(1-C^2)(A^2-4a^2)}+2aC}{\sqrt{(1-C^2)(A^2-4a^2)}-2aC} \right| + AC \left(\pi - 2 \sin^{-1} \frac{2a}{A} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - 2a \log \left| \frac{C+\sqrt{1-(2a/A)^2}}{C-\sqrt{1-(2a/A)^2}} \right| \right\} \right]. \end{aligned} \quad (1.35)$$

ただし (1.34), (1.35) の b は $b(1)$ のことであり、また

$$A = b + a^2/b, \quad B = \sqrt{1 - (y + a^2/y)^2/A^2}, \quad C = \sqrt{1 - 4y^2/A^2}.$$

(1.32)~(1.35) の計算結果が第4図に示されている。

なお翼胴結合体の前縁まわりのモーメントについては翼部分によるものだけを式で示し、数値計算結果を略する。すなわち矩形翼胴結合体では



第 4 図 縦横比の小さい翼胴結合体の翼幅方向揚力分布.
翼付根翼弦長=胴体直径

$$M_w = \frac{4\rho U^2}{\pi} \int_a^b dy \int_{-1}^1 (x+1) \frac{g'(x)}{(\pi/2)b^2\mu(a/b)} \times \int_a^b \log \frac{\sqrt{(b+a^2/b)^2 - (y+a^2/y)^2} + \sqrt{(b+a^2/b)^2 - (\eta+a^2/\eta)^2}}{\sqrt{(b+a^2/b)^2 - (y+a^2/y)^2} - \sqrt{(b+a^2/b)^2 - (\eta+a^2/\eta)^2}} dx d\eta, \quad (1.32')$$

三角翼胴結合体では

$$M_w = \frac{4\rho U^2}{\pi} \int_a^{b(1)} dy \int_{-1}^1 (x+1) \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_a^b d\eta \left\{ \alpha \left(1 + \frac{a^2}{\eta^2} \right) - \frac{f(x) - g(x)}{(\pi/2)b^2\mu(a/b)} \right\} \times \log \frac{\sqrt{(b+a^2/b)^2 - (y+a^2/y)^2} + \sqrt{(b+a^2/b)^2 - (\eta+a^2/\eta)^2}}{\sqrt{(b+a^2/b)^2 - (y+a^2/y)^2} - \sqrt{(b+a^2/b)^2 - (\eta+a^2/\eta)^2}} \right] dx. \quad (1.34')$$

(1.32') の b は一定であるが (1.34') の b は x の関数である.

Crigler [15] は特に圧縮性と後退翼に重点をおいて (1.6) の $u(x, y)$ を翼幅方向および翼弦方向の変数に級数展開して近似的に積分方程式

$$\left[\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial z} \right]_{z=0} = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{d\xi d\eta u(\xi, \eta)}{(y-\eta)^2} \left[1 + \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + B^2(y-\eta)^2}} \right]$$

を解くことにより後退翼胴結合体の翼部分の翼幅方向揚力分布を求め実験結果とのよい一致を示している. ただし $B = \sqrt{1-M^2}$.

3.3. 揚力の簡易計算法

Ward [16] は細長物体理論を使って円形断面の無限長柱状胴体に縦横比の非常に小さい翼を取り付けた翼胴結合体に対して次の関係式を導いている.

$$L_{WB} = L_w(1+a/b)^2. \quad (1.36)$$

ここで L_{WB} は翼胴結合体の揚力, L_w は exposed wing alone の揚力である. また a は胴

体半径, b は最大半翼幅である. 一方 Lawrence and Flax [7] は翼胴結合体に対する Trefftz 面での関係式を使うことにより胴体断面が円形でなくても (1.36) と類似の関係式を導いている.

著者は Lawrence and Flax [7] の線に沿って実用的見地から縦横比の小さい翼胴結合体の揚力を求める精度のある簡便な公式を導き風洞実験結果や他の理論計算結果との比較を行った. この結果を縦横比の小さい翼の揚力問題と組み合わせれば実用設計上翼胴結合体の揚力を正しく, 簡単に計算するための有用な武器となる.

今翼を1本の揚力線でおきかえれば, 円柱胴体による吹き上げ関数は a^2/y^2 であるから翼の平均有効迎角 $\bar{\alpha}$ は

$$\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} = \int_a^b \left(1 + \frac{a^2}{y^2}\right) dy / \int_a^b dy = 1 + \sigma \quad (1.37)$$

となる. ここで $\sigma = a/b$, また α は翼胴結合体の迎角である. $(C_{L\alpha})_W$ を exposed wing alone の揚力係数傾斜とすれば胴体があるための翼部分の揚力係数傾斜 $(C_{L\alpha})_{W(B)}$ は

$$(C_{L\alpha})_{W(B)} = (1 + \sigma)(C_{L\alpha})_W \quad (1.38)$$

となる. 翼胴結合体における翼上の揚力分布を $(1 + a^2/y^2)$ に比例すると考えれば Trefftz 面での関係式から胴体部分の揚力係数傾斜 $(C_{L\alpha})_{B(W)}$ に対しては次の関係が成り立つ.

