

複合材料講座

複合材料力学入門

第3章 積層板の理論と最適設計の基礎

福 永 久 雄*

1. 一方向材の繊維配向による積層

第1章¹⁾において、複合材料は比強度・比弾性率の大きい材料であるとともに、異方性の性質を利用して設計できる材料であることが説明された。そして、異方性の意味については第2章²⁾で述べられ、一方向材の主軸方向(繊維方向と繊維直角方向)、斜方向の応力-歪み関係が誘導された。第1, 2章での説明により、複合材料の応力-歪み関係及び異方性という性質に馴染んでこられた読者に対し、本章では、図1に示すような一方向材を色々な方向に配向した積層材について、板としての弾性特性を調べることにしよう。基礎となる考え方は古典積層理論と呼ばれる単純な理論であるが、この理論を用いることにより板の弾性特性を知ることができるとともに異方性を積極的に利用するための基礎関係を理解できる。また、積層板の簡単な例について、弾性特性の設計の仕方、最適設計の考え方を説明する。

まず、第2章で示された一方向材の斜方向(x - y - z 座標)の応力-歪み関係を再録しよう。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 σ_x , σ_y , σ_{xy} は、 x , y 方向の垂直応力及びせん断応力、 ε_x , ε_y , ε_{xy} は、 x , y 方向の垂直歪み及びせん断歪み(工学表記)である。第2章と同様に、 \bar{Q}_{ij} を弾性不変量で表示すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \\ \bar{Q}_{12} &= U_4 - U_3 \cos 4\theta, \quad \bar{Q}_{66} = U_5 - U_3 \cos 4\theta \\ \bar{Q}_{22} &= U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \\ \bar{Q}_{16} &= -\frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta - U_3 \sin 4\theta \\ \bar{Q}_{26} &= -\frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta + U_3 \sin 4\theta \end{aligned} \quad (2)$$

弾性不変量 $U_i (i=1, 2, \dots, 5)$ は一方向材の弾性係数から求められる材料定数であり、弾性係数との関係は第2章に示されている。また、 θ は図1の方向を正としたときの繊維角である。文献によっては図1の θ の方向を負とする場合もよくあるので、個々の文献で θ の正方向をどのように定義しているかに注意が必要である。

2. 積層板の弾性特性～古典積層理論

図2に示すように積層材の座標を決めることにして、 k 番目 ($k=1, 2, \dots, N$) の層は繊維方向が x 軸と θ_k 傾いているとする。この k 番目層の応力-歪み関係は $\theta=\theta_k$ を(2)式に代入することにより(1)式で求まる。

積層板では、図3に示すように、(x , y , z) 点における歪みを板厚方向の座標 z の一次関数で仮定する。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x, y, z) &= \varepsilon_x^0(x, y) + z\kappa_x(x, y) \\ \varepsilon_y(x, y, z) &= \varepsilon_y^0(x, y) + z\kappa_y(x, y) \\ \varepsilon_{xy}(x, y, z) &= \varepsilon_{xy}^0(x, y) + z\kappa_{xy}(x, y) \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 ε_x^0 , ε_y^0 , ε_{xy}^0 及び κ_x , κ_y , κ_{xy} は $z=0$ での歪み及び曲率を表し、 x , y の関数である。また、図2に示すように、通常 $z=0$ は幾何学的な中央面にとることが多い。積層板の繊維角が層毎に異なるとき、図3からわかるように、歪みは z の線形関数であるが弾性係数が層毎に異なるため、応力は各層内では線形分布、層と層の境界で不連続的に変化することになる。

(3)式の歪みの z に関する線形近似に対応して、応力については次の合力と合モーメントを考える。

$$\begin{aligned} (N_x, N_y, N_{xy}) &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) dz \\ (M_x, M_y, M_{xy}) &= \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}) z dz \end{aligned} \quad (4)$$

合力 (N_x, N_y, N_{xy}) は応力 ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$) の板厚方向積分で x , y 方向の垂直合力及びせん断合力、合モーメント (M_x, M_y, M_{xy}) は応力の1次モーメントを表し x , y 方向の曲げモーメント及び振りモーメントである。これら

* Hisao FUKUNAGA: 東北大学工学部機械航空工学科助教 (980 仙台市青葉区荒巻字青葉)

