

滑空機の距離最大飛行に関する研究^{*1} A Study of Maximum Range Flight of Gliders

原 田 正 範^{*2}・別 府 護 郎^{*2}
Masanori HARADA, Goro BEPPU
東 昭^{*3}
and Akira AZUMA

Key Words: Maximum Range Flight, Optimal Control, Ground Effect

Abstract

By using of the optimal control theory, the optimal controls of the lift coefficient and the related flight paths of gliders are obtained to find the maximum flight range for given initial and final conditions. The results show that without ground effect the steady gliding flight at the maximum lift-to-drag ratio occupies a greater part of the flight path, but with the ground effect, the unsteady horizontal flight at the minimum allowable height takes the place of the steady gliding flight.

1. 序 言

飛行力学における理論解析では、距離最大滑空の場合には、揚抗比が最大となる揚力係数による定常滑空が最適な滑空飛行である。また時間最長滑空の場合には、沈下率最小を実現する揚力係数による定常滑空が最適な滑空飛行となる。しかし、例えばトビウオの滑空に見られる様に、高度一定で速度が漸減する非定常滑空でも、滑空機の揚抗比 L/D が大きく、地面効果が無く、かつ無次元高度パラメタ $H = \rho_0 g h_0 / (W/S)$ がある程度小さい時、定常滑空と非定常滑空とでほとんどその最長距離に差はない¹⁾。

これに対して、滑空機の距離最大飛行を最適制御問題として定式化し、数値解析を行うことで、地面効果の無い場合の最適解となる制御法を求める研究が、ハンド・ランチの模型グライダーについて研究されている^{2,3)}。さらに地面効果を考慮した場合のトビウオの距離最大滑空と時間最長滑空とを求める研究が河内・稲田・東^{4,5)}によってなされている。

本論文では、普通良く利用される市販の滑空機について、より一般的な初期条件で距離最大滑空がどう変

わるかについて検討した。

2. 定 式 化

本論文における最適制御問題は、与えられた運動方程式、拘束条件、境界条件のもとで飛行距離を最大にする制御入力を求める事である。長時間の最適制御計算は反復計算において解が発散する傾向があるため、時間軸折り返し法⁶⁾を用いてこれに対処した。また飛行高度に関しては状態量不等式拘束条件が課せられるため、単調区間法⁷⁾による定式化を用いた。単調区間法における区間の設定には、あらかじめスラック変数法等を用いて解の概況を得る必要がある。しかしスラック変数法を用いた場合は状態量や制御量が増加するので、設定区間数が多い場合には計算機の必要メモリ、計算時間が増加してしまう。そこで今回はあらかじめ区間を仮定して、解の収束状況を検討しながら区間の設定を調整して解を得た。最適解の探索には、SCGRA 法⁸⁾を用いた。

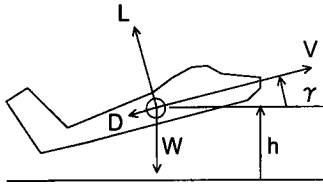
主 な 記 号

α_i ($i=0,1,2,3$): 近似関数の係数
AR: アスペクト比
 AR_e : 有効アスペクト比
 b : スパン
 C_L : 揚力係数
 C_{D0} : 有害抗力係数
 F_r : フルード数
 $= V_0^2 / bg$
 g : 重力加速度
 h : 高度
 \bar{h}_0, \bar{h}_a : 無次元高度
 $= h_0/b, h_a/b$
 H : 無次元高度パラメタ

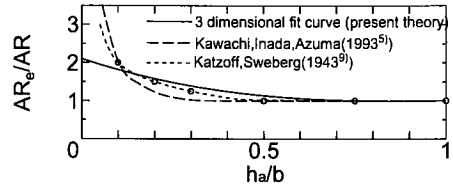
^{*1} 平成7年9月9日原稿受理

^{*2} 東海大学航空宇宙学科

^{*3} 東京大学名誉教授



第1図 座 標 系



第2図 地面効果

$$= \bar{h}_0 / \mu = \rho_0 g h_0 / (W/S)$$

S: 翼面積

V: 速度

W: 機体重量

 γ : 経路角 μ : 無次元質量

$$= m / (\rho_0 S b)$$

 ρ_0 : 初期高度における大気密度

添 字

 $_0$: 初期値 $_f$: 終端値 $^{\wedge}$: 無次元化値 $_a$: 空力中心 $_{opt}$: 理論値 $_{max}$: 最大値 $_{min}$: 最小値