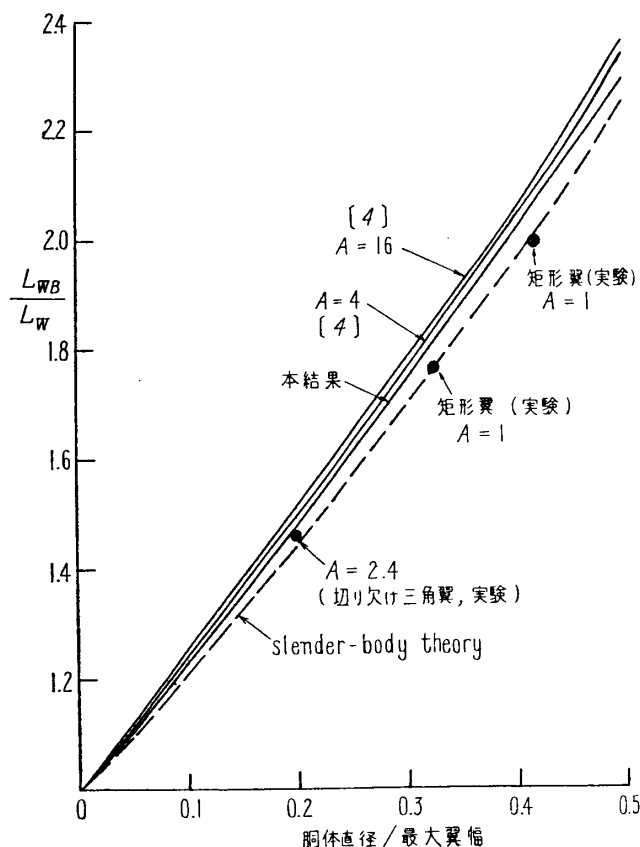
$$\begin{aligned} \frac{(C_{L\alpha})_{B(W)}}{(C_{L\alpha})_{W(B)}} &= \int_a^b \left(1 + \frac{a^2}{y^2}\right) \\ &\times \frac{a^2}{y^2} dy / \int_a^b \left(1 + \frac{a^2}{y^2}\right) dy \\ &= (4\sigma + \sigma^2 + \sigma^3) / 3(1 + \sigma). \end{aligned} \quad (1.39)$$

したがって翼胴結合体の揚力係数傾斜 $(C_{L\alpha})_{WB}$ は (1.38), (1.39) より

$$\frac{(C_{L\alpha})_{WB}}{(C_{L\alpha})_W} = 1 + \frac{7}{3}\sigma + \frac{1}{3}\sigma^2 + \frac{1}{3}\sigma^3. \quad (1.40)$$

更により近似を得るには翼の揚力分布 $1 + a^2/y^2$ を修正すればよい. (1.40) は実用的により近似を与える. 第5図に (1.40) の結果と他の結果および実験との比較を示す. exposed wing alone の揚力係数がわかれば (1.40) によって翼胴結合体の揚力係数が求まる. ここで係数はすべて exposed wing area 基準になっている.

この方法に含まれる簡単さと合致す



第5図 縦横比の小さい翼胴結合体の揚力.

る圧力中心位置の決定は次のようにして得られる. *exposed wing alone* の圧力中心をまず求める. これについては矩形翼, 三角形の場合既に図表になって得られている [9] ので先細比に対しては比例配分によって求めればよい. このことは文献 [17] の計算資料によって正当化されている. 翼胴結合体の圧力中心は上のようにして得られた翼だけの圧力中心から翼弦長基準にして 3~4 % 差し引けばよい.

4. 縦横比の非常に小さい翼胴結合体

細長物体理論は Munk [18] の飛行船の研究に始まったもので, Jones [19] がそれを縦横比の非常に小さい三角翼の空力計算に利用し, Ribner [20] がその安定係数を求めている. この Munk-Jones の理論はその後多くの人々によって翼胴結合体の問題に拡張されている.

Spreiter [21] [22] は円形断面の胴体と三角翼とから成る翼胴結合体を扱った. 彼は Joukowski 変換による写像変換を使って翼胴結合体の横断面を平板の横断面になおし, 平板まわりの *cross-flow* による速度ポテンシャルを逆変換することにより翼胴結合体の圧力分布, 揚力, 縦揺れモーメントを求めている. Nonweiler [23] は Spreiter と同じ方法で得た擾乱速度ポテンシャルを使って翼胴結合体の揚力, 縦揺れモーメント, 縦揺れ減衰モーメントを求めている. Ward [24] はラプラス変換と *control surface* の概念を使って超音速の問題を扱い, またラプラス変換の代りにフーリエ変換を使えば亜音速の問題が解ける. Sacks [25] は Blasius の方法を拡張して一般の細長翼胴結合体の揚力, モーメント, 安定微係数に対する式を導いている. Adams and Dugan [26] は十字形翼胴結合体を考え, その横断面を二段階の写像変換によって円に写像することにより翼胴結合体の横揺れ特性を求めている.

著者は Adams and Dugan [26] の方法を拡張して十字形翼胴結合体の縦揺れモーメント, 縦揺れ減衰モーメントを計算し, 実験結果および第 3.2 節で述べた縦横比の小さい翼胴結合体に対する理論計算結果との比較により細長物体理論の精度および適用限界を検討した.