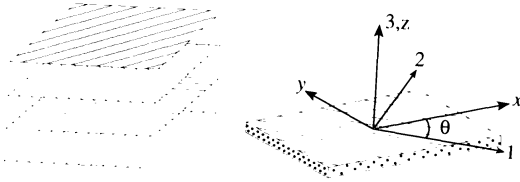


図1 積層材と繊維角

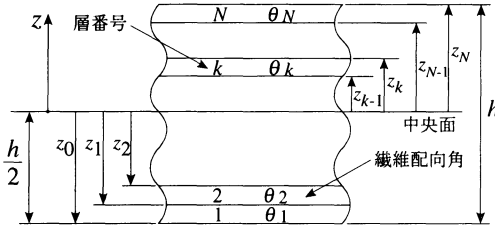


図2 N層積層材

合力及び合モーメントは単位長さ当りの力とモーメントを示す。また、合力と合モーメントは応力の正の方向と一致するように図4の方向を正とする。

(3) 式を (1) 式の右辺に代入して、 k 番目層の応力を中央面歪み ($\epsilon_x^0, \epsilon_y^0, \epsilon_{xy}^0$) 及び曲率 ($\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$) で表した後、(4) 式の右辺の積分を行うと次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \epsilon_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ここで、

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (6)$$

$(\bar{Q}_{ij})_k$ は (2) 式で示される k 番目層の応力-歪みマトリックスの成分である。(6) 式で A_{ij} は面内剛性、 B_{ij} は面内変形と面外変形との連成を示すカップリング剛性、 D_{ij} は面外剛性を表す。(5) 式の関係を古典積層理論と呼び、等方性材あるいは均質な直交異方性材ではゼロとなるカップリング項 B_{ij} ($i, j=1, 2, 6$), A_{16} , A_{26} , D_{16} , D_{26} を生じる。

積層板では、通常、中央面に対称に積層した対称積層

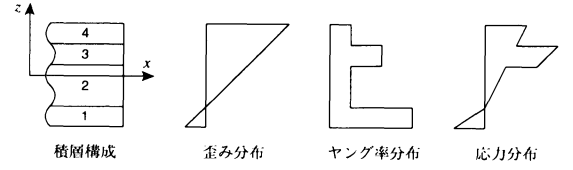


図3 積層材内の応力、歪み

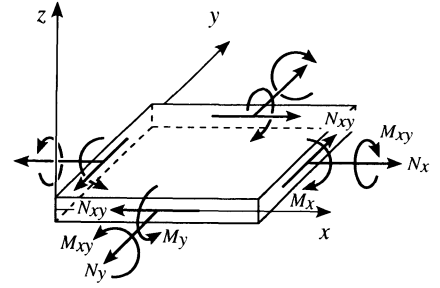


図4 合力と合モーメント

材が用いられる。このとき、 $\theta(z) = \theta(-z)$ の関係が成り立つことになり、(6) 式の B_{ij} はゼロとなる。また、(2) 式の一方向材の \bar{Q}_{ij} を (6) 式に代入すると、次式の関係が得られる。

$$\begin{aligned} (A_{11}, A_{22}, A_{12}, A_{66}, A_{16}, A_{26}) \\ = h [(U_1, U_1, U_4, U_5, 0, 0) \\ + (\xi_1, -\xi_1, 0, 0, -\xi_3/2, -\xi_3/2) U_2 \\ + (\xi_2, \xi_2, -\xi_2, -\xi_2, -\xi_4, \xi_4) U_3] \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (D_{11}, D_{22}, D_{12}, D_{66}, D_{16}, D_{26}) \\ = h^3/12 [(U_1, U_1, U_4, U_5, 0, 0) \\ + (\xi_9, -\xi_9, 0, 0, -\xi_{11}/2, -\xi_{11}/2) U_2 \\ + (\xi_{10}, \xi_{10}, -\xi_{10}, -\xi_{10}, -\xi_{12}, \xi_{12}) U_3] \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 h は板厚、 U_i は弾性不変量である。(7) (8) 式において、 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ 及び $(\xi_9, \xi_{10}, \xi_{11}, \xi_{12})$ は積層パラメータと呼ばれ、中央面に対称な積層材では次式与えられる。

$$\begin{aligned} (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \\ = \int_0^1 (\cos 2\theta, \cos 4\theta, \sin 2\theta, \sin 4\theta) du \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} (\xi_9, \xi_{10}, \xi_{11}, \xi_{12}) \\ = 3 \int_0^1 (\cos 2\theta, \cos 4\theta, \sin 2\theta, \sin 4\theta) u^2 du \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 $u=2z/h$ は無次元座標である。 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ 及び $(\xi_9, \xi_{10}, \xi_{11}, \xi_{12})$ は、繊維配向角 $\theta(u)$ からなる関数であり、それぞれ面内積層パラメータ及び面外積層パラメータと呼ばれる。弾性不変量は用いる材料によって決