2.1 運動方程式 滑空機を質点近似したときの運動方程式は、第1図を参照して、式(1), (2), (3)の様に書くことができる。

$$\frac{d\hat{V}}{d\hat{t}} = -\frac{1}{2}(F_r/\mu)\hat{V}^2\left(C_{D0} + \frac{1}{\pi AR_e}C_L^2\right) - \sin \gamma \quad (1)$$

$$\frac{d\gamma}{d\hat{t}} = \frac{(1/2)(F_r/\mu)\hat{V}^2 C_L - \cos \gamma}{\hat{V}} \quad (2)$$

$$\frac{d\hat{h}}{d\hat{t}} = (F_r/\bar{h}_0)\hat{V} \sin \gamma \quad (3)$$

状態量は \hat{V} , γ , \hat{h} であり、制御量は C_L である。また $\hat{V} = V/V_0$, $\hat{h} = h/h_0$, $\hat{t} = t/(V_0/g)$ である。

2.2 評価関数 評価関数は飛行距離である。

$$I = \int_0^{\hat{t}_f} (F_r/\bar{h}_0)\hat{V} \cos \gamma d\hat{t} \quad (4)$$

この評価関数を与えられた拘束条件のもとで最大化する。

2.3 境界条件

初期条件

$$V_0 = 20, 25, 27.5 \text{ m/s} \quad (5)$$

$$\gamma_0 = 0 \text{ deg} \quad (6)$$

$$h_0 = 20 \text{ m} \quad (7)$$

終端条件

$$V_f = 18 \sim 25 \text{ m/s} \quad (8)$$

$$\gamma_f = -2 \sim 0 \text{ deg} \quad (9)$$

$$h_f = 0 \text{ m} \quad (10)$$

V_f , γ_f は、指定した範囲内で計算において最適化される。

2.4 地面効果 地面効果は、空力中心の高度 h_a が少なくともスパン b よりも低い高度において有効である。地面効果を考慮した計算では h_a が b 以下の区間で、 AR の代わりに AR_e を用いる。 AR_e と AR の比は、 h_a と b の比の代数近似関数として表す事が出来る⁵⁾ 本論文では反復計算途中の発散性より、この関数を式(11)で表される3次曲線近似関数として計算した。これを図示すると第2図のようになる。 h_a と h の差を1mであると仮定すると、 h_a が最低高度の時は $h_a/b = 0.1$ である。

$$\frac{AR_e}{AR} = a_3(\bar{h}_a)^3 + a_2(\bar{h}_a)^2 + a_1(\bar{h}_a) + a_0 \quad (11)$$

2.5 状態量不等式拘束条件 滑空機の飛行高度には式(12)の不等式拘束が課せられている。これは状態量不等式拘束条件であるので、単調区間法⁷⁾を用いた定式化で制御量を陽に含んだ等式拘束条件に変換して計算する。

$$\hat{h} \geq \hat{h}_{min} \quad (12)$$

式(12)の左辺を時間で微分すると式(3)より

$$\frac{d\hat{h}}{d\hat{t}} = (F_r/\bar{h}_0)\hat{V} \sin \gamma \quad (13)$$

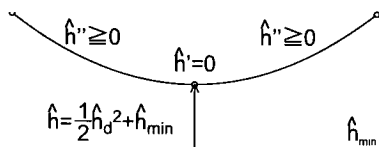
式(13)をさらに時間で全微分し、式(1), (2)を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2\hat{h}}{d\hat{t}^2} = & (F_r/\bar{h}_0) \left[-\frac{1}{2}(F_r/\mu)\hat{V}^2 \right. \\ & \times \left\{ \left(C_{D0} + \frac{1}{\pi AR_e} C_L^2 \right) \sin \gamma \right. \\ & \left. \left. - C_L \cos \gamma \right\} - 1 \right] \quad (14) \end{aligned}$$