亜音速および超音速における擾乱速度ポテンシャル ϕ に対する線型偏微分方程式は

$$(1-M^2)\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0. \quad (1.41)$$

ここで M は自由流マッハ数で, また流れは正の x 軸方向に向いているものとする. もし縦方向の速度勾配 ϕ_{xx} が十分小さく, またマッハ数が極端に大きくなければ (1.41) の第 1 項は y, z 方向の速度勾配に比して小さいので省略して差支えない. しかるとき (1.41) は

$$\phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 \quad (1.42)$$

となり, これはよく知られている二次元のラプラス方程式である. 細長い翼, 胴体および翼胴結合体に対しては ϕ_{xx} は他の項に比して小さいので (1.42) に基づいた空力特性の計算は満足すべき近似を与える. この結果はマッハ数に無関係で, 亜音速および超音速ばかりでなく遷音速においても適用される.

ここでは無限長円柱胴体に取り付けられた三角翼の場合だけを考える. 本報告の目的は次の境界条件を満足する微分方程式 (1.42) を解くものである;

(1) 無限遠方で擾乱速度 $\phi_y = \phi_z = 0$,

(2) 面 $y=0$ または $z=0$ 内のすべての点 (ただし翼面また胴体内の点を含まない) で

$\Delta\phi=0$, ここで $\Delta\phi$ は下面と上面とのポテンシャルの差である,

(3) 面 $y=0$ および $z=0$ 内のすべての点でそれぞれ $\Delta\phi_y=0$, $\Delta\phi_z=0$,

(4) 面 $y=0$ 内のすべての点で $(\phi_y)_{y=0}=0$, また面 $z=0$ 内の翼平面境界で $(\phi_z)_{z=0}$ が規定されている.

(5) 胴体面上のすべての点で半径方向の速度 ϕ_r が規定されている.

もし翼胴結合体断面の外部が等角写像によって円の外部に写像され, 結合体断面の周線がその円の周上の点に対応するようにできれば上述の境界条件を満足するポテンシャル関数はその円の周上に適当な無限小吹き出し, 吸い込みを分布させこれを積分することによって見出すことができる.

cross-flow の二次元速度ポテンシャル ϕ がわかれば圧力係数は

$$C_p = \frac{2}{U} \Delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{1}{U^2} \Delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{U^2} \Delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2$$

によって計算される. ここで U は自由流速度, また Δ は下面および上面における差を示す. 翼付根の胴体部分を円柱とすれば上式の右辺第 2, 第 3 項が消えて

$$C_p = \frac{2}{U} \Delta \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \quad (1.43)$$

となる. (1.43) から三角形翼項点まわりの縦揺れによるモーメントは

$$M = -2\rho U \left[\int_a^{s_0} dy \left\{ x_{TE} \Delta \phi_{TE} - x_{LE} \Delta \phi_{LE} - \int_{LE}^{TE} \Delta \phi dx \right\} \right] - 2\rho U \left[\int_0^a dy \left\{ x_{TE} \Delta \phi_{TE} - x_{LE} \Delta \phi_{LE} - \int_{LE}^{TE} \Delta \phi dx \right\} \right]. \quad (1.44)$$

ここで s_0 は最大半翼幅, a は胴体半径, また LE, TE はそれぞれ前縁および後縁を表わす. (1.44) から定常縦揺れモーメント, および縦揺れ減衰モーメントを計算できる. もちろん (1.43) を積分すれば容易に揚力を得ることができるが, ここではこれを省略する.

次に十字形翼胴結合体の断面を円に写像することを考える. この変換は二つの段階によって容易に達成される. まず Joukowski 変換

$$2\xi = X + a^2/X \quad (1.45)$$

によって十字形翼胴結合体の断面を一般に長さの等しくない十字断面に写し, 更に Darwin の式 [27] を適用することにより

$$2\xi^2 = \sigma^2 + R^4/\sigma^2 - 2R^2 \cos 2\mu \quad (1.46)$$

なる変換によって十字断面を円断面に写す. ここで $X=y+iz$, $\xi=\eta+i\zeta$, $\sigma=\tau+i\nu$, a は円柱胴体の半径, R は σ 面における円の半径, また μ は X 面内の垂直翼胴体付根に対応する σ 面内の点の極座標である. 十字形翼胴結合体の垂直, 水平翼幅が等しくなくても (1.46) の形は変らない. この場合円の半径は

$$8R^2 = s_h^2 + a^4/s_h^2 + s_v^2 + a^4/s_v^2$$

で与えられる. ここで s_h は水平翼の半翼幅, s_v は垂直翼の半翼幅である. しかるとき μ, γ は次の関係式によって求められる;

$$2R^2 \cos 2\mu = (s_v^2 + a^4/s_v^2) - (s_h^2 + a^4/s_h^2) - a^2, \\ \cos 2\gamma - \cos 2\mu = a^2/R^2.$$