まる材料パラメータであるのに対し、積層パラメータは繊維配向角の分布 $\theta(u)$ によって決まる幾何パラメータでありすべての積層構成を表現できるパラメータである。

3. 積層パラメータと積層構成

(7)式の面内剛性 A_{ij} は、弾性不変量、板厚、面内積層パラメータの関数であり、一方、(8)式の面外剛性 D_{ij} は、弾性不変量、板厚、面外積層パラメータの関数である。また、面内剛性のうち、 A_{16} 、 A_{26} は伸びとせん断のカップリング（垂直力を作用させると伸縮とともにせん断変形を生じ、逆にせん断力を作用させるとせん断変形以外に伸縮を生じる現象）を示す項であり異方性材料特有のものであるが、この A_{16} 、 A_{26} は積層パラメータ ξ_3 、 ξ_4 によって発生することがわかる。同様に、面外剛性 D_{16} 、 D_{26} は曲げと捩りのカップリング（曲げモーメントの作用のもとで捩り変形を生じ、捩りモーメントの作用のもとで曲げ変形を生じる現象）を示す項であり、 ξ_{11} 、 ξ_{12} より発生する。

まず、積層パラメータの特性を述べる。4個の面内積層パラメータは独立ではなく、相互に次のような拘束関係があることが知られている³⁾。

$$\begin{aligned} \xi_1^2 + \xi_3^2 &\leq 1, \quad \xi_2^2 + \xi_4^2 \leq 1 \\ 2(1 + \xi_2)\xi_3^2 - 4\xi_1\xi_3\xi_4 + \xi_4^2 &\leq (\xi_2 - 2\xi_1^2 + 1)(1 - \xi_2) \end{aligned} \quad (11)$$

カップリング項 (ξ_3 , ξ_4) が (0, 0) のとき、(ξ_1 , ξ_2) の許容領域は (11) 式の2行目の式より次式で与えられる。

$$2\xi_2^2 - 1 \leq \xi_2 \leq 1 \quad (12)$$

一方、指定した (ξ_1 , ξ_2) に対し、(ξ_3 , ξ_4) の許容領域は (11) 式の2行目の式を満たす円内部で与えられ、たとえば、(ξ_1 , ξ_2) = (0, 0) のとき $2\xi_3^2 + \xi_4^2 \leq 1$ となる。

次に、積層材の積層構成の表示法を説明する。たとえば、炭素繊維/エポキシ樹脂からなる一方向強化材はプリプレグシートと呼ばれる厚さ 0.125 mm 程度のシート状で市販されている。この一方向材を 0° , 90° , 90° , 0° と4層積層したとき $[0/90/90/0]$ と表示する。対称性のあるこの例では、 $[0/90]_s$ (s は symmetric の略) と表示される場合が多い。また、 $[0/0/60/60/0/0]$ の場合は $[(0)_2/60]_s$ とも表示する。次に、代表的な積層構成と積層パラメータの関係を調べてみよう。ここでは、(ξ_3 , ξ_4) = (0, 0) であるようなカップリング項を生じない積層構成を対象とする。なお、(ξ_3 , ξ_4) = (0, 0) であるような積層構成としては、厚さの等しい $+\theta$ 層と $-\theta$ 層からなる積層構成があり、このような積層材はバランスト積層と呼ばれる。

3.1 クロスプライ積層

0° 層と 90° 層からなる積層構成であり、層厚比を h_0 及び h_{90} (ただし、 $h_0 + h_{90} = 1$, $h_0 \geq 0$, $h_{90} \geq 0$) とすると積層パラメータとの間に次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} \xi_1 &\equiv \int_0^1 \cos 2\theta du = h_0 - h_{90} \\ \xi_2 &\equiv \int_0^1 \cos 4\theta du = 1 \quad (-1 \leq \xi_1 \leq 1) \end{aligned} \quad (13)$$

