第 9 巻
第 88 號
日本航空學會誌
昭和 17 年
8 月
The Journal of the Society of Aeronautical Science of Nippon
Vol. 9, No. 88. August, 1942

任意翼型の理論

(守屋, 森口兩氏の方法に關聯して)

(昭和 17 年 4 月 25 日 第 3 回撰定題目講演會に於て講演)

正員 東京帝國大學 助教授 今井 功

§1. はしがき

任意の翼型が與へられた場合，それの完全流體中に於ける空氣力學的特性を知るには，その翼型を單位圓に寫像する正則函數を見出せばよい．そのためには從來 Kármán の方法，Theodorsen の方法等が知られてゐたが，數年前守屋教授[1]によつて提案された方法は比較的簡單な手數で優秀な結果を與へるので各方面で採用せられてゐる．その後，森口氏[2][3]は守屋教授の方法が極めて高い精度をもつ一種の近似的解法であることを明かにし，嚴密には或る種の積分方程式を解くべきことを示された．すなはち，その積分方程式を逐次近似的に解く場合第一近似解として得られるものが守屋教授の方法にほゞ相當するのである．なほ守屋教授の公式及び森口氏の第一近似公式は實用上充分の精度をもつと考へられるので，これらを基として阿阪氏[4]は設計計算用として非常に便利な數表を作製して居られる．

最近守屋教授[5]はこの問題を再論し，逐次近似的に嚴密解に到達する一方法を提出された．これは教授の前の方法を第一近似として含むものである．

本論文では守屋教授の新方法に關聯して逐次近似の意味を改めて考へ直してみた．その結果守屋教授の用ゐられた共軛フーリエ級數も，森口氏の基礎とされた積分方程式も，この種の問題で本質的な役割を演ずるものではないことが明かになり，同時に新しい逐次近似の方式が見出された．この方式では逐次近似の意味が極めて明瞭で，また逐次近似の各段階の精度は兩氏のものに優るのではないかと考へられる．なほこの方法を用ゐて揚力係數，モーメント係數，壓力分布等に對する第一近似の公式が導かれるが，これらの諸公式はやはり守屋，森口兩氏の第一近似の公式とは幾分異つてゐる．

最後に共軛フーリエ級數は，逐次近似の計算を行ふ際に缺くことのできない重要性をもつものではないが，これを用ゐることにより調和分析の手續きを數値積分で代用できるといふ點に特長があることを附け加へる．

(1) 守屋富次郎： 任意の翼型の特性を求める一つの方法，本誌 5, 7 頁，昭和 12 年.
(2) 森口繁一： 二次元ポテンシャル論に關する事，本誌 5, 223 頁，昭和 13 年.
(3) 森口繁一： 翼斷面風速分布の計算法に就いて，本誌 8, 20 頁，昭和 16 年.
(4) 阿阪三郎： 翼型表面の壓力分布計算法(守屋，森口兩氏の方法に對する補遺)，川崎航空研究錄 2, 1 頁，昭和 16 年.
(5) 守屋富次郎： 任意翼型の一理論，本誌 8, 1054 頁，昭和 16 年.

§2. 基礎の關係式

與へられた翼型の上の最も遠い二點を前緣，後緣とし，これらを結ぶ直線すなはち翼弦を x 軸に選ぶ．前緣を座標原點とし弦長を單位の長さにとれば，翼型は一般に

$$y=g(x), \qquad 0\leqq x\leqq 1, \tag{2.1}$$

或は副變數 ϑ を用ゐて

$$x=\frac{1}{2}(1+\cos\vartheta), \tag{2.2}$$

$$y=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\vartheta+b_n\sin n\vartheta) \tag{2.3}$$

で表はされる．但し前緣は $\vartheta=\pi$ に，後緣は $\vartheta=0$ に對應する．

さて一般に $x+iy=z$ 面の任意の翼型の外部の領域は

$$z=c_{-1}Z+c_0+\frac{c_1}{Z}+\frac{c_2}{Z^2}+\cdots\cdots \tag{2.4}$$

なる形の正則函數によつて Z 面の單位圓：$Z=e^{i\theta}$ の外部の領域に等角寫像される．特に z 面の平板：

$$y=0, \qquad 0\leqq x\leqq 1$$

を Z 面の單位圓：$Z=e^{i\theta}$ に寫像する函數は周知の通り

$$z=\frac{1}{4}\left(Z+2+\frac{1}{Z}\right) \tag{2.5}$$

である．いま與へられた翼型は厚みも反りも著しくないものとすれば，(2.3) に於て a_n, b_n はすべて小さい量であらう．これを $O(\varepsilon)$ の程度とする．またこのとき (2.5) を考慮して (2.4) を

$$z=\frac{1}{4}\left(Z+2+\frac{1}{Z}\right)+C_{-1}z+C_0+\frac{C_1}{Z}+\frac{C_2}{Z^2}+\cdots\cdots \tag{2.6}$$