γ は X 面内の水平翼と胴体との付根に対応する σ 面内の点の極座標である. もし $s_h = s_v = s$ ならば (1.46) は

$$2\xi^2 = \sigma^2 + R^4/\sigma^2 + a^2$$

となる. したがって物理面から円え写像する変換は

$$X^2 + a^4/X^2 = 2(\sigma^2 + R^4/\sigma^2) \quad (1.47)$$

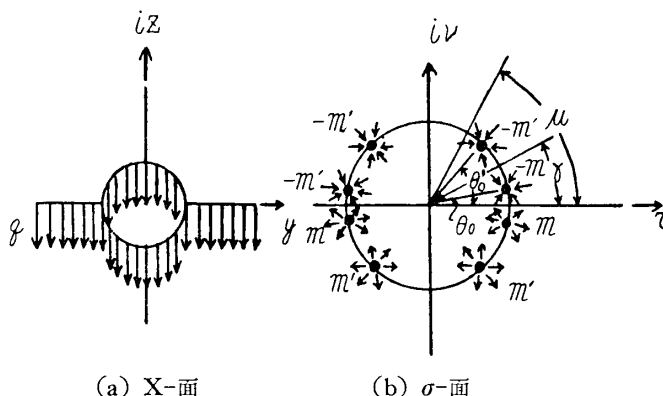
によって与えられる. (1.47) を一般化すれば

$$X^{n/2} + a^n/x^{n/2} = 2(\sigma^{n/2} + R^n/\sigma^{n/2}),$$

$$4R^{n/2} = s^{n/2} + a^n/s^{n/2}.$$

ただし n は正の整数である.

これらの基本概念を使い, また X 面内の境界条件に対応して σ 面内で吹き出しまたは吸い込みを適当に分布させれば, σ 面内で複素速度ポテンシャルが求められる. ここでは翼幅の等しい細長い十字形翼胴結合体の縦揺れ運動を考える. 第 6 図に示される吹き出し吸



第 6 図 縦揺れにおける十字形翼胴結合体断面.

い込みに対する複素速度ポテンシャルは

$$f = -\frac{m}{2\pi} \log \frac{\sigma^2 - R^2 - 2\sigma Ri \sin \theta_0}{\sigma^2 - R^2 + 2\sigma Ri \sin \theta_0} - \frac{m'}{2\pi} \log \frac{\sigma^2 - R^2 - 2\sigma Ri \sin \theta'_0}{\sigma^2 - R^2 + 2\sigma Ri \sin \theta'_0}. \quad (1.48)$$

m の代りに $dm = 2w dy_0 = -2(\partial\psi/\partial y_0) dy_0 = -2d\psi$, また m' の代りに $dm' = -2d\psi_a$ とおき, θ_0 を 0 から γ まで, また θ'_0 を γ から μ まで積分すれば

$$f = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_0=0}^{\theta_0=\gamma} \log \frac{\sigma^2 - R^2 - 2\sigma Ri \sin \theta_0}{\sigma^2 - R^2 + 2\sigma Ri \sin \theta_0} d\psi + \frac{1}{\pi} \int_{\theta'_0=\gamma}^{\theta'_0=\mu} \log \frac{\sigma^2 - R^2 - 2\sigma Ri \sin \theta'_0}{\sigma^2 - R^2 + 2\sigma Ri \sin \theta'_0} d\psi_a. \quad (1.49)$$

ここで w は垂直方向の速度成分, $q = -w$, m, m' はそれぞれ点吹き出し, 点吸い込みの強さ, また ψ, ψ_a はそれぞれ翼面上および胴体面上の流れ関数である. 部分積分によって

$$f = \frac{4\sigma Ri(\sigma^2 - R^2)}{\pi} \left[\int_0^\gamma \frac{\cos \theta_0 \psi(\theta_0) d\theta_0}{(\sigma^2 - R^2) + 4\sigma^2 R^2 \sin^2 \theta_0} + \int_\gamma^\mu \frac{\cos \theta'_0 \psi_a(\theta'_0) d\theta'_0}{(\sigma^2 - R^2)^2 + 4\sigma^2 R^2 \sin^2 \theta'_0} \right]. \quad (1.50)$$

今の場合

$$\psi(\theta_0) = \sqrt{2} q R (\sqrt{\sin^2 \gamma - \sin^2 \theta_0} + \sqrt{\cos^2 \gamma - \sin^2 \theta_0}),$$

および

$$\psi_a(\theta'_0) = \sqrt{2} q R \sqrt{\cos^2 \gamma - \sin^2 \theta'_0}.$$

これらの関係を (1.50) に代入し, 積分を遂行すると

$$f = \frac{-\sqrt{2} i (\sigma^2 - R^2) q}{\sigma}; \quad 0 \leq \sin^2 \theta \leq \sin^2 \gamma, \quad (1.51)$$

$$f = \frac{-\sqrt{2}i(\sigma^2 - R^2)q}{\sigma} + \frac{\sqrt{2}i(\sigma^2 - R^2)q[(\sigma^2 - R^2)^2 + 4\sigma^2 R^2 \sin^2 \gamma]}{2\sigma\sqrt{(\sigma^2 - R^2)^2[(\sigma^2 - R^2)^2 + 4\sigma^2 R^2 \sin^2 \gamma]}}; \quad (1.52)$$

$$\sin^2 \gamma \leq \sin^2 \theta \leq \sin^2 \mu.$$

したがって水平翼面上の擾乱速度ポテンシャルは (1.51) から

$$\phi_w = 2\sqrt{2}qR \sin \theta, \quad (1.53)$$

胴体面上では

$$\phi_B = 2\sqrt{2}qR \sin \theta - \sqrt{2}qR\sqrt{\sin^2 \theta - \sin^2 \gamma} \quad (1.54)$$