この2回の微分操作で初めて制御量 C_L が拘束条件に陽に現れるので、式(12)は2次状態量不等式拘束である。

状態量と制御量は、最低高度点では

$$\frac{d\hat{h}}{d\hat{t}} = 0 \quad (15)$$



第3図 単調区間法による定式化

を満たさなくてはならない また、この前後の付近では

$$\frac{d^2 \hat{h}}{dt^2} \geq 0 \quad (16)$$

を満たさなくてはならない ここで、最低点をダミーのパラメタ \hat{h}_d を用いて式(17)の様におけば、最低点が h_{\min} でない点でも同じ定式化を用いる事が出来る。この定式化の概念は第3図に示されている。

$$\hat{h} = \frac{1}{2} \hat{h}_d^2 + \hat{h}_{\min} \quad (17)$$

この最低点の発生する場所を、時間軸折り返し法における折り返し点として折り返し区間を設定する。

以上の定式化により新たに追加される折り返し点での境界条件は、式(15)、(17)である。また最低点前後の区間には式(16)をダミーの制御変数 u_d を新たに用いた式(18)の形の等式拘束条件を付加する。

$$\frac{d^2 \hat{h}}{dt^2} - u_d^2 = 0 \quad (18)$$

2.6 その他の条件等 制御量 C_L は式(19)の形で制限されている。

$$C_{L\min} \leq C_L \leq C_{L\max} \quad (19)$$

これを、ダミーの制御変数 C_{Ld} を用いて式(20)の等式拘束条件に変換して用いる。

$$C_L = \frac{C_{L\max} - C_{L\min}}{2} \sin C_{Ld} + \frac{C_{L\max} + C_{L\min}}{2} \quad (20)$$

また荷重倍数については制限をしないものとした。

3. 数値計算結果

計算に用いた諸量は第1表に与えられており、これらの値を用いて

$$AR = 20.0, 22.5, 25.0$$

の場合について計算をした。ただし初期速度が $V_0 = 27.5$ (m/s) については $AR = 22.5$ の場合のみ計算し、飛行高度領域において障害物が無いものとする。距離最大滑空の理論解析値は式(21)、(22)で与えられる。各アスペクト比の理論解析値を第2表に示す。

$$C_{Lopt} = \sqrt{\pi AR e C_{D0}} \quad (21)$$

$$V_{opt} = \sqrt{2W / \rho_0 S C_{Lopt}} \quad (22)$$

第1表 機体諸元および飛行条件

項目	記号	単位	数値
質量	m	kg	300
翼面積	S	m ²	10
有害抗力係数	C_{D0}	—	0.017
最大揚力係数	C_{Lmax}	—	1.5
最小揚力係数	C_{Lmin}	—	-0.5
重力加速度	g	m/s ²	9.807
大気密度	ρ_0	kg/m ³	1.225