図5(a)は(12)式の関係を図示したものであるが、点A (ξ_1 , ξ_2) = (1, 1) は 0° 一方向材、点C (-1, 1) は 90° 一方向材に対応し、線分AC上の ξ_1 と層厚比の関係は図5(b)に示すようになる。

3.2 アングルプライ積層

厚さの等しい $+\theta$ 層 (θ_0 = 一定) と $-\theta_0$ 層からなる積

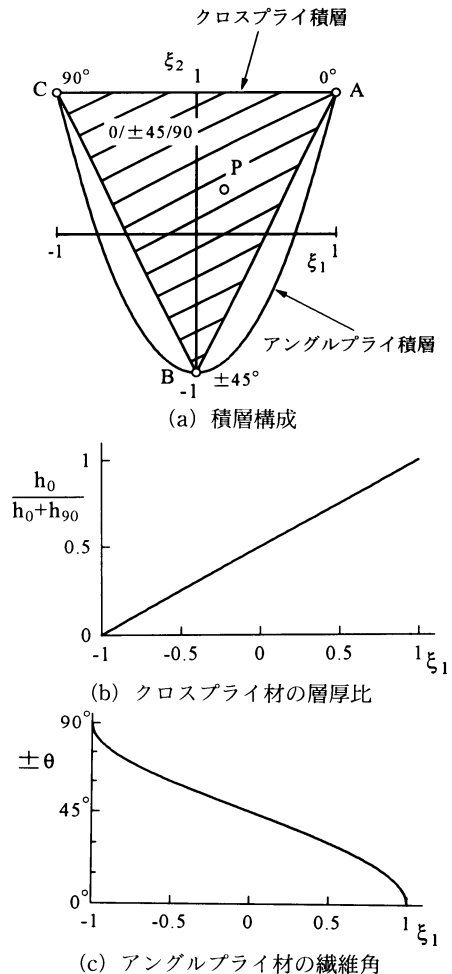


図5 積層パラメータ ξ_1 - ξ_2 座標上の積層構成

層構成では、

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \cos 2\theta_0 \\ \xi_2 &= \cos 4\theta_0 = 2 \cos^2 2\theta_0 - 1\end{aligned}\quad (14)$$

であり、 $\xi_2 = 2\xi_1^2 - 1$ ($-1 \leq \xi_1 \leq 1$) の関係が成り立つことから、図 5(a) の放物線 ABC 上の積層構成に対応する。このとき、積層パラメータ ξ_1 と繊維角 θ_0 との間には (14) 式の 1 行目の関係が成り立ちこれを図 5(c) に示す。 $(\xi_1, \xi_2) = (1/\sqrt{2}, 0)$ は $\pm 22.5^\circ$ 積層、 $(0, -1)$ は $\pm 45^\circ$ 積層、 $(-1/\sqrt{2}, 0)$ は $\pm 67.5^\circ$ 積層に対応している。

3.3 $0/\pm 45/90$ 積層

航空機構造等でよく用いられる積層構成で、 $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$ 層の割合に応じて、図 5(a) の三角形 ABC の斜線内の一点を示す。すなわち、点 A (0° 層)、点 B ($\pm 45^\circ$ 層)、点 C (90° 層) の層厚比を $h_0, h_{\pm 45}$ 及び h_{90} とすると、内部の点 P (ξ_1, ξ_2) との間に次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}(\xi_1, \xi_2) &= h_0(1, 1) + h_{\pm 45}(0, -1) + h_{90}(-1, 1) \\ h_0 + h_{\pm 45} + h_{90} &= 1, \quad h_0 \geq 0, \quad h_{\pm 45} \geq 0, \quad h_{90} \geq 0\end{aligned}\quad (15)$$

(15) 式を逆算すると、 (ξ_1, ξ_2) に対応する層厚比は次式で与えられる。

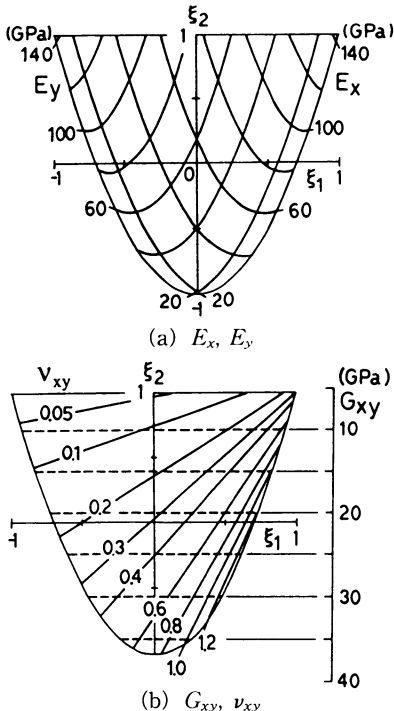


図 6 積層パラメータ ξ_1 - ξ_2 座標上の面内弾性特性

$$\begin{aligned}h_0 &= (1 + 2\xi_1 + \xi_2)/4 \\ h_{\pm 45} &= (1 - \xi_2)/2 \\ h_{90} &= (1 - 2\xi_1 + \xi_2)/4\end{aligned}\quad (16)$$