となる。翼または胴体の上，下面では擾乱速度ポテンシャルが大きき等しく符号が反対になっていることは (1.53), (1.54) から明らかである。縦揺れ特性を計算するにはポテンシャルを物理面の座標で表わすのが便利である；すなわち

$$\phi_w = \pm q\sqrt{(s+a^2/s)^2 + (y+a^2/y)^2}, \quad (1.55)$$

$$\phi_B = \pm q\sqrt{(s+a^2/s)^2 - 4y^2} - q\sqrt{a^2 - y^2}. \quad (1.56)$$

これは十字形翼胴結合体に対するものであるが，一字形翼胴結合体に対して同じ結果を得ることができる。(1.55), (1.56) から以下のようにして縦揺れ減衰モーメントおよび縦揺れモーメントを計算できる。

線 $x=x_0, z=0$ まわりの縦揺れ角速度を p とすれば，面 x = 一定内における有効迎角 α_e は

$$\alpha_e = (x-x_0)p/U. \quad (1.57)$$

他方，線 $x=x_0, z=0$ まわりのモーメントは

$$\begin{aligned} M &= -\rho U \iint_{W+B} (x-x_0) \Delta \phi_x dx dy \\ &= -2\rho U \left[\int_a^{s_0} dy \left\{ x_{TE} \Delta \phi_{wTE} - x_{LE} \Delta \phi_{wLE} - \int_{LE}^{TE} \Delta \phi_w dx \right\} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^a dy \left\{ x_{TE} \Delta \phi_{BTE} - x_{LE} \Delta \phi_{BLE} - \int_{LE}^{TE} \Delta \phi_B dx \right\} \right] + x_0 \rho U \iint_{W+B} \Delta \phi_x dx dy. \end{aligned}$$

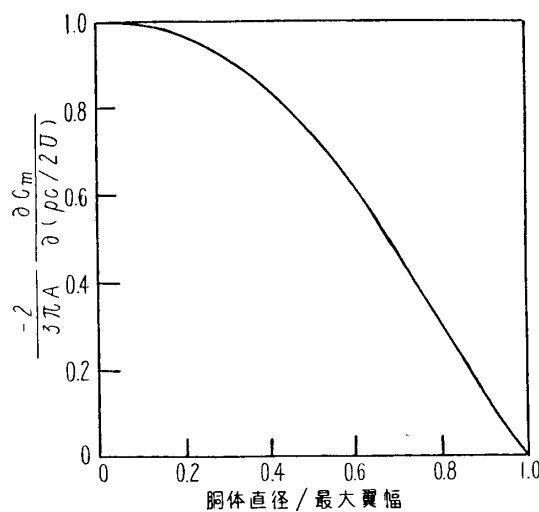
胴体中心線上の三角翼頂点を原点とし，この点まわりのモーメントは

$$\begin{aligned} M &= -2\rho U \left[\int_a^{s_0} dy \left\{ x_{TE} \Delta \phi_{wTE} - x_{LE} \Delta \phi_{wLE} - \int_{LE}^{TE} \Delta \phi_w dx \right\} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^a dy \left\{ x_{TE} \Delta \phi_{BTE} - x_{LE} \Delta \phi_{BLE} - \int_{LE}^{TE} \Delta \phi_B dx \right\} \right]. \quad (1.58) \end{aligned}$$

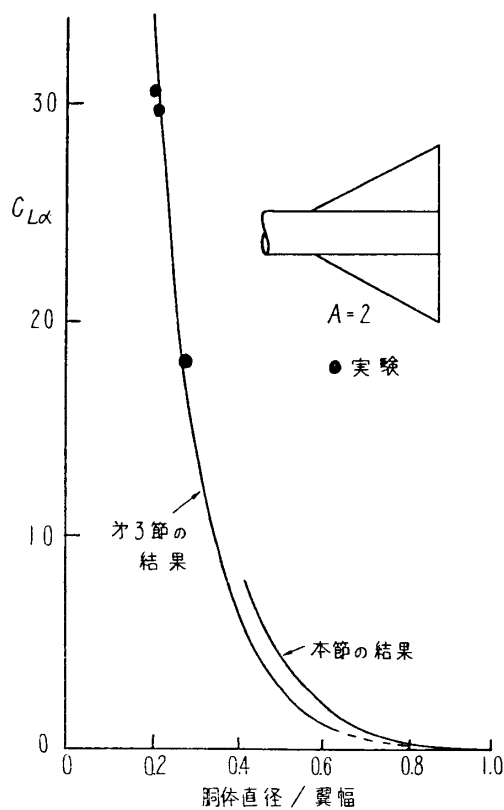
ここで

$$\left. \begin{aligned} \Delta \phi_{wTE} &= -2x_{TE} p \sqrt{(s_0 + a^2/s_0)^2 - (y + a^2/y)^2}, \\ \Delta \phi_{wLE} &= 0, \\ \Delta \phi_{BTE} &= -2x_{TE} p \sqrt{(s_0 + a^2/s_0)^2 - 4y^2}, \\ \Delta \phi_{BLE} &= -4x_{LE} p \sqrt{a^2 - y^2}, \\ \Delta \phi_w &= -2xp \sqrt{(s + a^2/s)^2 - (y + a^2/y)^2}, \\ \Delta \phi_B &= -4xp \sqrt{(s + a^2/s)^2 - 4y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.59)$$