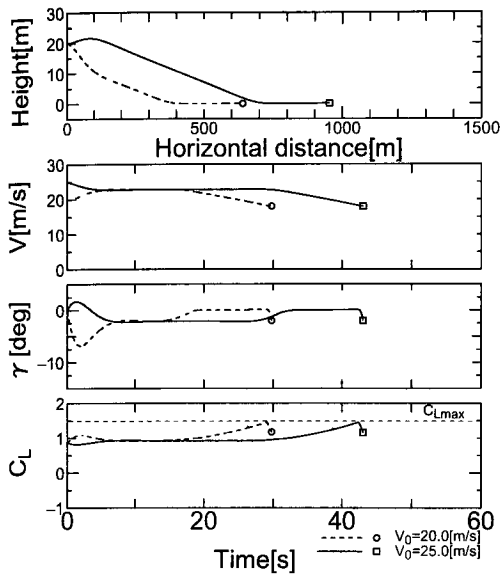
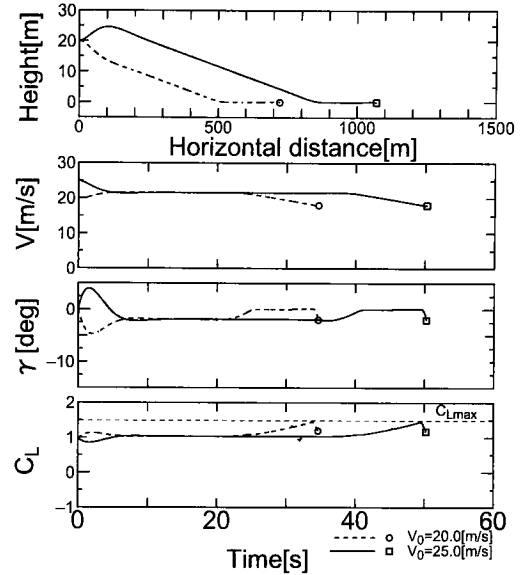
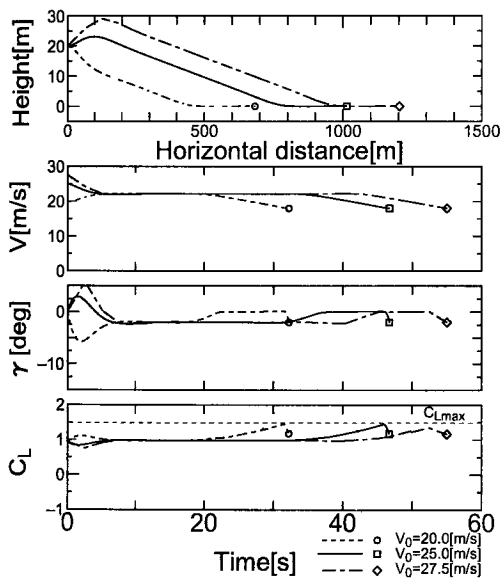
第2表 各アスペクト比における理論解析値

AR	C_{Lopt}	V_{opt} (m/s)	$\{L/D\}_{max}$
20.0	0.92	22.79	27.19
22.5	0.98	22.13	28.84
25.0	1.03	21.55	30.40

3.1 地面効果を考慮しない場合 この場合の結果を示したのが第4、5、6図であり、最大滑空距離は第3表に示した。

3.1.1 初期運動エネルギーが高い場合 ($V_0 > V_{opt}$) 各アスペクト比とも飛行初期に余剰運動エネルギーを位置エネルギーに変換するために上昇飛行を行い、定常滑空速度まで減速した後に定常滑空飛行に移行している。この定常滑空時の C_L の値は、理論解析値である揚抗比最大を実現する C_L に等しくなっている。定常滑空速度は終端条件で指定された最低速度よりも高いので、定常滑空時に余剰の運動エネルギーを保有している。そこでこの余剰運動エネルギーを使い切るため、定常滑空から最低高度に到達する前に穏やかに引きおこしを行って、最低高度による水平飛行に移行している。最後は指定した終端値のうち、速度および、経路角の最小値付近で飛行を終了している。アスペクト比による飛行経路の特徴の大幅な差は見られないが、アスペクト比が高いと定常滑空角が浅くなり、また誘導抵抗が減少するので到達距離は延びている。

初期速度と定常滑空速度の差による余剰運動エネルギーの影響は、初期速度が大きくなるほど上昇に余裕ができて、上昇角が大きくなることである。このことは第5図の経路角に示されている。高野・加藤の研究においてもこの様な上昇、滑空飛行が見られ、余剰運動エネルギーが比較的小さい場合²⁾と、大きい場合³⁾とを比較すると大きい方がより急な上昇となっている。また上昇飛行による穏やかなフゴイド運動がみられる。このフゴイド運動は高野・加藤の研究においては顕著に出ているが、本研究では余剰運動エネルギーは彼等の研究と比較して1/9以下となっているのでフゴイド運

第4図 地面効果を考慮しない場合 ($AR=20.0$)第6図 地面効果を考慮しない場合 ($AR=25.0$)第5図 地面効果を考慮しない場合 ($AR=22.5$)