の形に書き直せば，$C_{-1}, C_0, C_1, \cdots\cdots$ はすべて小さい量と考へられる．さて

$$C_n=A_n+iB_n, \qquad n=-1,0,1,2,\cdots\cdots \tag{2.7}$$

とすれば，單位圓：$Z=e^{i\theta}$ の上では

$$\begin{aligned}C_nZ^{-n}&=(A_n+iB_n)(\cos n\theta-i\sin n\theta)\\&=(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)+i(B_n\cos n\theta-A_n\sin n\theta).\end{aligned}$$

これを (2.6) に入れて實數部，虛數部に分ければ

$$\begin{aligned}x=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)+A_0+(A_{-1}+A_1)\cos\theta-(B_{-1}-B_1)\sin\theta\\+\sum_{n=2}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta),\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}y=B_0+(B_{-1}+B_1)\cos\theta+(A_{-1}-A_1)\sin\theta\\+\sum_{n=2}^{\infty}(B_n\cos n\theta-A_n\sin n\theta).\end{aligned} \tag{2.9}$$

このやうに，與へられた翼型は (2.2), (2.3) のやうに ϑ を副變數として表はすことも，或は (2.8), (2.9) のやうに θ を副變數として表はすこともできるのである．

さて變換 (2.6) によつて前緣 $z=0$ 及び後緣 $z=1$ が夫々 $Z=e^{i(\pi+\delta)}$ 及び $Z=1$ に寫像され

るものとすれば，前縁及び後縁は最大直徑の兩端であるから，次の條件が成立つべきである:*)

$$\text{後縁}\quad \theta=0;\qquad x=1,\ \frac{dx}{d\theta}=0,$$

$$\text{前縁}\quad \theta=\pi+\delta;\ x=0,\ \frac{dx}{d\theta}=0.$$

從つて (2.8), (2.9) より次の關係が得られる：

$$A_0+(A_{-1}+A_1)+\sum_{n=2}^{\infty}A_n=0, \tag{2.10}$$

$$(B_{-1}-B_1)-\sum_{n=2}^{\infty}nB_n=0, \tag{2.11}$$

$$\frac{1}{2}(1-\cos\delta)+A_0-(A_{-1}+A_1)\cos\delta+(B_{-1}-B_1)\sin\delta$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(A_n\cos n\delta+B_n\sin n\delta)=0, \tag{2.12}$$

$$\frac{1}{2}\sin\delta+(A_{-1}+A_1)\sin\delta+(B_{-1}-B_1)\cos\delta$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(-A_n\sin n\delta+B_n\cos n\delta)=0. \tag{2.13}$$

吾々の目的は寫像函數 (2.6) を決定することである．そのためには (2.8), (2.9) の兩式で與へられる翼型が (2.2), (2.3) の兩式で與へられる翼型と完全に一致するやうに係數 A_n, B_n を定めればよい．その際條件 (2.10)—(2.13) は當然滿されてゐるべき性質のものである．

§3. 第一近似

(2.3) の係數 a_n, b_n は假定により $O(\varepsilon)$ の小さい量であるから，(2.8), (2.9) に於ける係數 A_n, B_n もすべて $O(\varepsilon)$ の小さい量と考へられる．從つて (2.13) より．

$$\frac{1}{2}\sin\delta=-(A_{-1}+A_1)\sin\delta-\cdots\cdots=O(\varepsilon).$$

故に

$$\delta=O(\varepsilon). \tag{3.1}$$

さて $\sin n\delta=n\delta-\frac{1}{6}(n\delta)^3+\cdots\cdots$, $\cos n\delta=1-\frac{1}{2}(n\delta)^2+\cdots\cdots$ であるから

$$\sin n\delta=O(\varepsilon),\qquad \cos n\delta=1+O(\varepsilon^2). \tag{3.2}$$

次に，(2.2), (2.8) を比較すれば $\cos\vartheta=\cos\theta+O(\varepsilon)$．故に

$$\vartheta=\theta+O(\varepsilon), \tag{3.3}$$

$$\sin n\vartheta=\sin n\theta+O(\varepsilon),\qquad \cos n\vartheta=\cos n\theta+O(\varepsilon). \tag{3.4}$$

(3.4) を (2.3) に入れ，且つ a_n, b_n は $O(\varepsilon)$ であることに注意すれば

$$y=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta)+O(\varepsilon^2). \tag{3.5}$$

*) 前縁，後縁が共に圓味をもつならば，座標軸の選び方から考へて $\delta x=0$ なることは明かである．後縁が角をもつ場合でも，後縁は寫像の特異點として，そこでは $dz/dZ=0$ なる關係が成立つからやはり $dx/d\theta=0$ である．或は非常に小さいながらも有限の曲率半徑をもつと考へる方が，むしろ實際に適合するであらう．