(1.58) の積分を実行し、整理すれば



第 7 図 縦揺れ減衰モーメント (胴体軸上の三角翼頂点まわり)。

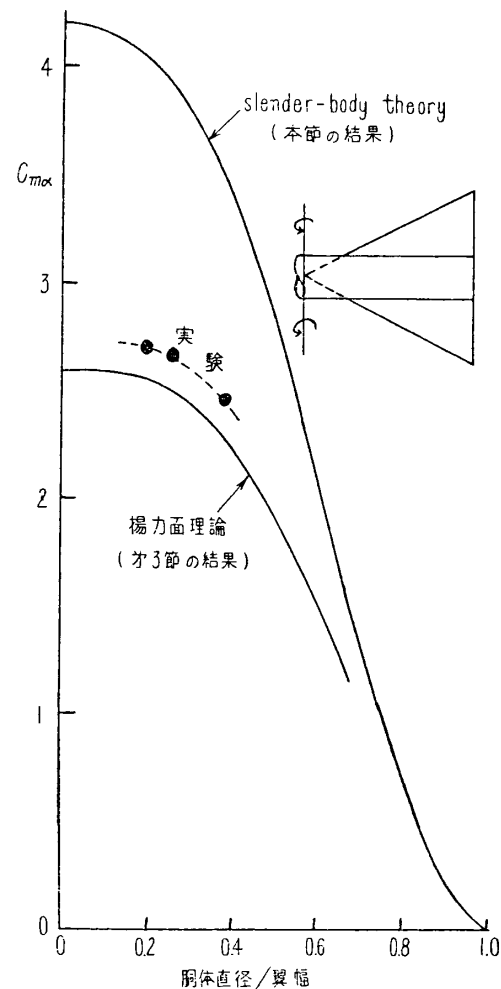


第 8 図 縦横比の小さい三角翼胴結合体の揚力係数傾斜。胴体断面積基準。

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_m}{\partial (pc/2U)} &= \frac{M}{(1/2)\rho U^2 c s_0 \cdot (c/2)(pc/2U)} \\ &= -\frac{3\pi A}{2} \left[1 - \frac{2}{3} \left(\frac{a}{s_0} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{a}{s_0} \right)^4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3} \left(\frac{a}{s_0} \right)^4 \log \frac{a}{s_0} \right] \quad (1.60) \end{aligned}$$

c は胴体内の部分をも入れた三角翼の中心翼弦長, A はその縦横比である. (1.60) の計算結果が第 7 図に示されている.

定常迎角 α によるモーメントは (1.58), (1.59) で xp の代りに $U\alpha$ とおいて計算を行なえばよい. その結果として



第 9 図 縦横比の小さい三角翼胴結合体のモーメント係数傾斜。翼面積, 平均翼弦長基準. $A=2$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_m}{\partial \alpha} &= \frac{M}{(1/2)\rho U^2 c s_0 (c/2) \alpha} \\ &= -\frac{2\pi A}{3} \left\{ 1 - 4 \left(\frac{a}{s_0} \right)^3 + 3 \left(\frac{a}{s_0} \right)^4 \right\}.\end{aligned}\quad (1.61)$$

第8図には $A=2$ として (1.61) から得た結果を実験結果および第3.2節で述べた計算結果と比較している。

なお定常迎角によるポテンシャルを (1.43) に代入し、これを積分すれば揚力が得られる。すなわち

$$\frac{\partial C_L}{\partial \alpha} = \frac{\text{Lift}}{(1/2)\rho U^2 c s_0} = \frac{\pi A}{2} \left\{ 1 - \left(\frac{a}{s_0} \right)^2 \right\}^2. \quad (1.62)$$

その結果を第9図に示し、同時に実験結果および第3.2節の計算結果と比較している。

以上の結果からわかるように細長物体理論は実験値よりも 20～30% 大きい。これは $A=2$ について得られた結論で、縦横比が小さくなればもっと実験値に近づくであろう。しかし実用的には $A=2\sim3$ であるから、細長物体理論の結果は余り近似のよいものと言えない。

なお本解析法を楕円形断面細長翼の横揺れおよび縦揺れ特性の計算に適用できる。

5. 縦横比の小さい翼胴結合体と縦横比の非常に小さい翼胴結合体との関係

第3.2.1節で指摘したように揚力面理論に基づいて縦横比の小さい翼だけの揚力または翼胴結合体の全揚力を求めることができれば、細長物体理論による比の値と等しいとおくことにより近似的に縦横比の小さい翼胴結合体の問題を解くことができる。このことは第5図において細長物体理論の曲線が実験結果とよく一致していることから裏づけられている。その上第5図からわかるように揚力線理論に基づく簡易計算法は第3.2.1節で述べた三次元的吹き下しを考慮しない限り多少揚力分布を修正しても実験とのよい一致は望めないであろう。本節は第3.2.1節の揚力面理論による計算結果と第5図に示す実験結果を基礎にして縦横比の小さい翼胴結合体の揚力、モーメント、安定微係数を求めるために combined lifting-surface and slender-body theory ともしうべき理論を提案する。この構想は超音速翼胴結合体の問題を解くために Nielsen [28] 等によって提案された modified theory と類似している。