第3表 地面効果を考慮しない場合の最大滑空距離

AR	初期速度 (m/s)		
	20.0	25.0	27.5
20.0	640.39 (m)	953.44 (m)	—
22.5	682.75 (m)	1013.56 (m)	1202.86 (m)
25.0	722.25 (m)	1069.79 (m)	—

らの状態量を自由とすることはできない。その結果、水平飛行から上昇と降下飛行に行くが、この運動は第4, 5, 6図ではほとんど図示されない様な微小な値で行っている。さらに飛行終了直前に終端条件を満たす為に C_L を急に減少させる操作を行い、 C_{Lmax} をある程度利用する解とはなっていない。終端での飛行速度および経路角は、指定した範囲内における最小値で終了する。

3.1.2 初期運動エネルギーが低い場合 ($V_0 < V_{opt}$)

河内・稲田・東の研究においては初期高度が最低高度からの飛行となっているため、飛行初期に位置エネルギーを運動エネルギー変換をする余裕がない。このため本論文の様な初期経路角がゼロの場合においては、飛行初期から最低高度における水平飛行を行う結果となっている。しかし本論文の計算においては飛行初期に位置エネルギーを保有しているため、各アスペクト比とも定常滑空速度に到達するまで降下飛行を行い、位置エネルギーを運動エネルギーに変換した後に定常滑空飛行に移行している。定常滑空速度はアスペクト比が高い方

動は顕著に現れない。

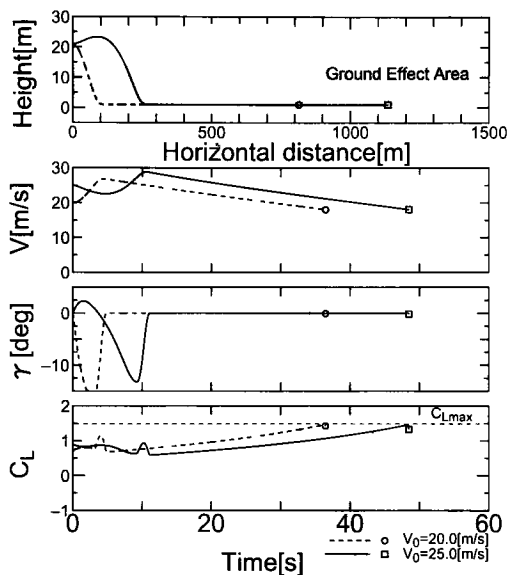
滑空飛行から終端までの飛行は、高野・加藤や河内・稲田・東の研究では飛行終了前に C_{Lmax} をある程度利用して、いったん上昇してから降下して終了する。しかしこれらの研究では状態量のうち V_t や γ_t が自由であるためにこのような飛行を行うことができる。しかし本論文の計算の対象は滑空機であるため、これ

が低くなるため、同じ初期速度であれば早く到達することができ、飛行当初の降下角も浅く抑えられている。定常滑空後の飛行は、初期運動エネルギーが高い場合と等しくなっているため、飛行初期の飛行経路は初期運動エネルギーの高低によって大きく影響されていることが考えられる。

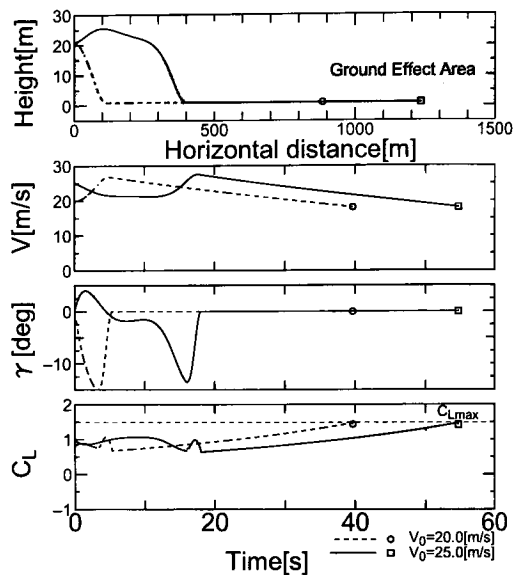
今回の計算では、全ての初期速度、アスペクト比の結果において定常滑空飛行が現れている。しかし飛行