(3.5), (2.9) を比較すれば直ちに

$$A_n=-b_n+O(\varepsilon^2),\quad B_n=a_n+O(\varepsilon^2),\quad (n\geqq 2) \tag{3.6}$$

$$B_0=a_0+O(\varepsilon^2), \tag{3.7}$$

$$B_{-1}+B_1=a_1+O(\varepsilon^2), \tag{3.8}$$

$$A_{-1}-A_1=b_1+O(\varepsilon^2) \tag{3.9}$$

が得られる. これで B_0, A_n, B_n $(n\geqq 2)$ は $O(\varepsilon)$ まで精密に決定できた. $A_0, A_{-1}, A_1, B_{-1}, B_1$ の 5 個を定めるには (3.8), (3.9) の他に (2.10)—(2.13) の條件を用ゐる. すなはち (2.10), (2.11) より

$$A_0+(A_{-1}+A_1)=-\sum_{n=2}^{\infty}A_n=\sum_{n=2}^{\infty}b_n+O(\varepsilon^2), \tag{3.10}$$

$$B_{-1}-B_1=\sum_{n=2}^{\infty}nB_n=\sum_{n=2}^{\infty}na_n+O(\varepsilon^2). \tag{3.11}$$

また, (3.2) を考慮して (2.12) を變形すれば

$$A_0-(A_{-1}+A_1)=-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^nA_n+O(\varepsilon^2)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^nb_n+O(\varepsilon^2) \tag{3.12}$$

が得られる.

$$\frac{1}{2}[(3.10)-(3.12)]:\quad A_{-1}+A_1=\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n+1}+O(\varepsilon^2), \tag{3.13}$$

$$\frac{1}{2}[(3.10)+(3.12)]:\quad A_0=\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}+O(\varepsilon^2), \tag{3.14}$$

$$\frac{1}{2}[(3.13)+(3.9)]:\quad A_{-1}=\frac{1}{2}\left(b_1+\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n+1}\right)+O(\varepsilon^2), \tag{3.15}$$

$$\frac{1}{2}[(3.13)-(3.9)]:\quad A_1=-\frac{1}{2}\left(b_1-\sum_{n=2}^{\infty}b_{2n+1}\right)+O(\varepsilon^2), \tag{3.16}$$

$$\frac{1}{2}[(3.8)+(3.11)]:\quad B_{-1}=\frac{1}{2}\left(a_1+\sum_{n=2}^{\infty}na_n\right)+O(\varepsilon^2), \tag{3.17}$$

$$\frac{1}{2}[(3.8)-(3.11)]:\quad B_1=\frac{1}{2}\left(a_1-\sum_{n=2}^{\infty}na_n\right)+O(\varepsilon^2). \tag{3.18}$$

これで完全に A_n, B_n が定つた. 次にこれらの値を (2.13) に入れると

$$\sin\delta=-8\sum_{n=1}^{\infty}na_{2n}+O(\varepsilon^2). \tag{3.19}$$

これによつて Z 面に於ける前緣の對應點が確定する.

§4. 逐次近似

A_n, B_n の第一近似値は上に得た通りであるが, これを嚴密に定めるには逐次近似を行へばよい. いま A_n, B_n, δ の第 $(\nu-1)$ 近似 $A_n^{(\nu-1)}, B_n^{(\nu-1)}, \delta_{\nu-1}$ が既に得られたものとする. これを (2.8) に入れると

$$x=x_{\nu-1}(\theta)+O(\varepsilon^\nu). \tag{4.1}$$

但し

$$x_{\nu-1}(\theta)=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)+A_0^{(\nu-1)}+(A_{-1}^{(\nu-1)}+A_1^{(\nu-1)})\cos\theta-(B_{-1}^{(\nu-1)}-B_1^{(\nu-1)})\sin\theta$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}(A_n^{(\nu-1)}\cos n\theta+B_n^{(\nu-1)}\sin n\theta). \tag{4.2}$$

故に

$$y=g(x)=g[x_{\nu-1}(\theta)+O(\varepsilon^\nu)]=g[x_{\nu-1}(\theta)]+g'[x_{\nu-1}(\theta)]O(\varepsilon^\nu)+\cdots$$
$$=g[x_{\nu-1}(\theta)]+O(\varepsilon^{\nu+1}),\qquad (\because\ g'[x_{\nu-1}(\theta)]=O(\varepsilon)). \tag{4.3}$$

こゝに $y_\nu(\theta)=g[x_{\nu-1}(\theta)]$ は θ に關する知れた函數であるからフーリエ級數に展用することができる:

$$y_\nu(\theta)=a_0^{(\nu)}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{(\nu)}\cos n\theta+b_n^{(\nu)}\sin n\theta). \tag{4.4}$$

4.3), (4.4) を (2.9) と比較すれば

$$A_n=-b_n^{(\nu)}+O(\varepsilon^{\nu+1}),\quad B_n=a_n^{(\nu)}+O(\varepsilon^{\nu+1}),\quad (n\geqq 2) \tag{4.5}$$
$$B_0=a_0^{(\nu)}+O(\varepsilon^{\nu+1}), \tag{4.6}$$
$$B_{-1}+B_1=a_1^{(\nu)}+O(\varepsilon^{\nu+1}), \tag{4.7}$$
$$A_{-1}-A_1=b_1^{(\nu)}+O(\varepsilon^{\nu+1}). \tag{4.8}$$