今翼胴結合体の翼部分の揚力を $L_{W(B)}$ 、胴体部分の揚力を $L_{B(W)}$ 、また胴体を除いて両側の2枚翼板を継ぎ合せた翼だけの揚力を L_W として次の量を定義する；

$$K_W = L_{W(B)} / L_W,$$

および

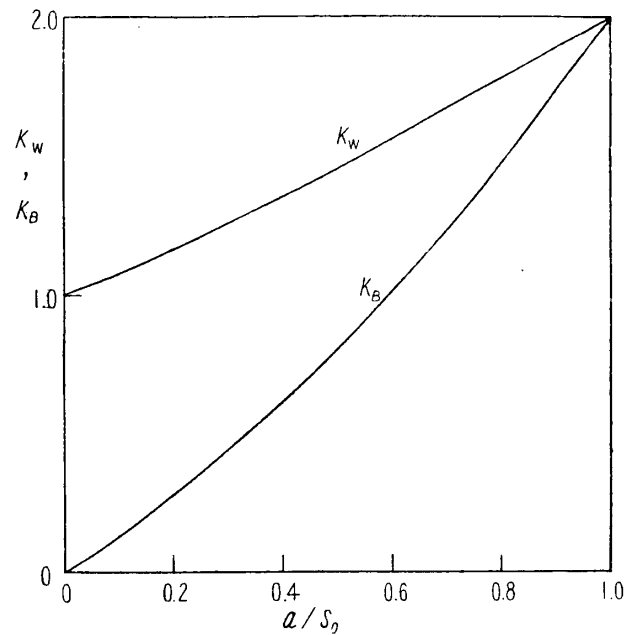
$$K_B = L_{B(W)} / L_W.$$

細長物体ではこの K_W, K_B はともに a/s_0 のみの関数で第10図のごとくに与えられる。この K_W, K_B は翼胴干渉の大きさを係数で表わした形になっている。 $a/s_0=0$ では胴体がないので $K_W=1, K_B=0$ となる。しかし $a/s_0=1$ になると翼板が非常に小さくなって、実質的には無限に大きい反射壁に取り付けられたのと同じになる。その際胴体の cross-flow によって翼板は (1.16) によって与えられる幾何学的迎角で振れたことになり、その極限で α_g

$=2\alpha$ となる。したがって翼板は胴体がない時の揚力の 2 倍となるので $K_W = 2$ となる。第 10 図からわかるように K_W はほとんど直線をなしているので胴体の吹き上げにより翼上で増加する揚力は係数にして大体 a/s_0 に等しい。

一方 K_B は翼により胴体上に伝わる揚力の割合である。翼から揚力が発生するのであるが、その一部が胴体上にも伝わるのである。 a/s_0 が 1 に近づくと K_B は K_W と同じ値になっている。

縦横比の非常に小さい翼胴結合体に關する限り上述の K_W, K_B を使って干渉揚力を計算できる。しかし縦横比が非常に小さくなくても翼だけの揚力に対する干渉揚力の比が細長物



第 10 図 揚力の干渉係数

第 2 表

体に対する干渉揚力の比が細長物体の理論による K_W, K_B の値によってかなりよく近似できる。したがって縦横比の小さい翼だけの揚力曲線傾斜の正確な値がわかれば細長物体理論による揚力比と等しいとおくことにより縦横比の小さい翼胴結合体の翼部分、胴体部分および全体の揚力を求めることができる。この縦横比の小さい翼だけの揚力曲線傾斜は揚力面理論によって求めたものでもよいし、また実験値でもよい。これが本節の初めで述べた combined lifting-surface and slender-body theory である。この方法によって求めた 6 種類のロケット模型の計算結果と風洞実験結果が第 2 表に示され、理論と実験との一致は満足すべきものである。なおこの計算で使われた翼だけの揚力

$C_{L\alpha}$ 実験	$C_{L\alpha}$ 理論	使用模型 (単位 mm)
4.59	4.90	
5.12	4.90	
4.58	4.26	
2.95	3.10	
3.28	3.42	
2.67	2.63	

曲線傾斜は揚力面理論により (1.14) で $\alpha \rightarrow 0$ として計算から得たものである。また風洞実験では胴体先端部の揚力を細長物体理論に基づいて除いてある。第2表の数値は翼だけの翼面積を基準にして C_{La} を表わしている。この方法によって縦横比の小さい三角翼胴結合体ばかりでなく、矩形翼胴結合体および切り欠け三角翼胴結合体に対して計算された値が実験結果とよく合っていることは注目に値する。

モーメントを求めるには結合体の圧力中心を知っている必要がある。細長物体理論による結合体の圧力中心位置は正確ではないので、揚力面理論から得た翼だけの圧力中心位置を求め、これから胴体の影響で付根翼弦長基準にして数パーセント前へ移動させればよい。この数パーセントの値は細長物体理論から得た数値を使えばよい。これは胴体による圧力中心の移動を付根翼弦長基準で表わした場合翼上の揚力分布したがって翼平面形によって余り影響されないという事実に基づいている。