3.4 擬似等方性積層

面内剛性が等方性を示す積層構成であり、 $(\xi_1, \xi_2) = (0, 0)$ に対応する。例えば 0° 層、 $\pm 45^\circ$ 層、 90° 層を 1:2:1 の比に積層した $[0/\pm 45/90]$ 。積層材は、擬似等方性を示す。あるいは、 $\pm 22.5^\circ$ 層と $\pm 67.5^\circ$ 層を 1:1 の比で積層した $[\pm 22.5/\pm 67.5]$ 。積層材も擬似等方性材である。

4. 積層パラメータと弾性特性

次に、次式で定義される工学的弾性係数を積層パラメータ座標上に表示してみよう。

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{yx}/E_y & \nu_{sx}/G_{xy} \\ -\nu_{xy}/E_x & 1/E_y & \nu_{sy}/G_{xy} \\ \nu_{xs}/E_x & \nu_{ys}/E_y & 1/G_{xy} \end{bmatrix}\quad (17)$$

ここで、 $E_x, E_y, G_{xy}, \nu_{xy}, \nu_{yx}$ は面内の x, y 方向のヤング率、せん断弾性係数、 x, y 方向ポアソン比である。なお、相反関係より y 方向ポアソン比 ν_{yx} は、 $\nu_{yx} = \nu_{xy} E_y/E_x$ である。また、 $\nu_{xs}, \nu_{ys}, \nu_{sx} (= \nu_x G_{xy}/E_x), \nu_{sy} (= \nu_y G_{xy}/E_y)$ は、伸び-せん断のカップリングを示す。

図 6 に、カップリング項の無い ξ_1 - ξ_2 座標上でのヤング率、せん断弾性係数、ポアソン比を示す。ここでは、典型的な高強度タイプの炭素繊維/エポキシ樹脂一方向複合材料の材料定数を用いている。

$$\begin{aligned}E_1 &= 142 \text{ GPa}, \quad E_2 = 10.8 \text{ GPa} \\ G_{12} &= 5.49 \text{ GPa}, \quad \nu_{12} = 0.3\end{aligned}\quad (18)$$

x, y 方向のヤング率は、 0° 一方向材及び 90° 一方向材で最大となるのに対し、せん断弾性係数は $\pm 45^\circ$ 積層材で最大となるのがわかる。せん断弾性係数は、図 7 に示すように、 x - y 座標から 45° 傾いた方向の引張と圧縮が作用するときの剛性であり、引張と圧縮の方向に繊維を

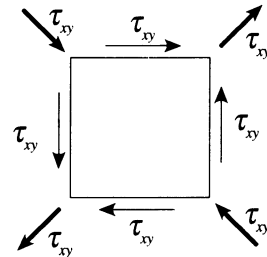
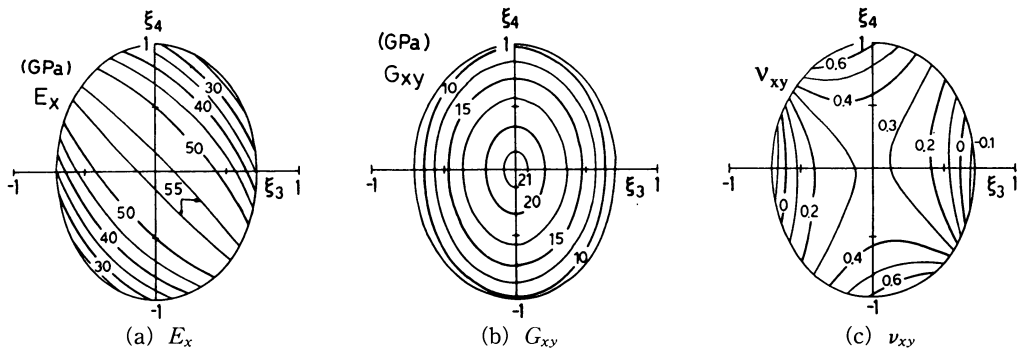