次に (4.5) を考慮して (2.10), (2.11) を書きかへれば

$$A_0+(A_{-1}+A_1)=-\sum_{n=2}^{\infty}A_n=\sum_{n=2}^{\infty}b_n^{(\nu)}+O(\varepsilon^{\nu+1}), \tag{4.9}$$

$$B_{-1}-B_1=\sum_{n=2}^{\infty}nB_n=\sum_{n=2}^{\infty}na_n^{(\nu)}+O(\varepsilon^{\nu+1}). \tag{4.10}$$

(4.7), (4.10) より $B_{-1}^{(\nu)}, B_1^{(\nu)}$ が求まる. 次に (2.13) より

$$\left(\frac{1}{2}+A_{-1}+A_1\right)\sin\delta=-(B_{-1}-B_1)\cos\delta+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(A_n\sin n\delta-B_n\cos n\delta), \tag{4.11}$$

さて　$A_{-1}+A_1=A_{-1}^{(\nu-1)}+A_1^{(\nu-1)}+O(\varepsilon^\nu),\quad \delta=\delta_{\nu-1}+O(\varepsilon^\nu).$

また (3.2) より $\sin\delta_{\nu-1}=O(\varepsilon)$. 故に

$$\cos\delta=\cos(\delta_{\nu-1}+O(\varepsilon^\nu))=\cos\delta_{\nu-1}-\sin\delta_{\nu-1}\cdot O(\varepsilon^\nu)+\cdots=\cos\delta_{\nu-1}+O(\varepsilon^{\nu+1}).$$

故に
$$(A_{-1}+A_1)\sin\delta=(A_{-1}^{(\nu-1)}+A_1^{(\nu-1)})\sin\delta+O(\varepsilon^{\nu+1}),$$
$$(B_{-1}-B_1)\cos\delta=(B_{-1}^{(\nu)}-B_1^{(\nu)})\cos\delta_{\nu-1}+O(\varepsilon^{\nu+1}).$$

從つて (4.11) は次のやうに書ける:

$$\left(\frac{1}{2}+A_{-1}^{(\nu-1)}+A_1^{(\nu-1)}\right)\sin\delta$$
$$=-(B_{-1}^{(\nu)}-B_1^{(\nu)})\cos\delta_{\nu-1}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(A_n^{(\nu)}\sin n\delta_{\nu-1}-B_n^{(\nu)}\cos n\delta_{\nu-1})+O(\varepsilon^{\nu+1}). \tag{4.12}$$

これより δ_ν が求まる. 次に (4.9) を考慮して (2.12) を書きかへれば

$$(1+\cos\delta_\nu)(A_{-1}+A_1)=-\sum_{n=2}^{\infty}A_n^{(\nu)}+\frac{1}{2}(1-\cos\delta_\nu)+(B_{-1}^{(\nu)}-B_1^{(\nu)})\sin\delta_\nu$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(A_n^{(\nu)}\cos n\delta_\nu+B_n^{(\nu)}\sin n\delta_\nu)+O(\varepsilon^{\nu+1}). \tag{4.13}$$

これより $A_{-1}^{(\nu)}+A_1^{(\nu)}$ が定まり, 從つて (4.8) と組合はせて $A_{-1}^{(\nu)}, A_1^{(\nu)}$ が別々に求められる. 更に (4.9) を用ゐて $A_0^{(\nu)}$ が定まる. これで第 ν 近似が完結した.

上の說明から明かなやうに, 逐次近似の各段階に於て計算の手數は全く同樣である. 最も勞力を要するのは (4.2) に於ける $x_{\nu-1}(\theta)$ の計算と (4.4) に於ける調和分析であらう.

(注意) この近似法では條件式 (2.10), (2.11) は精密に滿されてゐる. これに反して (2.12), (2.13) には $O(\varepsilon^{\nu+1})$ の誤差が伴つてゐる. (2.12), (3.13) までも嚴密に滿足するには, 例へば次

のやうな逐次代入法を行へばよい. (4.12) から得られる δ と (4.13) から得られる $A_{-1}+A_1$ を改めて (4.12) の $\delta_{\nu-1}, A_{-1}^{(\nu-1)}+A_1^{(\nu-1)}$ の代りに用ゐると一層正確な δ_ν が得られる. これを (4.13) に代入して $A_{-1}^{(\nu)}+A_1^{(\nu)}$ の一層正確な値を求め, それらを再び (4.12) に於ける $\delta_{\nu-1}, A_{-1}^{(\nu-1)}+A_1^{(\nu-1)}$ に代用する・・・・ 以下この操作をくり返す. しかし實際上はその必要はなく, 上の近似法で充分であらう.