初期における速度や高度、またアスペクト比がさらに低い場合においては、降下飛行において定常滑空速度に到達する以前に最低高度に到達する場合が起こりうる。このような場合においては、定常滑空飛行は現れないと考えられる。

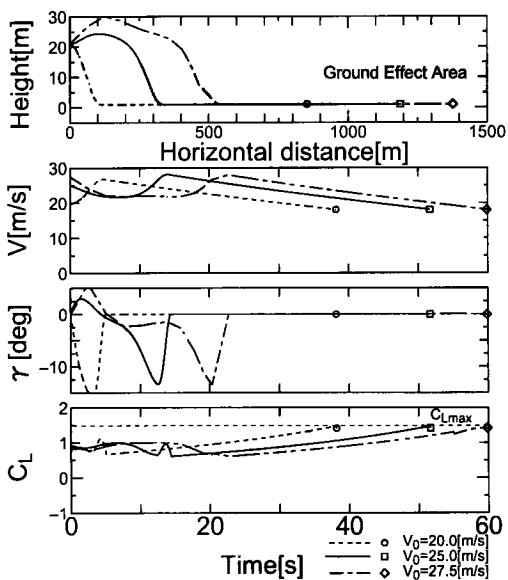
3.2 地面効果を考慮した場合 この場合の結果を示したのが第7, 8, 9, 10図であり、最大滑空距離は第4表に示した。



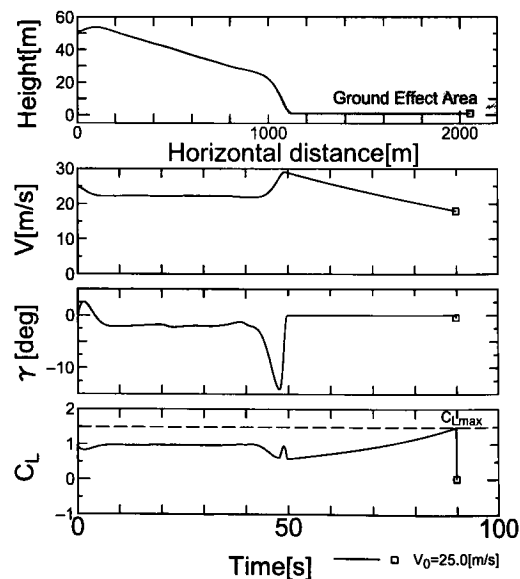
第7図 地面効果を考慮した場合 ($AR=20.0$)



第9図 地面効果を考慮した場合 ($AR=25.0$)



第8図 地面効果を考慮した場合 ($AR=22.5$)



第10図 地面効果を考慮した場合 ($AR=22.5$, $h_0=50$ [m])

第4表 地面効果を考慮した場合の最大滑空距離

AR	初期速度 (m/s)		
	20.0	25.0	27.5
20.0	814.92(m)	1135.27(m)	—
22.5	852.36(m)	1187.52(m)	1376.55(m)
25.0	884.71(m)	1233.36(m)	—

3.2.1 初期運動エネルギーが高い場合 ($V_0 > V_{opt}$)
 飛行初期に上昇飛行により余剰運動エネルギーを位置エネルギーに変換するのは、地面効果を考慮しない場合と同じである。しかしその後の飛行では、第8, 9図の様に定常滑空飛行を試みる傾向がある場合もあるが、いずれも急激に高度を下げて最低高度による水平飛行に移行して、そのまま飛行を終了している。降下飛行から水平飛行への移行の際の引き起こしでは、降下角が深いため C_L を大きく利用した操作を行っている。地面効果を考慮しない場合には、飛行終了前にいったん上昇してから降下して終了するが、地面効果を考慮した場合ではこの飛行は見られない。これは河内・稲田・東の研究においても同様の結果が得られている。最低高度における水平の非定常滑空飛行を試みるのは、高度が低いほど AR_0 が高くなるため誘導抵抗が減少して飛行距離が延びるからである。従って地面効果を考慮しない場合では定常滑空飛行が優位であったが、地面効果を考慮した場合では最低高度による水平の非定常滑空飛行の方が優位となる場合があることが示されている。