図 7 せん断応力とせん断弾性係数

図8 積層パラメータ ξ_3 - ξ_4 座標上の面内弾性特性

配向した $\pm 45^\circ$ 積層においてせん断弾性係数が大きくなることが理解できる。

図8に、 $(\xi_1, \xi_2) = (0, 0)$ の場合について、 ξ_3 - ξ_4 座標上での弾性特性を示す。ヤング率、せん断弾性係数はカップリングの無い $(\xi_3, \xi_4) = (0, 0)$ において最大となるのに対し、ポアソン比の等高線は複雑な挙動を示し $(\xi_3, \xi_4) = (0, 0)$ が鞍点となっている。

以上の議論は(7)式の面内剛性に関するものであるが、(8)式で示される面外剛性に関しても全く同様の議論が成り立つ。すなわち、面外積層パラメータの許容領域は(11)(12)式において、 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ を $(\xi_9, \xi_{10}, \xi_{11}, \xi_{12})$ に置き換えることによって得られる。また、曲げに関する工学的弾性係数は、(17)式において、 $A_{ij} \rightarrow D_{ij}$ 、 $h \rightarrow h^3/12$ と置き換えることによって次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{12}{h^3} \begin{bmatrix} 1/E_x & -\nu_{yx}/E_y & \nu_{sx}/G_{xy} \\ -\nu_{xy}/E_x & 1/E_y & \nu_{sy}/G_{xy} \\ \nu_{xs}/E_x & \nu_{ys}/E_y & 1/G_{xy} \end{bmatrix} \quad (19)$$

ここで、 $E_x, E_y, G_{xy}, \nu_{xy}$ は面外の x, y 方向のヤング率、せん断弾性係数、 x 方向ポアソン比である。図6、図8の座標を $\xi_1 \rightarrow \xi_9, \xi_2 \rightarrow \xi_{10}, \xi_3 \rightarrow \xi_{11}, \xi_4 \rightarrow \xi_{12}$ とすると面外積層パラメータ座標上の面外弾性特性を示すことになる。

なお、積層材では、積層構成により、面内と面外の弾性特性が大きく異なることに注意する必要がある。たとえば、 $[0/90]_s$ クロスプライ積層材の弾性係数は(17)(19)式より次のように求まる。

面内弾性特性：

$$E_x = E_y = 76.9 \text{ GPa}, G_{xy} = 5.49 \text{ GPa}, \nu_{xy} = 0.042 \quad (20)$$

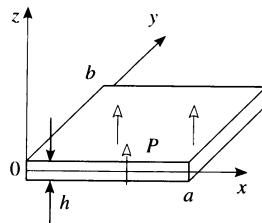


図9 分布荷重を受ける対称積層板

面外弾性特性：

$$E_x = 126 \text{ GPa}, E_y = 27.4 \text{ GPa}, G_{xy} = 5.49 \text{ GPa}, \nu_{xy} = 0.119 \quad (21)$$

面内のヤング率は 0° 層と 90° 層の層厚比によって決定されるのに対し、面外のヤング率は 0° 層と 90° 層の層厚比に加え層配置によっても大きく変化する。このように、面外剛性に関しては層厚比だけでなく積層順序が重要であることになる。

5. 最適設計入門

図9に示す分布荷重を受ける曲げ・振りカップリング D_{16}, D_{26} がゼロである対称積層板を例にして、最適設計法の概略を説明する。板は周辺を単純支持され一様分布荷重 p を受けている。このときの板のたわみは次式で与えられる⁴⁾。

$$w(x, y) = \frac{16p}{\pi^6} \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)}{m^3 n^3 d_{mn}} \quad (22)$$

ここで、

$$d_{mn} = D_{11}(m/a)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})(mn/ab)^2 + D_{22}(n/b)^4 \quad (23)$$