なほ, 容易に確められる通り, (4.13) に於て δ_ν の代りに $\delta_{\nu-1}$ としても誤差はやはり $O(\varepsilon^{\nu+1})$ である. §3 で示した第一近似 ($\nu=1$) では $\delta_\nu=\delta_1$ の代りに $\delta_{\nu-1}=\delta_0=0$ を用ゐたのである. しかし第一近似では滿足できない場合には, (4.13) の如く δ_ν を用ゐる方が無論近似度に於て勝るであらう.

§5. 翼型の空氣力學的性能

翼型の空氣力學的性能を表はす諸量は守屋教授の論文にも掲げられてゐるが, 便宜上, 次に簡單に記すことにする.

z 面の翼型: $y=g(x)$ を過る一樣な流れは

$$z=c_{-1}Z+c_0+\frac{c_1}{Z}+\frac{c_2}{Z^2}+\cdots\cdot \tag{5.1}$$

によつて Z 面の單位圓: $Z=e^{i\theta}$ を過る一樣な流れに等角寫像される. z 面に於ける一般流の速度を U, 實軸となす角度を α とし, Z 面に於ける對應量を U', α' とすれば, 複素速度ポテンシャルは

$$f=U'\left(e^{-i\alpha'}Z+\frac{e^{i\alpha'}}{Z}\right)-\frac{\Gamma}{2\pi i}\log Z \tag{5.2}$$

で與へられる. 但し Γ は翼型の周りの循環を表はす. (5.2) より

$$\frac{df}{dZ}=U'\left(e^{-i\alpha'}-\frac{e^{i\alpha'}}{Z^2}\right)-\frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{Z}. \tag{5.3}$$

故に

$$Ue^{-i\alpha}=\left(\frac{df}{dz}\right)_{z=\infty}=\left(\frac{df}{dZ}\bigg/\frac{dz}{dZ}\right)_{Z=\infty}=U'e^{-i\alpha'}/c_{-1}. \tag{5.4}$$

いま

$$c_{-1}=\frac{1}{4}+C_{-1}=\left(\frac{1}{4}+A_{-1}\right)+iB_{-1}=be^{i\beta}, \tag{5.5}$$

すなはち

$$b\cos\beta=\frac{1}{4}+A_{-1},\quad b\sin\beta=B_{-1} \tag{5.6}$$

とおけば, (5.4) より

$$U'=bU,\qquad \alpha'=\alpha-\beta. \tag{5.7}$$

次に, $Z=1$ は後縁に相當するから Joukowski の假定を用ゐるならば澱み點でなければならない. すなはち $(df/dZ)_{Z=1}=0$. これより容易に

$$\Gamma=4\pi U'\sin\alpha'=4\pi bU\sin(\alpha-\beta) \tag{5.8}$$

なる關係が得られる. 故に Kutta-Joukowski の定理により揚力 L は

$$L=\rho\Gamma U=4\pi\rho U^2b\sin(\alpha-\beta)=4\pi\rho U^2(b\cos\beta\sin\alpha-b\sin\beta\cos\alpha)$$
$$=\pi\rho U^2\{(1+4A_{-1})\sin\alpha-4B_{-1}\cos\alpha\}.$$

或は，揚力係數 $C_L=L\Big/\frac{1}{2}\rho U^2$ (弦長は 1) を用ゐて表はせば

$$C_L=2\pi\{(1+4A_{-1})\sin\alpha-4B_{-1}\cos\alpha\}. \tag{5.9}$$

從つて無揚力角を α_0 とすれば

$$\alpha_0=\beta=\tan^{-1}\frac{4B_{-1}}{1+4A_{-1}}. \tag{5.10}$$

また，いはゆる理想迎角 α_I は前緣：$Z=e^{i(\pi+\delta)}$ が澱み點となる樣な迎角として定義されるから

$$\alpha_I=\delta/2+\beta. \tag{5.11}$$

次に，任意點 z_0 の周りのモーメントは周知の如く

$$M_{z_0}=-2\pi\rho U^2\,\Im(k_1e^{-i\alpha}) \tag{5.12}$$

で與へられる．但し k_1 は f/U を $(z-z_0)^{-1}$ の昇冪級數に展開するときの $(z-z_0)^{-1}$ の係數である．いまモーメント係數 $C_{mz_0}=M_{z_0}\Big/\frac{1}{2}\rho U^2$ を用ゐると

$$C_{mz_0}=-4\pi\Im(k_1e^{-i\alpha}). \tag{5.13}$$

(5.1) より

$$Z=\frac{1}{c_{-1}}(z-z_0)+\frac{z_0-c_0}{c_{-1}}-\frac{c_1}{z-z_0}+O\left(\frac{1}{(z-z_0)^2}\right).$$

故に

$$\frac{1}{Z}=\frac{c_{-1}}{z-z_0}+O\left(\frac{1}{(z-z_0)^2}\right),\quad \log Z=\log\frac{z-z_0}{c_{-1}}+\frac{z_0-c_0}{z-z_0}+O\left(\frac{1}{(z-z_0)^2}\right).$$