上昇飛行後に定常滑空飛行が現れるのは、余剰運動エネルギーが十分高い、つまり上昇飛行により位置エネルギーを得ることができる場合やアスペクト比が高い場合においてである。これは、得られる最高高度が高くなると、地面効果の有効な高度との差が大きくなるためであり、またアスペクト比が高くなると定常滑空角が浅くなりより遠くへ飛行できるためであると考えられる。そこで初期位置エネルギーの高い場合として、 $AR=22.5$ の時に $h_0=50$ (m) として計算した例が第10図であるが、上昇飛行後の定常滑空飛行区間が長くなっているのがわかる。

3.2.2 初期運動エネルギーが低い場合 ($V_0 < V_{opt}$)
 各アスペクト比ともに余剰運動エネルギーが無いために初期段階から降下して、定常滑空を試みずに最低高度による水平飛行に移行してそのまま飛行終了を迎えている。降下時の経路角はアスペクト比が高いほど緩やかであるが、これも誘導抵抗による損失が少ないためである。今回の計算における初期高度では、降下して定常滑空に移行するまでに十分な高度ではなく、地面効果を利用する飛行方法を選んでいる。しかしながら

十分な初期高度が与えられていれば、定常滑空を併用した解となることが、初期運動エネルギーが高い場合と比較して考えられる。

4. 結 言

本論文では滑空機の距離最大飛行を、最適制御問題として定式化して数値計算を行った。地面効果を考慮しない場合では定常滑空飛行を含む解が最適解となったが、地面効果を考慮した場合には、最低高度における水平の非定常滑空飛行を含む解が最適解となった。しかし同じ地面効果を含む場合でも、初期エネルギーが高い場合やアスペクト比が高い場合には、定常滑空の優位性が高くなり、最低高度による水平飛行を行う以前に定常滑空飛行を行う傾向がある。

アスペクト比が高くなると地面効果の有無にかかわらず、誘導抵抗が減少するので飛行距離が長くなる。また初期運動エネルギーが定常滑空速度による運動エネルギーより高い場合では、地面降下の有無にかかわらず飛行初期に余剰運動エネルギーを位置エネルギーに変換するために上昇飛行を行う

状態量に自由な終端条件を持つ計算においては、飛行終了前に C_{Lmax} をある程度利用した解となる。しかし全ての状態量の終端条件を指定した場合には、 C_{Lmax} をある程度利用した解とはならない

本研究における数値計算については、防衛大学校航空宇宙工学教室高野博行講師に数々のご助言、ご指導を頂きました。深く感謝いたします

参 考 文 献

- 1) Azuma, A.: The Biokinetics of Flying and Swimming, Springer-Verlag, Tokyo, 1992, pp. 62.
- 2) 高野博行, 加藤寛一郎: 最長滞空制御について, 日本航空宇宙学会第19期年会講演集, 1988, pp. 77-78.
- 3) 高野博行, 加藤寛一郎: ハンド・ランチの最長滞空制御について, 日本航空宇宙学会第20期年会講演集, 1989, pp. 199-200.
- 4) 河内啓二, 稲田善信, 東 昭: トビウオの滑空飛行について, 日本航空宇宙学会第20期年会講演集, 1989, pp. 203-204.
- 5) Kawachi, K., Inada, Y. and Azuma, A.: Optimal Flight Path of Flying Fish, J. Theor. Biol., **163** (1993), pp. 145-159.
- 6) 上野誠也: 航空機の最短時間旋回に関する研究, 東京大学博士論文, 1985.
- 7) 高野博行: 最適制御における状態量不等式拘束に関する研究, 日本航空宇宙学会誌, **39** (1991), pp. 195-201.
- 8) Wu, A. K. and Miele, A.: Sequential Conjugate Gradient Restoration Algorithm for Optimal Control Problems with Nondifferential Constraints and General Boundary Conditions, Part 1, Optimal Control Applications & Methods, **1** (1980), pp. 69-88.
- 9) Katzoff, S. and Sweberg, H. H.: Ground Effect on Downwash Angles and Wake Location, NACA Rept. 738, 1943.