図10に、いくつかの積層材について、一様分布荷重を

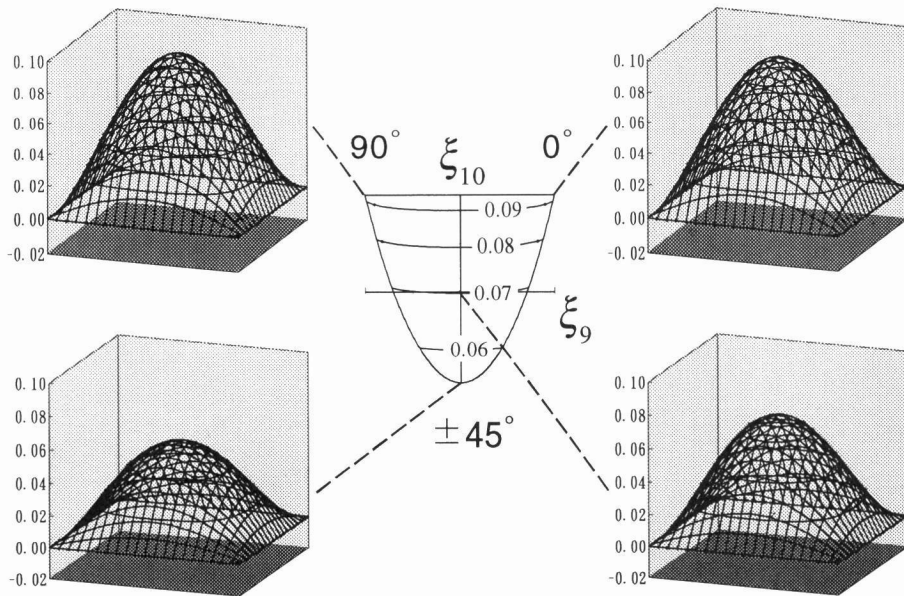


図 10 一様分布荷重を受ける単純支持正方形積層板のたわみ分布

受ける炭素繊維/エポキシ正方形板のたわみ分布を示す。積層パラメータ座標上に無次元化されたたわみ等高線を合せ示すが、積層構成により最大たわみがかなり変化することがわかる。

いま板の中央点でのたわみを最小とする積層構成を求める問題を考える。このとき、次のように定式化する。

$$\begin{aligned} \text{目的関数} \quad & \min_{\xi_9, \xi_{10}} w(a/2, b/2) \\ \text{制約条件} \quad & 2\xi_9^2 - 1 \leq \xi_{10} \leq 1 \\ \text{設計変数} \quad & \xi_9, \xi_{10} \end{aligned} \quad (24)$$

ここで、目的関数とは設計者が最小（ある場合には最大）にしたい評価関数であり、本問題では中央点たわみを最小にすることである。制約条件とは設計上満たすべき条件であり、本問題では積層パラメータの許容領域である。また、設計変数とは設計において変更可能な量で、二つの積層パラメータを用いる。(24)式は非線形の最適化問題となっており、非線形最適化手法を適用することにより解を求めることができる。

(24)式の問題では、図 10 に示すような等高線分布を調べることなく、最適化手法の適用により直接に最適積層パラメータが $(\xi_9, \xi_{10}) = (0, -1)$ であることが見出される。対応する積層構成は $\pm 45^\circ$ 積層（たとえば、 $[(45)_{0.21}/$

$(-45)_{0.79}]_s$ 材：下添字は層厚比を示す）である。この例に示すように、積層構成を最適化することにより積層材の異方性を最大限に利用した設計が可能となる。複合材積層板、積層殻、さらに複雑な航空機複合材翼構造等について、座屈・振動・強度・空力弾性等に関する多くの最適設計研究が行われている。等方性材に比べ、繊維角・層厚等の設計自由度の非常に大きな複合材構造の設計においては、最適設計の効果もまた大きくなる。なお、複合材構造の最適設計に関しては、別の講座⁵⁻⁷⁾もあるので詳しく知りたい方は参照されたい。

参考文献

- 1) 福田 博：日本複合材料学会誌，**22** (1996)，19-25.
- 2) 石川隆司：日本複合材料学会誌，**22** (1996)，76-81.
- 3) 福永久雄，関根英樹：日本航空宇宙学会誌，**42** (1994)，371-380.
- 4) S.G. Lekhnitskii：Anisotropic Plates, Gordon and Breach, New York (1968)，p. 322.
- 5) 福永久雄：日本複合材料学会誌，**16** (1990)，75-82，115-122，256-265.
- 6) 日本複合材料学会編：複合材料ハンドブック，日刊工業新聞社，東京 (1989)，p. 764.
- 7) 日本機械学会編：構造・材料の最適設計，技報堂出版，東京 (1989)，p. 171.