これらを (5.2) に入れると容易に

$$k_1U=U'\{(z_0-c_0+c_{-1})e^{i\alpha'}-(z_0-c_0+c_1)e^{-i\alpha'}\}.$$

故に，(5.7) を考慮して

$$\Im(k_1e^{-i\alpha})=b\Im\{(z_0-c_0+c_{-1})e^{-i\beta}-(z_0-c_0+c_1)e^{i(2\alpha-\beta)}\}. \tag{5.14}$$

括弧內の第一項は迎角 α を含まないことに注意し，第二項を 0 にするやうに

$$z_0=c_0-c_1=x_F+iy_F$$

すなはち

$$x_F=\frac{1}{4}+A_0-A_1,\quad y_F=B_0-B_1 \tag{5.15}$$

とおけば，(5.12) で與へられるモーメントは迎角に關係しない．すなはち (x_F,y_F) は翼型の空氣力學的中心に他ならない．そしてその周りのモーメント係數すなはち零揚力のモーメント係數は (5.13), (5.14), (5.6) により次の如く與へられる：

$$C_{mF}=\pi\{(1+4A_{-1})B_1-(1+4A_1)B_{-1}\}. \tag{5.16}$$

最後に翼型表面の速度 v は (5.3), (5.8) を用ゐて

$$v=\left|\frac{df}{dz}\right|_{y=g(x)}=\left|\frac{df}{dZ}\Big/\frac{dz}{dZ}\right|_{Z=e^{i\theta}}=2U'\frac{|\sin(\theta-\alpha')+\sin\alpha'|}{\sqrt{(dx/d\theta)^2+(dy/d\theta)^2}}.$$

故に (5.7) により

$$\left(\frac{v}{U}\right)^2=4b^2\frac{\{\sin(\theta-\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}^2}{(dx/d\theta)^2+(dy/d\theta)^2}. \tag{5.17}$$

但し b,β は (5.6) から定まり，$dx/d\theta$, $dy/d\theta$ は (2.8), (2.9) により次式で與へられる：

$$\frac{dx}{d\theta}=-\frac{1}{2}\sin\theta-(A_{-1}+A_1)\sin\theta-(B_{-1}-B_1)\cos\theta-\sum_{n=2}^{\infty}n(-A_n\sin n\theta+B_n\cos n\theta), \tag{5.18}$$

$$\frac{dy}{d\theta}=-(B_{-1}+B_1)\sin\theta+(A_{-1}-A_1)\cos\theta-\sum_{n=2}^{\infty}n(B_n\sin n\theta+A_n\cos n\theta). \tag{5.19}$$

§6. 第一近似の公式

前節の諸公式は嚴密であるが，A_n, B_n が小さいとして第一近似で滿足できる場合には次のやうに簡單化される．

$$C_L=2\pi\left\{\left(1+2\sum_{n=0}^{\infty}b_{2n+1}\right)\sin\alpha-2\sum_{n=1}^{\infty}na_n\cos\alpha\right\}, \tag{6.1}$$

$$\alpha_0=\tan^{-1}\frac{2\sum_{n=1}^{\infty}na_n}{1+2\sum_{n=0}^{\infty}b_{2n+1}}\fallingdotseq 2\sum_{n=1}^{\infty}na_n, \tag{6.2}$$

$$\alpha_{\mathrm{I}}=-\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(8\sum_{n=1}^{\infty}na_{2n}\right)+\alpha_0\fallingdotseq 2\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)a_{2n+1}, \tag{6.3}$$

$$x_F=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}+\frac{1}{2}b_1-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n+1}, \tag{6.4}$$

$$y_F=a_0-\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}na_n, \tag{6.5}$$

$$C_{mF}=\pi\left\{2a_1b_1-\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n+1}\right)\sum_{n=2}^{\infty}na_n\right\}. \tag{6.6}$$

§7. 守屋．森口兩氏の方法との比較

次に本論文の方法と守屋，森口兩氏の方法との比較を試みよう．守屋，森口兩氏の方法を通じて最も重要な點は A_0, A_{-1}, B_{-1} を決定するのに共軛フーリエ級數或はそれから導かれる積分方程式を用ゐる點にあるものと考へられる．いま (2.8), (2.9) の共軛フーリエ級數を作れば

$$x^*(\theta)=-B_{-1}\cos\theta-\left(\frac{1}{2}+A_{-1}\right)\sin\theta+\sum_{n=1}^{\infty}(B_n\cos n\theta-A_n\sin n\theta), \tag{7.1}$$

$$y^*(\theta)=A_{-1}\cos\theta-B_{-1}\sin\theta-\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta). \tag{7.2}$$

故に

$$x(\theta)+y^*(\theta)=2\left(\frac{1}{4}+A_{-1}\right)\cos\theta-2B_{-1}\sin\theta+\frac{1}{2}+A_0, \tag{7.3}$$

$$y(\theta)-x^*(\theta)=2\left(\frac{1}{4}+A_{-1}\right)\sin\theta+2B_{-1}\cos\theta+B_0. \tag{7.4}$$