なおこの combined lifting-surface and slender-body theory は操舵翼胴結合体やその他もっと複雑な動力学的な運動を行なう翼胴結合体の揚力、モーメント安定微係数を求めるのにも適用される。これらについては別の機会で検討したいと思っている。

1960年7月18日 航空力学部

文 献

- [1] Lennertz, J.: Influence of the Airplane Body on the Wings. Aerodynamic Theory: Durand Editor, Vol. IV, Division K, 1943.
- [2] Pepper, P. A.: Minimum Induced Drag in Wing-Fuselage Interference. NACA TN 812, 1941.
- [3] Flax, A. H.: Integral Relation in the Linearized Theory of Wing-Body Interference. Jour. Aero. Sci., Vol. 20, No. 7, 1953.
- [4] Flax, A.H. and Treanor, C.E.: A Variational Calculation of Subsonic Wing-Body Interference According to Lifting-Line Theory, Cornell Aeronautical Laboratory.
- [5] Spreiter, J. R.: Aerodynamic Properties of Slender Wing-Body Combinations at Subsonic, and Supersonic Speeds, NACA TN 1662, 1948.
- [6] Multhopp, H.: Zur Aerodynamik des Flugzeugrumpfes. Lufo, Bd. 18, 1941.
- [7] Lawrence, H. R., and Flax, A. H.: Wing-Body Interference at Subsonic and Supersonic Speeds-Survey and New Developments. Jour. Aero. Sci., Vol. 21, No. 5, 1954.
- [8] Weber, J., Kirby, D. A. and Kettle, D. J.: An Extension of Multhopp's Method of Calculating the Spanwise Loading of Wing-Fuselage Combinations. R. & M. No. 2872 1951.
- [9] Lawrence, H. R.: The Lift Distribution on Low Aspect Ratio Wings at Subsonic Speeds. Jour. Aero. Sci. Vol. 18, No. 10, 1951.
- [10] Weissinger, J.: The Lift Distribution on Swept-Back Wings. NACA TM 1120, 1947.
- [11] De Young, J.: Theoretical Antisymmetric Span Loading for Wings of Arbitrary Plan Form at Subsonic Speeds. NACA TR 1056, 1951.
- [12] Lawrence, H. R.: The Aerodynamic Characteristics of Low Aspect Ratio Wing-Body Combinations in Steady Subsonic Flow. Jour. Aero. Sci. Vol. 20, No. 8 1953.
- [13] Morikawa, G. K., and Puckett, A. E.: Equivalence of the Spanwise Lift Distribution to the Spanwise Lift-Influence Function for Slender Wings and Wing Bodies. Readers. Forum, Jour. Aero. Sci. Vol. 18, No. 7, 1951.
- [14] 浅井貞重: 定常亜音速における低縦横比翼胴結合体の揚力分布, 昭和33年1月, 明治大学工学部機械科大学院修士論文.

- [15] Crigler, J. L.: Comparison of Calculated and Experimental Load Distributions on Thin Wing at High Subsonic and Sonic Speeds. NACA TN 3941, 1957.
- [16] Ward, G. N.: Supersonic Flow past Slender pointed Bodies. Quart. J. Mech. and App. Math. Vol. 2, 1949.
- [17] Pitts, W. C., Nielsen, J. N. and Kaattari, G. E.: Lift and Center of Pressure of Wing-Body-Tail Combinations at Subsonic, Transonic, and Supersonic Speeds. NACA TR 1307, 1957.
- [18] Munk, M.: The Aerodynamic Forces on Airship Hulls. NACA TN 184, 1923.
- [19] Jones, R.T.: Properties of Low-Aspect-Ratio Pointed Wings at Speeds Below and Above the Speed of Sound. NACA TN 835, 1946.
- [20] Ribner, H.S.: The Stability Derivatives of Low-Aspect-Ratio Triangular Wings at Subsonic and Supersonic Speed. NACA TN 1423, 1947.
- [21] Spreiter, J.R.: Aerodynamic Properties of Slender Wing-Body Combinations at Subsonic, Transonic and Supersonic Speeds. NACA TN 1662, 1948.
- [22] Spreiter, J.R.: The Aerodynamic Forces on Slender Plane-and Cruciformwing and Body Combinations. NACA TR 962, 1950.
- [23] Nonweiler, T.: Theoretical Stability Derivatives of a Highly Swept Delta Wing and Slender Body Combination. The college of Aeronautics. Cranfield Rept. No. 50, 1951.
- [24] Ward, G. N.: Supersonic Flow Past Slender Pointed Bodies. Q.J.A.M. Vol. 11, Part 1, 1949.
- [25] Sacks, A. H.: Aerodynamic Forces, Moments, and Stability Derivatives for Slender Bodies of General Cross Section. NACA TN 3283, 1954.
- [26] Tsien, F. H.: On Damping in Pitch and Pitching Moment of Slender Cruciform Wing-Body Combinations. Proc. of the 7th Japan National Congress for Applied Mechanics 1957.
- [27] Darwin, S. C.: Some Conformal Transformations Involving Elliptical Functions. Phil. Mag., Vol. 41, Ser. 7 No. 312, 1950.
- [28] Nielsen, J. N.: Missile Aerodynamics. McGraw-Hill Book Company, Inc. 1960.