兩氏の方法では第一近似に於て A_0, A_{-1}, B_{-1} を定めるために上式の左邊に於て

$$x(\theta)=\frac{1}{2}(1+\cos\theta),\quad y(\theta)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta),$$

$$x^*(\theta)=-\frac{1}{2}\sin\theta,\qquad y^*(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos n\theta-a_n\sin n\theta)$$

なる近似を行ふのである．さて $x(\theta)+y^*(\theta)$ を考へるに，もし $y^*(\theta)$ に對して a_n, b_n 程度の小さな量を殘すならば，$x(\theta)$ に對する嚴密な式 (2.8) を見れば明かな通り $x(\theta)$ に就ても同じ程度の小さな量を當然考慮に入れるべきであらう．從つて $x(\theta), x^*(\theta)$ に對する上記の近似式

は精度に於て幾分不滿足な點があるものと考へられる．つまりこの方法では第 0 近似（x に對して）と第 1 近似（y に對して）とを混用することになる．兩氏の方法で第 ν 近似に進む場合にも，上と同樣に第 $(\nu-1)$ 近似と第 ν 近似を混用することは免れない．本論文の方法はこの點に於て幾分合理的ではないかと考へられる．

なほ前節の近似公式を守屋教授の近似公式と比較するに，$b_n=0$ 即ち厚みの無い場合を除いては多少相違が見られる．*) 普通の翼型の場合その差はあまり大きくないと想像されるが，上に述べた理由によつて本論文の近似公式の方が稍ゝ優れた精度をもつものと期待されよう．

§8. 共軛フーリエ級數

既に述べた通り A_0, A_{-1}, B_{-1} の決定には共軛フーリエ級數或はこれより導かれる積分方程式は何等必要缺くべからざる役割を演ずるものではない．しかし例へば積分方程式を用ゐる森口氏の方法に本論文の近似法を適用することは勿論可能で，これによつて得られる結果は §4 で述べたものと完全に一致する．これを次に示さう．

計算の基礎は (2.1) 及び (7.3)，すなはち

$$y=g(x), \qquad 0\leqq x\leqq 1, \tag{8.1}$$

$$x(\theta)+y^*(\theta)=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)+A_0+2(A_{-1}\cos\theta-B_{-1}\sin\theta), \tag{8.2}$$

である．こゝに $y^*(\theta)$ は $y(\theta)$ の共軛フーリエ級數で，$y(\theta)$ の $\sin n\theta$ の係數を $\cos n\theta$ の係數とし，$\cos n\theta$ の係數の符號を變へたものを $\sin n\theta$ の係數として得られるフーリエ級數を意味する．これはまた周知の如く

$$y^*(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{y(\varphi)-y(\theta)\}\cot\frac{\varphi-\theta}{2}d\varphi \tag{8.3}$$

のやうに表はすこともできる．**)

さて

$$\text{後緣}\quad \theta=0\,; \qquad x=1,\quad \frac{dx}{d\theta}=0,$$

$$\text{前緣}\quad \theta=\pi+\delta\,; \quad x=0,\quad \frac{dx}{d\theta}=0$$

なる條件を (8.2) に適用すれば

$$y^*(0)=A_0+2A_{-1}, \tag{8.4}$$

$$y^{*\prime}(0)=-2B_{-1}, \tag{8.5}$$

$$y^*(\pi+\delta)=\frac{1}{2}(1-\cos\delta)+A_0+2(-A_{-1}\cos\delta+B_{-1}\sin\delta), \tag{8.6}$$

$$y^{*\prime}(\pi+\delta)=\frac{1}{2}\sin\delta+2(A_{-1}\sin\delta+B_{-1}\cos\delta). \tag{8.7}$$

---

*) 例へば揚力係數として (6.1) 式を用ゐるならば，守屋教授の公式に基礎をおかれる長谷川氏の研究は幾分變更を見ることにならう．
長谷川龍雄：後緣半徑を有する翼型に就きて，本誌 9, 267 頁，昭和 17 年．

**) 普通 $y^*(\theta)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}y(\varphi)\cot\frac{\varphi-\theta}{2}d\varphi$ と書かれるが，被積分函數は $\varphi=\theta$ に一位の極をもつから，積分は Cauchy の主値をとるものと規定しなければならない．(8.3) のやうに書き表はせば $\varphi=\theta$ は普通點となるからその懸念はない．

いま y を ε の程度の小さな量と假定して，聯立積分方程式 (8.1), (8.2), (8.3) を境界條件 (8.4)—(8.7) の下にとくことを考へる．(8.3) より $y^*(\theta)$ も $O(\varepsilon)$，從つて (8.4)—(8.7) より A_0, A_{-1}, B_{-1}, δ も $O(\varepsilon)$ である．各の量の第 ν 近似には添數 ν をつけて表はせば

$$x(\theta)=x_\nu(\theta)+O(\varepsilon^{\nu+1}), \quad y(\theta)=y_\nu(\theta)+O(\varepsilon^{\nu+1}),$$

$$A_0=A_0^{(\nu)}+O(\varepsilon^{\nu+1}), \quad A_{-1}=A_{-1}^{(\nu)}+O(\varepsilon^{\nu+1}), \quad B_{-1}=B_{-1}^{(\nu)}+O(\varepsilon^{\nu+1}), \quad \delta=\delta_\nu+O(\varepsilon^{\nu+1}).$$

逐次近似を行ふには，第 0 近似として (8.2) から得られる

$$x_0(\theta)=\frac{1}{2}(1+\cos\theta), \quad y_0(\theta)=0 \tag{8.8}$$

より出發して

$$y_\nu(\theta)=g[x_{\nu-1}(\theta)], \tag{8.9}$$

$$x_\nu(\theta)=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)+A_0^{(\nu)}+2(A_{-1}^{(\nu)}\cos\theta-B_{-1}^{(\nu)}\sin\theta)-y_\nu^*(\theta), \tag{8.10}$$

の方式により第 ν 近似を求めればよい．こゝに $A_0^{(\nu)}, A_{-1}^{(\nu)}, B_{-1}^{(\nu)}, \delta_\nu$ は (8.4)—(8.7) により次の如く定められる：

$$B_{-1}^{(\nu)}=-\frac{1}{2}y_\nu^{*\prime}(0), \tag{8.11}$$

$$\sin\delta_\nu=\{2y_\nu^{*\prime}(\pi+\delta_{\nu-1})-4B_{-1}^{(\nu)}\cos\delta_{\nu-1}\}/(1+4A_{-1}^{(\nu-1)}), \tag{8.12}$$

$$A_{-1}^{(\nu)}=\frac{1}{2(1+\cos\delta_\nu)}\left\{y_\nu^*(0)-y_\nu^*(\pi+\delta_\nu)+y_\nu^{*\prime}(0)\sin\delta_\nu+\frac{1}{2}(1-\cos\delta_\nu)\right\}, \tag{8.13}$$

$$A_0^{(\nu)}=y_\nu^*(0)-2A_{-1}^{(\nu)}. \tag{8.14}$$

(§4 の注意はこゝでもそのまゝあてはまる!)

$y^*(\theta)$ に對してフーリエ展開式を用ゐれば §4 の結果が直ちに得られることは容易に確められる．また $y^*(\theta)$ の計算に (8.3) を用ゐるならば，(4.4) に於ける調和分析（と (4.2) に於ける調和合成！との二度の手數）を行ふことなく單に數値積分のみによつて $x(\theta)$, $y(\theta)$, A_0, A_{-1}, B_{-1}, δ を求めることができる．*) これによつて翼型表面の壓力分布，揚力係數を知り得ることは §5 の公式から明かであらう．なほモーメントに關する量には，B_0, A_1, B_1 の知識が必要である．これらを求めるには，(2.9) により

$$B_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}y(\theta)d\theta,$$

$$A_1=A_{-1}-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}y(\theta)\sin\theta\,d\theta, \quad B_1=-B_{-1}+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}y(\theta)\cos\theta\,d\theta$$

として數値積分を行へばよい．

§9. むすび

以上，z 面に於ける任意翼型の外部の領域を Z 面上の單位圓外の領域に寫像する正則函數：

$$z=c_{-1}Z+c_0+\frac{c_1}{Z}+\frac{c_2}{Z^2}+\cdots\cdots$$

を見出すための逐次近似的な一方法を述べた．係數 $c_{-1}, c_0, c_1, \cdots\cdots$ の決定は §4 に示した通り調和分析を用ゐることによつて遂行される．その際フーリエ級數を有限項に止めることは，

*) 森口氏の方法の特長は實はこの點—調和分析と調和合成の二重の手間を一回の數値積分で代用する—にあるものと考へられる．

結局，與へられた翼型を"von Mises の翼型"で近似することに相當する．そのために起る誤差は普通極く僅かなものと想像される．係數 $c_{-1}, c_0, c_1, \cdots\cdots$ が定まれば，§5 の諸公式により翼型の空氣力學的性能は容易に求められる．なほ，必要ならば，流體內の任意の點に於ける流速を計算することも敢て困難ではなからう．

普通要求せられるのは翼表面上の壓力分布——これより揚力，モーメント等も計算できる——のみで，寫像函數そのものはあまり必要ではない．そのためには (5.17) の示す如く．$x(\theta)$, $y(\theta)$ を知ればよく，前節の後半で述べた數值積分の方法が有利に使用されよう．實際に當つて調和分析法と數值積分法の何れを採用すべきか，また，逐次近似はどの程度まで進めるべきかは重要な問題であるが，これは適當な實例に就て數值計算を行ふことにより判定されるべきものと考へられる．この論文では逐次近似の方式を示すに止め，實例計算は後の機會に讓ることにする．

最後に，第一近似のみで滿足するやうな場合には，本論文の方式による計算値が從來のものに比べて幾分高い精度をもつのではないかと思はれる．